

ОСНОВЫ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

ОСНОВЫ
ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

В АВИАЦИОННОЙ
И РАКЕТНО-
КОСМИЧЕСКОЙ
ТЕХНИКЕ

ОСНОВЫ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

В АВИАЦИОННОЙ И РАКЕТНО- КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКЕ

Под редакцией заслуженного деятеля науки и техники РСФСР
д-ра техн. наук, проф. *В. К. Кошкина*

*Допущено
Министерством высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов авиационных специальностей
высших учебных заведений*



Москва
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1975

Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М., «Машиностроение», 1975, с. 624.

На основе данных, опубликованных в советской и иностранной печати, в книге рассмотрены основные вопросы теплопередачи применительно к задачам, стоящим перед современной авиационной и ракетно-космической техникой. Освещены проблемы теплообмена при больших скоростях и высоких температурах газового потока; изложены гидродинамические и иные методы тепловой защиты поверхностей, вопросы аэродинамического нагрева летательных аппаратов, теплообмена в разреженных газах и энергетических ядерных реакторах, приведен расчет холодильников-излучателей для космических установок.

Книга предназначена для студентов авиационных вузов и факультетов и может быть также использована инженерно-техническими работниками и аспирантами, специализирующимися в области современных проблем теплообмена в авиационной и космической технике. Табл. 11. Ил. 342. Список лит. 161 назв.

Авторы книги: *АВДУЕВСКИЙ В. С., ГАЛИЦЕЙСКИЙ Б. М., ГЛЕБОВ Г. А., ДАНИЛОВ Ю. И., КАЛИНИН Э. К., КОШКИН В. К., КОШМАРОВ Ю. А., МИХАЙЛОВА М. М., МИХАЙЛОВА Т. В., МИХЕЕВ Ю. С., РЫЖОВ Ю. А., СОЛНЦЕВ В. П.*

Рецензенты: **акад. А. М. ЛЮЛЬКА.**
Кафедра теоретических основ теплотехники **КАИ.**
Научный редактор инж. **М. А. Колосов**

31808—207 207-75
038(01)-75

ПРЕДИСЛОВИЕ

По теплопередаче имеется большое количество учебников и учебных пособий, но ни один из них не отражает специфических проблем современной авиационной и ракетной техники, где роль этой дисциплины особенно велика.

Данная книга представляет собой изложение учебного курса теплопередачи применительно к задачам авиационной и ракетно-космической техники.

Задачами курса теплопередачи являются: ознакомление студентов с современным состоянием теории теплообмена; изучение основных законов, управляющих процессами теплообмена; развитие навыков применения законов теплообмена к решению практических задач, встречающихся в современной инженерной практике и, в частности, в авиационной и космической технике.

Для расширения кругозора студентов по современным проблемам теплопередачи в конце каждой главы приводится рекомендуемая литература.

Учебник составлен коллективом авторов.

Введение, гл. I и II написали проф., д-р техн. наук В. К. Кошкин, гл. III — проф., д-р техн. наук Ю. А. Кошмаров и доцент, канд. техн. наук М. М. Михайлова, гл. IV, V, VII — проф., д-р техн. наук Э. К. Калинин, гл. VI — проф., д-р техн. наук Ю. А. Рыжов, гл. VIII — доцент, канд. техн. наук Г. А. Глебов и доцент, канд. техн. наук Ю. С. Михеев, гл. IX — проф., д-р техн. наук Э. К. Калинин, а разд. 9.5 — доцент, канд. техн. наук Ю. И. Данилов, гл. X написали доцент, кандидаты техн. наук Ю. С. Михеев и Т. В. Михайлова, гл. XI, XII, XIII, XV — чл.-кор. АН СССР, д-р техн. наук, проф. В. С. Авдудевский, гл. XIV, XVIII — проф., чл.-кор. АН СССР, д-р техн. наук В. С. Авдудевский и доцент, канд. техн. наук Г. А. Глебов, гл. XIX — чл.-кор. АН СССР, д-р техн. наук, проф. В. С. Авдудевский, а разд. 19.6 — доцент, канд. техн. наук Б. М. Галицейский, гл. XVI — доцент, канд. техн. наук В. П. Солнцев и гл. XVII — проф., д-р техн. наук Ю. А. Кошмаров.

ВВЕДЕНИЕ

Теорией теплопередачи или теплообмена называется наука, изучающая процессы переноса тепла в пространстве с неоднородным температурным полем. Процессы теплообмена возникают между различными телами или отдельными частями одного и того же тела при наличии разности температур.

Наука о теплообмене насчитывает несколько столетий, но настоящего расцвета она достигла лишь в XX веке, найдя широкое применение при решении назревших практических задач техники. Из раздела теоретической физики учение о теплообмене превратилось в самостоятельную научно-техническую дисциплину.

Особенно сложные и важные проблемы стоят в области изучения теплообмена в современной авиационной, ракетной и космической технике. При сверхзвуковых скоростях полета значительно изменяются условия теплопередачи в отдельных элементах конструкции летательного аппарата. При этом существенное значение приобретает вопрос о необходимости его охлаждения или защиты от аэродинамического нагрева, возникающего вследствие трения между поверхностью летательного аппарата и набегающим потоком воздуха или потоком каких-либо других газов, составляющих атмосферы планет.

Не менее важные и сложные проблемы теплообмена возникают при конструировании современных авиационных и ракетных двигателей. Высокая напряженность в тепловом отношении реактивных двигателей, использование криогенных топлив и многие другие важные вопросы требуют от современного конструктора этих двигателей умения произвести сложный инженерный расчет теплообмена в них и их агрегатах.

Кроме того, на теории теплопередачи базируются расчеты тепловых режимов внешних поверхностей космических летательных аппаратов и искусственных спутников Земли, а также тепловые расчеты ядерных энергетических установок.

Основоположником современной теории теплоты является великий русский ученый М. В. Ломоносов (1711—1765). В своей диссертации «Размышления о причине теплоты и холода», написанной в 1747—1748 гг. и напечатанной в 1750 г., М. В. Ломоносов четко сформулировал механическую теорию тепла и кинетическую теорию материи. Ему принадлежит заслуга установления закона сохранения и превращения движущейся материи, из которого естественно вытекает закон сохранения и превращения энергии.

Русский академик Г. В. Рихман (1711—1758) провел ряд экспериментальных работ по теплопередаче и калориметрии; наблюдая за охлаждением тел, он правильно подметил связь между основными характеристиками процесса; к таким же результатам значительно позже пришли Дюлонг и Пти во Франции. Рихман разработал метод смещения для определения теплоемкости тел, провел опытное исследование скорости испарения воды, открыл эффект «мокрого термометра», лежащий в основе современного метода определения влажности воздуха.

Французские ученые-математики Ж. Б. Фурье в 1828 г. и затем С. Д. Пуассон в 1835 г. создали основы математической теории теплопроводности.

Основной закон излучения был открыт экспериментально в 1872 г. австрийским ученым И. Стефаном, а теоретически был выведен на основе второго закона термодинамики ученым Л. Больцманом в 1884 г.

Русский ученый Б. Б. Голицын (1862—1916) на основании второго закона термодинамики доказал, что излучение оказывает давление на облучаемую поверхность. Экспериментально это явление (эффект светового давления) блестяще подтвердил в своих опытах П. Н. Лебедев (1866—1912).

Русский ученый В. А. Михельсон (1860—1927) был первым исследователем, поставившим в 1889 г. вопрос об изучении зависимости лучеспускания от температуры и длины волны. В 1893 г. В. Вин, пользуясь методами термодинамики, установил один из законов теплового излучения, связывающий длину волны, соответствующую максимальной интенсивности излучения черного тела, с абсолютной температурой излучающей поверхности.

Немецкий ученый М. Планк в 1902 г. теоретическим путем нашел закон распределения интенсивности теплового излучения по длинам волны при различных температурах, а Р. Э. Ленц (1833—1903) провел в 1869 г. экспериментальные исследования, подтвердившие связь между коэффициентами теплопроводности и электропроводности металлов.

Интересные результаты получил в 1899 г. русский ученый С. Я. Тершин (1863—1921) на основе сравнения теплоотдачи платиновой проволоки, окруженной воздухом и помещенной в вакуум.

Теплоотдача при свободной конвекции оказалась пропорциональной температурному напору в степени $5/4$, что совпадает с современными данными, полученными при исследовании теплоотдачи тел в условиях свободной конвекции окружающего их газа.

Важные исследования в области лучистого теплообмена были проведены В. А. Ульяниным (1863—1931).

Недостаточная разработка механической теории теплоты ограничила возможности ее использования при исследовании различных случаев теплообмена. В связи с этим теория теплообмена строилась на так называемой феноменологической основе, заключающейся в рассмотрении отдельных явлений только лишь как некоторых изолированных закономерностей, могущих быть математически описанными, без раскрытия физической сущности этих явлений. Примером такого феноменологического рассмотрения явлений теплообмена может служить формальная математическая теория теплопроводности, созданная Фурье в 1828 г. и развитая Пуассоном в 1835 г.

Однако успехи физики последних десятилетий и, в частности, изучение ламинарного и турбулентного движения жидкости, позволили глубже выявить физическую сущность процесса теплообмена. Одновременно с этим была разработана общая методология исследования, обработки и обобщения опытных данных, основанная на теории подобия.

Большие успехи в развитии теории теплообмена достигнуты в Советском Союзе.

Идеи, определившие общие принципы построения исследовательской работы, были сформулированы советскими учеными к 1930 г. При их изложении подчеркивалось, что в противоположность старым, феноменологическим, методам исследований, основанным на изучении тепловых машин и аппаратов в целом, в новых работах по теплообмену необходимо не только аналитически, но и экспериментально исследовать детально физические явления, из которых складываются рабочие процессы изучаемых машин и аппаратов.

Конец двадцатых и начало тридцатых годов являются периодом широкого развития учения о теплообмене. Важное значение имели работы чл.-корр. Академии Наук СССР А. А. Радцига (1869—1941), который правильно оценил значение явлений теплообмена в технике

С 20-х годов развитие учения о теплообмене в СССР возглавил академик М. В. Кирпичев, школа которого является ведущей в области разработки теории подобия и ее приложения к вопросам теплопередачи. Этой школой были разработаны оригинальные методы как исследования физической сущности отдельных процессов теплообмена, так и изучения работы тепловых устройств в целом. Многие из работ ученых этой школы определили собой дальнейшее развитие учения о теплообмене. Большое развитие получила теория подобия, разработкой которой у нас занимались еще В. Л. Кирпичев (1845—1913) и А. Федерман.

Советскими учеными были разработаны оригинальные и эффективные способы расчета процесса теплопроводности с помощью теории регулярного режима и метода элементарных балансов; были предложены расчет конвективного теплообмена по методу теплового пограничного слоя, расчеты теплоотдачи при кипении жидкостей и конденсации паров, расчеты различных случаев теплоотдачи и, в частности, теплоотдачи перегретого пара при высоких давлениях, расчеты взаимной облученности тел в задачах радиационного теплообмена. Были разработаны также оригинальные методы экспериментального изучения процессов теплоотдачи и теплопроводности различных жидкостей, газов и водяного пара; определены их коэффициенты теплопроводности при высоких давлениях и температурах, составлены таблицы водяного пара и других рабочих веществ и разработаны нормы теплового расчета паровых котлов. Были разработаны также вопросы нестационарной теплопроводности, исследованы явления теплопередачи в двигателях внутреннего сгорания и теплообмена при изменении агрегатного состояния.

Большое значение в технике приобрели процессы теплообмена в движущихся средах. Как известно, течение любой жидкости или газа может быть разделено на принципиально различные области ламинарного и турбулентного течения. Теплообмен при ламинарном и турбулентном течениях имеет различный характер. Теплообмен в движущейся среде (жидкость или газ) представляет собой конвективный теплообмен, или, короче, конвекцию. При этом перенос тепла осуществляется путем пере-

мещения объемов жидкости или газа, а следовательно, этот вид теплообмена неразрывно связан с переносом самой среды.

Обычно при технических расчетах *теплообмен между потоком жидкости, газа и поверхностью твердого тела называют конвективной теплоотдачей*. Различают свободную (гравитационную) и вынужденную конвекции.

Свободная, или гравитационная, конвекция осуществляется в потоке жидкости или газа в поле массовых сил при наличии разности плотностей; вынужденная конвекция — в потоке жидкости или газа, создаваемом внешними воздействиями (насос, вентилятор, статическая разность давлений и др.).

При промышленном использовании теплопередачи наибольшее значение имеет вынужденная конвекция при турбулентном течении, хотя в приложении к задачам авиации и космонавтики важны оба вида конвективного теплообмена и при ламинарном, и турбулентном течениях. Скорости, возникающие при свободной конвекции, сравнительно малы, так что при наличии вынужденной конвекции, последняя и определяет картину течения и теплообмена.

Теплопередача при вынужденной конвекции в турбулентном потоке зависит от распределения осредненной скорости и пульсаций скорости. Однако эти вопросы исследованы еще далеко не полно.

До начала развития учения о турбулентных течениях жидкостей и газов, т. е. примерно до 1925 г., исследования теплопередачи при турбулентном течении основывались на предположении, сделанном О. Рейнольдсом, о том, что теплопередача и перенос количества движения осуществляются одним и тем же механизмом. Отсюда О. Рейнольдс пришел к выводу, что теплопередача пропорциональна поверхностному трению.

В дальнейшем математический анализ осредненных уравнений движения и теплообмена в турбулентном потоке показал, что эти уравнения оказываются незамкнутыми, так как в них появляются члены, содержащие неизвестные величины пульсаций скорости и температуры. До сих пор не удалось построить теорию, позволяющую вычислить эти величины, не прибегая к эксперименту. Поэтому в настоящее время широкое распространение получили так называемые полуэмпирические теории турбулентности, в основу которых положено предположение о том или ином виде связи между переносимой турбулентными пульсациями величиной (количеством движения, количеством теплоты и т. п.) и осредненными параметрами потока. Основы полуэмпирической теории теплообмена в турбулентном потоке были заложены Л. Прандтлем и К. Тейлором. В трудах академика Л. С. Лейбензона была разработана гидродинамическая теория теплообмена, получившая применение при исследовании теплообмена в трубопроводах.

Современные научно-технические проблемы теплообмена в потоках жидкости, газа и плазмы настоятельно требуют знания законов турбулентного движения для определения как интег-

ральных, так и локальных характеристик. Можно утверждать, что двадцатое столетие выдвинуло как одну из крупнейших научных проблем современности — создание теории турбулентности.

В области теплообмена во второй половине XX столетия наметился также определенный пересмотр взглядов на явления теплообмена и методов их изучения. Так, наряду со среднеинтегральными характеристиками (средними по времени и пространству) наметилось использование мгновенных локальных значений температур, коэффициентов теплоотдачи и трения. Появились теоретические обобщения перехода от среднеинтегральных соотношений к отдельным локальным переменным характеристикам теплообмена.

В работах ряда советских ученых были широко развиты физические основы теплообмена в газовых потоках. Различные виды теплообмена имеют различную физическую сущность. Кроме того, эти процессы представляют собой сложные физические явления, в ряде случаев еще недостаточно изученные. Все это заставляет исследователей в области теплообмена обращаться к непосредственным экспериментам.

В настоящее время основные проблемы расчета различных видов теплообмена (решение сложных задач теплопроводности, расчет ламинарного пограничного слоя, расчет теплообмена при наличии химических реакций и др.) более эффективно, а в ряде случаев — исключительно, решаются с помощью быстродействующих электронно-вычислительных машин (ЭВМ). Применение ЭВМ позволило значительно расширить и углубить теорию теплообмена.

Современное развитие молекулярно-кинетической теории также способствовало развитию ряда разделов учения о теплообмене (переносные свойства газов и газовых смесей при высоких температурах, разреженные газы и др.).

Большие задачи в области теории и практики теплообмена лежат в направлении создания компактных теплообменников различного назначения, начиная от стационарных установок и кончая теплообменниками на космических летательных аппаратах.

Для решения этой важной проблемы требуется применение всего современного аппарата теории теплопередачи, дальнейшая разработка методов интенсификации процессов теплообмена в них и получение надежных данных, обеспечивающих быстрое проектирование теплообменников методами машинного проектирования.

Таким образом курс теплопередачи является одной из важнейших теплотехнических дисциплин, необходимых для современного инженера в области авиационной, ракетной и космической техники.

ГЛАВА I

ВИДЫ ТЕПЛООБМЕНА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. ВИДЫ ТЕПЛООБМЕНА

Понятие теплообмена (теплопередачи) охватывает весь комплекс явлений переноса тепла между телами или между частями одного и того же тела, обусловленных разностью температур. В общем случае перенос тепла представляет собой сложное явление, связанное с различными физическими процессами.

Различают три основных вида теплообмена:

1. Теплопроводность.
2. Конвективный теплообмен.
3. Лучистый теплообмен.

Теплопроводность представляет собою передачу тепла между непосредственно соприкасающимися частями тела. Теплопроводность не связана с макродвижением тел или частей тела и осуществляется путем передачи энергии от одних элементарных частиц тела к другим вследствие микродвижения этих элементарных частиц. Для газов, например, такими частицами являются молекулы.

Молекулы газа в той его части, которая имеет более высокую температуру, обладают большей средней кинетической энергией. При столкновениях молекул газа происходит обмен кинетической энергией, в результате чего тепло передается от более нагретых частей газа к более холодным.

В чистом виде явление теплопроводности наблюдается в твердых телах, в абсолютно неподвижных газах и жидкостях при условии невозможности возникновения в них конвективных токов.

В газах и жидкостях явление теплопроводности обычно сопровождается рядом других физических явлений, например, макродвижением массы газа или диффузией и связанным с этим переносом тепла. Изучение явления теплопроводности в металлах показывает, что в них механизм переноса тепла аналогичен механизму электропроводности.

Согласно современным воззрениям электропроводность металлов связана с наличием в них свободных электронов, а, следовательно, в металлах процесс теплопроводности также связан с движением электронов, которые играют роль передатчиков

тепла. В простейшей теории теплопроводности металлов принимается, что свободные электроны в металлах ведут себя подобно молекулам газа, т. е. перемещаются между атомами твердого тела и осуществляют перенос энергии, а следовательно, передачу тепла теплопроводностью.

Конвективным теплообменом называют процесс переноса тепла в жидкой или газообразной среде с неоднородным распределением температуры и скорости, осуществляемый макроскопическими частями среды при их перемещении. Конвективный теплообмен всегда сопровождается теплопроводностью.

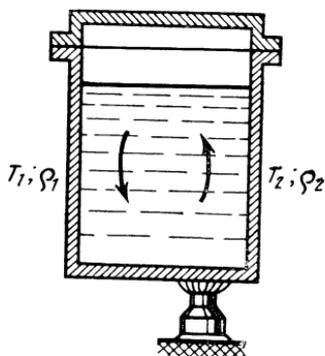


Рис. 1.1. К понятию естественной конвекции

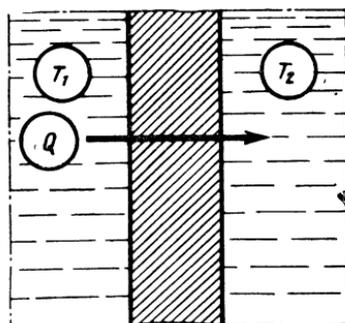


Рис. 1.2. К понятию теплопередачи

В зависимости от причины, вызывающей движение жидкости или газа, различают:

а) конвективный теплообмен при свободном движении среды (свободная, или гравитационная, конвекция);

б) конвективный теплообмен при вынужденном движении среды (вынужденная конвекция).

Свободная конвекция, как уже было сказано, имеет место тогда, когда движение жидкости или газа осуществляется в поле массовых сил при наличии разности плотностей среды в рассматриваемом объеме, что в свою очередь может быть обусловлено неоднородностью температурного поля этого объема. Например, если нагревать сосуд с жидкостью (рис. 1.1), то частицы жидкости, имеющие более высокую температуру ($T_2 > T_1$), вследствие уменьшения их плотности ($\rho_2 < \rho_1$) будут всплывать, т. е. вытесняться более холодными слоями жидкости, и переносить с собой теплоту; в сосуде возникнут конвективные токи. Очевидно, интенсивность переноса тепла при прочих равных условиях будет зависеть от коэффициента объемного расширения, плотности и вязкости среды.

Вынужденная конвекция имеет место тогда, когда движение жидкости или газа вызвано внешними причинами (на-

сосом, компрессором, вентилятором, движением летательного аппарата в воздухе и т. д.). В одной и той же среде теплообмен при вынужденной конвекции протекает значительно интенсивнее, чем при свободной конвекции, и поэтому в технике при решении вопросов, связанных с необходимостью передачи больших количеств тепла, используется вынужденная конвекция.

Лучистым теплообменом называется перенос тепла излучением, обусловленный способностью нагретого тела превращать часть принадлежащей ему внутренней энергии в лучистую или в энергию электромагнитных колебаний, испускаемых нагретым телом. Встречая на своем пути другое тело (вещество) тепловые лучи частично поглощаются, и их энергия снова превращается в теплоту, а частично отражаются и проходят сквозь тело.

Тепловое излучение подчиняется основным законам распространения света, т. е. законам отражения, преломления и поглощения. В чистом виде лучистый теплообмен имеет место лишь в условиях глубокого вакуума, например, между поверхностью летательного аппарата, совершающего полет в дальнем космосе, и окружающими его пространством и телами. Чаще же мы имеем дело со всеми тремя видами теплообмена одновременно, т. е. на практике обычно имеет место сложный теплообмен. Однако комплексное математическое изучение закономерностей, управляющих сложным теплообменом, затруднено, поэтому часто предварительно изучают каждый вид теплообмена в отдельности, а затем переходят к расчету сложного теплообмена (рис. 1.2).

При решении конкретных практических задач количество тепла, переданное теплопроводностью, излучением и конвекцией, может быть весьма различным, поэтому в расчетах часто пренебрегают видами теплообмена, роль которых в рассматриваемом случае незначительна, и весь процесс сводят к основному определяющему виду теплообмена.

Для удобства технических расчетов вводятся понятия о двух видах теплообмена, которые называют теплоотдачей и теплопередачей.

Теплоотдачей называют процесс теплообмена, возникающий между твердым телом и омывающей его жидкой или газообразной средой.

Теплопередачей называется процесс теплообмена, возникающий между жидкими или газообразными средами, разделенными твердой стенкой.

Этим же термином иногда пользуются и в качестве обобщающего, наряду с термином «теплообмен».

1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Процессы теплообмена возникают между телами, если температура их различна. Тело или среда, имеющие более высокую температуру T_1 , называются **теплоотдающими**. Соответст-

венно тело или среда с температурой $T_2 < T_1$ называются **тепловоспринимающими**.

Разность температур $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$, вследствие которой возникает процесс теплообмена называется **температурным напором**.

Количество тепла, проходящее через данную контрольную поверхность в единицу времени, называется **тепловым потоком** и обозначается Q и измеряется в ваттах. Тепловой поток, приходящийся на единицу площади поверхности, называется **плотностью теплового потока** или **удельным тепловым потоком**, обозначается q и имеет размерность Вт/м^2 .

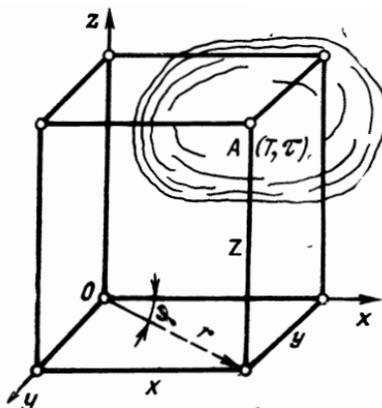


Рис. 1.3. К понятию температурного поля

Всякое физическое явление протекает в пространстве и во времени. Поэтому изучение физического явления может быть сведено к изучению пространственно-временных изменений величин, его характеризующих.

Математическая физика вводит понятие поля физической величины, под которым понимается совокупность мгновенных значений этой величины во всех точках рассматриваемой области. Так, например, совокупность значений температур во всех точках какого-то тела в данный момент времени τ называется температурным полем этого тела.

Температурное поле (рис. 1.3) в декартовой системе координат задается уравнением вида

$$T = f(x, y, z, \tau). \quad (1.1)$$

Здесь T — температура, зависящая от пространственных координат данной точки x, y, z и времени τ .

Температура T является скаляром, поэтому и поле температур — скалярное поле.

Приведенное определение поля справедливо и для векторных физических величин, показывающих не только величину, но и направление (скорость, ускорение, сила). Такое поле называется **векторным полем** величины.

В некоторых задачах теплообмена уравнение температурного поля удобнее записывать в цилиндрической или сферической системе координат. В первом случае уравнение (1.1) имеет вид

$$T = f(r, \varphi, z, \tau). \quad (1.2)$$

Здесь T — температура;

r — расстояние от оси z до данной точки;

φ — угол отклонения радиуса r от выбранного начального направления:

τ — время.

Во втором случае

$$T = f(r, \varphi, \psi, \tau), \quad (1.3)$$

где r — радиус-вектор;

φ и ψ — полярный и азимутальный углы.

Перемещение из какой-либо точки температурного поля в произвольном направлении будет характеризоваться некоторым изменением температуры. Если бесконечно малым приращениям пространственных координат соответствуют бесконечно малые изменения температуры, то такое температурное поле называется непрерывным. В этом случае производная от температуры по любому направлению имеет конечную величину. Если бесконечно малым приращениям хотя бы в одной точке поля отвечает конечное или бесконечно большое изменение температуры, то поле называется разрывным. Последующие рассуждения будут относиться только к непрерывным температурным полям.

Тепловые режимы, характеризующиеся изменением температуры во времени, носят название нестационарных, или неустановившихся. Такому тепловому режиму соответствует нестационарный, или неустановившийся, тепловой поток, изменяющийся по времени. Нестационарным тепловым режимам отвечают нестационарные температурные поля.

Уравнения (1.1) — (1.3) нестационарного температурного поля являются наиболее общими и соответствуют случаям, когда температуры различных точек поля изменяются во времени.

Тепловые режимы, характеризующиеся неизменностью температуры во времени, носят название стационарных, или установившихся. Такому тепловому режиму соответствуют стационарные или установившиеся тепловые потоки, не изменяющиеся по времени. Стационарным тепловым режимам отвечают стационарные температурные поля.

Уравнением стационарного температурного поля будет уравнение вида

$$T = f(x, y, z), \quad (1.4)$$

которое получается благодаря условию неизменности температуры по времени

$$\partial T / \partial \tau = 0.$$

В соответствии с приведенной классификацией тепловых режимов и отвечающих им температурных полей принципиально различают два класса задач теплообмена: нестационарные и стационарные.

Температурные поля, характеризуемые уравнениями (1.1—1.3) называются трехмерными, так как температура T изменяется вдоль каждой из трех пространственных координат. В практике встречаются случаи двухмерного и одномерного поля, где по одной или двум из пространственных координат температура не изменяется.

Так, например, уравнение вида

$$T = f(x, y, \tau) \quad (1.5)$$

есть уравнение нестационарного ($\partial T/\partial \tau \neq 0$) двухмерного ($\partial T/\partial z = 0$) температурного поля. Уравнение вида

$$T = f(r) \quad (1.6)$$

есть уравнение стационарного ($\partial T/\partial \tau = 0$) одномерного ($\partial T/\partial \varphi = \partial T/\partial \psi = 0$) сферически-симметричного температурного поля.

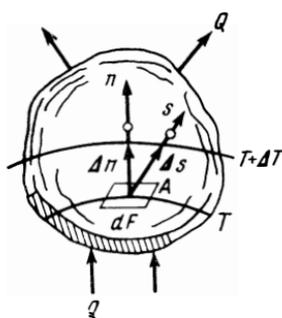
Поверхности, представляющие собой геометрическое место точек с одинаковой температурой, называются изотермическими поверхностями. Таких изотермических поверхностей в рассматриваемой области поля можно провести сколько угодно. Вся совокупность изотермических поверхностей однозначно определяет температурное поле в данный момент времени.

Уже из самого определения изотермической поверхности вытекают два ее свойства, а именно.

1. Изотермические поверхности не могут пересекаться друг с другом, так как линия пересечения характеризовалась бы неоднозначностью температуры, что физически невозможно.

2. Изотермические поверхности не могут обрываться внутри поля — они либо замкнуты, либо обрываются на наружных границах тела.

Рис. 1.4. К понятию температурного градиента



При пересечении изотермических поверхностей какой-либо плоскостью мы получим на ней следы в виде семейства изотерм. Для примера на рис. 2.1 даны такие изотермы как результат пересечения изотермических поверхностей плоскостью xOy . Температуры на изотермах отличаются друг от друга на величину ΔT .

Рассмотрим две весьма близкие изотермические поверхности с температурами T и $T + \Delta T$ (рис. 1.4). Из второго закона термодинамики и свойства изотермической поверхности как геометрического места точек, имеющих одинаковую температуру, следует, что тепловой поток не может распространяться вдоль изотермической поверхности. Перемещаясь из точки A по какому-либо направлению s , пересекающему изотермы, мы обнаружим изменение температуры. При этом наибольшее изменение вели-

чины T на единицу длины будет, очевидно, наблюдаться при перемещении по направлению нормали n к изотермической поверхности.

Предел отношения $\Delta T/\Delta n$ в К/м при $\Delta n \rightarrow 0$ называется температурным градиентом, т. е.

$$\text{grad } T = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta T}{\Delta n} \right] = \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (1.7)$$

Температурный градиент есть вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в точке A . Величина этого вектора определяет приращение температуры на единицу длины нормали к изотермической поверхности. За положительное направление вектора градиента принимают направление возрастания температуры. Для разных точек, лежащих на одной и той же изотермической поверхности, величина температурного градиента неодинакова: она будет больше там, где меньше расстояние Δn между изотермическими поверхностями.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

2.1. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Количественная оценка тепла, проходящего внутри данного тела вследствие теплопроводности, базируется на законе французского ученого Фурье, сформулированном им в 1822 г.

Элементарное количество тепла dQ , проходящее через элемент изотермической поверхности dF за промежуток времени $d\tau$, пропорционально температурному градиенту $\partial T/\partial n$:

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF d\tau. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) представляет основной закон теплопроводности Фурье, где коэффициент пропорциональности λ называется коэффициентом теплопроводности; знак минус в правой части уравнения стоит потому, что в направлении распространения тепла температура убывает и, следовательно, температурный градиент $\partial T/\partial n$ является величиной отрицательной.

Если отнести количество тепла, переданное посредством теплопроводности, к единице площади изотермической поверхности и к единице времени, то получим плотность теплового потока или удельный тепловой поток в Вт/м²:

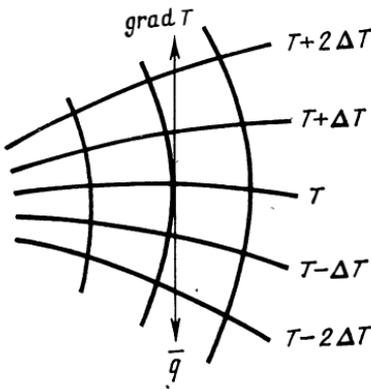


Рис 2.1. Линии теплового потока

$$\vec{q} = \frac{dQ}{dF d\tau}. \tag{2.2}$$

Вектор $\vec{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\lambda \cdot \text{grad } T$ (2.3)

нормален к изотермической поверхности и направлен в сторону убывания температуры. Следовательно, векторы \vec{q} и $\text{grad } T$ коллинеарны, но направлены в разные стороны (рис. 2.1).

Проекции вектора \vec{q} на оси координат x , y , z соответственно будут:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Если в каждой точке изотропного тела (т. е. имеющего одинаковые свойства по всем направлениям) построить элементы нормалей Δl к изотермическим поверхностям, то совокупность этих нормалей дает семейство кривых, называемых линиями теплового тока. Они указывают направление теплового потока.

Касательные к линии тока показывают линии действия векторов \vec{q} и $\text{grad } T$, направленных в прямо противоположные стороны.

2.2. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Из основного уравнения (2.1) определим значение коэффициента теплопроводности

$$\lambda = \frac{dQ}{(\partial T / \partial n) dF dt}; \quad (2.5)$$

его размерность — Вт/(м·К).

Численно коэффициент теплопроводности λ равен количеству тепла, проходящего в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности при условии, что градиент температур в рассматриваемой точке равен единице (одному Кельвину на единицу длины нормали к изотермической поверхности).

Коэффициент теплопроводности является одной из физических характеристик вещества: он характеризует способность данного вещества проводить тепло. Для различных веществ величина λ различна. Лучшими проводниками тепла являются металлы и худшими — газы.

С помощью коэффициента теплопроводности λ и удельной массовой теплоемкости c вещества с плотностью ρ может быть определено другое его важное теплофизическое свойство — температуропроводность.

Температуропроводность характеризует тепловую инерционность тела и выражается через коэффициент температуропроводности

$$a = \frac{\lambda}{c\rho},$$

размерность которого м²/с.

Действительно, скорость выравнивания температуры в теле зависит не только от того, как тело проводит тепло (λ), но и от того, на сколько изменится температура единицы объ-

ема тела при передаче ему данного количества тепла. А это последнее свойство зависит от удельной объемной теплоемкости вещества (cQ).

В зависимости от строения вещества и механизма процесса распространения тепла различных тел значения коэффициента теплопроводности также различны. Коэффициент теплопроводности материала определяется экспериментально на соответствующих лабораторных установках, конструкция которых зависит от рода материала и его агрегатного состояния. Зависимость коэффициента теплопроводности некоторых металлов от температуры приведена на рис. 2.2 [5, 39, 82].

В технических расчетах зависимость коэффициента теплопроводности от температуры $t^\circ\text{C}$ приближенно выражают в виде линейной функции

$$\lambda = \lambda_0(1 + bt),$$

где λ_0 — значение коэффициента теплопроводности при 0°C ;

b — постоянная, определяемая опытным путем в заданном диапазоне температур.

Зависимость λ от T может быть для различных материалов и в различных диапазонах изменения температуры как возрастающей, так и убывающей функцией.

Большинство теплоизоляционных материалов в авиационной и ракетной технике имеет пористую структуру. Сложный процесс распространения тепла в таких телах оценивается некоторым средним значением коэффициента

теплопроводности, увеличение которого с ростом температуры объясняется не только увеличением λ , свойственным газам, заполняющим поры, но и возрастанием лучистого, а возможно и конвективного, теплообмена в порах. В ряде практических случаев зависимость $\lambda = f(T)$ можно пренебречь, проводя расчет по некоторым средним значениям коэффициента теплопроводности $\lambda_{\text{ср}}$.

Согласно простейшей кинетической теории газов теплопроводность в них осуществляется путем молекулярного переноса энергии при соударении молекул. Коэффициент молекулярного

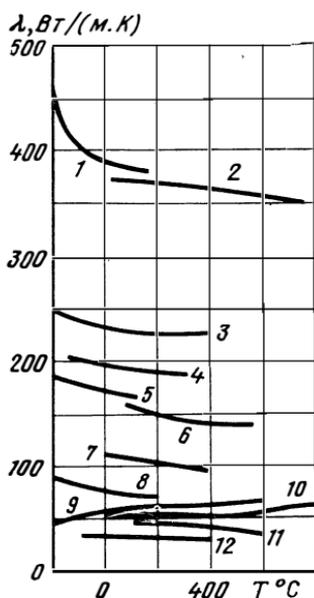


Рис. 2.2. Коэффициент теплопроводности металлов:

1—медь чистая; 2—медь 99,9%; 3—алюминий 99,7%; 4—алюминий 99,0%; 5—марганец чистый; 6—марганец 99,6%; 7—цинк 99,8%; 8—платина чистая; 9—никель 99%; 10—никель 99,2%; 11—железо 99,2%; 12—свинец чистый технический

переноса тепла в газе определяется следующим соотношением:

$$\lambda = \frac{1}{3} \omega_m L c_V \rho.$$

Здесь ω_m — средняя скорость движения молекул газа в м/с или м/ч;

L — средняя длина свободного пробега молекул газа между их соударением в м;

c_V — массовая удельная теплоемкость газа при $V = \text{const}$ в Дж/(кг·К);

ρ — плотность газа в кг/м³.

Для идеальных газов $L\rho = \text{const}$, так как с увеличением давления в равной мере повышается ρ и уменьшается L . Поэтому коэффициент теплопроводности для газов заметно не изменяется при изменении давления. Однако для очень малых давлений, когда длина L свободного пробега молекул становится больше, чем расстояние δ между теплообменивающимися поверхностями ($L > \delta$), коэффициент теплопроводности такого разреженного газа существенно зависит от давления, уменьшаясь с понижением давления. При высоких давлениях теплопроводность газов увеличивается с ростом давления [2]; так как при этом начинают оказывать заметное влияние силы межмолекулярного взаимодействия.

Температура газа влияет на среднюю скорость движения молекул ω_m и теплоемкость c_V , в результате чего коэффициент теплопроводности газов возрастает с увеличением температуры.

На рис. 2.3 представлены экспериментальные значения коэффициентов теплопроводности различных газов*. Гелий и водород отличаются высокой теплопроводностью (рис. 2.4) — в 10 раз большей, чем у других газов. На рис. 2.5 представлена зависимость коэффициента теплопроводности жидких металлов и их сплавов от температуры.

Характер зависимости коэффициента теплопроводности жидкостей от температуры может быть объяснен на основе принятого представления о механизме распространения тепла в капельных жидкостях как о переносе энергии путем нестройных упругих колебаний.

Такое представление, предложенное М. Ф. Широковым, и тероетические положения А. С. Предводителя были использованы Н. Б. Варгафтиком при анализе и обобщении опытных данных по теплопроводности различных жидкостей. Из этих положений была получена следующая формула для коэффициента теплопроводности жидкостей:

$$\lambda = A \frac{c_p \rho^{4/3}}{\mu^{1/3}}$$

где c_p — массовая удельная теплоемкость жидкости при $p = \text{const}$;

ρ — плотность жидкости;

μ — молекулярная масса.

* Получены Н. Б. Варгафтиком во Всесоюзном Теплотехническом институте.

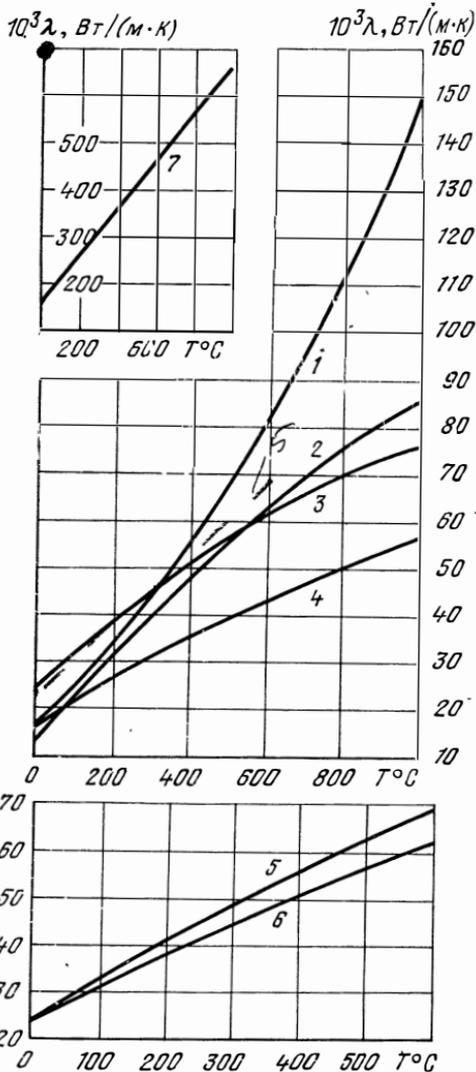


Рис. 2.3. Коэффициенты теплопроводности различных газов:

1—водяной пар; 2—углекислота; 3—воздух; 4—аргон; 5—кислород; 6—азот; 7—водород

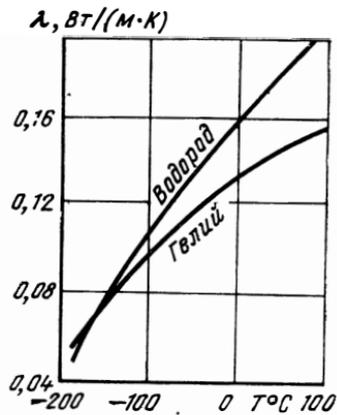


Рис. 2.4. Коэффициенты теплопроводности гелия и водорода

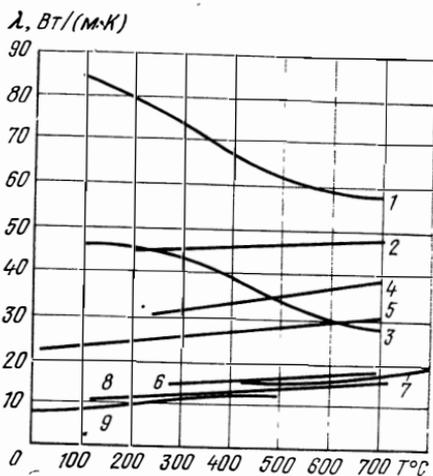


Рис. 2.5. Зависимость коэффициента теплопроводности жидких металлов и их сплавов от температуры, определенные методом последовательных стационарных состояний:

№ кривой	1	2	3	4
Металл (сплав)	Na	Li	K	Sn
$T_{пл}, K$	370,3	459	336,7	504,9
$T_{кип}, K$	1151	1590	1033	2543

Продолжение

№ кривой	5	6	7	8	9
Металл (сплав)	0,25Na+75K	Bi	Pb	44,5Pb+55,6Bi	Hg
$T_{пл}, K$	262	544	600,4	396,5	235
$T_{к кип}, K$	1057	1763	2013	1943	630

Коэффициент A пропорционален скорости распространения упругих волн в жидкости и не зависит от ее природы. С изменением температуры коэффициент A изменяется по соотношению $A c_p \approx \text{const}$. Для $t=0^\circ\text{C}$ $A = 3,58 \cdot 10^{-3}$.

Ввиду того, что молекулы ряда жидкостей склонны к ассоциации, их молекулярная масса может изменяться, а потому данные по λ для жидкостей дополняются еще данными по коэффициенту ассоциации молекул в жидкостях.

Более подробные данные по коэффициентам теплопроводности различных материалов приведены в соответствующих справочниках и учебниках [35, 39].

2.3. ВЫВОД ОСНОВНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При решении всех без исключения задач теплопроводности как при стационарных, так и при нестационарных тепловых режимах обязательным является знание поля температур, т. е. пространственно-временного распределения температуры в интересующей нас области. Это распределение подчиняется основному дифференциальному уравнению теплопроводности, к выводу которого мы и приступим.

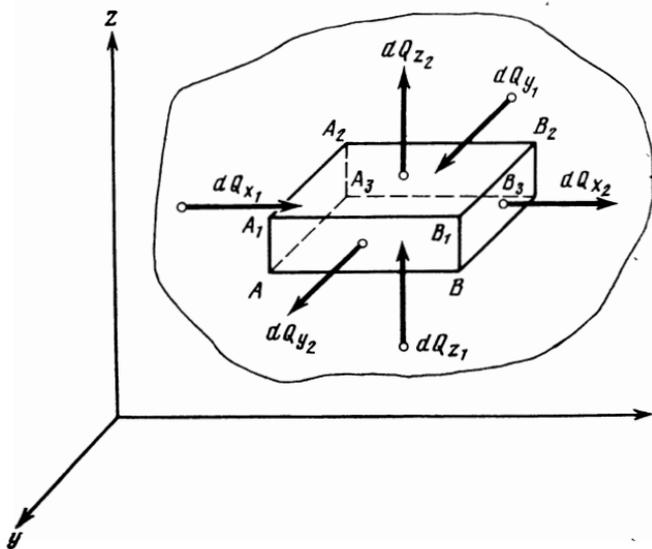


Рис. 2.6. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

Выделим в пространстве, занятом рассматриваемым веществом (рис. 2.6), элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz , параллельными соответствующим осям координат, и составим для него уравнение баланса тепла.

Для этого сначала подсчитаем количество тепла, подведенного и отведенного через грани процессом теплопроводности.

Тепло dQ_{x_1} , вошедшее в параллелепипед через грань $AA_1A_2A_3$ в направлении оси x равно

$$dQ_{x_1} = q_{x_1} dF d\tau = q_{x_1} dy dz d\tau,$$

где q_{x_1} — удельный тепловой поток в сечении $AA_1A_2A_3$, который можно выразить по закону Фурье (2.2), через значение градиента температуры в этом сечении $(\partial T / \partial x)_{x_1}$.

Аналогично выразится и тепло dQ_{x_2} , покинувшее параллелепипед через грань $BB_1B_2B_3$, с той разницей, что удельный тепловой поток q_{x_2} здесь будет иным, а именно:

$$q_{x_2} = q_{x_1} + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

и, следовательно,

$$dQ_{x_2} = q_{x_2} dy dz d\tau.$$

Вычитая из тепла dQ_{x_1} тепло dQ_{x_2} , получим тепло dQ_x , оставшееся в элементе объема за время $d\tau$ в результате движения тепла вдоль оси x :

$$dQ_x = dQ_{x_1} - dQ_{x_2} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz d\tau,$$

или после подстановки q_x через закон Фурье (2.3),

$$dQ_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz d\tau. \quad (2.6)$$

Выполняя те же операции для направлений y и z , получим

$$dQ_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dx dz d\tau \quad (2.7)$$

и

$$dQ_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz dx dy d\tau. \quad (2.8)$$

Общее количество тепла dQ_λ , аккумулированное в силу теплопроводности в рассматриваемом элементарном объеме за время $d\tau$, определится как сумма выражений (2.6), (2.7) и (2.8):

$$\begin{aligned} dQ_\lambda = dQ_x + dQ_y + dQ_z = & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dV d\tau, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $dV = dx dy dz$ — объем рассматриваемого элемента.

[Удельный тепловой поток q , как всякий вектор, может быть представлен через свои проекции на оси координат: q_x , q_y и q_z см. (2.4)].

Если рассматриваемое вещество изотропно и однородно, т. е. если, в частности, $\lambda = \text{const}$, dQ_λ выразится через оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\text{в виде} \quad dQ_\lambda = \lambda \nabla^2 T dV d\tau. \quad (2.10)$$

В самом веществе могут протекать процессы, связанные с выделением или поглощением тепла (экзо- или эндотермические химические реакции), физические явления, сопровождающиеся выделением или поглощением энергии (джоулево нагревание, ядерные процессы, конденсация и т. п.). Если известна характеристика этих процессов — интенсивность объемного тепловыделения — т. е. количество тепла, выделяющееся в единице объема в единицу времени q_V в Вт/м³, то за время $d\tau$ в объеме dV выделится тепло

$$dQ_V = q_V dV d\tau. \quad (2.11)$$

Согласно закону сохранения энергии количество тепла dQ_V , аккумулированное в элементарном объеме dV , вызовет в нем соответствующее повышение температуры вследствие нагрева тела от внутренних источников тепла.

Температура твердого тела является в общем случае функцией четырех переменных x , y , z и τ . Однако для твердого тела пространственные координаты точек поля x , y , z не связаны с координатой времени*. Поэтому, при рассмотрении явления теплопроводности в твердом теле изменение температуры δT за бесконечно малый отрезок времени $d\tau$ выражается через частную производную

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.12)$$

Таким образом, тепло, аккумулированное в объеме dV в силу теплопроводности (dQ_λ) и объемного тепловыделения (dQ_V), можно выразить через изменение температуры объема δT в виде

$$dQ_\lambda + dQ_V = c_Q dV \delta T. \quad (2.13)$$

Подставляя сюда выражения (2.9) и (2.11), с учетом равенства (2.12), получим

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{c_Q} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_V \right]. \quad (2.14)$$

* В движущейся жидкости или газе такая связь существует. Этот случай будет рассмотрен в гл. III.

В случае твердого тела с изотропными и однородными свойствами вид уравнения упрощается:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + \frac{qV}{c\rho}. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) называется основным дифференциальным уравнением теплопроводности при наличии внутренних источников тепла. Оно устанавливает связь между временными и пространственными изменениями температуры в любой точке поля, а коэффициент температуропроводности a является коэффициентом пропорциональности между этими изменениями, что отчетливо видно из формы уравнения (2.15) при отсутствии объемного тепловыделения:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T. \quad (2.16)$$

Можно сказать также, что в то время как коэффициент теплопроводности λ характеризует теплопроводящую способность тел, коэффициент температуропроводности a характеризует теплоинерционные свойства этих тел.

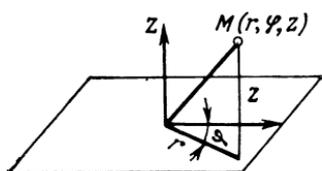


Рис. 27. Схема цилиндрической системы координат точки

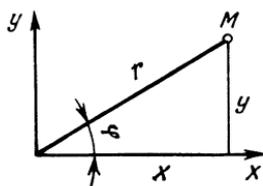


Рис. 28. Связь между прямоугольной и цилиндрической системами координат

Уравнения (2.15) — (2.16) относятся к случаю нестационарного теплового режима. Для стационарного теплового режима ($\partial T / \partial \tau = 0$) уравнение (2.16) переписывается в виде $a \nabla^2 T = 0$ или

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

В технике часто возникает необходимость исследования теплообмена и распределения температур в телах цилиндрической формы, плоских дисках, цилиндрических оболочках, круглых стержнях и др. В этих случаях удобнее записать основное дифференциальное уравнение теплопроводности не в декартовой, а в цилиндрической системе координат.

Для фиксированного момента времени температура T является функцией трех аргументов — координат x, y, z :

$$T = f(x, y, z).$$

В цилиндрической системе координатами являются: r — радиус-вектор точки, φ — полярный угол, z — аппликата точки (расстояние от основной плоскости) (рис. 2.7).

Декартовы координаты x , y , z связывают с цилиндрическими (рис. 2.8) следующие выражения:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z.$$

Подставив x и y как функции от r и φ в выражение для температуры, получим

$$T = T[x(r, \varphi), y(r, \varphi), z] = T(r, \varphi, z).$$

Таким образом, температура может быть представлена как некоторая функция от цилиндрических координат. Выведем выражение для оператора Лапласа в цилиндрических координатах.

Так как координата z в декартовых и в цилиндрических координатах одна и та же, то достаточно найти выражения для частных производных $\partial^2 T / \partial x^2$ и $\partial^2 T / \partial y^2$ в цилиндрических координатах.

Составляя выражения первой и второй производных для функции $T = T(r, \varphi, z)$ и учитывая, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}.$$

Следовательно, в цилиндрических координатах оператор Лапласа примет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.17)$$

В случае использования сферической системы координат, когда $T = T(r, \varphi, \psi)$, где r — радиус-вектор точки, а φ и ψ — полярный и азимутальный углы соответственно, оператор Лапласа аналогичным путем легко приводится к виду

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.18)$$

2.4. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОТДАЧИ

Основное дифференциальное уравнение теплопроводности характеризует пространственно-временное изменение температуры в любой точке поля, объединяя все без исключения явления теплопроводности независимо от геометрической формы тела, его физических свойств и условий взаимодействия с окружающей средой.

Это дифференциальное уравнение описывает класс явлений теплопроводности. Для выделения из целого класса единичного явления необходимо к дифференциальному уравнению присоединить дополнительные условия, специфические для данного конкретного случая.

В эти дополнительные частные данные, характеризующие рассматриваемое единичное явление, входят форма и размеры рассматриваемого тела, его теплофизические свойства и краевые условия. Совокупность перечисленных данных называется условиями однозначности.

Таким образом, условия однозначности подразделяются: на геометрические, характеризующие форму и размеры тела, в котором протекает процесс; на физические, характеризующие физические свойства тела, и на краевые, характеризующие особенности протекания процесса в начальный момент времени (начальные условия) и на границах тела (граничные условия).

Условия однозначности позволяют выделить конкретный процесс и однозначно его определить, т. е. дать полное его математическое описание. В задачах теплопроводности начальные условия определяются заданным распределением температур в изучаемом теле для какого-либо момента времени τ , предшествующего рассматриваемому и принимаемому за начальный момент времени ($\tau=0$). Уравнение температурного поля для этого случая запишется в виде

$$T(x, y, z, 0) = T(x, y, z).$$

В целом ряде практических задач начальные условия имеют более простой вид:

$$T(x, y, z, 0) = T_0 = \text{const},$$

т. е. температура тела в начальный момент времени постоянно по всему его объему.

Граничные условия связаны с взаимодействием тела с окружающей средой и для однородных тел могут быть заданы тремя способами*.

1. Граничное условие первого рода задается в виде распределения температуры по поверхности в любой момент времени:

$$T_w = T(x', y', z', \tau) = f(x', y', z', \tau),$$

$$(x', y', z') \in F^{**},$$

где F — поверхность тела.

В стационарных задачах, а также в таких нестационарных задачах, когда при $\tau \rightarrow \infty$ тело стремится к некоторому стационарному

* В действительности имеют место еще и задачи с граничными условиями 4-го рода, но о них специально будет сказано в разделе 4.6.

** Здесь и далее символ \in означает, что точки с координатами x', y', z' принадлежат поверхности тела F .

нарному состоянию, функция T (...) не зависит от времени, т. е. температура каждой точки поверхности тела постоянна. В частном, но весьма распространенном случае граничное условие 1-го рода может иметь вид

$$T_w = \text{const.}$$

В более общих нестационарных задачах важными частными случаями являются линейная и гармоническая зависимости температуры поверхности от времени:

$$T_w = T_{w0} + b\tau,$$

где b — постоянный коэффициент, и

$$T_w = T_{w0} + A_0 \cos \omega T,$$

где A_0 — амплитуда и ω — частота изменения температуры.

2. Граничное условие второго рода задается в виде удельного теплового потока в каждой точке поверхности тела в любой момент времени:

$$q = f(x', y', z', \tau);$$

$$(x', y', z') \in F.$$

Причем, поскольку удельный тепловой поток, осуществляемый посредством теплопроводности, согласно закону Фурье можно представить в виде

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n},$$

где $\partial T / \partial n$ — значение производной от температуры тела по нормали к его поверхности непосредственно у самой поверхности тела, а λ — коэффициент теплопроводности тела, то граничные условия 2-го рода эквивалентны заданным значениям производной $\partial T / \partial n$ в любой момент времени:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{q}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda} f(x', y', z', \tau) = \varphi(x', y', z', \tau),$$

где $\varphi(x', y', z', \tau)$ — заданная функция.

Этот случай граничных условий имеет место при нагревании (охлаждении) тел посредством излучения и учитывается, например, при расчете режимов работы радиационных холодильников космических летательных аппаратов и т. п.

3. Граничное условие 3-го рода задается в виде температуры окружающей среды и закона теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Этот процесс, как указывалось, носит название теплоотдачи.

Интенсивность теплообмена между средой и телом зависит от сложных физико-механических процессов, протекающих у

границы раздела. Их можно достаточно точно описать упрощенной формулой теплоотдачи, предложенной Ньютоном: количество тепла dQ , отдаваемое или воспринимаемое элементом поверхности твердого тела dF за время $d\tau$, пропорционально разности температур поверхности T_w и окружающей среды T_f , величине dF и промежутку времени $d\tau$, т. е.

$$dQ = \alpha (T_w - T_f) dF d\tau,$$

где $\alpha = \frac{dQ}{(T_w - T_f) dF d\tau}$ — коэффициент теплоотдачи в Вт/(м²·К).

Коэффициент теплоотдачи равен количеству тепла, отдаваемого или воспринимаемого единицей площади поверхности в единицу времени при разности температур между стенкой и тепловоспринимающей средой, равной одному градусу. В этот коэффициент включена вся сложность явления теплоотдачи. Он должен учитывать все особенности теплообмена и является функцией большого числа переменных, как-то: скорости движения среды, температур T_w и T_f , положения тела в потоке, размеров тела, физических параметров среды (теплопроводности, вязкости, теплоемкости и др.).

При практическом использовании уравнения теплоотдачи приходится проводить ряд сложных экспериментов и из полученных опытных данных находить для исследованных явлений теплоотдачи значения коэффициента α . Поэтому все трудности расчета теплоотдачи, заключающиеся в обилии влияющих на нее факторов, сосредоточены в коэффициенте теплоотдачи α , так что расчетное уравнение теплоотдачи Ньютона, несмотря на свою кажущуюся простоту, по существу не вносит особых упрощений.

Итак, в случае граничных условий 3-го рода по закону Ньютона

$$q = \alpha [T_w(x', y', z', \tau) - T_f],$$

где α известно (задан закон теплообмена и физические условия однозначности), а $T_f = f(x', y', z', \tau)$ — известная функция координат и времени, тогда как q и T_w неизвестны.

С другой стороны, конвективный удельный тепловой поток у поверхности в любой момент времени равен потоку тепла внутрь тела, осуществляемому посредством теплопроводности:

$$q = \alpha (T_w - T_f) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n},$$

откуда $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha (T_w - T_f) = 0$.

Таким образом, математически граничные условия 3-го рода представляют собой заданные функциональные связи между неизвестными значениями функции T и ее производной $(\partial T / \partial n)_w$ на поверхности тела F .

Хотя значение коэффициента теплоотдачи α зависит от многих факторов, при решении нестационарных задач с граничными условиями 3-го рода часто приближенно принимают $\alpha = \text{const}$.

К граничным условиям 2-го и 3-го рода относятся те же замечания о возможном характере зависимости заданной функции $f(x', y', z', \tau)$ от времени (линейный и гармонический закон), что и для условий 1-го рода.

Важным для понимания дальнейших разделов курса, в частности — главы, посвященной нестационарной теплопроводности, является то обстоятельство, что при очень больших значениях α или малых λ задача с граничными условиями 3-го рода переходит в задачу с граничными условиями 1-го рода.

В самом деле:

$$T_w - T_f = -\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial n}$$

и если $(\lambda/\alpha) \rightarrow 0$ (т. е. $\alpha \rightarrow \infty$ или $\lambda \rightarrow 0$),

то $T_w = T_f = f(x', y', z', \tau)$, т. е. температура поверхности тела в любой момент времени задана и равна температуре окружающей среды T_f .

Ниже мы рассмотрим некоторые простейшие задачи стационарной теплопроводности в твердых телах.

2.5. ПЛОСКАЯ СТЕНКА. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ. ТЕРМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Если плоское тело (пластина) имеет толщину δ , значительно меньшую двух других характерных линейных размеров (ширины и длины), можно пренебречь отводом или подводом тепла через торцы, считая, что тепловой поток направлен перпендикулярно поверхности пластины (рис. 2.9). Задача в этом случае является пространственно одномерной, а следовательно, температурное поле зависит только от одной координаты x , поскольку

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

При отсутствии объемного тепловыделения ($q_v = 0$) и постоянном λ уравнение теплопроводности (2.16) имеет вид

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0. \quad (2.19)$$

Закон распределения температур по толщине стенки найдется двойным интегрированием выражения (2.19)

$$T = C_1 x + C_2. \quad (2.20)$$

Здесь C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Из уравнения (2.20) видно, что распределение температур в стенке следует линейному закону. Изотермические поверхности представляют собой плоскости, параллельные поверхностям стенки и нормальные к оси x .

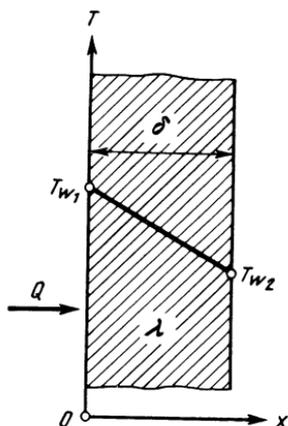


Рис. 2.9. Распределение температуры в плоской стенке

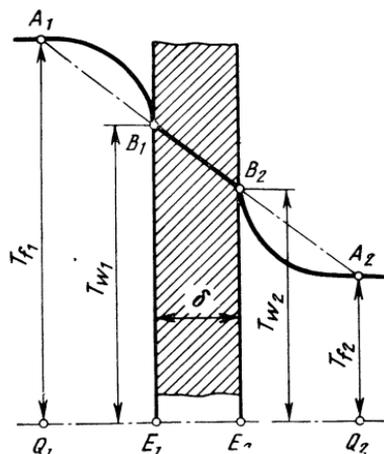


Рис. 2.10. Распределение температуры при теплопередаче через плоскую стенку

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в уравнении (2.20) воспользуемся граничными условиями первого рода, т. е. зададимся следующим законом распределения температур на поверхности тела для любого момента времени:

при $x=0$ $T=T_{W1}$;

при $x=\delta$ $T=T_{W2}$.

Здесь T_{W1} — температура более нагретой поверхности стенки и T_{W2} — температура другой, более холодной поверхности стенки, следовательно, $T_{W1} > T_{W2}$.

Подставляя заданные значения температур на границах в уравнение (2.20), найдем $C_2=T_{W1}$ и $C_1\delta+T_{W1}=T_{W2}$, откуда

$$C_1 = \frac{T_{W2} - T_{W1}}{\delta}. \quad (2.21)$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в уравнение (2.20), получим

$$T = \frac{T_{W2} - T_{W1}}{\delta} x + T_{W1}. \quad (2.22)$$

Выражение (2.22) и есть решение задачи, так как описываемое им распределение температур удовлетворяет как дифференциальному уравнению (2.19), так и поставленным граничным условиям.

Для определения количества тепла, проходящего через элемент стенки в единицу времени ($d\tau=1$), воспользуемся законом Фурье (2.1), согласно которому

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dF.$$

Из уравнений (2.19) и (2.21) имеем $\frac{dT}{dx} = C_1 = \frac{T_{W2} - T_{W1}}{\delta}$,

следовательно, $dQ = \lambda \frac{T_{W1} - T_{W2}}{\delta} dF$.

Для участка поверхности площадью F находим

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} (T_{W1} - T_{W2}) F. \quad (2.23)$$

Обозначим $T_{W1} - T_{W2} = \Delta T_W$. (2.24)

Тогда

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} \Delta T_W F. \quad (2.25)$$

Количество тепла, проходящее через единицу поверхности стенки за единицу времени, определяется соотношением

$$q = \frac{Q}{F} = \frac{\lambda}{\delta} (T_{W1} - T_2), \quad (2.26)$$

или с учетом выражения (2.24),

$$q = \frac{\lambda}{\delta} \Delta T_W. \quad (2.27)$$

Из формул (2.23) и (2.26) видно, что количество тепла, проходящее сквозь стенку, зависит от разности температур на поверхностях ΔT_W .

Отношение λ/δ обычно называется тепловой проводимостью стенки, а обратная ей величина δ/λ — сопротивлением теплопроводности плоской стенки.

В случае граничных условий 3-го рода в рассматриваемой задаче должны быть заданы температуры сред, омывающих стенку T_{f1} и T_{f2} ($T_{f1} > T_{f2}$), и коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 . Этот процесс (см. 2.2) носит название теплопередачи через стенку и в стационарном случае распределение температур в средах и плоской стенке показано на рис. 2.10. Температуры среды и стенки в точке их соприкосновения совпадают. В качестве T_f принимается температура среды на достаточном удалении от стенки.

Удельный тепловой поток, который получает стенка, определяется законом Ньютона $q = \alpha_1 (T_{f1} - T_{W1})$, но из условия непре-

рывности теплового потока он должен равняться тепловому потоку, отводимому в силу теплопроводности внутрь стенки. В стационарной задаче для плоской стенки этот поток, как было показано, может быть записан в виде (2.26):

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (T_{W1} - T_{W2}),$$

но здесь, в отличие от задачи с граничными условиями 1-го рода, температуры T_{W1} и T_{W2} нам неизвестны.

Тепловой поток, отводимый тепловоспринимающей средой, по закону Ньютона может быть представлен в виде $q = \alpha_2 (T_{W2} - T_{f2})$; он также равен потоку, идущему через стенку посредством теплопроводности.

Полученная система

$$q = \alpha_1 (T_{f1} - T_{W1}); \quad q = \frac{\lambda}{\delta} (T_{W1} - T_{W2}); \quad q = \alpha_2 (T_{W2} - T_{f2}), \quad (2.28)$$

где известны T_{W1} , T_{W2} и q , легко может быть решена путем деления обеих частей уравнений (2.28) на α_1 , λ/δ и α_2 соответственно. Преобразованная таким образом система примет вид

$$q \frac{1}{\alpha_1} = T_{f1} - T_{W1}; \quad q \frac{\delta}{\lambda} = T_{W1} - T_{W2}; \quad q \frac{1}{\alpha_2} = T_{W2} - T_{f2}. \quad (2.29)$$

Складывая почленно отдельно левые и правые части уравнений, получим

$$q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = T_{f1} - T_{f2},$$

откуда

$$q = K (T_{f1} - T_{f2}), \quad (2.30)$$

где

$$K = \frac{1}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2}.$$

Величина K называется коэффициентом теплопередачи и имеет размерность Вт/(м²·К), а обратная ей величина

$$R = \frac{1}{K} = 1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2$$

— полным термическим сопротивлением с размерностью м²·К/Вт. Это полное сопротивление является суммой уже известного нам сопротивления теплопроводности δ/λ и двух сопротивлений теплоотдачи $1/\alpha_1$ и $1/\alpha_2$.

Выражение для теплового потока при теплопередаче через стенку (2.30), пользуясь понятием полного термического сопро-

тивления, можно переписать в виде

$$q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R}. \quad (2.31)$$

Все величины, входящие в правые части выражений (2.30) и (2.31), заданы условиями однозначности.

Неизвестные значения температур поверхностей стенки T_{w1} и T_{w2} могут теперь быть определены с помощью первого и третьего уравнения системы (2.28), поскольку величина q вычисляется по формулам (2.30), (2.31).

Например

$$T_{w1} = T_{f1} - \frac{q}{\alpha_1}. \quad (2.32)$$

Полученные выше решения задачи о теплопроводности плоской однородной стенки с граничными условиями 1-го и 3-го родов легко распространяются на случай, когда стенка состоит из ряда слоев различных материалов.

Пусть многослойная стенка состоит из n плотно прилегающих друг к другу слоев (рис. 2.11), коэффициенты теплопроводности которых равны $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а толщины -- $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, соответственно. Вследствие стационарности задачи удельный тепловой поток, проходящий через каждый слой, для всех n слоев будет одинаков. Если бы было иначе, то теплосодержание какого-то слоя или нескольких слоев изменялось бы во времени, поскольку входящее в него в единицу времени количество тепла было бы отлично от выходящего. Это привело бы к изменению во времени его температуры, что противоречит принятому в этом разделе условию стационарности температуры поля $\partial T / \partial \tau = 0$.

В случае граничных условий 1-го рода, т. е. когда заданы температуры на внешних поверхностях многослойной стенки T_{w1} и $T_{w(n+1)}$, можно записать для удельных тепловых потоков в каждом из слоев следующее:

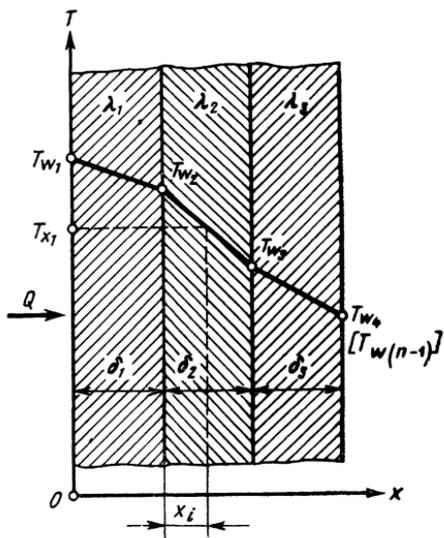


Рис. 2.11. Распределение температуры в многослойной плоской стенке

Таким образом, для воображаемой однослойной стенки

$$q = \frac{\lambda_{\text{экв}}}{\sum_{i=1}^n \delta_i} [T_{W1} - T_{W(n+1)}], \quad (2.36)$$

где $\lambda_{\text{экв}}$ — эквивалентный коэффициент теплопроводности, определяемый из равенства уравнений (2.36) и (2.35):

$$\lambda_{\text{экв}} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i}. \quad (2.37)$$

Эквивалентный коэффициент теплопроводности дает возможность сравнивать теплопроводящие свойства многослойной стенки, составленной из разнородных материалов, с однослойной стенкой, выполненной из однородного материала.

Графически распределение температур по сечению многослойной стенки (см. рис. 2.11) представляется ломаной линией, причем внутри каждого слоя это распределение описывается уравнением

$$T_{xi} = T_{Wi} - q \frac{x_i}{\lambda_i}. \quad (2.38)$$

Здесь x_i — расстояние от начала i -го слоя, т. е. от плоскости его соприкосновения с $(i-1)$ -м слоем, где температура равна T_{Wi} .

Пользуясь этим выражением, по аналогии с выражением (2.32) можно последовательно найти неизвестные температуры на границах всех слоев $T_{W2}, T_{W3}, \dots, T_{Wn}$.

Абсолютная величина тангенса угла наклона зависимости $T(x)$ в каждом из слоев тем больше, чем меньше коэффициент теплопроводности данного слоя λ . Это вытекает из закона Фурье

$$q_i = -\lambda_i \text{grad } T,$$

так как при постоянстве q во всех слоях величины λ и $\text{grad } T$ связаны обратно пропорциональной зависимостью.

Это рассуждение распространяется и на случай однослойной стенки с переменным, зависящим от координаты или от температуры, значением λ . Легко показать, что если в однослойной стенке (см. рис. 2.9) $\lambda = \lambda_0(1+bT)$ и $b > 0$, то распределение температур в ней не будет носить линейный характер, как при

$\lambda = \text{const}$, а будет представляться кривой, наклон которой $\left| \frac{dT}{dx} \right|$ будет возрастать с ростом координаты x , поскольку коэффициент теплопроводности с приближением к более холодной повер-

ности такой стенки уменьшается. К аналогичному выводу можно прийти, если условно разбить однослойную стенку на ряд тонких слоев, теплопроводность каждого из которых принять постоянной.

Если в задаче о теплопроводности плоской многослойной стенки заданы граничные условия 3-го рода, то расчетное уравнение теплового потока через такую стенку легко получить, добавив к системе (2.33) выражение для конвективных тепловых потоков между внешними поверхностями стенки и омывающими ее средами, аналогично выражению (2.28):

$$q = \alpha_1 (T_{f1} - T_{w1}); \quad q = \alpha_2 [T_{w(n+1)} - T_{f2}].$$

В этом случае удельный тепловой поток также выразится соотношением $q = K(T_{f1} - T_{f2})$, только в знаменатель выражения для коэффициента теплопередачи

$$K = \frac{1}{1/\alpha_1 + \sum_{i=1}^n \delta_i/\lambda_i + 1/\alpha_2} \quad (2.39)$$

войдет сумма сопротивлений теплопроводности всех n слоев.

Полное термическое сопротивление в этом случае будет равно

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (2.40)$$

2.6. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СТЕНКА

Если предположить, что круговая цилиндрическая оболочка имеет длину достаточно большую, чтобы теплоотводом с торцов можно было пренебречь, и что граничные условия не зависят от полярного угла φ и продольной координаты z , то задача, как и в предыдущем разделе, становится пространственно-одномерной. Поле температур в стационарном случае изменяется только по радиусу r , а следовательно, основное дифференциальное уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат (2.17) примет вид

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0. \quad (2.41)$$

Обозначая dT/dr через u , получим

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{r} u,$$

откуда, разделяя переменные,

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}.$$

Интегрируя последнее выражение, получим

$$\ln u = -\ln r + C$$

или

$$\ln u = -\ln r + \ln C_1,$$

откуда

$$\frac{dT}{dr} = u = \frac{C_1}{r}. \quad (2.42)$$

После повторного интегрирования выражения (2.42) общее решение уравнения (2.41) получим в виде

$$T = C_1 \ln r + C_2. \quad (2.43)$$

Из двух последних выражений видно следующее.

1. Удельный тепловой поток в цилиндрической стенке $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$ непостоянен по толщине и убывает к внешней поверхности трубы $\left(\frac{dT}{dr} \sim \frac{1}{r}\right)$. Это связано с тем, что в стационарных условиях должен быть постоянным полный тепловой поток, проходящий через участок цилиндрической трубы длиной l и равный qF , где $F = 2\pi r l$; поскольку же F увеличивается с радиусом, то, естественно, удельный тепловой поток должен убывать.

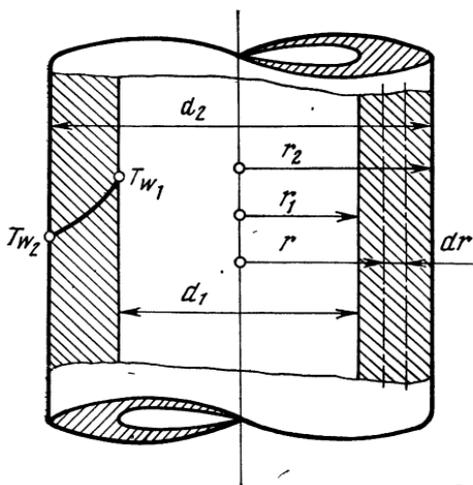


Рис. 2.12. Распределение температуры в цилиндрической стенке

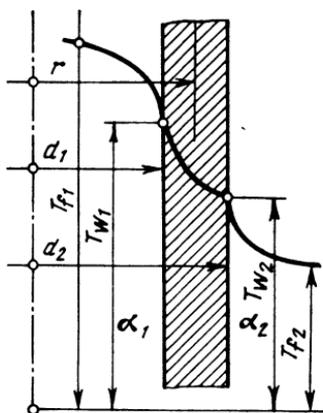


Рис. 2.13. Граничные условия третьего рода

2. Температура по толщине цилиндрической стенки изменяется нелинейно — по логарифмическому закону (2.43) (рис. 2.12).

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из граничных условий. Граничные условия 1-го рода для рассматриваемой за-

даци можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} T_{W1} &= T(r_1) = C_1 \ln r_1 + C_2; \\ T_{W2} &= T(r_2) = C_1 \ln r_2 + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Решая эту систему относительно C_1 и C_2 , получим

$$C_1 = \frac{T_{W1} - T_{W2}}{\ln(r_1/r_2)} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{T_{W1} \ln r_2 - T_{W2} \ln r_1}{\ln(r_1/r_2)}. \quad (2.45)$$

Подставляя эти выражения в решение (2.43), получим следующее выражение для распределения температуры в цилиндрической стенке:

$$T = \frac{T_{W1} \ln(r_2/r) + T_{W2} \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (2.46)$$

Легко убедиться, что это решение удовлетворяет заданным граничным условиям (2.44).

Количество тепла, проходящее через участок цилиндрической стенки длиной l в единицу времени, согласно закону Фурье будет равно

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} l \cdot 2\pi r.$$

Подставляя в это выражение значение dT/dr из выражения (2.42) и учитывая равенства (2.45), найдем:

$$Q = \frac{\lambda (T_{W1} - T_{W2})}{\ln(r_2/r_1)} 2\pi l. \quad (2.47)$$

Из формулы (2.47) видно, что Q действительно не зависит от текущего радиуса и определяется отношением наружного радиуса к внутреннему.

В практике технических расчетов обычно относят тепловой поток Q к единице длины цилиндрической трубы:

$$\frac{Q}{l} = q_n = \frac{2\pi l}{\ln(r_2/r_1)} (T_{W1} - T_{W2}). \quad (2.48)$$

Эта величина, в отличие от удельного теплового потока, не зависит от текущего радиуса и характеризует погонный тепловой поток, ее размерность Вт/м.

В задаче с граничными условиями 3-го рода (рис. 2.13) заданы температуры сред, омывающих трубу с внутренней (T_{f1}) и наружной (T_{f2}) сторон, а также соответствующие значения коэффициентов теплоотдачи α_1 и α_2 .

Конвективный тепловой поток на единицу длины трубы с наружной и внутренней сторон может быть выражен согласно закону Ньютона и должен равняться погонному тепловому потоку,

осуществляемому теплопроводностью через цилиндрическую стенку (2.48). Выписав все эти выражения, получим систему:

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{ц}} &= \alpha_1 (T_{f1} - T_{w1}) \cdot 2\pi r_1; \\ q_{\text{ц}} &= \frac{\lambda}{\ln(r_2/r_1)} (T_{w1} - T_{w2}) \cdot 2\pi; \\ q_{\text{ц}} &= \alpha_2 (T_{w2} - T_{f2}) \cdot 2\pi r_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

решая которую уже известным [см. выражения (2.28) и (2.29)] методом найдем

$$q_{\text{ц}} = \pi K_{\text{ц}} (T_{f1} - T_{f2}), \quad (2.50)$$

где
$$\pi K_{\text{ц}} = \frac{\pi}{\frac{1}{2\alpha_1 r_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\alpha_2 r_2}}. \quad (2.51)$$

Коэффициент $K_{\text{ц}}$ называется коэффициентом теплопередачи цилиндрической стенки. Его размерность Вт/(м·К) и отличается от размерности коэффициента теплопередачи для плоской стенки Вт/(м²·К). Коэффициент $K_{\text{ц}}$ численно равен количеству тепла, проходящему через стенку трубы длиной в 1 м в единицу времени от одной среды к другой, если температурный напор между ними равен 1 К.

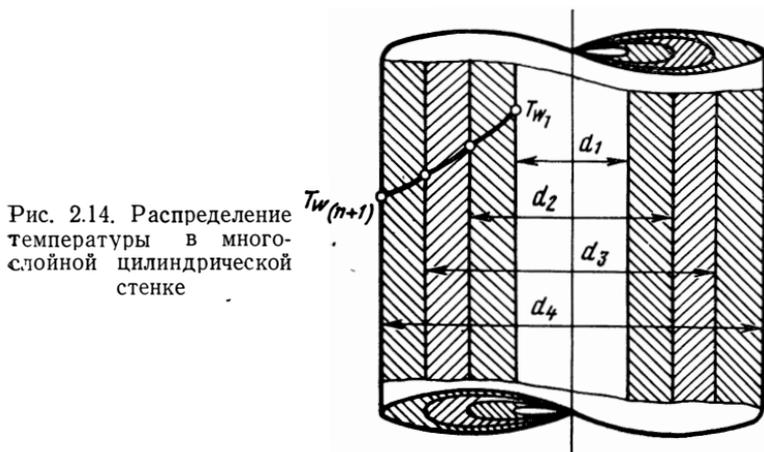


Рис. 2.14. Распределение температуры в многослойной цилиндрической стенке

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи

$$\frac{1}{K_{\text{ц}}} = \frac{1}{2\alpha_1 r_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\alpha_2 r_2} \quad (2.52)$$

называется полным термическим сопротивлением трубы, причем слагаемые $1/(2\alpha_1 r_1)$ и $1/(2\alpha_2 r_2)$ называются термическими сопротивлениями теплоотдачи, а слагаемое $1/2\lambda \ln(r_2/r_1)$ — термическим сопротивлением теплопроводности стенки трубы.

Итак, в случае цилиндрической стенки сопротивление теплоотдачи зависит не только от величин α_1 и α_2 , но также и от диаметров $d_1=2r_1$ и $d_2=2r_2$.

Для случая многослойной цилиндрической стенки (рис. 2.14) и граничных условий первого рода методами, совершенно аналогичными тем, которыми мы пользовались при рассмотрении многослойной плоской стенки, можно получить следующее выражение для погонного теплового потока:

$$g_{\text{ц}} = \frac{[T_{\text{W}1} - T_{\text{W}(n+1)}] \pi}{\sum_{i=1}^n 1/2\lambda_i \cdot \ln(d_{i+1}/d_i)}. \quad (2.53)$$

Точно так же для цилиндрической многослойной стенки остается в силе то понятие эквивалентного коэффициента теплопроводности, которое было введено для многослойной плоской стенки:

$$q_{\text{ц}} = \frac{2\pi\lambda_{\text{эКВ}} [T_{\text{W}1} - T_{\text{W}(n+1)}]}{\ln(d_{n+1}/d_1)}. \quad (2.54)$$

Приравнивая правые части уравнений (2.53) и (2.54), будем иметь

$$\lambda_{\text{эКВ}} = \frac{\ln(d_{n+1}/d_1)}{\sum_{i=1}^n 1/\lambda_i \cdot \ln(d_{i+1}/d_i)}. \quad (2.55)$$

Пользуясь выражением (2.50), напомним уравнение для определения температуры $T_{\text{W}(i+1)}$ на границе между i -м и $(i+1)$ -м слоями:

$$T_{\text{W}(i+1)} = T_{\text{W}i} - \frac{q_{\text{ц}}}{2\pi} \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right). \quad (2.56)$$

В случае многослойной цилиндрической стенки, состоящей из плотно прилегающих друг к другу слоев с соответствующими коэффициентами теплопроводности $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ по аналогии с плоской многослойной стенкой, можно написать выражения для коэффициента теплопередачи —

$$K_{\text{ц}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}. \quad (2.57)$$

и для теплового сопротивления —

$$T_{W(i+1)} = T_{W1} - \frac{q}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}} \right). \quad (2.58)$$

Температура $T_{W(i+1)}$ на границе между i -м и $(i+1)$ -м слоями определяется из уравнения

$$T_u = \frac{1}{K_u} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}. \quad (2.59)$$

2.7. КРИТИЧЕСКИЙ ДИАМЕТР ТЕПЛОЙ ИЗОЛЯЦИИ ТРУБОПРОВОДА

В технической практике часто возникает необходимость уменьшить теплопередачу между средой, движущейся по трубопроводу, и окружающим трубопровод пространством. Эта необ-

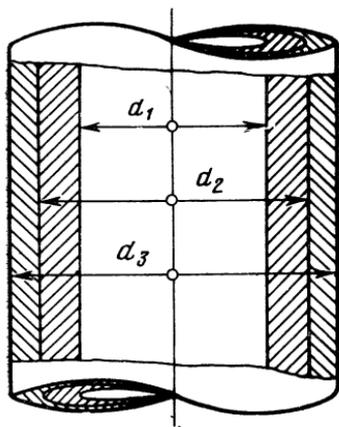


Рис. 2.15. К определению критического диаметра тепловой изоляции трубы

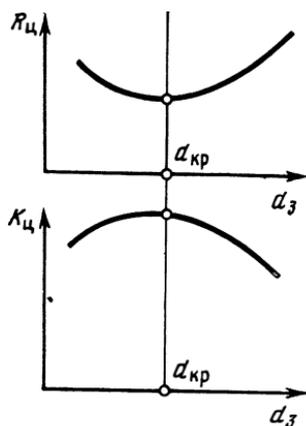


Рис. 2.16. Изменения коэффициентов полного термического сопротивления и теплопередачи в зависимости от внешнего диаметра изоляции

ходимость может быть связана со стремлением уменьшить потери тепла горячего теплоносителя, передаваемого по трубопроводу от одного агрегата к другому (в этом случае тепловой поток направлен от трубы в окружающую среду), так и сохранить в заданном фазовом состоянии криогенное рабочее тело, например, сжиженный газ, при подаче его из баков. В последнем случае следует уменьшить поток тепла из окружающей среды внутрь трубопровода и предотвратить возможность вскипания жидкости.

В обоих случаях внутренний диаметр трубопровода d_1 , как правило, задается исходя из потребного расхода, а толщина стенок $(d_2 - d_1)/2$ и материал (λ_1) трубопровода определяются из расчета на прочность. Температуры внутренней и внешней сред T_{f1} и T_{f2} , а также соответствующие коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 также полагаем заданными.

Рассмотрим, как будет изменяться полное термическое сопротивление трубы при нанесении на ее внешнюю поверхность слоя теплоизоляционной изоляции (рис. 2.15), коэффициент теплопроводности которой $\lambda_{\text{из}} = \lambda_2$ и задан выбранным нами теплоизоляционным материалом (асбест, фторопласт, пенопласт и т. п.). Согласно выражению (2.58) для двухслойной трубы можно записать

$$R_{\text{ц}} = \frac{1}{K_{\text{ц}}} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}, \quad (2.60)$$

где d_3 — внешний диаметр трубы со слоем изоляции.

В выражении (2.60) от толщины слоя изоляции (диаметра d_3) зависят два последних слагаемых. Термическое сопротивление теплопроводности изоляции $\ln(d_3/d_2)/(2\lambda_2)$ растет с увеличением толщины теплоизоляционного покрытия, а термическое сопротивление теплоотдачи $1/(\alpha_2 d_3)$ — уменьшается. Последнее связано с увеличением поверхности теплоотдачи при увеличении внешнего диаметра трубы d_3 . Очевидно, что при таком характере изменения двух слагаемых выражение (2.60) может иметь экстремум.

Исследуем на экстремум функцию $R_{\text{ц}}(d_3)$. Приравняем нулю первую производную от равенства (2.60) по d_3 :

$$\left(\frac{1}{K_{\text{ц}}}\right)' = \frac{1}{2\lambda_2 d_3} - \frac{1}{\alpha_2 d_3^2} = 0.$$

Из полученного уравнения найдем значение внешнего диаметра d_3 , при котором $R_{\text{ц}}$ принимает экстремальное значение:

$$d_{\text{кр}} = \frac{2\lambda_2}{\alpha_2}. \quad (2.61)$$

Важно отметить, что критическое значение d_3 не зависит от внешнего диаметра изолируемого трубопровода d_2 , а определяется лишь коэффициентом теплопроводности выбранного теплоизолятора λ_2 и коэффициентом теплоотдачи с внешней поверхности трубы α_2^* .

Для того чтобы определить является ли термическое сопротивление $R_{\text{ц}}$ при $d_3 = d_{\text{кр}}$ максимальным или минимальным, най-

* В проводимом анализе α_2 приближенно считается независимым от внешнего диаметра d_3 и температуры наружной поверхности $T_{\text{вз}}$. В действительности в ряде случаев между этими величинами имеет место взаимозависимость, о характере которой см. гл. VI.

дем знак второй производной от $R_{\text{ц}}$ по d_3 в данной точке ($d_3 = d_{\text{кр}}$). Для этого подставим в выражение

$$\left(\frac{1}{K_{\text{ц}}}\right)'' = -\frac{1}{2\lambda_2 d_3^2} + \frac{2}{\alpha_2 d_3^3} = \frac{1}{d_3^2} \left(\frac{2}{\alpha_2 d_3} - \frac{1}{2\lambda_2}\right)$$

критическое значение диаметра (2.61). Тогда

$$\left(\frac{1}{K_{\text{ц}}}\right)''_{d_3=d_{\text{кр}}} = \frac{\alpha_2^2}{4\lambda_2^3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha_2^2}{8\lambda_2^3} > 0.$$

Это означает, что при $d_3 = d_{\text{кр}}$ полное термическое сопротивление системы $R_{\text{ц}}$ минимально (рис. 2.16).

Следовательно, если диаметр изолируемой трубы d_2 больше $d_{\text{кр}}$, найденного для выбранного изоляционного материала (λ_2) и условий теплообмена с окружающей средой (2.61), то покрытие трубы слоем такой изоляции уменьшит теплопередачу через цилиндрическую стенку. В случае же, когда $d_2 < d_{\text{кр}}$, нанесение на поверхность трубы выбранного изолятора первоначально приведет к возрастанию теплопередачи и лишь после того, как наружный диаметр достигнет и превысит критическое значение, тепловой поток через стенку начнет убывать, затем достигнет исходной величины, которая была при отсутствии слоя изоляции, и лишь затем станет меньше ее.

В последнем случае следует попытаться подобрать другой теплоизоляционный материал и (или) сделать многослойную изоляцию так, чтобы $\lambda_{\text{экрв}} > \lambda_2$, и только если это не удастся, пойти на снижение теплопередачи путем значительного увеличения толщины изоляционного слоя ($d_3 \gg d_{\text{кр}}$).

2.8. ШАРОВАЯ СТЕНКА

Рассмотрим пространственно одномерную стационарную задачу теплопроводности в шаровой стенке с радиусами внутренней и внешней поверхностей r_1 и r_2 (рис. 2.17) и коэффициентом теплопроводности материала стенки λ . Одномерность задачи означает, что распределение температуры в стенке зависит только от радиуса, а потому основное дифференциальное уравнение теплопроводности в сферической системе координат [см. (2.18)] примет вид

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0. \quad (2.62)$$

По аналогии с принятым в разд. 2.6, обозначим dT/dr через u . Тогда

$$\frac{du}{dr} = -\frac{2}{r} u$$

или

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dr}{r},$$

откуда после интегрирования

$$\ln u = -2 \ln r + C$$

или

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}, \quad (2.63)$$

где

$$\ln C_1 = C.$$

После повторного интегрирования получим

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2. \quad (2.64)$$

Это и есть искомое решение уравнения (2.62). Отметим, что здесь, в силу тех же причин, что и в случае цилиндрической трубы (см. разд. 2.6), распределение температуры нелинейно. Однако в отличие от трубы это распределение представляет собой гиперболу.

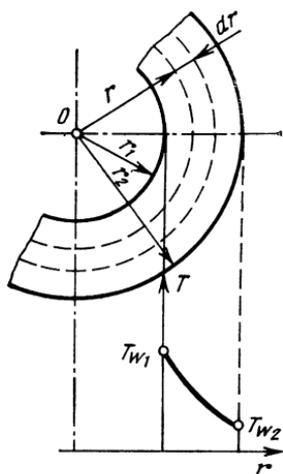


Рис. 2.17. Распределение температуры в шаровой стенке

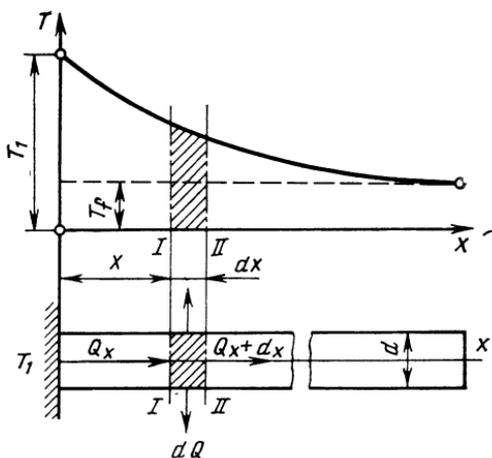


Рис. 2.18. Теплопроводность стержня бесконечной длины

В случае граничных условий 1-го рода, когда заданы температуры внутренней T_{W1} и наружной T_{W2} поверхностей шаровой оболочки, постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из системы уравнений

$$T_{W1} = -\frac{C_1}{r_1} + C_2; \quad T_{W2} = -\frac{C_1}{r_2} + C_2, \quad (2.65)$$

т. е.

$$C_1 = \frac{T_{W1} - T_{W2}}{1/r_2 - 1/r_1}; \quad C_2 = \frac{r_2 T_{W2} - r_1 T_{W1}}{r_2 - r_1}. \quad (2.66)$$

После подстановки этих констант в выражение (2.64) получим

$$T(r) = \frac{T_{W1}(1/r - 1/r_2) + T_{W2}(1/r_1 - 1/r)}{1/r_1 - 1/r_2}. \quad (2.67)$$

В стационарной задаче полный тепловой поток

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2$$

не зависит от радиуса, так как общее количество тепла, проходящее в единицу времени через изотермическую поверхность, какой здесь является любая сфера с радиусом $r_1 \leq r \leq r_2$, должно быть одинаково при любом r . Пользуясь выражениями (2.63) и (2.66), получим для Q следующее выражение:

$$Q = \frac{4\pi\lambda}{1/r_1 - 1/r_2} (T_{W1} - T_{W2}). \quad (2.68)$$

Для многослойной шаровой стенки в случае граничных условий 1-го рода методами, изложенными в разд. 2.7, 2.8, легко получить следующее выражение для теплового потока:

$$Q = \frac{4\pi(T_{W1} - T_{W(n+1)})}{\sum_{i=1}^n 1/\lambda_i(1/r_i - 1/r_{i+1})}, \quad (2.69)$$

где λ_i и r_i — коэффициент теплопроводности и внутренний радиус i -го слоя.

Распределение температур внутри i -го слоя шаровой стенки определяется соотношением (2.67) с заменой T_{W1} , T_{W2} , r_1 и r_2 на T_{Wi} , $T_{W(i+1)}$, r_i и r_{i+1} , соответственно.

Задачи о теплопроводности однослойной и многослойной шаровой стенки с граничными условиями 3-го рода решаются аналогично тому, как это делалось в разд. 2.7 и 2.8, а потому здесь не рассматриваются. Получить соответствующие решения предлагается читателю самостоятельно.

2.9. СТЕРЖЕНЬ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Рассмотрим стационарную задачу о теплопроводности стержня бесконечной длины (рис. 2.18). Температура одного конца стержня поддерживается постоянной, равной T_1 . Стержень омывается средой с постоянной температурой T_f . Коэффициент теплоотдачи от стержня к среде α вдоль всей его боковой поверхности будем считать постоянным. Коэффициент теплопроводности материала стержня λ предполагается достаточно большим, а поперечные размеры стержня по сравнению с длиной настолько

малыми, что изменением температуры в нем можно пренебречь. Температура стержня T , таким образом, считается функцией только одной координаты

$$T = f(x).$$

Разность между местной температурой стержня и температурой окружающей среды $T(x) - T_0$ обозначим через $\theta(x)$. В начальной точке стержня ($x=0$)

$$T_1 - T_f = \theta_1.$$

Рассмотрим тепловое равновесие элемента стержня, удаленного от его начала на расстояние x , имеющего длину dx , площадь поперечного сечения F и периметр сечения U .

Количество тепла, входящее в силу теплопроводности в рассматриваемый элемент стержня через сечение $I-I$ за единицу времени, согласно закону Фурье равно

$$Q_x = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_x F. \quad (2.70)$$

Аналогичная величина в сечении $II-II$, расположенном на расстоянии $x+dx$ от начала стержня, будет равна

$$Q_{x+dx} = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x+dx} F. \quad (2.71)$$

За это же время, согласно закону Ньютона (2.18), боковой поверхностью стержня Udx будет отдано количество тепла

$$dQ = \alpha \theta U dx. \quad (2.72)$$

Составляя тепловой баланс для элемента стержня, получим

$$Q_x - Q_{x+dx} = dQ; \quad (2.73)$$

$$-\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_x F + \lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x+dx} F = \alpha \theta U dx. \quad (2.74)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{(d\theta/dx)_{x+dx} - (d\theta/dx)_x}{dx} = \frac{d^2\theta}{dx^2}, \quad (2.75)$$

получим

$$\lambda F \frac{d^2\theta}{dx^2} = \alpha \theta U. \quad (2.76)$$

Вводя обозначение

$$\beta^2 = \frac{\alpha U}{\lambda F}, \quad (2.77)$$

находим

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \beta^2 \theta. \quad (2.78)$$

Таблица 2.1

Материал ребра	Высота ребра h мм	Толщина ребра δ , мм	$\mu = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda\delta}}$, мм ⁻¹	h' , мм	$\mu h'$	η_p
Алюминий	25	2,3	22,8	0,0261	0,595	0,9
Сталь	16	0,8	83	0,0164	1,36	0,65
Медь	25,4	0,5	36,4	0,0256	0,93	0,75

С точки зрения теплоотдачи, приходящейся на единицу массы, выгодно иметь большое число тонких и легких ребер. Это справедливо до тех пор, пока поток, обтекающий ребро, не начинает искажаться под влиянием соседних ребер.

При конструировании оребрения основным является вопрос о том, насколько близко можно располагать ребра друг к другу без серьезного снижения их эффективности вследствие уменьшения количества протекающего между ними воздуха.

2.12. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Выше мы рассмотрели задачи стационарной теплопроводности для простейших тел. В случаях, когда форма тела не является столь простой, а условия на границе зависят от рассматриваемой точки поверхности, задача существенно усложняется, и для ее решения часто требуется привлечение аналоговых или цифровых вычислительных машин.

Однако в ряде случаев для приближенной оценки тепловых потоков, передаваемых теплопроводностью в довольно сложных телах, можно воспользоваться уже полученными в этой главе результатами.

Для этого представим выражения (2.23), (2.47), (2.68), приведенные выше, для стационарного теплового потока через плоскую, цилиндрическую и сферическую стенки в единой форме:

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} \Delta T F_x, \quad (2.105)$$

где λ — коэффициент теплопроводности материала;

δ — толщина плоской, цилиндрической или сферической стенок;

F_x — некоторая фиктивная расчетная теплоотдающая поверхность, выражение для которой во всех трех рассматриваемых случаях мы и пытаемся здесь получить;

$$\Delta T = T_{W1} - T_{W2}.$$

Количество тепла, отдаваемого ребром в окружающую среду за единицу времени, можно определить путем интегрирования уравнения (2.100):

$$Q = 2\alpha\pi d_{cp} \int_0^{h'} \theta dx = \frac{2\alpha\pi d_{cp}\theta_1}{\mu} \text{th}(\mu h'). \quad (2.101)$$

Если бы ребро имело по всей поверхности постоянную избыточную температуру, равную θ_1 , то количество тепла, отданное ребром в окружающую среду в единицу времени, выражалось бы в следующем виде:

$$Q_1 = 2\alpha\theta_1\pi d_{cp} h'. \quad (2.102)$$

Отношение тепла, действительно рассеиваемого ребром, к теплу, которое ребро могло бы рассеять, если бы разность температур по всей высоте ребра была постоянна и равна θ_1 , называется коэффициентом эффективности ребра (η_p), т. е.

$$\eta_p = \frac{Q}{Q_1}. \quad (2.103)$$

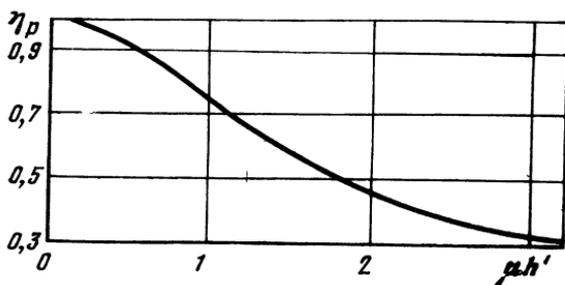


Рис. 2.21. Зависимость коэффициента эффективности ребра от величины $\mu h'$

Подставляя в уравнение (2.103) значения Q и Q_1 из уравнений (2.101) и (2.102), получим

$$\eta_p = \frac{\text{th}(\mu h')}{\mu h'}. \quad (2.104)$$

Графическое выражение функциональной зависимости коэффициента эффективности ребра η_p от величины $\mu h'$ приводится на рис. 2.21. Кроме того, в табл. 2.1 приведены значения коэффициента эффективности ребра η_p для различных ребер, причем величина коэффициента теплоотдачи α принята одинаковой для всех ребер и равной $125 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, что соответствует скорости обтекающей поверхность потока воздуха $40 \text{ м}/\text{с}$.

4. Если h — высота ребра и δ — его толщина, то потеря тепла с торца шириной δ может быть учтена путем замены действительной высоты h величиной $h' = h + \delta/2$.

5. Вследствие того, что толщина δ мала по сравнению с другими размерами ребра, будем считать, что температура зависит лишь от одной координаты x (текущее значение высоты ребра), т. е. будем иметь дело с одномерным стационарным температурным полем $T = f(x)$.

Обозначим через θ разность температур какой-либо точки ребра $T(x)$ и окружающей среды T_f . Тогда

$$\theta = T - T_f f_1(x).$$

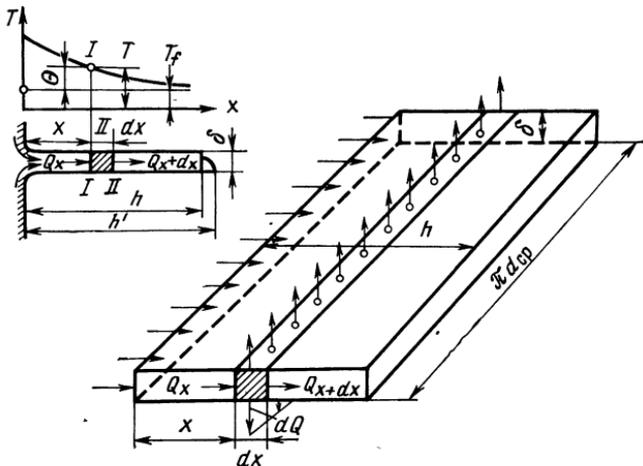


Рис. 2.20. Расчетная схема охлаждающего ребра

Сделаем развертку круга плоского ребра по его среднему диаметру $d_{ср}$ (рис. 2.20). В дальнейшем задача, очевидно, сведется к рассмотренной выше задаче о стержне конечной длины $h' = h + \delta/2$, периметр которого U равен $2\pi d_{ср}$, а площадь поперечного сечения $F = \pi d_{ср} \delta$. Тогда роль β в показателях экспоненты общего решения (2.79) будет согласно выражению (2.77) играть величина

$$\mu = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda \delta}}, \quad (2.99)$$

и распределение температуры по высоте ребра выразится в виде

$$\theta(x) = \theta_1 \frac{\text{Ch} [\mu (h' - x)]}{\text{Ch} (\mu h')}, \quad (2.100)$$

где $\theta_1 = T_1 - T_f$.

В случае круглого стержня диаметром d

$$\beta^2 = \frac{4\alpha}{\lambda d}; \quad \sqrt{\alpha\lambda UF} = \frac{\pi d}{2} \sqrt{\alpha\lambda d}; \quad (2.97)$$

$$Q = \theta_1 \frac{\pi d}{2} \operatorname{th}(\beta L) \sqrt{\alpha\lambda d}. \quad (2.98)$$

2.11. КРУГЛЫЕ ПЛОСКИЕ РЕБРА

Задача правильного конструирования ребер для авиационных и космических теплообменников, цилиндров двигателей воздушного охлаждения, экономайзеров, калориферов и других теплообменных аппаратов, где теплоотдающая поверхность развивается путем оребрения, состоит в том, чтобы получить при данном расходе охлаждающего агента максимальный отвод тепла при минимальных массе и габарите самого аппарата.

Определению подлежат форма, высота и расстояние между ребрами.

Вопрос о наиболее выгоднейшей форме ребра данной массы или данной высоты может быть разрешен математическим путем. При постоянных массе и площади поперечного сечения ребра максимальный отвод тепла будет, если боковые поверхности ребра имеют вогнутую параболическую форму (рис. 2.19, *а*). В таком ребре температурный градиент будет постоянным по его высоте. Однако из-за трудностей технологического характера на практике применяются ребра с поперечным сечением, выполненным в виде трапеции (рис. 2.19, *б*) или прямоугольника (рис. 2.19, *в*).

Аналитическое решение задачи о стационарной теплопроводности для ребра параболической формы и, следовательно, о теплоотдаче с его наружной поверхности встречает ряд трудностей, главная из которых заключается в необходимости знать закон распределения коэффициента теплоотдачи α по поверхности ребра.

Рассмотрим задачу о стационарном распределении температуры в ребре прямоугольной формы при следующих условиях.

1. Температура основания ребра постоянна и равна T_1 .
2. Количество тепла, рассеиваемого за единицу времени с какой-либо части поверхности ребра, пропорционально разности температур ребра и окружающей среды.
3. Коэффициент теплоотдачи α одинаков во всех точках поверхности ребра.

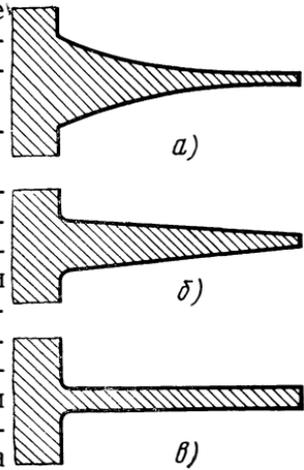


Рис. 2.19. Форма ребер

$$\theta = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}$$

получено без каких-либо предположений о длине стержня, а потому применимо и к стержню конечной длины.

Граничные же условия изменяются: при $x=0$ $\theta = \theta_1 = C_1 + C_2$, или $C_2 = \theta_1 - C_1$; (2.86)

при $x=L$, пренебрегая теплоотдачей с торца стержня, т. е. приравнявая нулю тепловой поток, обусловленный теплопроводностью, в сечении $x=L$

$$Q_L = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_L = 0,$$

получим
$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=L} = 0; \quad (2.87)$$

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=L} = \beta C_1 e^{\beta L} - \beta C_2 e^{-\beta L} = 0. \quad (2.88)$$

По уравнениям (2.86) и (2.88) найдем

$$C_1 (e^{\beta L} + e^{-\beta L}) - \theta_1 e^{-\beta L} = 0, \quad (2.89)$$

откуда
$$C_1 = \frac{\theta_1 e^{-\beta L}}{e^{\beta L} + e^{-\beta L}} = \theta_1 \frac{e^{-\beta L}}{2 \operatorname{Ch}(\beta L)}; \quad (2.90)$$

$$C_2 = \theta_1 - C_1 = \theta_1 \left(1 - \frac{e^{-\beta L}}{e^{\beta L} + e^{-\beta L}} \right) = \theta_1 \frac{e^{\beta L}}{2 \operatorname{Ch}(\beta L)}. \quad (2.91)$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в уравнение (2.79) и переходя к гиперболическим функциям*, получим

$$\theta = \frac{\theta_1}{2 \operatorname{Ch}(\beta L)} (e^{\beta x} e^{-\beta L} + e^{-\beta x} e^{\beta L}) \quad (2.92)$$

или
$$\theta = \frac{\theta_1 [e^{-\beta(L-x)} + e^{\beta(L-x)}]}{2 \operatorname{Ch}(\beta L)} = \theta \frac{\operatorname{Ch}[\beta(L-x)]}{\operatorname{Ch}(\beta L)}; \quad (2.93)$$

при $x=L$ получаем

$$\theta_L = \frac{\theta_1}{\operatorname{Ch}(\beta L)}. \quad (2.94)$$

Тепловой поток, входящий в стержень и передаваемый боковой поверхностью стержня окружающей среде, найдем теперь, пользуясь уравнениями (2.79) и (2.80)

$$Q = -\lambda F \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda F \beta (C_1 - C_2) = \lambda F \beta \frac{\theta_1 (e^{-\beta L} - e^{\beta L})}{2 \operatorname{Ch}(\beta L)} \quad (2.95)$$

или
$$Q = \theta_1 \sqrt{\lambda F \alpha U} \frac{\operatorname{Sh}(\beta L)}{\operatorname{Ch}(\beta L)} = \theta_1 \operatorname{th}(\beta L) \sqrt{\alpha U \lambda F}. \quad (2.96)$$

* Напомним, что $\operatorname{Ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$; $\operatorname{Sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$; $\operatorname{th}(x) = \operatorname{Sh}(x)/\operatorname{Ch}(x)$.

Решение полученного линейного дифференциального уравнения второго порядка можно представить в общем виде:

$$\theta = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}. \quad (2.79)$$

Постоянные C_1 и C_2 могут быть найдены с помощью граничных условий:

$$\text{при } x=0 \quad \theta = \theta_1 = C_1 + C_2;$$

$$\text{при } x=\infty \quad \theta = 0 = C_1 e^\infty.$$

Последнее равенство выполняется только при условии $C_1 = 0$, следовательно, $C_2 = \theta_1$ и $\theta = \theta_1 e^{-\beta x}$. (2.80)

Количество тепла, отдаваемое всей боковой поверхностью стержня, можно получить как тепловой поток, входящий в стержень через его основание

$$Q_1 = -\lambda F \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0}. \quad (2.81)$$

Так как согласно равенству (2.80)

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} = -\beta \theta_1,$$

$$\text{то} \quad Q_1 = \lambda F \beta \theta_1, \quad (2.82)$$

$$\text{или} \quad Q_1 = \theta_1 \sqrt{\alpha U \lambda F}. \quad (2.83)$$

Если теплоотдача от стержня к среде идет не по всей поверхности стержня, то под величиной U надо понимать ту часть периметра сечения, по которой осуществляется теплообмен. Для стержня круглого сечения с диаметром d при теплоотдаче по всей поверхности получим

$$\beta = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda d}}; \quad (2.84)$$

$$Q_1 = \frac{\pi d}{2} \theta_1 \sqrt{\lambda \alpha d}. \quad (2.85)$$

2.10. СТЕРЖЕНЬ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Если длина стержня конечна, то температура на его конце не будет равна температуре окружающей среды, а потому выведенные выше формулы не будут справедливы.

Пусть длина стержня равна L , а превышение температуры холодного конца стержня над окружающей средой — θ_L . Теплоотдачей с торца стержня будем пренебрегать или учтем ее увеличением длины стержня с таким расчетом, чтобы боковая поверхность удлиненного стержня равнялась бы полной боковой и торцевой поверхностям реального стержня.

Общее решение (2.79) дифференциального уравнения (2.78)

Выражение (2.105) практически совпадает с формулой (2.23) для плоской стенки. Следовательно, в этом случае F_x есть не что иное, как площадь плоской стенки F , поток тепла через которую мы рассматриваем, и может быть описана так:

$$F_{x_{пл}} = \frac{2F}{2} = \frac{F_1 + F_2}{2}, \quad (2.106)$$

где F_1 и F_2 — площади более нагретой и более холодной поверхностей. (Очевидно, что для плоской пластины $F_1 \equiv F_2$).

В случае цилиндрической трубы согласно выражению (2.47) тепловой поток равен

$$Q = \frac{2\pi\lambda l}{\ln(r_2/r_1)} (T_{w1} - T_{w2}).$$

Помножив числитель и знаменатель этого выражения на $r_2 - r_1 = \delta$, а числитель и знаменатель выражения под знаком логарифма — на $2\pi l$, получим

$$Q = \frac{\lambda}{r_2 - r_1} \frac{2\pi l (r_2 - r_1)}{\ln(2\pi l r_2 / 2\pi l r_1)} \Delta T = \frac{\lambda}{\delta} \frac{2\pi l r_2 - 2\pi l r_1}{\ln(2\pi l r_2 / 2\pi l r_1)} \Delta T.$$

Это выражение сводится к выражению (2.105), если положить

$$F_{x_{ц}} = \frac{2\pi l r_2 - 2\pi l r_1}{\ln(2\pi l r_2 / 2\pi l r_1)} = \frac{F_2 - F_1}{\ln(F_2/F_1)}, \quad (2.107)$$

где F_1 и F_2 — площади внутренней и наружной поверхностей цилиндрической трубы.

Аналогично можно преобразовать выражение (2.68) для шаровой стенки:

$$Q = \frac{4\pi\lambda}{1/r_1 - 1/r_2} (T_{w1} - T_{w2}).$$

Проведя вычитание в знаменателе, после простых преобразований получим

$$Q = \frac{4\pi\lambda r_1 r_2}{r_2 - r_1} \Delta T = \pi\lambda \frac{d_1 d_2}{\delta} \Delta T. \quad (2.108)$$

Поскольку площадь сферы равна πd^2 , то диаметры d_1 и d_2 можно выразить через площади внутренней F_1 и внешней F_2 поверхностей шаровой стенки в виде

$$d_1 = \sqrt{\frac{F_1}{\pi}} \quad \text{и} \quad d_2 = \sqrt{\frac{F_2}{\pi}}. \quad (2.109)$$

Подставляя выражение (2.109) в равенства (2.108), получим

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} \pi \sqrt{\frac{F_1 F_2}{\pi^2}} \Delta T.$$

Это выражение сводится к формуле (2.105), если положить

$$F_{x \text{ шар}} = \sqrt{F_1 F_2}. \quad (2.110)$$

Итак, мы получили выражения для площади фиктивной расчетной поверхности F_x , которые позволяют рассчитывать тепловой поток в рассмотренных трех случаях по единой формуле (2.105). Преимущества такого подхода в случае правильных пластины, цилиндра и шара весьма относительно. Однако, пользуясь формулой (2.105) и одним из выведенных выше выражений для F_x —(2.106), (2.107) или (2.110), можно приближенно рассчитать стационарный тепловой поток в телах более сложной формы.

Так, по формулам (2.105) и (2.106) можно оценить Q для плиты, представляющей собой усеченный конус или пирамиду, и вообще для элемента пластины произвольной формы в плане со скошенным срезом.

В совокупности с выражением (2.107) по формуле (2.105) можно приближенно рассчитать тепловой поток через цилиндрическую стенку некруглого сечения.

Та же формула (2.105), но с F_x , вычисленной по формуле (2.110), позволит оценить тепловой поток через стенки замкнутой несферической оболочки, образованной, например, эллипсоидами вращения и т. п.

В ряде практических случаев температура на поверхности T_w не является постоянной, а следовательно, непостоянна и величина температурного напора ΔT в формуле (2.105). При не слишком больших изменениях температуры по поверхности можно воспользоваться усредненными значениями температур поверхностей

$$\bar{T}_w = \frac{1}{F} \int_F T_w dF.$$

Если же изменения велики, то расчет теплового потока следует вести по участкам, рассчитывая величину Q_i на участке ΔF_i , где $(T_w)_{1-2} = \text{const}$. Для получения суммарного потока останется просуммировать локальные тепловые потоки Q_i по всей поверхности рассматриваемого тела.

При значительных изменениях температуры твердых тел необходимо учитывать также и зависимость $\lambda = \lambda(T)$. Легко показать, что полученные выше формулы расчета теплопроводности при постоянном λ могут быть распространены и на случаи, когда $\lambda = \lambda(T)$, если в эти соотношения подставить среднее значение коэффициента теплопроводности по формуле

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} \lambda dT}{T_2 - T_1}.$$

2.13. СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕМНОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ($q_V \neq 0$)

Как уже говорилось (см. разд. 2.3), в веществе наряду с процессом теплопроводности может протекать выделение или поглощение тепла, связанное с какими-либо физико-химическими явлениями: конденсацией, джоулевым нагреванием, ядерными реакциями, экзо- или эндотермическими химическими реакциями и т. п.

С позиции теплообмена такие явления могут быть охарактеризованы количеством тепла, выделяющегося или поглощающегося в единице объема вещества в единицу времени q_V Вт/м³. Эта характеристика носит название интенсивности объемного тепловыделения.

Рассмотрим простейшие задачи стационарной теплопроводности при наличии объемного тепловыделения, полагая, что величина q_V не зависит от времени и координат.

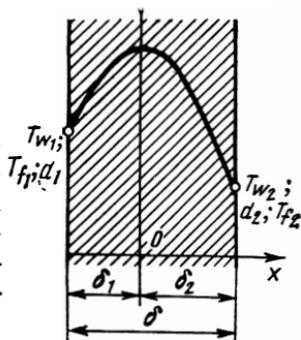


Рис. 2.22. Распределение температур в пластине при объемном тепловыделении

2.13.1. Бесконечная плоская пластина

Основное дифференциальное уравнение теплопроводности (2.15) для этой одномерной задачи будет иметь вид

$$a \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q_V}{c\rho} = 0.$$

Принимая во внимание, что $a = \lambda / (c\rho)$, получим

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q_V}{\lambda} = 0. \quad (2.111)$$

Переносим q_V/λ в правую часть и считая $q_V = \text{const}$, после первого интегрирования получим

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q_V}{\lambda} x + C_1, \quad (2.112)$$

а после второго —

$$f(x) = -\frac{q_V x^2}{2\lambda} + C_1 x + C_2. \quad (2.113)$$

Выражение (2.113) является общим решением уравнения (2.111). Постоянные интегрирования находятся из граничных условий.

Рассмотрим вначале задачу с граничными условиями 3-го рода. Пусть слева пластина омывается средой с температурой T_{f1} и коэффициент теплоотдачи между пластиной и средой равен α_1 ; те же параметры справа от пластины обозначим через T_{f2} и α_2 соответственно (рис. 2.22).

При интенсивном тепловыделении внутри пластины тепло может отдаваться в омывающие ее среды с обеих поверхностей, т. е. кривая распределения температур по толщине пластины будет иметь максимум.

Пусть ось ординат проходит через этот максимум на расстоянии δ_2 от правой поверхности пластины. (Величину δ_2 мы определим позднее). Тогда из равенства нулю производной dT/dx при $x=0$ (условие максимума) следует, что $C_1=0$, и решение (2.113) примет следующий вид

$$f(x) = -\frac{q_V x^2}{2\lambda} + C_2. \quad (2.114)$$

Граничное условие 3-го рода на этой поверхности,

$$\alpha_2(T_{W2} - T_{f2}) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\delta_2},$$

после подстановки T_{W2} и $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\delta_2}$ из выражения (2.114) примет вид

$$\alpha_2 \left(C_2 - \frac{q_V \delta_2^2}{2\lambda} - T_{f2} \right) = -\lambda \left(-\frac{q_V \delta_2}{\lambda} \right),$$

или

$$\alpha_2 \left(C_2 - \frac{q_V \delta_2^2}{2\lambda} - T_{f2} \right) = q_V \delta_2. \quad (2.115)$$

Последнее выражение можно интерпретировать, исходя из физического содержания рассматриваемой задачи. Поскольку плоскость $x=0$ можно считать теплоизолированной $[(dT/dx)_{x=0}=0]$, следовательно, $q = \left| -\lambda \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$, т. е. все тепло, выделившееся в пластине справа от этой плоскости в единицу времени, должно быть отведено в окружающую среду посредством теплоотдачи с правой поверхности стенки. В противном случае будет нарушено условие стационарности процесса, и температура в стенке вследствие изменения ее теплосодержания будет изменяться. Величина $q_V \delta_2$ и представляет собой количество тепла, выделяющегося в единицу времени в объеме пластины с толщиной δ_2 и площадью, равной единице. Слева же в уравнении

(2.115) стоит выражение для потока теплоотдачи с единицы площади поверхности пластины.

Аналогичные рассуждения для слоя пластины, расположенного слева и имеющего толщину $\delta_1 = \delta - \delta_2$, приводят к уравнению

$$\alpha_1 \left(C_2 - \frac{q_V (\delta - \delta_2)^2}{2\lambda} - T_{f1} \right) = q_V (\delta - \delta_2). \quad (2.116)$$

Из уравнений (2.115) и (2.116) константа C_2 выражается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \frac{q_V \delta_2}{\alpha_2} + \frac{q_V \delta_2^2}{2\lambda} + T_{f2}; \\ C_2 &= \frac{q_V (\delta - \delta_2)}{\alpha_1} + \frac{q_V (\delta - \delta_2)^2}{2\lambda} + T_{f1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.117)$$

Решая систему (2.117) относительно δ_2 , получим

$$\delta_2 = \frac{2\lambda\alpha_1\alpha_2\Delta T_f + q_V\delta\alpha_2(\delta\alpha_1 + 2\lambda)}{2q_V[\delta\alpha_1\alpha_2 + \lambda(\alpha_1 + \alpha_2)]}, \quad \text{где } \Delta T_f = T_{f1} - T_{f2}. \quad (2.118)$$

Этим выражением определяется положение максимума кривой распределения температуры по толщине пластины*.

Постоянную C_2 в решении (2.114) найдем подстановкой выражения (2.118) в любое из уравнений системы (2.117).

Решение задачи принимает особо простой вид в случае симметричного теплосъема с пластины, т. е. когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и $T_{f1} = T_{f2} = T_f$. Физически очевидно, да и из выражения (2.118) следует, что $\delta_2 = \delta/2$, т. е. максимальная температура достигается в плоскости симметрии пластины.

Тогда из формулы (2.117) находим

$$C_2 = \frac{q_V \delta}{2\alpha} + \frac{q_V \delta^2}{8\lambda} + T_f$$

и

$$T(x) = \frac{q_V}{2\lambda} \left[\left(\frac{\delta}{2} \right)^2 - x^2 \right] + \frac{q_V \delta}{2\alpha} + T_f. \quad (2.119)$$

Из решения (2.119) видно, что распределение температуры имеет вид квадратичной параболы, а максимальная температура

$$T_{\max} = T \Big|_{x=0} = \frac{q_V \delta^2}{8\lambda} + \frac{q_V \delta}{2\alpha} + T_f \quad (2.120)$$

при постоянных q_V и δ будет тем больше, чем меньше теплопро-

* При не слишком интенсивном тепловыделении и большой разности температур сред $\Delta T_f = T_{w1} - T_{w2}$ величина δ_2 может оказаться больше толщины пластины δ . Это означает, что внутри пластины нет максимума и результирующий тепловой поток направлен через пластину от горячей (T_{f1}) к холодной (T_{f2}) среде, а координата δ_2 указывает положение фиктивного максимума. В пределе, при $q_V = 0$, $\delta_2 \rightarrow \infty$, что естественно, так как в этом случае распределение температуры линейно (см. 2.7).

водность пластины λ и чем хуже теплоотдача с ее поверхности, т. е. чем меньше α .

Температура на поверхности пластины ($x = \delta/2$), равная

$$T_w = \frac{q_V \delta}{2\alpha} + T_f, \quad (2.121)$$

также растет с ухудшением теплоотдачи.

Решение задачи с граничными условиями 1-го рода легко получить, определив δ_2 и постоянную C_2 из решения системы

$$\left. \begin{aligned} -\frac{q_V \delta_2^2}{2\lambda} + C_2 &= T_{w2}; \\ -\frac{q_V (\delta - \delta_2)^2}{2\lambda} + C_2 &= T_{w1}, \end{aligned} \right\} \quad (2.122)$$

являющейся математической записью граничных условий.

Максимум температуры будет располагаться на расстоянии δ_2 от правой поверхности стенки, причем

$$\delta_2 = \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{2\lambda \Delta T_w}{q_V \delta^2} \right), \quad (2.123)$$

где $\Delta T = T_{w1} - T_{w2}$. Решение же задачи примет такой вид:

$$T(x) = T_{w2} + \frac{q_V}{2\lambda} \left\{ \left[\frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{2\lambda \Delta T}{q_V \delta^2} \right) \right]^2 - x^2 \right\}. \quad (2.124)$$

При очень больших значениях коэффициента теплоотдачи граничные условия 3-го рода переходят в граничные условия 1-го рода с $T_w = T_f$ (2.4). Это позволяет получить формулы распределения температур и максимальной температуры пластины при симметричном теплосъеме и граничных условиях 1-го рода ($T_{w1} = T_{w2} = T_w$) из выражений (2.119) и (2.120), считая $\alpha \rightarrow \infty$

$$\text{Тогда} \quad T(x) = \frac{q_V}{2\lambda} \left[\left(\frac{\delta}{2} \right)^2 - x^2 \right] + T_w \quad (2.125)$$

$$\text{и} \quad T_{\max} = \frac{q_V \delta^2}{8\lambda} + T_w. \quad (2.126)$$

2.13.2. Бесконечный цилиндр с объемным тепловыделением

Дифференциальное уравнение теплопроводности при наличии объемного тепловыделения для одномерной стационарной задачи запишется в цилиндрических координатах [см. выражение (2.17)] в виде

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_V}{\lambda} = 0. \quad (2.127)$$

Заменяя dT/dr на u и умножая все члены на r , получим

$$r \frac{du}{dr} + u + \frac{q_V r}{\lambda} = 0. \quad (2.128)$$

Два первых члена этого уравнения можно представить как производную от произведения ru : $\frac{d(ru)}{dr} = r \frac{du}{dr} + u$,

а уравнение (2.128) переписать в виде $\frac{d(ru)}{dr} = -\frac{qv r}{\lambda}$.

Интегрируя по r , найдем $ru = -\frac{qv r^2}{2\lambda} + C_1$,

откуда обратной заменой u на dT/dr получим

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{qv r}{2\lambda} + \frac{C_1}{r}. \quad (2.129)$$

Общее решение задачи найдем повторным интегрированием:

$$T(r) = -\frac{qv r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2. \quad (2.130)$$

Из осевой симметрии задачи $(\partial T/\partial r)_{r=0} = 0$, следовательно, $C_1 = 0$.

В задаче с граничными условиями 3-го рода постоянная C_2 найдется из уравнения

$$\alpha [T(R) - T_f] = -\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R}, \quad (2.131)$$

где R — наружный радиус цилиндра, а T_f и α — заданные значения температуры окружающей среды и коэффициента теплоотдачи.

Подставим в выражение (2.131) значения $T(R)$ и $\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R}$ из равенств (2.129) и (2.130): $\alpha \left(C_2 - \frac{qv R^2}{4\lambda} - T_f \right) = -\lambda \left(-\frac{qv R}{2\lambda} \right)$.

Тогда $C_2 = \frac{qv R}{2\alpha} + \frac{qv R^2}{4\lambda} + T_f$.

Таким образом, распределение температуры по радиусу цилиндра выразится формулой

$$T(r) = \frac{qv}{4\lambda} (R^2 - r^2) + \frac{qv R}{2\alpha} + T_f. \quad (2.132)$$

Максимальная температура (на оси стержня) будет равна

$$T_{\max} = T \Big|_{r=0} = \frac{qv R^2}{4\lambda} + \frac{qv R}{2\alpha} + T_f, \quad (2.133)$$

а температура на поверхности

$$T_w = T(R) = \frac{qv R}{2\alpha} + T_f. \quad (2.134)$$

Решение для случая граничных условий 1-го рода получим из формулы (2.132), положив $\alpha \rightarrow \infty$ ($T_w = T_f$).

Рекомендуемая литература: [5, 35, 39, 82]

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА И ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

3.1. УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Особенностью процесса конвективного теплообмена (теплоотдачи) является то, что среда, в которой происходят процессы распространения тепла, движется. В результате движения, вместе с массой жидкости (газа) переносится и тепло. Очевидно, что этот процесс переноса тепла определяется свойствами потока — распределением скоростей, режимом течения.

Динамические свойства потока описываются уравнениями движения и неразрывности. Эти уравнения являются следствием приложения основных законов механики — закона сохранения импульса и закона сохранения массы — к задаче о движении жидкости (газа). Дополнительно при выводе уравнений движения используются реологические законы, под которыми понимают уравнения, связывающие слагающие тензоров напряжений, деформаций и скоростей деформаций.

Для большинства жидкостей (газов) реологический закон состоит в утверждении, что между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций имеет место линейная связь. Этот закон носит наименование обобщенного закона Ньютона. Жидкости, для которых справедлив этот закон, называются ньютоновскими. Вывод уравнений движения и неразрывности приведен во многих учебниках по гидродинамике (например, в книге [97]). Выпишем эти уравнения для ньютоновской жидкости, поскольку в дальнейшем они потребуются нам.

В случае, когда жидкость можно считать несжимаемой ($\rho = \text{const}$), а изменением вязкости с температурой можно пренебречь, уравнения движения и неразрывности в векторной форме записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.1)$$

$$\text{div } \vec{V} = 0. \quad (3.2)$$

Здесь \vec{V} — вектор скорости;
 ν — коэффициент кинематической вязкости;

p — давление;
 \vec{F} — объемные силы;
 ρ — плотность жидкости;
 τ — время.

Уравнению (3.1) в декартовой системе координат соответствует следующая система уравнений в проекциях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u; \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v; \\ \frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Уравнение неразрывности (3.2) в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.4)$$

В случае вязкого сжимаемого газа уравнения движения и неразрывности имеют более сложный вид [97]:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{d\tau} = \rho \vec{F} - \text{grad} \left(p + \frac{2}{3} \mu \text{div} \vec{V} \right) + 2 \text{div} (\mu \dot{S}); \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div} (\rho \vec{V}) = 0, \quad (3.6)$$

где \dot{S} — тензор скоростей деформаций;

μ — коэффициент динамической вязкости.

Уравнению (3.5) соответствует следующая система уравнений в проекциях:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{d\tau} &= \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \text{div} \vec{V}); \\ \rho \frac{dv}{d\tau} &= \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \text{div} \vec{V}); \\ \rho \frac{dw}{d\tau} &= \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \text{div} \vec{V}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Уравнение неразрывности в декартовой системе координат будет иметь вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0.$$

При исследованиях пространственных течений приходится пользоваться не только декартовыми координатами. В некоторых случаях удобнее использовать цилиндрические, сферические, эллиптические и другие криволинейные ортогональные координаты*.

Уравнения движения и неразрывности описывают свойства потока во внутренних его точках. Для описания свойств потока на поверхности твердого тела (т. е. на границе потока) привлекаются дополнительные соображения.

На поверхности тела выполняются, так называемые, условия «полного прилипания». Согласно этим условиям частицы жидкости (газа), непосредственно прилегающие к поверхности тела, как бы прилипают — их скорость относительно поверхности равна нулю. Эти частицы образуют на поверхности тела бесконечно-тонкий неподвижный слой. Таким образом, на твердой непроницаемой поверхности всегда выполняется условие

$$(u)_w = (v)_w = (w)_w = 0.$$

Если поверхность проницаемая, то в этом случае равна нулю лишь составляющая скорости, касательная к поверхности. Нормальная составляющая может отличаться от нуля (вдув, отсос).

Течение жидкости (газа) может быть ламинарным или турбулентным. Приведенные выше уравнения, описывающие распределение мгновенных скоростей в потоке, справедливы как для ламинарного, так и для турбулентного движения. Однако структура турбулентного потока чрезвычайно сложна. Траектории отдельных частиц (комков) жидкости весьма запутанны. Поэтому интегрирование уравнений с целью определения мгновенных значений u , v , w и т. д. становится при турбулентном движении настолько сложным, что практически оно невыполнимо. Поэтому при изучении турбулентных потоков приходится ограничиваться рассмотрением осредненной картины течения. Таким образом, для описания турбулентных потоков используются осредненные уравнения, вытекающие из вышеприведенных уравнений. Эти уравнения носят имя О. Рейнольдса.

Уравнения Рейнольдса для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) при условиях, когда можно принять $v = \text{const}$ имеют в

* Подробное изложение теории ортогональных криволинейных координат и полная сводка формул, необходимых для перехода от прямолинейных координат к криволинейным содержатся, например, в книге Н. Е. Кочина «Векторное исчисление и начало тензорного исчисления». М., ОНТИ, 1934 г.

декартовой системе координат следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dv} &= F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \right]; \\ \frac{d\bar{v}}{dv} &= F_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \bar{v} - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'}) \right]; \\ \frac{d\bar{w}}{dv} &= F_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \bar{w} - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'w'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'w'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'w'}) \right]. \end{aligned} \right\} (3.8)$$

Здесь $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ — осредненные значения составляющих скорости;

\bar{p} — осредненное давление;

$\overline{u'v'w'}$ — пульсации составляющих скорости;

$(\overline{u'v'})$, $(\overline{w'v'})$ и т. д. — осредненные произведения пульсаций скорости;

$$\nabla^2 \bar{u} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}.$$

Уравнения Рейнольдса (3.8) описывают распределение средних значений \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , \bar{p} и по сравнению с уравнениями (3.3) содержат в квадратных скобках дополнительные члены, обусловленные наличием пульсаций.

Осредненное движение так же, как и ламинарное, рассматривается как слоистое. Каждому слою осредненного потока соответствует некоторое среднее значение скорости. Из слоя в слой перебрасываются вследствие турбулентного перемешивания комки или, как их называют, моли жидкости*. Эти комки переносят из слоя в слой некоторое количество движения. Если в двух соседних слоях осредненная скорость различная, то и количества движения (импульс), получаемые и отдаваемые этими слоями, будут различными. Этот обмен количеством движения и характеризуется дополнительными членами. *Процесс обмена количеством движения между слоями осредненного потока в силу турбулентного перемешивания молей называется турбулентным трением.*

Вблизи поверхности тела (стенки), как показывает эксперимент, турбулентные пульсации гасятся, и характер течения становится близким к ламинарному. Вблизи стенки существует тонкий слой, где влиянием пульсаций на перенос импульса можно пренебречь. Этот слой, где напряжение трения обусловлено обычной (молекулярной) вязкостью, получил название динамического ламинарного подслоя. Говорить о толщине ламинарного подслоя можно лишь условно, так как затухание пульсаций по мере приближения к стенке происходит постепенно.

Описание температурного поля в движущейся жидкости (или газе) дает в общем виде уравнение энергии (или баланса тепла), которое выводится на основе закона сохранения энергии; при этом привлекается дополнительно закон теплопроводности Фурье. Подробный вывод уравнения энергии дается во многих учебниках и монографиях по механике жидкости. Опуская вывод этого уравнения, выпишем его для идеального газа при условиях, когда необходимо учитывать сжимаемость газа и работу сил трения (внутренние источники тепла отсутствуют):

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \text{div } \vec{q} + \mu \Phi + p \text{div } \vec{V}, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Phi = & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} [\text{div } \vec{V}]^2; \quad (3.10) \\ \text{div } \vec{q} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Член $\text{div } \vec{q}$ в правой части уравнения (3.9) учитывает тепло, поступающее в силу теплопроводности; член $\mu \Phi$ учитывает нагревание жидкости от внутреннего трения. Функцию Φ называют диссипативной функцией. Она учитывает тот факт, что из-за внутреннего трения механическая энергия рассеивается и частично переходит в тепло. Член $p \text{div } \vec{V}$ учитывает работу сил давления.

Из уравнения неразрывности следует, что

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (3.11)$$

Следовательно, член, учитывающий работу сил давления, можно представить в виде

$$p \text{div } \vec{V} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (3.12)$$

Для совершенных газов, как известно, выполняется соотношение

$$p = \rho RT.$$

С учетом последнего, работу сил давления можно представить следующим выражением:

$$p \text{div } \vec{V} = \frac{dp}{dt} - \rho R \frac{dT}{dt}. \quad (3.13)$$

С учетом этих замечаний уравнение энергии примет вид

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \text{div } \vec{q} + \mu \Phi + \frac{dp}{dt}. \quad (3.14)$$

Полученное уравнение энергии (3.14) описывает распределение мгновенных значений температур. Оно справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного течений. Однако при изучении турбулентных потоков приходится органичиваться осредненной картиной распределения температур. Причины этого обсуждались выше.

Осредненное уравнение энергии, описывающее распределение осредненных температур в турбулентном потоке, можно получить из уравнения для мгновенных величин методом Рейнольдса. Выписывая конечный результат, мы ограничимся случаем, когда можно пренебречь диссипацией энергии и работой сил давления. Кроме того, будем полагать, что $\lambda = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $c_p = \text{const}$. Для этих условий осредненное уравнение энергии будет иметь вид

$$\rho c_p \frac{dT}{d\tau} = \lambda \nabla^2 T - \rho c_p \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{T'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{T'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{T'w'}) \right], \quad (3.15)$$

где
$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{\partial T}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial T}{\partial z};$$

$$\nabla^2 T_f = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2};$$

$$\overline{T'u'} = \frac{1}{\Delta \tau} \int_0^{\Delta \tau} (T'u') d\tau \text{ — осредненное произведение пульсаций}$$

температуры и составляющей скорости.

Осредненное уравнение энергии по сравнению с уравнением для мгновенных значений содержит дополнительные члены, обусловленные пульсациями температуры и скорости.

Поскольку осредненное движение так же, как и ламинарное, рассматривается как слоистое, каждому слою осредненного потока соответствует некоторое осредненное значение температуры, и перебрасываемые из слоя в слой комки (моли) жидкости переносят вместе с массой из слоя в слой некоторое количество тепла. В результате между слоями осредненного потока имеет место теплообмен. *Процесс обмена теплом между слоями осредненного потока в силу турбулентного перемешивания молекул называется турбулентной теплопроводностью.*

При исследовании теплообмена в турбулентных потоках необходимо иметь в виду, что в непосредственной близости от стенки существует тонкий ламинарный подслой. Передача тепла через этот подслой осуществляется только путем обычной молекулярной теплопроводности. Экспериментами установлено, что толщина подслоя, где основную роль играет молекулярная (а не турбулентная) теплопроводность, в общем случае отличается от толщины динамического ламинарного подслоя.

Рассматривая уравнение энергии, мы можем заметить, что оно содержит в себе составляющие скорости u , v , w и их производные, а также плотность ρ и давление p . Эти величины являются функциями координат и времени. Для того чтобы выполнить интегрирование уравнения энергии и найти распределение температуры в потоке, необходимо знать распределение составляющих скорости u , v , w давления p и плотности ρ в потоке. Распределение составляющих скорости и давлений описывается, как уже отмечалось, совокупностью трех уравнений движения и уравнения неразрывности. Если к пяти уравнениям — уравнению энергии, уравнению неразрывности и трем уравнениям движения — добавить шестое — уравнение состояния $f(p, \rho, T) = 0$, то получим совокупность шести уравнений для шести неизвестных u , v , w , ρ , p , T . Если при этом заданы функции $c_p = c(T)$, $\mu = \mu(T)$, $\lambda = \lambda(T)$, то мы располагаем замкнутой системой уравнений. Совместное решение этих уравнений при заданных условиях однозначности дает искомое температурное поле в потоке. После того, как будет найдено распределение температуры в жидкости, мы можем вычислить коэффициенты теплоотдачи для всех точек поверхности тела, привлекая для этого уравнение конвективного теплообмена

$$\alpha = \frac{\lambda}{(T_* - T_w)} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w,$$

где α — коэффициент теплоотдачи в некоторой точке поверхности омываемого жидкостью тела;

T_w — температура стенки;

T_* — характерная температура жидкости;

n — нормаль к поверхности;

$(\partial T / \partial n)_w$ — градиент температуры у стенки;

λ — коэффициент теплопроводности жидкости.

Совокупность упомянутых уравнений называется общим аналитическим описанием теплоотдачи.

Явления теплоотдачи конкретизируются при помощи условий однозначности. В них входят:

1) геометрия (форма и размеры) поверхности тела;

2) физические условия [(род жидкости, зависимости $\mu(T)$, $\lambda(T)$, $c(T)$];

3) начальные условия (распределение T , u , p в начальный момент времени, т. е. при $\tau = 0$);

4) граничные условия (значения T , u , v , w , p на границах потока).

3.2. ПОДОБИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Ранее было показано, что конвективный теплообмен представляет собой класс сложных физических явлений, математическое описание которых может быть представлено системой дифференциальных уравнений. Эти уравнения, составленные на

оснований законов физики, отражают свойства явлений общие для всего класса, и содержат большое количество разнородных взаимосвязанных физических величин. Решение такой системы дифференциальных уравнений встречается с математическими трудностями. Только в некоторых случаях и при целом ряде упрощающих предпосылок удается получить аналитическое (или численное) решение.

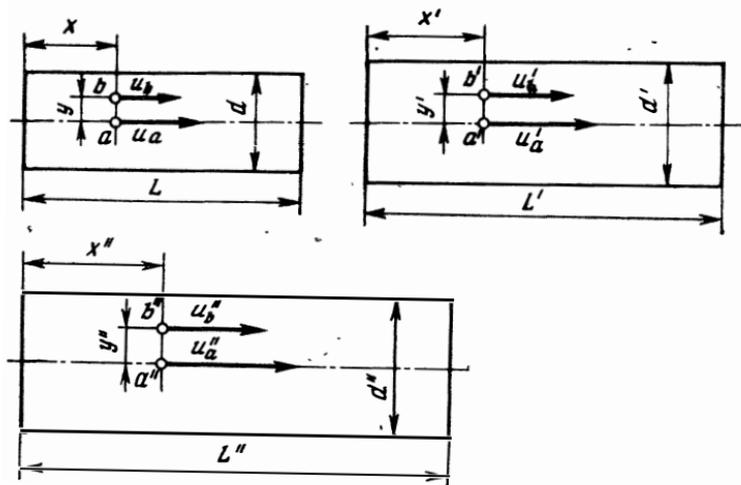


Рис. 3.1. К понятию подобия физических явлений

В связи с этим часто приходится обращаться к экспериментам. При постановке эксперимента должно быть заранее известно, как построить модель для исследования явления, какие величины измерять при проведении опытов, как обрабатывать полученные данные и на какие группы явлений можно распространить результаты.

Ответы на эти вопросы могут быть получены при использовании теории подобия, которая дает метод исследования сложных явлений, зависящих от большого количества разнородных физических величин.

Методы теории подобия применяются в аэродинамике, газодинамике, гидравлике и других отраслях науки. К исследованию процессов конвективного теплообмена теория подобия была впервые применена Нуссельтом в 1910 г.

В последующие годы А. А. Гухманом, М. В. Кирпичевым, М. А. Михеевым, Л. И. Седовым и другими советскими учеными была проведена большая работа по дальнейшему развитию теории подобия.

Напомним, что в геометрии подобными называют фигуры, имеющие одну и ту же форму и обладающие свойством пропорциональности сходственных линейных размеров.

Рассмотрим такой пример: если изображенные на рис. 3.1 три цилиндрические трубы с диаметрами d ; d' ; d'' и длинами L ;

L' ; L'' геометрически подобны, то для них могут быть составлены соотношения:

$$\frac{d'}{d} = \frac{L'}{L} = C_1; \quad \frac{d''}{d} = \frac{L''}{L} = C_2.$$

Такие отношения сходственных линейных размеров двух геометрически подобных систем обозначают C и называют константой или масштабом геометрического подобия.

Очевидно, численные значения этих констант при перемене систем отличны друг от друга: $C_1 \neq C_2$.

Свойство пропорциональности линейных размеров рассматриваемых систем позволяет составить и другие соотношения. Например, значения отношений диаметров труб к их длинам будут одинаковы для всех трех труб:

$$\frac{d}{L} = \frac{d'}{L'} = \frac{d''}{L''} = i.$$

Это отношение двух линейных размеров в одной и той же системе обозначают i и называют инвариантом геометрического подобия (инвариантность означает неизменность). Как константы, так и инварианты геометрического подобия являются величинами безразмерными. Нетрудно видеть, что при перемене систем значение константы подобия изменяется, а значение инварианта подобия остается неизменным, в то время как при перемене линейных размеров в одной и той же системе значение константы подобия сохраняется, а значение инварианта подобия изменяется.

По аналогии с геометрическим подобием может быть введено понятие подобия физических явлений.

Физические явления одного класса могут рассматриваться как подобные, если они протекают в геометрически подобных системах таким образом, что подобны поля всех однородных физических величин, характеризующих эти явления, например: поля температур, скоростей, плотностей, давлений и т. п. Это означает, что в сходственных точках изучаемого пространства в сходственные моменты времени однородные величины первого явления пропорциональны однородным величинам второго явления. Под однородными следует понимать величины, имеющие один и тот же физический смысл и одну и ту же размерность. Как уже упоминалось, геометрическое подобие является необходимой предпосылкой подобия физических явлений.

Условие подобия полей физических величин также может быть выражено через константы и инварианты физического подобия.

Константой физического подобия называется отношение однородных величин в двух сходственных точках рассматриваемых

мых систем. При этом каждая физическая величина имеет свою константу подобия, которая снабжается специальным подстрочным индексом. Например, C_u — константа подобия по скорости, C_ρ — константа подобия по плотности и т. д.

Если по трем геометрически подобным трубам, представленным на рис. 3.1, протекают физически подобные потоки, то условие их физического подобия может быть выражено следующим образом.

В сечениях потоков, расположенных от начального на расстояниях x, x', x'' , возьмем точки a на осях потоков и точки b — на расстояниях от осей y, y', y'' . Условие одновременности этих точек связано с константами геометрического подобия:

$$x'/x = y'/y = C_1; \quad x''/x = y''/y = C_2.$$

Если в намеченных точках a и b значения скоростей и плотностей потоков обозначить соответственно u_a, u_b, ρ_a, ρ_b , то константы подобия по скорости и плотности будут иметь вид:

$$C_{u1} = \frac{u'_a}{u_a} = \frac{u'_b}{u_b}; \quad C_{u2} = \frac{u''_a}{u_a} = \frac{u''_b}{u_b};$$

$$C_{\rho1} = \frac{\rho'_a}{\rho_a} = \frac{\rho'_b}{\rho_b}; \quad C_{\rho2} = \frac{\rho''_a}{\rho_a} = \frac{\rho''_b}{\rho_b}.$$

Аналогичные соотношения могут быть составлены для всех физических величин, характеризующих рассматриваемое явление.

Очевидно, при перемене сравниваемых систем численные значения констант физического подобия различны:

$$C_{u1} \neq C_{u2}; \quad C_{\rho1} \neq C_{\rho2}.$$

Итак, подобие полей физических величин в геометрически подобных системах означает пропорциональность однородных физических величин в сходственных точках этих систем. Иначе говоря, подобные поля однородных физических величин в сходственные моменты времени различаются только неодинаковостью их масштабов.

Следствием подобия полей однородных физических величин является подобие осредненных значений этих величин, а также подобие их градиентов.

Условия физического подобия полей однородных величин может быть выражено и через инварианты подобия.

Для систем, изображенных на рис. 3.1, инварианты подобия физических величин могут быть представлены как отношения значений этих величин в точках «а» и «б» к значению на осях потоков. Так, например, инварианты подобия по скорости и

плотности будут иметь вид

$$i_u = \frac{u_b}{u_a} = \frac{u'_b}{u'_a} = \frac{u''_b}{u''_a}; \quad i_Q = \frac{Q_b}{Q_a} = \frac{Q'_b}{Q'_a} = \frac{Q''_b}{Q''_a}.$$

Очевидно, значения инвариантов подобия однородных величин при перемене систем остаются неизменными. Если рассматриваются осредненные значения физических величин, то в качестве инвариантов подобия может быть принято, например, отношение осредненного значения какой-либо физической величины в рассматриваемом сечении к осредненному значению этой же величины в начальном сечении потока.

Значения констант и инвариантов подобия разнородных физических величин в общем случае численно неодинаковы: $C_u \neq C_Q$; $i_u = i_Q$, но они связаны между собой, если эти физические величины зависят друг от друга. Во многих случаях связь между физическими величинами может быть представлена в виде уравнений (в том числе и дифференциальных), которые называются уравнениями связи. С их помощью инварианты подобия могут быть получены не только в виде симплексов (т. е. отношений двух однородных величин), но и в виде безразмерных комплексов, составленных из разнородных физических величин. Такие безразмерные инварианты-комплексы и являются критериями*, или числами подобия, характеризующими рассматриваемое явление. Очевидно, количество их всегда окажется меньше количества размерных физических величин.

3.3. ТРИ ТЕОРЕМЫ ПОДОБИЯ

Применяя теорию подобия для исследования сложных явлений, используют три основных теоремы подобия.

Первая теорема подобия формулируется следующим образом. *Для подобных между собой явлений одноименные критерии подобия численно одинаковы.* Например,

$$Re = idem; Pr = idem; Nu = idem \text{ и т. д.}$$

Равенство одноименных критериев подобия, представляющих собой одинаковые инварианты-комплексы, является следствием подобия физических явлений и подтверждается возможностью получения критериев подобия из уравнений связи. Критерии подобия всегда безразмерны и имеют определенный физический смысл.

Критерии, составленные из физических величин, входящих в условия однозначности, называются определяющими. Оп-

* Критериям подобия принято присваивать имена известных ученых; обозначают их обычно двумя первыми латинскими буквами этих имен. Например: Re — критерий Рейнольдса; Pr — критерий Прандтля; Ki — критерий Кирпичева.

реде л я е м ы м и называются критерии, в которые входит искомая величина; например: коэффициент теплоотдачи, напряжение трения и т. д. Деление критериев подобия на определяющие и определяемые в известной мере условно. В некоторых случаях они могут меняться местами.

Вторая теорема подобия может быть сформулирована следующим образом. *Между определяемыми и определяющими критериями существует определенная связь, математически выраженная в форме однозначной функциональной зависимости.* Например,

$$Nu = f(Re, Pr, Gr \dots).$$

Значение этой теоремы заключается в том, что она указывает на возможность представить математическое описание рассматриваемых физических явлений в виде функциональной зависимости между критериями подобия, что придает всему анализу обобщенный характер.

Функциональная зависимость определяемого критерия от других критериев, характеризующих рассматриваемое явление, называется критерияльным уравнением.

Вторая теорема подобия указывает, как должны быть обработаны результаты экспериментальных исследований изучаемого явления, т. е. они должны быть представлены в виде зависимости между безразмерными критериями подобия, а не между отдельными размерными величинами.

Весь класс явлений можно разделить на ряд отдельных групп, отличающихся друг от друга условиями однозначности. Совокупность процессов, описываемых одинаковыми по форме и содержанию размерными уравнениями и одинаковыми по форме и содержанию условиями однозначности, называют группой (или родом) явлений. Явления, входящие в одну группу, могут различаться лишь тем, что величины, входящие в размерные условия однозначности, могут иметь разные численные значения (и вследствие этого могут быть разными определяющие критерии).

Критерияльные уравнения не являются универсальными зависимостями; они справедливы только для группы явлений, и область их применения ограничена. Отсюда следует, что для практического использования критерияльных уравнений должны быть установлены пределы их применимости. Это означает, что надо уметь распознавать группу явлений.

Третья теорема формулируется следующим образом.

Условия, необходимые и достаточные для подобия физических явлений, заключаются в подобии условий однозначности и равенстве одноименных определяющих критериев подобия.

На положениях третьей теоремы основан метод исследования сложных явлений на моделях, в которых изучаемое явление должно осуществляться подобно тому, как оно протекает в образце.

Необходимые и достаточные условия для выполнения такой модели заключаются в подобии условий однозначности и равенства одноименных определяющих критериев подобия в образце и модели.

Из изложенного следует, что экспериментальному исследованию должен предшествовать теоретический анализ, на основании которого должны быть установлены физические величины, характеризующие рассматриваемое явление, составлены условия однозначности и сформулированы уравнения связи, если явление исследуется впервые. Затем должны быть выявлены критерии подобия, среди которых следует выделить определяемый критерий, содержащий искомую величину. Далее, при проведении экспериментов должны быть измерены величины, входящие в установленные критерии подобия. Результаты обработки опытных данных должны быть представлены в критериальной форме, т. е. в виде зависимости определяемого критерия от определяющих. Найденная зависимость может быть аппроксимирована в виде соответствующего эмпирического уравнения (критериальное уравнение) с указанием пределов его применимости.

3.4. ПОЛУЧЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Для получения критериев подобия из дифференциальных уравнений существует несколько методов; к ним относятся: метод преобразований подобия, метод приведения уравнений к безразмерному виду и метод интегральных аналогов. В тех случаях когда вследствие сложности явлений уравнения связи отсутствуют, но имеется перечень физических величин, характеризующих явление, вид критериев подобия и необходимое число их могут быть установлены с помощью метода анализа размерностей.

Рассмотрим получение критериев подобия методом преобразований подобия. Возьмем из дифференциальных уравнений связи для процесса теплоотдачи при отсутствии внутренних источников тепла и умеренных скоростях движения жидкости, т. е. без учета сжимаемости и диссипации кинетической энергии.

Представим, что плоская поверхность твердого тела омывается жидкой или газообразной средой, температура которой отличается от температуры поверхности. Вследствие этой разности температур возникает процесс теплоотдачи, и количество тепла, проходящее через единицу поверхности в единицу времени, т. е. плотность теплового потока (удельный тепловой поток), на основании уравнения Ньютона может быть представлено так:

$$q_w = \alpha \Delta T.$$

Рассмотрим двухмерный случай и расположим прямоугольные оси координат так, что ось X совпадает с поверхностью тела.

Уравнение теплоотдачи в этом случае запишется следующим образом:

$$\alpha \Delta T = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w. \quad (3.16)$$

В соответствии с положениями, изложенными в разд. 3.1, для аналитического описания рассматриваемого явления должны быть составлены также уравнения энергии, движения и неразрывности (сплошности), которые на основании уравнений (3.3), (3.8) могут быть представлены для рассматриваемого случая в следующем виде:

уравнение энергии —

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right], \quad (3.17)$$

где $a = \lambda / (c_p \rho)$ — коэффициент температуропроводности;

уравнения движения —

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ \rho \frac{\partial v}{\partial \tau} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

где ρg_x и ρg_y — проекции массовых сил (например, сил тяжести), отнесенных к единице объема;

уравнение неразрывности —

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.19)$$

Уравнения (3.16) ÷ (3.19) являются для рассматриваемого случая уравнениями связи. Из этих уравнений следует, что основными физическими величинами, влияющими на процесс теплоотдачи, являются теплопроводность (λ), теплоемкость (c_p), плотность (ρ), вязкость (μ), время (τ) и скорость (u, v), причем влияние температуры проявляется через физические параметры среды (λ, c_p, ρ и μ).

Представим себе две геометрически подобные системы, в которых осуществляются подобные явления конвективного теплообмена. Очевидно уравнения связи для обеих систем буквенно одинаковы. Так, если уравнения (3.16) — (3.19) являются уравнениями связи для первой системы, то для второй системы должны быть составлены такие же уравнения, в которых, однако, все физические величины должны быть отмечены одним штрихом. Например, уравнение конвективного теплообмена для второй системы будет иметь вид

$$\alpha' \Delta t = -\lambda' \left(\frac{\partial T'}{\partial y'} \right)_w.$$

Аналогично могут быть записаны уравнения энергии, движения и неразрывности.

Поскольку у подобных явлений поля однородных физических величин отличаются только их масштабом, все физические величины, входящие в уравнения связи второй системы, могут быть выражены через физические величины первой системы, умноженные на соответствующую константу подобия.

Обозначив отношение сходственных линейных размеров, т. е. константу геометрического подобия $C_l = x'/x = y'/y$, константу подобия по скорости $C_u = u'/u = v'/v$ и все константы подобия других физических величин C с соответствующими подстрочными индексами, получим уравнения связи для второй системы в следующем виде:

уравнение конвективного теплообмена —

$$C_a C_T (\alpha \Delta T) = C_\lambda \frac{C_T}{C_l} \left[-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \right]; \quad (3.20)$$

уравнение энергии —

$$\frac{C_T}{C_\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \right) + \frac{C_u C_T}{C_l} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{C_a C_T}{C_l^2} \left(a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a' \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right); \quad (3.21)$$

уравнение движения для оси x —

$$\begin{aligned} & C_\rho \frac{C_u}{C_\tau} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + \frac{C_\rho C_u^2}{C_l} \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ & = C_\rho C_g (\rho g_x) - \frac{C_p}{C_l} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{C_\mu C_u}{C_l^2} \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu' \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (3.22) \end{aligned}$$

аналогично может быть составлено уравнение движения и для оси y ;

уравнение неразрывности —

$$\frac{C_\rho}{C_\tau} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right) + \frac{C_p C_u}{C_l} \left[\rho \frac{\partial (qu)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial (qv)}{\partial y} \right] = 0. \quad (3.23)$$

Из сравнения уравнений (3.16) и (3.20) следует, что, поскольку оба уравнения справедливы, комплексы, образовавшиеся из констант подобия в уравнении (3.20), должны сократиться, т. е. они численно равны:

$$C_a C_T = \frac{C_\lambda C_T}{C_l}.$$

Сокращая на C_T , получим

$$\frac{C_a C_l}{C_\lambda} = 1.$$

Заменяв константы подобия отношением соответствующих физических величин, получим безразмерный инвариант-комплекс π_1 , численно одинаковый для обеих систем:

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = \frac{\alpha' l'}{\lambda'} = \pi_1,$$

где l — некоторый линейный размер, характеризующий рассматриваемую систему, так называемый определяющий размер.

Полученный инвариант носит название критерия (числа) Нуссельта

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}.$$

На основании таких же соображений из сравнения уравнений (3.17) и (3.21) могут быть составлены следующие выражения:

$$\frac{C_T}{C_\tau} = \frac{C_u C_T}{C_l} = \frac{C_a C_T}{C_l^2}.$$

Сравнивая их попарно и приводя к единице, получим

$$\frac{C_a C_\tau}{C_l^2} = 1; \quad \frac{C_u C_l}{C_a} = 1.$$

Заменяя константы подобия отношением переменных величин, получим инварианты-комплексы

$$\frac{av}{l^2} = \pi_2; \quad \frac{ul}{a} = \pi_3,$$

которые также являются критериями подобия. Первый — критерий (число) Фурье

$$Fo = \frac{av}{l^2},$$

второй — критерий (число) Пекле

$$Pe = \frac{ul}{a}.$$

Из сравнения уравнений (3.13) и (3.22) получим равенство следующих комплексов, составленных из констант подобия:

$$\frac{C_\rho C_u}{C_\tau} = \frac{C_\rho C_u^2}{C_l} = C_\rho C_g = \frac{C_p}{C_l} = \frac{C_\mu C_u}{C_l^2}.$$

Далее следует рассмотреть равенства полученных комплексов попарно и привести их к единице.

Разумеется, сопоставить комплексы попарно можно любым образом, однако удобнее пользоваться уже принятыми и вошедшими в практику следующими комбинациями:

$$\frac{C_q C_u}{C_\tau} = \frac{C_q C_u^2}{C_l}, \quad \text{отсюда} \quad \frac{C_u C_\tau}{C_l} = 1;$$

$$\frac{C_q C_u^2}{C_l} = C_q C_g, \quad \text{отсюда} \quad \frac{C_u^2}{C_g C_l} = 1;$$

$$\frac{C_q C_u^2}{C_l} = \frac{C_p}{C_l}, \quad \text{отсюда} \quad \frac{C_p}{C_q C_u^2} = 1;$$

$$\frac{C_q C_u^2}{C_l} = \frac{C_p C_u}{C_l^2}, \quad \text{отсюда} \quad \frac{C_u C_l C_q}{C_p} = 1.$$

Заменяв в полученных выражениях константы подобия отношением переменных величин, получим следующие критерии подобия: критерий Струхала

$$\text{Sh} = \frac{uv}{l},$$

который часто называют критерием гомотронности и обозначают Но;

$$\text{критерий Фруда } \text{Fr} = \frac{u^2}{gl};$$

$$\text{критерий Эйлера } \text{Eu} = \frac{p}{\rho u^2};$$

$$\text{критерий Рейнольдса } \text{Re} = \frac{ul\rho}{\mu}.$$

Уравнение неразрывности не дает новых критериев подобия и может не рассматриваться.

Напомним, что последние четыре критерия (Sh, Fr, Eu, Re) получены из уравнений движения, составленных без учета влияния свободной конвекции. Однако, если движение среды обусловлено свободной конвекцией, возникающей вследствие разности плотностей нагретых и холодных частиц среды, в уравнении движения (3.18) вместо силы тяжести, отнесенной к единице объема (ρg), следует учесть действие подъемной силы, вызванной разностью плотностей. Такая замена позволит получить новый критерий подобия, учитывающий влияние свободной конвекции. Рассмотрим пример получения этого критерия для стационарного процесса свободной конвекции. Итак, под действием подъемной силы нагретые частицы начнут подниматься вверх, а холодные будут опускаться вниз. Величина этой силы, отнесен-

ная к единице объема, равна $g(\rho_0 - \rho)$, где ρ_0 и ρ — плотность холодных и нагретых частиц среды.

Поскольку в данном случае давление среды остается постоянным и разность плотностей возникает только вследствие разности температур, подъемная сила может быть выражена через коэффициент объемного расширения β . Плотность холодных частиц $\rho_0 = \rho(1 + \beta\Delta T)$, следовательно $\rho_0 - \rho = \rho\beta\Delta T$, и выражение подъемной силы, отнесенной к единице объема, примет вид $g\beta\Delta T$, где ΔT — разность температур, вследствие которой возникает свободная конвекция ($\Delta T = T_w - T_f$).

Уравнения (3.18) с учетом действия этой силы при безнапорном движении носят название уравнений свободной конвекции и при стационарном процессе теплообмена ($\partial T/\partial \tau = 0$; $\partial u/\partial \tau = \partial v/\partial \tau = 0$) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \rho g_x \beta \Delta T + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \rho g_y \beta \Delta T + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Заметим, что из сравнения уравнений (3.18) и (3.24) видно, как могут измениться уравнения связи в зависимости от условий однозначности. Так, уравнения (3.18) составлены для нестационарного движения, переменного давления и с учетом действия силы тяжести, а уравнения (3.24) — для стационарного движения, постоянного давления и с учетом действия подъемной силы вместо силы тяжести.

Для получения критериев подобия из уравнений (3.24) методом преобразований подобия можно рассмотреть одно из этих уравнений и получить следующие равенства:

$$C_Q \frac{C_u^2}{C_l} = C_Q C_g C_\beta C_{\Delta T} = \frac{C_\mu C_u}{C_l^2}.$$

Сравнивая полученные комплексы попарно и приводя их к единице, получим

$$\frac{C_u C_l C_Q}{C_\mu} = 1; \quad \frac{C_\mu C_u}{C_l^2 C_Q C_\beta C_{\Delta T}} = 1.$$

Если заменить константы подобия отношением однородных физических величин, из первого равенства получим критерий подобия Рейнольдса $Re = ul\rho/\mu$, а из второго может быть получен критерий

$$\frac{u\mu}{l^2 \rho g \beta \Delta T} = \pi.$$

Однако при движении среды, вызванном только свободной конвекцией, значение скорости не входит в условия однозначности,

так как распределение скоростей всецело зависит от распределения температур, следовательно, полученные критерии нельзя рассматривать как определяющие при чисто свободном движении. Мы должны получить критерий подобия, в который не входит скорость, и можем это сделать, разделив Re на π .

Полученное таким образом выражение носит название критерия Грасгофа и имеет следующий вид:

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T l^3}{\mu^2}.$$

Принимая во внимание, что $\mu/\rho = \nu$ критерий Gr представляют обычно в таком виде:

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T l^3}{\nu^2}.$$

Из рассмотренного примера следует, что при получении критериев подобия допускается несколько изменять вид их. Можно, например, перемножить или разделить два критерия друг на друга и получить новый критерий. Целесообразность таких видоизменений обуславливается возможностью определения величин, входящих в критерии подобия. Так, в некоторых случаях при исследовании процессов теплообмена, вводится критерий Стантона St , который получается в результате деления критерия Нуссельта на критерий Пекле: $St = Nu/Pe$.

Принимая во внимание, что

$$Nu = \frac{al}{\lambda}; \quad Pe = \frac{ul}{a},$$

где $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$ — коэффициент температуропроводности,

получим

$$St = \frac{a}{\rho u c_p}.$$

Как уже упоминалось, метод преобразований подобия не является единственным способом получения критериев подобия из уравнений связи.

В гл. XI приводится пример получения критериев подобия приведением уравнений связи к безразмерному виду.

В тех случаях когда исследователь не располагает уравнениями связи, критерии подобия могут быть установлены методом анализа размерностей, изложенным в работе [122].

3.5. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Рассмотрим физический смысл всех полученных нами критериев подобия, из которых критерии Sh , Fr , Eu , Re называют критериями гидродинамического подобия, а Nu , Pe , St , Fo , Gr — критериями теплового подобия.

Критерий Струхала $Sh = u\tau/l$ (или критерий гомотронности $Ho = u\tau l$). Этот критерий можно рассматривать как отношение времени протекания процесса τ к времени, в течение которого элемент рассматриваемой среды, движущийся со скоростью u , проходит расстояние l .

Как уже указывалось, этот критерий называют критерием гомотронности, т. е. временной однородности.

Критерий Sh является определяющим при исследовании нестационарных или периодически повторяющихся явлений в гидродинамических системах (например, отрыв вихрей).

Критерий Фруда $Fr = u^2/(gl)$. Его физический смысл может быть пояснен, если умножить и разделить его выражение на ρ . Тогда $Fr = \rho u^2/(\rho gl)$ и полученное выражение можно рассматривать как меру отношения кинетической энергии потока к работе силы тяжести. Таким образом критерий Fr характеризует относительную величину сил тяжести. Поэтому он входит в число определяющих критериев, когда существенны гравитационные эффекты. Когда движение совершается в горизонтальной плоскости и действием сил тяжести можно пренебречь, критерий Fr выпадает из числа определяющих. Если движение среды возникает вследствие свободной конвекции, то, как было показано выше, вместо Fr в число определяющих вводится критерий $Gg = g\beta\Delta T l^3/\nu^2$, учитывающий влияние подъемных сил, обусловленных разностью плотностей нагретых и холодных частиц среды.

Критерий Эйлера $Eu = p/(\rho u^2)$. Он представляет собой отношение статического давления к скоростному напору. Легко показать, что он связан с числом Маха M , которое, как известно, является отношением скорости движения среды к скорости распространения звука в этой среде.

Если принять во внимание, что $\rho = 1/V$ и умножить числитель и знаменатель на показатель адиабаты k , получим

$$Eu = \frac{pvk}{ku^2} = \frac{kRT}{ku^2} = \frac{1}{kM^2}.$$

При теплообмене в дозвуковых течениях ($M < 0,7$) статическое давление изменяется мало и критерий Eu не является определяющим. При теплообмене в потоках, движущихся с большими скоростями, как будет показано в последующих главах, влияние числа M существенно сказывается.

При исследовании гидравлических систем критерий Eu представляют иначе, заменяя абсолютное значение статического давления p разностью статических давлений Δp в других точках системы. Тогда этот критерий принимает вид $Eu = \Delta p/(\rho u^2)$ и представляет собой меру отношения перепада статических давлений к скоростному напору. В таком виде критерий Эйлера является определяемым при исследовании гидродинамических сопротивлений в каналах.

Критерий Рейнольдса $Re = ul/\nu$ может быть представлен в иной форме, если умножить числитель и знаменатель на скорость u и принять во внимание, что $\nu = \mu/\rho$:

$$Re = \frac{\rho u^2}{\mu (u/l)} .$$

Это выражение можно рассматривать как отношение инерционных сил к силам вязкого трения, что и является одной из основных характеристик движущейся жидкости.

Силы вязкого трения упорядочивают движение жидкости и противодействуют возмущениям, которые нарушают форму течения, соответствующую геометрии русла. Нарушения упорядоченной формы течения способствуют возникновению инерционных сил, которые в свою очередь усиливают неупорядоченность движения.

Таким образом, силы вязкого трения и инерционные силы являются факторами, оказывающими на течение жидкости противоположные влияния, и развитие характера движения зависит от интенсивности влияния этих факторов.

Если преобладают силы трения — движение жидкости упорядоченное, ламинарное; если преобладают инерционные силы — движение жидкости неупорядоченное, турбулентное.

Итак, характер движения жидкости связан с численным значением критерия Re — малым значениям его соответствует устойчивое ламинарное движение, с возрастанием Re устойчивость этого движения уменьшается; при некотором критическом значении Re ламинарное движение переходит в турбулентное.

Изменение характера движения жидкости влечет за собой изменение физического механизма переноса количества движения тепла и массы. При ламинарном течении жидкость движется параллельно поверхности и механизм переноса осуществляется микропроцессами молекулярной природы. При турбулентном движении возникают макроскопические, молярные процессы переноса, вызванные смешением конечных масс в виде отдельных комочков жидкости, молей.

Из изложенного следует, что критерий Рейнольдса представляет собой меру относительной величины потоков количества движения, осуществляемых молекулярным и молярным процессами переноса.

Критерий Нуссельта $Nu = al/\lambda$. Физический смысл критерия Nu может быть пояснен, если умножить и разделить его выражение на некоторый температурный напор ΔT :

$$Nu = \frac{\alpha \Delta T}{\Delta T \lambda / l} .$$

Полученное выражение можно рассматривать как отношение величины плотности теплового потока, переданного в процессе теп-

лоотдачи, к величине плотности теплового потока, прошедшего через слой толщиной l вследствие его теплопроводности.

Следовательно, если бы значение Nu было равно единице, это означало бы, что процесс передачи тепла через слой жидкости толщиной l осуществляется только теплопроводностью.

Физический смысл критерия Nu можно пояснить иначе, если рассматривать Nu как отношение коэффициента теплоотдачи α к термической проводимости слоя жидкости толщиной l :

$$Nu = \frac{\alpha}{\lambda/l}.$$

Таким образом критерий Nu характеризует увеличение интенсивности теплообмена действием конвекции. При исследовании явлений конвективного теплообмена критерий Nu является определяемым, так как в него входит искомая величина α .

Критерий Стантона $St \doteq \alpha / (c_p u \rho)$ также является определяемым и вводится в некоторых случаях вместо критерия Nu . Физический смысл критерия St может быть установлен, если умножить и разделить его выражение на некоторый температурный напор ΔT :

$$St = \frac{\alpha \Delta T}{u \rho c_p \Delta T}.$$

Тогда в числителе получится плотность теплового потока, переданного в процессе теплоотдачи, а в знаменателе — удельный тепловой поток, переносимый жидкостью, движущейся со скоростью u .

Критерий Пекле $Pe = ul/a$. Для выявления физического смысла этого критерия заменим в его выражении коэффициент температуропроводности a соотношением параметров $a = \lambda / (c_p \rho)$. Тогда критерий Pe примет вид

$$Pe = \frac{u c_p \rho l}{\lambda}.$$

Далее, аналогично предыдущему, умножим и разделим это выражение на величину температурного напора ΔT . Тогда в числителе получится величина теплового потока, переносимого жидкостью, движущейся со скоростью u через единицу площади, а в знаменателе — величина теплового потока, проходящего через слой толщиной l вследствие его теплопроводности. В таком виде критерий Pe можно рассматривать как меру относительной роли молярного и молекулярного переноса тепла.

Сопоставляя выражение критерия Пекле $Pe = ul/a$ с выражением критерия Рейнольдса $Re = ul/\nu$, заметим, что числители их тождественны, а знаменатели представляют собой физические параметры жидкости, в первом случае — коэффициент температуропроводности a , во втором — коэффициент кинематической вязкости ν . Общность структуры этих критериев объясня-

ется тем, что они представляют собой аналогичные характеристики процессов переноса тепла (Pe) и количества движения (Re).

Поскольку различие критериев Pe и Re проявляется только в физических параметрах a и ν , целесообразно выделить эти параметры в самостоятельный критерий. В связи с этим критерий Пекле разделяют на два критерия путем умножения и деления его выражения на коэффициент кинематической вязкости ν : величина ul/ν является критерием Рейнольдса, а отношение ν/a называют критерием Прандтля.

Критерий Прандтля $Pr = \nu/a$.

Если принять во внимание, что $\nu = \mu/\rho$, $a = \lambda/(c_p \rho)$, выражение критерия Pr может быть представлено так:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}.$$

Характерной особенностью этого критерия является то, что он построен из физических параметров и поэтому для данной жидкости он сам представляет некоторый безразмерный физический параметр, имеющий определенное значение, зависящее от температуры.

Для капельных жидкостей значение Pr больше единицы и для очень вязких жидкостей достигает больших значений, порядка 10^3 . Для жидких металлов значение Pr мало (порядка 10^{-2} и меньше) вследствие их высокой теплопроводности. Для газов значение Pr порядка единицы. Для идеальных газов оно может быть вычислено согласно кинетической теории, причем у газов одинаковой атомности численные значения Pr одинаковы и не зависят от давления температуры.

Значения критерия Pr для идеальных газов нижеследующие.

Атомность газа	Pr
1	0,67
2	0,73
3	0,80
4 и более	1,00

Для воздуха $Pr \approx 0,7$ и это значение мало изменяется с изменением температуры.

Характерной особенностью газов, у которых $Pr = 1$, является одинаковый закон изменения скорости и температуры в безградиентном пограничном слое.

Критерий Фурье $Fo = a\tau/l^2$ можно рассматривать как отношение времени протекания процесса τ к времени перестройки температурного поля среды l^2/a , пропорциональному квадрату линейных размеров системы и обратно пропорциональному теплопроводности среды.

Критерий Fo называют критерием тепловой гомохронности и включают в число определяющих при исследовании нестационарных процессов теплообмена.

Подводя итоги изложенному, следует отметить, что критерии гидродинамического подобия F_r , E_u , Re являются мерами соотношения сил, действующих в движущейся жидкости.

Критерии теплового подобия Nu , St , Pe являются мерами соотношения тепловых потоков в движущейся жидкости. Критерий подобия Gr характеризует действие подъемных сил, но рассматривается как критерий теплового подобия, так как эти подъемные силы возникают вследствие теплообмена.

Гидродинамический критерий $Sh(No)$ и тепловой критерий Fo являются мерами соотношения отрезков времени и характеризуют протекание нестационарных процессов.

Напомним, что рассмотренные критерии подобия получены для определенных, сформулированных нами условий; поэтому перечень их не является исчерпывающим для всех многообразных явлений конвективного теплообмена. В этой главе показаны только способ получения критериев подобия и их физический смысл.

Некоторые из критериев подобия содержат линейный размер l , который называют определяющим, или характерным, размером. В зависимости от геометрических условий рассматриваемой задачи определяющие размеры могут быть различны. Так, если исследуется теплообмен в круглых каналах, то определяющим размером является внутренний диаметр канала ($l=d$); если канал некруглого сечения, обычно за определяющий размер принимают эквивалентный диаметр:

$$l = d_{\text{эКВ}} = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \frac{4F}{U},$$

где F — поперечное сечение канала;

U — периметр канала.

Если исследуется теплообмен при продольном обтекании плоской пластины, l равно расстоянию от передней кромки ($l=x$). Могут быть и другие случаи выбора определяющего размера, что всегда должно быть указано при составлении критериальных уравнений.

В некоторых случаях для указания определяющего размера используются подстрочные индексы.

3.6. СОСТАВЛЕНИЕ КРИТЕРИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

На основании положений первой теоремы у подобных явлений конвективного теплообмена одноименные критерии подобия должны быть численно одинаковы.

Следовательно, если в геометрически подобных системах протекают физически подобные процессы теплоотдачи, то во всех сходственных точках этих систем должны быть численно одина-

ковы все критерии подобия — Nu (или St), Re , Pr , Gr , Fo , Sh и т. д.

По положениям второй теоремы подобия описание явления конвективного теплообмена может быть представлено в виде функциональной зависимости между критериями подобия. При этом в качестве определяемого следует выделить критерий Nu или критерий St , так как в них входит искомая величина — коэффициент теплоотдачи α .

Однако установить вид функции при таком большом количестве переменных практически невозможно. Пользуясь положениями третьей теоремы подобия, можно уменьшить число определяющих критериев, разделив явления конвективного теплообмена на ряд групп, отличающихся друг от друга осложнениями однозначности. Так, например, отдельно рассматриваются группы явлений при стационарных и нестационарных процессах теплообмена. При стационарных процессах $dT/d\tau=0$, $du/d\tau=0$ и, следовательно, из числа определяющих выпадают критерии подобия, содержащие фактор времени τ , т. е. критерии гомотронности Fo и $Sh(Ho)$.

Кроме того, отдельно рассматривают группы явлений конвективного теплообмена в зависимости от причины возникновения движения среды, т. е. при свободном и вынужденном движении.

Если при стационарном режиме наряду с вынужденным движением имеет место свободная конвекция (например, для случая теплообмена в каналах при малых значениях Re), то составление критериального уравнения сводится к отысканию функции следующего вида:

$$Nu = f(Re, Pr, Gr)$$

или

$$St = \varphi(Re, Pr, Gr).$$

Если движение возникает только вследствие свободной конвекции, из числа определяющих выпадает критерий Re ; следовательно, критериальное уравнение должно иметь вид

$$Nu = f(Pr, Gr).$$

Если при вынужденном движении свободная конвекция не развивается, критерий Gr не является определяющим, а критериальное уравнение может быть представлено так:

$$Nu = f(Re, Pr);$$

$$St = \varphi(Re, Pr).$$

Многочисленные исследования различных видов конвективно-го теплообмена показывают, что зависимость между критериями подобия может быть часто представлена в виде степенной функции.

Например, если критерий Nu зависит только от критериев Re и Pr , критериальное уравнение имеет следующий вид:

$$Nu = c Re^m \cdot Pr^n,$$

где c , m и n — безразмерные величины, значение которых должно быть выявлено при обработке опытных данных.

В этом случае легче всего решить задачу для таких жидкостей, у которых значение критерия Pr практически постоянно, т. е. для воздуха и двухатомных газов, благодаря чему критериальное уравнение может быть упрощено:

$$Nu = c' Re^m,$$

где

$$c' = c Pr^n.$$

На основании опытных данных следует вычислить значения критериев Nu и Re на различных режимах и представить зависимость между ними в логарифмических координатах.

Если зависимость между этими критериями степенная, то в логарифмических координатах все экспериментальные точки должны укладываться на одну прямую, как показано на рис. 3.2.

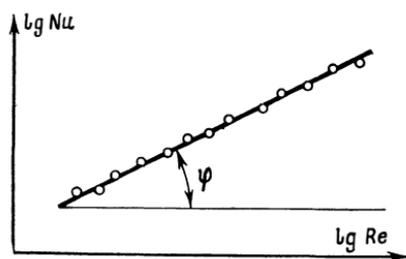


Рис. 3.2. Зависимость $\lg Nu = f(\lg Re)$ при $Pr = \text{const}$

Показатель степени m может быть вычислен как тангенс угла наклона этой прямой ($\text{tg } \varphi$), а значение c' определится из соотношения $c' = Nu/Re^m$, которому удовлетворяет любая точка этой прямой. Для определения показателя степени n при критерии Pr следует провести опыты с разными жидкостями ($Pr \neq \text{const}$) при одинаковых значениях Re и построить в логарифмических координатах график зависимости $\lg(Nu/Re^m) = f(\lg Pr)$. Значение n может быть вычислено по этому графику аналогично предыдущему.

Затем можно определить значение c из соотношения

$$c = \frac{Nu}{Re^m \cdot Pr^n}.$$

Аналогично выявляется и зависимость Nu от Gr при наличии свободной конвекции.

При составлении критериальных уравнений должны быть учтены все существенные особенности рассматриваемой задачи.

3.7. ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ ТЕМПЕРАТУРА И ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ФАКТОР

Ранее неоднократно упоминалось, что физические параметры газов и капельных жидкостей изменяются с изменением температуры. Учесть полностью влияние температуры при составлении уравнений связи чрезвычайно трудно потому, что температура среды при наличии теплообмена переменна. Кроме того, различны зависимости отдельных физических параметров от температуры, и, как правило, они устанавливаются экспериментально. В таких случаях приходится обращаться к некоторым искусственным приемам. Одним из них является введение так называемой определяющей температуры, т. е. некоторой постоянной, наиболее характерной для рассматриваемого процесса температуры, по которой устанавливается значение всех физических параметров жидкости (газа) по справочным данным.

Определяющая температура подбирается экспериментально и может быть различной в зависимости от условий поставленной задачи. В некоторых случаях в качестве определяющей принимается средняя температура жидкости T_f , в других случаях — среднеарифметическая температура $T_m = (T_w + T_f)/2$, иногда определяющей считают температуру поверхности теплообмена T_w .

При составлении критериальных уравнений указывается, какая температура была принята за определяющую, что обычно часто обозначается соответствующими подстрочными индексами. Например, Nu_m означает, что в качестве определяющей была принята температура T_m , Nu_f означает, что определяющей является температура T_f и т. д. Метод определяющей температуры дает вполне надежные результаты при небольших температурных напорах.

Другим решением, учитывающим влияние температуры, является введение в критериальное уравнение наряду с определяющей температурой еще так называемого температурного фактора, как дополнительного аргумента.

Температурный фактор представляет собой степенное отношение двух абсолютных значений температуры, например $(T_f/T_w)^a$.

При исследовании теплообмена в газовых средах введение температурного фактора в таком виде вполне оправдано, так как физические параметры газов хорошо аппроксимируются степенными функциями в широком интервале изменения температуры. Физические параметры капельных жидкостей зависят от температуры более сложно. Исследование некоторых процессов теплообмена капельных жидкостей будет рассмотрено в последующих главах.

Введением в критериальное уравнение температурного фактора учитываются также эффекты влияния направления теплового потока и величины температурного напора. Направление теплового потока зависит от вопроса, является ли температурный фактор T_f/T_w правильной или неправильной дробью. Например, если $T_f/T_w < 1$ — тепловой поток идет от поверхности к жидкости, если $T_f/T_w > 1$ — тепловой поток направлен противоположно.

Очевидно, чем больше величина температурного напора, тем больше эти отношения отличаются от единицы. Таким образом, критериальное уравнение, описывающее процесс теплоотдачи при стационарном тепловом режиме с учетом температурного фактора, в некоторых случаях может иметь вид

$$\text{Nu}_f = c \text{Re}_f^m \text{Pr}_f^n (T_f/T_w)^a.$$

Следует отметить, что такие формы решения надо рассматривать только как эмпирический прием, не обоснованный глубокими физическими соображениями, но достаточно удачный, поскольку его применение дает практически хорошие результаты.

Рекомендуемая литература:

основная: [5, 97]

дополнительная: [59, 80, 122]

ТЕПЛООБМЕН ПРИ СВОБОДНОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

4.1. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Свободной (гравитационной) конвекцией называется движение среды, возникающее в поле массовых сил при наличии градиентов температуры.

Так как плотность жидкости (газа) зависит от температуры, то при наличии градиентов температуры массовые силы \vec{F}_Q в различных точках жидкости разные. Это вызывает движение жидкости, которое определяется направлением силового поля, распределением температур в жидкости и геометрией объема. При свободной конвекции поля скоростей и температур существенно зависят друг от друга. Следовательно, для описания свободной конвекции уравнения движения и энергии должны рассматриваться совместно. Свободная конвекция очень широко распространена в природе и в технике. Ею определяется циркуляция воздуха в атмосфере земли, циркуляция воды в океане, циркуляция воздуха и теплообмен в жилых и производственных помещениях, в топливных баках ракет и самолетов, во многих технологических процессах в самых различных областях техники.

Движение при свободной конвекции может быть ламинарным и турбулентным. При ламинарном движении линии тока представляют собой определенные траектории. При стационарном течении они также стационарны. При нестационарном процессе они меняются во времени в прямой зависимости от изменения граничных условий или силового поля. Таким образом, при ламинарном движении скорость в каждой точке среды всегда может быть определена. При турбулентном движении линии тока колеблются во времени и могут пересекаться друг с другом. Скорость жидкости в каждой точке среды пульсирует. При турбулентном течении рассматривают обычно среднестатистические значения скоростей и температур, используя осредненные уравнения движения и энергии.

На рис. 4.1 дана фотография течения около вертикальной пластины в большом объеме, сделанная с помощью интерферометра. Видно, что около стенки образуется сначала ламинарный пограничный слой, затем переходящий в турбулентный.

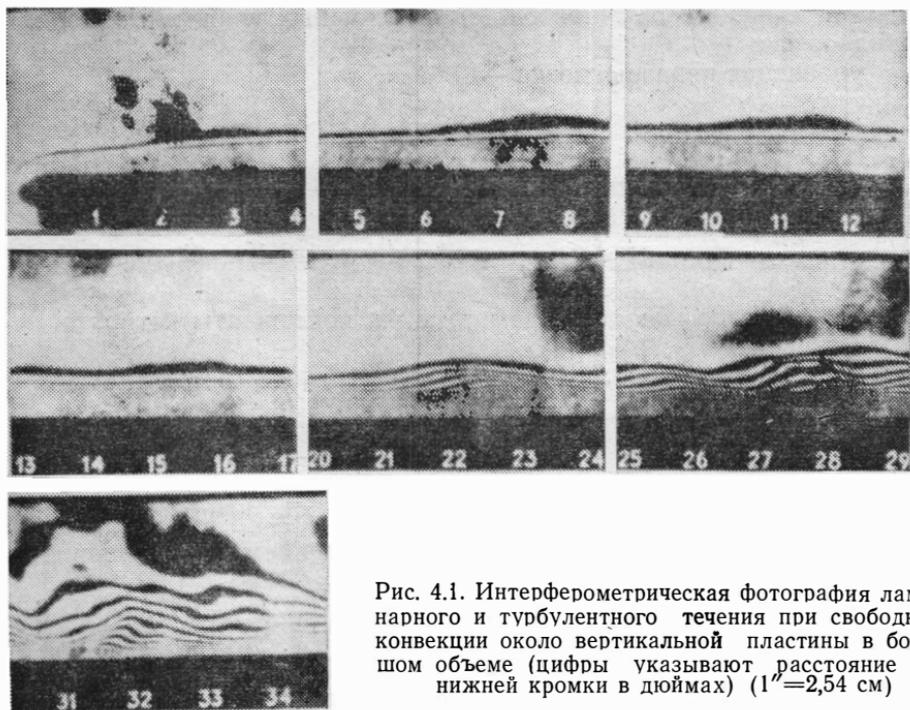
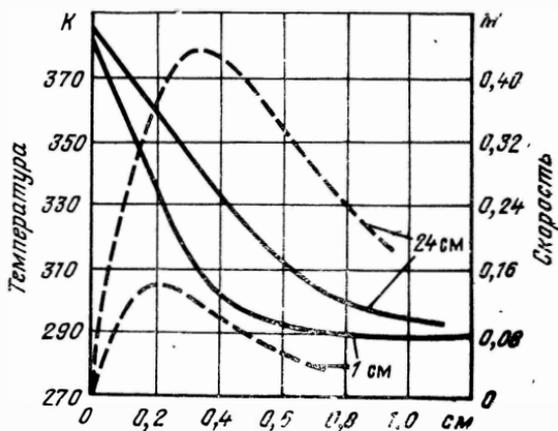


Рис. 4.1. Интерферометрическая фотография ламинарного и турбулентного течения при свободной конвекции около вертикальной пластины в большом объеме (цифры указывают расстояние от нижней кромки в дюймах) ($1''=2,54$ см)

Рис. 4.2. Распределение скорости и температуры в ламинарном пограничном слое на расстояниях 1 и 24 см от начала обогрева вертикальной пластины при свободной конвекции в большом объеме воздуха:

— температура
 --- скорость



Распределение температуры и скорости для двух расстояний от начала вертикальной пластины представлено на рис. 4.2.

В общем случае однокомпонентной среды свободная конвекция описывается обычной системой основных уравнений вязкой жидкости:

уравнение неразрывности —

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0; \quad (4.1)$$

уравнение движения (Навье—Стокса) —

$$\rho \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \vec{F}\rho - \operatorname{grad} p - \frac{2}{3} \operatorname{grad} (\mu \operatorname{div} \vec{u}) + 2 \operatorname{div} (\mu \dot{S}), \quad (4.2)$$

где \dot{S} — тензор скоростей деформации, компоненты которого

$$\dot{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right);$$

уравнение энергии —

$$c_p \frac{dT}{d\tau} = \frac{\operatorname{div} \lambda}{\rho} \operatorname{grad} T + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\tau} + \frac{\mu\Phi}{\rho} + \frac{q_V}{\rho}, \quad (4.3)$$

где Φ — диссипативная функция, определяемая уравнением (3.10).

Здесь 9 неизвестных: ρ — плотность, \vec{u} — скорость, \vec{F} — плотность массовых сил, p — давление, μ — коэффициент динамической вязкости, c_p — удельная теплоемкость, T — температура, λ — коэффициент теплопроводности и q_V — плотность распределения источников тепла в среде.

Чтобы замкнуть систему, к ней необходимо добавить еще шесть уравнений:

$$\vec{F} = f(\vec{r}, \tau); \quad \lambda = \lambda(T); \quad \mu = \mu(T); \quad c_p = c_p(T);$$

$$q_V = q_V(\vec{r}, \tau)$$

и уравнение состояния $f(p, T, \rho) = 0$ (Здесь \vec{r} — радиус-вектор точки).

Для того чтобы рассмотреть конкретное явление, задаются начальные и граничные условия.

Начальные условия включают задание распределения основных параметров в начальный момент времени. Граничные условия обычно включают условия на стенке:

$$\vec{u} = \vec{u}_W = 0; \quad (4.4)$$

$$T = T_W = T_W(\vec{r}_W, \tau) \quad (4.5)$$

или

$$T = T_W = T_f - \frac{\lambda(\partial T / \partial n)_W}{\alpha}, \quad (4.6)$$

или

$$q = q_w = q_w(\vec{r}_w, \tau). \quad (4.7)$$

При анализе свободной конвекции удобнее в уравнении движения член с массовыми силами связать с коэффициентом объемного расширения среды $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$ и разностью между температурой в данной точке T и среднемассовой температурой жидкости в объеме T_f (или температурой вне пограничного слоя T_∞). Тогда плотность в данной точке ρ можно выразить через плотность ρ_0 в неподвижной жидкости при изотермических условиях. Так как $\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$, то, полагая $\beta = \text{const}$ в пределах $\Delta T = T - T_0$ (или беря среднее β на ΔT), имеем $v - v_0 = \beta v_0 \Delta T$ или $v = v_0(1 + \beta \Delta T)$. Заменяя $v = 1/\rho$, получим

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta \Delta T} \quad \text{или} \quad \rho = \rho_0 - \rho \beta \Delta T, \quad (4.8)$$

где $\Delta T = T - T_f$ или $\Delta T = T - T_\infty$.

Но из уравнения движения (4.2) при $\vec{u} = 0$ и $T = \text{const}$

$$\vec{F}_{\rho_0} = \text{grad } p_0, \quad (4.9)$$

где p_0 — гидростатическое давление.

С учетом выражений (4.8) и (4.9) уравнение движения будет

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{F} \beta \Delta T \rho - \text{grad}(p - p_0) - \frac{2}{3} \text{grad}(\mu \text{div } \vec{u}) + 2 \text{div}(\mu \dot{S}). \quad (4.10)$$

Для гравитационного поля $\vec{F} = \vec{g}$ — ускорению силы тяжести (на поверхности Земли $\vec{F} = \vec{g}_0$). Плотность массовых сил на летательных аппаратах при их движении с ускорением равна сумме ускорений полета \vec{a} и плотности массовых сил гравитационного поля в данной точке пространства:

$$\vec{F} = \vec{a} + \vec{g}.$$

Часто в литературе в обоих случаях плотность массовых сил обозначают вместо \vec{F} через \vec{g} , понимая под ним ускорение силового поля, действующего в системе координат, связанных с летательным аппаратом или другим рассматриваемым объектом.

Для ламинарной свободной конвекции приведенная выше система в конкретных случаях при ряде упрощений может быть решена численными методами на ЭВМ. Проверка допущений в численных решениях и самих решений, а также изучение более сложных случаев ламинарной свободной конвекции и турбулент-

ной свободной конвекции проводится с помощью экспериментальных методов исследования.

Для обобщения результатов экспериментов и численных расчетов необходимо установить систему безразмерных параметров, определяющих теплоотдачу при свободной конвекции. Из анализа системы уравнений и граничных условий (4.1) ÷ (4.10), описывающих свободную конвекцию, можно получить, что коэффициент теплоотдачи α есть функция следующих независимых параметров:

$$\alpha = f \left[l, g\beta\Delta T, \frac{\partial(g\beta\Delta T)}{\partial\tau}, \lambda, \mu, c_p, \rho, \tau, x_w, y_w, z_w \right]. \quad (4.11)$$

Здесь l — характерный размер замкнутой области или тела;

$$\Delta T = T_w - T_f;$$

x_w, y_w, z_w — координаты точки поверхности, в которой рассматривается теплоотдача.

Для характеристики нестационарности процесса введена величина $\partial(g\beta\Delta T)/\partial\tau$ — скорость изменения движущей силы процесса $g\beta\Delta T$, происходящего вследствие изменения во времени силового поля $\vec{g} = \vec{g}(\tau)$ и температуры стенки T_w .

Для приведения размерной зависимости (4.11) к безразмерному виду можно либо использовать π -теорему теории размерностей, либо привести к безразмерному виду систему уравнений (4.1) ÷ (4.10) (см. гл. III). Любым из этих способов из уравнения (4.11) получим следующее уравнение в безразмерном виде:

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = f_1 \left[g\beta\Delta T \frac{l^3 \rho^2}{\mu^2}, \frac{\partial(g\beta\Delta T) l^5}{\partial\tau} \frac{\rho^3}{\mu^3}, \frac{c_p \mu}{\lambda}, \frac{1}{\left[\tau \sqrt[3]{\frac{1}{l} \frac{\partial(g\beta\Delta T)}{\partial\tau}} \right]^{-1}}, \frac{x_w}{l}, \frac{y_w}{l}, \frac{z_w}{l} \right]. \quad (4.12)$$

В стационарном случае оно упростится *:

$$\text{Nu} = f_1 \left(\text{Gr}, \text{Pr}, \frac{x_w}{l}, \frac{y_w}{l}, \frac{z_w}{l} \right). \quad (4.13)$$

Если теплоотдача меняется только по одной координате (например, вертикальная стенка или цилиндр и т. п.), то за характерный размер принимается координата x . Тогда уравнение (4.13) будет

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = f \left(g\beta\Delta T \frac{x^3 \rho^2}{\mu^2}, \frac{c_p \mu}{\lambda} \right), \quad (4.14)$$

* Если задан не температурный напор ΔT , а тепловой поток на стенке q_w , то удобнее пользоваться модифицированным числом Грасгофа $\text{Gr}^* = g\beta q_w l^4 \rho^2 / (\mu^2 \lambda)$.

а для средней на длине l теплоотдачи

$$\text{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda} = f \left(g \beta \Delta T \frac{l^3 \rho^2}{\mu^2}, \frac{c_p \mu}{\lambda} \right). \quad (4.15)$$

4.2. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ *

Как уже отмечалось (см. рис. 4.1 и 4.2) при свободной конвекции у вертикальной поверхности основные изменения полей скоростей и температуры сосредоточены в сравнительно тонких пограничных слоях. Пограничный слой, в котором сосредоточено изменение поля скорости, называется гидродинамическим, а поля температур — тепловым. В общем случае ($\text{Pr} \neq 1$) толщины этих слоев δ и δ_T могут не совпадать. Расчеты и эксперимент показывают, что при $\text{Pr} \leq 1$ и $\delta_T \cong \delta$, а при $\text{Pr} > 1$ $\delta_T < \delta$. В турбулентном пограничном слое при $\text{Pr} > 1$ обычно $\delta_T \cong \delta$ и δ не зависит от координаты x . При $\text{Pr} \ll 1$ возможно $\delta_T > \delta$.

4.2.1. Ламинарная свободная конвекция

Наличие тонкого пограничного слоя позволяет существенно упростить систему уравнений, воспользовавшись обычными приближениями пограничного слоя. Так, для ламинарной свободной конвекции на плоской пластине в стационарном случае при $\mu = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$ уравнения (4.1), (4.2) и (4.3) соответственно будут:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0; \quad (4.16)$$

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (4.17)$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = g \beta \Delta T + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}. \quad (4.18)$$

Граничные условия

$$y=0; \quad u_x = u_y = 0; \quad T = T_w;$$

$$y=\delta; \quad u_x = u_y = 0; \quad T = T_\infty.$$

Результаты численного расчета Остраха по местной и средней теплоотдаче аппроксимируются соответственно в виде зависимостей (4.19) и (4.20):

$$\text{Nu}_x = \left(\frac{\text{Gr}_x}{4} \right)^{1/4} \frac{0,676 \cdot \text{Pr}^{1/2}}{(0,861 + \text{Pr})^{1/4}}; \quad (4.19)$$

$$\text{Nu} = \left(\frac{\text{Gr}}{4} \right)^{1/4} \frac{0,902 \cdot \text{Pr}^{1/2}}{(0,861 + \text{Pr})^{1/4}}. \quad (4.20)$$

* Подробное изложение этого вопроса см. в обзорной статье: А. Д. Ид «Свободная конвекция» в сб. «Успехи теплопередачи», «Мир» М., 1970, с. 380.

Эти уравнения хорошо согласуются с экспериментальными данными при $T_w = \text{const}$ и даже $q_w = \text{const}$ во всем диапазоне чисел Pr . Они справедливы при $10^4 < Gr_x Pr < 10^9$ и для интервала температур ΔT , в котором μ и λ изменяются мало, так как в расчете они приняты постоянными. Однако и для больших ΔT , если физические свойства относить к температуре $T_m = (T_w + T_\infty)/2$, совпадение с экспериментом получается удовлетворительное.

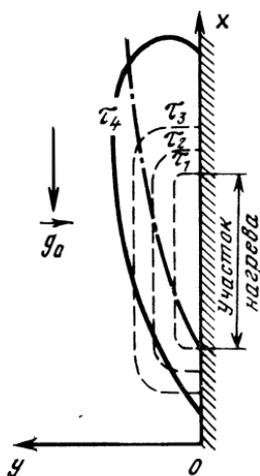


Рис. 4.3. Схема развития теплового пограничного слоя во времени на вертикальном цилиндре по данным киносъемки (большой объем, масло):

— — — — — изотермы в разные моменты времени периода теплопроводности ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$);
 — — — — — изотерма в переходный период;
 - - - - - граница теплового пограничного слоя при стационарной свободной конвекции

При $Gr_x Pr = 10^8 \div 10^{10}$ ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный. В качестве границы принимают $Gr_x Pr = 10^9$. При $Gr_x Pr < 10^4$ приближение пограничного слоя уже неприемлемо, ибо толщина его становится большой, так как она пропорциональна $x \cdot Gr_x^{-1/4}$. Эксперименты показывают, что в диапазоне $Pr = 0,7 \div 10$ вместо уравнения (4.20) можно с точностью до $\pm 20\%$ пользоваться более простым уравнением для средней теплоотдачи:

$$Nu = 0,56 (Gr \cdot Pr)^{1/4}, \quad (4.21)$$

которое так же хорошо согласуется с экспериментальными данными для вертикальных пластин и труб, включая и свободную конвекцию в криогенных жидкостях. Оно справедливо и для горизонтальных цилиндров и сфер в диапазоне $10^3 < (Gr \cdot Pr) < 10^9$, если длину l заменить на $\pi D/2$.

Для жидких металлов эксперименты по Na, NaK, Pb, Pb—Bi и Hg на горизонтальных цилиндрах с характерным размером — диаметром D обобщаются уравнением

$$Nu_D = 0,53 \left(\frac{Pr}{0,952 + Pr} \right)^{1/4} (Gr_D \cdot Pr)^{1/4}. \quad (4.22)$$

При малых значениях $Gr \cdot Pr = 10^{-3} \div 5 \cdot 10^2$ можно пользоваться эмпирической формулой М. А. Михеева

$$Nu = 1,18 (Gr \cdot Pr)^{1/3}. \quad (4.23)$$

Значительный интерес представляет процесс развития свободной конвекции во времени. Рис. 4.3 иллюстрирует схематически, что если скачком изменить тепловыделение, то сначала (за время $\tau_1 - \tau_3$) теплообмен осуществляется только теплопроводностью, затем по мере прогрева среды и увеличения массовых сил $g\beta\Delta T$ начинает развиваться свободная конвекция, которая со временем выходит на стационарный режим.

Времена существования режима теплопроводности и установления стационарной свободной конвекции растут с ростом Pr и x , но убывают с ростом $g\beta\Delta T$.

4.2.2. Турбулентная свободная конвекция

Для турбулентной свободной конвекции в приближении пограничного слоя решение было получено Эккертом и Джексоном интегральным методом для постоянной температуры стенки. Они приняли $\delta = \delta_T$, постоянные физические свойства и эмпирические зависимости для распределения скорости и температуры.

Обобщение решения имеет вид

$$Nu_x = 0,0295 \cdot Gr_x^{2/5} \cdot Pr^{7/15} (1 + 0,494 Pr^{2/3})^{-2/5} \quad (4.24)$$

для местной теплоотдачи в сечении x и

$$Nu_l = 0,0246 \cdot Gr_x^{2/5} Pr^{7/15} (1 + 0,494 Pr^{2/3})^{-2/5} \quad (4.25)$$

для средней на длине l теплоотдачи.

Эти уравнения хорошо согласуются с результатами эксперимента на воздухе и воде ($Pr = 0,7 \div 10$) в диапазоне $Gr \cdot Pr = 10^9 \div 10^{12}$ и могут быть рекомендованы для более широкого диапазона чисел Pr за исключением, по-видимому, жидких металлов ($Pr \ll 1$).

В диапазоне $Pr = 1 \div 10$ можно пользоваться и более простым уравнением для средней теплоотдачи

$$Nu_l = 0,13 (Gr_l Pr)^{1/3}. \quad (4.26)$$

Из уравнения (4.26) следует, что т. к. $Nu \sim l$, а $Gr_l \sim l^3$, то α в турбулентном режиме практически не зависит от l . Уравнения (4.24) \div (4.26) также успешно описывают свободную конвекцию и в криогенных жидкостях.

4.3. СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ НА ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

На горизонтальной поверхности движение жидкости при свободной конвекции носит сложный ячеистый характер. Теоретический расчет его значительно сложнее, чем движения на вертикальных поверхностях, так как требует решения полной системы уравнений (4.1) ÷ (4.10).

Результаты экспериментов на квадратных пластинах со стороной l , обращенных поверхностью вверх при нагреве и вниз при охлаждении, обобщаются следующими уравнениями:

$$Nu_l = 0,54 (Gr_l \cdot Pr)^{1/4} \quad (4.27)$$

для ламинарной конвекции в диапазоне $10^5 \leq Gr_l \cdot Pr \leq 2 \cdot 10^7$ и

$$Nu_l = 0,14 (Gr_l \cdot Pr)^{1/3} \quad (4.28)$$

для турбулентной конвекции в диапазоне $2 \cdot 10^7 \leq Gr_l \cdot Pr \leq 3 \cdot 10^{10}$. Они справедливы также и для криогенных жидкостей при ускорениях $a/g_0 = 1 \div 20$ [154]. Однако на пластине, ограниченной по бокам вертикальными стенками, видимо, из-за развития вихревого движения в жидкости теплоотдача оказывается выше [154], чем по уравнению (4.28). Эти данные обобщаются уравнением

$$Nu = 0,0505 (Gr \cdot Pr)^{0,396} \quad (4.29)$$

Если поверхность при нагреве обращена вниз или при охлаждении — вверх, то в диапазоне $3 \cdot 10^5 \leq Gr \cdot Pr \leq 3 \cdot 10^{10}$ теплоотдача при свободной конвекции описывается эмпирическим уравнением [154]

$$Nu_l = 0,27 (Gr_l \cdot Pr)^{1/4} \quad (4.30)$$

Как показали результаты летного эксперимента [154], расчетные зависимости, приведенные в разд. 4.2 и 4.3, можно применять для расчета теплоотдачи в большом объеме водорода и кислорода при пониженных ускорениях до $a/g_0 = 8 \cdot 10^{-4}$.

4.4. СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ГАЗОВЫХ И ЖИДКИХ ПРОСЛОЙКАХ МЕЖДУ СТЕНКАМИ

4.4.1. Горизонтальные прослойки

Рассмотрим сначала горизонтальную прослойку, образованную двумя бесконечными пластинами с постоянными по поверхности температурами и заполненную жидкостью или газом. Обозначим температуру верхней пластины T_1 , нижней T_2 , а расстояние между ними D . Рядом исследователей, начиная с Релея (1916), для малых D и постоянной λ , было показано, что свободная конвекция в прослойке не возникает, если $T_1 > T_2$. При подо-

греве снизу ($T_1 < T_2$) возникновение свободной конвекции определяется безразмерным параметром, называемым числом Релея:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{c_p g \beta D^3 Q^2}{\mu \lambda} (T_2 - T_1). \quad (4.31)$$

Численными расчетами для этого случая было установлено, что свободная конвекция возникает лишь при $Ra \geq Ra_{кр} \approx 1700$. Когда верхняя граница жидкости свободна и имеет постоянную температуру T_1 , то численные расчеты дают меньшее значение критического числа Релея; $Ra_{кр} \approx 1100$.

В частном случае нагрева снизу очень толстых слоев совершенного и идеального газа, когда изменение плотности от давления существенно (например, атмосфера), условием устойчивости среды будет

$$\frac{dT}{dy} \leq \frac{g}{C_F} \quad \text{или} \quad k = \frac{g}{C_F (dT/dy)} \geq 1,$$

где C_F — критерий снимаемости.

Градиент $\partial T / \partial y = g / C_F$ называется адиабатическим градиентом температуры. Возникающая при $k < 1$ свободная конвекция стремится перемешать газ так, чтобы установился в среднем адиабатический градиент температуры. В общем случае сжимаемого и вязкого газа, как показал В. И. Полежаев, критическое число Релея является функцией параметра k , числа Прандтля и некоторых других параметров.

При $Ra > Ra_{кр}$ возникает свободная конвекция, которая имеет ячеистую структуру. Это могут быть двухмерные ячейки, в виде вращающихся в противоположные стороны «валиков», или трехмерные ячейки. Последние в плане могут иметь форму шестигранника, квадрата, треугольника и т. д. Горячая среда поднимается вверх в центре ячеек, а холодная опускается вниз по их краям или наоборот.

Реализация того или иного вида ячеистой структуры зависит от ряда причин (начальных условий, геометрии прослойки, неоднородности распределения температуры и т. п.). Пока этот вопрос изучен недостаточно. Имеющиеся численные решения получены для заданных форм ячеек.

При увеличении числа Релея упорядоченная ячеистая структура постепенно разрушается, проходя ряд дискретных промежуточных состояний (в диапазоне $Ra \approx 3 \cdot 10^4 \div 10^7$), пока конвективное движение не становится полностью турбулентным.

Для инженерных расчетов переноса тепла через прослойки вводят понятие среднего числа Нуссельта

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{q}_w D}{\lambda (T_2 - T_1)}. \quad (4.32)$$

Здесь \bar{q}_w — осредненная по поверхности прослойки плотность теплового потока.

Иногда величину $\bar{q}_w D / (T_2 - T_1)$ называют эффективной теплопроводностью прослойки и обозначают $\lambda_{\text{эф}}$ и тогда $Nu = \lambda_{\text{эф}} / \lambda$. На рис. 4.4 представлены результаты экспериментов и численных расчетов теплоотдачи через тонкие (заполненные несжимаемой средой) горизонтальные прослойки, выполненных В. И. Полежаевым и М. П. Власюк. Здесь число Релея Ra_m определено по уравнению (4.31) при средней по толщине прослойки температуре среды $T_m = (T_1 + T_2) / 2$.

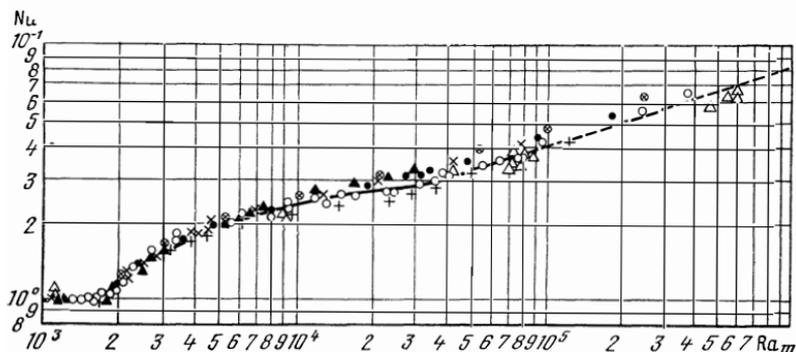


Рис. 4.4. Зависимость теплоотдачи через тонкие горизонтальные прослойки от числа Релея:

○ — вода; + — гептан; х — гликоль; ● — силиконовое масло АКЗ; ▲ — силиконовое масло АК 350; △ — воздух; ⊕ — расчеты В. И. Полежаева и М. П. Власюка

Как видно из рис. 4.4, при $Ra_m < (Ra_m)_{\text{кр}}$ $Nu = \lambda_{\text{эф}} / \lambda = 1$, т. е. перенос тепла осуществляется только теплопроводностью.

По мере роста Ra_m (при $Ra_m > Ra_{\text{кр}}$) вклад свободной конвекции в перенос тепла непрерывно возрастает.

4.4.2. Вертикальные прослойки

Пусть в вертикальной прослойке температура одной из боковых стенок (холодной) T_1 ниже другой (горячей) T_2 . Тогда характер свободной конвекции в среде, заполняющей прослойку, определяется главным образом числом Релея и отношением высоты L к толщине прослойки D . Кроме того, на теплоотдачу и характер конвекции влияют сжимаемость среды, зависимость теплофизических свойств среды от температуры и характер распределения температуры по поверхности стенок.

При малых значениях числа Релея, определенного уравнением (4.31), свободная конвекция практически не играет роли и теплообмен определяется теплопроводностью. С ростом числа Релея возникает конвективное движение. Около горячей стенки жидкость движется вверх, а у холодной возвращается вниз. Это увеличивает теплоотдачу, но лишь в области, где пограничные

слои на горячей и холодной стенках не касаются друг друга. При постоянных T_1 и T_2 смыкание пограничных слоев происходит в плоскости симметрии, причем в области сомкнутых пограничных слоев профиль температур линейный. Это означает, что тепло передается здесь только теплопроводностью и $\overline{Nu} = \frac{\lambda_{эф}}{\lambda} = 1$. При $(L/D) \rightarrow \infty$ вклад площади прослойки, где пограничные слои еще не сомкнулись, будет пренебрежимо мал. Следовательно, среднее значение $\overline{Nu} = (\lambda_{эф}/\lambda) \rightarrow 1$.

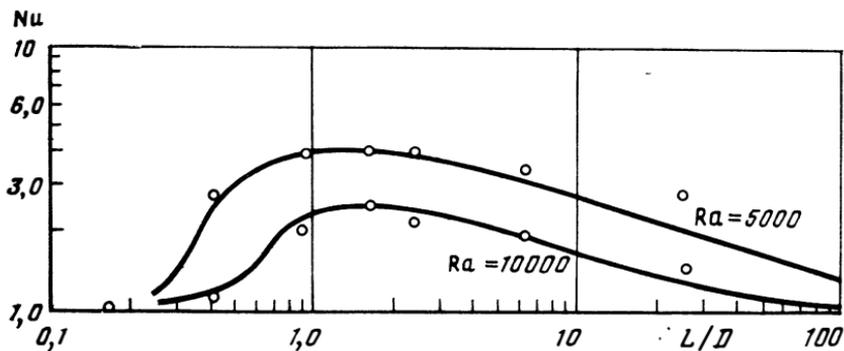


Рис. 4.5. Зависимость теплоотдачи от отношения длины к ширине прослойки для фиксированных чисел Рейля:

○ — эксперимент; — — — теория

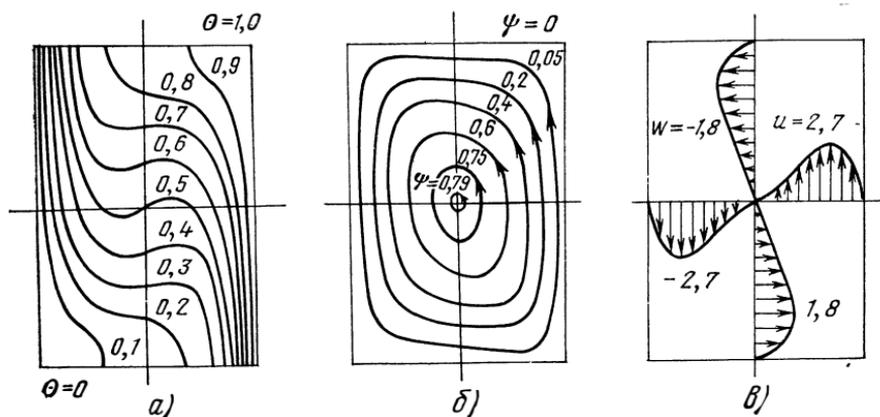


Рис 4.6. Стационарное распределение:

а — изотерм θ ; б — линий тока ψ ; в — скорости; $L/D=1,5$; $Ra=10\,000$

Очевидно, что при $(L/D) \rightarrow 0$ и теплоизолированных торцовых стенках теплообмен будет происходить тоже только теплопроводностью. Поэтому можно ожидать, что при конечных значениях L/D теплоотдача при ламинарной свободной конвекции

имеет максимум при некотором значении L/D , что теоретически и экспериментально было проверено в работах В. И. Полежаева, Хирата и др. Рис. 4.5 иллюстрирует, как изменяется число Nu в зависимости от L/D для двух значений $Ra = Gr \cdot Pr$; максимальное значение Nu приходится на $L/D = 1,5$. Для этого значения на рис. 4.6 показаны изотермы $\theta = (T_1 - T)/(T_1 - T_2)$, линии тока ψ и профили скоростей для ламинарной свободной конвекции. В этом случае возникает двухмерный вихрь. Важно, что по высоте в средней части прослойки имеется четко выраженная стратификация, т. е. градиент температуры по высоте: горячая среда располагается выше, а холодная ниже.

Существует достаточно много расчетных зависимостей для определения теплоотдачи в вертикальных прослойках. С учетом работы Хирата и других можно рекомендовать в диапазоне $L/D = 1 \div 20$, $Pr = 1 \div 1000$ и $Ra = 10^3 \div 10^7$ уравнение Эмери и Чу:

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} = \frac{\lambda_{эф}}{\lambda} = 0,28 Ra^{1/4} \left(\frac{L}{D} \right)^{-1/4}. \quad (4.33)$$

В первом приближении оно применимо и для горизонтальных прослоек. Из сказанного следует, что в случае экранной изоляции, заполненной воздухом, лучше иметь длинные прослойки, не разделенные горизонтальными перегородками.

4.5. СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЕМКОСТЯХ

Практическое значение исследования свободной конвекции в замкнутых объемах непрерывно возрастает. Она определяет тепловые и гидродинамические процессы в баках самолетов и ракет, в хранилищах жидкостей и газов и во многих промышленных технологических процессах. Однако теоретический анализ и экспериментальные исследования свободной конвекции в замкнутых объемах, т. е. при внутренней задаче, значительно сложнее, чем при внешней. При внешней задаче (свободная конвекция на пластине, шаре, цилиндре и т. п.) часто можно ограничиться приближением пограничного слоя. При внутренней задаче, как правило, приходится рассматривать всю область, что значительно усложняет теоретический анализ и эксперимент. Уравнениями пограничного слоя можно пользоваться лишь в первом приближении для некоторых частных задач.

В качестве примера рассмотрим ламинарную свободную конвекцию в горизонтальной цилиндрической емкости. Ряд теоретических и экспериментальных работ показали, что характер циркуляции жидкости и поля температур и скоростей очень чувствительны к температурным граничным условиям.

На рис. 4.7, 4.8, 4.9 представлены линии тока, профили скоростей и температур для линейного (по окружности стенки цилиндра)

Рис. 4.7. Линии тока при совпадении максимума и минимума температур стенки с горизонтальным диаметром цилиндра ($\theta=0^\circ$):

Номер линии тока	Интервал между точками	Полное время движения по линии тока
1	1 мин	71 мин
2	1 »	98,5 »
3	4 »	235 »
4	8 »	100 »
5	8 »	86 »

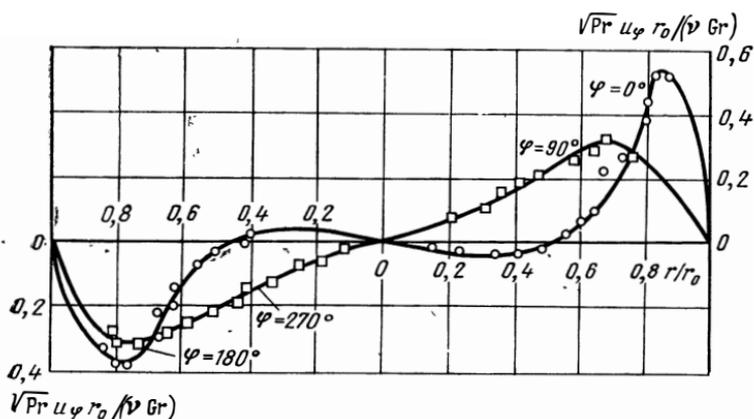
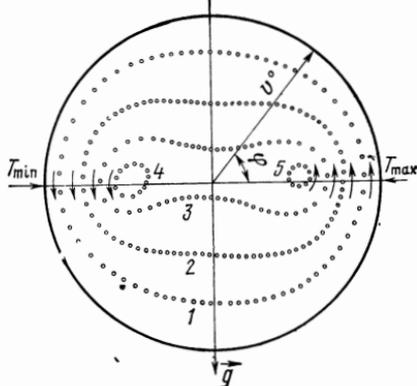


Рис. 4.8. Профили тангенциальной скорости V_0 при $\theta=0^\circ$

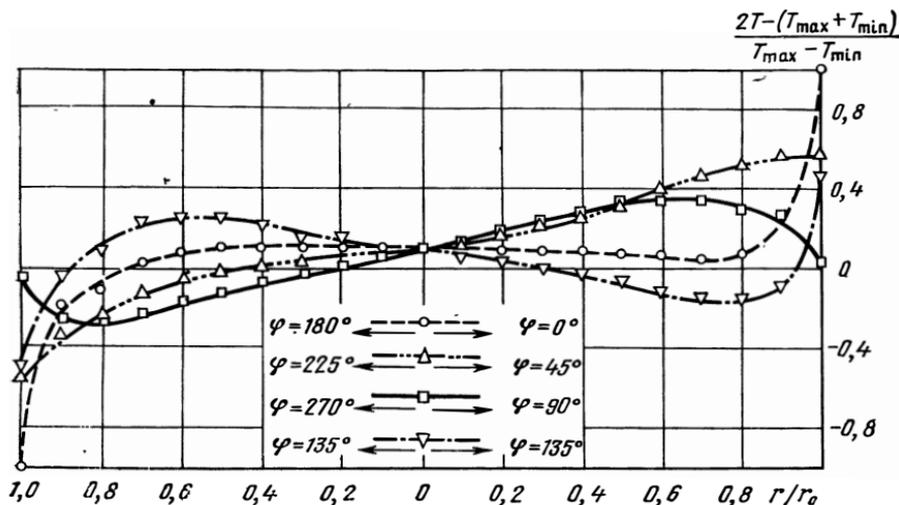


Рис. 4.9. Профили температуры при $\theta=0^\circ$

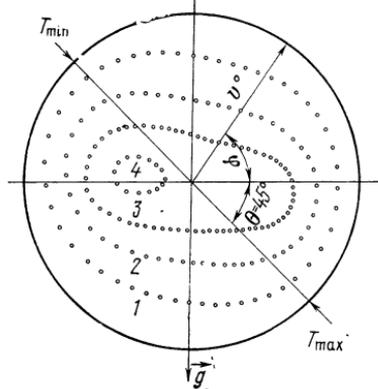


Рис. 4.10. Линии тока при расположении T_{\max} и T_{\min} плоскости, имеющей угол с горизонталью $\theta=45^\circ$:

Номер линии тока	Интервал между точками	Полное время движения по линии тока
1	1 мин	50 мин
2	1 >	51 >
3	1 >	68,5 >
4	4 >	60 >

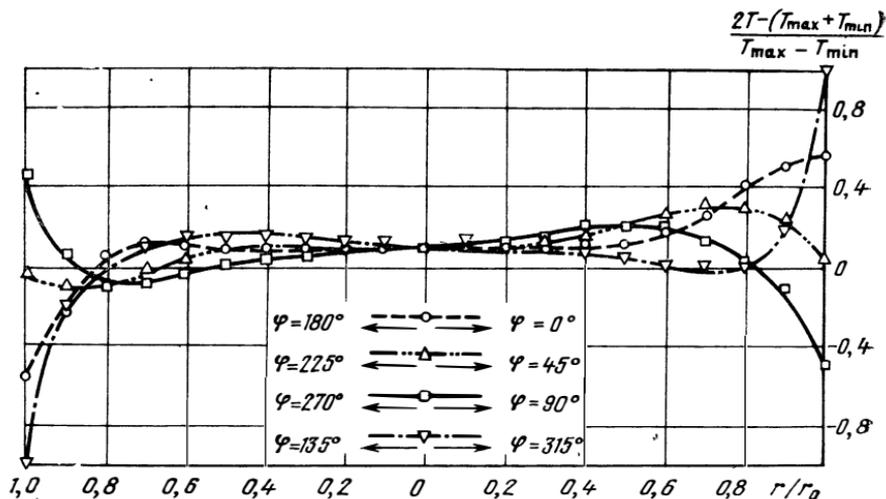


Рис. 4.11. Профили температуры при $\theta=45^\circ$

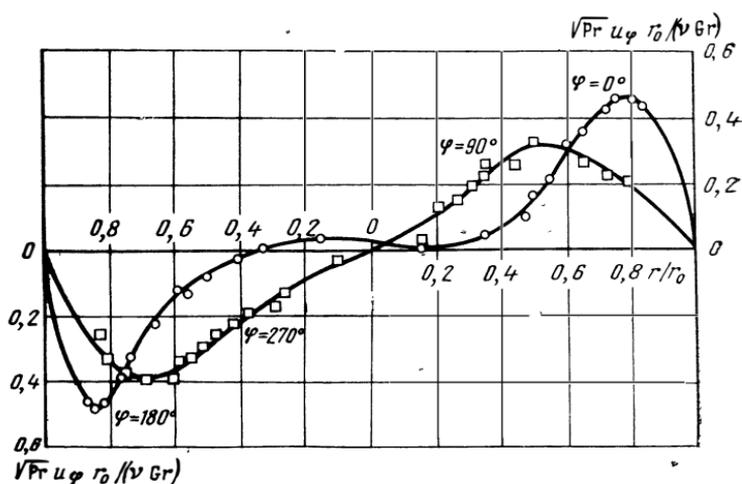


Рис. 4.12. Профили тангенциальной скорости при $\theta=45^\circ$

дра) распределения температуры стенки с максимумом T_{\max} и минимумом T_{\min} , расположенными на горизонтальном диаметре. На рис. 4.10, 4.11, 4.12 представлены распределения тех же величин, но для случая, когда T_{\max} и T_{\min} находятся в диаметральной плоскости, имеющей наклон $\theta = 45^\circ$ к горизонтальной. Эти результаты получены в опытах на силиконовом масле при $Pr = 19,55$ и $Gr = 1,1$ в стационарном режиме.

Из рисунков видно, что при $\theta = 0^\circ$ жидкость вращается медленнее, чем при $\theta = 45^\circ$ и картина линий тока существенно различна. Так как поле скоростей охватывает всю жидкость, в этих условиях нельзя использовать приближение пограничного слоя.

Важно, что при $\theta = 0^\circ$ (рис. 4.9) в центральной части цилиндра имеет место существенная тепловая стратификация жидкости (слоистое распределение более горячей жидкости над более холодной). При $\theta = 45^\circ$ стратификация в два раза меньше, чем при $\theta = 0^\circ$.

Дальнейшее увеличение угла θ ведет к дальнейшему уменьшению стратификации в центральной части цилиндра.

Таким образом, увеличение угла θ , т. е. перемещение диаметра, соединяющего T_{\max} и T_{\min} от горизонтали к вертикали, уменьшает стратификацию центральной части цилиндра. При больших углах $45^\circ < \theta < 90^\circ$ центральная часть жидкости вращается в результате свободной конвекции, оставаясь практически изотермической.

Экспериментально было проверено влияние начальных условий на стационарную свободную конвекцию при $\theta = 0^\circ$, в одном случае нагрев с $\theta = 0^\circ$ начинался из изотермического состояния жидкости, в другом случае — из предварительно установившегося режима с $\theta = 45^\circ$. После выхода на стационарный режим с $\theta = 0^\circ$ картины линий тока, профили скорости и температуры оказались идентичными. Это является интересным результатом, но еще не доказывает, что начальные условия вообще не могут влиять на стационарную свободную конвекцию. Необходимы дальнейшие исследования.

4.6. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕПЛОВОЙ СТРАТИФИКАЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЕМКОСТЯХ

В предыдущем разделе было показано, что для горизонтальных цилиндров наибольшая тепловая стратификация возникает при подводе тепла к боковой поверхности цилиндра. Как показывает опыт применения криогенных топлив [154], тепловая стратификация в баках ракет и в хранилищах также оказывается наибольшей, когда тепловой поток подводится сбоку. Она может быть значительной и при подогреве емкости снизу, при тепловыделении в самой жидкости, и при теплообмене на свободной поверхности жидкости. Стратификация, например, в баках двигателей летательных аппаратов, работающих на криогенных топливах, обычно является весьма нежелательным явлением. Поэтому нужно уметь рассчитывать ее и бороться с ней, основываясь на изучении механизма явления.

При стратификации верхние слои жидкости имеют температуру выше средней температуры жидкости. Давление в баке следует за давлением насыщения паров жидкости, соответствующим температуре жидкости на поверхности раздела фаз. Если эта температура существенно больше среднemasсовой температуры

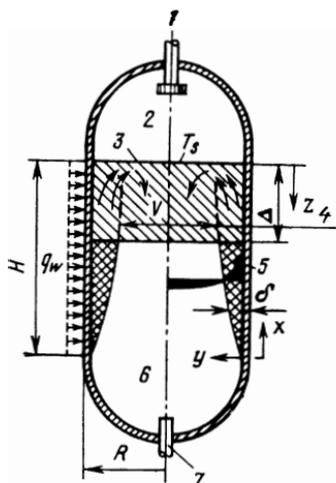


Рис. 4.13 Типичная расчетная схема для определения T_s и толщины слоя тепловой стратификации:

1—наддув, 2—газ наддува, 3—поверхность раздела жидкость—газ; 4—стратифицированная жидкость; 5—профиль скорости $u(y)$; 6—неперемешанная жидкость; 7—к турбонасосу

жидкости T_f , то и давление в баке будет намного больше давления, соответствующего $T_s = T_f$. Так, например, для жидкого водорода увеличение температуры насыщения T_s на поверхности на 1 К приведет к увеличению давления насыщения p_s , а следовательно, и давления в баке на $0,4 \cdot 10^5$ Па (при начальном давлении порядка $1 \cdot 10^5$ Па).

При длительном хранении топлив, в условиях притока тепла, требуется рассчитывать бак на более высокое давление или стравливать из бака значительное количество паров топлива. Кроме того, сильно нагретые верхние слои криогенного топлива, попав в магистрали и насос двигателя, могут оказаться перегретыми ($T_f > T_s$) относительно локального давления и вскипеть, что недопустимо по условиям работы насоса. Это ведет к увеличению неиспользуемых остатков топлива в баках. Процесс стратификации в баках, являющийся следствием свободной конвекции, весьма сложен и

еще недостаточно хорошо изучен. На основании анализа ряда исследований, включая и летные эксперименты, большинство авторов для расчета температуры на поверхности раздела T_s и толщины стратифицированного слоя $\Delta(\tau)$ применяют расчетную схему, показанную на рис. 4.13 [154]. Эта схема базируется на приближении пограничного слоя и применима главным образом для ламинарной и турбулентной свободной конвекции при больших числах Релея ($Ra^* > 10^6$). Она основана на следующих допущениях:

1) подогрев сбоку с постоянным тепловым потоком q_w на длине H ;

2) тепло- и массообмен на поверхности раздела фаз отсутствуют;

3) ускорение силы тяжести \vec{g} постоянно и направлено по оси бака вниз;

4) температура жидкости $T_{ж}$ постоянна;

5) профиль безразмерной температуры $\psi = \frac{T_z - T_{ж}}{T_s - T_{ж}}$ есть функция только безразмерной координаты $\eta = \frac{z}{\Delta(\tau)}$ и не зависит от времени и радиуса $[\Delta(\tau) — \text{толщина стратифицированного слоя, } \tau — \text{время}]$;

6) пограничный слой около стенок квазистационарен и такой же, как при свободной конвекции у вертикальной пластины; толщина его $\delta \ll R$;

7) влияние переходного режима не учитывается.

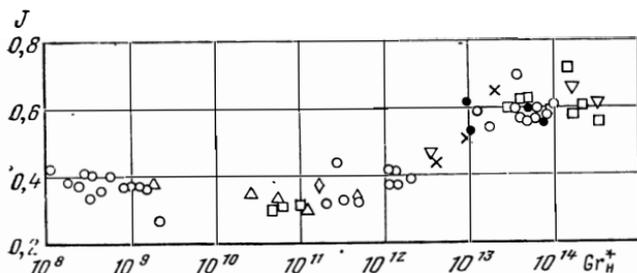


Рис. 4.14. Зависимость интеграла $J = \int_0^1 \psi d\eta$ от модифицированного числа Грасгофа при $H/R = 2,3$ и $Pr = 1,3 \div 32$

Pr					
1,3—6,7 ○	3,9—4,8 □	28—32 △	6,1—6,6 ×	6,3—8,1 ●	7,4—10 ◇

При этих допущениях, считая, что все тепло, подведенное к баку через боковые стенки за время τ , пошло на нагрев стратифицированного слоя жидкости, получим

$$q_w 2\pi R H \tau = \rho c_p \pi R^2 \int_0^{\Delta(\tau)} (T - T_{ж}) dz$$

или в безразмерном виде [154] —

$$\frac{(T_s - T_{ж}) \lambda}{q_w H} = \frac{2 (H/R)}{Pr \frac{\Delta(\tau)}{H}} \frac{v}{\tau H^2} \int_0^1 \psi d\eta. \quad (4.34)$$

Значения интеграла $J = \int_0^1 \psi d\eta = \int_0^1 \frac{(T_z - T_{ж})}{T_s - T_{ж}} \frac{dz}{\Delta(\tau)}$

были определены экспериментально и представлены на рис. 4.14 в функции модифицированного числа Грасгофа $Gr^* =$

$= g\beta q_w \frac{H^4}{\lambda \nu^2}$, которое обычно используется, когда задается не разность температур, а плотность теплового потока q_w . В этом случае переход от ламинарного течения к турбулентному на вертикальной стенке происходит при $Ra^* = Gr^* \cdot Pr \approx 10^{11}$.

Значение $\Delta(\tau)/H$, входящее в уравнение (4.34), находится в предположении, что скорость роста массы стратифицированного слоя жидкости определяется втекающей в него из пограничного слоя нагретой жидкостью в сечении $H - \Delta(\tau)$ (см. рис. 4.13). Тогда

$$\pi R^2 \frac{d[\rho \Delta(\tau)]}{d\tau} = \left[2\pi R \int_0^{\delta} \rho u(y) dy \right]_{x=H-\Delta(\tau)}$$

Интегрирование этого уравнения при подстановке соответствующего профиля скорости по толщине пограничного слоя и позволяет найти значение $\Delta(\tau)/H$. Для турбулентного пограничного слоя в предположении постоянной плотности интегрирование дает

$$\frac{\Delta(\tau)}{H} = 1 - \left(1 + 0,0924 \frac{H}{R} \frac{\nu \tau / H^2}{Pr^{2/3}} \frac{Gr_H^*}{1 + 0,443 Pr^{2/3}} \right)^{-7}. \quad (4.35)$$

Сопоставление расчета по уравнению (4.35) с экспериментом при замерах температуры на осевой линии бака и отсчете времени от начала включения обогрева показало хорошее качественное совпадение, но количественно расчет дает заниженные значения. Экспериментальные точки располагаются выше расчетной кривой с разбросом $0 \div 100\%$. В то же время расчет $(T_s - T_{ж})$ по формулам (4.34) и (4.35) удовлетворительно совпадает с экспериментом.

4.7. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЛАМИНАРНАЯ СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ БАКЕ

Исследование нестационарной свободной конвекции весьма важно, так как большинство процессов, определяемых свободной конвекцией в баках летательных аппаратов, нестационарные. Это связано с частыми изменениями величины и характера теплопритоков к баку, направления и величины действующих ускорений и т. п.

Экспериментальные и теоретические (численные) исследования этих процессов связаны с большими трудностями. Поэтому нестационарная свободная конвекция изучена еще недостаточно полно.

Для понимания физических особенностей этого процесса рассмотрим некоторые результаты численных расчетов ламинарной нестационарной свободной конвекции в цилиндрических верти-

кальных баках [154]. На рис. 4.15 представлены распределения линий тока (ψ) и изотерм для воды в вертикальном баке с боковым нагревом ($q_w = 11,4 \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$) при земном ускорении силы тяжести спустя 60 с после начала нагрева. Начальная температура бака $T_0 = 44,5^\circ$. Хорошо видно, что в нижнем и верхнем углах (А и В) имеется существенное отклонение от математической модели, использующей уравнения пограничного слоя. На это же указывает наличие двух вихрей у стенки и в ядре.

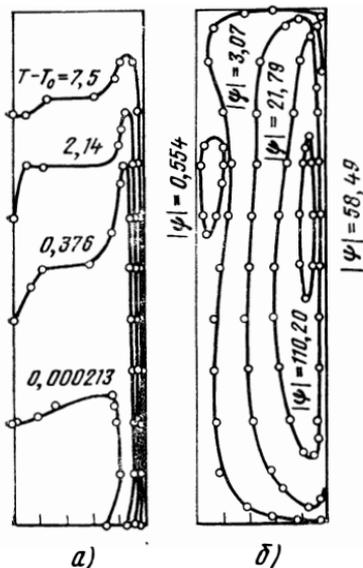


Рис. 4.15. Развитие свободной ламинарной конвекции в цилиндрическом вертикальном баке:
а—профиль температур (численный расчет; $\tau = 60 \text{ с}$); б—линии тока

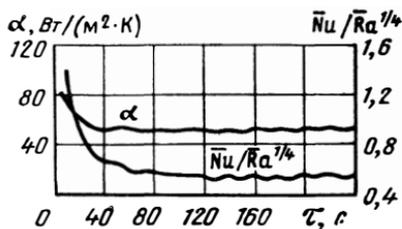


Рис. 4.16. Характер изменения средней по высоте бака теплоотдачи во времени

По данным упомянутого расчета были определены мгновенные значения комплекса $\bar{Nu} / \bar{Ra}^{1/4}$, осредненные по обогреваемой высоте H стенок бака.

Здесь $\bar{Nu} = \bar{\alpha}H / \lambda$,

где

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{H} \int_0^L \alpha dx;$$

$$\alpha = \frac{q}{T_w(x) - T_0(x)}.$$

$T_w(x)$, $T_0(x)$ — локальные значения температуры у стенки и на оси цилиндра.

Результаты расчета представлены на рис. 4.16 для $\bar{Ra}_H \leq \leq 6 \cdot 10^9$. Теплоотдача довольно быстро падает и затем колеблется около некоторого среднего значения. Среднее значение отно-

шения $\bar{Nu}/\bar{Ra}^{1,4}$ приблизительно равно 0,54, что довольно близко к значению константы 0,56 в уравнении (4.21) для стационарной ламинарной конвекции на вертикальных поверхностях. Колебания теплоотдачи соответствуют колебаниям полей скорости и температуры, связанным с возникновением и исчезновением вторичных вихрей около оси бака. При прогреве неподвижной жидкости в цилиндрическом баке радиуса R , приложенным в момент $\tau=0$ к его боковой поверхности тепловым потоком q_w , температура стенки сначала растет, а в массе жидкости распространяется температурная волна и достигает оси за время порядка $Fo = \alpha\tau/R^2 \approx 0,1$. После этого разность между температурами жидкости на стенке T_w и на оси T_o стремится к постоянному значению. Режим нестационарной теплопроводности, при котором $T_w - T_o \approx \text{const}$ называется квазистационарным. Он достигается при $Fo \geq 0,5$.

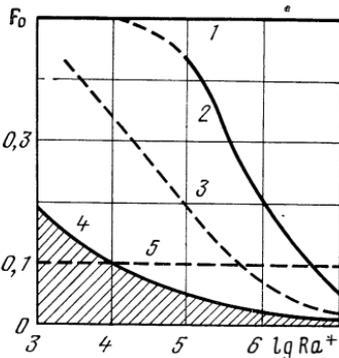


Рис. 4.17. Границы режимов нестационарной свободной конвекции и теплопроводности в вертикальном цилиндрическом баке:

1—граница квазистационарной теплопроводности; 2—граница квазистационарной конвекции; 3—максимальная скорость конвективного движения; 4—начало свободной конвекции, 5—время распространения температурной волны от стенки до оси в случае прогрева теплопроводностью

котором $T_w - T_o \approx \text{const}$ называется квазистационарным. Он достигается при $Fo \geq 0,5$.

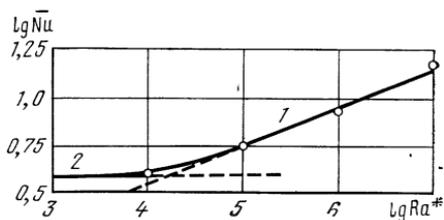


Рис. 4.18. Зависимость средней теплоотдачи от модифицированного числа Рейля:

1—по уравнению (4.51); 2—режим теплопроводности неподвижной жидкости; о—квазистационарный режим

В поле массовых сил эта картина прогрева теплопроводностью нарушается возникновением свободной конвекции. Как показало численное исследование [111], выполненное для вертикального цилиндрического бака с $H/(2R) = 1$ и $Pr = 1$, при развитии свободной конвекции скорость движения жидкости сначала нарастает, проходит через максимум и затем падает до некоторого стационарного значения. Вынос конвективным движением горячей жидкости вверх искажает поле температур. Оно становится двух- и даже трехмерным. Появляется тепловая стратификация жидкости. Со временем разности температур в фиксированных точках стабилизируются и наступает квазистационарный режим прогрева в условиях свободной конвекции. Однако в процессе выхода на этот режим в верхней части бака,

куда устремляется горячая жидкость, температура стенки может быть выше, чем при прогреве только теплопроводностью [111].

На рис. 4.17 [111] даны времена начала свободной конвекции (кривая 4), достижения максимума скорости конвективного движения (кривая 3) и установления квазистационарной конвекции (кривая 2) в зависимости от $Ra^* = g\beta H^4 q_w / (\nu^2 \lambda)$. Из рис. 4.17 видно, что все эти времена уменьшаются с ростом числа Релея. Для сравнения даны времена прохода температурной волны от стенки до оси (кривая 5) и установления квазистационарного режима при прогреве неподвижной жидкости теплопроводностью (кривая 1).

На рис. 4.18 представлены результаты расчета [111] средней теплоотдачи Nu на квазистационарном режиме в функции модифицированного числа Релея. Кривая 1 соответствует зависимости

$$\bar{Nu} = 0,55 (Ra^*)^{0,2}, \quad (4.36)$$

полученной для стационарного режима свободной конвекции на вертикальной пластине при $q_w = \text{const}$ и $Pr = 1$. Как видно, при $Ra^* > 10^5$ зависимость (4.36) удовлетворительно аппроксимирует расчет для бака [111]. Квазистационарный режим в замкнутой области, совпадающий по теплоотдаче с режимом в пограничном слое на вертикальной пластине или описываемый степенной зависимостью, принято называть режимом пограничного слоя. Именно в этом режиме поле температур в средней и нижней частях цилиндра разделяется на ядро с равномерной температурой по горизонтали и пограничный слой у стенки, в котором происходит основное изменение температуры (см. рис. 4.13).

При $Ra^* < 10^5$ зависимость $\bar{Nu} = f(Ra^*)$ отклоняется от уравнения (4.36) и стремится к горизонтальной линии 2 (см. рис. 4.18), соответствующей квазистационарному режиму теплопроводности неподвижной жидкости. Это промежуточный режим свободной конвекции, в котором пограничный слой у стенки сливается с ядром. В промежуточном режиме температурное расслоение по вертикали (стратификация) растет с ростом Ra^* , достигает максимума при $Ra^* = 10^5$ и убывает в режиме пограничного слоя.

В работе [111] показано также, что с ростом высоты цилиндрического бака величина стратификации тоже растет, но значительно медленнее чем H/R .

Многие важные вопросы свободной конвекции в замкнутых областях изучены еще недостаточно. Однако быстрое совершенствование вычислительных машин и экспериментальной техники позволяет надеяться, что эти исследования будут проведены и обобщены в самое ближайшее время.

Рекомендуемая литература: [111, 154].

ОСОБЕННОСТИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В КАНАЛАХ

При внешнем обтекании пластины вязкой жидкостью ее взаимодействие с поверхностью пластины распространяется на определенную область потока, которую называют гидродинамическим пограничным слоем. В пограничном слое скорость изменяется от нуля на стенке до величины на внешней границе пограничного слоя, близкой к скорости набегающего потока.

Толщина пограничного слоя растет по длине пластины. Дело в том, что изменение импульса ламинарного потока вследствие торможения у стенки передается вглубь потока со скоростью, пропорциональной коэффициенту кинематической вязкости ν . А так как поток сам движется вдоль стенки с определенной скоростью, то более удаленные от стенки слои воспринимают это изменение, пройдя больший путь вдоль стенки, чем близко расположенные слои. Поэтому толщина пограничного слоя растет по длине тем быстрее, чем больше кинематическая вязкость ν и чем меньше скорость течения потока. Турбулентный аналог кинематической вязкости ϵ_t , называемый коэффициентом турбулентного переноса импульса, много больше чем ν , что определяет более быстрый рост толщины турбулентного пограничного слоя, чем ламинарного.

При течении в трубе гидродинамический пограничный слой во входной части трубы растет кольцеобразно по всей поверхности трубы. На некотором удалении от входа пограничные слои смыкаются и все сечение потока как бы становится пограничным слоем. Это означает, что в каждой его точке, кроме оси потока, производная скорости по радиусу трубы отлична от нуля.

Расстояние от входа, на котором происходит смыкание пограничных слоев, называется участком гидродинамической стабилизации. В отличие от пластины, в трубе на начальном участке поток вне пограничного слоя ускоряется, так как в пограничном слое он тормозится.

В трубе смыкание пограничных слоев происходит на оси канала в конце участка стабилизации. В каналах некруглой формы смыкание пограничных слоев происходит постепенно на

всей длине участка стабилизации и начинается с углов канала. Это значительно усложняет картину течения.

Если температура стенки отличается от температуры потока, то между ними возникает теплообмен. Однако поле температур в потоке возникает не сразу: оно так же, как и поле скоростей, формируется на определенной длине канала. Прогрев жидкости по нормали к стенке происходит с конечной скоростью, пропорциональной коэффициенту температуропроводности a в ламинарном потоке и коэффициенту турбулентного переноса тепла ϵ_q в турбулентном. Так как жидкость движется, то по аналогии с гидродинамическим пограничным слоем возникает тепловой пограничный слой. Длина входного участка канала, на котором происходит смыкание тепловых пограничных слоев, называется участком тепловой стабилизации. Толщина гидродинамического и теплового пограничных слоев, так же как и участки гидродинамической и тепловой стабилизации, обычно не совпадают, даже если они начинаются в одном сечении. Обычно $\nu \neq a$, или, другими словами, число Прандтля $Pr = \nu/a \neq 1$; то же самое имеет место и при турбулентном течении, так как турбулентный аналог числа Прандтля, называемый турбулентным числом Прандтля $Pr_T = \epsilon_\nu/\epsilon_q$ обычно отличается от единицы.

В силу этих особенностей начальных участков теплообмен и гидродинамика на них существенно отличаются от теплообмена в области гидродинамической и тепловой стабилизации течения в каналах.

В гл. III говорилось, что решение замкнутой системы уравнений для любого конкретного случая конвективного теплообмена в принципе позволяет найти поля всех параметров. Однако аналитическое решение такой системы уравнений (в общем случае трехмерной) даже для ламинарного течения возможно в редких случаях. Правда, быстрое развитие ЭВМ все время расширяет круг задач, где решение этой системы может быть получено численными методами.

Для турбулентных течений, как отмечалось в гл. III, система уравнений в общем случае получается незамкнутой. Ее удается замкнуть лишь с помощью частных соотношений для распределения турбулентных параметров, получаемых в полуэмпирической теории турбулентности.

В то же время в инженерных приложениях при расчете теплообменных устройств часто и не нужно знать распределение всех параметров по сечению канала. Достаточно знать лишь, как изменяются интегральные характеристики течения T_f , T_w и q_w по длине канала. Поэтому в большинстве инженерных приложений расчет теплообмена и гидравлических потерь в каналах теплообменных устройств ведется на основе одномерного, т. е. по сути дела интегрального (по сечению) описания теплообменных процессов.

Тогда основные уравнения упрощаются:
уравнение неразрывности —

$$f \frac{\partial \varrho f}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0; \quad (5.1)$$

уравнение движения —

$$\frac{G}{u} \frac{\partial u}{\partial x} + G \frac{\partial u}{\partial x} = f \varrho F_x - (1 - \psi) f \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.2)$$

где F_x — проекция плотности массовых сил на ось x ;

f — площадь поперечного сечения канала.

уравнение энергии —

$$\frac{G}{u} \frac{\partial i_f}{\partial x} = U \alpha (T_w - T_f) + f \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{эф} \frac{\partial T_f}{\partial x} \right) + f \frac{dp}{dt} + f T_f \sigma, \quad (5.3)$$

где U — периметр канала.

При одномерном описании предполагается, что все параметры потока изменяются во времени и лишь в одном измерении по длине канала, т. е. по x , а по сечению канала они постоянны и равны некоторым средним значениям. В качестве этих средних значений принимают:

а) среднемассовую энтальпию

$$i_f = \frac{\int \varrho u i df}{\int \varrho u df} = \frac{I}{G},$$

где ϱ , u и i — плотность, скорость и удельная энтальпия в струйке потока, протекающей через данный элемент сечения канала df ;

I — полная энтальпия потока, а G — массовый расход;

б) среднемассовую температуру T_f , соответствующую i_f ;

в) среднерасходную скорость

$$u = \frac{G}{\varrho_f f},$$

где ϱ_f — плотность теплоносителя при температуре T_f .

Кроме того, в уравнении (5.2) $\psi \ll 1$ — доля градиента давления, расходуемая на преодоление сил вязкости, т. е. на преодоление трения теплоносителя о стенку, и на перестройку распределения скорости. При этом

$$\psi \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{f dx} \int_{fdx} \left[\text{grad} \left(-\frac{2}{3} \mu \text{div} \vec{u} \right) + 2 \text{div} \mu \dot{S} \right] dV. \quad (5.4)$$

Здесь \dot{S} — тензор скоростей деформаций;

$\alpha = \frac{q_w}{T_w - T_f}$ — коэффициент теплоотдачи;

$\lambda_{\text{эф}} = \frac{Q_x}{f(\partial T_f / \partial x)}$ — средний эффективный коэффициент теплопроводности, определяющий перетечки тепла по теплоносителю вдоль оси канала;

σ — средняя скорость роста энтропии в единице объема теплоносителя из-за необратимости перехода кинетической энергии в тепло, т. е. в силу вязкого трения,

$$\sigma = - \frac{\int f dx \mu \Phi dV}{f dx},$$

где Φ — диссипативная функция [см. (3.10)].

Для большинства теплообменных процессов в каналах первый член правой части уравнения энергии много больше остальных трех. Поэтому уравнение (5.3) можно упростить:

$$\frac{G}{u} \frac{\partial i_f}{\partial \tau} = U \alpha (T_w - T_f). \quad (5.5)$$

Если dp/dx мало или теплоноситель — совершенный газ ($p = \rho RT$), то $di_f = c_{pf} dT_f$ и

$$\frac{G c_{pf}}{u} \frac{\partial T_f}{\partial \tau} + G c_{pf} \frac{\partial T_f}{\partial x} = U \alpha (T_w - T_f). \quad (5.6)$$

Основные три уравнения (5.1), (5.2) и (5.6) содержат 12 неизвестных: q_f , G , u , f , F_x , ψ , p , c_p , T_f , U , α , T_w . Чтобы получить одномерную математическую модель процесса, удобную для инженерных расчетов, следует замкнуть систему уравнений и сформулировать граничные условия.

Из условий однозначности задачи должны быть заданы: поле плотности массовых сил \vec{F} (обычно это гравитационное поле $\vec{F} = \vec{g}$); площадь поперечного сечения канала f ; периметр канала U .

Выпишем недостающие 6 уравнений:

$$\left. \begin{aligned} G &= \rho_f u f; \quad c_{pf} = c_{pf}(T_f); \quad q_f = q_f(p, T); \\ \alpha &= \alpha(x, \tau) \quad \text{и} \quad \psi = \psi(x, \tau). \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Краевые условия:

$\tau = 0$ — задаются $T_f = T_f(x)$ и $G = G(x)$;

$\tau > 0$ — задаются $G = G(\tau)$ при $x = 0$, а также температура стенки $T_w = T_w(\tau, x)$ или плотность теплового потока на стенке $q_w = q_w(\tau, x)$.

Таким образом получается замкнутая система уравнений, т. е. одномерная математическая модель тепловых процессов в каналах. Простота этой модели по сравнению с трехмерной достигается ценой введения двух коэффициентов α и ψ . Появление этих коэффициентов в одномерных уравнениях как раз и есть следствие описания реальных трехмерных процессов одномерной теорией. Поэтому они не могут быть определены в рамках одномерной модели и находятся либо из эксперимента, либо из решения трехмерной системы уравнений с помощью их определения и одномерных уравнений (5.1) — (5.3).

Для обобщения экспериментов или численных решений трехмерной системы уравнений сначала устанавливают, от каких параметров зависят α и ψ . Это можно сделать для каждого конкретного случая на основе анализа трехмерной системы уравнений (или особенностей механизма процесса) и уравнений (5.1) — (5.3). Затем представляют размерную зависимость в безразмерном виде, используя методы подобия и размерностей, и лишь после этого подбирают безразмерную эмпирическую функцию, наилучшим образом обобщающую экспериментальные данные или результаты численных расчетов.

Нахождение зависимостей для определения α и ψ , таким образом, является основной задачей прикладных исследований теплообменных процессов при течении однофазных теплоносителей в каналах.

Заметим, что аналогичное положение наблюдается и при внешнем обтекании тел в пограничном слое. Интегрируя уравнения пограничного слоя по толщине, переходят к интегральным (т. е. одномерным) уравнениям пограничного слоя. В них также появляются коэффициенты теплоотдачи и трения, которые находят либо из эксперимента, либо из решения дифференциальных уравнений пограничного слоя.

5.1. ТЕПЛООБМЕН В ТРУБАХ ПРИ ТЕЧЕНИИ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПО СЕЧЕНИЮ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

В этой главе рассматриваются лишь некоторые специальные случаи конвективного теплообмена в каналах, которые часто встречаются в практике расчета теплообменных устройств двигателей и различных систем летательных аппаратов.

В теплообменных устройствах летательных аппаратов часто передаются большие удельные тепловые потоки. Интенсивный теплообмен с поверхности обычно достигается при значительных градиентах температуры теплоносителя по радиусу канала, т. е. при больших температурных напорах $T_w - T_f$. Теплофизические свойства теплоносителей (коэффициент теплопроводности λ , коэффициент динамической вязкости μ , плотность ρ , удельные теплоемкости c_p и c_v) зависят от температуры. Поэтому, чем боль-

ше температурный напор, тем сильнее изменение теплофизических свойств теплоносителя по сечению канала. Это в свою очередь ведет к перестройке профилей температуры и скорости и, следовательно, к изменению теплоотдачи и гидравлического сопротивления.

Анализируя систему дифференциальных уравнений вязкой жидкости при наличии теплообмена и граничные условия, изложенные в гл. III, а также уравнения (5.1) — (5.3), можно установить, от каких размерных параметров зависит коэффициент теплоотдачи. Масштаб изменения теплофизических параметров учитывают введением их значений при среднемассовой температуре теплоносителя в данном сечении трубы диаметром d и при температуре стенки T_w . Такой анализ для стационарного течения теплоносителей дает следующую размерную зависимость для коэффициента теплоотдачи:

$$a = f [d, x, u, \beta g (T_w - T_f), \rho_f, \rho_w, \lambda_f, \lambda_w, \mu_f, \mu_w, (c_p)_f, (c_p)_w].$$

Применяя к этой зависимости π -теорему теории размерностей или приводя систему уравнений к безразмерному виду (см. главу III), получим соответствующую безразмерную зависимость:

$$Nu_f = f \left[\frac{x}{d}, Re_f, Pr_f, Gr_f, \frac{\rho_w}{\rho_f}, \frac{\lambda_w}{\lambda_f}, \frac{\mu_w}{\mu_f}, \frac{(c_p)_w}{(c_p)_f} \right]. \quad (5.8)$$

Аналогично для коэффициента гидравлического сопротивления найдем

$$\xi_f = f \left[\frac{x}{d}, Gr_f, Re_f, \frac{\rho_w}{\rho_f}, \frac{\mu_w}{\mu_f}, \frac{\lambda_w}{\lambda_f}, \frac{(c_p)_w}{(c_p)_f} \right]. \quad (5.9)$$

Здесь $Nu = ad/\lambda$ — число Нуссельта;

$Gr_f = \beta g (T_w - T_f) \frac{\rho_f^2 d^3}{\mu^2}$ — число Грасгофа;

$Re_f = \frac{\rho_f u d}{\mu_f}$ — число Рейнольдса ($u = \frac{4G}{\rho \pi d^2}$ — среднерасходная скорость);

$Pr = \mu_f (c_p)_f / \lambda_f$ — число Прандтля;

$\xi_f = -\psi (\partial p / \partial x) 2d / (\rho_f u^3)$ — коэффициент гидравлического сопротивления.

В большинстве случаев для газов и капельных жидкостей вдали от критической точки зависимость теплофизических свойств от температуры можно представить в виде степенной функции:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{n_\rho}, \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{n_\lambda}, \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{n_\mu}, \quad \frac{c_p}{c_{p_0}} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{n_c},$$

где $n_\rho, n_\lambda, n_\mu, n_c$ — константы, в общем случае зависящие от рода теплоносителя и интервала температур, причем n_ρ может зависеть и от давления.

5.1.1. Капельные жидкости

У различных теплоносителей не все физические свойства изменяются с температурой одинаково. Например, у капельных жидкостей наиболее сильно изменяется вязкость, т. е. отношение μ_w/μ_f , и гораздо слабее плотность ρ_w/ρ_f , теплопроводность λ_w/λ_f и теплоемкость $(c_p)_w/(c_p)_f$.

Следовательно, можно ожидать, оставаясь достаточно точными, для капельных жидкостей уравнения (5.8) и (5.9), упростятся соответственно:

$$Nu_f = f\left(\frac{x}{d}, Gr_f, Re_f, Pr_f, \frac{\mu_w}{\mu_f}\right);$$

$$\xi_f = f\left(\frac{x}{d}, Gr_f, Re_f, \frac{\mu_w}{\mu_f}\right).$$

У капельных жидкостей изменение температурных напоров $(T_w - T_f)$ в сечении канала в первую очередь приведет к изменению профиля скоростей (поскольку наиболее сильно изменяется вязкость) и, как следствие этого, к дополнительной деформации профиля температуры. Изменения профилей скорости и температур будут большими в ламинарных потоках и меньшими в турбулентных. В турбулентных потоках профиль скорости зависит от μ лишь около стенки, где динамическая вязкость и турбулентная динамическая вязкость μ_T (см. гл. III) соизмеримы или $\mu > \mu_T$. В ядре потока $\mu_T > \mu$. Однако интенсивность турбулентности, а значит величина и распределение μ_T по радиусу трубы косвенно зависят от μ , так как от него зависит градиент скорости около стенки $\partial u_x / \partial r$, который входит множителем в слагаемое уравнения баланса турбулентной энергии — $\overline{\rho u_x' u_r' (\partial u_x / \partial r)}$, определяющее переход кинетической энергии осредненного движения потока в кинетическую энергию турбулентных пульсаций, т. е. определяющее порождение турбулентности.

На рис. 5.1 [112] показаны типичные изменения скорости, массовой скорости ρu_x , температуры и плотности теплового потока по радиусу трубы при ламинарном течении масла МС-20 в условиях нагрева (кривые 1 и 2) и в условиях охлаждения (кривые 3 и 4).

Как видно, при нагреве, когда температура масла растет от оси к стенке, а вязкость наоборот падает ($\mu_w/\mu_f < 1$), профиль скорости становится более заполненным (кривые 1 и 2) вследствие того, что касательное напряжение $\tau = \mu (\partial u_x / \partial r)$ изменяется линейно по радиусу трубы от τ_w на стенке до нуля на оси. При нагреве, несмотря на некоторое уменьшение плотности масла с ростом температуры, профиль массовой скорости ρu_f тоже становится более заполненным. Теплоемкость c_p капельных жидкостей при нагреве изменяется мало, а у масла даже немного растет. Следовательно, количество тепла, переносимое жидкостью

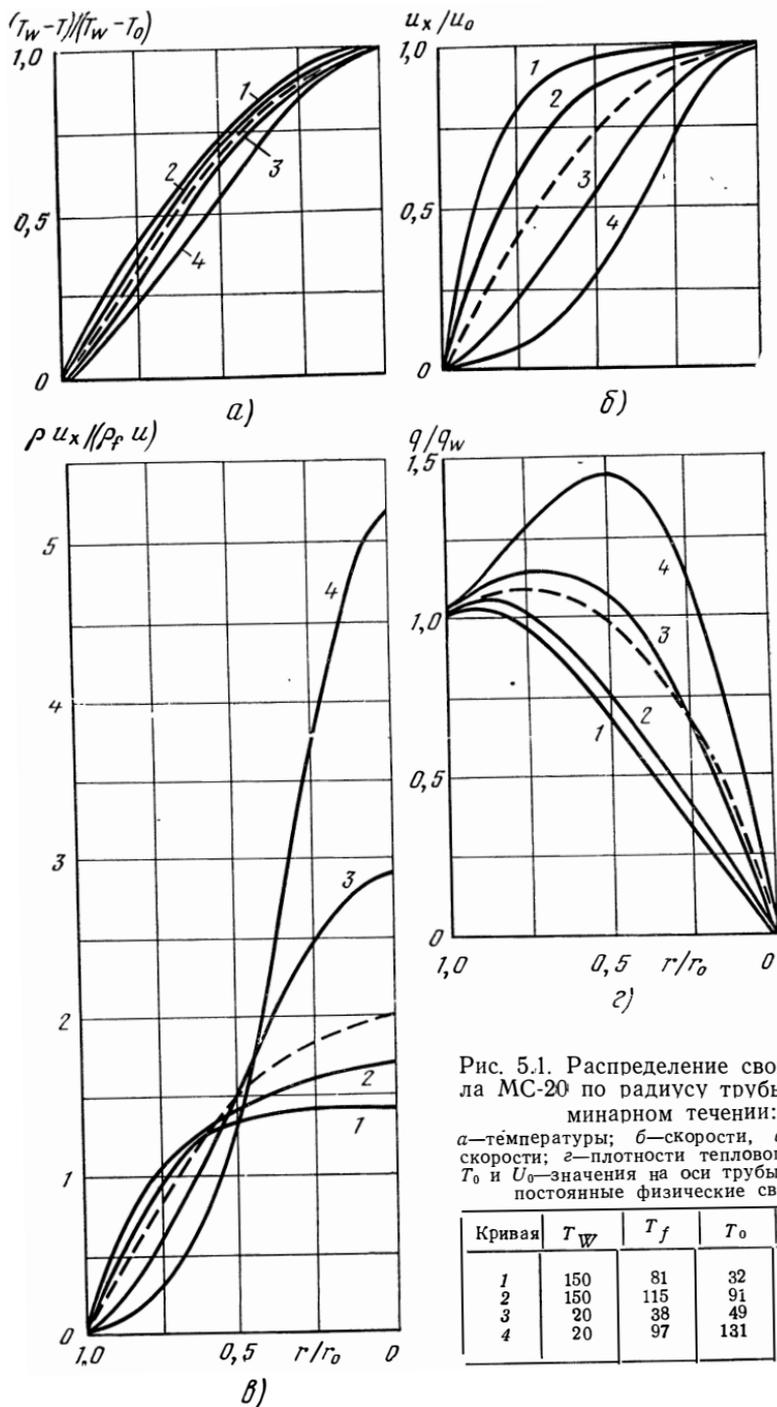


Рис. 5.1. Распределение свойств масла МС-20 по радиусу трубы при ламинарном течении:

а — температуры; б — скорости, в — массовой скорости; г — плотности теплового потока, T_0 и U_0 — значения на оси трубы; --- — постоянные физические свойства

Кривая	T_w	T_f	T_0	μ_w/μ_f
1	150	81	32	0,163
2	150	115	91	0,460
3	20	38	49	3,82
4	20	97	131	51,3

$c_{p0}\mu_x$, протекающей около стенки, при нагреве возрастает, что улучшает съем тепла. Поэтому распределение удельного теплового потока по радиусу приближается к линейному, а профиль температуры становится более заполненным. При охлаждении ($\mu_w/\mu_f > 1$) картина будет существенно отличной (кривые 3 и 4) в силу обратного изменения упомянутых свойств.

В ламинарном потоке влияние изменения вязкости на теплообмен мало зависит от характера температурного граничного условия по длине трубы. Это влияние почти одинаково при $T_w = \text{const}$ и $q_w = \text{const}$ и в первом приближении может быть учтено зависимостью

$$Nu_m = Nu_0 \left(\frac{\mu_w}{\mu_f} \right)^{-n}, \quad (5.10)$$

где $n = 0,14 \div 0,16$;

Nu_m соответствует определению теплофизических свойств среды при осредненной температуре $T_m = \frac{1}{2}(T_w + T_f)$, а Nu_0 — при постоянных физических свойствах (малые значения $T_w - T_f$) *.

При турбулентном течении капельных жидкостей качественно картина изменения профилей скорости и других параметров напоминает рис. 5.1. Как в ламинарном, так и в турбулентном потоках при нагреве теплоотдача растет, а сопротивление падает. При охлаждении — наоборот.

По данным эксперимента для турбулентного течения в диапазоне значений $\mu_w/\mu_f = 0,08 \div 40$; $Re = 10^4 \div 2,25 \cdot 10^5$ и $Pr = 2 \div 140$

$$\frac{Nu_f}{Nu_0} = \left(\frac{\mu_w}{\mu_f} \right)^{-n},$$

где $n = 0,11$ при нагреве и $n = 0,25$ при охлаждении [76]. Аналогично в диапазоне $\mu_w/\mu_f = 0,35 \div 2$; $Re = 10^4 \div 2,3 \cdot 10^5$ и $Pr = 1,3 \div 10$ при нагреве капельных жидкостей ($\mu_w/\mu_f < 1$)

$$\frac{\xi_f}{\xi_0} = \frac{1}{6} \left(7 - \frac{\mu_f}{\mu_w} \right);$$

при охлаждении ($\mu_w/\mu_f > 1$)

$$\frac{\xi_f}{\xi_0} = \left(\frac{\mu_w}{\mu_f} \right)^{0,24}.$$

5.1.2. Газы

Кривые изменения по радиусу скорости и других параметров при ламинарном течении газов вдали от входа в трубу изображены на рис. 5.2 (кривые 1 — нагрев, 2 — охлаждение) [112]. Качественно они аналогичны кривым на рис. 5.1, но по эффек-

* Подробно теплообмен и сопротивление при ламинарном течении в трубах рассмотрены в книге Б. С. Петухова [112].

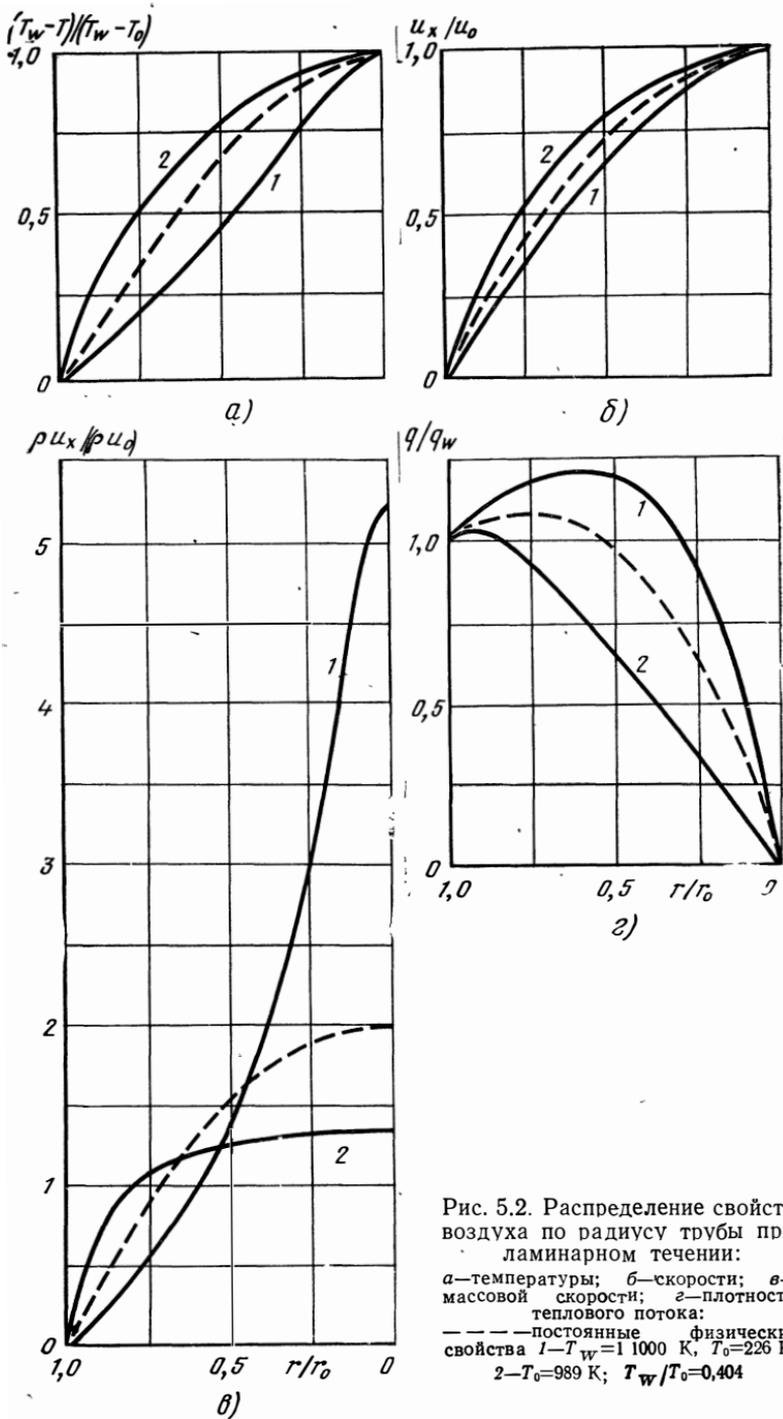


Рис. 5.2. Распределение свойств воздуха по радиусу трубы при ламинарном течении:
 а—температуры; б—скорости; в—массовой скорости; г—плотности теплового потока:
 ———— постоянные физические свойства
 1— $T_w=1000$ К, $T_0=226$ К;
 2— $T_0=989$ К; $T_w/T_0=0,404$

ту нагрев у газов совпадает с охлаждением капельных жидкостей, а охлаждение — с их нагревом.

Различное протекание кривых для газов и жидкостей объясняется противоположным характером зависимости вязкости от температуры.

У двухатомных газов, как показали численные расчеты [112], влияние всех физических свойств при ламинарном течении с хорошим приближением может быть учтено введением в уравнениях (5.8) и (5.9) лишь одного температурного фактора T_w/T_f .

Анализ исследований теплообмена и сопротивления на участке тепловой стабилизации трубы при ламинарном течении газов [2] показал следующее.

1. Влияние переменных физических свойств на теплоотдачу и сопротивление мало зависит от характера изменения температурного граничного условия по длине трубы (при изменении T_w от $T_w = \text{const}$ до $q_w = \text{const}$).

2. При $\frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} < 10^{-2}$ (где $\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr}$) число Nu медленно растет с ростом T_w/T_f при нагреве. По-видимому, это связано с тем, что при очень тонком тепловом пограничном слое в уже гидродинамически стабилизированном потоке преобладающее влияние на теплоотдачу оказывает рост в этом слое теплопроводности.

3. При $\frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} > 10^2$ число Nu начинает медленно уменьшаться с ростом T_w/T_f по тем же причинам, что и в стабилизированной области (в основном, из-за падения массовой скорости и расхода газа у стенки).

4. Коэффициент сопротивления трения при всех значениях $(1/\text{Pe})(x/d)$ увеличивается с ростом T_w/T_f и x/d (гораздо сильнее, чем число Nu), сохраняя эту тенденцию вплоть до области тепловой стабилизации. Основная причина — рост μ при увеличении температуры.

5. Длина термического начального участка при переменных физических свойствах приблизительно такая же, как и при постоянных.

В турбулентном течении газов изменение теплофизических свойств, особенно плотности, существенно влияет на интенсивность порождения турбулентных пульсаций — $\overline{\rho u'_x u'_r} \frac{\partial u_x}{\partial r}$.

Порождение турбулентных пульсаций, т. е. переход кинетической энергии осредненного потока в кинетическую энергию турбулентных пульсаций, происходит главным образом около стенки и определяется в трубе произведением турбулентного касательного напряжения — $\overline{\rho u'_x u'_r}$ на градиент осредненной скорости $\partial u_x / \partial r$, то есть членом — $\overline{\rho u'_x u'_r} \frac{\partial u_x}{\partial r}$. Характер изменения профи-

лей температуры, скорости, плотности теплового потока, массовой скорости и коэффициента турбулентного переноса импульса при нагреве и охлаждении воздуха в трубе по данным численного расчета [157] представлены на рис. 5.3.

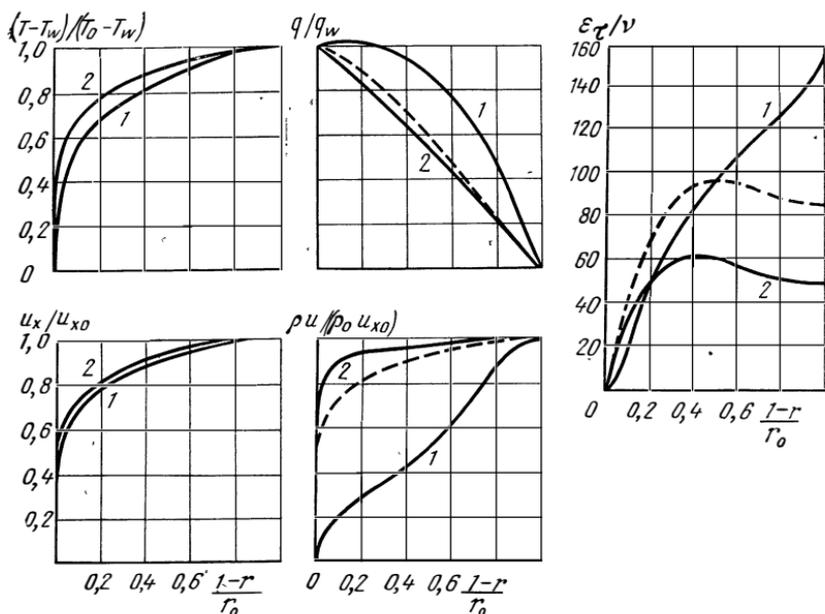


Рис 5.3. Влияние нагрева и охлаждения воздуха на распределение по радиусу трубы безразмерных параметров потока при $Re_w = 4,3 \cdot 10^4$, $Pr = 0,7 \div 0,71$:

1—нагрев при $T_w/T_f = 3,11$, 2—охлаждение при $T_w/T_f = 0,383$; — — — постоянные физические свойства

При нагреве газа $T_w/T_f > 1$ и плотность его около стенки падает, что снижает интенсивность порождения турбулентности и значение турбулентной теплопроводности λ_T ; зато λ около стенки возрастает. Поэтому тепловое сопротивление тонкого слоя около стенки (где $\lambda \geq \lambda_T$) уменьшается, а всего остального потока (где $\lambda \ll \lambda_T$) — возрастает.

Доля тепла, воспринимаемая газом, протекающим около стенки (где $\lambda \geq \lambda_T$), вообще не велика, а из-за падения плотности при нагреве она становится еще меньше. Этот тонкий слой газа около стенки при нагреве играет роль своеобразной изоляции для теплового потока, который проходит через него и в основном расходуется на нагрев более удаленных от стенки слоев газа. Поэтому некоторое увеличение теплопроводности в тонком слое около стенки не может компенсировать уменьшение λ_T в остальном потоке. Результатом является падение коэффициента теплоотдачи при нагреве газа.

Б. С. Петухов и В. А. Курганов рекомендуют для расчета теплоотдачи при нагреве простых и многоатомных газов в диапазоне $T_w/T_f = 1 \div 6$ и $Re = 7 \cdot 10^3 \div 1,25 \cdot 10^4$ зависимость

$$Nu_f = 0,022 \varepsilon_l \cdot Re_f^{0,8} \cdot Pr_f^{0,4} \left[\frac{(c_p)_w}{(c_p)_f} \right]^{1/4} \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_f} \right)^{1/3} \left(\frac{T_w}{T_f} \right)^{-[0,53 + f \left(\frac{x}{d} \right) \lg \frac{\mu_w}{\mu_f}]}, \quad (5.11)$$

где влияние расстояния от начала обогрева учитывается двумя поправками: $f(x/d)$ и

$$\varepsilon_l = 1 + \frac{0,58}{(x/d)^{0,4}} \exp \left(-0,17 \frac{x}{d} \right). \quad (5.12)$$

ε_l учитывает большее значение теплоотдачи на участке тепловой стабилизации длиной $(20-25)d$, имеющее место и при маломеняющихся теплофизических свойствах, а $f(x/d)$ учитывает изменение влияния значения (T_w/T_f) на теплоотдачу следующим образом:

x/d	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$f \left(\frac{x}{d} \right)$	0,11	0,24	0,38	0,55	0,73	0,89	1,02	1,13	1,21	1,27

Подобное влияние объясняется отчасти тем, что среднемассовая температура теплового пограничного слоя $T_{т.п}$ существенно отличается от T_f , приближаясь к ней с ростом x/d . Поэтому, при нагреве газа ($T_w/T_f > T_w/T_{т.п}$) и нужно брать T_w/T_f в меньшей степени, чтобы получить тот же эффект влияния на теплоотдачу, как если бы мы взяли $T_w/T_{т.п}$.

Для нагрева одно- и двухатомных газов проведено много исследований, результаты которых сравнительно близко совпадают. Например [158], для $Re = 7 \cdot 10^3 \div 2 \cdot 10^5$, $x/d = 1,2 \div 144$ и $T_w/T_f = 1 \div 7,5$

$$Nu_f = 0,024 Re_f^{0,8} \cdot Pr_f^{0,4} \left(\frac{T_w}{T_f} \right)^{-0,7} \left[1 + \left(\frac{x}{d} \right)^{-0,7} \left(\frac{T_w}{T_f} \right)^{0,7} \right]. \quad (5.13)$$

Гидравлическое сопротивление при нагреве газов падает, так как уменьшается интенсивность порождения турбулентности. Авторы работы [158] рекомендуют

$$\xi_f = \frac{0,316}{Re_f^{0,25}} \left(\frac{T_w}{T_f} \right)^{-0,6} \left[1 + \left(\frac{x}{d} \right)^{-0,9} \left(\frac{T_w}{T_f} \right)^{0,6} \right]. \quad (5.14)$$

При охлаждении двухатомных газов эксперименты (например, в работе [27] при $T_w/T_f = 0,15 \div 1$) не обнаруживают влияния тем-

пературного фактора ни на теплоотдачу, ни на гидравлическое сопротивление, если за определяющую температуру принята T_f . Это можно объяснить возрастающей ролью тонкого пристенного слоя. При охлаждении газа в нем растут плотность и доля воспринимаемого им тепла. Поэтому падение в нем λ лишь компенсируется ростом λ_T в остальном потоке.

По-видимому, аналогично, падение гидравлических потерь из-за уменьшения μ около стенки лишь компенсируется ростом интенсивности порождения турбулентности.

В околосрединной области состояния вещества, где все физические свойства изменяются существенно и в разной степени, обобщать экспериментальные данные приходится в виде уравнений (5.8) и (5.9). Так же можно обобщать данные для равновесно диссоциирующих газов, если под их теплофизическими свойствами понимать так называемые эффективные значения, рассчитанные с учетом реакции диссоциации.

5.2. ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ТЕПЛООБМЕНА В КАНАЛАХ

Перед конструкторами теплообменных аппаратов (ТА) всегда стоит главная задача: добиться минимальных габаритов и массы аппарата при заданных суммарном тепловом потоке Q , гидравлических потерях, температурах и расходах теплоносителей.

Если поверхность теплообмена выбрана, то заданные условия однозначно определяют габариты и массу ТА и температуру стенки ТА или генерирующего теплоустройства.

Естественно, конструктор стремится выбрать такую форму каналов, чтобы в единице объема поверхность теплообмена была максимальной. В каждом конкретном случае это стремление ограничено соображениями надежности, технологичности и удобства эксплуатации конструкции ТА. В результате учета всех соображений и требований конструктор приходит к некоторому компромиссному решению.

Следовательно, выбор теплообменной поверхности — один из важнейших моментов создания любого теплообменного устройства. Лучшей будет та поверхность, которая при прочих равных условиях обеспечит наибольший тепловой поток с единицы площади, т. е. наибольший коэффициент теплоотдачи. Поэтому интенсификация теплообмена в каналах — реальный путь к уменьшению габаритов и массы ТА и к снижению температуры стенок при охлаждении элементов конструкции или атомного реактора.

Метод интенсификации определяется характером течения (однофазное или двухфазное, ламинарное или турбулентное и т. п.). В данном разделе будут рассмотрены методы интенсификации теплообмена только при турбулентном течении однофазного теплоносителя в прямых каналах.

Для таких течений часто возникает идея интенсификации теплообмена путем искусственной турбулизации потока. Этого можно достигнуть закруткой потока, созданием в нем вихрей, отрывных зон и т. п. Но все эти способы связаны с увеличением гидравлических потерь в канале, поэтому важно иметь критерии для оценки целесообразности методов интенсификации теплоотдачи. Удобно сравнивать каналы, имеющие устройства для искусственной турбулизации потока, с такими же гладкими каналами без этих устройств. Тепловой и гидравлический расчеты теплообменных устройств (см. гл. IX) для выбранных типов и эквивалентных диаметров гладких каналов однозначно определяют их размеры, числа Рейнольдса в них и температуры стенок.

Интенсификация теплообмена в этих каналах увеличит по сравнению с гладкими как число Нуссельта Nu/Nu_0 , так и коэффициент гидравлического сопротивления ξ/ξ_0 .

Важно найти такие их значения, при которых поверхность теплообмена (габариты и масса) уменьшится, что при заданных габаритах обеспечит и уменьшение температуры стенки.

Для определенности рассмотрим трубчатый ТА, в котором один теплоноситель течет в трубах, а другой — между ними в параллельном направлении. Пусть теплоноситель в трубах имеет меньший коэффициент теплоотдачи при допустимом значении гидравлических потерь. В этом примере в первую очередь следует интенсифицировать теплообмен в трубах.

Используем соотношения (см. гл. IX):

$$\left. \begin{aligned} Q &= F \alpha (\bar{T}_w - \bar{T}_f) = kF \Delta \bar{T}; \\ \Delta p &= A \xi \operatorname{Re}^2 \frac{l}{d}; \\ G &= B \operatorname{Re} dn. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Здесь A и B для данного теплоносителя и диаметра трубы — размерные константы; n — число трубок в пучке; l — длина трубок.

Тогда при заданных значениях Q , Δp , G можно получить [62]

$$\left(\frac{Nu}{Nu_0} \right)_1^2 > \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)_1 \left(\frac{Re}{Re_0} \right)^{1,2} \frac{(\bar{T}_w - \bar{T}_f)_0^2}{(\bar{T}_w - \bar{T}_f)^2}. \quad (5.16)$$

Если интенсификация в каналах сопровождается выполнением условия (5.16), она обеспечивает уменьшение габаритов теплообменного аппарата.

Из уравнения (5.15) получаем

$$\bar{T}_w - \bar{T}_f = \frac{k}{\alpha} \Delta \bar{T}.$$

Без учета термического сопротивления стенки коэффициент теплопередачи $k = \frac{\alpha\alpha_2}{\alpha + \alpha_2}$,

где α_2 — коэффициент теплоотдачи в межтрубном пространстве. Тогда $\bar{T}_w - \bar{T}_f = \frac{\alpha_2}{\alpha + \alpha_2} \Delta \bar{T}$ и неравенство (5.16) будет иметь вид

$$\left(\frac{Nu}{Nu_0}\right)_1^2 > \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)_1 \left(\frac{Re}{Re_0}\right)^{1,2} \left(\frac{Nu_{20}}{Nu_2}\right)^2 \left(\frac{\alpha + \alpha_2}{\alpha_0 + \alpha_{20}}\right)^2. \quad (5.17)$$

Таким образом, интенсификация теплоотдачи внутри труб наиболее эффективна, если она сопровождается такой же или большей интенсификацией теплоотдачи в межтрубном пространстве или если $\alpha_2 \gg \alpha$. Помимо удовлетворения условию (5.17) метод интенсификации теплоотдачи должен быть технологичным как при изготовлении поверхности теплообмена, так и при сборке, и не должен снижать надежность и эксплуатационные качества ТА.

Удовлетворить всем этим требованиям не так просто. Поэтому из большого числа описанных в литературе [27, 62] методов интенсификации на практике используются лишь немногие. Остальные либо не технологичны, либо не удовлетворяют неравенству (5.17).

Найдем, каким должен быть метод интенсификации теплообмена, чтобы наилучшим образом удовлетворять неравенству (5.17).

Из уравнения для плотности теплового потока в направлении радиуса трубы $q = (\lambda + \lambda_\tau) \frac{\partial T}{\partial r} = c_p \rho (a + \varepsilon_q) \frac{\partial T}{\partial r}$ и рис. 5.3 нетрудно прийти к выводу, что большая часть располагаемого температурного напора срабатывается в тонком пристенном слое. В нем q близок к q_w , а ε_q мало. Этот слой тем тоньше, чем больше число Прандтля. В ядре потока, где наоборот q мало, а ε_q велико, срабатывается не более 20—30% располагаемого температурного напора у газов и не более 5% у жидкостей с $Pr > 1$.

Значит, искусственная турбулизация должна увеличивать интенсивность турбулентных пульсаций и ε_q только в тонком слое около стенки. Нет смысла затрачивать энергию на увеличение ε_q в ядре потока. Дополнительная турбулизация всего потока значительно увеличит ξ и очень мало увеличит число Nu . Покажем, каким образом можно увеличить значение ε_q около стенки, практически не изменяя его в ядре потока.

Анализ показывает [62, 107], что этого можно добиться созданием небольших отрывных зон (вихрей), расположенных около стенки на определенных расстояниях по длине канала. При образовании вихря около стенки на его верхней границе градиент скорости имеет максимум, а турбулентное касательное напряжение $\overline{qu_x' u_r'}$ — достаточно большое значение. Поэтому порожде-

ние турбулентных пульсаций — $\overline{u'_x u'_r} \frac{\partial u_x}{\partial r}$ на верхней границе вихря происходит весьма интенсивно.

Возникшие продольные пульсации скорости, распадаясь, передают свою энергию более мелким пульсациям. Причем энергия проходит сложный путь через пульсации давления к поперечным пульсациям и т. д., пока не произойдет ее диссипация. За это время пульсации скорости переносятся основным потоком вдоль линий тока и диффундируют в стороны от них.

Если вихрь мал и его граница расположена близко к стенке, то возникшие на ней пульсации скорости увеличат ε_q вблизи стенки и тем самым интенсифицируют теплоотдачу.

При слишком частом расположении таких вихрей энергия возникших на них пульсаций скорости не успевает затухать на пути до следующего вихря и, в основном, диффундирует в ядро потока. Так происходит в шероховатых каналах, в которых ε_q увеличивается по всему сечению канала. Это нерациональный метод интенсификации теплоотдачи, так как дополнительная турбулизация ядра потока почти не увеличивает теплоотдачу, ибо в ядре потока ε_q и так достаточно велико, а q — мало, но ведет к большим гидравлическим потерям.

Целесообразно вихри около стенки располагать на таком расстоянии друг от друга (порядка 10 высот турбулизатора и больше), чтобы кинетическая энергия возникших на вихрях пульсаций частично успевала диссипировать на пути до следующего вихря. Тогда ее диффузия в ядро потока будет несущественна.

Большие вихри также не рациональны. Они ведут к большим гидравлическим потерям, а возникшие на их верхней границе пульсации переносятся потоком далеко от стенки и турбулизуют, в основном, ядро потока.

Вихри можно образовать, разместив на стенке поперек потока небольшие выступы или канавки. В случае выступов некоторую роль в интенсификации теплоотдачи будет играть подвод теплоносителя из ядра потока к стенке в зоне присоединения потока.

В качестве примера метода интенсификации теплоотдачи, разработанного с учетом сказанного выше, можно привести метод, описанный в работе [62] и предназначенный для интенсификации теплообмена в трубах и трубных пучках при их продольном омывании.

Предварительно откалиброванная трубка по специальной технологии накатывается роликами. На ее внешней поверхности образуются периодически расположенные поперечные канавки, а на внутренней — выступы (диафрагмы) с плавной конфигурацией (рис. 5.4). Эта трубка при оптимальных типах накатки сохраняет прочность, обеспечивает интенсификацию теплоотдачи с

двух сторон и не изменяет технологии сборки; стоимость ее накатки низкая.

Для определения соотношений Nu/Nu_0 и ξ/ξ_0 внутри таких накатанных труб были проведены исследования на газах, воде и водно-глицериновых смесях при различных сочетаниях d/D и t/D .

На рис. 5.4 представлена зависимость Nu/Nu_0 от числа Re для различных размеров диафрагм.

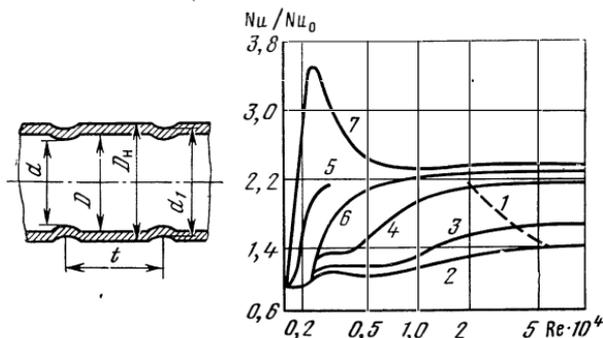


Рис. 5.4. Влияние числа Re на эффективность интенсификации теплообмена:

1— $Re=Re^*$ —граница слабой зависимости $\frac{Nu}{Nu_0}$ от Re

Кривая	2	3	4	5	6	7
d/D	0,983	0,966	0,943	0,912	0,92	0,875
Шаг, t/D		0,5		1,0		0,5

При ламинарном течении между выступами диафрагм создаются застойные зоны. Они служат дополнительным термическим сопротивлением и ухудшают теплоотдачу. Но с ростом x/d этот эффект уменьшается, благодаря возрастающему влиянию свободной конвекции.

При увеличении числа Рейнольдса за диафрагмами возникают вихри, что приводит к росту уровня возмущений в потоке и переходу к турбулентному течению при меньших, чем в гладкой трубе, критических числах Рейнольдса. Заметное уменьшение значения $Re_{кр}$ наблюдается при $d/D < 0,94$. Например, при $d/D = 0,875$ $Re_{кр} = 1580$ вместо $Re_{кр} = 2300$ для гладкой трубы.

Переход к турбулентному течению, как и в гладких трубах, сопровождается возникновением турбулентных пробок. Возникнув в начальных сечениях трубы, эти турбулентные пробки, чередуясь с ламинарными (переменная скорость течения), движутся вниз по течению. В этом движении они непрерывно увеличивают свою длину; теплоотдача в них почти в 2 раза вы-

ше, чем в ламинарных пробках. Диапазон чисел Re , в котором наблюдается перемежаемость, меньше, чем в гладких трубах.

Как видно из рис. 5.4, теплоотдача в переходной области течения ($Re_{кр} \leq Re \leq Re^*$) выше, чем в гладких трубах, особенно при $d/D < 0,94$. При развитом турбулентном течении ($Re > Re^*$) отношение Nu/Nu_0 слабо зависит от Re . При больших числах Re это отношение может уменьшаться.

С ростом чисел Re или Pr толщина слоя, в котором срабатывает в гладкой трубе основная часть (например, 90—99%) температурного напора, все время уменьшается.

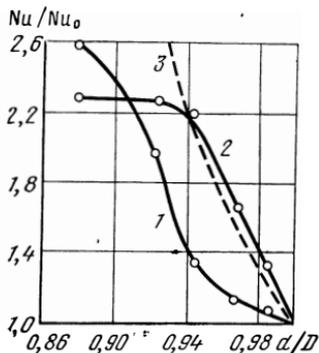


Рис. 5.5 Влияние высоты турбулизаторов на эффективность интенсификации теплообмена (шаг $t/D=0,5$):

1— $Pr=5$; $Re=4 \cdot 10^3$; 2— $Pr=5$; $Re=4 \cdot 10^4$; 3— $Pr=0,7$; $Re=4 \cdot 10^4$

Когда верхняя граница вихря, примерно совпадающая с верхней кромкой диафрагмы, достигает границы этого слоя (линия 1 на рис. 5.4), эффективность интенсификации максимальна. Если граница вихря выходит за этот слой (дальнейший рост Re или Pr , или увеличение высоты диафрагмы), то турбулизируются слои с малым градиентом температуры и достаточно большим ϵ_q . Дополнительная интенсификация теплоотдачи в этом случае мала, а гидравлические потери продолжают расти. На рис. 5.4 это область с $Re > Re^*$.

Сказанное хорошо иллюстрирует рис. 5.5 [62], на котором видно, как с ростом чисел Re и Pr наступает «насыщение» роста Nu/Nu_0 при увеличении высоты диафрагм d/D^* .

Экспериментально было установлено, что с уменьшением d/D влияние температурного фактора при течении газов ослабевает, так как плотность газа около стенки с ростом турбулизации приближается к средней для всего сечения. Для жидкостей при нагреве влияние изменения физических свойств также ослабевает с ростом высоты диафрагмы.

Для определения отношений Nu/Nu_0 и ξ/ξ_0 в продольно омываемом пучке труб с поперечными канавками также были проведены эксперименты [62], где было установлено, что при ламинарном течении канавки не влияют ни на теплоотдачу, ни на гидравлическое сопротивление.

С ростом числа Re в широкой части ячейки (расстояние 2—3 на рис. 5.6, б) поперечного сечения пучка труб, где наибольшие градиенты скорости, в канавке возникает вихрь. Он обуслаз-

* Расчетные зависимости для определения числа Nu и коэффициента сопротивления ξ при использовании этого и других методов интенсификации, теплообмена см. в работе [62].

ливают более раннее, чем в гладкой трубе, возникновение турбулентного течения в широкой части ячейки. Вначале турбулентное течение охватывает малую часть периметра трубки (три района точки $З$ на рис. 5.6, б), поэтому оно больше сказывается на увеличении ξ/ξ_0 , чем на Nu/Nu_0 .

С дальнейшим увеличением Re мощность вихря растет, и он постепенно распространяется по всему периметру канавок. Следствием этого является быстрый рост теплоотдачи, который затем стабилизируется [62]. Увеличение шага расположения канавок t (см. рис. 5.4) заметно снижает Nu/Nu_0 и ξ/ξ_0 .

Интенсификация теплоотдачи в межтрубном пространстве так же, как и в трубах, уменьшает влияние температурного фактора на теплоотдачу и гидравлическое сопротивление.

Опыты на шахматных пучках при нагреве воды при шаге пучка $s/d_n = 1,16; 1,2; 1,34; 1,4$ показали, что эффект интенсификации убывает с ростом шага (здесь s — расстояние между осями трубок пучка, а d_n — наружный диаметр трубки).

В пучках труб с большим шагом эффективной будет интенсификация путем создания поперечных небольших ребер на внешней поверхности трубок.

Применение рассматриваемого выше (см. рис. 5.4) метода интенсификации теплоотдачи (полученной внутри трубок и снаружи трубок) позволяет при прочих равных условиях уменьшить габариты и массу трубного пучка в 1,5—2 раза по сравнению с гладкотрубным, что при дешевизне накатки, сохранении надежности и без усложнения сборки ТА, позволяет рекомендовать его для трубчатых ТА.

Для других типов каналов на основе изложенного анализа и примера можно выбрать свой технологичный метод интенсификации теплоотдачи, учитывающий специфику работы и производства теплообменного устройства [62].

5.3 ТЕПЛОБМЕН В КАНАЛАХ НЕКРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Исторически исследования теплообмена и гидродинамики проводились сначала в круглых трубах.

Когда возникла потребность в расчете теплообменных процессов в каналах некруглого сечения, исследователи сделали попытку распространить на них уже известные данные для круглых труб. Для этого предлагалось использовать формулы для труб, заменяя в них диаметр трубы на эквивалентный диаметр рассчитываемого канала $d_3 = 4f/U$. Последний был определен как учетверенная площадь поперечного сечения f , деленная на периметр канала U . Для трубы $d_3 = \frac{4\pi d^2}{4\pi d} = d$.

Так как каналы с различной формой сечения геометрически не подобны, то из теории подобия следует, что и тепловые, и гидродинамические явления в них не будут подобны.

Однако еще работы Л. Шиллера, Д. Никурадзе и других, относящиеся, соответственно, к 1923 и к 1930 гг., показали, что в области развитого турбулентного течения в каналах без острых углов расчет по формулам для труб с заменой диаметра трубы на $d_0 = 4f/U$ дает удовлетворительные результаты для определения коэффициента гидравлического сопротивления.

В турбулентном потоке гидравлические потери главным образом обусловлены переходом энергии осредненного потока в кинетическую энергию турбулентных пульсаций. Этот переход осуществляется, в основном, около стенки, ибо порождение турбулентности, равное для несжимаемой жидкости произведению турбулентных касательных напряжений — $\overline{\rho u_x' u_y'}$ на градиент скорости du_x/du (ось y — по нормали к стенке, ось x — вдоль стенки), обычно максимально около стенки.

Правило эквивалентного диаметра обеспечивает приближенное подобие лишь по переходу энергии осредненного движения в турбулентные пульсации при равном с трубой отношении площади сечения к периметру канала и примерно одинаковом значении порождения турбулентности на этом периметре. Поэтому оно не может распространяться на каналы, у которых значительная часть периметра приходится на узкие области с малым значением — $\overline{u_x' u_y'} \frac{du_x}{du}$.

Расчет для таких каналов дает завышенные значения ξ , что заметил еще Д. Никурадзе в 1930 г.

Наоборот, в каналах с более эффективным, чем в трубе, использованием периметра (продольное обтекание пучков с большим шагом s/d_n , кольцевые каналы с большим отношением $R_{вн}/R_n$ и т. п.) такой расчет дает заниженные значения ξ .

Применение правила эквивалентного диаметра для расчета теплоотдачи турбулентного потока может быть эффективно для еще более узкого круга типов каналов, ибо требует наложения дополнительных условий на приближенное подобие полей температур около стенки.

В настоящее время, когда требования к точности расчетов возросли, следует применять это правило с осторожностью. Например, при продольном обтекании турбулентным потоком шахматных пучков труб и стержней (см. рис. 5.6, б) оно дает удовлетворительное совпадение с экспериментом лишь в узком диапазоне изменения шага пучка $s/d_n = 1,15 \div 1,2$.

Для ламинарных течений правило эквивалентного диаметра вообще неприемлемо. Следовательно, строго говоря, гидродинамика и теплообмен теоретически или экспериментально должны исследоваться для каждого типа некруглого канала отдельно с последующим распространением результатов на близкие типы (например, шахматные пучки труб с разными s/d_n).

При изучении теплообмена в таких каналах вопрос оказывается еще более сложным, так как в некруглых каналах темпе-

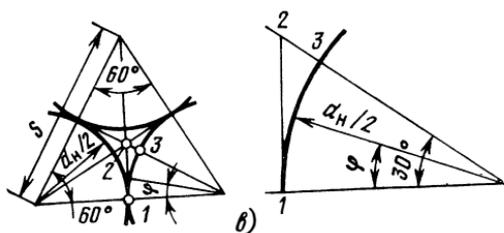
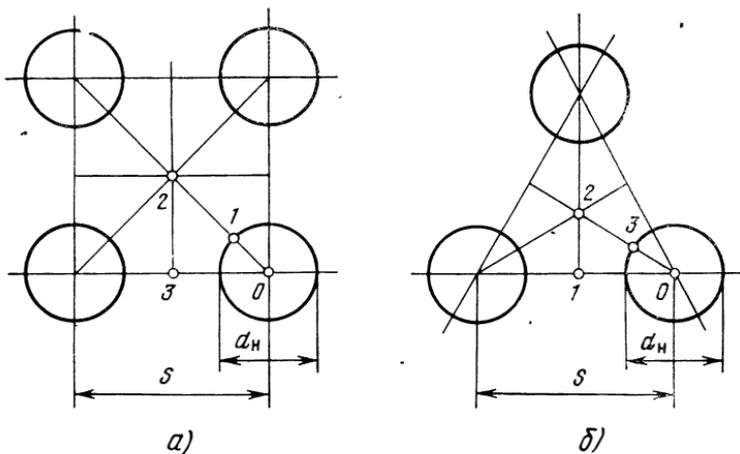
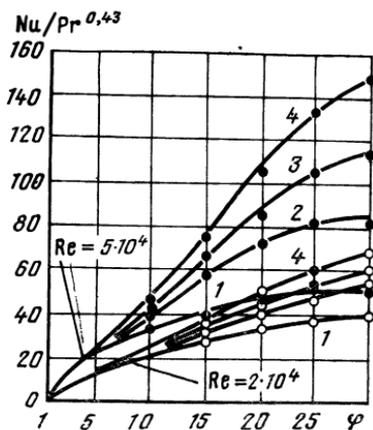


Рис. 5.6. Каналы, образованные:
 а—коридорным пучком труб; б—шахматным пучком труб; в—плотной упаковкой шахматного пучка труб ($s/d_n=1$)

Рис. 5.7. Распределение локального значения числа Nu по периметру канала для различных сечений x/d_n , при $Re=5 \cdot 10^4$ и $Re=2 \cdot 10^4$:
 1— $x/d_n=15,5$; 2—45; 3—60, 4—74



ратура стенки по периметру, в отличие от круглой трубы, существенно изменяется. Законы распределения температуры по периметру стенки заранее неизвестны. Они зависят не только от гидродинамики и физических свойств теплоносителя, но и от стенки — от ее конфигурации, размеров, физических свойств, а также от распределения источников тепла в ней. Это вынуждает рассматривать сопряженные задачи, когда к системе уравнений, описывающих поток, добавляются уравнения теплопроводности для стенки канала и условия сопряжения, т. е. условия равенства температур и тепловых потоков на границе с двух ее сторон, а граничные условия задаются на внешней по отношению к потоку поверхности стенки канала.

Решение сопряженных задач, хотя принципиально и возможно, но оно еще сложнее, чем нахождение полей скорости и температуры только в потоке при известных граничных условиях (т. е. решение системы уравнений только для потока).

Опубликовано много аналитических исследований ламинарного течения в некруглых каналах с известными граничными условиями. Они достаточно сложны, хотя выполнены с рядом упрощающих допущений: физические свойства считаются постоянными, свободная конвекция не учитывается, течение в гидродинамическом и тепловом отношениях стабилизировано, граничные условия по длине и периметру либо $T_w = \text{const}$, либо $q_w = \text{const}$, либо их сочетание [112].

Анализируя сопряженную задачу для треугольных каналов, Е. Р. Ж. Эккерт и Т. Ф. Ирвин показали, что в этом случае решение будет содержать дополнительный параметр $\Phi_k = \frac{\lambda_w \delta_w}{\lambda_f d_0}$

(где d_0 — эквивалентный диаметр, λ_f и λ_w — коэффициенты теплопроводности жидкости и материала стенки, δ_w — толщина стенки канала). При переменной по периметру температуре стенки возникнут перетечки тепла, как по самой стенке (пропорциональные $\lambda_w \cdot \delta_w$), так и по теплоносителю (пропорциональные $\lambda_f \cdot d_0$). Параметр Φ_k характеризует отношение этих перетечек. При $\Phi_k \rightarrow 0$ перетечки тепла по стенке отсутствуют. Это соответствует граничному условию $T_w = \text{const}$, а $\Phi_k \rightarrow \infty$ ($\lambda_w \rightarrow \infty$) соответствует граничному условию $T_w = \text{const}$ по периметру канала. В реальных каналах параметр Φ_k имеет некоторое промежуточное конечное значение, обычно заранее неизвестное.

Для круглой трубы при равномерном распределении по периметру наружной температуры стенки и источников тепловыделения и при отсутствии свободной конвекции для любого значения параметра Φ_k одновременно по периметру имеют место оба граничные условия $T_w = \text{const}$ и $q_w = \text{const}$.

Таким образом, круглая труба — частный случай некруглых каналов при полной симметрии по углу, но и в круглой трубе при нарушении симметричности граничного условия на наружной стенке (трубы с продольными ребрами и т. п.) или симмет-

ричности условий теплосъема внутри (свободная конвекция в горизонтальной трубе и т. п.), граничное условие на внутренней стенке перестанет быть симметричным. Оно также будет зависеть от Φ_K и не будет известно заранее.

Итак, в общем случае некруглых каналов при строгом подходе надо решать сопряженные задачи. Это сложно, хотя и возможно для ламинарных потоков.

Для турбулентных потоков решение сопряженной задачи еще сложнее, так как систему уравнений для потока удастся замкнуть, лишь используя различные приближенные методы полуэмпирической теории турбулентности. Однако решение этой задачи можно упростить, если разделить ее на две — для потока и для стенки, что сводится к следующему.

Вводятся понятия местного коэффициента теплоотдачи

$$\alpha(x, y_w, z_w) = \frac{q_w(x, y_w, z_w)}{T_w(x, y_w, z_w) - T_f(x)} \quad (5.18)$$

и местного числа Нуссельта

$$\text{Nu}_f(x, y_w, z_w) = \frac{\alpha(x, y_w, z_w) d_s}{\lambda_f}, \quad (5.19)$$

которые учитывают изменение теплоотдачи (α , следовательно, и плотности теплового потока на поверхности стенки q_w и температуры стенки T_w) не только по длине канала, но и в данном сечении x в любой точке (y_w, z_w) по периметру канала.

Исследования показывают, что при развитых турбулентных течениях и $\text{Pr} \geq 0,7$ (и даже при $\text{Pr} < 0,7$ вплоть до $\text{Pr} = 0,01$) в большинстве практически важных типов каналов и при возможных граничных условиях понятия α и Nu по выражениям (5.18) и (5.19) имеют смысл и слабо зависят не только от предыстории изменения T_w по длине канала (до данного сечения x), но и от распределения T_w по периметру канала.

Распределение теплоотдачи по длине и периметру канала в развитом турбулентном течении и при $\text{Pr} \geq 0,7$ (и даже при $\text{Pr} \geq 0,01$) главным образом определяется гидродинамикой потока. Однако если зависимость α от распределения граничного условия (T_w) по периметру канала все же существенна, то эта зависимость должна быть найдена экспериментально для основных типов граничных условий.

Если зависимости для локальной теплоотдачи и для коэффициента гидравлического сопротивления известны (из эксперимента или, когда это возможно, из теоретического решения), то математическая постановка упомянутой выше сопряженной задачи коренным образом упрощается. Вместо трехмерных основных уравнений становится возможным использовать одномерные уравнения неразрывности, движения и энергии (5.1) — (5.3), записав их для стационарного течения и добавив к ним уравнение теплопроводности для стенки.

Решение такой задачи, по крайней мере — численное на ЭВМ, не представляет серьезных трудностей для инженерных приложений, даже если α известным образом зависит от распределения по периметру канала.

Ознакомимся теперь кратко с особенностями гидродинамики в некруглых каналах. Теоретические расчеты гидродинамики некруглых каналов при ламинарном течении [112] показывают, что при наличии в канале острых углов или сужений поперечного сечения в узких местах скорость и градиент скорости у стенок меньше, чем в широких. Таким образом, расход теплоносителя на единицу площади сечения в узких местах канала меньше, чем в широких; касательное напряжение на стенке в узких местах также меньше, чем в широких. Физически это очевидно. В узких местах перепад давлений, действующий на поток, меньше, чем в широких, а поверхность стенок, где действуют уравновешивающие этот перепад касательные напряжения, больше.

При увеличении расхода или числа Рейнольдса в таких каналах возникновение турбулентных пульсаций начнется сначала около стенок в широких местах (в зоне точки Z на рис. 5.6, б), где большой градиент скорости. Возникнув в некотором сечении, в наиболее широком месте, эти пульсации ниже по течению в силу диффузии в тангенциальном направлении вызовут возникновение новых турбулентных пульсаций и в более узких местах с меньшим градиентом скорости. Как уже отмечалось, порождение турбулентных пульсаций определяется выражением типа $-\overline{u'_x u'_y} \frac{\partial u_x}{\partial y}$.

Поэтому, раз возникнув в силу случайной корреляции $\overline{w'_x w'_y}$, порождение пульсаций начнется и в соседних местах, куда проникнут возникшие пульсации, создавая там уже значительно большие значения $\overline{u'_x u'_y}$. Но для каждого числа Рейнольдса и для каждой формы канала на определенной длине наступит стабилизация. Поэтому в широких местах канала поток может быть турбулентным, а в узких местах — ламинарным, так как в узких местах слишком мал градиент скорости. Диффундирующие сюда из турбулентной зоны пульсации не обеспечивают необходимого значения $-\overline{u'_x u'_y} \frac{\partial w_x}{\partial x_y}$, чтобы вызвать порождение новых пульсаций и, распадаясь по дороге на более мелкие пульсации, диссипируют (т. е. их кинетическая энергия переходит в тепловую). Поэтому в некруглых каналах с узкими местами возможно одновременное существование в одном сечении турбулентных и ламинарных зон течения.

Как показали визуальные исследования и изучение структуры потока, эти зоны отделены переходной зоной с правильными синусоидальными колебаниями скорости. Ламинарная зона убывает (по направлению к точке 1 на рис. 5.6, б) с ростом числа Рейнольдса в данном сечении канала. Такое течение в некруг-

лых каналах приводит обычно к появлению поперечных градиентов давления и может существовать при наличии обмена количеством движения между зонами. Возникает система поперечных вихрей.

Структура потока определяет и характер распределения коэффициента теплоотдачи по периметру канала. В широкой части канала (особенно при турбулентном течении) теплоотдача выше, а в узких зонах — ниже.

Пример распределения локального числа Нуссельта по периметру канала, образованного плотной упаковкой стержней (рис. 5.6, в для $s/d_n=1$), для различных расстояний от входа в канал x/d_3 , представлен на рис. 5.7 [73]. Эти данные получены в опытах на воде при граничном условии $q_w = \text{const}$.

Для проверки предположения о практической независимости распределения теплоотдачи по периметру канала от распределения граничного условия T_w (при $\text{Pr} \geq 0,7$) по этим данным был проведен расчет поля температур в стенках такого же канала [124], но меньших размеров и с граничным условием более близким к $T_w = \text{const}$, чем $q_w = \text{const}$. Заметим, что параметр $\Phi_k = \frac{\delta_w \lambda_w}{d_3 \lambda_f}$ в работе [73] равнялся 0,12, а в работе [124] $\Phi_k = 19$, т. е. отличался почти в 160 раз. В качестве теплоносителя в опытах [124] также использовалась вода ($\text{Pr} > 1$).

Так как T_f в этих опытах изменялась мало, то задача свелась к решению уравнения теплопроводности с граничным условием 3-го рода. Результаты расчета в работе [73] в пределах точности эксперимента совпали с экспериментально замеренным распределением T_w в опытах [124], что подтверждает сделанное выше предположение о практической независимости теплоотдачи от распределения T_w при $\text{Pr} \geq 0,7$.

Экспериментальное исследование сопряженных задач обычно нецелесообразно. Моделирование их практически невозможно, так как не удастся обеспечить равенство всех определяющих критериев подобия и нужно проводить эксперимент на натуре*.

Расчеты с применением среднего по периметру числа Nu для каналов с узкими зонами не годятся, так как это не позволяет найти истинное распределение температур в стенке.

Следует иметь в виду, что среднее значение числа Нуссельта $\bar{\text{Nu}}$ существенно зависит от закона осреднения. Так, например, для условий, принятых в работе [73], законы

$$\bar{\alpha} = \frac{q_w}{\frac{1}{30} \int_0^{30} T_w(\varphi) d\varphi - T_f}$$

* Это убедительно показано П. А. Ушаковым [130]. Им же разработан метод приближенного теплового моделирования цилиндрических тепловыделяющих элементов при течении жидких металлов.

и

$$\bar{\alpha}^* = \frac{1}{30} \int_0^{30} \alpha(\varphi) d\varphi$$

дали различие до $\bar{\alpha}^*/\bar{\alpha} = 2$.

В каналах некруглой формы с относительно небольшими сужениями, когда по периметру канала одновременно приближенно выполняется $q_w = \text{const}$ и $T_w = \text{const}$, значения Nu удобны для расчетов. К таким каналам принадлежат, например, продольно обтекаемые пучки труб при шаге пучка $s/d \geq 1,1$ и кольцевые каналы. В этом случае локальное число Nu мало изменяется по периметру.

За последние годы появилось много исследований теплоотдачи и гидравлического сопротивления для каналов различной формы и при течении в них разных типов теплоносителей (жидких металлов, газов и капельных жидкостей). Наметились и пути их обобщения.

Наиболее простой эмпирический путь обобщения используется для близких типов каналов. Это каналы, которые, не являясь геометрически подобными, имеют много общего. К ним относятся, например, продольно обтекаемые шахматные или коридорные пучки труб с разным шагом s/d , кольцевые каналы с разным отношением наружного R_n и внутреннего $R_{вн}$ радиусов, прямоугольные каналы с разным отношением сторон и т. п.

В частности, экспериментальные данные по теплоотдаче продольно обтекаемых шахматных пучков труб с $s/d = 1,1 \div 1,5$ и большим числом трубок (т. е. когда влияние кожуха на гидродинамику пучка невелико) можно обобщить формулой

$$Nu_{m_3} = \left(0,032 \frac{s}{d} - 0,0144\right) Re_{m_3}^{0,8} \cdot Pr_m^{1/3}. \quad (5.20)$$

Она получена для $Pr \geq 0,7$ и турбулентной области течения ($Re_{m_3} > 1,3 \cdot 10^4$ при $s/d = 1,1 \div 1,16$; $Re_{m_3} > 2 \cdot 10^4$ при $s/d = 1,2 \div 1,4$; $Re_m > 3 \cdot 10^4$ при $s/d = 1,5$). Определяющей температурой в уравнении (5.20) является $T_m = (T_w + T_f)/2$, а характерным размером — эквивалентный диаметр d_3 .

При числе труб (или стержней) в пучке, стремящемся к бесконечности

$$(d_3)_\infty = \left[\frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{s}{d} \right)^2 - 1 \right] d;$$

для шахматного пучка и для коридорного пучка (оси труб расположены по вершинам квадрата)

$$(d_3)_\infty = \left[\frac{4}{\pi} \left(\frac{s}{d} \right)^2 - 1 \right] d;$$

Если ввести понятие пористости ε как отношение площади сечения, по которой протекает теплоноситель между труб, к площади всего пучка, то формула (5.20) имеет вид

$$\text{Nu}_{m\varepsilon} = \left(\frac{0,0304}{\sqrt{1-\varepsilon}} - 0,0144 \right) \text{Re}_{m\varepsilon}^{0,8} \text{Pr}_m^{1/3}. \quad (5.21)$$

В этом виде она также удовлетворительно описывает опытные данные для коридорных пучков с большим числом трубок и в турбулентной области течения при $\text{Pr}_m \geq 0,7$ и $s/d = 1,1 \div 1,5$.

Для шахматного пучка $\varepsilon_\infty = 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6(s/d)^2}$, а для коридорного

$$\varepsilon_\infty = 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{4(s/d)^2}.$$

Опытные данные для коэффициента гидравлического сопротивления шахматных пучков с большим числом трубок можно обобщить в диапазоне $3,23 \frac{s}{d} - 0,116 \leq \lg \text{Re} \leq 3 \frac{s}{d} + 0,76$ формулами:

$$\xi_{m\varepsilon} = \left(0,316 \frac{s}{d} - 0,176 \right) \text{Re}_{m\varepsilon}^{-0,2} \quad (5.22)$$

для $s/d = 1 \div 1,5$ или более точно

$$\xi_{m\varepsilon} = \left(0,273 \frac{s}{d} - 0,102 \right) \text{Re}_{m\varepsilon}^{-0,2} \quad (5.23)$$

для $s/d = 1,02 \div 1,5$, так как гидравлическое сопротивление особенно сильно изменяется именно в узком диапазоне $s/d = 1 \div 1,02$ (растет на 40—45%).

Если в формуле (5.23) выразить s/d через пористость ε по выражению $s/d = 0,95/\sqrt{1-\varepsilon}$, то в диапазоне $\varepsilon = 0,13 \div 0,6$ ее можно рекомендовать и для расчета гидравлического сопротивления в коридорных пучках.

Для кольцевых каналов, как показали опыты Брайтона и Джонса, коэффициент гидравлического сопротивления, определенный по d_ε , слабо зависит от отношения радиусов $R_{\text{вн}}/R_{\text{н}}$. Он удовлетворительно описывается при $\text{Re}_\varepsilon = 4 \cdot 10^3 \div 3,2 \cdot 10^5$ и $R_{\text{вн}}/R_{\text{н}} \geq 0,0625$ зависимостью

$$\xi_\varepsilon = 0,348 \text{Re}_\varepsilon^{-0,25}. \quad (5.24)$$

Наоборот, теплоотдача в кольцевых каналах существенно зависит от отношения $R_{\text{вн}}/R_{\text{н}}$. Б. С. Петухов и Л. И. Ройзен обобщили опытные данные по теплоотдаче в кольцевых каналах при турбулентном течении теплоносителей с $\text{Pr} \geq 0,7$ в области тепловой и гидродинамической стабилизации следующими зависимостями.

Для нагрева внутренней стенки трубки

$$\frac{(Nu_{вн})_э}{Nu_{тр}} = 0,86 \left(\frac{R_{вн}}{R_n} \right)^{-0,16} \zeta, \quad (5.25)$$

где $\zeta = 1 + 7,5 \left(\frac{R_n/R_{вн} - 5}{Re_э} \right)^{0,6}$ при $R_{вн}/R_n < 0,2$ и $\zeta = 1$

при $R_{вн}/R_n \geq 0,2$; $Nu_{тр}$ — число Нуссельта для круглой трубки при том же числе Re ;

Для газов ($Pr \approx 0,7$) рекомендуется

$$Nu_{тр} = 0,0186 Re^{0,8}; \quad (5.26)$$

для капельных жидкостей ($Pr > 1$)

$$Nu_{тр} = \frac{1/8 \xi Re \cdot Pr}{4,5 \sqrt{\xi} (Pr^{2/3} - 1) + 1,07}, \quad (5.27)$$

где ξ — коэффициент гидравлического сопротивления гладкой трубы, определяемый по формуле

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 1,82 \lg Re - 1,64.$$

Уравнение (5.25) можно рекомендовать при $R_{вн}/R_n = 0,032 \div 1$.

Для нагрева наружной стенки кольцевого канала (при $R_{вн}/R_n = 0 \div 1$)

$$\frac{(Nu_n)_э}{Nu_{тр}} = 1 - 0,14 \left(\frac{R_{вн}}{R_n} \right)^{0,6}. \quad (5.28)$$

Более сложные пути обобщения экспериментальных данных основаны на использовании особенностей турбулентного течения при $Pr \geq 0,7$ и $Pr \ll 1$.

При $Pr \geq 0,7$, как уже отмечалось, распределение локальной теплоотдачи по периметру канала при турбулентном течении определяется главным образом гидродинамикой потока и практически не зависит от распределения T_w по периметру канала.

В этом случае можно использовать аффинное подобие. Для этих условий С. Н. Царевский-Дьякин развил метод расчета гидравлического сопротивления и локальной теплоотдачи каналов некруглого сечения. Метод основан на предположении существования системы координат, в которой универсальный профиль скорости

скорости $\frac{u}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = f\left(\frac{y\sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu}\right)$ (здесь τ_0 — касательное напряжение на стенке) инвариантен по отношению к форме поперечного сечения канала. Тогда и обратное преобразование круга в упомянутой системе координат преобразует известные для круглой трубы поля скоростей и температур в поля скоростей и температур канала заданного сечения. Это позволяет найти распределение локального коэффициента теплоотдачи по периметру некруглого канала.

Сопоставление расчетов по этой методике с экспериментом, например, для шахматного пучка стержней с $s/d=1$, подтвердило правильность этого метода и допущений, на которых он построен. П. А. Ушаков в работе [130] и последующих работах для жидких металлов ($Pr \rightarrow 0$) развил метод приближенного теплового моделирования и обобщения численных решений сопряженных задач в пучках стержней. Метод основан на введении безразмерного параметра, объединяющего характеристики теплоносителя и конструкции стержней (теплопроводность и геометрические размеры). Этот параметр рассчитывается по основной гармонике разложения температурного поля в ряд Фурье. Для жидких металлов ($Pr \ll 1$) это возможно, так как вклад от молекулярного переноса тепла даже при турбулентном течении является определяющим. Существуют и другие пути обобщения и расчета гидравлического сопротивления и теплоотдачи в каналах некруглого сечения (см., например, работы [58, 125]).

Наконец, развиваются и методы расчета теплоотдачи и гидравлических потерь в каналах некруглого сечения, основанные на численном решении трехмерной системы уравнений для турбулентного течения в некруглых каналах, в основном, при заданных граничных условиях.

Все уже опубликованные методы развиты для стабилизированного течения несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами. Так как распределение турбулентных параметров и вообще структура турбулентных потоков в каналах некруглой формы еще почти не изучены, то во всех этих методах замыкание осредненной системы уравнений достигается пока с помощью различных гипотез и данных о распределении турбулентных параметров в круглой трубе.

Очевидно, что исследование структуры турбулентных течений в каналах некруглой формы является актуальной проблемой.

Рекомендуемая литература:

основная: [76, 112]

дополнительная: [27, 58, 61, 62, 73, 107, 124, 125, 130, 157, 158].

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Ранее в гл. II были рассмотрены стационарные задачи теплообмена, т. е. такие, в которых температурное поле по времени не изменяется и в дифференциальном уравнении теплопроводности Фурье — Кирхгофа производная $\partial T / \partial t \equiv 0$.

Однако целый ряд важных практических задач теплообмена не может быть рассмотрен в рамках предположения о неизменности параметров процесса во времени. К таким относятся большинство задач о прогреве теплозащитных оболочек и конструктивных элементов скоростных летательных аппаратов, о нагреве стенок сопел ракетных двигателей твердого топлива, о расчете поля температур в энергетических ядерных реакторах при изменении режима работы, о тепловом режиме искусственного спутника Земли (ИСЗ). В этой главе будут рассмотрены нестационарные процессы теплопроводности в неподвижных средах (твердых телах) и даны аналитические и численные методы решения дифференциального уравнения Фурье — Кирхгофа в нестационарном случае с различными краевыми условиями.

Нестационарные тепловые процессы сопровождаются не только изменением температурного поля во времени, но почти всегда связаны с изменением энтальпии тела, т. е. с его нагревом и охлаждением.

Практические задачи нестационарной теплопроводности можно разделить на две основные группы.

К первой группе относятся процессы, происходящие при переходе тела из некоторого начального теплового состояния в иное стационарное, обычно равновесное тепловое состояние.

Примерами могут служить изменение температурного поля в теле, помещенном в среду, температура которой отличается от начальной температуры тела, или выравнивание температур в теле с заданным начальным распределением температур.

Ко второй группе можно отнести процессы, происходящие в телах, испытывающих тепловое воздействие извне, изменяющееся во времени по некоторому закону. Здесь можно назвать процессы периодического изменения температуры при движении

ИСЗ по орбите, часть которой пролегает в тени Земли, суточные и годовые колебания температуры в верхних слоях земной коры, тепловые режимы аппаратов, находящихся на поверхности Луны, процессы в регенеративных теплообменниках и т. п.

В большинстве нестационарных тепловых процессов можно выделить три этапа, характеризующиеся различными режимами, из которых собственно нестационарными будут лишь два первых. На первом этапе поле температур в теле определяется не только изменившимся тепловым воздействием, например, изменением температуры окружающей среды, но и начальным распределением температур в теле $[T_0(x, y, z)]$ при $\tau=0$. Поскольку начальное температурное поле в общем случае может быть весьма произвольным, то и тепловой режим на этом первом этапе носит характер неупорядоченного процесса.

В последующем влияние начального состояния все более и более ослабевает и дальнейшее протекание процесса управляется лишь условиями на границе тела, т. е. наступает режим упорядоченного процесса, в частности, регулярный режим (см. разд. 6.5), теория которого дана в монографиях Г. М. Кондратьева [65, 66].

Для большинства процессов первой группы характерно еще и третье состояние, в котором температура тела во всех точках одинакова и равна температуре окружающей среды. Это состояние называют состоянием теплового равновесия.

Строго говоря, это новое равновесное тепловое состояние наступает лишь по прошествии бесконечно большого промежутка времени. Однако на практике тело относительно быстро достигает состояния, весьма близкого к состоянию теплового равновесия, поэтому и интересующие нас длительности нестационарных режимов отнюдь не бесконечны.

6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Выведенное в разд. 2.3 дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье — Кирхгофа (2.16) в случае неподвижной среды и отсутствия внутренних источников тепла имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T, \quad (6.1)$$

где $a = \lambda / (c\rho)$ и ∇^2 — оператор Лапласа, записанный в прямоугольной, цилиндрической, сферической или иной системе координат. Это уравнение устанавливает зависимость между температурой, временем и координатами тела в элементарном объеме, т. е. связывает временные и пространственные изменения температуры тела.

Если заданы форма и размеры тела, а также его физические свойства (λ, c, ρ, \dots), т. е. геометрические и физические условия однозначности, то для решения уравнения (6.1) необходимо задать еще начальные и граничные, или краевые, условия.

Поскольку температура тела в общем случае является функцией координат и времени $f(x, y, z, \tau)$, то начальные условия, т. е. распределение температур в теле в начальный момент, задаются в виде

$$f(x, y, z, 0) = f_0(x, y, z),$$

где f_0 — известная функция, которая не обязательно должна быть задана аналитически, а может быть представлена численно или графически.

В целом ряде практических задач начальное условие имеет более простой вид:

$$f(x, y, z, 0) = T_0 = \text{const.}$$

Для однородных тел граничные условия могут быть, как уже говорилось в разд. 2.4, трех родов: может быть задана либо температура любой точки поверхности тела в любой момент времени, либо тепловой поток у поверхности, либо температура среды, омывающей тело, и условия теплообмена тела с окружающей средой.

В отличие от стационарных задач все величины, входящие в граничные условия, могут изменяться во времени по заданному закону. На простейшие примеры таких изменений (линейный и гармонический законы изменения температуры среды во времени) указывалось в разд. 2.4.

6.2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Классическим методом решения задач, описываемых уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T$$

является метод разделения переменных (метод Фурье) *.

Основная идея метода состоит в отыскании частных решений этого уравнения t_n , удовлетворяющих исходному уравнению и граничным условиям, но не удовлетворяющих начальным условиям. Затем, пользуясь линейностью уравнения, решение задачи находят как линейную суперпозицию этих частных решений

* Здесь за недостатком места не рассматривается один из эффективных методов — операционный. С этим методом можно ознакомиться, воспользовавшись известными монографиями А. В. Лыкова [101] и Гребера и Эрка [39].

$T(x, y, z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n t_n(x, y, z, \tau)$, причем такую, которая удовлетворяет уже и начальным условиям путем соответствующего выбора коэффициентов C_n . Это значит, что при $\tau=0$ выполняется равенство

$$T(x, y, z, 0) = f_0(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n t_n(x, y, z, 0).$$

Рассмотрим конкретный пример применения этого метода в простом случае пространственно-одномерной задачи об изменении температур в плоской бесконечной стенке толщиной δ с начальной температурой $T(x, 0) = T_0(x)$, на поверхностях которой в течение всего времени поддерживается постоянная температура $T_w = T(0, \tau) = T(\delta, \tau)$. Величину T_w , не уменьшая общности, можно положить равной нулю (граничное условие 1-го рода). Эта задача может быть интерпретирована и как охлаждение (нагревание) стержня длиной δ , с начальной температурой $T_0(x)$, не имеющего теплообмена через боковую поверхность, если температура на его торцах поддерживается равной T_w .

Частное решение t_n уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (6.2)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$T(0, \tau) = T(\delta, \tau) = 0,$$

ищем в виде произведения двух функций:

$$t_n(x, \tau) = \theta_n(\tau) \cdot \vartheta_n(x), \quad (6.3)$$

одна из которых (θ_n) зависит только от времени, другая (ϑ_n) — только от пространственной координаты.

Подстановка уравнения (6.3) в выражение (6.2) дает

$$\vartheta_n(x) \frac{d\theta_n}{d\tau} = a \theta_n(\tau) \frac{d^2 \vartheta_n}{dx^2}$$

или
$$\vartheta_n(x) \theta_n'(\tau) = a \theta_n(\tau) \vartheta_n''(x),$$

откуда
$$\frac{1}{a} \frac{\theta_n'}{\theta_n} = \frac{\vartheta_n''}{\vartheta_n}. \quad (6.4)$$

Здесь слева функция только времени, справа — координаты x . Равенство (6.4) возможно лишь в случае, если как левая, так и правая его части — одинаковые постоянные величины, независящие ни от x , ни от времени.

Обозначим константы через $-\beta_n$ (знак минус перед β_n принят для удобства последующих преобразований, что отнюдь не налагает каких-либо ограничений на знак самой константы β_n).

Тогда исходная задача сводится к следующим двум:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \vartheta_n'' + \beta_n \vartheta_n = 0 \\ \quad \vartheta_n(0) = \vartheta_n(\delta) = 0; \\ 2) \quad \theta_n' + \alpha \beta_n \theta_n = 0. \end{array} \right\} \quad (6.5)$$

При этом, поскольку частное решение t_n не обязано удовлетворять начальным условиям, то вторая задача не имеет краевых условий.

Первая задача, очевидно, будет иметь столько решений, сколько значений мы придадим постоянной β_n . Однако не всякое значение $\beta_n = \text{const}$ дает возможность получить не нулевое решение задачи, сформулированной уравнениями (6.5).

В самом деле, пусть $\beta_n < 0$, тогда общее решение первой задачи имеет вид

$$\vartheta_n(x) = C_1 e^{\sqrt{-\beta_n}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\beta_n}x}. \quad (6.6)$$

Подставляя это выражение в граничное условие для ϑ_n , получим

$$C_1 = C_2 = 0, \text{ откуда } \vartheta_n \equiv 0.$$

При $\beta_n = 0$ уравнение (6.6) обращается в $\vartheta_n''(x) = 0$, решение которого $\vartheta_n(x) = ax + b$, подставленное в граничные условия, вновь даст $a = b = 0$ и $\vartheta_n \equiv 0$. Лишь при $\beta_n > 0$ общее решение (6.6) будет содержать мнимые показатели, а следовательно, его можно будет переписать в виде

$$\vartheta_n(x) = D_1 \cos(\sqrt{\beta_n}x) + D_2 \sin(\sqrt{\beta_n}x).$$

Подставляя это выражение в граничные условия, найдем постоянные D_1 и D_2 :

$$\begin{aligned} \vartheta_n(0) &= D_1 = 0; \\ \vartheta_n(\delta) &= D_2 \sin(\sqrt{\beta_n}\delta) = 0. \end{aligned}$$

Последнее условие показывает, что при $D_2 \neq 0$ (при $D_2 = 0$ вновь получим тривиальное решение $\vartheta_n = 0$) не все положительные значения β_n позволяют удовлетворить граничным условиям, а лишь те, для которых выполняется

$$\sin(\sqrt{\beta_n}\delta) = 0 \quad (6.7)$$

или

$$\sqrt{\beta_n} = \frac{\pi n}{\delta} \text{ и } \beta_n = \left(\frac{\pi n}{\delta}\right)^2, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Эти значения постоянной β_n , при которых первая вспомогательная задача (6.5) имеет не нулевые решения, удовлетворяющие граничному условию, называются собственными значениями, а функция $\sin\left(\frac{\pi n}{\delta}x\right)$ — собственными функциями задачи (6.5).

Вторая вспомогательная задача имеет решение вида

$$\ln \theta_n = -a\beta_n \tau + C$$

или

$$\theta_n = e^{-a\beta_n \tau + C} = e^{-a\beta_n \tau} e^C = C' e^{-a\beta_n \tau}.$$

Таким образом, частное решение уравнения (6.2), удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$t_n(x, \tau) = \theta_n \vartheta_n = D_2 C' e^{-a\beta_n \tau} \sin(\sqrt{\beta_n} x) = A_n e^{-a\left(\frac{\pi n}{\delta}\right)^2 \tau} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right),$$

где A_n — произвольная постоянная.

Из полученного вида частного решения сразу видна непригодность значений $\beta_n < 0$ в рассматриваемой задаче, так как θ_n оказывается непрерывно растущей функцией времени, что противоречит физическому смыслу задачи, согласно которому тело стремится к тепловому равновесию, т. е. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} T(x, y, z) = T_w = 0$.

Располагая бесконечным числом частных решений, найдем такую их линейную комбинацию, которая удовлетворяет и начальным условиям, поскольку при произвольном виде зависимости $T(x, 0) = T_0(x)$ (например, при $T_0 = \text{const}$) ни одно из частных решений само по себе начальному условию не удовлетворяет.

Пусть

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a\left(\frac{\pi n}{\delta}\right)^2 \tau} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right).$$

Тогда при $\tau = 0$ должно выполняться равенство

$$T_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right), \quad (6.8)$$

и задача сведется к нахождению коэффициентов A_n , удовлетворяющих условию (6.8).

Последнее достигается разложением известной нам функции $T_0(x)$ в ряд по собственным функциям [в рассматриваемом примере — по $\sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right)$], и приравниванием между собой коэффициентов при собственных функциях одного порядка (с одина-

ковым значением n). В нашем примере коэффициенты B_n разложения $T_0(x)$ в ряд Фурье по синусам на интервале $(0, \delta)$ будут

$$B_n = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} T_0(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} \xi\right) d\xi,$$

причем $A_n \equiv B_n$, и таким образом окончательное решение задачи о стенке с $T_0 = T_0(x)$ и $T_W = 0$ имеет вид

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} T_0(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} \xi\right) d\xi \right] e^{-a \left(\frac{\pi n}{\delta}\right)^2 \tau} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right). \quad (6.9)$$

На рассмотренном простом примере показан ход решения задач нестационарной теплопроводности методом Фурье. По аналогии легко показать, что в пространственно-одномерной задаче о теле, обладающем цилиндрической симметрией (нагрев, охлаждение кругового цилиндра), для которой уравнение (2.16) в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

задача (6.5) о собственных функциях и собственных значениях (первая вспомогательная задача) будет уже описываться уравнением

$$\vartheta_n'' + \frac{1}{r} \vartheta_n' + \beta_n \vartheta_n = 0,$$

которое является уравнением Бесселя.

Таким образом, решение исходной задачи будет представляться в виде разложения в ряд по Бесселевым (цилиндрическим) функциям, для нахождения коэффициентов которого начальное условие, т. е. распределение температуры по радиусу при $\tau = 0$, также следует представить в виде ряда по соответствующим собственным функциям (в данном случае — Бесселевым).

Полученное таким путем решение задачи о бесконечном цилиндре с граничными условиями первого рода $T_W = T(R, \tau) = 0$ (где R — наружный радиус цилиндра) и начальным условием $T(r, 0) = f(r)$ имеет вид

$$T(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{R^2} \int_0^R \varrho f(\varrho) J_0(\sqrt{\beta_n} \varrho) d\varrho \right] \frac{J_0(\sqrt{\beta_n} r)}{J_1^2(\sqrt{\beta_n} R)} e^{-a \beta_n \tau},$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, а собственные значения β_n определяются из уравнения

$J_0(\sqrt{\beta_n}R)=0$, являющегося аналогом уравнения (6.7) в рассмотренной выше задаче о пластине.

Аналогично может быть получено решение задачи о нагреве (охлаждении шара), когда исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

а собственными функциями являются функции вида $\sin(\sqrt{\beta_n}r)/r$. В этом случае при $T_w = T(R, \tau) = 0$ решение имеет вид

$$T(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{R} \int_0^R \varrho f(\varrho) \sin(\sqrt{\beta_n} \varrho) d\varrho \right] \frac{\sin(\sqrt{\beta_n} r)}{r} e^{-a\beta_n \tau},$$

где

$$T_0(r, 0) = f(r) \text{ и } \beta_n = \left(\frac{\pi n}{R} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Кроме метода разделения переменных, в задачах нестационарной теплопроводности широко применяется так называемый метод источников, представление о котором легко составить, исходя из полученного выше решения задачи о стенке (6.9).

В выражении (6.9) поменяем местами знаки суммы и интегрирования. Эта операция законна для конечных сумм и равномерно сходящихся рядов [127]. Тогда

$$\begin{aligned} T(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} T_0(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} \xi\right) d\xi \right] e^{-a\left(\frac{\pi n}{\delta}\right)^2 \tau} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right) = \\ &= \int_0^{\delta} \left[\frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{\delta}\right)^2 a\tau} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} \xi\right) \right] T_0(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Если обозначить через $G(x, \xi, \tau)$ выражение в квадратных скобках, то

$$T(x, \tau) = \int_0^{\delta} G(x, \xi, \tau) T_0(\xi) d\xi. \quad (6.10)$$

Функцию

$$G(x, \xi, \tau) = \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{\delta}\right)^2 a\tau} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} \xi\right) \quad (6.11)$$

называют функцией температурного влияния мгновенного точечного источника тепла (иногда просто функцией источника). Можно показать, что она представляет собой распределение температур в стержне длиной δ в момент време-

ни τ , если в начальный момент $\tau=0$, когда температура его была $T_0=0$, в точке с координатой $x=\xi$ мгновенно выделилось некоторое количество тепла, а на концах все время поддерживалась нулевая температура ($T_w=0$). Здесь удобнее для наглядности воспользоваться интерпретацией этой задачи как задачи о стержне длиной δ , у которого боковая поверхность теплоизолирована.

Как обычно, мы понимаем под теплом Q в точке ξ тепло, выделяющееся на небольшом отрезке с центром в точке ξ , т. е. на интервале $(\xi-\varepsilon; \xi+\varepsilon)$, где в начальный момент времени вследствие выделения тепла Q изменится температура. Распределение температуры на этом интервале в начальный момент времени $T_{0\varepsilon}(\xi)$ (вне этого интервала температура стержня пока остается прежней, т. е. равной нулю) легко связать через теплоемкость стержня с величиной Q :

$$cQF \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} T_{0\varepsilon}(\xi) d\xi = Q.$$

Здесь F — площадь поперечного сечения стержня.

Тогда согласно решению (6.10) процесс распространения температуры из этой точки ξ с течением времени описывается выражением

$$T_\varepsilon(x, \tau) = \int_0^\delta G(x, \xi, \tau) T_{0\varepsilon}(\xi) d\xi;$$

но $T_{0\varepsilon}(\xi)$ отлично от нуля лишь в малом интервале $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$, где функцию влияния $G(x, \xi, \tau)$ можно заменить постоянной, соответствующей ее значению при некотором значении ξ^* из этого интервала. Поэтому

$$T_\varepsilon(x, \tau) = G(x, \xi^*, \tau) \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} T_{0\varepsilon}(\xi) d\xi = G(x, \xi^*, \tau) \frac{Q}{cQF},$$

и тогда, устремляя ε к нулю*, получим

$$T(x, \tau) = \frac{Q}{cQF} G(x, \xi, \tau).$$

Из последнего выражения видно, что $G(x, \xi, \tau)$ действительно описывает температурное влияние мгновенного источника тепла, помещенного в момент $\tau=0$ в точку ξ (рис. 6.1).

Таким образом, физическая сущность метода источников состоит в представлении любого нестационарного процесса распространения тепла в теле как совокупности процессов выравни-

* При этом пользуемся непрерывностью функции влияния G по переменной ξ .

вания температуры от множества элементарных источников, распределенных в этом теле в начальный момент времени таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (рис. 6.2). Следует, однако, помнить, что вид функции источника G для различных задач различен.

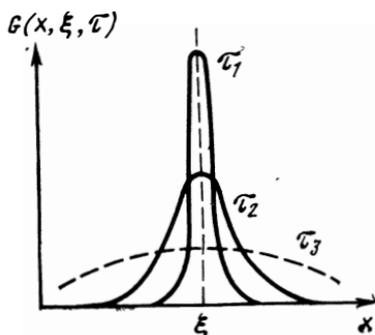


Рис. 6.1. Вид функции температурного влияния мгновенного точечного источника тепла для задачи о стержне бесконечной длины ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$)

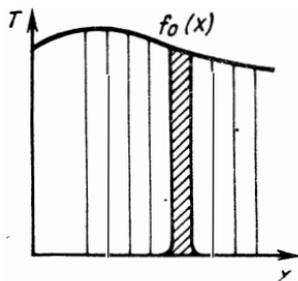


Рис. 6.2. Распределение интенсивности мгновенных источников тепла, удовлетворяющее заданному начальному распределению температур $T(x, 0) = f_0(x)$

Полученное нами выражение (6.11) применимо к одномерной задаче о пластине конечной толщины (стержне конечной длины). Для неограниченного стержня (теплоизолированного с боковой поверхности) функция влияния имеет вид

$$G(x, \xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 \tau}} e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 \tau)}$$

Для этого случая на рис. 6.1 приведены распределения температур от мгновенного источника, расположенного в точке ξ , для различных моментов времени $\tau > 0$, а также пример представления начального распределения температур в стержне совокупностью мгновенных источников (см. рис. 6.2). Описанный метод распространяется на плоский и пространственный случаи [101].

Мы рассмотрели в качестве примера аналитического решения задачу с граничными условиями 1-го рода. Покажем, что случай граничных условий 2-го рода может быть сведен к уже рассмотренному.

Граничное условие 2-го рода — это задание теплового потока к поверхности тела:

$$q_w = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w,$$

т. е. задание значения производной от температуры тела по нормали к его поверхности непосредственно у самой поверхности в любой момент времени.

Пусть рассматриваемая задача одномерна и

$$q_w = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w.$$

Введем вместо переменной $T(x, \tau)$ новую переменную — плотность теплового потока в данном сечении в данный момент времени $q(x, \tau)$. Связь старой и новой переменных согласно закону теплопроводности имеет вид

$$q(x, \tau) = -\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x}.$$

Если теперь продифференцировать одномерное уравнение Фурье — Кирхгофа (6.2)

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ по } x, \text{ получим}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

или, меняя порядок операций,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}.$$

Последнее уравнение ничем не отличается от исходного (6.2), однако граничным условием для него будут $q_w = f(x, \tau)$, т. е. задание самой искомой функции q на поверхности тела. А это, как известно, граничное условие 1-го рода. Таким образом, задача свелась к уже рассмотренной.

На примере плоской неограниченной пластины рассмотрим применение метода разделения переменных к решению задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями 3-го рода. Пластина в момент $\tau = 0$ помещается в среду с температурой T_f меньшей, чем начальная температура пластины T_0 .

Условие $T_f < T_0$ несколько не уменьшает общности последующих рассуждений, так как задача нагрева пластины решается совершенно аналогично.

Пусть толщина пластины 2δ , а начало координат поместим в ее центральной плоскости (рис. 6.3). Для простоты допустим, что интенсивность теплоотдачи на обеих поверхностях пластины одинакова и начальное распределение температур в пластине $T_0(x)$ симметрично относительно начала координат, т. е. $f_0(x) = T(x, 0)$ — четная функция и $\frac{\partial f_0(0)}{\partial x} = 0$. Тогда математиче-

ская формулировка задачи сведется к следующему:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\tau > 0; -\delta < x < \delta); \quad (6.12)$$

$$T(x, 0) = f_0(x); \quad (6.13)$$

$$\left. \begin{aligned} -\lambda \frac{\partial T(\delta, \tau)}{\partial x} + \alpha [T_f - T(\delta, \tau)] &= 0; \\ \lambda \frac{\partial T(-\delta, \tau)}{\partial x} + \alpha [T_f - T(-\delta, \tau)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Из симметрии рассматриваемой задачи следует, что распределение температур в стенке будет симметричным относительно плоскости $x=0$ не только при $\tau=0$ [$f_0(x)$], но и в любой момент времени. Поэтому в плоскости симметрии всегда будет

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (6.15)$$

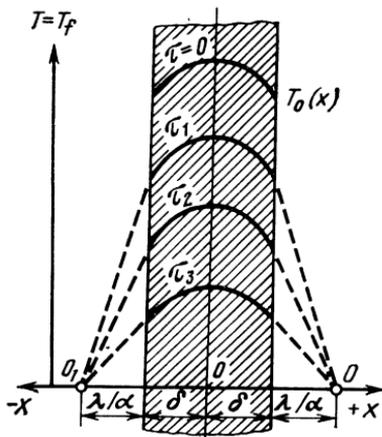


Рис. 6.3. Задача об охлаждении плоской стенки (граничные условия 3-го рода)

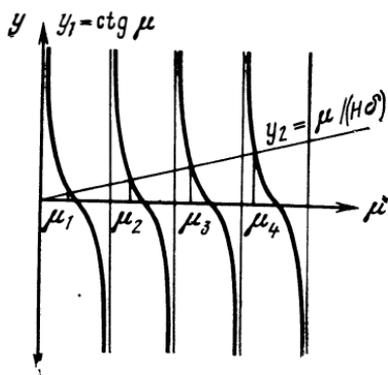


Рис. 6.4 К графическому методу отыскания корней характеристического уравнения (6.19)

Это условие позволяет освободиться от 2-го граничного условия (6.14) при $x=-\delta$ и свести задачу к задаче об одностороннем нагреве или охлаждении пластины толщиной δ , теплоизолированной с поверхности $x=0$.

Не снижая общности решения, положим $T_f=0$. Можно показать, что частное решение исходного уравнения (6.2), удовлетворяющее граничному условию (6.14), имеет вид

$$T_n(x, \tau) = D_n \cos(\sqrt{\beta_n} x) e^{-a \beta_n \tau}. \quad (6.16)$$

Граничному условию при $x=\delta$, которое теперь ($T_f=0$) примет вид

$$\frac{\partial T(\delta, \tau)}{\partial x} + HT(\delta, \tau) = 0, \quad (6.17)$$

где $H = \alpha/\lambda$ — относительный коэффициент теплоотдачи, это частное решение будет удовлетворять, если

$$\sqrt{\beta_n} D_n \sin(\sqrt{\beta_n} \delta) e^{-a\beta_n \tau} + H D_n \cos(\sqrt{\beta_n} \delta) e^{-a\beta_n \tau} = 0. \quad (6.18)$$

Это уравнение получается подстановкой равенства (6.16) в условие (6.17). Далее, сокращая на D_n и экспоненту, получим

$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\beta_n} \delta) = \frac{\sqrt{\beta_n}}{H} = \frac{\sqrt{\beta_n} \delta}{H\delta}.$$

Это характеристическое уравнение, аналогичное по смыслу полученному нами при рассмотрении задачи с граничными условиями 1-го рода (6.7), позволяет найти собственные значения, а следовательно, и собственные функции рассматриваемой задачи.

Обозначая $\sqrt{\beta_n} \delta$ через μ_n , получим

$$\operatorname{ctg} \mu_n = \frac{\mu_n}{H\delta}, \quad (6.19)$$

где $H\delta = \alpha\delta/\lambda$ — заданная величина.

На рис. 6.4 показан графический метод отыскания корней характеристического уравнения как координат точек пересечения котангенсид y_1 с прямой $y_2 = \mu/(H\delta)$ (как показано выше, β всегда больше нуля, следовательно, и корни μ_n также больше нуля). Очевидно, что число корней бесконечно, причем каждый последующий корень больше предыдущего:

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n.$$

Таким образом, общее решение будет равно сумме всех частных решений, удовлетворяющих граничным условиям (6.14) и (6.15):

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\sqrt{\beta_n} x) e^{-a\beta_n \tau}.$$

Постоянные D_n определяются из начального условия (6.13)

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right)$$

и равны соответствующим коэффициентам разложения функции f_0 в ряд по собственным функциям нашего уравнения (ряд Фурье):

$$D_n = \frac{\int_{-\delta}^{\delta} f_0(x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx}{\int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx} =$$

$$= \frac{\mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f_0(x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx. \quad (6.20)$$

Вид решения упрощается, если пластина в начальный момент времени имела повсюду одинаковую температуру $T_0 = f_0(x) = \text{const}$:

$$T(x, \tau) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \tau}.$$

Если $T_f \neq 0$, то заменой переменной T на $(T - T_f)$ в исходном уравнении (6.2) легко показать, что

$$T(x, \tau) - T_f = (T_0 - T_f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \tau}. \quad (6.21)$$

6.3. БЕЗРАЗМЕРНАЯ ФОРМА РЕШЕНИЙ

Приведенные в разд. 6.2 методы и примеры аналитического решения задач нестационарной теплопроводности показывают, что даже в простейших рассмотренных случаях (одномерные, симметричные) расчет температурного поля весьма трудоемок. Однако результаты решения ряда простейших, но важных для практики задач могут быть представлены в безразмерной форме, в виде номограмм или таблиц, облегчающих их практическое использование.

Продемонстрируем возможность такого представления решений на только что рассмотренном примере бесконечной пластины, имевшей одинаковую начальную температуру T_0 и погруженной в момент времени $\tau = 0$ в среду с температурой $T_0 \neq 0$.

Пусть $\frac{T(x, \tau) - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{T_f - T(x, \tau)}{T_f - T_0}$ — безразмерная температура стенки в сечении x в момент τ . Согласно решению (6.21),

$$\theta = 1 - \frac{T(x, \tau) - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{T_0 - T(x, \tau)}{T_0 - T_f} =$$

$$= \frac{T(x, \tau) - T_0}{T_f - T_0} = 1 - \sum A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{\alpha\tau}{\delta^2}},$$

где

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}.$$

Значение безразмерной температуры θ , как видно из приведенного выражения, зависит от величин μ_n , x/δ , которые не зависят от времени, и комплекса $\alpha\tau/\delta^2$, который есть не что иное как критерий тепловой гомохронности Фурье $Fo = \alpha\tau/\delta^2$ (см. гл. III).

Как видно из рис. 6.4 корни характеристического уравнения μ_n зависят от угла наклона прямой $y_2 = \mu/(H\delta)$, т. е. от $H\delta$.

Обозначим комплекс $H\delta = \alpha\delta/\lambda$ через Bi . Безразмерный комплекс $Bi = \alpha\delta/\lambda$, как и Fo , является критерием подобия процессов нестационарной теплопроводности, в частности, подобия граничных условий 3-го рода. По своему физическому смыслу он характеризует отношение термического сопротивления теплопроводности стенки (δ/λ) к термическому сопротивлению теплоотдачи на границе между теплом и окружающей средой $1/\alpha$. Величина критерия Bi целиком определяется условиями однозначности (δ , α , λ), а потому в рассматриваемой задаче он является определяющим.

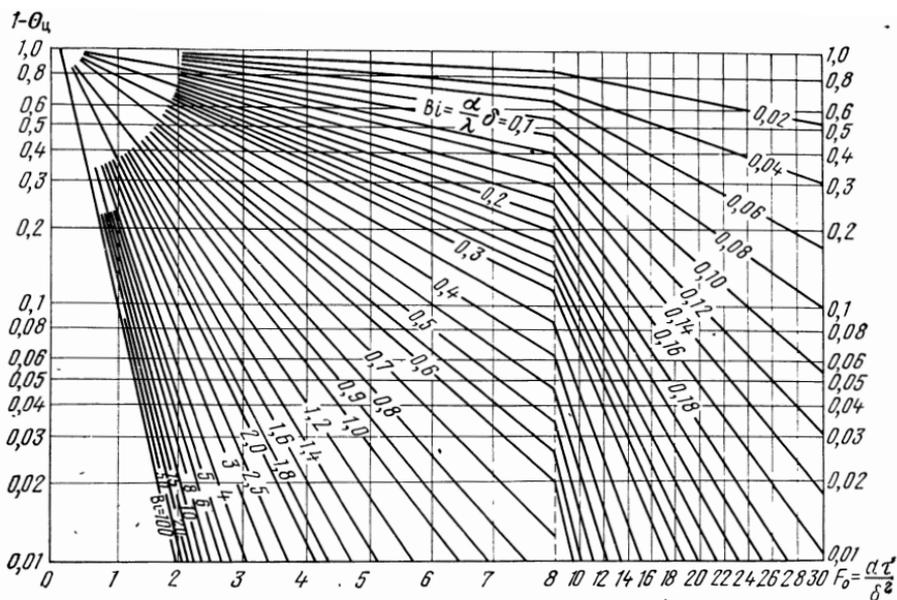
Легко показать, что уравнение нестационарной теплопроводности (6.2) путем введения безразмерных температуры θ и переменных x/δ и $\tau/(\delta^2/\alpha)$ можно записать в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial (x/\delta)^2},$$

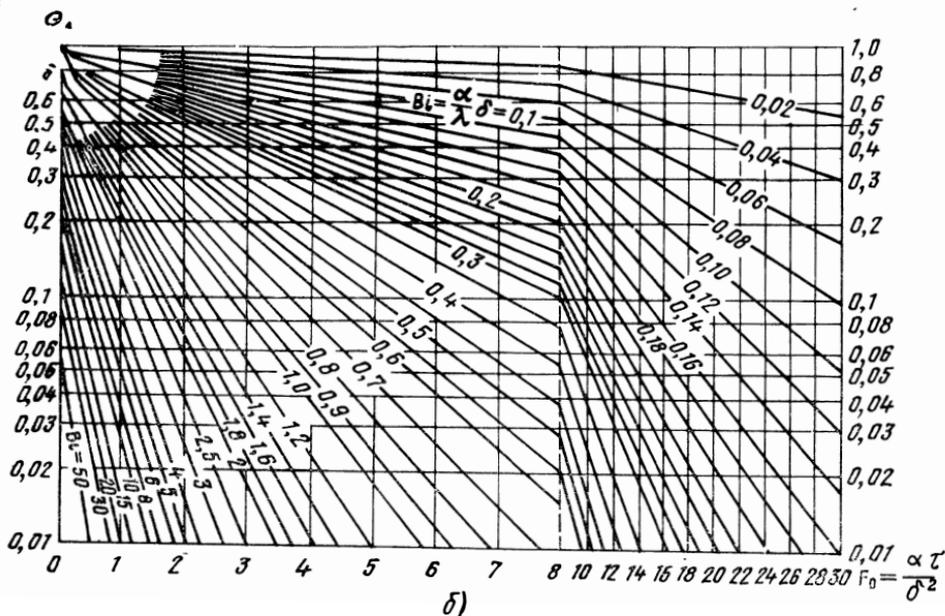
а безразмерные граничные условия 3-го рода — в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial (x/\delta)} = Bi \theta.$$

Очевидно, что в этой постановке задачи при $T_0 = \text{const}$ безразмерная температура θ будет функцией лишь трех безразмерных величин x/δ , Fo , Bi , а если учесть, что Fo и x/δ определяют координаты точки во времени и пространстве, то можно сказать, что безразмерные температуры двух плоских бесконечных пластин, равномерно нагретых в начальный момент времени $\tau = 0$, в сходственных точках пространства и времени будут одинаковы, если одинаковы критерии Bi этих пластин. (Этот вывод мож-



a)

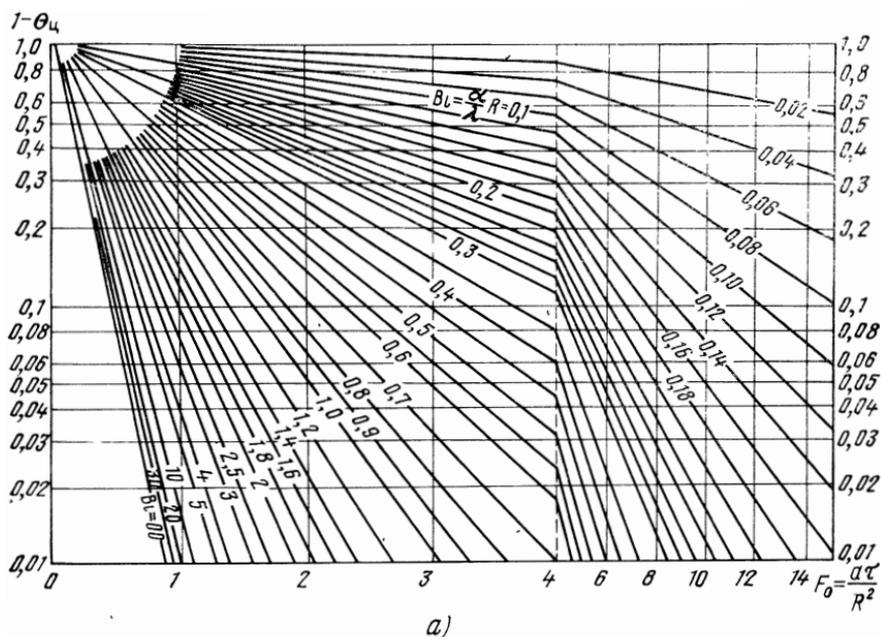


b)

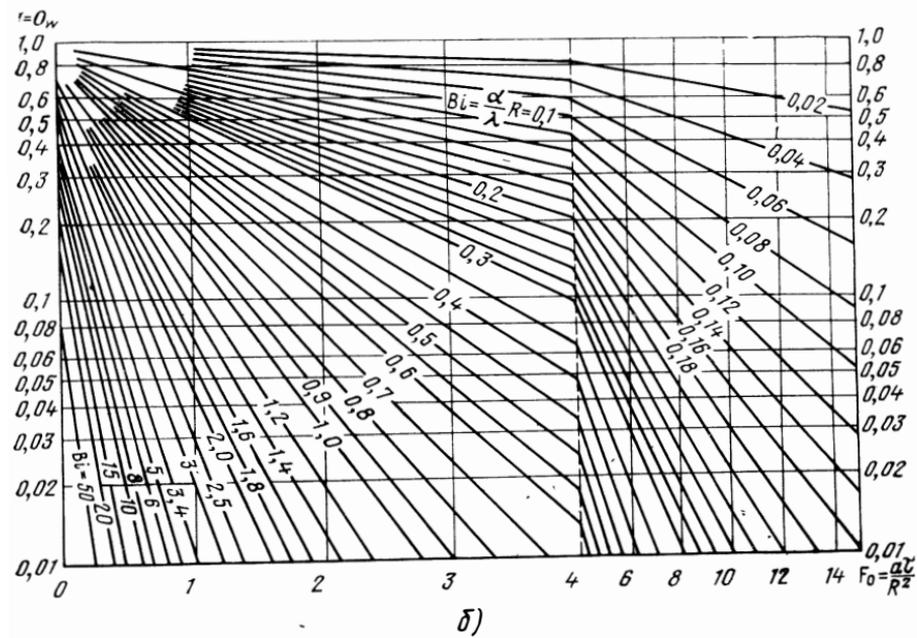
Рис. 6.5. Номограммы для определения безразмерной избыточной температуры

$$1 - \theta = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \text{ плоской бесконечной пластины:}$$

a—в плоскости симметрии; б—на поверхности



а)



б)

Рис. 6.6. Номограммы для определения безразмерной избыточной температуры

$$1 - \theta = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \text{ бесконечного цилиндра:}$$

а — на оси; б — на поверхности

но распространить и на ряд других задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями 3-го рода).

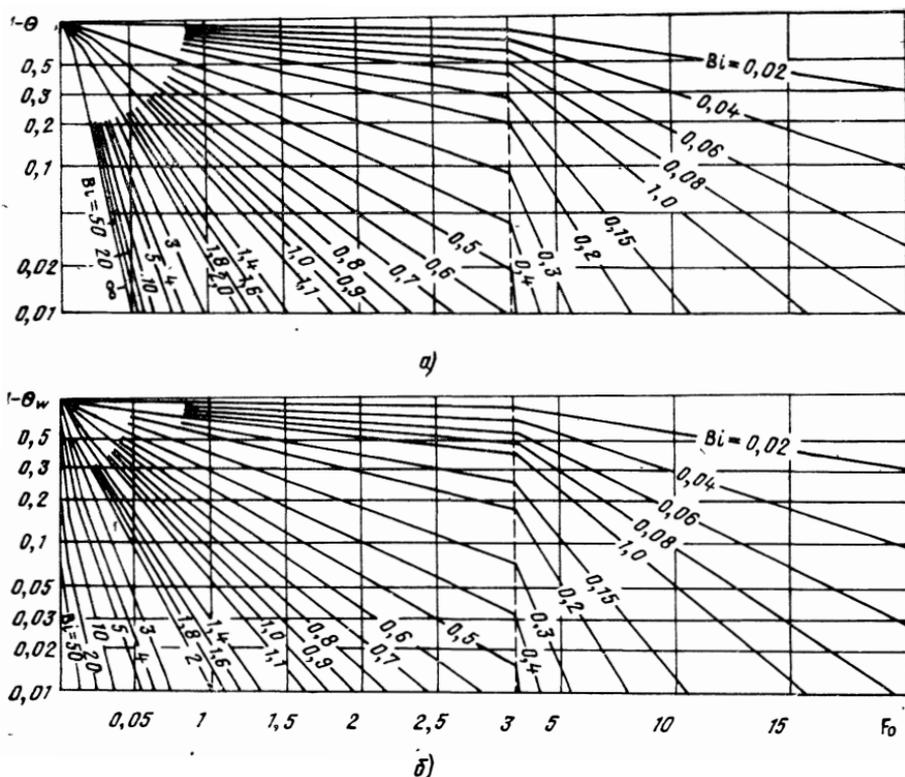


Рис. 6.7. Номограммы для определения безразмерной избыточной температуры

$$1-\theta = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \text{ шара:}$$

а — в центре; б — на поверхности

В критериальной форме безразмерная температура стенки может быть записана в виде

$$\theta = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(\mu_n \frac{x}{\delta} \right) e^{-\mu_n^2 Fo},$$

где

$$A_n = (-1)^{n+1} \frac{2Bi \sqrt{Bi^2 + \mu_n^2}}{\mu_n (Bi^2 + Bi + \mu_n^2)}.$$

Таблицы значений первых шести корней характеристического уравнения (6.19), а также коэффициентов A_n приводятся в монографии [101] для ряда значений критерия Bi .

Возвращаясь к решению задачи о пластине с граничными условиями 1-го рода видим, что, поскольку там процесс не зависит от условий теплообмена с окружающей средой, в случае $T_0 = \text{const}$ безразмерная температура θ будет зависеть лишь от x/δ и $Fo = a\tau/\delta^2$.

В задаче с граничными условиями 2-го рода характерной величиной является тепловой поток на поверхности тела q_w , поэтому здесь безразмерное решение будет зависеть еще и от нового безразмерного параметра $Ki = \frac{q_w \delta}{\lambda(T^* - T_0)}$, который, следуя монографии [101], назовем критерием Кирпичева*. Здесь T^* — средняя температура излучающей (создающей лучистый тепловой поток к поверхности рассматриваемого тела) среды или поверхности. В этом случае безразмерная температура пластины θ будет функцией параметров Ki , Fo , (x/δ) .

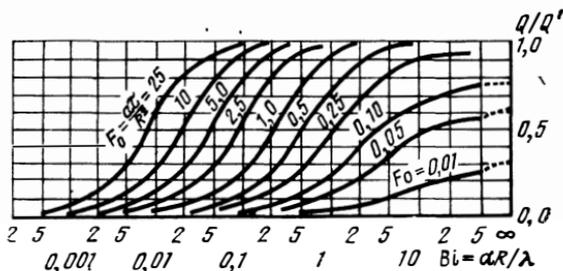


Рис. 68 Номограмма для определения количества теплоты, отданного (воспринятого) шаром:

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 c_Q \Delta T(\tau),$$

$$Q' = \frac{4}{3} \pi R^3 c_Q \Delta T_{\max};$$

$$\Delta T(\tau) = T_0 - \bar{T}, \quad \Delta T_{\max} = T_0 - T_f$$

Аналогичные выводы могут быть сделаны из рассмотрения аналитических решений задач о нестационарной теплопроводности цилиндра, шара и некоторых других с граничными условиями всех трех родов.

В задачах нестационарной теплопроводности часто практический интерес представляет количество теплоты Q , отданное или воспринятое рассматриваемым телом в данном нестационарном процессе к тому или иному моменту времени. Так, для участка неограниченной пластины толщиной δ и площадью S это количество теплоты можно выразить через теплоемкость пластины и среднюю ее температуру в данный момент времени \bar{T} в виде

$$\Delta Q(\tau) = c_Q \delta S (T_0 - \bar{T}).$$

При этом количество теплоты, отданное (воспринятое) единицей объема, будет равно

$$\Delta Q_v = c_Q (T_0 - \bar{T}).$$

* В. М. Кирпичев — видный советский ученый, известный, в частности, своими работами в области теории теплового моделирования.

а

$$\bar{T}(\tau) = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} T(x, \tau) dx.$$

В случае тел конечного размера

$$\bar{T}(\tau) = \frac{1}{V} \iiint_V T(V, \tau) dV,$$

где V — объем тела.

Безразмерное представление решений нестационарных задач позволяет дать таблицы или номограммы для расчета температур, а также количества отданного (воспринятого) тепла для тел простейшей формы.

На рис. 6.5—6.8 приведены примеры номограмм для расчета процессов нагрева и охлаждения простейших тел в среде с постоянной температурой*.

Пример 1.

Стальная плита толщиной $2\delta = 200$ мм с начальной температурой $T_0 = 955$ К опущена в масляную ванну (температура масла принимается постоянной и равной $T_f = 355$ К). Считая коэффициент теплоотдачи постоянным [$\alpha = 40$ Вт/(м²·К)], определить температуру в плоскости симметрии и на поверхности плиты через 24 мин и через 1 ч.

Решение.

Пренебрегая в первом приближении зависимостью теплофизических свойств стали от температуры, примем в рассматриваемом интервале температур $\lambda \approx 40$ Вт/(м·К) и $a \approx 0,05$ м²/ч. Тогда значения определяющих критериев Fo и Bi будут

$$Fo_1 = \frac{\alpha \tau}{\delta^2} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 2}{5 \cdot 10^{-2}} = 2 \text{ при } \tau = 24 \text{ мин}$$

и $Fo_2 = 5$ при $\tau = 1$ ч; $Bi = 0,1$.

Пользуясь номограммами, приведенными на рис. 6.5, а, б, находим: через 24 мин

$$1 - \theta_{ц} = \frac{T_{ц} - T_f}{T_0 - T_f} = 0,87;$$

$$1 - \theta_w = \frac{T_w - T_f}{T_0 - T_f} = 0,82,$$

где $\theta_{ц}$ — безразмерная температура в плоскости симметрии, а θ_w — на поверхности пластины.

Через 1 ч

$$1 - \theta_{ц} = 0,67; \quad 1 - \theta_w = 0,65.$$

Следовательно, через 24 мин температура в плоскости симметрии плиты будет:

$$T_{ц} = 0,87(T_0 - T_f) + T_f = 0,87(955 - 355) + 355 = 877 \text{ К.}$$

а на поверхности

$$T_w = 0,82 \cdot 600 + 355 = 847 \text{ К.}$$

* Более полно такие номограммы для различных родов граничных условий приведены в работах [59, 85, 86, 101] и др.

Через час соответствующие температуры будут

$$T_{ц} = 757 \text{ К} \text{ и } T_{w} = 745 \text{ К}.$$

Пример 2.

Какую минимальную толщину должна иметь стенка дозвукового сопла, для того чтобы за 5 с работы двигателя температура поверхности, омываемой продуктами сгорания с $T_f = 2500 \text{ К}$, не превысила допустимой — $T_w = 1300 \text{ К}$.

Указания. Стенку рассматривать как плоскую пластину; отводом тепла с наружной поверхности сопла пренебречь;

$$\alpha = 1000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}; \lambda = 30 \text{ Вт/(м К)}; a = 0,05 \text{ м}^2/\text{ч};$$

начальная температура стенок $T_0 = 300 \text{ К}$.

Решение.

Согласно номограмме 6.5, б для поверхности пластины, при допустимом значении T_w безразмерной температуре

$$1 - \theta_w = \frac{T_w - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{1300 - 2500}{300 - 2500} = 0,545$$

соответствует совокупность значений Fo и Bi , некоторые из которых приведены в следующей таблице:

$ Fo $	1	2	3	4	5	6
$ Bi $	0,5	0,28	0,19	0,14	0,11	0,095

В то же время, между $Bi = a\delta/\lambda$ и $Fo = a\tau/\delta^2$ можно записать связь, выражая δ через Bi : $[\delta = Bi(\lambda/\alpha)]$ и подставляя в критерий Фурье:

$$Fo = \frac{a\tau a^2}{Bi^2 \lambda^2}.$$

Для условий рассматриваемой задачи

$$Fo = \frac{0,05 \cdot 5 \cdot 1000^2}{Bi^2 \cdot 3600 \cdot 30^2} = 0,093 Bi^{-2}.$$

Построив графически эту зависимость и нанеся на тот же график зависимость $Fo = f(Bi)$, заданную таблицей значений, взятых из номограммы 6.5, б, в точке пересечения двух кривых получим совокупность значений Fo и Bi , удовлетворяющую требованию задачи. Этими значениями являются $Fo = 4,5$ и $Bi = 0,13$. По любому из них найдем требуемую толщину стенки сопла

$$\delta = Bi \frac{\lambda}{\alpha} = 0,13 \frac{30}{1000} = 3,9 \text{ мм}.$$

Пример 3.

Какое количество тепла потеряет шар из теплоизоляционного материала диаметром $2R = 0,1 \text{ м}$ за время полета в воздухе $\tau = 6 \text{ мин}$, если начальная температура шара равнялась $T_0 = 600 \text{ К}$, температура воздуха $T_f = 250 \text{ К}$, $\alpha \approx 100 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Теплофизические константы материала, из которого изготовлен шар:

$$a = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{ч}; \lambda = 0,5 \text{ Вт/(м К)}.$$

(Из $a = \lambda/(c\rho)$ следует, что удельная объемная теплоемкость $c\rho = \lambda/a = 400 \text{ Вт} \cdot \text{ч/(м}^3 \cdot \text{К)}$.)

Решение.

Значения определяющих критериев Bi и Fo в рассматриваемой задаче равны

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{100 \cdot 0,05}{0,5} = 10;$$

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{R^2} = \frac{1,25 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1}{25 \cdot 10^{-4}} = 0,05.$$

По номограмме рис. 6.8 находим для этих значений Bi и Fo отношение $Q/Q' = 0,47$,

где

$$Q' = cQ \frac{4\pi R^3}{3} (T_0 - T_f) =$$

$$= 400 \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 125 \cdot 10^{-6}}{3} (600 - 250) \approx 73 \text{ Вт.ч} = 2,63 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Следовательно, отданное за время полета количество тепла Q будет равно

$$Q = 0,47 Q' = 1,23 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Интересно рассмотреть качественный характер и некоторые предельные случаи изменения безразмерной избыточной температуры по безразмерному времени (Fo) при граничных условиях 3-го рода. Очевидно, что при фиксированном числе Bi температура поверхности T_w быстрее приближается к температуре окружающей среды T_f , чем температура в точках, расположенных глубоко внутри тела (см., например, рис. 6.7). Степень этого различия в скоростях зависит, однако, от $Bi = \alpha l / \lambda_T$. Так, при $Bi \rightarrow 0$ температуры центра и на поверхности в течение всего процесса можно считать одинаковыми, так как приток тепла к телу вследствие конвекции мал (мало α) и температура внутри тела успевает

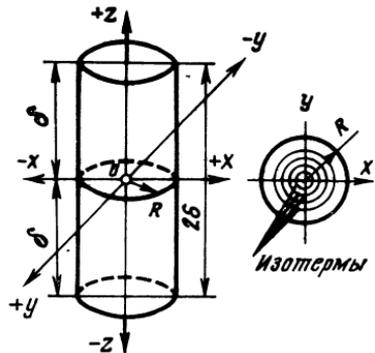


Рис. 6.9 К задаче о нагреве (охлаждении) цилиндра конечной длины. Граничные условия 3-го рода

в каждый момент выравняться в силу большой его теплопроводности (большое λ). В случае же $Bi \rightarrow \infty$ отличие в температурах внутренних точек тела и его поверхности будет максимальным, так как задача, как уже говорилось, стремится к задаче с граничными условиями 1-го рода, когда $T_w = T_f$ в течение всего процесса. Это легко обнаружить и на номограммах рис. 6.5—6.7, сравнивая зависимости безразмерной температуры от Fo в центре и на поверхности при малых и больших значениях Bi .

В практике часто нельзя воспользоваться решениями для тел бесконечной протяженности (пластина, цилиндр) в силу того,

что продольный размер реального объекта (например, длина цилиндра) сравним с поперечным (его диаметром). В этих случаях задача существенно неодномерна.

Ниже будет показано, что для ряда простейших тел конечных размеров решение может быть получено комбинацией имеющихся решений для тел бесконечной протяженности.

Рассмотрим цилиндр радиусом R и длиной 2δ , температура которого в начальный момент времени $T(z, r, 0) = T_0 = \text{const}$ (рис. 6.9). Цилиндр помещается в среду с $T = T_f = \text{const}$; задается коэффициент теплоотдачи a , который приближенно принимается постоянным и одинаковым для боковой и торцовых поверхностей цилиндра.

Дифференциальное уравнение задачи в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial T(z, r, \tau)}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 T(z, r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(z, r, \tau)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(z, r, \tau)}{\partial z^2} \right]. \quad (6.22)$$

Граничные условия (3-го рода) задачи запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial T(z, R, \tau)}{\partial r} + H [T_f - T(z, R, \tau)] &= 0 \\ & \text{(на боковой поверхности);} \\ \frac{\partial T(z, 0, \tau)}{\partial r} &= 0 \text{ (из симметрии на оси);} \\ -\frac{\partial T(\delta, r, \tau)}{\partial z} + H [T_f - T(\delta, r, \tau)] &= 0 \text{ (на торцах);} \\ \frac{\partial T(0, r, \tau)}{\partial z} &= 0 \text{ (из симметрии в плоскости } z=0\text{).} \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

Докажем, что безразмерная избыточная температура в любой точке в момент времени τ , равная

$$\vartheta = \frac{T_f - T(z, r, \tau)}{T_f - T_0},$$

определится произведением безразмерных температур бесконечного цилиндра того же радиуса

$$\vartheta_{\text{цил}} = \frac{T_f - T_{\text{цил}}(r, \tau)}{T_f - T_0}$$

и бесконечной пластины толщиной 2δ

$$\vartheta_{\text{пл}} = \frac{T_f - T_{\text{пл}}(z, \tau)}{T_f - T_0},$$

т. е.

$$\frac{T_f - T(z, r, \tau)}{T_f - T_0} = \frac{T_f - T_{\text{цил}}(r, \tau)}{T_f - T_0} \frac{T_f - T_{\text{пл}}(z, \tau)}{T_f - T_0}, \quad (6.24)$$

где $T_{\text{цил}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T_{\text{цил}}}{\partial v} - a \left(\frac{\partial^2 T_{\text{цил}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\text{цил}}}{\partial r} \right) = 0,$$

начальному условию $T_{\text{цил}}(r, 0) = T_0$
и граничным условиям:

$$-\frac{\partial T_{\text{цил}}(R, \tau)}{\partial r} + H[T_f - T_{\text{цил}}(R, \tau)] = 0;$$

$$\frac{\partial T_{\text{цил}}(0, \tau)}{\partial r} = 0 \text{ (из симметрии),}$$

а $T_{\text{пл}}$ — уравнению

$$\frac{\partial T_{\text{пл}}}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 T_{\text{пл}}}{\partial z^2} = 0,$$

тому же начальному условию и граничным условиям

$$-\frac{\partial T_{\text{пл}}(\delta, \tau)}{\partial z} + H[T_f - T_{\text{пл}}(\delta, \tau)] = 0$$

$$\frac{\partial T_{\text{пл}}(0, \tau)}{\partial z} = 0 \text{ (из симметрии).}$$

Выразим $T = T(z, r, \tau)$ из равенства (6.24), для краткости опуская аргументы и обозначая $T_f - T_0$ через ΔT :

$$T = T_f - \frac{1}{\Delta T} [(T_f - T_{\text{цил}}) \cdot (T_f - T_{\text{пл}})]. \quad (6.25)$$

Подставляя это выражение в уравнение исходной задачи (6.22), получим

$$\begin{aligned} & (T_f - T_{\text{цил}}) \left\{ \frac{\partial T_{\text{пл}}}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 T_{\text{пл}}}{\partial z^2} \right\} + \\ & + (T_f - T_{\text{пл}}) \left\{ \frac{\partial T_{\text{цил}}}{\partial v} - a \left(\frac{\partial^2 T_{\text{цил}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\text{цил}}}{\partial r} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Выражение (6.25) удовлетворяет уравнению (6.22), обращая его в тождество, так как выражения в фигурных скобках тождественно равно нулю по определению функций $T_{\text{цил}}$ и $T_{\text{пл}}$. Таким образом $\Phi = \Phi_{\text{пл}} \Phi_{\text{цил}}$ удовлетворяет уравнению задачи.

Подставим решение (6.25) в начальные условия исходной задачи:

$$\begin{aligned} T(z, r, 0) &= T_f - \frac{1}{\Delta T} [T_f - T_{\text{цил}}(r, 0)] [T_f - T_{\text{пл}}(z, 0)] = \\ &= T_f - \Delta T = T_f - T_f + T_0 = T_0, \end{aligned}$$

так как $T_{\text{цил}}(r, 0) = T_{\text{пл}}(z, 0) = T_0$ по определению. Остается проверить, удовлетворяет ли предложенное решение (6.25) граничным условиям исходной задачи (6.23). Подстановка решения (6.25) в выражение (6.23) дает

$$\left\{ -\frac{\partial T_{\text{цил}}(R, \tau)}{\partial r} + H [T_f - T_{\text{цил}}(R, \tau)] \right\} \frac{T_f - T_{\text{пл}}(r, \tau)}{\Delta T} = 0,$$

поскольку выражение в фигурных скобках равно нулю по определению функции $T_{\text{цил}}$. Аналогично и

$$\left\{ -\frac{\partial T_{\text{пл}}(\delta, \tau)}{\partial z} + H [T_f - T_{\text{пл}}(\delta, \tau)] \right\} \frac{T_f - T_{\text{цил}}(r, \tau)}{\Delta T} = 0.$$

Таким образом, решение (6.24) удовлетворяет уравнению, начальным и граничным условиям поставленной задачи, а следовательно, по теореме о единственности и является искомым, т. е. дает температурное поле внутри цилиндра конечной длины.

Таким же образом можно получить решение для параллелепипеда с ребрами $2\delta_1$; $2\delta_2$ и $2\delta_3$, где безразмерное решение будет равно

$$\vartheta = \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3.$$

Здесь ϑ_i — безразмерное решение соответствующей задачи о бесконечной пластине толщиной $2\delta_i$.

Построение комбинированных решений для тел конечной протяженности, продемонстрированное здесь на примере задачи с граничными условиями 3-го рода, возможно и в задачах с граничными условиями других родов. Следовательно, номограммы типа, приведенных на рис. 6.5—6.7 для определения температур простейших тел в нестационарных процессах, применимы к весьма широкому кругу неоднородных задач.

Следует учитывать, что полученные с помощью номограмм решения носят приближенный характер в том смысле, что они получены в предположении постоянства α по поверхности, неизменности теплофизических свойств тела по температуре и т. д.

6.4 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Упомянутые выше решения простейших задач, которые удается затабулировать или свести к расчетным номограммам, получены для неизменной во времени температуры окружающей

среды T_f (или температуры стенки T_w , или теплового потока q_w), а также при одинаковой по всему объему тела начальной температуре в момент $\tau=0$.

В виде рядов выписывается решение в случае произвольно заданного распределения температур при $\tau=0$ для тел простейшей формы и одномерных задач (см. разд. 6.2). Однако и в этом случае вычисление коэффициентов ряда является часто весьма трудоемким. В связи с этим наряду с аналитическими развивались и численные методы решения нестационарных задач теплопроводности, причем с появлением электронных счетных машин эти методы приобрели решающую роль в проведении точных инженерных тепловых расчетов (прогрев теплозащитных покрытий, камер сгорания и сопел ЖРД, тепловые режимы ИСЗ) [118, 120 и др.].

Идею одного из простейших и наиболее распространенных численных методов продемонстрируем на примере одномерной задачи прогрева (охлаждения) плоской стенки с граничными условиями 3-го рода. Этот метод называют методом конечных разностей или методом Шмидта.

Заменим дифференциальное уравнение Фурье — Кирхгоффа уравнением в так называемых конечных разностях, т. е. вместо дифференциалов ∂T , $\partial \tau$ и ∂x введем малые конечные приращения ΔT ; $\Delta \tau$ и Δx :

$$\frac{\Delta T}{\Delta \tau} = a \frac{\Delta^2 T}{(\Delta x)^2}. \quad (6.26)$$

Разобьем стенку изотермическими поверхностями (в рассматриваемой задаче они параллельны поверхностям стенки) на слои равной толщины Δx . Температуру каждого слоя в данный момент времени будем принимать одинаковой по толщине слоя и равной температуре в центре его. Перенумеровав слои и разделив интересующий нас период времени на равные малые интервалы $\Delta \tau_1$, $\Delta \tau_2$, $\Delta \tau_3$, $\Delta \tau_k$ и т. д., температуру n -го слоя в течение k -го интервала времени будем считать равной T_{nk} (рис. 6.10) (в течение k -го интервала времени температура также считается постоянной). Таким образом, непрерывный процесс мы заменили ступенчатым, или скачкообразным как в пространстве, так и во времени. Заданное начальное распределение температуры $T_0=f(x, 0)$ также заменяем ломаной (T_{n0}). Если теперь, опираясь на уравнение в конечных разностях (6.26) и начальное распределение T_{n0} , удастся получить распределение в следующий момент T_{n1} , то задачу можно считать решенной, поскольку, приняв распределение T_{n1} за новое начальное и повторив процедуру, мы сможем найти распределение температур в любой момент времени. Таким образом, задача сводится к отысканию распределения $T_{n(k+1)}$ по заданному T_{nk} . Выраженное в конечных разностях значение производной $\Delta T/\Delta \tau$ в точке n в момент вре-

мени k можно представить в виде

$$\frac{\Delta T}{\Delta \tau} = \frac{T_{n(k+1)} - T_{nk}}{\Delta \tau}$$

Величине первой производной $\Delta T/\Delta x$ в той же точке можно приписать два значения, так как непрерывное распределение заменено ломаной линией и излом расположен в центре n -го интервала, т. е. в точке n . Поэтому введем производную справа от точки n $(\Delta T/\Delta x)_+$ и производную слева от той же точки $(\Delta T/\Delta x)_-$:

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_+ = \frac{T_{(n+1)k} - T_{nk}}{\Delta x}; \quad \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_- = \frac{T_{nk} - T_{(n-1)k}}{\Delta x}$$

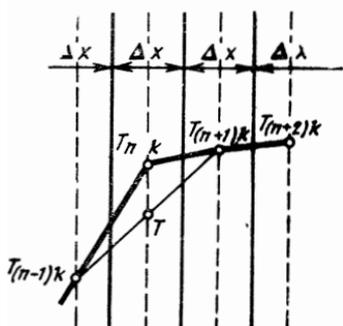


Рис. 610. К решению задачи нестационарной теплопроводности методом конечных разностей

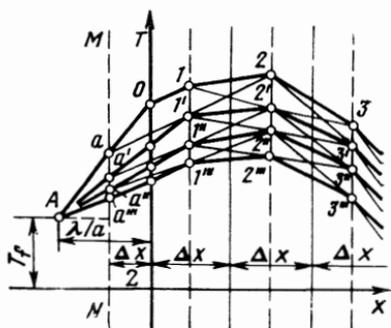


Рис. 611. Графический метод решения задачи нестационарной теплопроводности плоской пластины с граничными условиями 3-го рода

Из этих выражений найдем 2-ю производную

$$\frac{\Delta^2 T}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_+ - \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_- \right] = \frac{1}{(\Delta x)^2} [T_{(n+1)k} + T_{(n-1)k} - 2T_{nk}]$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (6.26), получим

$$\frac{T_{n(k+1)} - T_{nk}}{\Delta \tau} = \frac{2a}{(\Delta x)^2} \left[\frac{T_{(n+1)k} + T_{(n-1)k}}{2} - T_{nk} \right],$$

откуда неизвестное значение температуры в n -й точке в $(k+1)$ -й момент времени получится из так называемого сеточного уравнения

$$T_{n(k+1)} = \frac{2a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \frac{T_{(n+1)k} + T_{(n-1)k}}{2} + \left[1 - \frac{2a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \right] T_{nk}. \quad (6.27)$$

Сеточным оно называется потому, что связывает значения искомой функции в узлах пространственно-временной сетки n, k . Таким образом температура $T_{n(k+1)}$ найдена нами в виде явной функции * температур в трех смежных точках в предыдущий момент времени:

$$T_{n(k+1)} = f [T_{(n-1)k}; T_{nk}; T_{(n+1)k}].$$

Вследствие этого такой простейший метод численного решения получил название трехточечной схемы. Сеточное уравнение (6.27) существенно упрощается, если выбрать $\Delta\tau$ и Δx так, чтобы $2a\Delta\tau/(\Delta x)^2 = 1$.

Тогда

$$T_{n(k+1)} = \frac{T_{(n+1)k} + T_{(n-1)k}}{2}, \quad (6.28)$$

т. е. искомая температура в точке n становится средней арифметической температур в смежных точках в предшествующий момент времени.

На этом свойстве основан простой графический метод решения сеточного уравнения, т. е. задачи в конечных разностях (рис. 6.11). При использовании этого метода, выбрав интервал Δx , определяют $\Delta\tau$ из условия $2a\Delta\tau/(\Delta x)^2 = 1$:

$$\Delta\tau = \frac{(\Delta x)^2}{2a}.$$

Если ломаная линия $0, 1, 2, 3, 4 \dots$ аппроксимирует начальное распределение температур в пластине, а значения $T_{10}; T_{20}; T_{30}$ и т. д. — температуры в каждом из слоев в момент времени $\tau = 0$, то температура, например, в слое 2 в следующий момент времени T_{21} получится простым пересечением линии, соединяющей T_{10} и T_{30} с осевой линией 2-го слоя ($2-2''$). Аналогично найдутся и температуры в слоях 3, 4 и т. д.

Согласно геометрической интерпретации граничных условий 3-го рода, данной в гл. II, касательная к профилю температур у поверхности тела в любой момент времени должна проходить через точку A (полюс) с координатами $T = T_f$ и $x = |\lambda/a|$. Это обстоятельство используется в графическом методе для определения температуры в 1-м слое и на поверхности пластины. Проводим вспомогательную пунктирную линию MN на расстоянии $\Delta x/2$ от поверхности. Затем, соединив точку 0 с полюсом A , через точку пересечения линии $0A$ со вспомогательной пунктирной линией MN (точку a) и точку 2 проводим прямую.

* Существуют и другие методы аппроксимации распределений температур в теле, кроме рассмотренного нами. При аппроксимации параболами (а не линейными отрезками, как здесь), что более точно, искомая температура получается не в виде явной функции, а как решение системы алгебраических уравнений.

Пересечение этой прямой с осевой линией 1-го слоя $I-I''$ в точке I' даст температуру T_{11} . Соединив точку I' с полюсом A получим температуру поверхности пластины в следующий за начальный момент времени как пересечение линии $I'A$ с этой поверхностью. Отсюда видим, что уже в момент времени, следующий за началом процесса ($\tau=0$), граничное условие 3-го рода (прохождение касательной к профилю температур через полюс) соблюдено. Находя затем T_{22} , T_{32} , T_{42} и т. д., температуру в слое I во второй интервал времени (T_{12}) найдем, соединяя точку a' с точкой $2'$, а температуру поверхности — как точку $0''$ пересечения поверхности пластины с линией $I''A$. Продолжая последовательно этот процесс, можно найти поле температур в пластине в любой последующий момент времени.

Следует иметь в виду, что с течением времени процесс охлаждения (нагрева) будет идти все медленнее (по экспоненте) и графическое построение станет затруднительным, так как кривые для данного и последующего моментов времени будут располагаться все ближе друг к другу. Чтобы избежать этого на определенном этапе графического счета, можно увеличить шаг по времени $\Delta\tau$, но так, чтобы не нарушить условия $2a\Delta\tau/(\Delta x)^2=1$. Для этого, очевидно, придется увеличить и интервалы Δx . Например, увеличив $\Delta\tau$ в 9 раз, Δx нужно увеличить в $\sqrt{9}=3$ раза.

Для применения рассмотренного метода не требуется постоянства T_f и α во времени, так как задачу можно решать и при «плавающем» полюсе, т. е. когда T_f и α изменяются во времени по известному закону. Если изменяется коэффициент теплопроводности a , то будет изменяться интервал времени, т. е. полученные распределения температур будут отстоять по времени друг от друга не на $\Delta\tau=\text{const}$, а на $\Delta\tau=(\Delta x)^2/(2a)$, определяемое в зависимости от значения a .

До появления быстродействующих счетных машин задачи методом конечных разностей решались либо графически, либо путем счета «на руках». При этом, чтобы трудоемкость не превышала разумных пределов, ограничивались сравнительно небольшим числом шагов по оси τ . С появлением машин появилась возможность резко увеличить число шагов по x и τ (до величин порядка 10^3). При этом обнаружилось, что в некоторых случаях округление численных значений, а также аппроксимация истинных распределений ломаной линией или иной кривой, дает накопление малых погрешностей, приводящее к неустойчивости решения сеточного уравнения и ко все большему удалению его от истинного по мере роста времени τ . Однако можно подобрать некоторые параметры, входящие в сеточное уравнение, так чтобы погрешности округления не накапливались и не искажали результатов счета.

Теоретические исследования устойчивости различных сеточных уравнений в ряде случаев позволили установить условия, при которых не происходит накопления ошибки или потери ус-

тойчивости. Так, для рассмотренного выше трехточечного уравнения оказалось, что условие устойчивости имеет вид

$$\frac{2a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \leq 1, \quad (6.29)$$

т. е. выбор интервалов времени и длины должен удовлетворять записанному неравенству. На рис. 6.12, а показаны результаты численного и аналитического решения задачи остывания пластины при граничных условиях 1-го рода ($T_w = \text{const}$) при соблюдении условия (6.29): $2a\Delta\tau/(\Delta x)^2 = 10/11$, а на рис. 6.12, б — при нарушении его: $2a\Delta\tau/(\Delta x)^2 = 10/9$. Видно, что уже к безразмерному моменту времени $a\tau/(\Delta x)^2 = 10$ (это критерий Фурье, вычисленный по характерной длине Δx) при нарушении условия (6.29) решение потеряло устойчивость, чего не отмечается при соблюдении условия устойчивости даже при $a\tau/(\Delta x)^2 = 40$ (рис. 6.12).

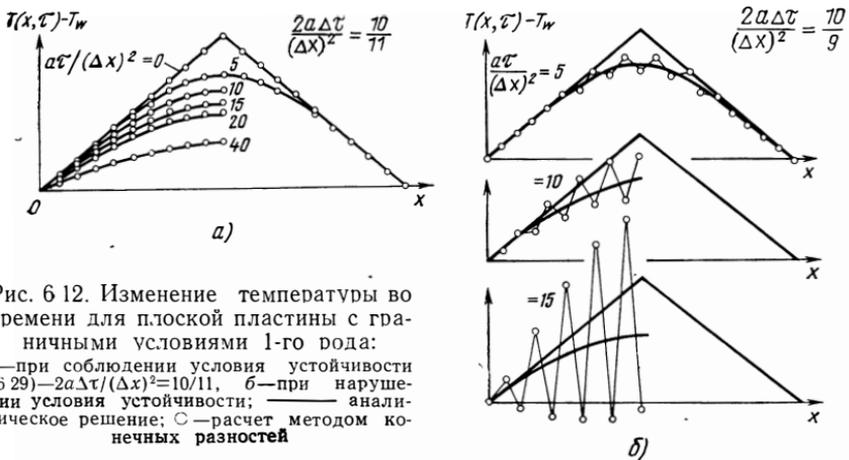


Рис. 6.12. Изменение температуры во времени для плоской пластины с граничными условиями 1-го рода: а—при соблюдении условия устойчивости (6.29)— $2a\Delta\tau/(\Delta x)^2=10/11$, б—при нарушении условия устойчивости; — аналитическое решение; ○—расчет методом конечных разностей

Существуют и иные методы численного решения задач нестационарной теплопроводности, позволяющие рассчитывать температурное поле в телах сложной формы с учетом зависимости теплофизических констант от температуры. Одним из первых таких методов был метод, носящий название метода элементарных балансов.

Для численного решения нестационарных задач теплопроводности используются также методы моделирования процесса, основанные на аналогии физических явлений. В природе существуют целые классы явлений и процессов, отличающихся по своей физической природе, но описываемых одними и теми же по форме дифференциальными уравнениями. Такие процессы называются аналогичными. Так, дифференциальным уравнением в частных производных типа Фурье — Кирхгофа, могут описы-

ваться некоторые электрические и гидравлические явления*. Это обстоятельство использовалось при создании электронинтеграторов и гидравлических интеграторов.

6.5. РЕГУЛЯРНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ

Для того чтобы ввести понятие регулярного теплового режима, рассмотрим процесс охлаждения (нагрева) в среде с постоянной температурой произвольного по форме однородного и изотропного тела, начальное распределение температур в котором (при $\tau=0$) задано известной функцией координат $f(x, y, z) = T_0$. В целях упрощения записи будем, не уменьшая общности, считать температуру окружающей среды $T_f = 0$.

В этом случае граничное условие задачи можно записать в виде

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_W + \alpha [T_W(x', y', z', \tau) - T_f] = \\ = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_W + \alpha T_W(x', y', z', \tau) = 0; \\ (x', y', z') \in W \end{aligned}$$

или

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} + HT \right) \Big|_W = 0,$$

где $H = \alpha/\lambda$ — относительный коэффициент теплоотдачи. Общее решение уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T$$

с этими граничными условиями можно представить в виде

$$T(x, y, z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \vartheta_n(x, y, z) e^{-a\beta_n \tau}, \quad (6.30)$$

где C_n — постоянные коэффициенты, независимые от времени и координат, а $\vartheta_n(x, y, z)$ — собственные функции задачи, являющиеся решениями так называемого характеристического уравнения (см. разд. 6.2)

$$\nabla^2 \vartheta + \beta_n \vartheta = 0, \quad (6.31)$$

удовлетворяющими граничным условиям вида

$$\left(\frac{\partial \vartheta_n}{\partial n} + H \vartheta_n \right) \Big|_W = 0; \quad (6.32)$$

* Подробнее об аналоговых моделях см. работы, например [42, 101, 150, 155].

β_n — ряд дискретных чисел, называемых собственными значениями задачи, при которых характеристическое уравнение (6.31) с граничными условиями (6.32) имеет ненулевые решения*.

Заменяя $a\beta_n$ на m_n , решение (6.30) можно переписать в виде бесконечного ряда

$$T(x, y, z, \tau) = C_1 \vartheta_1 e^{-m_1 \tau} + C_2 \vartheta_2 e^{-m_2 \tau} + \dots \quad (6.33)$$

где $m_1, m_2, m_3 \dots$ — ряд возрастающих дискретных чисел (поскольку они лишь на постоянный коэффициент a отличаются от возрастающей последовательности собственных значений $\beta_1, \beta_2 \dots$).

Постоянные коэффициенты C_n определяются при подчинении общего решения начальным условиям $T_0 = f(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \vartheta_n$,

т. е. их нахождение связано с разложением функции $f(x, y, z)$ (в общем случае весьма произвольной) в ряд по собственным функциям данной задачи ϑ_n , определение которых в случае тела сложной формы часто представляет непреодолимые математические трудности. Теория регулярного режима, как мы увидим далее, открывает практические пути к их преодолению.

Рассматривая поведение ряда (6.33) с ростом времени τ , убедимся, что все его члены убывают по времени, хотя и с неодинаковой скоростью. Причем, поскольку $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ члены высших порядковых номеров убывают быстрее и уже очень скоро становятся практически пренебрежимо малыми. Поэтому температура T какой-либо произвольной точки тела задолго до достижения ею температуры окружающей среды (в нашем случае $T_f = 0$) будет определяться по существу первым членом ряда (6.33), т. е. следовать простому экспоненциальному закону:

$$T(x, y, z, \tau) \approx C_1 \vartheta_1(x, y, z) e^{-m_1 \tau}. \quad (6.34)$$

Момент, когда изменение температуры всех точек тела можно считать следующим этому простому закону, называют началом регулярного, т. е. упорядоченного режима. Функция $\vartheta_1(x, y, z)$ по определению не зависит от начальных условий, а C_1 , хотя и определяется из начальных условий, но не зависит от координат точки и является постоянной для всех точек тела. Поэтому по наступлении регулярного режима можно считать, что начальное тепловое состояние тела не оказывает более влияния на закон изменения температур по времени во всех его точках.

* Сказанное является обобщением уже полученных нами для простейших тел результатов в разд. 6.2 и 6.3 на случай тела произвольной формы. Это обобщение известно как основная теорема теории регулярного режима (см. [65]).

Логарифмируя выражение (6.34), получим

$$\ln T = -m_1 \tau + F(x, y, z),$$

а следовательно,

$$-\frac{\partial \ln T}{\partial \tau} = m_1,$$

т. е. зависимость $\ln T$ от τ в области регулярного режима для всех точек приобретает линейный характер, причем ее угол наклона одинаков для всех точек тела и равен $-\arctg m_1$ (рис. 6.13).

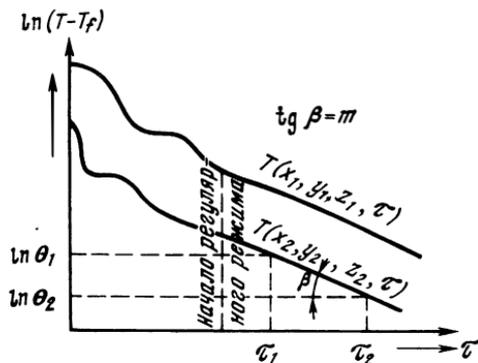


Рис. 6.13. Изменение во времени логарифма избыточной температуры двух точек произвольного тела

Величину m (индекс далее опускаем) называют темпом охлаждения.

Существенно, что поле температур в теле в процессе регулярного охлаждения остается подобным самому себе, поскольку отношение температур любых двух точек тела становится постоянным и независимым от времени, а определяется лишь координатами этих точек. В этом легко убедиться, поделив полученное из равенства (6.34) выражение для $T_1(x_1, y_1, z_1, \tau)$ на выражение для $T_2(x_2, y_2, z_2, \tau)$:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\vartheta_1(x_1, y_1, z_1)}{\vartheta_2(x_2, y_2, z_2)}.$$

Темп охлаждения $m = \alpha \beta_1$ зависит от формы, размеров и материала тела, а также от граничных условий задачи [собственные значения β_n определялись из вспомогательной задачи, формулируемой уравнением (6.31) с граничным условием (6.32)]. Значение m можно определить, замеряя в эксперименте изменение температуры какой-либо точки охлаждаемого тела во времени. Для этого, построив график зависимости $\ln T$ от τ , следует взять на прямолинейном его участке (область регулярного режима) две точки и тогда

$$m = \frac{\ln T(\tau_1) - \ln T(\tau_2)}{\tau_2 - \tau_1}. \quad (6.35)$$

Если $T_f \neq 0$, то под T следует понимать разность температур тела и среды.

Наглядную интерпретацию становления регулярного режима охлаждения можно дать, рассмотрев распределение температуры по толщине плоской стенки, помещенной в среду с постоянной температурой (рис. 6.14). Если вначале ($\tau=0$) распределение температуры имело вид, изображенный кривой $A'A$, то з

ближайшие за начальным моменты времени τ_1 и τ_2 изменения температуры отдельных точек по времени во многом еще определяются не внешними условиями [$T_f < T(x, y, z, 0)$], а самим начальным распределением. Так, в некоторых сечениях (близких к x_1) температура сначала начинает даже возрастать. Но постепенно влияние начальных условий ослабевает и, начиная с $\tau \approx \tau_4$, температура всех точек тела начинает падать по одинаковому экспоненциальному закону, т. е. наступает регулярный режим. Выше было дано представление о регулярном режиме охлаждения (нагрева) тела в среде с постоянной температурой T_f . Понятие регулярности режима может быть обобщено и на случай изменения T_f во времени по таким простейшим законам, как линейный и гармонический. (При рассмотрении регулярных режимов здесь не делается различия между задачами с граничными условиями 1-го и 3-го рода, поскольку ранее было показано, что при стремлении λ/a к нулю ($H \rightarrow \infty$) обе задачи эквивалентны ($T_f = T_w$), а значит, и все выводы, полученные из рассмотрения задачи с граничными условиями 3-го рода, легко обобщаются на случай граничных условий 1-го рода).

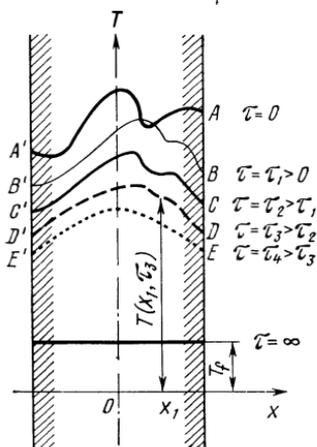


Рис. 6.14. Распределение температуры по толщине плоской стенки (граничные условия 3-го рода) для различных моментов времени при произвольном начальном распределении $A'A$

Исходя из сказанного, регулярным можно назвать режим, математически описываемый законом изменения температурного поля во времени, не зависящим от начальных условий и общим для всех точек рассматриваемого тела.

В соответствии с названными выше тремя типичными законами изменения T_f во времени различают регулярные режимы трех родов. Рассмотренный нами в начале этого раздела ($T_f = \text{const}$) называется регулярным режимом 1-го рода. Признак регуляризации режима 1-го рода состоит в том, что изменение температуры в каждой точке системы происходит по экспоненте, одинаковой для всех точек:

$$T = C_1 \vartheta_1 e^{-m\tau}; \quad C_1 = \text{const}; \quad \vartheta = \vartheta(x, y, z).$$

Регулярный режим 2-го рода ($\partial T_f / \partial \tau = \text{const} = b$) наступает, когда скорость изменения температуры становится, во-первых, постоянной, общей для всех точек тела и, во-вторых, равной скорости изменения температуры внешней среды:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{dT_f}{d\tau} = b,$$

т. е. $T = T_f + M(x, y, z).$

Для регулярного режима 3-го рода (когда $T_f = T_{f0} + A \cos \omega \tau$) характерно, что температура любой точки тела колеблется около своего среднего значения с тем же периодом, что и температура окружающей среды, т. е. с периодом, одинаковым для всех точек тела:

$$T = P \sin \omega \tau + Q \cos \omega \tau = T_0' + A' \cos(\omega \tau - \varphi),$$

где P, Q, T_0', A' и φ — функции координат. (Очевидно, эти колебания, вообще говоря, происходят с иной амплитудой, а также могут быть смещены по фазе по сравнению с колебаниями температуры окружающей среды).

6.5.1. Регулярный режим 1-го рода

В некоторых случаях регулярный режим может наступить сразу после начала процесса охлаждения или нагрева тела. Пусть тело произвольной формы, с объемом V и поверхностью F обладает высокой теплопроводностью λ , а коэффициент теплоотдачи у поверхности α мал. Это означает, что критерий $Bi = (\alpha L / \lambda) \ll 1$, и можно считать, что температура внутри тела очень быстро выравнивается и в каждый данный момент времени близка к постоянной, равной температуре его поверхности T_w . Тогда уравнение теплового баланса, приравняющее количество тепла, поступившее через поверхность тела, изменению его энтальпии, запишем в виде

$$\alpha(T_f - T)F = \rho c V \frac{dT}{d\tau}. \quad (6.36)$$

В этом уравнении T — температура тела не зависит от координат (x, y, z) в силу предположения, что $Bi \ll 1$. Считая теплофизические характеристики системы постоянными и вводя новую переменную $\theta = T_f - T$, легко проинтегрировать это выражение:

$$\frac{d \ln \theta}{d\tau} = \frac{\alpha F}{\rho c V} = -m \quad (6.37)$$

или $\theta = \theta_0 e^{-m\tau}$ ($\theta_0 = T_f - T_0$),

где $m = \text{const}$ — темп охлаждения (см. начало этого раздела). Таким образом, при $Bi \ll 1$ регулярный режим устанавливается сразу после начала процесса.

Уравнение, аналогичное уравнению (6.36), можно составить и для случая, когда Bi произвольно, т. е. температура в различных точках тела в данный момент времени различна. Только при этом пришлось бы воспользоваться понятиями средней по объему избыточной температуры $\theta_V = \frac{1}{V} \iiint_V \theta dV$

и средней по поверхности избыточной температуры

$$\theta_W = \frac{1}{F} \iint_F \theta dF,$$

где $\theta = T_f - T(x, y, z)$ — местная избыточная температура в данный момент времени. В этом произвольном случае темп охлаждения m отличался бы от выражения (6.37) при $Bi \ll 1$ на коэффициент

$$\psi = \frac{\theta_W}{\theta_V} = \frac{V \iint_F \theta dF}{F \iiint_V \theta dV}, \quad (6.38)$$

представляющий отношение средней поверхностной температуры к средней по объему [очевидно, что при $Bi \ll 1$, когда $T(x, y, z) = T_w$, $\theta_w = \theta_v$ и $\psi = 1$. Другой предельный случай, когда $\psi = 0$, соответствует $Bi \rightarrow \infty$, т. е. максимальной неравномерности температурного поля внутри тела].

Коэффициент ψ , таким образом, характеризует неравномерность температурного поля в теле и потому, естественно, зависит от критерия Bi . Из выражения (6.38) видна также его зависимость от формы тела (от F и V). К тому же выводу можно прийти, рассматривая m_i в уравнении (6.33) как $a\beta_i$, где β_i — собственные значения, определяющиеся формой тела и граничными условиями. Однако, как уже говорилось, найти β_i для тел, более или менее сложной формы, весьма трудно.

Итак, при произвольном Bi темп охлаждения равен

$$m = \psi \frac{aF}{c\rho V}$$

и при $Bi \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow \infty$) ψ стремится к нулю. Однако в этом предельном случае, который, очевидно, сводит задачу с граничными условиями 3-го рода к задаче с граничными условиями 1-го рода ($T_f = T_w$), темп охлаждения ($m_\infty = 0 \cdot \infty$) стремится к определенному конечному пределу, независимому от Bi^* и прямо пропорциональному коэффициенту теплопроводности тела a (это утверждение называют 1-й теоремой Кондратьева [65]):

$$a = Km_\infty. \quad (6.39)$$

* В задаче с граничными условиями 1-го рода критерий Bi выпадает из числа определяющих (см. разд 6.3).

В этом выражении коэффициент пропорциональности K зависит лишь от формы и размеров тела и для задач с граничными условиями 1-го рода, где доступно аналитическое решение (пластина, шар, цилиндр, параллелепипед и т. д.), может быть получен из показателя экспоненты первого члена ряда, представляющего соответствующее решение. Так, для шара радиусом R

$$K = \frac{R^2}{\pi^2} ;$$

для цилиндра радиусом R и длиной l

$$K = \frac{1}{(2,4048/R)^2 + (\pi/l)^2} ;$$

для параллелепипеда со сторонами l_1, l_2, l_3

$$K = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 (\pi/l_i)^2} .$$

Его размерность — m^2 .

Важным с точки зрения практики является то обстоятельство, что с увеличением Bi темп охлаждения m очень быстро приближается к своему предельному значению m_∞ , соответствующему $Bi = \infty$.

Исходя из сказанного, укажем на некоторые практические приложения теории регулярного режима 1-го рода.

В теплофизическом эксперименте часто необходимо экспериментально найти коэффициент теплоотдачи α на каком-то участке поверхности. В этом случае удобно воспользоваться тем обстоятельством, что при $Bi \rightarrow 0$ $\psi \rightarrow 1$, а следовательно,

$$\alpha = m \frac{qcV}{F} . \quad (6.40)$$

Заделав в интересующей части поверхности тела датчик в виде тонкой пластины из теплопроводного материала (медь, серебро) и подсоединив к нему термомпару, связанную с регистрирующим устройством (например, осциллографом), можно получить зависимость температуры датчика от времени, после того как тело, на поверхности которого установлен датчик, поместили в поток или среду с постоянной температурой T_f . Вследствие малости $Bi = \alpha\delta/\lambda$ (толщина датчика δ мала, а коэффициент λ — велик) температуру в данный момент времени можно считать одинаковой по всему датчику и равной измеренной с помощью термопары. Перестраивая полученную зависимость в полулогарифмических координатах $[\ln(T_f - T) = f(\tau)]$ определим m на участке регулярного режима по формуле (6.35) (см. рис. 6.13). А затем,

пользуясь выражением (6.40), легко найти α . В этом случае в качестве F должна браться лишь та площадь поверхности датчика, которая воспринимает конвективный тепловой поток. Остальную часть его поверхности при установке датчика стремятся тщательно теплоизолировать, поскольку важно быть уверенным, что за время измерений $f(\tau)$ утечки тепла от датчика в заделку или иным путем пренебрежимо малы в сравнении с конвективным потоком $Q = \alpha(T_f - T)F$. Основное преимущество данного метода регуляторного режима состоит в том, что при очень малых, а следовательно, малоинерционных датчиках время измерения можно сократить до ~ 1 с и менее, что важно в экспериментальных установках кратковременного действия, таких, например, как аэродинамические трубы больших скоростей и т. п.

Другой пример практического использования регулярного режима относится к экспериментальному определению теплофизических констант материала. Поскольку при $Bi \rightarrow \infty$ $a = Km_\infty$, то, найдя экспериментально m_∞ и зная коэффициент формы K (если образцу придана простая геометрическая форма), можно определить коэффициент температуропроводности материала a . Как уже говорилось, m быстро приближается к m_∞ с ростом Bi (или α). Поэтому с достаточно высокой точностью при больших, но конечных Bi можно принять $m = m_\infty$. Поместив образец в водяной термостат, где температура поддерживается постоянной и идет интенсивное вынужденное перемешивание, обеспечивающее высокое значение коэффициента теплоотдачи α , измеряют заделанной внутрь образца термопарой величину T через определенные промежутки времени. Из построенной для участка регулярного режима зависимости $\ln \theta = f(\tau)$, находят $m = m_\infty$ и, зная K , вычисляют коэффициент температуропроводности a по формуле (6.39).

Если форма тела такова, что K неизвестно, то тем же методом, изготовив образец точно такой же формы, но из материала с известным a , можно определить коэффициент формы K из соотношения $a = Km_\infty$. Такой метод может использоваться и для приближенного расчета нагрева или охлаждения тел сложной формы в области регулярного режима.

6.5.2. Регулярные режимы 2-го и 3-го родов

Пусть температура окружающей тело среды меняется во времени по линейному закону:

$$T_f = T_{f0} + b\tau,$$

а все подводимое к телу тепло идет на его нагрев. Тогда в предположении малости критерия $Bi = a/\lambda$ по аналогии с уравнением

(6.36) можно записать уравнение теплового баланса в следующем виде:

$$\alpha(T_{f0} + b\tau - T)F = c_0V \frac{dT}{d\tau}, \quad (6.41)$$

где T — мгновенная температура тела, одинаковая при $Bi \ll 1$ по всему его объему, включая и поверхность.

Обозначая через $\theta = T - T_{f0}$ разность между мгновенной температурой тела T и начальной температурой среды T_{f0} уравнение (6.41) можно переписать в форме

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\alpha F}{c_0V} \theta = \frac{\alpha F b}{c_0V} \tau$$

или

$$\frac{d\theta}{d\tau} + m\theta = mb\tau.$$

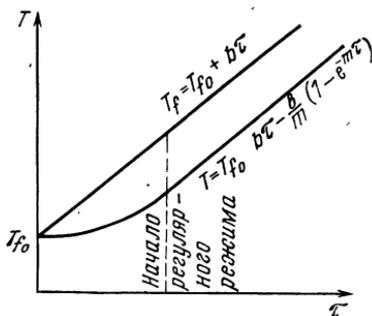


Рис. 6.15. К теории регулярного режима 2-го рода. Изменение температуры тела во времени при $Bi \ll 1$, $T_0 = T_{f0}$ и линейной зависимости температуры среды от времени

Решение этого линейного неоднородного уравнения 1-го порядка имеет вид

$$\theta = e^{-m\tau} \left(mb \int \tau e^{m\tau} d\tau + C_1 \right) = b\tau - \frac{b}{m} + C_1 e^{-m\tau}.$$

Если предположить, что в начальный момент времени температуры тела и среды были одинаковыми ($T_0 = T_{f0}$), то $\theta(\tau=0) = 0$ и постоянная интегрирования $C_1 = b/m$. Следовательно,

$$T - T_{f0} = b\tau - \frac{b}{m} (1 - e^{-m\tau}) = b\tau - \frac{bc_0V}{\alpha F} \left(1 - e^{-\frac{\alpha F}{c_0V} \tau} \right).$$

Второй член полученного решения при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине $bc_0V/(\alpha F)$, следовательно, температура тела по прошествии некоторого времени начинает изменяться по тому же линейному закону, что и температура среды, что свидетельствует о наступлении регулярного режима 2-го рода (рис. 6.15). Если критерий Bi не мал, то в теле также наступит регулярный режим, отличающийся от рассмотренного лишь тем, что каждой

точке тела будет соответствовать своя линейная зависимость, параллельная $T_f(\tau)$. В рассмотренном же примере они слились в одну вследствие малости критерия Bi . При конечном Bi поле температур в теле после установления регулярного режима 2-го рода может быть представлено в виде

$$T(x, y, z, \tau) = T_{f0} + b\tau + W(x, y, z),$$

где W — функция, не зависящая от времени. Таким образом, в этом случае поле температур становится квазистационарным, т. е. изменяются лишь значения температур, тогда как их профиль сохраняется.

Регулярный режим 3-го рода, как уже говорилось, наступает в теле, испытывающем периодическое тепловое воздействие. Такое воздействие обеспечивается, например, если температура омывающей тело среды (граничные условия 3-го рода) или самой поверхности тела (граничные условия 1-го рода) изменяется во времени по гармоническому закону.

Рассмотрим, как и ранее, случай малых Bi , что существенно упрощает математическую задачу. В этом случае уравнение баланса тепла можно записать в виде

$$\alpha F (T_{f0} + A \sin \omega \tau - T) = c_Q V \frac{dT}{d\tau}. \quad (6.42)$$

где T_{f0} — среднее значение температуры среды, вокруг которого она колеблется с амплитудой A ;
 ω — частота колебаний.

Таким образом, максимальная (минимальная) температура среды за период равна $T_{f0} \pm A$. Вводя обозначения $\theta = T - T_{f0}$ и $m = \alpha F / c_Q V$, уравнение (6.42) перепишем в виде

$$\theta' + m\theta = mA \sin \omega \tau.$$

решение которого имеет вид [64]

$$\theta = e^{-m\tau} \left[C + mA \frac{e^{m\tau}}{\sqrt{m^2 + \omega^2}} \sin(\omega\tau - \varphi) \right],$$

где $\varphi = \text{arctg}(\omega/m)$, а постоянную C легко определить, если положить, что начальная температура тела равнялась T_{f0} , т. е. $\theta(0) = 0$. В этом случае $C = m\omega A / (m^2 + \omega^2)$. Тогда

$$\theta = \frac{mA}{\sqrt{m^2 + \omega^2}} \sin(\omega\tau - \varphi) + \frac{m\omega A}{m^2 + \omega^2} e^{-m\tau}. \quad (6.43)$$

при $\tau \rightarrow \infty$ второй член выражения (6.43) стремится к нулю, а следовательно, тело вступает в регулярный режим 3-го рода, т. е. начинает изменять свою температуру во времени с той же частотой ω , что и температура окружающей среды, но с запаздыванием по фазе $\varphi = \text{arctg}(\omega/m)$ и амплитудой, меньшей A в $(m/\sqrt{m^2 + \omega^2})^{-1}$ раз.

Из последних выражений следует, что с ростом частоты ω сдвиг по фазе растет. В то же время уменьшение амплитуды колебаний температуры тела будет тем большим, чем выше частота. При очень низких частотах ($\omega \ll m$) тело будет изменять свою температуру с той же амплитудой, что и среда, а запаздывание по фазе будет отсутствовать.

Если не налагать условия малости критерия Bi , общая математическая задача заметно усложняется. Поэтому рассмотрим простейший пример такой задачи в другом предельном случае ($Bi \rightarrow \infty$). Найдем распределение температуры в полубесконечной среде, на поверхности которой температура изменяется по гармоническому закону (граничные условия 1-го рода):

$$T_w = T_{w0} + A \sin \omega \tau$$

или

$$\theta_w = T_w - T_{w0} = A \sin \omega \tau.$$

Поскольку среда полубесконечна и задача одномерна, дифференциальное уравнение Фурье — Кирхгофа имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

и его решение может быть найдено методом разделения переменных (см. разд. 6.2). Опуская подробности этой процедуры, приведем окончательный вид зависимости температуры от времени на глубине x от поверхности полупространства [155]:

$$\theta = A e^{-x \sqrt{\omega/2a}} \sin(\omega \tau - x \sqrt{\omega/2a}). \quad (6.44)$$

Видно, что температура всех точек тела колеблется с той же частотой, что и температура поверхности, однако амплитуда этих колебаний убывает по экспоненте с удалением от поверхности, вместе с которым увеличивается и запаздывание этих колебаний по фазе.

Существенно, что с ростом частоты ω растет запаздывание и быстрее затухает амплитуда.

В практике мы встречаемся с телами конечных размеров. Однако приведенное здесь решение для полубесконечного тела часто может быть использовано и в этих случаях благодаря быстрому затуханию амплитуды температурных волн с удалением от поверхности тела.

Примем, что температурной волной с амплитудой, равной kA ($k < 1$), можно пренебрегать, и найдем расстояние от поверхности x_k , где такое затухание (в $1/k$ раз) имеет место из равенства

$$kA = A e^{-x_k \sqrt{\omega/2a}}$$

получим

$$x_k = - \frac{\ln k}{\sqrt{\omega/2a}}. \quad (6.45)$$

С регулярным режимом 3-го рода встречаются при расчете суточных и годовых колебаний температуры Земли, сооружений, при рассмотрении тепловых режимов ИСЗ и во многих других практически важных задачах.

Существуют также экспериментальные методы определения теплофизических констант вещества, основанные на использовании регулярного теплового режима 3-го рода [92].

Пример. Лунный грунт на некотором участке поверхности имеет теплопроводность $a = 10^{-4}$ м²/ч. Максимальная температура поверхности достигает здесь 375 К, а минимальная — 170 К.

Найти амплитуду колебания температуры и ее запаздывание по времени на глубине 33 см.

Указание. Период колебаний принять равным 29,5 земных суток, а изменение температуры поверхности во времени — гармоническим.

Решение. Из выражения (6.44)

$$\theta_{\max} = A e^{-x \sqrt{\omega/2a}} = \frac{375 - 170}{2} \exp\left(-0,33 \sqrt{\frac{\pi}{29,5 \cdot 24 \cdot 10^{-4}}}\right) \approx \\ \approx 102 \cdot 0,109 \approx 11 \text{ К.}$$

Из уравнения (6.44) получается сдвиг по времени

$$\Delta\tau = \frac{x}{\sqrt{2a\omega}} = \frac{0,33}{\sqrt{2 \cdot 10^{-4} \frac{2\pi}{29,5 \cdot 24}}} \approx 10 \text{ суток.}$$

6.6. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕМНОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ

В гл. II было показано, что при наличии объемного тепловыделения уравнение теплопроводности в твердом теле имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + \frac{1}{c\rho} q_V,$$

где q_V — известная функция, характеризующая объемную плотность тепловыделения, т. е. количество тепла, выделяющееся в единице объема тела в единицу времени.

В общем случае q_V может быть функцией как координат, так и времени. Нестационарные задачи этого типа значительно сложнее рассмотренных ранее, поэтому в рамках этой главы мы продемонстрируем подход к их решению на простейшем примере пространственно одномерной задачи с однородными граничными условиями 1-го рода.

Математическая формулировка задачи о бесконечной пластине толщиной l при $\frac{q_V}{c\rho} = f(x, \tau)$ сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, \tau) \quad (6.46)$$

с начальным условием

$$T(x, 0) = 0$$

и граничными условиями

$$T(0, \tau) = 0; \quad T(l, \tau) = 0.$$

(Однородность начальных и граничных условий принята здесь для упрощения).

Пользуясь методом разделения переменных, будем искать решение в виде ряда Фурье по $\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$:

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n(\tau) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Для решения задачи нужно найти функции $t_n(\tau)$. Представим заданную функцию $f(x, \tau)$ также в виде ряда по $\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$:

$$f(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

где коэффициенты f_n определяются по известным соотношениям и равны

$$f_n(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, \tau) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi.$$

Подставляя предполагаемую форму решения в исходное уравнение задачи (6.46), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a t_n(\tau) + \frac{dt_n(\tau)}{d\tau} - f_n(\tau) \right] = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется, если все коэффициенты ряда, т. е. выражения в квадратных скобках, равны нулю

$$\frac{dt_n}{d\tau} = -a \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t_n(\tau) + f_n(\tau). \quad (6.47)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение для функций $f_n(\tau)$. Начальные условия для него найдем из начального условия исходной задачи

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n(0) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = 0.$$

Отсюда следует, что все

$$t_n(0) = 0.$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (6.47) с этим начальным условием имеет вид [64]

$$t_n(\tau) = \int_0^\tau e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a(\tau-\tau')} f_n(\tau) d\tau'.$$

Таким образом, решение исходной задачи представляется в виде ряда

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^\tau e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a(\tau-\tau')} f_n(\tau) d\tau' \right] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

или, подставляя сюда функции $f_n(\tau)$, в виде

$$T(x, \tau) = \int_0^\tau \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a(\tau-\tau')} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \right] \times \\ \times f(\xi, \tau') d\xi d\tau' = \int_0^\tau \int_0^l G(x, \xi, \tau-\tau') f(\xi, \tau') d\xi d\tau',$$

где

$$G(x, \xi, \tau-\tau') = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a(\tau-\tau')} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right)$$

совпадает с функцией источника (6.11), полученной нами в разд. 6.2.

В качестве примера мы рассмотрели неоднородное уравнение [с функцией $f(x, \tau)$ в правой части], но с однородными (нулевыми) начальными условиями. Если начальные условия отличны от нуля, то к полученному решению следует прибавить решение однородной задачи (без внутренних источников тепла) с заданными начальными условиями $T(x, 0) = \varphi(x)$, полученное нами в разд. 6.2. Что касается нулевых граничных условий, то к ним может быть сведена задача с $T(0, \tau) = T(l, \tau) = \text{const} \neq 0$ простой заменой переменной.

6.7. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ 4-ГО РОДА

В практике встречаются задачи, когда теплообмен тела с окружающей средой происходит не излучением или конвекцией (граничные условия соответственно 2-го и 3-го рода), а при помощи теплопроводности. Такой случай встречается, например, при теплообмене тела с очень вязкой жидкостью или в системе

тел, находящихся в тепловом контакте. Здесь для каждого из тел такой системы имеют место так называемые граничные условия 4-го рода, т. е. теплообмен между телом и окружающими его телами или средой происходит по закону Фурье. Эти условия, при идеальном тепловом контакте* соприкасающихся тел, требуют равенства температур обоих тел (или тела и среды) на поверхности контакта, а, кроме того, тепловые потоки в обоих телах у самой поверхности должны быть равны между собой. Математическая формулировка граничных условий 4-го рода имеет, таким образом, следующий вид:

$$T_1(0, \tau) = T_2(0, \tau);$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial n} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2(0, \tau)}{\partial n}, \quad (6.48)$$

где индекс 1 относится к телу, а 2 — к окружающей среде или примыкающему телу; граница раздела условно помещена в начале координаты n — нормали к поверхности контакта.

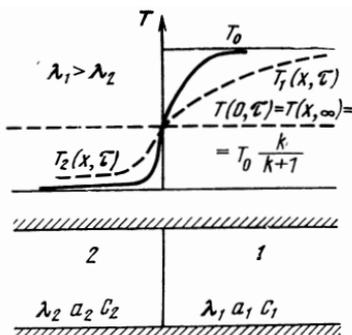


Рис. 6.16. Граничные условия 4-го рода при идеальном тепловом контакте

Для иллюстрации этого случая рассмотрим простую одномерную задачу. Пусть два полубесконечных тела, обладающих различными теплофизическими свойствами, приведены в момент времени $\tau=0$ в идеальный тепловой контакт по плоскости yz ($x=0$). Протяженность первого тела не ограничена по осям y и z и в положительном направлении оси x . Второе тело простирается до $\pm\infty$ по осям y и z и от 0 до $-\infty$ — по оси x (рис. 6.16).

Температура первого тела в начальный момент времени равна T_0 , а второго — нулю. Задача состоит в отыскании распределения температуры в телах в любой момент времени и формулируется следующим образом (рис. 6.16)**:

$$\frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0, x > 0);$$

* Подробно о контактном теплообмене см. гл. X

** Эта задача может быть интерпретирована и как задача о двух полубесконечных стержнях, контактирующих торцами и теплоизолированных по боковой поверхности.

$$\frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0, x < 0).$$

Начальные условия к этой системе уравнений

$$T_1(x, 0) = T_0; \quad T_2(x, 0) = 0;$$

граничные условия

$$T_1(0, \tau) = T_2(0, \tau); \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial T_2(0, \tau)}{\partial x}.$$

Эта задача, как и ранее рассмотренные, допускает аналитическое решение различными методами (разделением переменных, операционным и т. д.). Приведем здесь лишь окончательный вид этого решения [101]:

$$T_1(x, \tau) = T_0 \frac{K}{1+K} \left(1 + \frac{1}{K} \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_1\tau}} \right)_{(x>0)} \quad (6.49)$$

$$T_2(x, \tau) = T_0 \frac{K}{1+K} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_2\tau}} \right)_{(x<0)} \quad (6.50)$$

где

$$K = \frac{K_\lambda}{\sqrt{K_a}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 c_1 \rho_1}{\lambda_2 c_2 \rho_2}}; \quad K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad K_a = \frac{a_1}{a_2};$$

(величину K иногда называют отношением коэффициентов тепловой активности);

c_1 и c_2 — удельные теплоемкости первого и второго тел, соответственно;

$$\operatorname{erf} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi \text{ — интеграл вероятности Гаусса.}$$

На рис. (6.16) приведен характер зависимостей $t(x, \tau)$, описываемых этими решениями.

Устремляя $\tau \rightarrow \infty$, можно найти ту единую температуру, которая установится в обоих телах в стационарном состоянии. Так как $\operatorname{erf}(0) = 0$,

$$\text{то } T_1(x, \infty) = T_2(x, \infty) = T_0 \frac{K}{1+K}. \quad (6.51)$$

При $K=1$ (одинаковы тепловые активности тел) установится средняя арифметическая температура

$$T(x, \infty) = T_0/2.$$

Важно отметить, что на границе раздела ($x=0$) это равновесное значение температуры установится уже с самого начала процесса, т. е. в любой момент времени:

$$T_1(0, \tau) = T_2(0, \tau) = T(x, \infty) = T_0 \frac{K}{1+K}. \quad (6.52)$$

6.8. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЙ ПРОГРЕВ ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В ряде практических случаев, например, при прогреве уносимых теплозащитных покрытий, в области критического сечения сопел ракетных двигателей на поверхности твердого тела может устанавливаться температура, при которой происходит унос вещества. Материал либо оплавляется и затем испаряется или сносится потоком, либо переходит непосредственно из твердой фазы в газообразную (сублимирует). Возможны и более сложные механизмы уноса массы с поверхности (см. гл. XVIII). Во всех случаях граница тела со временем перемещается в системе координат, связанной с телом. Если скорость уноса, а следовательно, и скорость движения границы постоянна и равна v , то в теле устанавливается некое квазистационарное распределение температур, не зависящее от времени в подвижной системе пространственных координат, связанной с поверхностью тела.

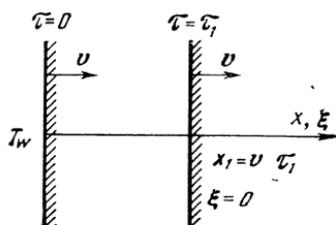


Рис. 6.17. К задаче о температурном поле в теле с подвижной границей; показаны положения границы в моменты времени $\tau=0$ и $\tau=\tau_1$

Рассмотрим такой процесс на простом примере одномерной задачи для полупространства. Пусть к начальному моменту ($\tau=0$) тело, располагавшееся в полупространстве $x \geq 0$ достигло у поверхности температуры $T_w = \text{const}$. До этого, очевидно, происходил обычный процесс нестационарного прогрева тела с постоянным положением границы. С этого момента начинается унос вещества с массовой скоростью $G \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Температура T_w может быть, например, температурой плавления или сублимации.

Если $G = \text{const}$, то скорость движения границы тела будет равна в м/с $v = G/\rho = \text{const}$, где ρ — массовая плотность вещества в $\text{кг}/\text{м}^3$. Следовательно, по прошествии времени τ_1 (рис. 6.17) граница тела переместится из положения $x=0$ в положение $x_1 = v\tau_1$ и т. д. Распределение температур для произвольного момента времени $\tau > 0$ в этом случае, как и обычно, определяется уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (6.53)$$

а начальное распределение температур задается решением задачи о прогреве тела с неподвижной границей до достижения по-

верхностью $x=0$ температуры T_w . При этом $T(x \rightarrow \infty) = T_0$ и, начиная с $\tau=0$, $T(x^*, \tau) = T_w$, где $x^* = v\tau$. Задача существенно упрощается, если ввести систему координат, начало которой всегда находится на поверхности тела.

Пусть $\xi = x - v\tau$, а отсчет времени в новой и старой системах совпадает. Тогда после замены переменных (6.53) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dT}{d\xi} = -\frac{a}{v} \frac{d^2T}{d\xi^2}, \quad (6.54)$$

для которого $T(0) = T_w$, $T(\infty) = T_0$. (6.55)
Решение уравнения (6.54) имеет вид

$$T(\xi) = -C_1 \frac{a}{v} e^{-\frac{v}{a} \xi} + C_2.$$

Из второго условия (6.55) $C_2 = T_0$, а из первого находим

$$C_1 = \frac{(T_0 - T_w) v}{a}.$$

Таким образом избыточная относительная температура в полупространстве справа от поверхности $x = v\tau$ равна

$$\frac{T(\xi) - T_0}{T_w - T_0} = e^{-\frac{v}{a} \xi}, \quad (6.56)$$

т. е. не зависит от времени в системе координат, движущейся вместе с поверхностью тела. В исходной же системе координат (x, τ) это распределение получим переходом от ξ к x, τ в выражении (6.56), учитывая, что $\xi = x - v\tau$.

Рекомендуемая литература:

основная: [59, 65, 66, 101];

дополнительная: [39, 42, 64, 85, 86, 92, 118, 120, 127, 150, 155].

ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ И КОНДЕНСАЦИИ

Теплообменные процессы, сопровождающиеся кипением и конденсацией, широко распространены в технике. Они встречаются во многих типах энергетических установок летательных аппаратов, в системах кондиционирования воздуха в кабинах, при термостатировании баков, отсеков с аппаратурой и отдельных приборов. Применение криогенных топлив для двигателей летательных аппаратов также сопряжено с большим разнообразием теплообменных процессов с кипением и конденсацией в области низких температур.

Несмотря на достаточно широкое распространение этих процессов наши знания о них и умение их надежно рассчитывать в ряде случаев еще существенно отстают от современных требований. Это объясняется большой сложностью рассматриваемых процессов, состоящей в многообразии способов, при которых происходит фазовое превращение.

7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для лучшего понимания процессов кипения и конденсации рассмотрим их некоторые термодинамические особенности.

На рис. 7.1 построено в безразмерных координатах уравнение состояния $\pi = f(\varphi, \tau)$, которое называется приведенным. Здесь $\pi = p/p_{кр}$, $\varphi = v/v_{кр}$ и $\tau = T/T_{кр}$, где $p_{кр}$, $v_{кр}$ и $T_{кр}$ — соответственно давление, удельный объем и температура в критической точке. В термодинамике установлено, что вещества с близкими в критической точке значениями комплекса $N = RT_{кр}/(p_{кр}v_{кр})$ (N — называется критическим коэффициентом) описываются одинаковыми приведенными уравнениями. Такие вещества называются термодинамически подобными, а их состояния с одинаковыми значениями любых двух приведенных параметров — соответственными состояниями.

Из табл. 7.1 видно, что, в частности, криогенные жидкости имеют близкие значения критического коэффициента N . Они относятся к термодинамически подобным веществам.

Термодинамическое подобие следует учитывать при обобщении экспериментальных данных по теплообменным процессам с фазовыми переходами.

Рассмотрим процесс нагрева жидкости при постоянном приведенном давлении π_1 (линия 1—6). Жидкость в точке 1, имеющая температуру ниже температуры насыщения при данном давлении, называется недогретой жидкостью, а разность $T_s - T$, где T_s — температура насыщения, называется недогре-

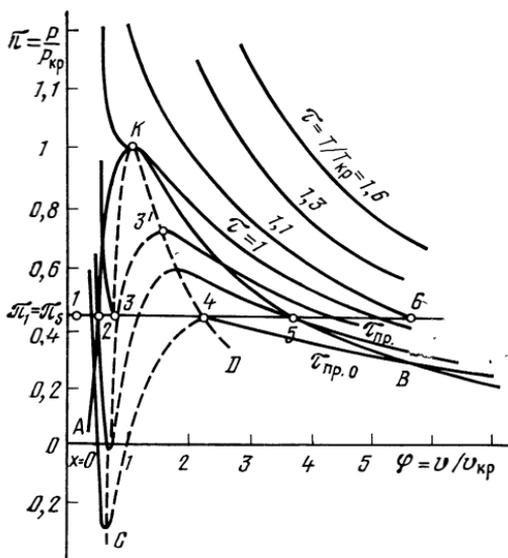


Рис. 7.1. Графическое представление приведенного уравнения состояния

Таблица 7.1

Критические параметры некоторых веществ

Вещество	$T_{кр}$, К	$p_{кр}$, МПа	$\rho_{кр}$, кг/м ³	$N = \frac{RT_{кр}\rho_{кр}}{p_{кр}}$
Азот	126	3,28	311	3,54
Аммиак	405,5	10,93	235	4,21
Аргон	150,7	4,71	531	3,49
Вода	647,3	22,13	307	4,13
Водород	33,2	1,25	31	3,35
Гелий	5,2	0,225	69,3	3,35
Кислород	154,3	4,87	430	3,34
Фреон-12	384,7	3,9		3,7
Фреон-13	487,3	3,3		3,7

в ом ж и д к о с т и. Жидкость в точке 2, лежащей на линии насыщения ($\tau = \tau_s$ и $T = T_s$) называется насыщенной жидкостью при данном давлении ($\pi_1 = \pi_s$). Процесс 2—5 от нижней пограничной кривой (точка 2) до верхней пограничной кривой (точка 5), происходящий при постоянной температуре равной T_s , представляет собой испарение со свободной поверхности жидкости. Как известно, пар при температуре T_s называется насыщенным, а при температуре выше (например, точка б) — перегретым, а разность $T - T_s$ называется перегревом пара. Таким образом, в процессе испарения со свободной поверхности жидкости температура ее остается постоянной и равной T_s . Поэтому изотерма $\tau_s = \text{const}$ между точками 2 и 5 совпадает с изобарой $\pi_1 = \text{const}$.

Если процесс происходит равновесно, то каждой точке на участке 2—5 соответствует определенное значение массового паросодержания x , равного отношению массы вновь образовавшегося пара $M_{\text{п}}$ к первоначальной массе жидкости $M_{\text{ж0}} = M_{\text{ж}} + M_{\text{п}}$. Очевидно, что в точке 2 $x = 0$, а в точке 5 $x = 1$. Пар между точками 2 и 5 (при $0 < x < 1$) называется влажным насыщенным паром. Процесс конденсации, т. е. превращения пара в жидкость будет идти в обратном направлении: от точки 5 к точке 2.

Однако все реальные процессы протекают термодинамически неравновесно. В частности, при испарении, чтобы обеспечить теплоподвод к поверхности раздела фаз, необходимо создать градиент температуры по нормали к поверхности жидкости, тем больший, чем интенсивней процесс парообразования.

Если подвод тепла к поверхности раздела фаз осуществляется через жидкость, то для создания градиента температур жидкость должна быть на некотором удалении от поверхности раздела фаз перегрета до температуры $T_{\text{ж}} > T_s$. Такая жидкость называется перегретой, а разность $T_{\text{ж}} - T_s$ называется перегревом жидкости.

Жидкость в перегретом состоянии может существовать лишь вдали от поверхности раздела фаз. Такое состояние возможно только для неравновесных процессов; оно называется метастабильным. Ему соответствуют область $A-K-C$, а при $\pi_1 = \text{const}$ — линия 2—3. При перемещении по изобаре от точки 2 к точке 3 будут пересекаться изотермы ($\tau = \text{const}$) со все большим значением τ . Температура, соответствующая точке 3, называется предельной температурой перегрева жидкости $T_{\text{пр}}$ или $\tau_{\text{пр}}$ (для приведенного давления π_1). При достижении $T_{\text{пр}}$ для данного давления жидкость неизбежно спонтанно вскипает по всему объему. Термодинамически это объясняется невозможностью существования участков изотерм 3—3' с $(\partial p / \partial v)_T > 0$. Для равновесного существования парового пузыря в жидкости давление в нем $p_{\text{п}}$ из-за поверхностного натяжения должно быть выше, чем в окружающей его жидкости $p_{\text{ж}}$. По

уравнению Лапласа

$$p_{\text{н}} - p_{\text{ж}} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности раздела;
 σ — поверхностное натяжение.

Для сферического пузыря радиуса R перепад давлений на границе раздела

$$\Delta p_{\text{гр}} = p_{\text{н}} - p_{\text{ж}} = \frac{2\sigma}{R}. \quad (7.1)$$

Кроме того, кривизна поверхности раздела влечет дополнительное увеличение температуры насыщения по сравнению с T_s при давлении пара $p_{\text{н}}$ для плоской поверхности на величину, эквивалентную приращению давления на

$$\Delta p_{\text{ж}} = \frac{Q_{\text{н}}}{Q_{\text{ж}} - Q_{\text{н}}} \Delta p_{\text{гр}}. \quad (7.2)$$

Тогда температуру насыщения на границе раздела фаз пузыря можно найти по зависимости $T_s = T_s(p_s)$ для данной жидкости при давлении $p_{\text{ж}} + \Delta p_{\text{гр}} + \Delta p_{\text{ж}}$ или приближенно с учетом уравнений (7.1) и (7.2):

$$\begin{aligned} T_s(p_{\text{ж}} + \Delta p_{\text{гр}} + \Delta p_{\text{ж}}) &= T_s(p_{\text{ж}}) + \frac{dT_s}{dp_s} (\Delta p_{\text{гр}} + \Delta p_{\text{ж}}) = \\ &= T_s(p_{\text{ж}}) + \frac{dT_s}{dp_s} \frac{2\sigma Q_{\text{ж}}}{R(Q_{\text{ж}} - Q_{\text{н}})}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

По уравнению Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dT_s}{dp_s} = \frac{T_s(Q_{\text{ж}} - Q_{\text{н}})}{r Q_{\text{ж}} Q_{\text{н}}}. \quad (7.4)$$

Тогда из уравнений (7.3) и (7.4) минимальный радиус равновесного пузыря, соответствующий данному перегреву жидкости, будет

$$R_{\text{min}} = \frac{2\sigma Q_{\text{ж}}}{\Delta T (Q_{\text{ж}} - Q_{\text{н}})} \frac{dT_s}{dp_s} = \frac{2T_s(p_{\text{ж}}) \sigma}{r Q_{\text{н}} \Delta T}, \quad (7.5)$$

где $\Delta T = T_{\text{ж}} - T_s$ — перегрев жидкости. При предельном перегреве жидкости $T_{\text{гр}} - T_s(p_{\text{ж}})$ радиус непрерывно спонтанно возникающих паровых областей имеет порядок R_{min} по уравнению (7.5) при $\Delta T = T_{\text{гр}} - T_s$. Если при заданном перегреве ΔT $R < R_{\text{min}}$, то возникающий пузырь захлопнется; если $R > R_{\text{min}}$, он будет расти за счет испарения в него окружающей жидкости. Такой пузырь называется зародышем пара.

На основании молекулярно-кинетической теории частота образования зародышей пара z в единице объема при данной температуре $T_{ж}$ может быть подсчитана по формуле Деринга-Фольгера:

$$z = \frac{Q_{ж}}{m} \sqrt{\frac{6\sigma}{(2 + p/p_s) \pi m}} \exp \left[-\frac{m r}{k T_{ж}} - \frac{16 \pi \sigma^3}{3 k T_{ж} (p_s - p)^2} \right]. \quad (7.6)$$

Здесь $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана;
 $m = 1,66 \cdot 10^{-27}$ М — масса молекулы в кг, где
 М — молекулярная масса.

При приближении температуры жидкости к $T_{пр}$ частота спонтанного образования зародышей резко возрастает, а время τ существования жидкости в объеме V в перегретом состоянии $\tau = 1/(zV)$ падает.

Эксперименты В. П. Скрипова и других показали хорошее совпадение $T_{пр}$ с расчетом по уравнению (7.6) при $z = 10^{37}$ $1/(M^3 \cdot c)$.

На рис. 7.2 в безразмерных термодинамических координатах представлены расчетная зависимость $T_{пр}$ от давления и экспериментальная для ряда термодинамически подобных жидкостей. Как видим, для термо-

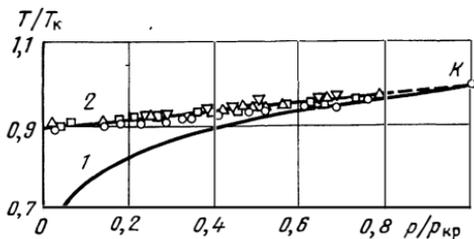


Рис. 7.2. Зависимость приведенных температур предельного перегрева и насыщения термодинамически подобных жидкостей от приведенного давления: 1—линия насыщения T_1 ; 2—расчет $T_{пр}$ по уравнению (7.6); \circ —Н-пентан; \triangle —Н-гексан; \square —Н-гептан; ∇ —этиловый эфир

динамически подобных жидкостей от p/p_K совпадают.

Процесс, при котором паровая фаза возникает внутри жидкости или на греющих стенках, в отличие от испарения называется кипением.

Аналогичный анализ позволяет объяснить существование метастабильной области $B-K-D$ на рис. 7.1. Пар в этой области называется переохлажденным паром. Температура $T_{пр0}$, соответствующая изотерме $\tau = \tau_{пр0} = \text{const}$, которая касается изобары $\pi_1 = \text{const}$ в точке 4 и называется предельной температурой переохлаждения пара для приведенного давления π_1 . При этой температуре вероятность спонтанного образования капель с радиусом порядка равновесного R_{min} будет близка к единице. Следовательно, переохлаждение пара $T_s - T_{пр0}$ будет с учетом кривизны и других эффектов обеспечивать конденсацию на каплях жидкости $R > R_{min}$, которые в большом количестве образуются при $T_{пр0}$. Такая конденсация будет происходить по всему объему пара с большой скоростью, пока выделившееся при конденсации тепло не нагреет пар и жидкость до T_s .

Опыт показывает, что в подавляющем большинстве случаев конденсация возникает при переохлаждениях, много меньших предельного. Аналогично кипение возникает при перегревах жидкости, намного меньших предельного, т. е. меньших $T_{пр}-T_s$. Так, на греющей поверхности в воде при атмосферном давлении кипение начинается при перегревах $T_{ж}-T_s$ порядка 16—17 К, тогда как для этого давления $T_{пр}-T_s=202$ К. Для перегрева в 16—17 К формула (7.5) дает $R_{min} \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$ мм, что примерно в 10^4 раза больше радиуса спонтанных зародышей, возникающих при предельном перегреве жидкости.

Это объясняется тем, что в реальных условиях помимо спонтанного возникновения паровых зародышей в толще жидкости существуют и другие возможности их возникновения, требующие меньшего перегрева (образование пузырей на твердой стенке, наличие примесей других газов в жидкости).

7.2. РОСТ ПАРОВЫХ ПУЗЫРЕЙ В БОЛЬШОМ ОБЪЕМЕ ЧИСТОЙ ПЕРЕГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ

Процесс образования и роста паровых пузырей в большом объеме жидкости представляет довольно сложное явление и определяется взаимодействием таких факторов, как инерционное и вязкое сопротивления жидкости росту пузыря и возможности подвода тепла к поверхности пузыря в количестве, обеспечивающем испарение жидкости.

Так как обычно процесс роста пузыря лимитируется каким-то одним из этих факторов, то для наглядности целесообразно рассмотреть предельные схемы роста пузыря. В этих схемах поочередно рассматриваются влияние лишь одного из факторов в предположении, что остальные отсутствуют.

На рис. 7.3 даны распределения температуры и давления по радиусу в пузыре и окружающей его жидкости для каждой из этих схем.

Если подвод тепла для испарения при $T_s=T_\infty$ обеспечен, а скорость расширения ограничена только инерционными силами со стороны жидкости (рис. 7.3, а), то решение задачи имеет вид

$$\frac{dR}{d\tau} = \dot{R}(\tau) = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\Delta p}{\rho_{ж}}},$$

что при $\Delta p/\rho_{ж} = \text{const}$ дает после интегрирования

$$R(\tau) = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\Delta p}{\rho_{ж}}} \tau, \quad (7.7)$$

где

$$\Delta p = p_s(T_\infty) - p_\infty.$$

Учитывая сопротивление расширения пузыря только в силу вязкости жидкости (рис. 7.3, б), получим $\dot{R}(\tau) = \frac{\Delta p}{4\mu_{ж}} R(\tau)$ или при $\Delta p/\mu_{ж} = \text{const}$

$$R(\tau) = \exp \frac{\Delta p \tau}{4\mu_{ж}}. \quad (7.8)$$

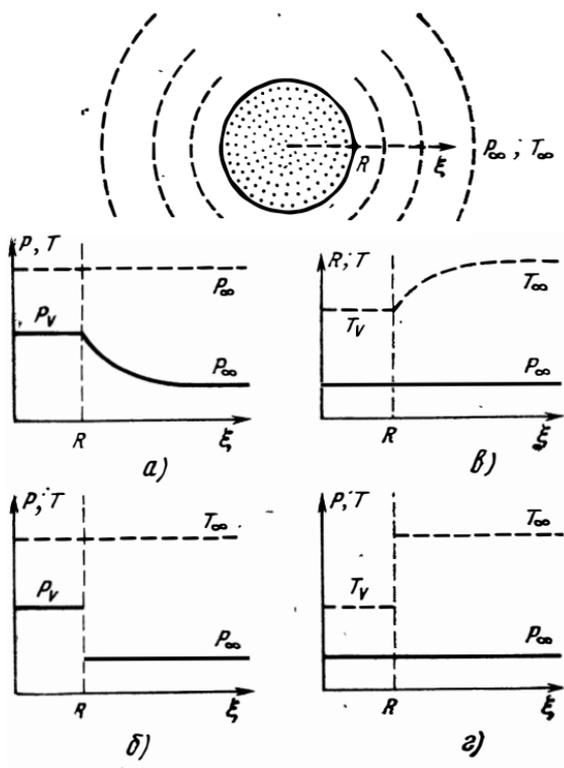


Рис. 7.3. Распределения давления и температуры в предельных схемах роста сферического пузыря в большом объеме перегретой жидкости:

$$p_V = p_s(T_\infty), \quad T_V = T_p(p_\infty)$$

В случае, когда скорость роста пузыря ограничена только скоростью испарения жидкости в него, т. е. возможностями подвода тепла к межфазной границе путем теплопроводности от внешних перегретых слоев жидкости (рис. 7.3, в), численное решение уравнения теплового баланса может быть аппроксимировано в виде

$$R(\tau) = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi} a_{ж} \tau J_{ж} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6 J_{ж}} \right)^{2/3} + \frac{\pi}{6 J_{ж}} \right]^{1/2}}, \quad (7.9)$$

где $J_{ж} = \frac{c_{ж} Q_{ж} \Delta T}{r Q_{II}}$ — число Якоба, или безразмерный перегрев жидкости;

$$\Delta T = T_\infty - T_s(p_\infty).$$

В предельных случаях это решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} J_{\text{ж}} \gg 1 \quad R(\tau) &= 2 J_{\text{ж}} \sqrt{\frac{3}{\pi} a_{\text{ж}} \tau}; \\ J_{\text{ж}} \ll 1 \quad R(\tau) &= \sqrt{2 J_{\text{ж}} a_{\text{ж}} \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Если весь перегрев жидкости срабатывается на преодоление межфазного сопротивления (рис. 7.3, з), то на основе молекулярно-кинетической теории можно получить

$$\dot{R}(\tau) = \frac{\beta}{1 - 0,399\beta} \frac{\Delta p}{\rho_{\text{л}} \sqrt{2\pi R T}}. \quad (7.11)$$

Здесь R — газовая постоянная;

β — коэффициент испарения (или конденсации $\beta_{\text{к}}$), иногда называемый коэффициентом аккомодации.

При испарении β является отношением числа молекул, действительно покинувших жидкость, к числу молекул, подошедших к границе раздела фаз с избыточной составляющей скорости. В реальных условиях рост пузыря определяется одновременным влиянием всех рассмотренных факторов, но реальная скорость роста всегда будет меньше (или в пределе равна) наименьшей из величин, определяемых этими предельными соотношениями.

Сопоставление этих предельных оценок с экспериментом указывает на преобладающее влияние инерционных сил жидкости (см. рис. 7.3, а) в области малых размеров пузыря и при низких давлениях. При больших размерах пузыря, а также при больших давлениях определяющей является энергетическая схема (см. рис. 7.3, в). Влияние вязкости может проявиться лишь при больших ее значениях в начальный период роста пузыря. Молекулярно-кинетическая схема (см. рис. 7.3, з) может стать определяющей при очень низких значениях коэффициента испарения β .

7.3. РОСТ ПАРОВЫХ ПУЗЫРЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ НАГРЕВА ПРИ КИПЕНИИ

Временем роста парового пузыря $\tau_{\text{р}}$ считают время от момента активации парового зародыша до отрыва парового пузыря от стенки. Затем в течение некоторого времени $\tau_{\text{в}}$, называемого временем выжидания, происходит восстановление перегрева жидкости около стенки, необходимого для новой активации парового зародыша.

В настоящее время еще нет единой точки зрения на механизм теплообменных процессов, определяющих рост паровых пузырей на стенке, однако уже накопленные опытные данные позволяют следующим образом описать этот механизм.

При отрыве паровой пузырь увлекает за собой слой перегретой жидкости, и стенка в районе центра парообразования приходит в контакт с холодной жидкостью. При этом температура стенки и жидкости в месте их контакта (на границе) примет некоторое промежуточное значение $T_{гр}$ между начальными температурами жидкости $T_{ж0}$ и стенки T_{w0} .

Из решения одномерной задачи нестационарной теплопроводности для полубесконечных слоев жидкости и стенки найдем

$$\frac{T_{гр} - T_{ж0}}{T_{w0} - T_{ж0}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{(\rho c \lambda)_{ж}}{(\rho c \lambda)_{w}}}} \quad (7.12)$$

Слой жидкости и стенку можно считать полубесконечными, если за рассматриваемое время контакта τ_k их толщины $\delta_{ж}$ и δ_w таковы, что критерий $Fo = \frac{a_{ж} \tau_k}{\delta_{ж}^2} < 0,25$ и $Fo = \frac{a_w \tau_k}{\delta_w^2} < 0,25$.

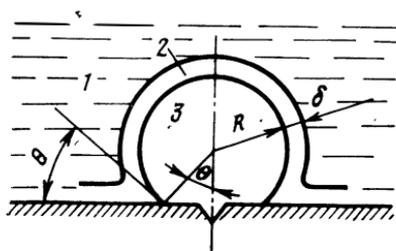


Рис. 7.4. Упрощенная схема роста парового пузыря на стенке с испарением из перегретого наружного слоя жидкости:

1—жидкость; 2—слой перегретой жидкости; 3—пар

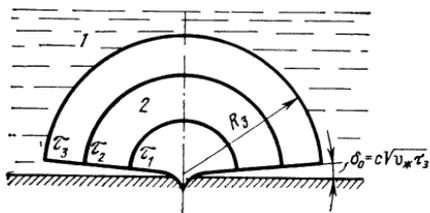


Рис. 7.5. Схема роста полусферического пузыря с испарением из микрослоя жидкости на стенке ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$):

1—жидкость; 2—пар

Однако за счет подвода тепла от соседних участков стенки или тепловыделения в ней температура стенки и прилегающей к ней жидкости будет расти в течение времени выжидания. За это время прогревается слой жидкости толщиной $\delta = \sqrt{\pi a_{ж} \tau_{в}}$, и снова восстановятся условия, необходимые для активации центра парообразования.

Зародившийся паровой пузырь отталкивает от стенки перегретый слой жидкости и растет в его окружении. В период роста пузыря тепловой поток для испарения жидкости может подводиться следующими путями.

1. В силу нестационарного подвода тепла от перегретых слоев жидкости и, окружающих паровой пузырь с внешней по отношению к стенке стороны (рис. 7.4).

2. В силу нестационарного охлаждения перегретого слоя жидкости, расположенного между поверхностью пузыря и стенкой (если этот слой достаточно толстый, см. рис. 7.7).

3. Теплопроводностью через тонкий слой жидкости, отделяющий пузырь от стенки (рис. 7.5), в силу нестационарного охлаждения стенки под пузырем.

В действительности могут реализовываться все три способа подвода тепла сразу, но чаще какой-либо из них преобладает. Так, при малых давлениях в жидкости из-за малой плотности пара пузырь растет быстро и под действием инерционных сил деформируется из сферического в полусферический, как показано на рис. 7.5. В этом случае преобладающим является третий путь подвода тепла, который дополняется первым. Тогда зависимость радиуса полусферического пузыря от времени можно представить уравнением Коппе и Виджика:

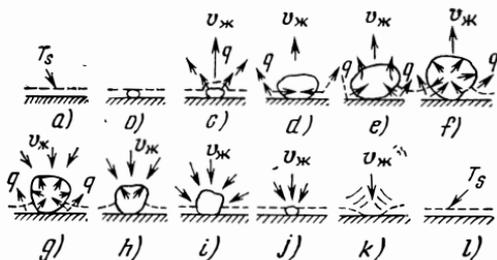
$$R = \frac{J_W \sqrt{a_{ж} \tau}}{\frac{0,8 \sqrt{Pr_{ж}}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\frac{(qc\lambda)_{ж}}{(qc\lambda)_W} \right]^{1/2}} + 2 \sqrt{\frac{3}{\pi}} J_{ж} \sqrt{a_{ж} \tau}.$$

Здесь

$$J_W = \frac{q_{ж} (c_p)_{ж} (T_{W0} - T_s)}{q_{н} r_s}; \quad J_{ж} = \frac{q_{ж} (c_p)_{ж} (T_{ж0} - T_s)}{q_{н} r_s};$$

T_{W0} и $T_{ж0}$ — начальные температуры стенки и жидкости. Первое слагаемое — вклад от испарения микрослоя под пузырем

Рис. 7.6. Схема роста и исчезновения парового пузыря на поверхности нагрева в недогретой жидкости



рем (3-й путь подвода тепла), а второе слагаемое — от охлаждения перегретой жидкости на внешней поверхности пузыря (1-й путь).

При увеличении давления скорость роста пузырьков существенно падает, так как растет плотность пара в них и снижается влияние инерционных сил. Пузыри все время сохраняют сферическую форму. В этом случае подвод тепла к ним на испарение осуществляется, главным образом, первыми двумя путями. А тепло на перегрев жидкости, в основном, отбирается от стенки путем ее охлаждения в период выжидания после отрыва пузыря.

Если жидкость, в которой происходит кипение, в целом не догрета до температуры насыщения, то в процессе роста пузыря его внешняя поверхность со временем попадает в недогретые

слои жидкости, и тогда на внешней, «холодной», границе пузыря будет происходить конденсация пара. Это может привести к уменьшению и захлопыванию пузыря после его отрыва или даже до отрыва. Схема такого процесса изображена на рис. 7.6, где $v_{ж}$ — скорость жидкости около пузыря; q — тепловой поток; T_s — температура насыщения.

7.4 ДИАМЕТР ПАРОВЫХ ПУЗЫРЕЙ ПРИ ОТРЫВЕ ОТ СТЕНКИ И ЧАСТОТА ИХ ОТРЫВА

В ряде работ для определения отрывного диаметра пузырька, растущего на поверхности, выписываются условия равновесия сил, действующих на пузырь (или части из них): архимедова сила; сила сцепления с поверхностью из-за поверхностного натяжения; сила инерции со стороны жидкости; сила лобового сопротивления и т. д. Из условия равновесия всех этих сил находят отрывной диаметр пузыря. Это удается сделать в силу приближенного характера выражений для перечисленных сил.

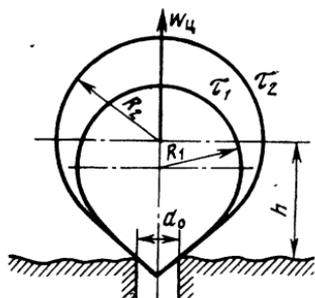


Рис. 7.7 Схема роста сферического парового пузыря на стенке

Д. А. Лубенцов показал, что такой подход ошибочен, так как согласно принципу Даламбера сумма всех сил, действующих на пузырь, включая силы инерции, должна равняться нулю в течение всего периода его роста. Поэтому он предложил две предельных оценки отрывного диаметра пузыря.

1. При больших давлениях, когда динамические эффекты малосущественны, следует использовать аналогию с отрывом газового пузыря, медленно вдуваемого в жидкость через отверстие диаметром d_0 (рис. 7.7).

По данным опытов для вдува газа отрывной диаметр пузыря

$$D_0 = K \sqrt[3]{\frac{\sigma d_0}{g(\rho_{ж} - \rho_{п})}}$$

Здесь коэффициент пропорциональности K немного меньше единицы, а d_0 — расстояние между шероховатостями порядка нескольких микрон.

2. При очень малых давлениях определяющим является инерционная реакция жидкости. Тогда баланс сил инерции и подъемных

$$\frac{d}{dt}(m w_{ц}) = g(\rho_{ж} - \rho_{п})V(\tau).$$

Здесь $m = \rho_{\text{ж}} V/2$ — мгновенная присоединенная масса жидкости;

$V(\tau)$ — переменный во времени объем сферического пузыря;

$\omega_{\text{ц}} = dh/d\tau$ — скорость перемещения центра пузыря, где h — высота центра пузыря.

Полагая $R \sim \tau^n$ и $\epsilon_{\text{н}} \ll \rho_{\text{ж}}$, получим

$$\frac{d}{d\tau} \left(\tau^{3n} \frac{dh}{d\tau} \right) = 2g\tau^{3n}.$$

Решая это уравнение, находим

$$h(\tau) = \frac{g\tau^2}{1 + 3n}.$$

Принимая в момент отрыва τ_0 условие

$$h(\tau_0) = R_0 = D_0/2$$

и полагая $n = 1/2$, находим

$$R_0 = 0,4g\tau_0^2.$$

Экспериментальные данные ряда авторов лучше согласуются с этим уравнением, если вместо 0,4 принять коэффициент 0,6.

Частота отрыва паровых пузырей зависит от многих факторов. К ним относятся: 1) нестационарные процессы теплообмена между жидкостью и стенкой в период ожидания; 2) нестационарные гидродинамические и тепловые процессы при росте пузыря; 3) процессы, определяющие существование паровых зародышей (угол смачивания, материал и качество обработки поверхности и т. д.); 4) гидродинамическое и тепловое взаимодействие соседних центров парообразования; 5) гидродинамические и тепловые процессы в объеме жидкости и ее потоке и т. п.

Частота отрыва $\omega = 1/(\tau_0 + \tau_{\text{в}})$ носит статистический характер и имеет закон распределения, близкий к нормальному. Экспериментальные исследования*, выполненные на воде, показали, что ω практически не зависит от теплового потока и слабо зависит от давления (при давлении 0,1—2,0 МПа среднее значение ω — 35 Гц, а при 5,2 МПа — около 45 Гц). Однако при пониженных давлениях (10—50 кПа для воды) частота отрыва существенно снижается (до 1—20 Гц) и заметно растет с ростом теплового потока.

При кипении щелочных металлов ω значительно меньше, чем на воде при одинаковых q и $p/p_{\text{кр}}$, очевидно, из-за большего значения $(\rho c \lambda)_{\text{ж}}/(\rho c \lambda)_{\text{в}}$. С увеличением теплового потока, а точнее,

* Мамонтова Н. Н. Изучение механизма кипения при больших тепловых потоках посредством кино съемки. ПМТФ, 1963, № 3, с. 135—137.

с увеличением $T_w - T_s$, возникают условия для активации новых центров парообразования и, следовательно, их число растет.

7.5. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ПУЗЫРЬКОВОМ КИПЕНИИ В БОЛЬШОМ ОБЪЕМЕ

Процесс пузырькового кипения определяется сложным взаимодействием нестационарных процессов роста, отрыва и всплытия паровых пузырей, теплоотдачи свободной и вынужденной конвекцией от стенок к жидкости, нестационарной теплопроводности в зоне центров парообразования и т. п.

Не все эти процессы достаточно хорошо изучены, даже для отдельного пузыря. Еще менее изучено их взаимодействие при одновременном росте большого числа паровых пузырей. Поэтому построение расчетных зависимостей опирается, главным образом, на представление о физическом механизме процесса, на методы подобия и эксперимент. Существуют различные способы построения эмпирических зависимостей.

Способ, предложенный С. С. Кутателадзе [85], основан на предположении, что весь сложный процесс пузырькового кипения описывается в конечном итоге теми же уравнениями, что и для системы с одной непрерывной поверхностью раздела. Поэтому критерии подобия могут выводиться из этих уравнений для всего процесса пузырькового кипения. Дополнительно необходимо лишь ввести уравнения или параметры, определяющие размеры паровых пузырей и вероятность их распределения в пространстве.

С. С. Кутателадзе исходит из того, что сначала все тепло от стенки передается жидкости, а затем, в процессе испарения, в паровые пузыри. Поэтому предполагается, что решающее значение имеют условия распространения тепла в жидкой фазе.

В систему уравнений С. С. Кутателадзе включает:

- уравнения энергии, движения и неразрывности для несжимаемой жидкой фазы;
- уравнения движения и неразрывности для несжимаемого пара;
- условия теплового взаимодействия на границе раздела фаз (индекс s):

$$-\lambda_{ж} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = r Q_{п} u_{пn}; \quad (7.13)$$

$$T_s = T_{п} + \frac{T_{п}(Q_{ж} - Q_{п})}{r Q_{ж} Q_{п}} \left[\frac{2\sigma Q_{ж}}{R(Q_{ж} - Q_{п})} - \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s \sqrt{\frac{2\pi p}{Q_{п}}} \right], \quad (7.14)$$

в которых уравнение (7.13) представляет собой равенство тепловых потоков по обе стороны границы раздела фаз, где $u_{пn}$ — скорость пара по нормали \vec{n} к поверхности раздела, а уравнение (7.14) определяет температуру насыщения на границе с учетом кривизны поверхности R и кинетики испарения;

- условия механического воздействия на границе раздела фаз:

$$\mu_n \left(\frac{\partial u_{п}}{\partial n} \right)_s = \mu_{ж} \left(\frac{\partial u_{ж}}{\partial n} \right)_s;$$

$$p_{sn} = p_{sj} + \frac{2\sigma}{R}; \quad \vec{u}_{пs} = \vec{u}_{js},$$

где $u_{пs}$, u_{js} — скорости пара и жидкости на границе раздела;

д) масштаб для отрывного радиуса пузырей R_0

$$R_0 \sqrt{g \frac{Q_{ж} - Q_{п}}{\sigma}} = f \left(\theta, \frac{u_{ж}^2}{gl_0}, \dots \right);$$

е) величину микрошероховатости δ_i и ее распределение по размерам n_i по поверхности и т. п.; тогда, пренебрегая влиянием вязкости пара, С. С. Кутателадзе получает при заданном $\Delta T = T_w - T_s$

$$Nu = f_1 \left\{ Pr_{ж}, \frac{g}{v_{ж}^2} \left[\frac{\sigma}{g(Q_{ж} - Q_{п})} \right]^{3/2}, \left(1 - \frac{Q_{п}}{Q_{ж}} \right), \frac{\sigma}{g(Q_{ж} - Q_{п}) l_0^2}, \frac{u_{ж0} l_0}{v_{ж}}, \theta_1, \frac{r Q_{п}}{c_{ж} \Delta T Q_{ж}}, K_t, K_p, \delta_i \sqrt{\frac{g(Q_{ж} - Q_{п})}{\sigma}}, n_i \dots \right\}. \quad (7.15)$$

При задании плотности теплового потока q_w на стенке в уравнении (7.15)

вместо параметра $\frac{r Q_{п}}{c_{ж} \Delta T Q_{ж}}$ войдет $\frac{q_w}{r Q_{п} a_{ж}} \sqrt{\frac{\sigma}{g(Q_{ж} - Q_{п})}} = Re_*$

В уравнении (7.15)

$$K_t = \frac{(r Q_{п})^2}{c_{ж} T_{п} Q_{ж} \sqrt{g \sigma (Q_{ж} - Q_{п})}};$$

$$K_p = \frac{p}{\sqrt{g \sigma (Q_{ж} - Q_{п})}};$$

$w_{0ж}$ — характерная скорость жидкости;

θ — угол смачивания;

l_0 — характерный размер;

r — теплота парообразования.

В большом объеме обычно принимают

$$l_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{g(Q_{ж} - Q_{п})}}.$$

Здесь

$$Nu = \frac{\alpha l_0}{\lambda_{ж}}; \quad \alpha = \frac{q_w}{T_w - T_s}.$$

Ряд авторов строит расчетные уравнения из различных упрощенных, но конкретных представлений о механизме пузырькового кипения. Такие формулы носят полуэмпирический характер — содержащиеся в них константы находятся из эксперимента. Дополнение уравнения типа (7.15) законом соответственных состояний приводит для случая развитого пузырькового кипения в большом объеме к уравнению В. М. Боришанского:

$$\frac{\alpha}{q_w^{2/3} \rho_{кр}^{1/2} T_{кр}^{-5/6} M^{-1/6}} = 190 \cdot \left(\frac{p}{p_{кр}} \right)^{1/10} \left[1 + 4,65 \left(\frac{p}{p_{кр}} \right)^{1,16} \right],$$

где M — молекулярная масса.

По методу В. И. Толубинского одной из важнейших характеристик является средняя скорость роста паровых пузырей, равная произведению отрывного диаметра $2R_0 = D_0$ на частоту отрыва пузырей ω . Тогда для кипения в большом объеме

$$\frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{\sigma}{g(Q_{ж} - Q_{п})}} = 7,5 \left(\frac{q_w}{r Q_{п} D_0 \omega} \right)^{0,7} \left(\frac{v_{ж}}{a_{ж}} \right)^{-0,2}.$$

Здесь экспериментально определяемой величиной для конкретных условий как раз и является $D_0\omega$.

Каждый из рассмотренных методов обобщения опытных данных по теплоотдаче при пузырьковом кипении в большом объеме насыщенной жидкости фактически основан на учете лишь отдельных сторон процесса кипения при игнорировании других его сторон. Поэтому несмотря на то, что результаты такого обобщения представляются часто в критериальном (безразмерном) виде, они носят достаточно частный характер, зависящий от условия проведения экспериментов. Так, например, все рассмотренные методы не учитывают нестационарного теплового взаимодействия жидкости со стенкой в процессе роста паровых пузырей на стенке. Поэтому расчеты по ним расходятся с опытом для сочетания материала стенки и жидкости с заметно отличными значениями отношения $(\rho c \lambda)_{ж}/(\rho c \lambda)_w$.

Рассмотренные зависимости, как правило, не учитывают шероховатости поверхности и угла смачивания и т. п.

В работе В. И. Субботина и др. * для развитого кипения натрия, калия и цезия в большом объеме на металлических стенках даются единые эмпирические зависимости:

$$\frac{\alpha}{q^{2/3} \left(\frac{\lambda r g Q}{\sigma T_s^2} \right)^{1/3}} = C \left(\frac{p_s}{p_{кр}} \right)^n,$$

где $C = 8$ и $n = 0,45$ при $p_s/p_{кр} = 4 \cdot 10^{-5} \div 10^{-3}$;

$C = 1$ и $n = 0,16$ при $p_s/p_{кр} = 10^{-3} \div 2 \cdot 10^{-2}$.

Заметным шагом вперед является полуэмпирическая зависимость, полученная для насыщенных обыкновенных и криогенных жидкостей Е. В. Аметистовым и В. А. Григорьевым. Эта зависимость получена на основе анализа развитой ими модели роста парового пузыря, учитывающей тепловое нестационарное взаимодействие пузыря со стенкой и наличие парового пятна в основании пузыря. Сочетание анализа этой модели с приближенной теорией Д. А. Лабунцова позволило получить с точностью до коэффициентов вид расчетной зависимости. Коэффициенты были найдены из экспериментов авторов и других работ, что позволило Е. В. Аметистову и В. А. Григорьеву представить расчетную зависимость для q_w в Вт/м² в следующем виде:

$$q_w = 0,9 \cdot 10^{-4} \frac{A^3}{A + C} \frac{\lambda_w r Q_n (T_w - T_s)^2}{v_{ж} \sigma_{ж} T_s} \left[1 + \frac{r Q_n v_{ж}}{\lambda_w (T_w - T_s)} \right]. \quad (7.16)$$

Здесь $C = 712 \frac{\lambda_{ж}}{\sqrt{(\rho c \lambda)_w}}$

и $A = 0,5 \frac{\lambda_{ж} (T_w - T_s)}{r Q_n} - \frac{\lambda_{ж} \cdot 200}{\sqrt{(\rho c \lambda)_w}} +$

$$+ \sqrt{\left[0,5 \frac{(T_w - T_s)}{r Q_n} f_1(\theta_1) - \frac{\lambda_{ж} \cdot 200}{\sqrt{(\rho c \lambda)_w}} \right]^2 + \frac{4 \lambda_{ж} (T_w - T_s)}{r Q_n} f_2(\theta_1)} \times$$

* Субботин В. И. и др. Теплообмен при кипении металлов в условиях естественной конвекции. М., «Наука», 1969, 208 с.

$$\sqrt{\left(1 - \frac{K}{\sqrt{\sin \theta}} + 0,5 \sqrt{\frac{(qc\lambda)_{ж}}{(qc\lambda)_{в}} \sin \theta_1}\right)},$$

где

$$K = \left(\frac{q_{п}}{q_{ж}}\right)^{0,125} \cdot Pr_{ж}^{0,25};$$

$$f_2(\theta_1) = \frac{\sin \theta_1}{(1 + \cos \theta_1)^2 (2 - \cos \theta_1)} \quad \text{и} \quad f_1(\theta_1) = f_2(\theta_1) \sin \theta_1;$$

θ_1 — динамический (в процессе роста пузыря на границе сухого пятна) угол смачивания. Из опытов для обыкновенных и криогенных жидкостей $\theta_1 \approx 60^\circ$.

Эта формула получена для достаточно толстых $\left(\frac{a_w \tau_p}{\delta_w^2} < 0,25\right)$ поверхностей нагрева с техническим классом чистоты. Она хорошо учитывает влияние сочетания теплофизических свойств жидкости и стенки, что особенно сильно сказывается при кипении криогенных жидкостей.

7.6. РЕЖИМЫ ТЕПЛОСЪЕМА ПРИ ПАРООБРАЗОВАНИИ В УСЛОВИЯХ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

В предыдущих разделах было показано, что процесс пузырькового кипения определяется многими факторами (количеством растворенного газа в жидкости, адсорбцией газа на стенке, шероховатостью стенки, сочетанием теплофизических свойств жидкости и стенки, углом смачивания, давлением, взаимодействием растущих пузырей друг с другом, характером свободной конвекции, недогревом жидкости, размером и ориентацией в гравитационном поле поверхности нагрева и т. д.). При таком множестве определяющих параметров и сложном характере влияния их на процесс пузырькового кипения точный учет влияния каждого из них практически невозможен, тем более, что многие из определяющих параметров заранее вообще бывают неизвестны. Поэтому к исследованию пузырькового кипения с самого начала приходится подходить как к случайному процессу, реализация которого в том или ином виде носит вероятностный характер. Следовательно, важно изучать механизм пузырькового кипения и в ряде случаев методами математической статистики оценивать условия реализации различных его режимов и границ их существования. Именно это позволит с достаточной для практики надежностью построить инженерные методы расчета теплоотдачи в каждом из режимов кипения и методы определения условий перехода одного режима в другой.

Режимы теплосъема при парообразовании в условиях свободной конвекции обычно иллюстрируют с помощью кривой кипения насыщенной жидкости в координатах $\lg q_w, \lg (T_w - T_s)$, показанной на рис. 7.9. Однако эта кривая не исчерпывает возможных режимов кипения, особенно пузырькового. Она соответствует кипению таких жидкостей, как вода и наиболее вероятным в обычных условиях характеру развития и смене режимов кипе-

ния. В области температурных напоров *I* при небольших перегревах жидкости у стенки теплоъем осуществляется свободной конвекцией. Нагретая жидкость всплывает к свободной поверхности раздела фаз и там охлаждается путем испарения.

Область температурных напоров *IIa* — неразвитое пузырьковое кипение с малой плотностью действующих центров парообразования. Здесь роль теплосяема конвекцией еще достаточно велика.

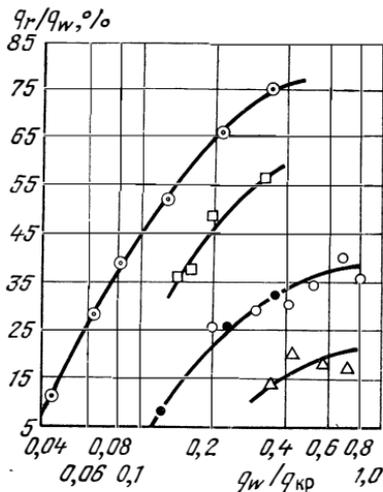


Рис. 7.8. Зависимость доли теплового потока, идущего на парообразование, от давления и $q_w/q_{кр}$ при кипении воды на горизонтальном цилиндре диаметром 0,5 мм; q_2 —плотность теплового потока на парообразование, $q_{кр}$ —критическая плотность теплового потока

□ $p=68$ кПа; ●—29 кПа;
 ⊙—102 кПа ○—29 кПа; △—6,8 кПа

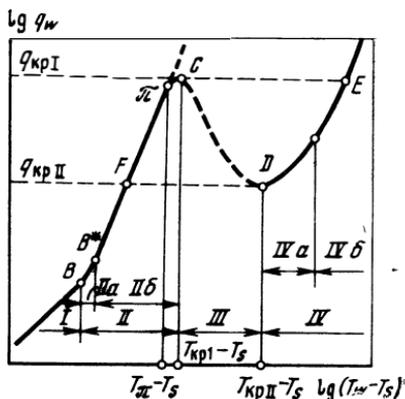


Рис. 7.9. Кривая кипения насыщенной жидкости в условиях свободной конвекции:

I—теплоъем конвекцией при небольших перегревах жидкости на теплоотдающей поверхности; *II*—теплоъем при пузырьковом кипении; *IIa* и *IIб*—при небольшой и большой плотности действующих центров парообразования соответственно; *III*—теплоъем при переходном кипении; *IV*—теплоъем при пленочном кипении; *IVa* и *IVб*—вклад в перенос тепла излучением мал и значителен, соответственно; *C*—переход от пузырькового кипения к пленочному; *D*—переход от пленочного кипения к пузырьковому при $q=const$; π —граница между развитым пузырьковым кипением и переходным

Область *IIб* — развитое пузырьковое кипение, характерное большой плотностью центров парообразования и пренебрежимой ролью конвекции в суммарном теплосяеме. В этой области тепло в основном переносится паровыми пузырями и увлекаемой ими горячей жидкостью. С ростом перегрева стенки, т. е. величины температурного напора $T_w - T_s$, число центров парообразования растет, растет и доля тепла, переносимая паром (эта до-

ля тепла всегда меньше единицы, как видно из рис. 7.8). При достижении точки π (см. рис. 7.9) на части поверхности возникает неустойчивая паровая пленка, что ведет к снижению темпа роста q_w при увеличении $T_w - T_s$. Так как теплосъем с поверхности, занятой паровой пленкой, резко падает по мере ее роста, то и q_w , пройдя через максимум в точке C , начинает падать. С ростом $\Delta T = T_w - T_s$ тепловой поток достигает минимума в точке D , когда на всей поверхности имеет место пленочное кипение.

Точка C , где q_w достигает максимума, называется точкой кризиса пузырькового кипения или первым кризисом. Соответствующую ей плотность теплового потока называют критической $q_{кр I}$ или максимальной q_{max} . Температурный напор, при котором достигается кризис, называют критическим $\Delta T_{кр I} = T_{кр I} - T_s$.

Аналогично, точку D называют кризисом пленочного кипения или вторым кризисом. Соответствующие ей значения q_w и ΔT обозначают q_{min} или $q_{кр II}$ и $\Delta T_{кр II} = T_{кр II} - T_s$.

Область III между точками C и D называется переходным кипением*. В этой области сильно колеблющаяся граница раздела фаз периодически в разных местах кратковременно касается стенки. За время контакта τ_k в этих местах осуществляется интенсивный теплосъем путем нестационарной теплопроводности и успевающего развиться пузырькового кипения. Доля площади, на которой жидкость контактирует со стенкой f , с ростом ΔT непрерывно падает от 1 в точке π до 0 в точке D . Переходный режим характерен резкими падениями температуры стенки в местах контакта с жидкостью. Интенсивность этих пульсаций температуры стенки, главным образом, определяется значением $T_w - T_j$ и $\frac{(qc\lambda)_ж}{(qc\lambda)_w}$.

Область IV устойчивого пленочного кипения условно разбивается на два участка: IVa, где вклад излучения в общий тепловой поток пренебрежимо мал, и IVб, где перенос тепла излучением уже необходимо учитывать.

Полностью кривая кипения, изображенная на рис. 7.9, может быть реализована, если процесс определяется изменением ΔT . Когда же задано изменение тепловой нагрузки (электронагрев, атомный реактор и т. п.), то при увеличении q_w выше q_{max} процесс из точки C с большой скоростью (определяемой теплоемкостью поверхности нагрева) перейдет в точку E , которой соответствует значительно более высокое значение ΔT . Переход из точки C в точку E при кипении воды, жидких металлов и ор-

* Фактически переходное кипение охватывает область между точками π и D .

ганических теплоносителей опасен, так как приводит к расплавлению и разрушению поверхности нагрева. В этом и заключается одна из причин интенсивного изучения кризиса пузырькового кипения в последние 10—20 лет.

Наоборот, при уменьшении q_w процесс из точки D , минуя переходную область, перемещается прямо в точку F , т. е. в область пузырькового кипения с малыми ΔT . Конечно, реальные процессы, особенно в области пузырькового кипения, гораздо многообразней, чем это следует из анализа кривой кипения на рис. 7.9.

77. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ПУЗЫРЬКОВОМ КИПЕНИИ В УСЛОВИЯХ ВЫНУЖДЕННОГО ТЕЧЕНИЯ

Влияние скорости вынужденной конвекции и недогрева жидкости на кривую кипения $q_w = f(T_w - T_s)$ иллюстрируется рис. 7.10. На нем линия $BCDE$ — кривая кипения в большом объеме насыщенной жидкости, а линия ABC' — кривая кипения в большом объеме недогретой жидкости. Недогрев жидкости увеличивает тепловой поток путем свободной конвекции. Развитое кипение возникает при больших $T_w - T_s$, но и кризис кипения наступает при больших $T_w - T_s$ и ему соответствует большее значение q_w . В зоне развитого пузырькового кипения влияние недогрева оказывается значительно меньше.

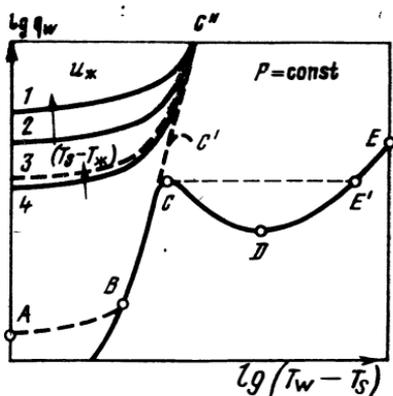


Рис. 7.10. Влияние недогрева жидкости и вынужденной конвекции на кривую кипения

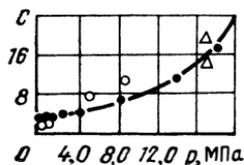


Рис. 7.11. Зависимость коэффициента C от давления по опытам с кипением воды в трубах

Аналогичное влияние оказывает вынужденная конвекция (линии 1, 2, 3) и недогрев при вынужденной конвекции (линия 4). При $T_w \leq T_s$ тепловой поток определяется только вынужденной конвекцией однофазной жидкости и ее недогревом (точнее — температурным напором $T_w - T_{ж}$).

При $T_w > T_s$ начинает добавляться тепловой поток от пузырькового кипения. Чем выше скорость течения жидкости $u_{ж}$ (кривая 3, 2, 1) или ее недогрев $T_s - T_{ж}$ (кривые 3 и 4), тем выше располагается соответствующая кривая кипения на рис. 7.10 и тем при больших значениях $T_w - T_s$ она выходит на кривую развитого пузырькового кипения BC'' .

Существуют различные приближенные способы расчета теплоотдачи при пузырьковом кипении в условиях вынужденной конвекции.

С. С. Кутателадзе предложил простую интерполяционную формулу [85]:

$$\frac{\alpha_{расч}}{\alpha_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_{00}}{\alpha_0}\right)^2}$$

Здесь $\alpha_{расч} = \frac{q_w}{T_w - T_{ж}}$ — коэффициент теплоотдачи к вынужденному потоку кипящей жидкости;

$\alpha_0 = \frac{q_{wв}}{T_w - T_{ж}}$ — коэффициент теплоотдачи при вынужденном течении без кипения;

$\alpha_{00} = \frac{q_{wк}}{T_w - T_s}$ — коэффициент теплоотдачи при развитом кипении, когда уже нет влияния скорости течения жидкости.

Коэффициент α_{00} для течения воды в трубах рекомендуется определять по формуле

$$\alpha_{00} = Cq^{0,7} = C^{10/3} (T_w - T_s)^{7/3},$$

где коэффициент C находится по эмпирической кривой на рис. 7.11.

Однако в ряде работ показано, что такой расчет справедлив лишь при малом паросодержании. В. М. Боришанский и др. рекомендуют следующую эмпирическую зависимость для расчета теплоотдачи пароводяной смеси в каналах в диапазоне значений $p = 0,2 \div 17$ МПа, $q = 112 \cdot 10^4 \div 8 \cdot 10^3$ кВт/м², $w_{см} = 1 \div 300$ м/с:

$$\frac{\alpha}{\alpha_{расч}} = \left[1 + 1 \cdot 10^{-10} \left(\frac{w_{см} r Q_{п}}{q} \right)^{3/2} \right]^{1/2}$$

Здесь $\alpha_{расч}$ в Вт/(м² К) находится по формуле С. С. Кутателадзе;

$w_{см} = w_0 \left[1 + \left(\frac{Q_{ж} - Q_{п}}{Q_{п}} \right) x \right]$ — приведенная скорость двухфазной системы

в м/с;

w_0 — скорость жидкости на входе в обогреваемый канал в м/с;

x — массовое паросодержание;

r — теплота парообразования в кДж/кг,

$Q_{п}$ и $Q_{ж}$ — плотность паровой и жидкой фаз в кг/м³;

q — плотность теплового потока в кВт/м².

Однако нет данных о применимости этой формулы к течению других кипящих жидкостей.

По-видимому, наиболее правильно обобщать данные по теплоотдаче и гидравлическому сопротивлению при пузырьковом ки-

пени в условиях вынужденного течения в каналах на основе одномерных систем уравнений для жидкости и пара, как это показано ниже для пленочного кипения в каналах.

7.8. КРИЗИС ПУЗЫРЬКОВОГО КИПЕНИЯ В БОЛЬШОМ ОБЪЕМЕ И ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ТЕЧЕНИИ В КАНАЛАХ

В разд. 7.6 отмечалось, что пузырьковое кипение отделено от пленочного областью переходного кипения, характерного одновременным существованием на поверхности участков, где жидкость смачивает стенку и где происходит пузырьковое кипение, и участков, покрытых паром, где происходит пленочное кипение. В фиксированной точке поверхности эти процессы сменяют друг друга во времени.

Поэтому физически правильно считать кризисом пузырькового кипения левую границу области переходного кипения (точку λ на рис. 7.9). Начиная с этой точки при увеличении ΔT тепловой поток растет медленнее, чем по закону развитого пузырькового кипения, а затем, пройдя максимум, даже начинает падать вследствие того, что тепловой поток на участках поверхности, покрытых паром, много меньше, чем на участках, покрытых жидкостью, а доля площади, покрытая паром, растет с ростом ΔT .

Таким образом, появление паровых пятен в количестве, заметно влияющем на характер изменения q_w (точка λ на рис. 7.9), и следует считать кризисом пузырькового кипения.

Аналогично, кризисом пленочного кипения следует считать правую границу переходного кипения (точка D на рис. 7.9). Эту границу практически можно определить тогда, когда теплосъем в местах контакта жидкости со стенкой начинает существенно изменять закономерность теплового потока при пленочном кипении (заметно увеличивая его при уменьшении ΔT).

В литературе исторически принято считать кризисом пузырькового кипения точку $q_w = q_{\max}$ (по новым исследованиям в этой точке уже заметная доля поверхности покрыта паром), а кризисом пленочного кипения — точку $q_w = q_{\min}$.

Если гидродинамика взаимодействия пара и жидкости такова, что жидкость не допускается к поверхности нагрева, то кризис пузырькового кипения называют гидродинамическим.

Если же контакт жидкости с поверхностью невозможен из-за сильного перегрева этой поверхности за время роста парового пузыря, то такой кризис пузырькового кипения называют термодинамическим (температура поверхности в месте контакта больше $T_{\text{пр}}$).

В действительности оба вида кризиса могут проявляться не только обособленно, но и в сочетании.

Одной из первых и наиболее распространенных теорий кризиса кипения является гидродинамическая теория кризиса, впервые предложенная С. С. Кутателадзе в 1951 г. [81] и затем развитая в работах других исследователей.

В основе этой теории лежит предположение о том, что кризис кипения есть следствие нарушения гидродинамической устойчивости процесса и что существует гидродинамическая аналогия между пузырьковым кипением и барботажем жидкости газом, вдуваемым через пористую поверхность с достаточно малыми размерами отверстий. Методами теории подобия С. С. Кутателадзе получает критерий гидродинамической устойчивости.

Далее рассматриваются условия устойчивости двухфазного граничного слоя над неограниченной горизонтальной пористой поверхностью. Предполагается, что объем жидкости не ограничен, она неподвижна, а ее вязкость можно пренебречь. В этом случае могут воздействовать только кинетическая энергия вдуваемого газа $\rho_{II} \omega_{II}^2/2$, гравитационные и поверхностные силы в двухфазном граничном слое.

За кризис принимается возникновение газовой или паровой пленки по всей поверхности. Работа отеснения жидкости из этой паровой пленки толщиной δ будет $g\delta(\rho_{ж} - \rho_{II})$. Возникновение кризиса (потеря устойчивости пузырьковой структуры двухфазного граничного слоя) в рассматриваемой модели равновероятно в любом месте бесконечной пористой поверхности. Тогда отношение рассматриваемых величин должно быть постоянной величиной (полагая в момент кризиса $\omega_{II} = \omega_{кр}$):

$$\frac{\rho_{II} \omega_{кр}^2}{g\delta(\rho_{ж} - \rho_{II})} = \text{const.}$$

Из соображений теории размерности толщина паровой пленки

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_{ж} - \rho_{II})}} \text{ и } \frac{\rho_{II} \omega_{кр}^2}{g\delta(\rho_{ж} - \rho_{II})} \sim \frac{\rho_{II} \omega_{кр}^2}{\sqrt{g\sigma(\rho_{ж} - \rho_{II})}} = \text{const.}$$

Или, извлекая квадратный корень, получим критерий устойчивости в виде

$$k_1 = \frac{\omega_{кр} \sqrt{\rho_{II}}}{\sqrt[4]{g\sigma(\rho_{ж} - \rho_{II})}}.$$

При кризисе кипения, полагая что здесь тепловой поток $q_{кр I}$ идет на испарение, найдем критическую скорость пара

$$\omega_{кр} = \frac{q_{кр I}}{r \rho_{II}}.$$

Тогда критическая плотность теплового потока в большом объеме жидкости с $\mu \approx 0$ при свободной конвекции находится из выражения

$$q_{кр I} = k_1 r \sqrt{\rho_{II}} \sqrt[4]{g\sigma(\rho_{ж} - \rho_{II})}. \quad (7.17)$$

Из экспериментов $k_1 = 0,14 \div 0,16$.

Н. Зубер* на основе анализа фотографических исследований построил другую гидродинамическую модель кризиса. При кипении на горизонтальной поверхности вверх от нее поднимаются струи пара, а к ней идут струи жидкости. За кризис были приняты условия, когда жидкие струи теряют устойчивость и распадаются на капли. Используя решение Релея, он нашел

* Zuber N. On the Stability of Boiling Heat Transfer. Trans. of ASME, vol. 80, N 3, pp. 711—720, 1958.

$$q_{кр I} = \frac{\pi}{24} r \sqrt{Q_{п}} \sqrt[4]{g\sigma(Q_{ж} - Q_{п})} \sqrt{\frac{Q_{ж}}{Q_{ж} + Q_{п}}}. \quad (7.18)$$

Это выражение близко к уравнению (7.17), полученному С. С. Кутателадзе, но константа в уравнении (7.18) $k_1 = \pi/24$ определена теоретически. Позднее Н. Зубер в модифицированном решении получил для нее пределы $0,12 < k_1 \leq 0,157$. В. Розенау и П. Гриффитц* в качестве условия возникновения кризиса приняли такую плотность теплового потока, при которой образующиеся на поверхности пузырьки до отрыва касаются друг друга и сливаются в паровую пленку. На основе этой модели после обработки получено

$$\frac{q_{кр}}{Q_{п} r} = 1,21 \cdot 10^{-2} \left(\frac{Q_{ж} - Q_{п}}{Q_{п}} \right)^{0,6} \left(\frac{g}{g_0} \right).$$

Все теории гидродинамического кризиса, естественно, не учитывают многих сторон этого сложного явления и не могут объяснить влияние многих факторов на значение $q_{кр I}$.

Формулы типа (7.17) не согласуются и с опытами при кипении жидких металлов ни по величине, ни по характеру зависимости $q_{кр I}$ от давления. Основную причину этого расхождения В. И. Субботин и др. видят в том, что по гидродинамической теории кризиса весь тепловой поток $q_{кр I}$ идет на испарение и отводится паром. На рис. 7.8 было показано, что это даже для воды приближенно справедливо лишь при достаточно высоких давлениях. Жидкие металлы кипят обычно при давлениях, много меньших критического, и обладают большой теплопроводностью. Следовательно, даже при кризисе значительная доля тепла отводится жидкостью.

Тогда, предположив, что формула (7.17) определяет лишь тепловой поток, отводимый паром, можно ее модифицировать так:

$$q_{кр I} = \left(1 + \frac{q_{ж}}{q_{п}} \right) k_1 r \sqrt{Q_{п}} \sqrt[4]{g\sigma(Q_{ж} - Q_{п})}. \quad (7.19)$$

Из сопоставления уравнения (7.19) с опытами по кризису в большом объеме натрия, калия, цезия и рубидия при $p = (10^{-3} \div 0,35)$ МПа было найдено

$$\frac{q_{ж}}{q_{п}} = \frac{C}{P_K} \left(\frac{P_s}{P_K} \right)^{-m},$$

где p_K — критическое давление (точка K на рис. 7.1); $C = 4,5$ МПа для развитого кипения и $C = 1,8$ МПа для неустойчивого кипения;

$$k_1 = 0,14 \text{ и } m = 0,4.$$

Последнее время все больше исследуется термодинамический характер кризиса пузырькового кипения. Эти исследования показывают, что в околоскритических режимах центральная часть поверхности под растущим пузырем высыхает. Отвод тепла паром от этой части поверхности много ниже, чем жидкостью, и ее температура растет тем быстрее, чем (при заданном тепловыделении) тоньше стенка (меньше ее теплоемкость) и хуже перетечки тепла теплопроводностью в область, смоченную жидкостью.

Если температура сухого пятна превысит $T_{пр}$ за время роста пузыря, то последующий контакт с жидкостью в этом месте, да-

* Rohsenow W. M., Griffith P. Correlation of maximum heat flux data for boiling of saturated liquids, Chemf Eng. Progr., Sym. Ser, vol. 52, 1956, pp. 47—49.

же после отрыва пузыря, окажется невозможным, пока из-за перетечек тепла и охлаждения через пленку пара локальная температура поверхности не упадет до значений, допускающих контакт с жидкостью.

Эксперименты показали, что при q_w , близких к $q_{кр I}$, центральная часть парового пятна может оставаться несмоченной в 10 и более раз дольше времени роста пузыря.

Анализ этих экспериментов с учетом нестационарного взаимодействия жидкости и пара со стенкой позволяет заключить, что $q_{кр I}$ должно, например, быть пропорционально $\delta_w q_c / \tau_m$, $a_{IV} \tau_m / R_m^2$, $(\rho c \lambda)_{ж} / (\rho c \lambda)_w$, а также зависеть от распределения источников тепла в нагревателе и его геометрии.

Здесь R_m — максимальный радиус сухого пятна под пузырем;

τ_m — время его достижения;

δ_w — толщина стенки.

Когда кризис определяется термодинамическими причинами, то он характеризуется не значением $q_{кр I}$, а значением $T_{кр I} - T_s$. Таким образом, кризис пузырькового кипения, как и само пузырьковое кипение, помимо гидродинамических явлений в значительной мере определяется условиями локального нестационарного теплообмена между стенкой, жидкостью и паровым пузырем и возможностью контакта жидкости со стенкой.

В свете сказанного о механизме кризиса пузырькового кипения можно объяснить влияние недогрева жидкости на $q_{кр I}$.

Из экспериментов известно, что отрывной диаметр D_0 и время жизни пузыря τ_p на стенке с увеличением недогрева жидкости убывают. Следовательно, для возникновения паровых пятен и увеличения температуры стенки в них выше $T_{пр}$ требуются значительно большие тепловые потоки. Поэтому $q_{кр I}$ растет с ростом недогрева жидкости как по этой причине, так и вследствие роста теплового потока, идущего только на нагрев жидкости.

Ограниченность гидродинамических теорий кризиса проявляется и в характере зависимости $q_{кр I}$ от величины ускорения гравитационного поля. Существующие эксперименты показывают, что теплоотдача в области развитого пузырькового кипения практически не зависит от величины ускорения g гравитационного поля. Это объясняется тем, что подъемные силы играют второстепенную роль в процессе роста и отрыва паровых пузырей.

Отношение влияния инерционных и подъемных сил в этом процессе можно характеризовать числом Фруда:

$$Fr = \frac{3R^2\dot{R}^2 + R^3\ddot{R}}{R^3g} = \frac{2}{R^3g} \left[\frac{(T_w - T_s) c_{ж} \rho_{ж}}{r \rho_{п}} (\lambda a_{ж})^{1/2} \right]^4.$$

Здесь R , \dot{R} и \ddot{R} , соответственно, текущий радиус, скорость и ускорение роста парового пузыря. Даже в земных условиях при $g/g_0 = 1$ $p = 0,1$ МПа, $T_w - T_s = 9$ К и $R = 0,127$ мм значения чис-

ла Фруда по данным Кларка для жидких водорода, кислорода, азота и воды соответственно будут: 352, 546, 452 и 13 900. Следовательно, для представляющих практический интерес ускорений $g/g_0=0 \div 15$ влияние подъемных сил на рост пузыря пренебрежимо мало, и поэтому влияние ускорения на $q_{кр I}$ не должно проявляться.

Гидродинамические же теории возникновения кризиса приводят к следующей зависимости:

$$\frac{q_{кр I}(g)}{q_{кр I}(g_0)} = \left(\frac{g}{g_0} \right)^{1/4} \quad (7.20)$$

Эти соотношения построены для горизонтальной бесконечной пластины и для других случаев могут иметь более сложную зависимость.

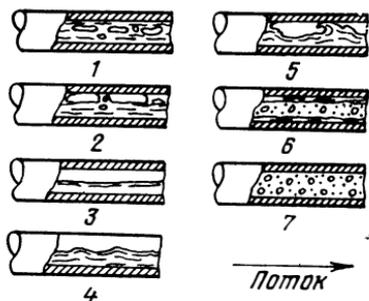


Рис. 7.12. Режимы течения двухфазного потока в горизонтальной трубе:

1—пузырьковый; 2—пробковый; 3—стратифицированный (расслоенный); 4—волновой; 5—снарядный; 6—кольцевой; 7—дисперсный

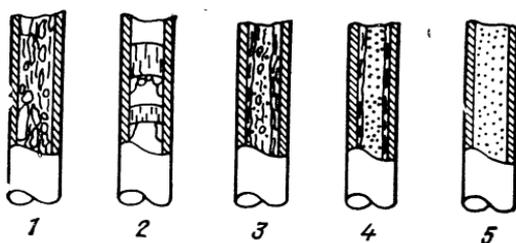


Рис. 7.13. Режимы течения двухфазного потока в вертикальной трубе:

1—пузырьковый; 2—снарядный; 3—полукольцевой; 4—кольцевой; 5—дисперсный

В заключение отметим, что при резком увеличении q_w условиями кризиса кипения являются слияние пузырей и высыхание жидкой микропленки под ними. Значение $q_{кр}$ оказывается тем выше, чем быстрее растет q_w , чем больше недогрев и чем меньше начальный уровень теплового потока; $q_{кр I}$ при быстром увеличении q_w может в несколько раз превышать стационарное значение. При вынужденном течении $q_{кр I}$ зависит от гораздо большего числа параметров, чем в большом объеме. Значительное влияние, в частности, на значение $q_{кр I}$ оказывают гидродинамическая структура двухфазного потока (так называемые режимы течения) и гидродинамика конкретной магистрали (возникновение колебаний расхода и т. п.).

Наиболее типичные режимы течения соответственно в горизонтальной и вертикальной трубах представлены на рис. 7.12; и 7.13. На рис. 7.14 изображена типичная кривая кипения, которая

может быть существенно различной для различных режимов течения. Из него видно, что при вынужденном течении само определение критической плотности теплового потока $q_{кр I}$ (точка А на рис. 7.14) требует уточнения, ибо кривая $q=f(\Delta T)$ может и не иметь максимума. В этом случае за $q_{кр I}$ принимают такое значение q_w , начиная с которого T_w резко возрастает. Более того, при вынужденном течении различают кризис первого и второго рода. Под кризисом первого рода понимают начало перехода пузырькового кипения в пленочное в условиях, когда поверхность нагрева омывается жидкостью. Под кризисом второго рода понимают переход к пленочному кипению в результате высыхания пленки жидкости в кольцевом режиме течения. Это обычно происходит, когда паросодержание x достигает некоторого граничного значения $x_{гр}$. Это значение тем меньше, чем больше расход теплоносителя и давления, т. е. чем лучше условия для срыва и испарения пленки жидкости.

Ниже мы будем рассматривать только кризис первого рода, обозначая соответствующую ему плотность теплового потока по-прежнему $q_{кр I}$.

В настоящее время накоплен достаточно большой экспериментальный материал. Однако он не получил еще удовлетворительного обобщения из-за недостаточной изученности механизма кризиса и зависимости его от многих факторов.

Состояние вопроса кризисов при кипении воды в трубах наиболее полно изложено в работе В. Е. Дорошука [51]

Существующие эмпирические зависимости применимы лишь для частных случаев, но даже при этом они не всегда между собой согласуются. Имеются попытки составления таблиц для наиболее распространенных каналов и теплоносителей (например, для воды в трубах). Использование критериальных зависимостей, полученных на воде для криогенных жидкостей, дает результаты, на порядок превышающие экспериментальные значения.

Исследование кризиса пузырькового кипения при вынужденном течении является актуальной задачей дальнейших исследований.

7.9. КРИЗИС ПЛЕНОЧНОГО КИПЕНИЯ

Кризис пленочного кипения (или «второй кризис кипения») обычно регистрируется в координатах $q_w, T_w - T_s$ (см. рис. 7.10) как минимальный тепловой поток $q_w = q_{min} = q_{кр II}$ или как начало участка (при уменьшении $T_w - T_s$ из области пленочного

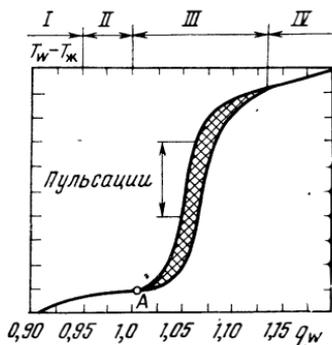


Рис. 7.14 Типичная кривая кипения при вынужденном течении в трубе: I—конвективный теплообмен; II—пузырьковое кипение; III—переходное кипение; IV—пленочное кипение

кипения), на котором начинается заметный рост q_w [т. е.

$\frac{\partial q}{\partial (T_w - T_s)} < 0$]. Физически это означает, что при уменьшении q_w толщина пленки пара уменьшается. Возникает возможность касания стенки жидкостью. В местах контакта жидкости со стенкой тепловой поток от стенки к жидкости $q_{ж.к}$ намного больше, чем на поверхности, покрытой паром, от стенки к пару $q_{пл}$. Следовательно, в качестве кризиса пленочного кипения фиксируются такие условия, при которых теплоем с доли площади стенки f , контактирующей с жидкостью, начинает заметно увеличивать среднюю плотность теплового потока. Для возникновения кризиса пленочного кипения необходимо наличие, по крайней мере, двух условий: гидродинамической и термодинамической возможностей контактов жидкости со стенкой. Если термодинамические условия допускают контакт жидкости со стенкой (температура стенки в месте контакта жидкости со стенкой $T_{гр}$ ниже предельной температуры перегрева жидкости $T_{пр}$), но контакт не происходит по гидродинамическим причинам (паровая пленка еще не потеряла устойчивости), то кризис пленочного кипения будет иметь гидродинамический характер. Наоборот, если пленка пара уже не устойчива, а T_w в местах контакта еще больше $T_{пр}$, то кризис будет иметь термодинамический характер. Он произойдет лишь тогда, когда начнет выполняться условие $T_{гр} < T_{пр}$. Все это еще усложняется нестационарными теплофизическими процессами взаимодействия жидкости со стенкой.

Естественно, что в различных условиях может реализоваться какой-либо один из возможных механизмов кризиса. Например, на горизонтальной поверхности в большом объеме спокойной жидкости кризис пленочного кипения будет иметь гидродинамический характер, а на вертикальной — термодинамический характер.

В литературе наиболее распространенной является гидродинамическая теория кризисов пленочного кипения, предложенная С. С. Кутателадзе и развитая в работах В. М. Боришанского, Н. Зубера, Л. Беренсона и др.

С. С. Кутателадзе полагает, что при кризисе пленочного кипения устойчивость паровой пленки связана с соотношением динамических воздействий (пропорциональных $q_{кр II}^2$), сил тяжести и поверхностного натяжения. Поэтому, для определения $q_{кр II}$ применим критерий устойчивости k_2 , аналогичный коэффициенту k_1 в уравнении (7.17), полученному для кризиса пузырькового кипения в большом объеме насыщенной жидкости на горизонтальной поверхности

Но при пленочном кипении поверхность раздела фаз, а следовательно, и свободная энергия двухфазного граничного слоя меньше, чем при пузырьковом кипении. Поэтому, если скорость парообразования достаточна для равномерного питания уже возникшего сплошного парового слоя, последний более устойчив, чем двухфазный слой при пузырьковом кипении.

Это позволяет С. С. Кутателадзе предположить, что

$$\frac{q_{кр II}}{q_{кр I}} = \frac{k_2}{k_1} = \text{const} < 1.$$

Сопоставление с экспериментом дает $q_{кр II}/q_{кр I} \approx 0,2$. Н. Зубер проанализировал механизм отвода пара от горизонтальной поверхности в большом объеме, опираясь на теорию неустойчивости поверхности раздела, развитую Тейлором, и на результаты ее экспериментальной проверки.

Пренебрегая вязкостью и скоростью движения пара и жидкости, он получил

$$q_{кр II} = k_* \rho_{II} r \left[\frac{\sigma g (Q_{ж} - Q_{II})}{(Q_{ж} + Q_{II})^2} \right], \quad (7.21)$$

где
$$k_* = \frac{\pi}{24 \sqrt[4]{3}} \div \frac{\pi}{24} = 0,099 \div 0,131.$$

Сопоставляя уравнения (7.21) и (7.17), находим, что критерий устойчивости Н. Зубера k_* и С. С. Кутателадзе k_2 различаются на множитель:

$$k_* = k_2 \sqrt{\frac{Q_{II} + Q_{ж}}{Q_{II}}}.$$

Однако значение k_* найдено теоретически, а $k_2 = 0,02 \div 0,42$ получено из сопоставления с экспериментом. Между собой они согласуются, когда

$$\sqrt{\frac{Q_{II} + Q_{ж}}{Q_{II}}} = 5 \div 3,1.$$

В последующих работах Н. Зубера и других авторов этот подход нашел дальнейшее развитие.

При пленочном кипении в условиях вынужденного течения и на вертикальных поверхностях в условиях свободной конвекции поверхность раздела фаз почти всегда неустойчива. Неустойчива она и на горизонтальной поверхности в большом объеме, если жидкая фаза неспокойна (интенсивное перемешивание вследствие бурного парообразования, конвекция и т. п.). Поэтому гидродинамически возможность контакта капель и гребней волн со стенкой обеспечена даже при достаточно толстой пленке пара, когда температура стенки T_w может значительно превышать температуру предельного перегрева жидкости $T_{пр}$.

В этом случае кризис пленочного кипения определяется термодинамическими условиями возможности контакта жидкости со стенкой, т. е. носит термодинамический характер.

Температура стенки и жидкости в месте их случайного контакта $T_{тр}$ и в его окрестности будет определяться их теплофизическими свойствами, начальными температурами стенки T_{w0} и жидкости $T_{ж0}$, геометрией и толщиной стенки δ_w , конфигурацией площади контакта и рядом других параметров.

Для выявления качественного влияния различных параметров на температуру в зоне контакта примем физические свойства постоянными, слой жидкости, который успевает прогреться за время контакта, — неподвижным, начальные температуры стенки и жидкости — постоянными по толщине.

При этих условиях из решения одномерной задачи нестационарной теплопроводности имеем, что температура в месте кон-

такта жидкости со стенкой приближенно определится уравнением (7.12)

$$\frac{T_{гр} - T_{ж0}}{T_{W0} - T_{ж0}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{(\rho c \lambda)_{ж}}{(\rho c \lambda)_{W}}}}$$

Из уравнения (7.12) видно, что $T_{гр}$ тем ближе к $T_{ж0}$, чем больше $(\rho c \lambda)_{ж}/(\rho c \lambda)_{W}$. Если $T_{гр} > T_{пр}$, то происходит взрывообразное вскипание тонкого слоя коснувшейся стенки жидкости за счет тепла стенки. Естественно, что взрывообразное вскипание также развивается во времени и ему может предшествовать контакт жидкости со стенкой. Контакт будет длиться до тех пор, пока спонтанно образующиеся в прогретом у стенки слоя зародыши не сольются друг с другом, образуя сплошную пленку пара. Так, например, исследования показывают, что время, потребное на образование, рост и слияние пузырей, т. е. на прекращение контакта жидкости, при $T_{W} \geq T_{пр}$ составляет для криогенных жидкостей $10^{-3} - 10^{-7}$ с.

При этом от стенки отнимается некоторое количество тепла на прогрев и испарение жидкости в тонком слое. Следует учитывать, что и после взрывообразного вскипания интенсивный теплообмен не прекращается до тех пор, пока силы давления образующегося пара не преодолют сил инерции жидкости, т. е. пока снова не возрастет толщина пленки пара.

Если $T_{гр} < T_{пр}$, то жидкость будет находиться в контакте со стенкой определенное время τ_k , которое будет равно наименьшему из следующих времен: или сумме времен, определяемых гидродинамикой движения гребня волны и высыханием остатков жидкости, или же времени, необходимому для прогрева жидкости, активации центров парообразования и росту паровых пузырей до момента их слияния, т. е. времени, необходимому для возникновения кризиса пузырькового кипения в месте контакта.

Реальная картина носит трехмерный характер, но выражение для $T_{гр}$ будет зависеть от тех же величин. Более того, оценки показывают, что если минимальный линейный размер площади контакта $l_{min} \gg \sqrt{a_W \tau_k}$ или $l_{min} \gg \delta_W$ (при $\sqrt{a_W \tau_k} > \delta_W$), то перетечки тепла по стенке из области паровой пленки, где $T_W > T_{гр}$, будут мало влиять на $T_{гр}$. Из уравнения (7.12) ясно, что вероятность контактов жидкости со стенкой будет тем выше, чем ниже $T_{ж0}$ и T_{W0} и чем больше $(\rho c \lambda)_{ж}/(\rho c \lambda)_{W}$.

Поэтому, для заданных условий пленочного кипения будет существовать определенное значение $T_{W0} = T_{кр II}$, при котором q_W в силу интенсивного теплосъема в местах контактов начнет заметно возрастать. Таким образом, $T_{кр II}$ считается температурой начала кризиса пленочного кипения.

Как показано в ряде исследований, колебания поверхности раздела фаз, особенно, низкочастотные, соизмеримые по ампли-

туде с толщиной пленки пара, оказывают влияние на теплоотдачу даже в далекой от кризиса области развитого пленочного кипения. В этой области $T_{гр} > T_{пр}$, но даже близкий подход гребня к стенке и, особенно, мгновенные касания ее со взрывообразным вскипанием вызывают существенные колебания температуры стенки и теплового потока. Средняя теплоотдача при наличии крупных волн на поверхности раздела фаз возрастает, но этот рост мало зависит от изменения $T_w - T_s$.

Когда материал стенки имеет низкий коэффициент теплопроводности a , то локальные падения температуры стенки, вызванные касанием ее гребней волн, будут медленно восстанавливаться. Поэтому, при повторном касании, если оно произойдет до восстановления локальной температуры, $T_{гр}$ может оказаться меньше $T_{пр}$. Следовательно, на материалах с малым коэффициентом теплопроводности возможно наступление кризиса пленочного кипения, даже когда при первом касании $T_{гр} > T_{пр}$, но при повторном $T_{гр} < T_{пр}$.

Если предположить, что $T_{кр II} \approx T_{w0}$, при которой $T_{гр} = T_{пр}$, то из уравнения (7.12) получим

$$\frac{T_{кр II} - T_s}{T_{кр} - T_{ж0}} \leq \frac{T_{пр} - T_s + (T_s - T_{ж0})}{T_{кр} - T_s} \left(1 + \sqrt{\frac{(qc\lambda)_{ж}}{(qc\lambda)_w}} \right),$$

где $T_{кр}$ — критическая температура жидкости.

Так как $\frac{T_{пр} - T_s}{T_{кр} - T_s} = f\left(\frac{p}{p_{кр}}\right)$, то структурный вид искомой зависимости для $T_{кр II}$ будет

$$\frac{T_{кр II} - T_s}{T_{кр} - T_{ж0}} = f\left[\frac{(qc\lambda)_{ж}}{(qc\lambda)_w}; \frac{p}{p_{кр}}; \frac{T_s - T_{ж0}}{T_{кр} - T_s}, \dots\right]. \quad (7.22)$$

В общем случае уравнение (7.22) может содержать также параметры, характеризующие гидродинамическую вероятность контакта, его размеры и продолжительность K ним относятся угол смачивания θ и безразмерные комплексы, содержащие δ_w , a_w (особенно, если $a_w \tau_k / \delta_w^2 > 0,25$), режимные параметры и шероховатость.

Если в каком-либо конкретном случае нет уверенности, что поверхность раздела фаз заведомо будет неустойчива, то уравнение (7.22) должно быть дополнено уравнением для определения условий наступления гидродинамической неустойчивости поверхности раздела фаз. Экспериментально термодинамический кризис пленочного кипения в большом объеме и при вынужденном течении в каналах был исследован на криогенных жидкостях. Основная специфика этих жидкостей состоит в том, что они имеют угол смачивания, близкий к нулю для всех исследованных поверхностей.

В опытах исследовалось влияние на $T_{кр II}$ шероховатости поверхности, эквивалентного диаметра канала $d_э$, расстояния от начала опытного участка $z/d_э$, давления $p/p_{кр}$, недогрева жидкости $(T_s - T_{ж0})/(T_{кр} - T_s)$, теплофизических свойств, толщины стенки δ_w и толщины покрытия металлической стенки низко-теплопроводным материалом.

Было установлено, что при обобщении опытных данных в координатах уравнения (7.22) $(T_{кр II} - T_s)/(T_{кр} - T_{ж})$ зависит только от $(\rho c \lambda)_{ж}/(\rho c \lambda)_w$ и безразмерного недогрева $(c_p)_{ж}(T_s - T_{ж})/r$. Это позволило опытные данные по $T_{кр II}$ для криогенных жидкостей в условиях свободной конвекции обобщить с разбросом $\pm 15\%$ уравнением

$$\frac{T_{кр II} - T_s}{T_{кр} - T_{ж}} = 0,165 + 2,5 \left[\frac{(\rho c \lambda)_{ж}}{(\rho c \lambda)_w} \right]^{0,25} + \frac{(\rho c \lambda)_{ж}}{(\rho c \lambda)_w}. \quad (7.23)$$

Оно получено в следующем диапазоне изменения параметров:

$$\frac{(\rho c \lambda)_{ж}}{(\rho c \lambda)_w} = 10^{-6} \div 1; \quad \theta = 0; \quad d_э \sqrt{\frac{g(\rho_{ж} - \rho_{п})}{\sigma}} \geq 6;$$

$$\frac{p}{p_{кр}} = 0,02 \div 0,63;$$

$$\frac{T_s - T_{ж}}{T_{кр} - T_s} = 0 \div 1,5 \quad \text{при} \quad \frac{(\rho c \lambda)_{ж}}{(\rho c \lambda)_w} < 10^{-1}.$$

При вынужденном течении криогенных жидкостей в каналах опытные данные с разбросом $\pm 22\%$ обобщаются этим же уравнением.

Таблица 7.2

Материал стенки	$T_{кр II}$, К	$T_{гр}$, К по уравнению (7.12)	Для азота при 10^5 Па		
			$T_{пр}$, К	T_s , К	$\frac{(\rho c \lambda)_{ж}}{(\rho c \lambda)_w}$
Медь	100	99,7	109	78	$1,96 \cdot 10^{-4}$
Нержавеющая сталь	118	114	109	78	10^{-2}
Фторопласт	184	166	109	78	0,5

В табл. 7.2 дано сравнение рассчитанных по уравнению (7.12) значений $T_{гр}$ для различных материалов со значением $T_{пр}$ для азота. Как видно, все они, кроме меди, имеют $T_{гр} > T_{пр}$, тогда как на основе изложенного выше механизма кризиса пленочного кипения можно было ожидать $T_{гр} \leq T_{пр}$. Это несоответствие можно объяснить тем, что при уменьшении $(\rho c \lambda)_w$ возрастает влия-

ние на снижение $T_{гр}$ теплосъема из-за пузырькового кипения. Кроме того, возможно, что у материалов с малым значением $(\rho c \lambda)_w$ медленно восстанавливается температура после нарушения контакта с жидкостью. Поэтому у таких материалов локальное снижение T_w при касании жидкости со взрывообразным вскипанием (при $T_{гр} > T_{пр}$) может не успеть восстановиться к моменту повторного касания. Тогда при повторном касании может оказаться, что $T_{гр} < T_{пр}$ и контакт может продолжаться. При реализации этого механизма роль недогрева жидкости может падать. В действительности возможно влияние обоих факторов.

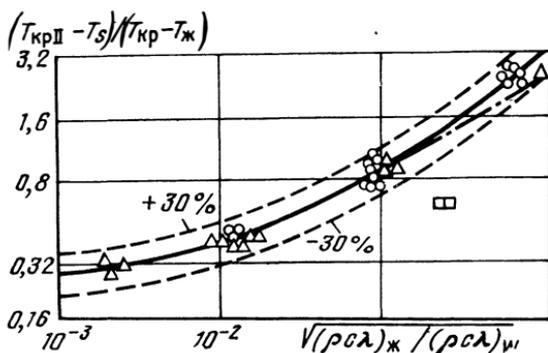


Рис 7.15 Обобщение опытных данных по температуре кризиса пленочного кипения: Δ —естественная конвекция; \circ —вынужденная конвекция, \square —вода

Сравнение уравнения (7.23) с опытными данными дано на рис. 7.15. Как видно, опытные данные для воды располагаются много ниже расчетной кривой. У воды угол смачивания $\theta = 40 \div 45^\circ$. По-видимому, это снижает площадь контакта жидкости со стенкой и проявляет влияние шероховатости. Влияние θ на $T_{кр II}$ еще требует своего исследования.

Сильная зависимость температуры кризиса пленочного кипения от $(\rho c \lambda)_ж / (\rho c \lambda)_w$ указывает путь управления значением $T_{кр II}$, например, увеличивая $T_{кр II}$ в широких пределах путем нанесения на металлические поверхности тонких покрытий из материала с малым значением $(\rho c \lambda)_w$. Между прочим, окисные пленки и загрязнения, имеющие $(\rho c \lambda)$ меньше основного материала, увеличивают $T_{кр II}$.

Было специально исследовано влияние толщины таких покрытий δ_p на $T_{кр II}$. Результаты опытов, проведенных при охлаждении вертикально расположенных трубок из нержавеющей стали с покрытием из фторопласта-III в большом объеме насыщенного жидкого азота, представлены на рис. 7.16. С ростом δ_p величина $T_{кр II}$ растет, но при $\delta_p \geq 90$ мкм зависимости $T_{кр II}$ от δ_p уже нет. Такой характер зависимости можно объяснить тем,

что при $\delta_{\text{п}} < 90$ мкм в этих опытах число Фурье для покрытия $\text{Fo}_{\text{п}} = \frac{a_{\text{п}} \tau_{\text{к}}}{\delta_{\text{п}}^2} \geq 0,25$. Тогда за время контакта жидкости со стен-

кой $\tau_{\text{к}}$ покрытие уже нельзя рассматривать как полубесконечное. За это время успевает проявиться тепловое влияние стенки. Если $(\rho c \lambda)_{\text{п}} / (\rho c \lambda)_{\text{ж}} < 1$, то установившееся в первый момент значение $T_{\text{гр}}$ затем увеличится. Контакт при этом может нарушиться, что уменьшит снимаемое количество тепла. Следовательно, наступление кризиса будет зафиксировано при меньшей температуре стенки $T_{\text{кр II}}$, когда контакт не будет нарушаться даже при росте $T_{\text{гр}}$.

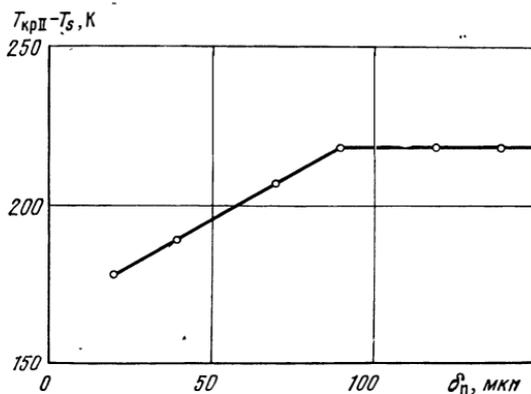


Рис. 7.16. Зависимость температуры кризиса пленочного кипения от толщины низко-теплопроводного покрытия $\delta_{\text{п}}$

Полагая, что при толщине покрытия $\delta_{\text{п}} = 90$ мкм для опытов на рис. 7.16 выполняется условие $a_{\text{п}} \tau_{\text{к}} / \delta_{\text{п}}^2 = 0,25$, можно получить для времени контакта $\tau_{\text{к}} = 0,01$ с. Непосредственные измерения дали среднее значение $\tau_{\text{к}} = 0,008$ с.

Следует заметить, что по приведенным выше соображениям значения $T_{\text{кр II}}$ на тонких металлических стенках без покрытий (при $\delta_{\text{ж}} < 2 \sqrt{a_{\text{ж}} \tau_{\text{к}}}$) будут, наоборот, выше, чем на таких же толстых стенках.

При $\tau_{\text{к}} = 0,01$ с этот эффект может проявляться на стенках для меди тоньше 6,5 мм, алюминия тоньше 1,3 мм, нержавеющей стали тоньше 0,4 мм. В пределе при $\delta_{\text{ж}} \rightarrow 0$ для любой начальной температуры стенки в месте контакта с жидкостью почти мгновенно будет устанавливаться $T_{\text{гр}} \approx T_{\text{ж}}$, т. е. контакт будет всегда возможен.

Важно подчеркнуть, что уравнения (7.19) и (7.20) обобщают опыты с покрытиями и толщинами стенок, для которых (кроме медной с $\delta_{\text{ж}} = 1,5$ мм) влияние толщины покрытия, а без него —

толщины стенки, уже не сказывалось, т. е. число Фурье для покрытия $Fo_{\text{п}} \leq 0,25$ или число Фурье для стенки $Fo_w \leq 0,25$.

7.10. ПЕРЕХОДНОЕ КИПЕНИЕ

Переходное кипение принадлежит к одному из наиболее интересных режимов кипения, в котором тепловой поток растет, когда температурный напор падает (см. рис. 7.9). Однако долгое время этот режим не представлял практического интереса и поэтому он мало изучен.

Лишь в последние годы в связи с развитием криогенной техники и широким применением криогенных топлив в ракетной технике, использованием эффекта сверхпроводимости в электромашинах, в магнитах, а также потребностями расчета полей температур изделий при закалке и т. д. возникла необходимость в расчете теплоотдачи в режиме переходного кипения. Поэтому исследование этого режима стало более интенсивным.

Переходное кипение характерно сложным сочетанием на поверхности нагрева пленочного и пузырькового режимов кипения и непрерывной сменой их в данной точке.

В силу ярко выраженного нестационарного, вероятностного характера процесса большую роль в теплосъеме играет нестационарная теплопроводность в местах контактов жидкости со стенкой.

Обозначим через f среднестатистическую долю поверхности нагрева в данный момент времени, контактирующую с жидкостью, а τ_k — среднестатистическую продолжительность отдельных контактов.

Как было показано в разд. 7.6 и 7.8, еще до возникновения кризиса пузырькового кипения (за который обычно принимается $T_w = T_{\text{кр} I}$ соответствующая максимуму q_w) появляются участки поверхности, временно занятые пленочным кипением. Таким образом, более точно областью переходного кипения считать область между точками π и D на рис. 7.9. В этой области $T_{\pi} \leq T_w \leq T_{\text{кр} II}$, $1 \geq f > 0$ соответственно.

В области переходного кипения среднестатистическая плотность теплового потока представится следующей суммой:

$$q_w = (q_{\tau} + q_k) f + q_{\text{пл}} (1 - f). \quad (7.24)$$

В этой сумме:

q_{τ} — средняя за время контакта τ_k плотность теплового потока, создаваемого нестационарной теплопроводностью в местах контакта жидкости со стенкой.

q_k — плотность теплового потока при развитом пузырьковом кипении в местах контакта.

$q_{\text{пл}}$ — плотность теплового потока в местах поверхности, где существует пленочное кипение.

Из решения одномерной задачи теплопроводности, уже рассмотренной в разд. 7.9, средний за τ_k тепловой поток в жидкость

$$q_{\tau} = 2 \sqrt{\frac{(\rho c \lambda)_{ж}}{\pi \tau_k}} (T_{гр} - T_{ж}). \quad (7.25)$$

Для определения q_k предположим, что закономерности теплоотдачи при развитом пузырьковом кипении, полученные в области $B^* \pi$, $T_B < T_W \leq T_{\pi}$ (см. рис. 7.9), будут справедливы и при $T_W > T_{\pi}$ в течение всего времени контакта τ_k . Это предположение хорошо согласуется с результатами исследований пузырькового кипения и его кризиса при быстрых изменениях q_W и T_W , описанных в разд. 7.8.

$$\text{Тогда} \quad q_k = \alpha_k (T_{гр} - T_s) = \varphi (T_{гр} - T_s), \quad (7.26)$$

где α_k или функция $\varphi (T_{гр} - T_s)$ в каждом конкретном случае берется как экстраполяция соответствующей кривой для развитого кипения из области $T_B \leq T_W \leq T_{\pi}$ на область $T_{\pi} \leq T_W \leq T_{гр}$. Для нахождения q_k можно рекомендовать также формулу (7.16). Для вычисления $q_{пл}$ используем выражение

$$q_{пл} = \alpha_{пл} (T_W - T_s), \quad (7.27)$$

где $\alpha_{пл}$ находится по формулам для режима пленочного кипения, который должен быть при $T_W \geq T_{кр II}$. Эти формулы экстраполируются на область $T_{\pi} < T_W < T_{кр II}$.

Теперь уравнение (7.24) с учетом уравнений (7.25) — (7.27) можно записать в виде

$$q_W = \left[2 \sqrt{\frac{(\rho c \lambda)_{ж}}{(\rho c \lambda)_W}} (T_{гр} - T_{ж}) + \alpha_k (T_{гр} - T_s) \right] f + \alpha_{пл} (T_W - T_s) (1 - f). \quad (7.28)$$

Но для практического использования этого уравнения необходимо знать, как зависят от T_W в области переходного кипения τ_k и f , а также $T_{гр}$.

На рис. 7.17 представлен ряд кривых кипения, полученных в большом объеме жидкого азота при захолаживании в нем вертикально расположенных трубок и шаров из разного материала.

Анализ этих и большого числа других экспериментов, выполненных при захолаживании различных образцов в большом объеме и при вынужденном течении криогенных жидкостей, позволил установить интересный факт, что с разбросом $\pm 25\%$

$$\frac{T_{кр II} - T_s}{T_{кр I} - T_s} = 1,65, \quad \text{а} \quad \frac{T_{кр II} - T_s}{T_{\pi} - T_s} = 2,2. \quad (7.29)$$

При вынужденном течении криогенных жидкостей в каналах эти отношения будут равны соответственно 1,5 и 2,5.

Поскольку непосредственные измерения τ_k и f пока неизвестны, то для их определения были приняты следующие допущения.

1. На участке $T_{кр I} < T_w \leq T_{кр II}$, $\tau_k = \text{const}$ для кипения в большом объеме криогенной жидкости на основании оценки, описанной в разд. 7.9, было принято $\tau_k = 0,01$ с.

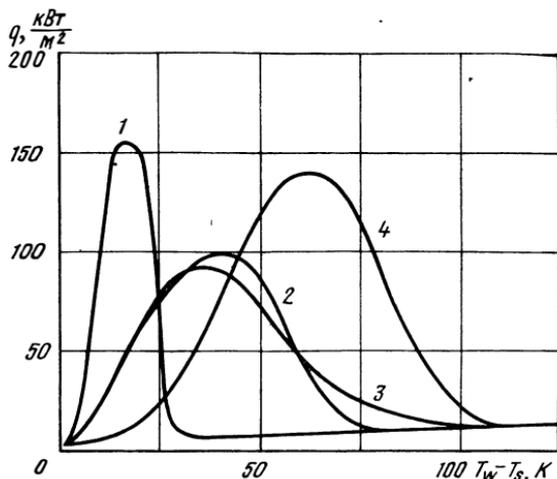


Рис 7.17. Кривые кипения, полученные в большом объеме азота при захлаживании шаров и вертикальных трубок из различных материалов: 1—медь; 2—сталь; 3—титан; 4—фторопласт

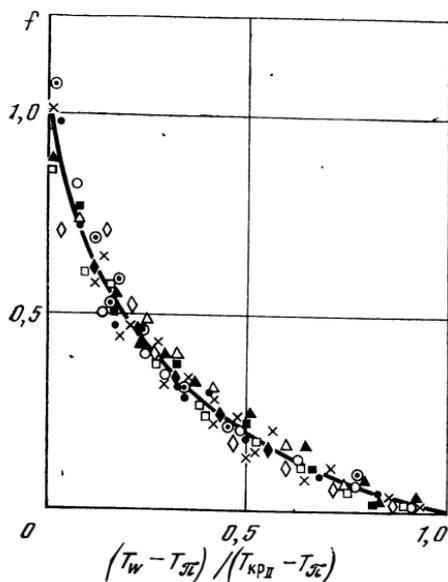


Рис. 7.18. Зависимость безразмерной площади контакта f от безразмерной температуры:
 ⊙—140 мкм; ○—80; ×—50;
 △—20; □—120; ×160; ◇—90;
 ▲—70; ●—40; ■—1 мм;
 ◆—2 мм

2. В области $T_\pi \leq T_w \leq T_{кр I}$ время контакта меняется по закону

$$\frac{1}{\sqrt{v_k}} = 10 \frac{T_w - T_\pi}{T_{кр I} - T_\pi}. \quad (7.30)$$

3. Температура поверхности контакта $T_{гр}$ определяется по формуле (7.12).

При этих допущениях по экспериментальным данным из уравнения (7.28) можно найти площадь контакта f как функцию T_w .

Результаты такой обработки опытных данных представлены на рис. 7.18. Как видно, опытные точки для существенно различных материалов с небольшим разбросом группируются около кривой, описываемой уравнением

$$f = \left(1 - \frac{T_w - T_\pi}{T_{кр II} - T_\pi}\right) / \left(1 + 3 \frac{T_w - T_\pi}{T_{кр II} - T_\pi}\right). \quad (7.31)$$

Таким образом, уравнение (7.28) с учетом уравнений (7.12), (7.23), (7.29) ÷ (7.31) и соответствующих зависимостей для α_k и $\alpha_{пл}$ может быть рекомендовано как расчетное для определения теплоотдачи при переходном кипении в большом объеме.

Выполненные по этому уравнению расчеты дают вполне удовлетворительное совпадение с экспериментом, если используются достаточно точные зависимости для развитого пузырькового кипения (для α_k).

7.11. ПЛЕНОЧНОЕ КИПЕНИЕ В БОЛЬШОМ ОБЪЕМЕ

Большинство опытных данных по теплоотдаче при пленочном кипении в большом объеме обычных и криогенных жидкостей получено при кипении насыщенных жидкостей ($T_{ж} = T_s$) и на поверхностях (шары, горизонтальные и вертикальные цилиндры, пластины и т. п.) нагрева, характерный размер которых превышает критическую длину волны колебаний раздела фаз:

$$l_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_{ж} - \rho_n)}}. \quad (7.32)$$

Все эти опытные данные могут быть удовлетворительно (со среднеквадратической погрешностью 25%) обобщены единой формулой:

$$Nu_n = 0,155 \left(Ga_n \frac{1 - \bar{q}}{\bar{q}} Pr_n \frac{1 + 0,34\theta_n}{\theta_n} \right)^{1/3}. \quad (7.33)$$

Здесь число Нуссельта $Nu_n = \frac{\alpha l_1}{\lambda_n} = \frac{q_w l_1}{\lambda_n (T_w - T_s)}$;

$Ga_n = \frac{g l_1^3}{\nu_n^2}$ — число Галилея;

$\theta_n = (c_{p_n} (T_w - T_s)) / r$ — безразмерный температурный напор;

$Pr_n = \nu_n (c_{p_n}) / \lambda_n$ — число Прандтля;

g — ускорение гравитационного поля;

l_1 — длина критической волны по уравнению (7.32);
 r — скрытая теплота парообразования;

$$\bar{q} = q_{\text{п}}/q_{\text{ж}}.$$

За определяющую температуру в формуле (7.33) принята $T_{\text{п}} = (T_{\text{в}} + T_{\text{с}})/2$. Формула верна в следующем диапазоне изменения параметров

$$\frac{1}{5} \cdot 10^5 \leq \text{Ga}_{\text{п}} \frac{1 - \bar{q}}{\bar{q}} \text{Pr}_{\text{п}} \leq 5,3 \cdot 10^9;$$

$$0,12 \leq \theta_{\text{п}} \leq 8,5.$$

Влияние недогрева жидкости $\Delta T_{\text{п}} = T_{\text{с}} - T_{\text{ж}}$ на теплоотдачу при пленочном кипении в большом объеме исследовано фактически лишь качественно. Трудность заключается в определении теплового потока $q_{\text{ж}}$, идущего на прогрев жидкости.

Распределение суммарного теплового потока $q_{\text{в}}$ на испарение жидкости, на прогрев пара $q_{\text{п}}$ и на прогрев недогретой жидкости $q_{\text{ж}}$ всегда саморегулируется так, чтобы при любых значениях температурного напора $T_{\text{в}} - T_{\text{с}}$ и недогрева $\Delta T_{\text{п}} = T_{\text{с}} - T_{\text{ж}}$ обеспечить на поверхности раздела фаз температуру насыщения (или свести к минимуму колебания ее около $T_{\text{с}}$).

Чем больше недогрев, тем больший тепловой поток должен быть пропущен транзитом через пленку пара. Это требует уменьшения ее теплового сопротивления, что можно достигнуть либо уменьшением толщины, либо увеличением уровня турбулентности в пленке пара.

Величина $q_{\text{ж}}$ помимо недогрева определяется характером свободной конвекции в жидкости, скоростью движения границы раздела фаз, увлекаемой паром, интенсивностью и характером ее колебаний.

Интенсивные колебания поверхности раздела фаз турбулизируют прилегающие слои жидкости, увеличивая эффективную теплопроводность в них и, следовательно, $q_{\text{ж}}$. С другой стороны, большие недогревы и $q_{\text{ж}}$ оказывают сильное демпфирующее воздействие на колебания поверхности раздела фаз. Когда значение $q_{\text{ж}}$ соизмеримо с $q_{\text{в}}$, изменения толщины пленки пара при колебаниях границы раздела фаз ведет к значительным локальным колебаниям $q_{\text{в}}$. При движении поверхности раздела к стенке температура пара возрастает, увеличивая интенсивность испарения жидкости. Возникают реактивные силы и силы давления, препятствующие движению жидкости к стенке.

Наоборот, при удалении поверхности жидкости от стенки, ее температура из-за роста теплового сопротивления пленки пара может упасть ниже $T_{\text{с}}$, что сразу же вызовет конденсацию пара на этом участке и падение давления, которое будет тормозить движение границы раздела фаз.

Учет всех этих явлений при постановке и обобщении экспериментов или в теоретических решениях представляет большие трудности, которые еще предстоит преодолеть в последующих исследованиях.

7.12 ПЛЕНОЧНОЕ КИПЕНИЕ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ТЕЧЕНИИ В КАНАЛАХ

При пленочном кипении в каналах теплоотдача и гидравлическое сопротивление существенно зависят от его режима.

Различают следующие основные режимы пленочного кипения.

1. Стержневой режим (кольцевой режим движения газовой фазы), когда жидкость (насыщенная или недогретая) движется в центральной части канала в виде турбулентной или ламинарной струи («жидкого стержня»). Жидкая струя отделена от стенок канала пленкой пара. Этот режим наблюдается обычно в начальном участке пленочного кипения.

2. Снарядный режим — режим разделения потока жидкости на отдельные не связанные друг с другом объемы — «снаряды». Этот режим образуется из стержневого в результате развития капиллярных волн на поверхности жидкости или в результате инерционного разрыва жидкого стержня при пульсациях расхода.

3. Дисперсный режим, в котором жидкость движется в виде капель, распределенных в потоке движущегося перегретого пара. Этот режим образуется из первых двух в результате динамического воздействия пара на жидкий «стержень» или жидкие «снаряды» (рис. 7.19).

Если канал расположен под углом к направлению поля массовых сил, то распределение фаз в перечисленных режимах будет несимметрично, особенно при малых числах Рейнольдса смеси. Это может привести к появлению нового, «расслоенного», режима пленочного кипения. Он образуется из стержневого, например, в горизонтальной трубе. Жидкость течет в нижней части трубы, отделенная от стенок пленкой пара, который движется вверх. Пар, собравшийся в верхней части трубы, движется вдоль оси потока. Если скорость пара относительно жидкости достаточно велика, то волны на поверхности жидкости могут достигать верхней стенки трубы.

В большинстве опубликованных работ не указывается, к какому режиму пленочного кипения относятся приводимые в них данные. Это существенно затрудняет их анализ. Классификация таких исследований по режимам производилась приблизительно — на основе анализа диапазона режимных параметров. Оказалось, что большинство опубликованных работ относится к исследованию дисперсного режима пленочного кипения насыщенной жидкости.

Теоретический анализ и обобщение экспериментальных данных при пленочном кипении в каналах сопряжены с большими трудностями, которые вызываются следующим.

1. Наличием термической неравновесности двухфазного потока, когда в каждом сечении канала одновременно существуют перегретый пар около стенки и насыщенная или недогретая жидкость вдали от нее, что не позволяет по количеству тепла, сообщенного потоку, судить о том, какая часть жидкости превратилась в пар.

2. Сложностью гидродинамики двухфазного потока и процессов теплообмена в нем.

3. Весь тепловой поток от стенки снимается частично паром, а частично излучением. Тепловой поток, снимаемый паром q_w , в свою очередь включает в себя три составляющих: тепловой поток на перегрев пара $q_{п}$ от температуры насыщения на границе раздела фаз до T_w около стенки, тепловой поток на испарение жидкости q_k с поверхности раздела фаз и, наконец, тепловой поток на прогрев жидкости $q_{ж}$, если она не догрета до температуры насыщения T_s .

Трехмерное (или двумерное в случае осесимметричного потока) рассмотрение процесса в настоящее время практически возможно лишь для стержневого режима. Причем, для турбулентного течения в жидком стержне и в паровой пленке такой подход возможен лишь приближенно — при использовании различных гипотез о распределении турбулентных параметров по сечению. Какие-либо исследования по структуре двухфазных турбулентных потоков пока неизвестны.

Для трехмерного рассмотрения дисперсного режима дополнительно требуется знать закономерности распределения капель жидкости по размерам и по потоку, что еще больше усложняет задачу теоретического анализа.

Поэтому, для построения инженерных методов расчета целесообразно использовать одномерные (для жидкости и для пара) модели описания двухфазных потоков при пленочном кипении. Они также перспективны и для описания двухфазных потоков при пузырьковом кипении.

В одномерных моделях предполагается, что все параметры пара и жидкости изменяются лишь по длине канала и во времени, но постоянны по сечению. Для этого вводятся среднерасходные скорости пара $u_{п}$ и жидкости $u_{ж}$ и среднемассовые температуры пара $T_{п}$ и жидкости $T_{ж}$. Температура раздела фаз всегда принимается равной температуре насыщения T_s , а стенки канала — T_w . Получим теперь замкнутую систему уравнений для одномерного описания двухфазных потоков, как обобщение аналогичной системы уравнений для однофазного потока (см. гл. V).

Уравнение неразрывности. Для одномерного потока однофазной среды в канале переменного сечения f уравнение неразрывности (5.1) имеет вид

$$f \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0,$$

где $G = \rho u f$ — массовый расход;
 u — среднерасходная скорость среды;
 z — координата.

При течении двухфазной среды с кипением надо написать два уравнения:
 для жидкости

$$f_{ж} \frac{\partial \rho_{ж}}{\partial \tau} + \frac{\partial G_{ж}}{\partial z} = - \frac{U_{ж} q_k}{r} \quad (7.34)$$

и для пара

$$f_{п} \frac{\partial \rho_{п}}{\partial \tau} + \frac{\partial G_{п}}{\partial z} = \frac{U_{ж} q_k}{r}. \quad (7.35)$$

Здесь $U_{ж}$ — суммарный периметр поверхности раздела фаз в данном сечении с координатой z .

Физический смысл членов уравнения (7.34) и (7.35) следующий.

Первый член слева — изменение массового расхода фазы из-за изменения плотности по времени.

Второй член — изменение расхода по длине потока.

Правая часть уравнений представляет собой изменение расхода из-за превращения жидкости в пар. Обычно принято расход жидкости и пара выражать через массовое паросодержание x и массовый расход двухфазной среды G , а доли сечения канала, занятые жидкостью $f_{ж}$ и паром $f_{п}$, — через объемное паросодержание φ и сечение канала f . Так как

$$x = \frac{G_{п}}{G_{п} + G_{ж}} = \frac{G_{п}}{G}, \quad (7.36)$$

$$\varphi = \frac{f_{п}}{f_{п} + f_{ж}} = \frac{f_{п}}{f}, \quad (7.37)$$

то имеем

$$G_{ж} = G(1 - x) = \rho_{ж} u_{ж} f(1 - \varphi); \quad (7.38)$$

$$G_{п} = Gx = \rho_{п} u_{п} f\varphi; \quad (7.39)$$

$$f_{ж} = f(1 - \varphi); \quad (7.40)$$

$$f_{п} = f\varphi. \quad (7.41)$$

Уравнения движения. Для однофазной жидкости в гл. V одномерное уравнение движения было получено в виде

$$\rho \frac{du}{d\tau} = F_z \rho - (1 - \delta) \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (7.42)$$

где $\delta(\partial p/\partial z)$ — доля градиента давления, расходуемая в данном сечении на преодоление сил вязкого трения в среде;

F_z — проекция плотности массовых сил на ось канала OZ .

В случае гравитационного поля $F_z = g_z$. Так как коэффициент сопротивления однофазной среды в каналах

$$\xi = \frac{-\delta(\partial p/\partial z)}{\rho u^2/(2d)}, \quad (7.43)$$

то в уравнении (7.42) можно сделать замену

$$\delta \frac{\partial p}{\partial z} = -\xi \frac{\rho u^2}{2d},$$

а также раскрыть полную производную:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (7.44)$$

Потери на трение $\delta(\partial p/\partial z)$ удобно представить через касательные напряжения на стенке τ_w :

$$\delta \frac{\partial p}{\partial z} f = -\tau_w U_w,$$

где U_w — периметр канала.

В случае течения двухфазной среды в гравитационном поле получим два уравнения движения:

$$\rho_{ж} \frac{du_{ж}}{d\tau} = \frac{\rho_{п}(u_{п} - u_{ж})}{x} \frac{dx}{d\tau} + g_z \rho_{ж} - \frac{dp}{dz} + [\text{sign}(u_{п} - u_{ж})] \tau_{ж} \frac{U_{ж}}{f_{ж}}. \quad (7.45)$$

Это уравнение движения жидкой фазы, в котором

$U_{ж}$ — периметр поверхности раздела фаз в данном сечении;

$\tau_{ж}$ — касательное напряжение на поверхности раздела фаз;

$\text{sign}(u_{п} - u_{ж})$ означает, что перед членом $\tau_{ж}(U_{ж}/f_{ж})$ берется знак плюс, если $(u_{п} - u_{ж}) > 0$, и минус, если $(u_{п} - u_{ж}) < 0$.

Смысл членов этого уравнения состоит в следующем. Член в левой части — инерционная сила ускорения жидкой фазы; первый член справа — реактивная сила от испарения жидкости; второй член — массовые силы; третий — поверхностные силы от градиента давления и четвертый — касательные силы на границе раздела фаз. Аналогично

$$\begin{aligned} \rho_{п} \frac{du_{п}}{d\tau} = & -\frac{\rho_{п}(u_{п} - u_{ж})}{x} \frac{dx}{d\tau} + g_z \rho_{п} - \frac{dp}{dz} - \\ & - [\text{sign}(u_{п} - u_{ж})] \tau_{ж} \frac{U_{ж}}{f_{п}} - \tau_w \frac{U_w}{f_{п}}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Это уравнение движения для паровой фазы. Последний член справа — касательные силы от трения пара о стенки канала. Смысл остальных членов тот же, что и в уравнении (7.45).

Уравнение энергии. При одномерном описании процесса в канале с поперечным сечением f уравнение энергии для однофазного потока в гл. V было получено в виде

$$f \rho \frac{di_f}{d\tau} = U_w q_w - f \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{\text{эф}} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f \frac{dp}{d\tau} + f T_{\text{эф}} \sigma. \quad (7.47)$$

Здесь $i_f = \frac{\int \rho i u df}{\int \rho u df}$ — среднемассовая энтальпия в данном сече-

нии канала;

T_f — соответствующая i_f среднемассовая температура;

ρ — плотность при $T = T_f$;

λ — эффективный коэффициент теплопроводности (осреднение по f), учитывающий осевые перетечки тепла;

σ — скорость роста энтропии в единице объема из-за неравновесных процессов.

В теплообменных процессах в каналах обычно последние три члена справа в уравнении (7.47) много меньше первого. Тогда уравнение упрощается:

$$f \rho \frac{di_{\text{ср}}}{d\tau} = U_w q_w. \quad (7.48)$$

Для изобарных процессов любой среды или любых процессов совершенного газа ($p = \rho RT$) из термодинамики имеем $di = c_p dT$. В этих случаях уравнение (7.48) будет

$$\frac{c_p G}{u} \frac{\partial T_{\text{ср}}}{\partial \tau} + c_p G \frac{\partial T_{\text{ср}}}{\partial z} = U_w q_w. \quad (7.49)$$

При течении двухфазной среды по аналогии с уравнением (7.48) или (7.49) для жидкости

$$\frac{G_{\text{ж}}}{u_{\text{ж}}} \frac{\partial i_{\text{ж}}}{\partial \tau} + G_{\text{ж}} \frac{\partial i_{\text{ж}}}{\partial z} + (i_{\text{жс}} - i_{\text{ж}}) \frac{\partial G_{\text{ж}}}{\partial z} = U_{\text{ж}} q_{\text{ж}} \quad (7.50)$$

и для пара —

$$\frac{G_{\text{п}}}{u_{\text{п}}} \frac{\partial i_{\text{п}}}{\partial \tau} + G_{\text{п}} \frac{\partial i_{\text{п}}}{\partial z} + (i_{\text{п}} - i_{\text{пс}}) \frac{\partial G_{\text{п}}}{\partial z} = U_w q_w - U_{\text{ж}} (q_{\text{ж}} + q_{\text{п}}). \quad (7.51)$$

Здесь $i_{\text{ж}}$ и $i_{\text{п}}$ — среднемассовые значения энтальпии для жидкости и пара;

$i_{\text{пс}}$ — энтальпия пара при T_s .

Третий член слева в уравнении (7.50) — тепловой поток на догрев жидкости до температуры насыщения, а в уравнении

(7.51) он учитывает затраты тепла на перегрев вновь образовавшегося пара. Можно добавить еще очевидное соотношение

$$q_w = q_n + (q_j + q_k) \frac{U_j}{U_w}. \quad (7.52)$$

Таким образом, при одномерном подходе к описанию двухфазных потоков в каналах мы получили 12 уравнений. Это уравнения (7.34) — (7.36), (7.38) — (7.41), (7.45), (7.46), (7.50) — (7.52). В них содержатся 26 неизвестных:

$$q_j, q_n, f, f_n, f_j, U_w, U_j, q_w, q_j, q_k, q_n, G, G_n, G_j, \\ g_z, p, \tau_w, \tau_j, i_j, i_n, i_{ns}, r, u_n, u_j, \varphi, x.$$

Для каждого конкретного процесса, т. е. из условий однозначности, дополнительно должны быть известны зависимости:

$$f = f(z); U_w = f(z); g_z = (z, \tau); i_j = i_j(p, T_j); i_n = i_n(p, T_n); \\ q_j = q_j(p, T_j); q_n = q_n(p, T_n); r = r(T_s); T_s = T_s(p). \quad \text{!}$$

Это дает еще 9 уравнений и три неизвестных T_n, T_j и T_s . Итак, получена система из 21 уравнения с 29 неизвестными. Начальные условия в сечении $z=0$:

$$G = G_0(\tau); x = x_0(\tau); \varphi = \varphi_0(\tau); p = p_0(\tau); T_j = T_{j0}(\tau)$$

и
$$T_n = T_{n0}(\tau).$$

Граничные условия: $q_w = q_w(z, \tau)$ или $T_w = T_w(z, \tau)$. Оба эти граничные условия связаны между собой через коэффициент теплоотдачи соотношением

$$q_w = \alpha(T_w - T_s). \quad (7.53)$$

Знание α представляет большой практический интерес. Для замыкания системы необходимо располагать дополнительно еще восемью уравнениями.

1. Для определения тепловых потоков —

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha(z, \tau); & q_j &= q_j(z, \tau); \\ q_k &= q_k(z, \tau); & q_n &= q_n(z, \tau). \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

2. Для определения касательных напряжений трения на стенке и границе раздела фаз —

$$\tau_w = \tau_w(z, \tau); \quad \tau_j = \tau_j(z, \tau). \quad (7.55)$$

3. Для определения термической неравновесности процесса —

$$x = x(z, \tau); \quad \varphi = \varphi(z, \tau). \quad (7.56)$$

Все эти восемь зависимостей не могут быть определены в рамках одномерной модели, ибо они характеризуют, как реальный

трехмерный процесс проявляет себя при одномерном его описании.

Уравнения (7.53)—(7.56) могут быть определены либо из трехмерной теории, либо из эксперимента. Поэтому получение этих уравнений как раз и является основной задачей исследования пленочного кипения в каналах.

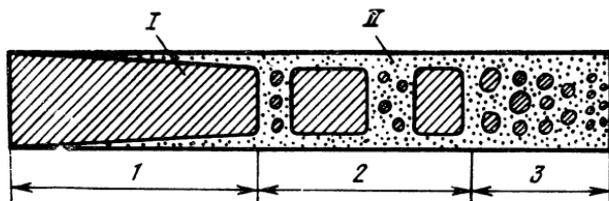


Рис. 7.19. Схема смены режимов пленочного кипения в вертикальной трубе:
 I—жидкость; II—пар; 1—стержневой; 2—снарядный, 3—дисперсный

Если в результате таких исследований удастся найти для конкретных процессов вид уравнений (7.53)—(7.56), то для их обобщения привлекается теория подобия. С ее помощью из анализа всей системы уравнений в целом находятся искомые безразмерные параметры, включающие α , $q_{ж}$, $q_{п}$, τ_{w} , $\tau_{ж}$ (χ и φ уже безразмерные), и набор независимых безразмерных параметров. Затем с учетом гипотез о механизме процесса находится вид безразмерных функций, связывающих зависимые и независимые параметры. Очевидно, что вид этих функций и даже самих безразмерных параметров существенно зависит от режима пленочного кипения. Поэтому исследование пленочного кипения в каналах должно проводиться отдельно для каждого режима. Особое внимание следует уделять определению условий (критерия) смены одного режима пленочного кипения другим. Поскольку каждый режим пленочного кипения имеет свою специфику, то это несомненно должно учитываться при записи уравнений приведенной выше одномерной системы уравнений. В частности, для основных режимов пленочного кипения в трубе можно использовать следующие очевидные соотношения.

1. Стержневой режим —

$$\varphi = 1 - \left(\frac{d_{ж}}{d} \right)^2 \simeq \frac{4\delta_{п}}{d}, \quad (7.57)$$

где $d_{ж}$ — диаметр жидкого стержня, а $\delta_{п}$ — толщина пленки пара, и

$$U_{ж} = \pi d_{ж}. \quad (7.58)$$

2. Снарядный режим —

$$\varphi = 1 - \left(\frac{d_{\text{ж}}}{d} \right)^2 \frac{l_{\text{сн}}}{l_{\text{сн}} + l_{\text{пер}}} \quad (7.59)$$

и

$$U_{\text{ж}} = \frac{\pi d_{\text{ж}} l_{\text{сн}}}{l_{\text{сн}} + l_{\text{пер}}} \quad (7.60)$$

Здесь $d_{\text{ж}}$ — диаметр жидкого «снаряда», $l_{\text{сн}}$ — его длина, а $l_{\text{пер}}$ — расстояние между снарядами.

3. Дисперсный режим.

Суммируя долю элементарного объема $f dz$, занятую каплями жидкости $\frac{\pi d_{\text{к}}^3}{6} n f dz$, где n — число капель в единице объема, и паром $f_{\text{п}} dz$, найдем с учетом уравнения (7.41)

$$f dz = \frac{\pi d_{\text{к}}^3}{6} n f dz + \varphi f dz,$$

где $d_{\text{к}}$ — средний диаметр капель.

Тогда
$$\varphi = 1 - n \frac{\pi d_{\text{к}}^3}{6} \quad (7.61)$$

Так как в уравнениях движения (7.45) $\tau_{\text{ж}}(U_{\text{ж}}/f_{\text{ж}})$ — касательная сила, действующая на всей поверхности раздела фаз элементарного объема жидкости при отнесении ее к единице объема, то

$$\frac{U_{\text{ж}}}{f_{\text{ж}}} = \frac{U_{\text{ж}} dz}{f_{\text{ж}} dz} = \frac{\pi d_{\text{к}}^2}{\pi d_{\text{к}}^3} \frac{n f_{\text{ж}} dz}{n f_{\text{ж}} dz} = \frac{6}{d_{\text{к}}}$$

или с учетом уравнений (7.41) и (7.61)

$$U_{\text{ж}} = \frac{6 f_{\text{ж}}}{d_{\text{к}}} = \frac{6 f (1 - \varphi)}{d_{\text{к}}} = \pi d_{\text{к}}^2 n f \quad (7.62)$$

Итак, если в результате обобщения экспериментов или трехмерных теоретических расчетов получен вид безразмерных зависимостей для определения α , $q_{\text{ж}}$, $q_{\text{к}}$, τ_{w} , $\tau_{\text{ж}}$, χ и φ , то рассмотренная система уравнений оказывается замкнутой, и она может использоваться для практических расчетов теплообмена и гидродинамики в соответствующем режиме пленочного кипения при вынужденном течении в канале. В общем случае такие расчеты могут потребовать применения ЭВМ, особенно для нестационарных процессов.

В нестационарных условиях задача усложняется существенно тем, что граничные условия для потока T_{w} или q_{w} обычно заранее задать нельзя. Это приводит к необходимости рассмотрения сопряженной задачи стенка канала — поток. В этом случае

к рассмотренной системе уравнений добавляются уравнение энергии (теплопроводности) для стенки канала и условия сопряжения (равенство температур и тепловых потоков по обе стороны внутренней поверхности стенки), а граничные условия задаются на наружной поверхности стенки $q_n = q_n(z, \tau)$ или $T_n = T_n(z, \tau)$.

В экспериментах по исследованию пленочного кипения соответствующие замеры и использование рассмотренной системы уравнений должны обеспечить получение зависимостей (7.54) — (7.56), которые затем и обобщаются в безразмерном виде.

Однако сложность измерения в экспериментах всех необходимых параметров при пленочном кипении в каналах настолько велика, что до сих пор ни в одном исследовании они не были осуществлены в полном объеме. Поэтому в исследованиях вводят те или иные гипотезы и допущения для сокращения числа измерений и искомым величин*.

7.13. ТЕПЛОБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА

Конденсация представляет собой процесс перехода пара или газа в жидкое состояние. Это явление широко встречается на практике в ряде теплотехнических устройств.

Процесс конденсации всегда происходит с выделением тепла, и поэтому он неразрывно связан с явлениями теплообмена. Конденсация может происходить как в объеме пара, так и на соответствующих поверхностях теплотехнических устройств (теплообменников, конденсаторов и др.).

Спонтанное образование паровых зародышей в объеме жидкой фазы требует перегревов $\delta T_n \leq T_{пр} - T_s$, ограниченных температурой предельного перегрева жидкости $T_{пр}$. Аналогично, спонтанное образование зародышей жидкости в объеме пара требует переохладения пара $\delta T_{ж} \leq T_s - T_{пр}''$, ограниченного температурой предельного переохладения пара $T_{пр}''$ (для воды при атмосферном давлении $T_{пр} - T_s \approx 220$ К, а $T_s - T_{пр}'' \approx 44$ К).

При увеличении переохладения пара критический радиус капли $R_{кр}$ уменьшается и, следовательно, вероятность спонтанного образования капель с $R \geq R_{кр}$ в объеме возрастает. Когда переохладение достигает своего предельного для данного давления значения $T_s - T_{пр}''$, число капель с $R \geq R_{кр}$, возникающих в единицу времени и в единице объема, становится столь большим, что конденсация пара происходит по всему объему.

Капли с $R < R_{кр}$ неустойчивы. Возникнув в результате флуктуаций плотности, они быстро испаряются. Наоборот, если $R > R_{кр}$, то такие капли из-за конденсации на них пара непрерывно растут (если T_n и p постоянны).

* Подробное изложение и анализ результатов исследования различных режимов пленочного кипения содержатся в монографии [76] и обзоре [63].

Капля, находящаяся в термодинамическом равновесии с паром, называется зародышем или ядром жидкой фазы, а ее радиус — критическим:

$$R_{кр} = \frac{2\sigma}{\rho_{ж} R_{п} T_{п}} \frac{1}{\ln p_{п}/p_s} \quad (7.63)$$

Здесь σ — поверхностное натяжение капли;
 $R_{п}$ — газовая постоянная для пара;
 $p_{п}$ — давление пара;
 p_s — давление насыщения пара над плоской поверхностью жидкости для данной температуры T .

Отношение $p_{п}/p_s > 1$ называется степенью перенасыщения пара. При выводе формулы (7.63) учтено, что под действием поверхностного натяжения давление внутри капли $p_{ж}$ больше давления окружающего пара $p_{п}$ на величину $2\sigma/R$.

Спонтанная конденсация пара в объеме часто встречается на практике при течении пара в соплах, в паровых турбинах, в магистралах при наличии резких расширений и т. п.

В этих случаях происходит быстрое адиабатное или политропное расширение пара, при котором его температура падает ниже T_s для текущего давления p , следовательно, пар переохлаждается ($T_{п} < T_s$) и перенасыщается ($p > p_s$).

В сечении потока, где переохлаждение достигает предельного значения, возникает огромное количество зародышей жидкости с $R \geq R_{кр}$. На этих и новых зародышах со все возрастающей скоростью происходит конденсация пара. Размеры капель при этом растут и резко растет тепловыделение при переходе пара в жидкость. Это тепловыделение так велико, что пар, несмотря на расширение канала, успевает нагреться до T_s , и конденсация прекращается. Поэтому в сечении канала, расположенном по потоку несколько ниже сечения, где $T_{п}$ достигала $T_{пр}''$ и где образовались зародыши, возникает так называемый скачок конденсации, сопровождаемый ростом температуры и давления пара. Таким образом, процесс конденсации при течении пара в соплах происходит термически неравновесно. Более подробно конденсация в соплах и турбинах рассмотрена в работе [48].

Энергия, необходимая для возникновения зародыша жидкой фазы на гладкой твердой поверхности значительно меньше, чем для образования зародыша в объеме пара. Поэтому конденсация на твердой поверхности начинается при переохлаждении пара, много меньшем предельного. Переохлаждение это тем меньше, чем больше угол смачивания θ .

Еще меньшие затраты энергии требуются для возникновения новой фазы в углублениях и трещинах.

Таким образом, при конденсации пара на твердой поверхности с $T_w < T_s$ зародыши жидкости сначала возникают в углубле-

ниях и трещинах с малыми углами раствора, а затем конденсация идет на поверхности этих зародышей.

Если жидкость смачивает поверхность ($\theta \leq 90^\circ$), то эти зародыши растут и сливаются в сплошную пленку жидкости, на поверхности которой в дальнейшем и происходит конденсация пара.

Такая конденсация называется пленочной. В процессе пленочной конденсации температура поверхности жидкой пленки $T_{жс}$ в большинстве случаев близка к T_s , но $T_s - T_{жс} > 0$. Аналогично, при испарении с поверхности $T_{жс} - T_s > 0$. Этот скачок температур на границе раздела фаз называют тепловым сопротивлением фазового перехода.

Величина $T_s - T_{жс}$ зависит от рода жидкости, давления, коэффициента конденсации η_k и интенсивности фазового перехода. Коэффициентом конденсации или accommodation и называется отношение числа молекул пара, оставшихся в жидкости, к числу всех молекул пара, столкнувшихся с поверхностью жидкости. Пока нет надежных методов его расчета. Для абсолютно чистой жидкости и пара $\eta_k \cong 1$. Однако даже следы примесей могут уменьшить η_k до значений много меньших единицы. Для обычных и криогенных жидкостей при атмосферном давлении (вообще при не очень малом значении $p/p_{кр}$) разность $T_s - T_{жс}$ в практически важных случаях пренебрежимо мала. Однако при очень малых $p/p_{кр}$, особенно для жидких металлов, разность $T_s - T_{жс}$ может достигать 10—15° К.

В процессе пленочной конденсации на поверхности раздела фаз выделяется тепло, которое необходимо отводить через пленку конденсата к стенке.

Тепловое сопротивление пленки зависит от ее толщины, коэффициента теплопроводности, степени турбулизации, наличия волн на поверхности и т. п.

Поэтому условия отвода конденсата с поверхности и режим течения жидкой пленки наряду с режимом течения пара определяют интенсивность конденсации пара на стенках при заданном значении $T_{п} - T_w$.

Если жидкость не смачивает поверхности, то при конденсации образуется не сплошная пленка, а отдельные капли конденсата на поверхности. В микроуглублениях, трещинах или на смачиваемых инородных вкраплениях возникают зародыши жидкой фазы. Они растут в силу последующей конденсации на них пара и захвата его молекул, первоначально абсорбированных на поверхности между каплями, а затем диффундирующих вдоль поверхности к зародышам. При соприкосновении соседних капель друг с другом они сливаются в общую каплю. На 1 см², как показали опыты, может располагаться более 1 млн зародышей, а капля в процессе своего роста может иметь до 400 000 слияний.

Коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации в 2—20 раз выше, чем при пленочной. Большинство используемых в технике жидкостей смачивает поверхность. Поэтому пленочная конденсация на практике встречается значительно чаще. Однако применение специальных покрытий (для воды, например, золото и другие благородные металлы), несмачиваемых жидкостью, позволяет использовать в технике капельную конденсацию. Этим достигается значительное уменьшение габаритов и массы конденсаторов.

При капельной конденсации, так же как и при пленочной, основной задачей является отвод конденсата с поверхности. С этой целью используют силовые поля (гравитационное, центробежное, электрическое, магнитное) или вынужденное движение пара.

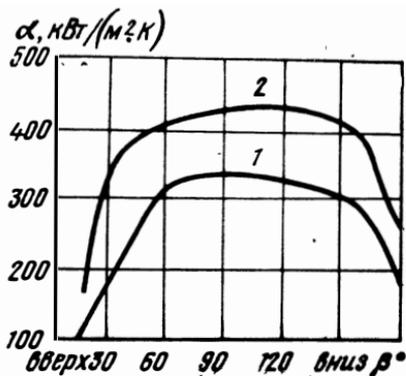


Рис 7.20. Зависимость коэффициента теплоотдачи от угла наклона поверхности к горизонту:

$$1 - q_w = 360 \text{ кВт/м}^2; \quad 2 - q_w = 625 \text{ кВт/м}^2$$

Наиболее часто используют гравитационное поле и вынужденное движение пара. Капли конденсата, достигнув критического размера, скользят или катятся по наклонной поверхности под действием сил тяжести, а на их месте возникают новые и т. д. Критический размер капли зависит от значения величин угла смачивания, угла наклона поверхности и поверхностного натяжения.

Рис. 7.20 иллюстрирует зависимость коэффициента теплоотдачи от угла наклона поверхности к горизонту при капельной конденсации водяного пара на медной поверхности, покрытой тонкой пленкой золота.

При вертикальной ориентации поверхности, как показали Тоуэр и Вествотер, капли находятся на поверхности минимальное время, частота их отрыва максимальна, а критический размер минимален. В этом положении образуется максимальное число зародышей.

Все эти величины довольно слабо зависят от угла наклона в диапазоне от 30 до 150°, а затем зависимость от угла усиливается. Наихудшие условия для отвода конденсата и минимальная теплоотдача создаются на горизонтальной поверхности, обра-

щенной вверх. На ней через некоторое время после начала капельной конденсации капли сливаются в сплошную пленку и капельная конденсация переходит в пленочную.

Процесс капельной конденсации (механизм роста капли, отвода тепла от ее поверхности, закономерности ее движения и т. п.) в настоящее время изучен еще недостаточно для построения количественных зависимостей.

7.14. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ПЛЕНОЧНОЙ КОНДЕНСАЦИИ НЕПОДВИЖНОГО ПАРА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Расчет теплоотдачи при пленочной конденсации в основном сводится к определению толщины пленки конденсата и ее теплового сопротивления. Однако если в паре имеется примесь неконденсирующегося газа, то у поверхности конденсации образуется диффузионный пограничный слой. Концентрация примеси газа в этом случае увеличивается по направлению к поверхности пленки конденсата. Газ переносится к пленке конвекцией пара, а удаляется в поток диффузией. Это снижает парциальное давление пара у поверхности раздела фаз, затрудняет приток массы конденсирующегося пара к поверхности и, тем самым, служит тепловым сопротивлением, которое необходимо учитывать. Примеси инертного газа существенно снижают теплоотдачу при конденсации.

Исследования показали, что влияние примеси неконденсирующегося газа тем сильнее снижает теплоотдачу, чем:

- а) больше концентрация примеси в потоке;
- б) больше интенсивность конденсации, т. е. чем больше $T_s - T_w$, и меньше давление конденсирующегося пара.

Так же было проведено исследование влияния перегрева пара на теплоотдачу при конденсации. Подтвержден физически ясный вывод о том, что влияние перегрева пара тем больше, чем меньше скорость конденсации пара и чем больше тепловой поток от пара конвекцией и теплопроводностью. В этом случае доля теплового потока, передаваемая через пленку конденсата к поверхности теплопроводностью и конвекцией от перегретого пара, естественно, возрастает. Поэтому влияние перегрева пара на теплоотдачу при конденсации тем сильнее, чем меньше $T_s - T_w$, чем больше концентрация неконденсирующегося газа в паре и чем больше давление пара.

Если предположить течение пленки конденсата ламинарным, а распределение температуры в ней линейным, пренебречь тепловым сопротивлением фазового перехода и недогревом пленки конденсата, не учитывать ускорения пленки и трения ее о пар, то можно теоретически получить уравнение для среднего коэффициента теплоотдачи при конденсации чистого насыщенного пара

на поверхности длиной L в виде

$$\bar{\alpha} = 0,943 \left[\frac{\lambda_{ж}^3 g \sin \beta \cdot Q_{ж} (Q_{ж} - Q_{н}) r^*}{\mu_{ж} (T_s - T_w) L} \right]^{1/4}. \quad (7.64)$$

Здесь β — угол наклона поверхности к горизонту, а r^* — эффективная теплота парообразования, учитывающая недогрев пленки и отклонение профиля температур в ней от линейного.

При

$$c_{ж} (T_s - T_w) / r < 2$$

$$r^* = r + 0,68 c_{ж} (T_s - T_w).$$

Учет трения на поверхности раздела фаз уменьшает теплоотдачу тем сильнее, чем больше $c_{ж} (T_s - T_w) / r$, если трение о пар тормозит движение пленки. Колебания поверхности раздела, наоборот, увеличивают среднюю теплоотдачу.

Уравнение (7.64) справедливо и при конденсации пара на горизонтальном цилиндре с диаметром d_n , если положить $\sin \beta = 1$ и заменить в нем

$$L = 2,78 d_n.$$

Для конденсации пара на пучке горизонтальных труб, расположенных друг над другом в n рядов,

$$\bar{\alpha} = 0,728 \left[1 + 0,2 \frac{c_{ж} (T_s - T_w)}{r} (n - 1) \right] \left[\frac{g Q_{ж} (Q_{ж} - Q_{н}) \lambda_{ж}^2 r^*}{n d_n \mu (T_s - T_w)} \right]^{1/4}. \quad (7.65)$$

Эта формула рекомендуется при $(n-1) c_{ж} (T_s - T_w) / r < 2$.

Конденсация внутри коротких горизонтальных труб диаметром d_n при $Re_n \leq 35\,000$ также может рассчитываться по формуле (7.64), полагая $\sin \beta = 1$ и $L = 8,4 d_n$.

Конденсация жидких металлов имеет свою специфику. Расчет теплоотдачи пленочной конденсации жидких металлов по формулам (7.64) и (7.65) дает величины, значительно превосходящие данные экспериментов (до 30 раз).

Причиной этого расхождения может быть следующее.

1. Тепловое сопротивление на поверхности конденсации из-за окисных пленок, адсорбированных газов и других загрязнений поверхности.

2. Наличие в паре примесей неконденсирующихся газов. Непрерывная очистка пара и тщательная герметизация всего контура позволяют устранить примеси неконденсирующихся газов.

3. Тепловое сопротивление фазового перехода $T_s - T_{жс}$, где $T_{жс}$ — температура поверхности жидкой пленки, которая в большинстве случаев близка к T_s , но $T_s - T_{жс} > 0$.

Типичное распределение температуры при конденсации насыщенного пара жидкого металла представлено на рис. 7.21. Как

видим, около поверхности конденсата существует тонкий слой переохлажденного пара, состоящий из «медленных» отраженных и испарившихся молекул, а также молекул, с которыми они успели столкнуться. Ряд проведенных исследований показал, что толщина этого слоя $\delta^* = 10\bar{l}$, где \bar{l} — средняя длина свободного пробега молекул. С помощью молекулярно-кинетической теории газов было показано, что

$$\frac{T_s - T_\phi}{T_\phi - T_{жс}} = \frac{\lambda_{II}}{G_{II}(c_p)_{II}(B + \delta^*)}. \quad (7.66)$$

Здесь

$$G_{II} = \frac{2\eta_{II}}{2 - \eta_{II}} (p_\phi - p_{жс}) \sqrt{\frac{M}{2\pi R_y T_\phi}},$$

M — молекулярная масса пара;

R_y — универсальная газовая постоянная;

p_ϕ и $p_{жс}$ — давления насыщения, соответствующие T_ϕ и $T_{жс}$;

$$B = \frac{2l(c_p/c_v)_{II}}{Pr_{II}(c_p/c_v)_{II} + 1};$$

$$\bar{l} \approx \frac{10^{10}\mu_{II}}{266,93 \sqrt{2MT_\phi n}},$$

где μ_{II} — коэффициент динамической вязкости пара в Н·с/м²;
 $n = p_s(kT_\phi)$ — количество молекул пара в 1 м³;
 $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

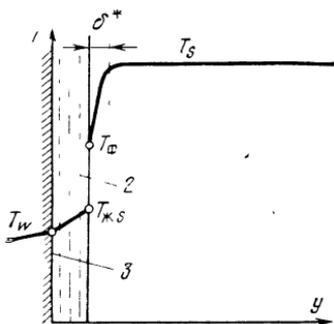


Рис. 7.21. Типичное распределение температуры при пленочной конденсации насыщенного пара жидкого металла:

1 — насыщенный пар; 2 — пленка конденсата; 3 — поверхность конденсата

Тогда тепловой поток при конденсации рекомендуется определять по уравнению

$$q_w = G_p r^{**},$$

где с учетом переохлаждения пара и недогрева жидкости в пленке

$$r^{**} = (c_p)_{II}(T_s - T_{жс}) + r + \frac{3}{8} c_{ж}(T_{жс} - T_w).$$

Падение температуры в пленке $T_{жс} - T_W$ может быть определено по формуле

$$T_{жс} - T_W = \frac{q_W}{\alpha}, \quad (7.67)$$

в которой $\bar{\alpha}$ находится по уравнению (7.64) или (7.65).

Расчет по уравнениям (7.66) — (7.67) удовлетворительно обобщает известные экспериментальные данные по конденсации натрия, калия и ртути в диапазоне $\bar{p} = 0,01 \div 100$ кПа при постоянном коэффициенте конденсации $\eta_{жк} = 1$ и $\delta^* = 10\bar{l}$.

Учет переохлаждения пара у поверхности раздела приводит к кажущемуся значительному уменьшению $\eta_{жк}$ с ростом p при $p_s = 1$ кПа.

7.15. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ПЛЕНОЧНОЙ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА В УСЛОВИЯХ ВЫНУЖДЕННОГО ТЕЧЕНИЯ

При вынужденном течении пара последний, взаимодействуя с поверхностью пленки конденсата, существенно влияет на режим течения в пленке.

Из-за сил трения и профильного сопротивления, возникающих на поверхности конденсата, пленка увлекается паром. При достаточно большой скорости пара его трение о пленку может оказывать значительно большее влияние на режим и направление течения пленки конденсата, чем гравитационные силы.

Конденсация, так же как и кипение, при вынужденном течении двухфазной среды в каналах в зависимости от значения режимных параметров происходит в различных режимах течения: пузырьковом, снарядном, кольцевом, дисперсном, стратифицированном и т. п. (см. рис. 7.13).

Естественно, что в каждом из этих режимов расчетные зависимости по теплоотдаче будут различны.

В общем случае обработку экспериментальных данных или построение расчетных схем целесообразно вести на основе замкнутых систем уравнений, типа (7.34) — (7.56), проанализированных в разд. 7.12.

Это диктуется теми же соображениями, которые обсуждались в разд. 7.12 для пленочного кипения: термическая неравновесность процесса, определяющее влияние режима течения и т. д.

В настоящее время теплоотдача при конденсации в условиях вынужденного течения в каналах изучена весьма слабо. Преобладают попытки обобщения экспериментальных данных выражениями, которые не учитывают ни степени неравновесности процесса, ни режима течения. Они удовлетворительно описывают лишь данные конкретных экспериментов. Использование таких формул для условий, отличных от тех, в которых они получены, может привести к большим ошибкам.

В. И. Минкович и Е. М. Спэрроу предложили метод расчета теплоотдачи при конденсации в трубе при вынужденном течении пара. Режим течения предполагается кольцевым; пар течет в центре трубы, а у стенки — пленка конденсата. Уравнения записываются только для пленки конденсата. Взаимодействие пленки конденсата с паром и гравитационные силы при течении двухфазной среды в трубе учитываются через градиент давления dp/dz и касательное напряжение τ_ϕ , входящие в эти уравнения.

Уравнение движения пленки толщиной δ —

$$\frac{\mu_{\text{ж}} du_{\text{ж}}}{dy} = \frac{dp}{dz} (\delta - y) + \tau_\phi$$

или

$$u_{\text{ж}} = \frac{dp}{dz} \left(\delta y - \frac{y^2}{2} \right) \frac{1}{\mu_{\text{ж}}} + \frac{\tau_\phi}{\mu}$$

Тогда расход жидкости через пленку конденсата толщиной δ , отнесенный к единице длины среднего периметра пленки,

$$\Gamma = \int_0^\delta \rho_{\text{ж}} u_{\text{ж}} dy = \frac{dp}{dz} \frac{\delta^3}{3\nu} + \frac{\tau_\phi}{\nu} \frac{\delta^2}{2}$$

Отсюда, полагая распределение температуры по толщине пленки линейным и считая ее толщину постоянной и равной среднему значению на длине $0 \leq z \leq k$, можно получить в безразмерном виде:

$$z^* = (\delta^*)^4 \pm \frac{4}{3} \tau_\phi^* (\delta^*)^3; \quad (7.68)$$

$$\text{Re} = \frac{4\Gamma}{\mu_{\text{ж}}} = \frac{4}{3} (\delta^*)^3 + 2\tau_\phi^* (\delta^*)^2; \quad (7.69)$$

$$\alpha^* = \frac{4}{3} \frac{\delta^*}{z_L^*} + \frac{2\tau_\phi^* (\delta^*)^2}{z_L^*}. \quad (7.70)$$

Здесь

$$z^* = \frac{4z(T_s - T_w)}{r_{\Gamma_{\text{ж}}}} \frac{(c_p)_{\text{ж}}}{r + 0,68(c_p)_{\text{ж}}(T_s - T_{\text{ж}})} \left(\frac{dp/dz}{\nu_{\text{ж}} \mu_{\text{ж}}} \right)^{1/3};$$

$$\tau_\phi^* = \frac{\tau_\phi}{\frac{dp}{dz} \left(\frac{\mu_{\text{ж}} \nu_{\text{ж}}}{dp/dz} \right)^{1/3}}; \quad \alpha^* = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\nu_{\text{ж}} \mu_{\text{ж}}}{dp/dz} \right)^{1/3};$$

y — расстояние по нормали от стенки;

z — расстояние от начала конденсации вдоль оси трубы длиной L ;

τ_ϕ — касательное напряжение на границе раздела фаз.

Расчет по формулам (7.68) — (7.70) справедлив не только для ламинарного течения в пленке конденсата, но и для турбулентного. Результаты расчета представлены на рис. 7.22 в виде зависимостей $\alpha^* = f(Re)$ для двух значений $Pr_{ж}$, равных 1 и 10, и различных значений τ_{ϕ}^* . Кривая *A* соответствует переходу ламинарного течения пленки в турбулентное, после чего теплоотдача растет с ростом Re .

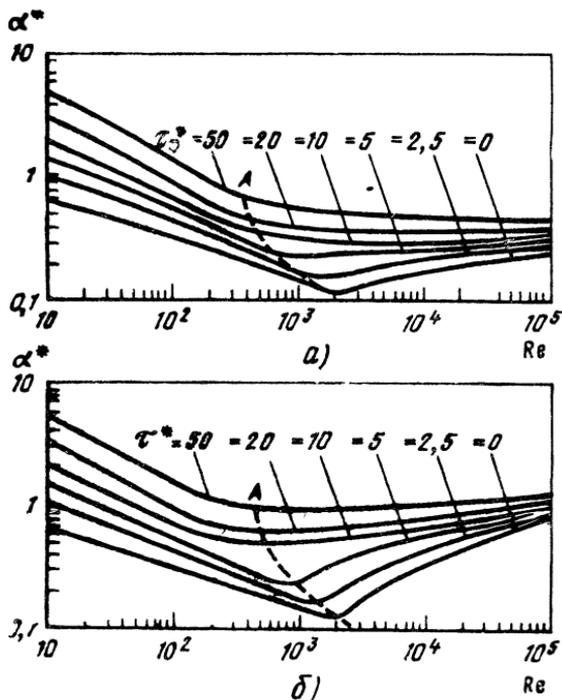


Рис 7.22. Влияние безразмерного касательного напряжения на границе раздела фаз τ_{ϕ}^* и числа Рейнольдса на теплоотдачу при конденсации α^* :

a—при $Pr_{ж}=1$; *б*—при $Pr_{ж}=10$

Расчет по этой методике был сопоставлен с экспериментом, выполненным при конденсации фреона-12 в никелевой трубе диаметром $d=12,5$ мм и длиной 6 м. При этом составляющие полного градиента давления dp/dz на трение $(dp/dz)_{\tau}$, на ускорение $(dp/dz)_{y}$ и на преодоление массовых сил $(dp/dz)_{g}$ вычислялись по следующим уравнениям:

$$\frac{(dp/dz)_{\tau} d}{2(\rho_{п} u_{п}^2)} = 0,045 \left(\frac{Q_{п} u_{п} d}{\mu_{п}} \right)^{-0,2} \left[x^{1,8} + 5,7 \left(\frac{\mu_{ж}}{\mu_{п}} \right)^{0,0523} \times \right. \\ \left. \times (1-x)^{0,47} x^{1,33} \left(\frac{Q_{п}}{Q_{ж}} \right)^{0,261} + 8,11 \left(\frac{\mu_{ж}}{\mu_{п}} \right)^{0,105} (1-x)^{0,94} x^{0,86} \left(\frac{Q_{п}}{Q_{ж}} \right)^{0,522} \right]; \quad (7.71)$$

$$\frac{(dp/dz)_{y} d}{2(\rho_{п} u_{п}^2)} = \frac{1}{2} d \frac{dx}{dz} \left[2(1-x) \left(\frac{Q_{п}}{Q_{ж}} \right)^{2/3} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{x} - 3 + 2x \right) \left(\frac{Q_{II}}{Q_{ж}} \right)^{4/3} + (2x - 1 - \beta x) \left(\frac{Q_{II}}{Q_{ж}} \right)^{1/3} + \\
& + \left(2\beta - \frac{\beta}{x} - \beta x \right) \left(\frac{Q_{II}}{Q_{ж}} \right)^{5/3} + 2 \left(1 - x - \beta - \beta x \right) \frac{Q_{II}}{Q_{ж}} \Big]. \quad (7.72)
\end{aligned}$$

(для турбулентного течения пара $\beta = 1,25$).

Здесь x — массовое паросодержание. Член $(dp/dz)_g$ был принят равным нулю, так как в экспериментах труба располагалась горизонтально, а различия в толщине пленки и теплоотдачи по периметру трубы в опытах не наблюдались.

Оценки показали, что в условиях опытов значение $(dp/dz)_y$ не превышало 5% от $(dp/dz)_x$.

Расчет по формулам (7.68) — (7.72) с точностью $\pm 15\%$ совпал с данными экспериментов в кольцевом режиме конденсации при турбулентном течении пара в ядре.

Рекомендуемая литература:

основная: [59, 76, 85];

дополнительная: [48, 51, 63, 81].

ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

Теплообменом посредством излучения (лучистым теплообменом) называется передача тепла, обусловленная превращением внутренней энергии вещества в энергию излучения, переносом излучения и его поглощением веществом.

Все тела постоянно испускают и поглощают лучистую энергию. Однако при умеренных температурах количество излучаемой энергии невелико и может не учитываться при расчете теплообмена между телами. При повышении температуры тел излучение резко возрастает, вследствие чего при больших температурах перенос тепла излучением становится преобладающим по сравнению с теплопроводностью и конвекцией.

Роль лучистого теплообмена также возрастает при понижении плотности среды, заполняющей пространство между телами, и в условиях глубокого вакуума он становится единственно возможным видом теплообмена. Поэтому значение лучистого теплообмена особенно велико в современных областях новой техники, связанных с применением высоких температур или глубокого вакуума, таких как ракетная и авиационная техника, ядерная энергетика, металлургия, химическая технология и др.

Тепловое излучение представляет собой процесс распространения тепла с помощью электромагнитных волн. Лучистая энергия испускается телами не непрерывно, а отдельными дискретными порциями — квантами света, или фотонами. Спектр частот колебаний, составляющих тепловое излучение, зависит от структуры и состояния излучающих тел.

Макроструктурные свойства излучения достаточно полно описываются современной теорией теплового излучения [57]. Однако для решения практических задач расчета лучистого теплообмена ввиду его большой сложности целесообразно использовать феноменологический метод исследования, рассматривая среду как сплошную, а не дискретную, и обладающую некоторыми суммарными характеристиками, определяющими лучистый перенос энергии.

При таком макроскопическом рассмотрении процесса лучистого теплообмена между телами или излучающей средой (газом) и поверхностью тела (стенкой) тепловое излучение можно при-

ближенно описать по аналогии с геометрической оптикой системой тепловых лучей, распространяющихся в разных направлениях прямолинейно со скоростью света. Результирующий эффект испускания или поглощения лучистой энергии обуславливается суммарным воздействием всех лучей, проходящих через рассматриваемый элемент пространства или поверхности. Для этого должна быть известна интенсивность лучей во всех направлениях.

Распространение излучения в пространстве характеризуется расходящимися в пределах сферы или полусферы лучами, и под направлением луча подразумевается направление осевой линии элементарного телесного угла, внутри которого происходит перенос лучистой энергии.

В макроскопической трактовке испускание и поглощение тепловых лучей выражается количественно с помощью коэффициентов излучения и поглощения, отнесенных к единице площади поверхности тела или единице объема газовых сред. Коэффициенты излучения и поглощения зависят от природы тел и являются функциями их состояния. С их помощью можно математически описать излучение и рассчитать лучистый тепловой поток между телами или между газом и поверхностью.

Тепловое излучение имеет одинаковую природу с другими видами электромагнитного излучения и занимает определенное положение в единой классификации электромагнитных волн, приведенной в табл. 8.1 [39].

При температурах до 4000 К основная доля из общего количества лучистой энергии приходится на область спектра с интервалом длин волн λ от $0,7 \cdot 10^{-6}$ до $50 \cdot 10^{-6}$ м. В этой области большая часть энергии излучения падает на инфракрасные лучи и небольшая часть — на световые.

При температуре выше 6000 К уже больше половины энергии излучения приходится на видимую и ультрафиолетовую части спектра ($\lambda = 0,2 \cdot 10^{-6} \div 0,7 \cdot 10^{-6}$ м). Таким образом, с увеличением температуры происходит не только абсолютное увеличение интенсивности излучения, но также изменяется его спектральный состав.

Реальные твердые и жидкие тела в своем большинстве являются непрозрачными для тепловых лучей. Такие тела излучают и поглощают инфракрасное излучение в очень тонком слое, непосредственно примыкающем к поверхности. Поэтому тепловое излучение не зависит от массы таких тел и полностью определяется лишь геометрией и состоянием их поверхности. В связи с этим все количественные характеристики излучения для непрозрачных тел относят к единице площади их поверхности, а сам процесс теплового излучения приближенно рассматривается как поверхностный.

В отличие от непрозрачных тел, газы, особенно трехатомные и многоатомные, и некоторые твердые и жидкие тела при огра-

ниченных толщинах слоя излучают и поглощают тепловые лучи во всем своем объеме. Такие тела или среды в отличие от абсолютно прозрачных (диатермичных) будем называть полупрозрачными.

Таблица 81

Вид излучения	Длина волны, м
Космическое	Порядка $0,05 \cdot 10^{-12}$
γ -излучение	$0,5 \cdot 10^{-12} - 0,1 \cdot 10^{-12}$
Рентгеновское	$10^{-12} - 20 \cdot 10^{-9}$
Ультрафиолетовое	$20 \cdot 10^{-9} - 0,4 \cdot 10^{-6}$
Видимое	$0,4 \cdot 10^{-6} - 0,8 \cdot 10^{-6}$
Тепловое (инфракрасное)	$0,8 \cdot 10^{-6} - 0,8 \cdot 10^{-3}$
Радиоволны	$0,2 \cdot 10^{-3} - x \cdot 10^3$

Тепловое излучение таких сред зависит от их массы или объема. Поэтому количественные характеристики излучения для полупрозрачных сред относят обычно к единице их объема или массы.

8.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Различают интегральное и спектральное (мономатическое) излучение.

Интегральным называется суммарное излучение по всем диапазонам длин волн от $\lambda=0$ до $\lambda=\infty$.

Спектральным (мономатическим) называется излучение в узком интервале длин волн от λ до $\lambda+d\lambda$. Все величины, описывающие спектральное излучение, относятся к единичному интервалу длин волн и обозначаются подстрочным индексом « λ ».

Плотностью потока излучения E называется полное количество лучистой энергии, излучаемой в полусферу за единицу времени единицей площади поверхности.

Полный поток излучения Q с поверхности площадью F может быть выражен через плотность потока излучения интегралом:

$$Q = \int_F E dF. \quad (8.1)$$

Следовательно,

$$E = \frac{dQ}{dF} \quad (8.2)$$

и имеет размерность Вт/м². Распределение излучения по направлениям в пределах полусферы характеризуется величиной яркости.

Яркостью (или calorической яркостью) излучения B называется количество энергии, излучаемое в данном направлении через единицу площади проекции элементарной площадки на плоскость, перпендикулярную направлению излучения, за единицу времени в пределах единичного элементарного телесного угла:

$$B = \frac{dQ_\varphi}{d\Omega dF \cos \varphi}. \quad (8.3)$$

Здесь dQ_φ — элементарный поток излучения в данном направлении, Вт;

$d\Omega$ — элементарный телесный угол, ср;

dF — элементарная площадка, м²;

φ — угол между направлением излучения и нормалью к площадке dF (рис. 8.1).

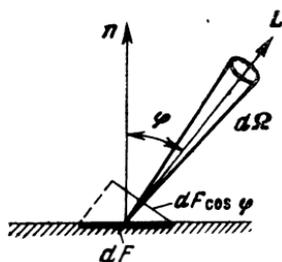


Рис 8.1 К определению яркости излучения

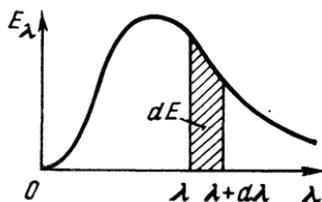


Рис. 8.2. К определению спектральной интенсивности излучения

Размерность яркости излучения — Вт/(м²·с).

Распределение излучения по длинам волн характеризуется величиной спектральной интенсивности излучения E_λ .

Спектральной интенсивностью излучения E_λ называется количество спектральной энергии, излучаемой единицей площади элементарной площадки за единицу времени в единичном интервале длин волн по всем направлениям полусферического пространства (рис. 8.2):

$$E_\lambda = \frac{dE}{d\lambda}, \quad (8.4)$$

где $d\lambda$ — элементарный интервал длин волн.

E_λ зависит от длины волны, температуры, вида и состояния поверхности и имеет размерность Вт/м³.

Связь между E_λ и E можно записать в интегральной форме следующим образом:

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda, \quad (8.5)$$

т. е. плотность потока излучения E выражается площадью под кривой E_λ в интервале длин волн от $\lambda=0$ до $\lambda=\infty$.

Распределение спектрального излучения по направлениям характеризуется величиной спектральной яркости B_λ .

Спектральной яркостью излучения B_λ называется количество спектральной энергии, излучаемое в данном направлении через единицу площади проекции элементарной площадки на плоскость, перпендикулярную направлению излучения, за единицу времени в пределах единичного элементарного телесного угла в единичном интервале длин волн:

$$B_\lambda = \frac{dB}{d\lambda} \quad (8.6)$$

Его размерность Вт/(м²·ср).

Связь между интегральной и спектральной яркостью излучения вытекает из определения (8.6):

$$B = \int_0^\infty B_\lambda d\lambda \quad (8.7)$$

Энергия теплового излучения, падающего на тело, может поглощаться, отражаться или пропускаться этими телами (рис. 8.3):

$$E_{\text{пад}} = E_{\text{погл}} + E_{\text{отр}} + E_{\text{проп}} \quad (8.8)$$

Поглощательной способностью A называется отношение поглощенной телом лучистой энергии к падающей:

$$A = \frac{E_{\text{погл}}}{E_{\text{пад}}} \quad (8.9)$$

Отражательной способностью R называется отношение отраженной телом лучистой энергии к падающей:

$$R = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} \quad (8.10)$$

Пропускательной способностью D называется отношение прошедшей сквозь тело лучистой энергии к падающей:

$$D = \frac{E_{\text{проп}}}{E_{\text{пад}}} \quad (8.11)$$

$$\text{Очевидно, } A + R + D = 1. \quad (8.12)$$

В частных случаях один или два коэффициента в выражении (8.12) могут быть равными нулю.

Если $D=1$, а $A=R=0$, то такое тело называется абсолютно прозрачным (диатермичным);

если $D=0$, а $A+R=1$, то тело называется непрозрачным;

если $A=1$, а $R=D=0$, то тело называется абсолютно черным;

если $R=1$, а $A=D=0$, то тело называется абсолютно белым, когда отражение диффузное, т. е. яркость отраженного излучения во всех направлениях одинакова, или зеркальным, когда отражение излучения подчиняется законам геометрической оптики.

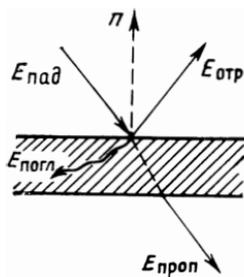


Рис. 8.3. Распределение падающего излучения

Абсолютно белых, абсолютно прозрачных и абсолютно черных тел в природе не встречается. Однако понятия о таких телах оказываются весьма полезными при изучении законов лучистого теплообмена между реальными телами.

Особенно большое значение имеет понятие абсолютно черного тела, т. е. такого, которое целиком поглощает всю падающую на него лучистую энергию. Такое тело воспринимается зрением как черное. Отсюда происходит его название. Законы излучения абсолютно черного тела как наиболее простые и универсальные положены в основу всех расчетов теплового излучения.

8.2. ЗАКОНЫ ИЗЛУЧЕНИЯ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОГО ТЕЛА

Закон Планка выражает зависимость спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела E_{λ_0} от длины волны λ и температуры.

Аналитическое выражение указанной зависимости было получено Планком на основе квантовой теории:

$$E_{\lambda_0} = C_1 \lambda^{-5} [e^{C_2/(\lambda T)} - 1]^{-1}, \quad (8.13)$$

где $C_1 = 0,374 \cdot 10^{-15}$, Вт·м² и $C_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$ м·К — постоянные Планка;

λ — длина волны, м;

T — абсолютная температура; К.

Излучение абсолютно черного тела характеризуется непрерывным спектром с диапазоном длин волн от $\lambda=0$ до $\lambda=\infty$ (рис. 8.4).

Кривые спектральной интенсивности излучения характеризуются наличием максимума с резким спадом в сторону коротких волн и более пологим в сторону длинных.

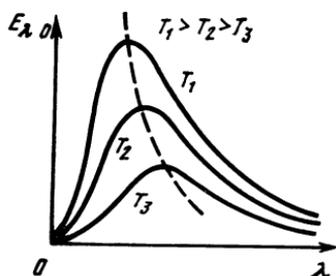
Закон смещения Вина устанавливает зависимость положения максимума спектральной интенсивности излучения от температуры.

Указанная зависимость может быть получена аналитически из формулы Планка (8.13), для чего необходимо вычислить производную $dE/d\lambda$ и приравнять ее нулю.

В результате несложных преобразований получается соотношение

$$\lambda_{\max} T = 2,896 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}, \quad (8.14)$$

Рис. 8.4. Спектры излучения абсолютно черного тела



выражающее закон Вина, согласно которому при повышении температуры длина волны λ_{\max} , соответствующая максимуму спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела, уменьшается.

Наглядным качественным подтверждением закона Вина является изменение цвета раскаленного металла при повышении температуры (красный, оранжевый, желтый) в направлении более коротких волн в области видимой части спектра.

Закон Стефана — Больцмана устанавливает зависимость интегральной плотности потока излучения абсолютно черного тела E_0 от температуры.

Эта зависимость также может быть получена из формулы Планка (8.13) с учетом соотношения (8.5):

$$E_0 = \int_0^{\infty} C_1 \lambda^{-5} [e^{C_2/(\lambda T)} - 1]^{-1} d\lambda. \quad (8.15)$$

После преобразований получаем выражение закона Стефана — Больцмана:

$$E_0 = \sigma_0 T^4, \quad (8.16)$$

где $\sigma_0 = 5,75 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ — коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Таким образом, по закону Стефана — Больцмана плотность потока излучения абсолютно черного тела пропорциональна абсолютной температуре в четвертой степени.

Закон Ламберта характеризует распределение энергии излучения абсолютно черного тела по направлениям. Согласно этому закону яркость как спектрального, так и интегрального излучения абсолютно черного тела не зависит от направления: $B_0 = \text{const}$; $B_{\lambda 0} = \text{const}$, т. е. излучение диффузное.

Из закона Ламберта следует, что яркость излучения абсолютно черных поверхностей не зависит от их формы, а количество лучистой энергии, испускаемой в данном направлении, опре-

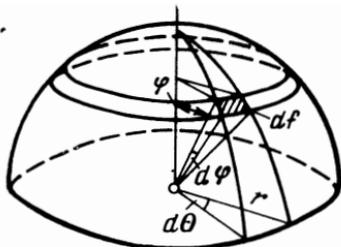


Рис. 85. К определению телесного угла

деляется только величиной проекции этих поверхностей на плоскость, перпендикулярную направлению излучения. Так, например, лучистые потоки сферы и плоской круглой пластины того же диаметра в направлении нормали к плоскости пластины одинаковы, если излучение их диффузное.

Из условия постоянства яркости по направлениям может быть получена зависимость между плотностью потока излучения E_0 и яркостью B_0 абсолютно черного тела. Для этого необходимо вычислить интеграл по полусфере с использованием соотношения (8.3):

$$E_0 = \int_0^{2\pi} B_0 \cos \varphi d\Omega. \quad (8.17)$$

Элементарный телесный угол $d\Omega$ может быть выражен через углы φ и θ согласно рис. 8.5:

$$d\Omega = \frac{df}{r^2} = \frac{rd\varphi r \sin \varphi d\theta}{r^2} = \sin \varphi d\varphi d\theta. \quad (8.18)$$

Тогда

$$E_0 = B_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi. \quad (8.19)$$

После интегрирования получим

$$E_0 = \pi B_0, \quad (8.20)$$

т. е. плотность потока излучения абсолютно черного тела E_0 численно в π раз больше величины яркости его излучения.

Аналогичный результат получается для спектрального излучения:

$$E_{\lambda 0} = \pi B_{\lambda 0}. \quad (8.21)$$

8.3. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕАЛЬНЫХ ТЕЛ

Излучение всех твердых, жидких и газообразных тел, встречающихся в природе, существенно отличается по характеру распределения спектральной интенсивности излучения по длинам волн от излучения абсолютно черного тела. По абсолютной величине спектральная интенсивность излучения реальных тел E_{λ} всегда меньше спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела $E_{\lambda 0}$ при той же температуре и длине волны λ . Многие же тела излучают энергию в небольших интервалах длин волн (рис. 8.6) и имеют прерывистый спектр. Особенно это относится к газам, которые при умеренных температурах излучают в определенных, сравнительно узких интервалах длин волн (полосах). Для характеристики излучения реальных тел удобно ввести понятие спектральной степени черноты или коэффициента черноты ϵ_{λ} :

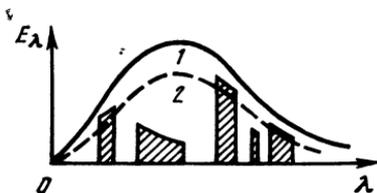


Рис. 8.6. Спектры излучения:
1—абсолютно черное тело; 2—серое тело

$$\epsilon_{\lambda} = \frac{E_{\lambda}}{E_{\lambda 0}}, \quad (8.22)$$

представляющего собой отношение спектральной интенсивности излучения реального тела к спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела при той же длине волны и при одной и той же температуре обоих тел.

Для большинства реальных тел спектральная степень черноты ϵ_{λ} зависит от длины волны и температуры. На рис. 8.7 и 8.8 приведены примеры распределения спектральной интенсивности для вольфрама и платины [31] по длинам волн. Для сравнения там же нанесены спектральные интенсивности для абсолютно черного тела. Как видно, спектры излучения вольфрама и платины лишь только в общих чертах напоминают по своему характеру спектр абсолютно черного тела. Причем расположение максимумов спектральной интенсивности у них различное. В силу этого спектральный коэффициент черноты для этих материалов существенно зависит от длины волны. На рис. 8.9 представлены зависимости спектральной степени черноты от длины волны для различных материалов в большом диапазоне длин волн. Приведенные примеры показывают, что для реальных тел ϵ_{λ} может существенно изменяться с длиной волны. В практических расче-

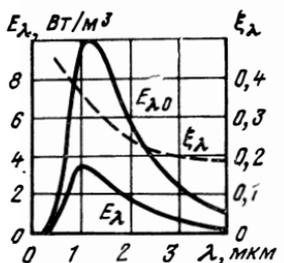


Рис. 8.7. Спектр излучения вольфрама при $T=2450$ К

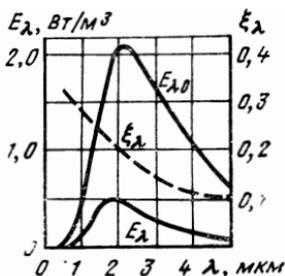


Рис. 8.8. Спектр излучения платины при $T=1335$ К

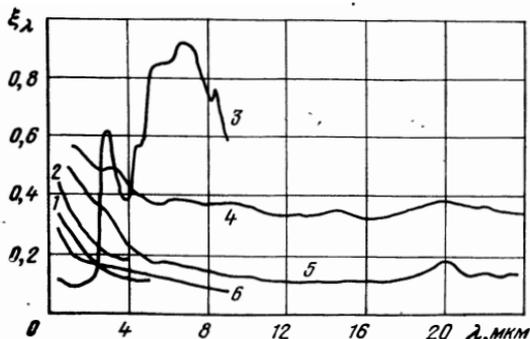


Рис. 8.9. Зависимость спектральной степени черноты ϵ_{λ} от длины волн:

1—платина; 2—вольфрам; 3—шамот; 4—нержавеющая сталь (без термообработки); 5—титан (без термообработки); 6—алюминий полированный

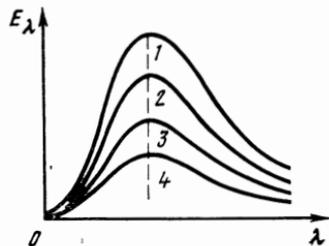


Рис. 8.10. Спектры излучения серых тел:

1— $\epsilon=1$ — абсолютно черное тело; серые тела 2— $\epsilon=0,8$, 3— $\epsilon=0,6$; 4— $\epsilon=0,4$

тах удобно использовать интегральную степень черноты ϵ , представляющую собой отношение плотностей потока излучения данного тела E и абсолютно черного тела E_0 :

$$\epsilon = \frac{E}{E_0}. \quad (8.23)$$

Для некоторых материалов, например, шамота, интегральная степень черноты довольно высока (0,8—0,85), а спектральный коэффициент черноты значительно изменяется по длинам волн.

При практическом исследовании лучистого теплообмена излучение и поглощение многих реальных тел приближенно можно рассматривать как излучение и поглощение серых тел.

Серым телом называется такое тело, спектр излучения которого непрерывен и полностью подобен спектру абсолютно черного тела при той же температуре (рис. 8.10), а спектральная степень черноты ϵ_{λ} постоянна во всем диапазоне длин волн от $\lambda=0$ до $\lambda=\infty$ и не зависит от температуры.

Очевидно, величины спектральной и интегральной степени черноты для серого тела равны: $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$. К серому телу применимы с поправкой на степень черноты ε законы Планка и Стефана — Больцмана. Закон Планка для серого тела имеет вид

$$E_\lambda = \varepsilon C_1 \lambda^{-5} [e^{C_2/(\lambda T)} - 1]^{-1}; \quad (8.24)$$

закон Стефана — Больцмана

$$E = \varepsilon \sigma_0 T^4 \approx \sigma T^4, \quad (8.25)$$

где $\sigma = \varepsilon \sigma_0$ — коэффициент излучения серого тела.

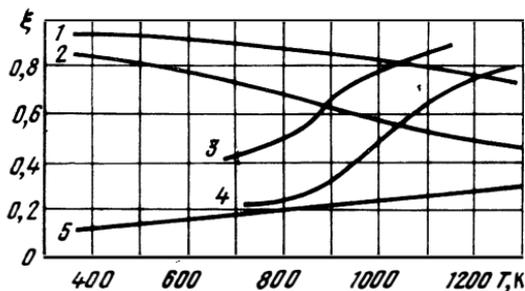


Рис. 8.11. Зависимость интегральной степени черноты различных материалов от температуры:

1—фарфор; 2—шамот; 3—медь окисленная; 4—нержавеющая сталь (прокат); 5—титан (без термообработки)

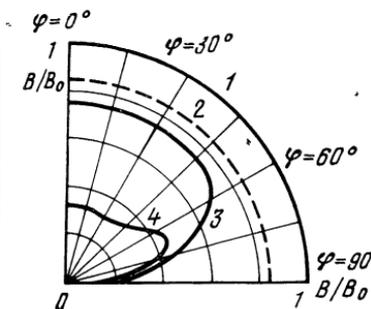


Рис. 8.12. Индикатрисы относительной яркости излучения:

1—абсолютно черное тело, 2—серое тело; 3—диэлектрики и окисленные металлы; 4—полированные металлы

Закон Вина полностью справедлив для серых тел.

Интегральный коэффициент черноты ε для реальных тел может существенно изменяться в зависимости от температуры. Примеры такой зависимости для некоторых материалов представлены на рис. 8.11.

Закон Ламберта, справедливый для абсолютно черного и серого тела, т. е. для диффузного излучения, применим к реальным телам лишь частично.

На рис. 8.12 изображены типичные индикатрисы относительной яркости излучения для различных тел. Диэлектрики (изоляторы) и окисленные металлы, как правило, подчиняются закону Ламберта в диапазоне изменения угла φ от 0 до 60°. Излучение полированных металлов подчиняется закону Ламберта в более узком диапазоне изменения угла φ (от 0 до 30°). При этом яркость излучения диэлектриков при больших углах φ уменьшается, а полированных металлов возрастает.

При расчетах излучения нечерных тел используется понятие эффективного (полного) излучения, представляющего

собой совокупность собственного излучения тела и отраженного излучения других тел.

Плотность потока эффективного (полного) излучения $E_{\text{эф}}$ Вт/м² представляет собой сумму плотности потока собственного излучения тела E и плотности отраженного потока излучения $E_{\text{отр}}$:

$$E_{\text{эф}} = E + E_{\text{отр}} = E + (1 - A) E_{\text{пад}}. \quad (8.26)$$

Аналогично для спектрального излучения

$$E_{\lambda\text{эф}} = E_{\lambda} + E_{\lambda\text{отр}} = E_{\lambda} + (1 - A_{\lambda}) E_{\lambda\text{пад}}, \quad (8.27)$$

где A_{λ} — поглощательная способность спектрального излучения.

5.4. ЗАКОН КИРХГОФА ДЛЯ НЕПРОЗРАЧНЫХ ТЕЛ

Закон Кирхгофа устанавливает зависимость между плотностью потока излучения и поглощательной способностью тел.

Рассмотрим систему, состоящую из двух плоских бесконечно протяженных тел 1 и 2 (рис. 8.13), находящихся в тепловом равновесии.

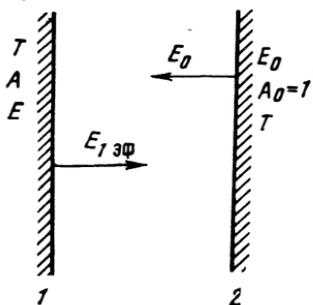


Рис 8.13. К выводу закона Кирхгофа

Тело 1 любое нечерное и характеризуется плотностью потока излучения E и поглощательной способностью A .

Тело 2 абсолютно черное. Плотность потока излучения для него равна E_0 , а поглощательная способность $A_0 = 1$. Температура обоих тел одинакова.

Количество энергии, которое излучает абсолютно черное тело 2 с единицы поверхности в единицу времени, равно $E_{2\text{эф}} = E_0$.

Количество энергии, излучаемое серым телом 1 с единицы поверхности в единицу времени, равно

$$E_{1\text{эф}} = E + (1 - A) E_0.$$

Из условия теплового равновесия системы ($E_{1\text{эф}} = E_{2\text{эф}}$)

$$E + (1 - A) E_0 = E_0,$$

откуда получаем соотношение между плотностью потока излучения и поглощательной способностью тела

$$\frac{E}{A} = E_0, \quad (8.28)$$

представляющее собой математическое выражение закона Кирхгофа. Сущность закона Кирхгофа состоит в том, что *отношение плотности потока излучения тела к его поглощательной способности не зависит от физических свойств тела и для всех тел равно плотности потока излучения абсолютно черного тела при той же температуре.*

Аналогично выражение закона Кирхгофа для монохроматического излучения

$$\frac{E_\lambda}{A_\lambda} = E_{\lambda 0}, \quad (8.29)$$

т. е. отношение спектральной интенсивности излучения тела при определенной длине волны к его спектральной поглощательной способности при той же длине волны для всех тел одинаково и равно спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела при той же длине волны и температуре.

Сопоставляя выражения (8.22) и (8.29), можно записать закон Кирхгофа для монохроматического излучения в следующем виде:

$$\varepsilon_\lambda = A_\lambda. \quad (8.30)$$

Соответственно для интегрального излучения из выражений (8.23) и (8.28)

$$\varepsilon = A. \quad (8.31)$$

Таким образом, при равновесном излучении степень черноты тела численно равна его поглощательной способности, как для интегрального, так и для монохроматического (спектрального) излучения.

8.5. ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

При исследовании лучистого теплообмена между твердыми телами пользуются двумя методами: методом многократных отражений [5, 31, 59] и так называемым методом сальдо [31, 59, 14].

Преимущество первого метода состоит в том, что он наглядно вскрывает механизм протекания лучистого переноса тепла от одного тела к другому. Однако метод многократных отражений связан с громоздкими выкладками. Метод сальдо базируется на использовании плотности эффективного или полного потока излучения $E_{\text{эф}}$ и позволяет рассчитывать лучистый теплообмен

между любыми произвольными твердыми телами по довольно простым соотношениям. В данном учебнике используется метод сальдо. Расчет процессов переноса лучистой энергии между твердыми телами проводится для частного случая, когда тела являются серыми и, следовательно, степень их черноты и поглощательные способности не зависят от температуры и длины волны. Излучение серых тел как монохроматическое, так и полное подчиняется закону Ламберта во всех направлениях.

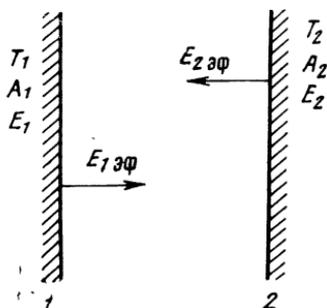


Рис. 8.14. Лучистый теплообмен между двумя серыми поверхностями

Рассмотрим две параллельные серые пластины бесконечной протяженности (рис. 8.14), имеющие разную температуру и разделенные непоглощающей средой. Первая пластина с температурой T_1 обладает собственной плотностью потока излучения E_1 и поглощательной способностью A_1 . Вторая пластина с температурой T_2 характеризуется соответственно собственной плотностью потока излучения E_2 и поглощательной способностью A_2 . Примем, что $T_1 > T_2$. Тогда пластины будут обмениваться лучистой энергией, в результате чего между ними установится стационарный лучистый тепловой поток, направленный от более горячей поверхности 1 к более холодной 2:

$$q_{12} = E_{1эф} - E_{2эф}, \quad (8.32)$$

где $E_{1эф}$ — полная плотность потока излучения 1-го тела, Вт/м²;
 $E_{2эф}$ — полная плотность потока излучения 2-го тела, Вт/м².
 По определению (8.26)

$$E_{1эф} = E_1 + (1 - A_1) E_{2эф}; \quad (8.33)$$

$$E_{2эф} = E_2 + (1 - A_2) E_{1эф}. \quad (8.34)$$

Решив систему уравнений (8.33) и (8.34) относительно $E_{1эф}$ и $E_{2эф}$, получим

$$E_{1эф} = \frac{E_1 + (1 - A_1) E_2}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)}; \quad (8.35)$$

$$E_{2эф} = \frac{E_2 + (1 - A_2) E_1}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)}. \quad (8.36)$$

Подставив выражения $E_{1\text{эф}}$ и $E_{2\text{эф}}$ (8.35) и (8.36) в равенство (8.32), найдем величину лучистого теплового потока в Вт/м²:

$$q_{12} = \frac{E_1 A_2 - E_2 A_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (8.37)$$

Но согласно закону (8.25)

$$E_1 = \varepsilon_1 \sigma_0 T_1^4 \quad \text{и} \quad E_2 = \varepsilon_2 \sigma_0 T_2^4. \quad (8.38)$$

Подставляя выражения E_1 и E_2 из системы (8.38) в равенство (8.37) и учитывая, что $\varepsilon_1 = A_1$ и $\varepsilon_2 = A_2$, после преобразований получим окончательные формулы для расчета лучистого теплообмена системы двух серых параллельных поверхностей бесконечной протяженности:

$$q_{12} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4), \quad (8.39)$$

или

$$q_{12} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4), \quad (8.40)$$

где $\varepsilon_{\text{пр}}$ — приведенная степень черноты системы тел 1 и 2;

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}. \quad (8.41)$$

8.6. ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛОБМЕН МЕЖДУ ДВУМЯ АБСОЛЮТНО ЧЕРНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ, ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим два абсолютно черных тела, произвольно расположенные в пространстве. Выделим на поверхности первого тела (рис. 8.15) элементарную площадку dF_1 , а на поверхности второго — элементарную площадку dF_2 . Примем, что температура поверхности первого тела больше, чем второго. Количество лучистой энергии, которое излучает элементарная площадка dF_1 в направлении площадки dF_2 за единицу времени согласно уравнению (8.3) равно

$$dQ_{1 \rightarrow 2} = B_{01} \cos \varphi_1 d\Omega_1 dF_1, \quad (8.42)$$

а площади dF_2 в направлении площадки dF_1 соответственно:

$$dQ_{2 \rightarrow 1} = B_{02} \cos \varphi_2 d\Omega_2 dF_2. \quad (8.43)$$

Здесь B_{01} и B_{02} — яркости тел 1 и 2;

$d\Omega_1$ и $d\Omega_2$ — элементарные телесные углы, под которыми «видны» площадки dF_1 и dF_2 из точки на противоположной площадке;

φ_1 и φ_2 — углы между направлением излучения и нормалью к площадкам dF_1 и dF_2 соответственно.

Так как температуры тел не одинаковые ($T_1 > T_2$), то результирующий лучистый поток равен

$$dQ_{12} = dQ_{1 \rightarrow 2} - dQ_{2 \rightarrow 1}. \quad (8.44)$$

Телесные углы

$$d\Omega_1 = \frac{dF_2 \cos \varphi_2}{r^2}; \quad (8.45)$$

$$d\Omega_2 = \frac{dF_1 \cos \varphi_1}{r^2}, \quad (8.46)$$

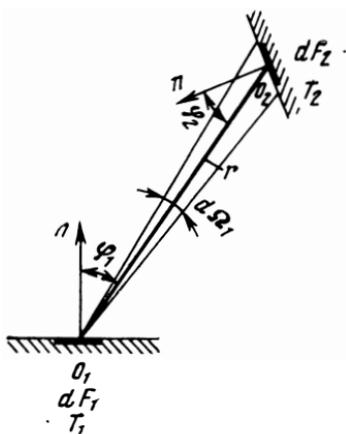


Рис. 8.15. К расчету лучистого теплообмена между поверхностями, произвольно расположенными в пространстве

где r — расстояние между центрами элементарных площадок dF_1 и dF_2 .

Сделав соответствующие подстановки в равенство (8.44), найдем величину результирующего лучистого теплового потока с элемента поверхности первого тела на элемент поверхности второго тела

$$dQ_{12} = (B_{01} - B_{02}) \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2. \quad (8.47)$$

Выразив яркости B_{01} и B_{02} согласно формулам (8.20) и (8.25)

$$B_{01} = \frac{E_{01}}{\pi} = \frac{\sigma_0 T_1^4}{\pi}; \quad B_{02} = \frac{\sigma_0 T_2^4}{\pi}$$

и проинтегрировав выражение (8.47) по обеим поверхностям, получаем окончательно полный лучистый поток от первого тела ко второму

$$Q_{12} = \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2 \quad (8.48)$$

или

$$Q_{12} = \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) H_{12}, \quad (8.49)$$

где

$$H_{12} = \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2 \quad (8.50)$$

имеет размерность площади и называется взаимной поверхностью излучения тел 1 и 2 .

Из условия симметричности выражения (8.50) вытекает, что

$$H_{12} = H_{21}. \quad (8.51)$$

Таким образом, расчет лучистого теплообмена между двумя абсолютно черными телами, произвольно расположенными в пространстве, по существу сводится к определению взаимной поверхности излучения H_{12} , которая является геометрической характеристикой системы.

Другой геометрической характеристикой системы является коэффициент облученности φ .

Коэффициентом облученности (или угловым коэффициентом) называется отношение потока излучения одного тела, падающего на другое тело, к полному полусферическому потоку излучения первого тела.

Коэффициенты облученности в отличие от H_{12} безразмерны и для каждого из двух тел индивидуальны;

$$\varphi_{12} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{Q_1}, \quad \varphi_{21} = \frac{Q_{2 \rightarrow 1}}{Q_2}. \quad (8.52)$$

Выражения $Q_{1 \rightarrow 2}$ и $Q_{2 \rightarrow 1}$ получаются интегрированием равенств (8.42) и (8.43) по F_1 и F_2 с соответствующими подстановками, аналогичными использованным при получении выражения Q_1 (8.49), и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Q_{1 \rightarrow 2} &= \sigma_0 T_1^4 \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2, \\ Q_{2 \rightarrow 1} &= \sigma_0 T_2^4 \int_{F_1} \int_{F_1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.53)$$

Полные потоки излучения тел 1 и 2

$$Q_1 = E_{01} F_1 = \sigma_0 T_1^4 F_1; \quad Q_2 = \sigma_0 T_2^4 F_2. \quad (8.54)$$

Сделав подстановки в равенствах (8.52), получим окончательное выражение для коэффициентов облученности системы из двух тел:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{12} &= \frac{1}{F_1} \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2; \\ \varphi_{21} &= \frac{1}{F_2} \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.55)$$

Связь между коэффициентами облученности и взаимной поверхностью излучения H_{12} вытекает из сопоставления выражений (8.50) и (8.55):

$$\varphi_{12} = \frac{H_{12}}{F_1}; \quad \varphi_{21} = \frac{H_{21}}{F_2}. \quad (8.56)$$

но так как $H_{12} = H_{21}$, то

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} \frac{F_2}{F_1}. \quad (8.57)$$

Соотношение (8.57) выражает так называемое свойство взаимности лучистых потоков.

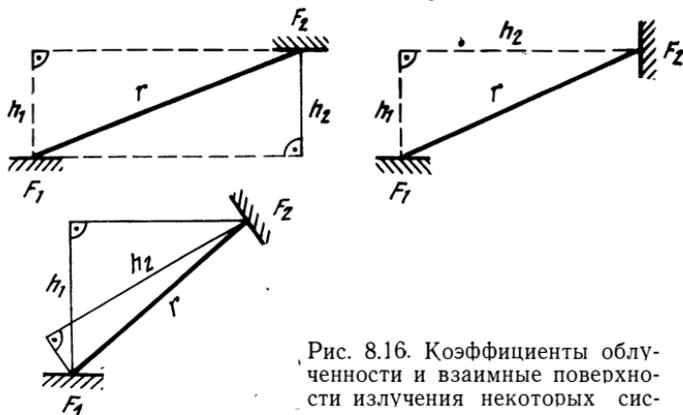


Рис. 8.16. Коэффициенты облученности и взаимные поверхности излучения некоторых систем

Расчетную формулу (8.49) для лучистого потока между двумя абсолютно черными телами можно записать с помощью коэффициентов облученности:

$$Q_{12} = \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) F_1 \varphi_{12} = \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) F_2 \varphi_{21} \quad (8.58)$$

или

$$Q_{12} = Q_1 \varphi_{12} = Q_2 \varphi_{21}. \quad (8.59)$$

Коэффициенты облученности и взаимные поверхности излучения зависят от формы и расположения тел, находящихся в лучистом взаимодействии друг с другом. Расчет этих величин трудоемок и для сложных систем выполняется на ЭВМ.

Для наиболее простых случаев лучистого теплообмена, часто встречающихся в технике, коэффициенты облученности и взаимные поверхности излучения рассчитаны и приводятся в справочниках [31, 86]. На рис. 8.16 представлены примеры некоторых часто встречающихся в практике случаев расположения излучающих поверхностей в пространстве, для которых величины φ_{12} , φ_{21} и H могут быть вычислены по формулам: $\varphi_{12} = \frac{h_1 h_2}{\pi r^4} F_2$; $\varphi_{21} = \frac{h_1 h_2}{\pi r^4} F_1$; $H_{12} = H_{21} = \frac{h_1 h_2}{\pi r^4} F_1 F_2$.

8.7 ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛОБМЕН МЕЖДУ ТЕЛОМ И ЕГО ОБОЛОЧКОЙ

Рассмотрим лучистый перенос тепла между двумя серыми телами (рис. 8.17), из которых одно (тело 1), не имеющее вогнутой поверхности, находится внутри тела 2 (оболочки). При этом все излучение с поверхности тела 1 попадает на поверхность тела 2. Излучение же с поверхности тела 2 только частично попадает на поверхность тела 1; другая часть этого излучения проходит мимо тела и облучает собственную поверхность тела 2.

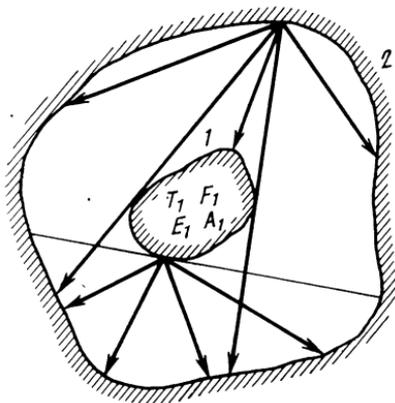


Рис. 8.17. Лучистый теплообмен между телом и оболочкой

Эта часть излучения характеризуется коэффициентом самооблучения φ_{22} . Примем, что температура T_1 тела 1 выше температуры T_2 его оболочки.

Полный лучистый поток, посылаемый телом 1 в единицу времени, равен

$$Q_{1\text{эф}} = Q_1 + (1 - A_1) \varphi_{21} Q_{2\text{эф}} \quad (8.60)$$

и, соответственно, поток от второго тела

$$Q_{2\text{эф}} = Q_2 + (1 - A_2) \varphi_{21} Q_{1\text{эф}} + (1 - A_2) \varphi_{22} Q_{2\text{эф}} \quad (8.61)$$

Здесь Q_1 и Q_2 — собственные лучистые тепловые потоки тел;
 A_1 и A_2 — поглощательные способности тела 1 и тела 2;
 φ_{22} — коэффициент самооблучения.

Результирующий лучистый тепловой поток от тела 1 к телу 2

$$Q_{12} = Q_{1\text{эф}} - \varphi_{21} Q_{2\text{эф}} \quad (8.62)$$

Учитывая, что для второго тела сумма коэффициентов облученности φ_{21} и самооблучения φ_{22} равна единице, т. е.

$$\varphi_{21} + \varphi_{22} = 1, \quad (8.63)$$

найдем выражение для полного лучистого потока с поверхности тела 1 ($Q_{1\text{эф}}$). Для этого в уравнение (8.60) подставим значение

для $Q_{2\text{эф}}$ из уравнения (8.61) и после несложных преобразований получим

$$Q_{1\text{эф}} = \frac{[1 - (1 - A_2)(1 - \varphi_{21})] Q_1 + (1 - A_1) \varphi_{21} Q_2}{A_2 + A_1 \varphi_{21} - A_1 A_2 \varphi_{21}}. \quad (8.64)$$

Аналогично из уравнений (8.60) и (8.61) с учетом выражения (8.63) найдем выражение $Q_{2\text{эф}}$

$$Q_{2\text{эф}} = \frac{Q_2 + (1 - A_2) Q_1}{A_1 \varphi_{21} + A_2 - A_1 A_2 \varphi_{21}}. \quad (8.65)$$

Подставив выражения (8.64) и (8.65) в равенство (8.62), получим

$$Q_{12} = \frac{A_2 Q_1 - A_1 \varphi_{21} Q_2}{A_2 + A_1 \varphi_{21} - A_1 A_2 \varphi_{21}}. \quad (8.66)$$

Согласно закону Стефана — Больцмана (8.25) собственные лучистые потоки обоих тел равны соответственно

$$Q_1 = E_1 F_1 = \varepsilon_1 \sigma_0 T_1^4 F_1; \quad Q_2 = E_2 F_2 = \varepsilon_2 \sigma_0 T_2^4 F_2.$$

Приняв приближенно, что $A_1 = \varepsilon_1$, а $A_2 = \varepsilon_2$, получим

$$Q_{12} = \frac{\sigma_0 \left(T_1^4 - \varphi_{21} \frac{F_2}{F_1} T_2^4 \right)}{1/\varepsilon_1 + \varphi_{21} 1/\varepsilon_2 - \varphi_{21}}. \quad (8.67)$$

Так как коэффициенты облученности связаны с взаимной поверхностью излучения соотношениями (8.56), а $\varphi_{12} = 1$, то

$$\varphi_{12} = H_{12}/F_1 = 1, \quad \text{а} \quad \varphi_{21} = H_{12}/F_2$$

и выражение для результирующего лучистого потока через взаимную поверхность излучения имеет вид

$$Q_{12} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) H_{12}, \quad (8.68)$$

где $\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + \varphi_{21}(1/\varepsilon_2 - 1)}$ — приведенная степень черноты системы.

Для того чтобы найти коэффициент облученности φ_{21} , предположим, что система находится в термодинамическом равновесии. В этом случае температура обоих тел одинакова $T_1 = T_2 = T$, а результирующий лучистый тепловой поток Q_{12} равен нулю. Тогда из равенства (8.67) получаем

$$1 - \varphi_{21} \frac{F_2}{F_1} = 0. \quad \text{и} \quad \varphi_{21} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (8.69)$$

Окончательно результирующий лучистый тепловой поток можно представить в виде

$$Q_{12} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) F_1, \quad (8.70)$$

где приведенная степень черноты системы

$$\epsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\epsilon_1 + (F_1/F_2)(1/\epsilon_2 - 1)}. \quad (8.71)$$

В частном случае, когда площади поверхности тел F_1 и F_2 близки по величине, т. е. $F_1/F_2 \approx 1$ (рис. 8.18, а), выражение для $\epsilon_{\text{пр}}$

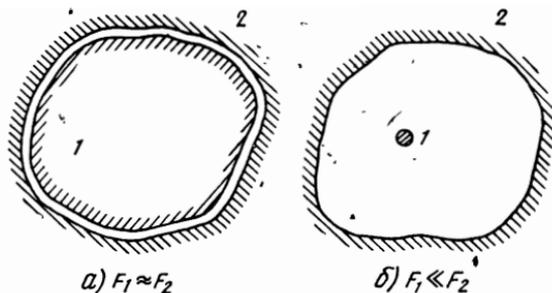
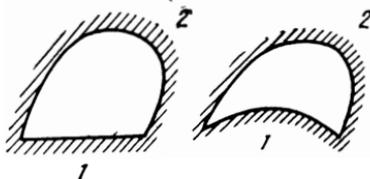


Рис. 8.18. Предельные случаи соотношения поверхностей тела 1 и оболочки 2

(8.71) совпадает с ранее полученным для двух бесконечно протяженных параллельных поверхностей (8.41). В этом случае согласно выражению (8.69) $\varphi_{21} \approx 1$, т. е. все излучение оболочки (тела 2) попадает на тело 1. Если одно тело мало по сравнению с другим ($F_1 \ll F_2$) (рис. 8.18, б), то значение коэффициента об-

Рис. 8.19. Замкнутые системы из двух поверхностей, одна из которых не имеет вогнутостей



лученности $\varphi_{21} \approx 0$, а $\epsilon_{\text{пр}} \approx \epsilon_1$. Аналогичный результат имеет место независимо от соотношения площадей F_1 и F_2 , когда оболочка является абсолютно черным телом ($\epsilon_2 = 1$).

Полученные соотношения для лучистого теплового потока (8.70) и приведенной степени черноты системы (8.71) пригодны для произвольных замкнутых систем, в которых одна из поверхностей не имеет вогнутостей (рис. 8.19).

8.8. ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛОБМЕН В ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрим систему, состоящую из n абсолютно черных тел заданной геометрии и имеющих температуру соответственно T_1, T_2, \dots, T_n .

Так как система замкнута, то каждое из тел может обмениваться лучистой энергией только с другими телами данной системы.

Результирующее излучение любого тела (1) с остальными равно

$$Q_{\text{рез1}} = Q_{12} + Q_{13} + \dots + Q_{1n}. \quad (8.72)$$

Результирующие потоки излучения для каждой пары тел определяются из уравнения (8.59). Тогда

$$\begin{aligned} Q_{\text{рез1}} = & (Q_1\varphi_{12} - Q_2\varphi_{21}) + (Q_1\varphi_{13} - Q_3\varphi_{31}) + \dots + \\ & + (Q_1\varphi_{1n} - Q_n\varphi_{n1}) = Q_1 \sum_{i=1}^n \varphi_{1i} - \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_{i1}. \end{aligned} \quad (8.73)$$

Для замкнутой системы $\sum_{i=1}^n \varphi_{1i} = 1$. Тогда окончательно получаем

$$Q_{\text{рез1}} = Q_1 - \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_{i1}. \quad (8.74)$$

Соотношение (8.74) учитывает самооблученность поверхности (φ_{11}) и поэтому пригодно как для выпуклых, так и для вогнутых поверхностей.

Дополнительным условием при решении конкретных задач для замкнутых систем является очевидное соотношение

$$\sum_{i=1}^n Q_{\text{рез}i} = 0. \quad (8.75)$$

Совершенно аналогичным путем может быть получено выражение результирующего лучистого потока для замкнутой системы, состоящей из n серых тел. В этом случае во все формулы вместо потоков собственного излучения тел войдут потоки эффективного излучения. Тогда

$$Q_{\text{рез1}} = Q_{\text{эф1}} - \sum_{i=1}^n Q_{\text{эф}i} \varphi_{i1}. \quad (8.76)$$

Нетрудно убедиться, что последнее соотношение является наиболее общим и из него могут быть получены как частные случаи все ранее выведенные соотношения для замкнутых систем, состоящих из n абсолютно черных тел (8.73) или из двух серых тел (8.70) и (8.40).

Однако при решении конкретных задач лучистого теплообмена между серыми телами значительные трудности возникают при определении $Q_{\text{эф}}$. Поэтому расчетные соотношения удается получить лишь для некоторых простых частных случаев.

8.9. ВЛИЯНИЕ ЭКРАНА НА ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛОБМЕН

Лучистый тепловой поток от одного тела к другому может быть значительно уменьшен, если между ними поместить непрозрачный экран. Рассмотрим для простоты две параллельные бесконечно протяженные стенки (рис. 8.20) с одинаковым коэффициентом черноты $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Если принять, что температура первой стенки больше, чем температура второй, то результирующий лучистый тепловой поток между ними равен

$$q_{12} = \varepsilon_{\text{нр}} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4),$$

где

$$\varepsilon_{\text{нр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}.$$

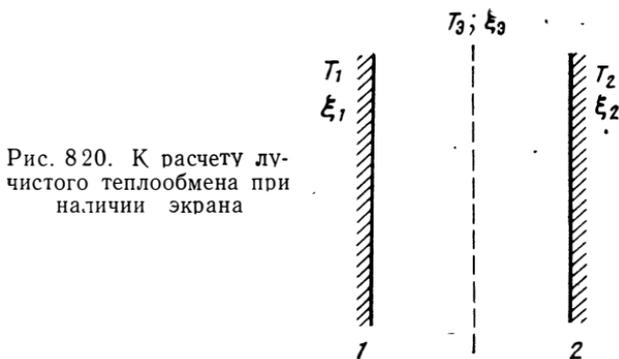


Рис. 8.20. К расчету лучистого теплообмена при наличии экрана

Поместим между этими стенками тонкий непрозрачный экран, выполненный из того же материала, что и обе стенки. Тогда коэффициент черноты экрана ε_3 равен ε_1 и ε_2 .

Рассмотрим лучистый теплообмен в такой системе. Если экран сделан из материала с высокой теплопроводностью, а его толщина достаточно мала, то можно считать, что на обеих поверхностях экрана установится одинаковая температура T_3 .

В этом случае лучистый тепловой поток от стенки 1 к экрану равен

$$q_{13} = \varepsilon \sigma_0 (T_1^4 - T_3^4),$$

а от экрана к стенке 2 —

$$q_{32} = \varepsilon \sigma_0 (T_3^4 - T_2^4).$$

Так как режим лучистого теплообмена стационарный, то должно выполняться условие

$$q_{13} = q_{32} = q_{12}. \quad (8.77)$$

Здесь q_{12}' — лучистый тепловой поток от стенки 1 к стенке 2 при наличии экрана. Отсюда

$$T_1^4 - T_3^4 = \frac{1}{\varepsilon\sigma_0} q'_{12}, \quad T_3^4 - T_2^4 = \frac{1}{\varepsilon\sigma_0} q'_{12}. \quad (8.78)$$

Сложив уравнения системы (8.78), получим выражение для q'_{12} —

$$q'_{12} = \frac{1}{2} \varepsilon\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) \quad (8.79)$$

и

$$\frac{q'_{12}}{q_{12}} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, установка между двумя стенками экрана из того же материала уменьшает лучистый тепловой поток в два раза. Легко показать, что при установке между стенками n экранов из того же материала величина лучистого потока между ними уменьшится в $n+1$ раз.

Для наиболее общего случая, когда степени черноты стенок ε_1 и ε_2 и всех n экранов ($\varepsilon_{\partial i}$) различны, можно получить [59] следующее соотношение:

$$\frac{q'_{12}}{q_{12}} = \frac{1/\varepsilon_{\text{пр}}}{1/\varepsilon_{\text{пр}} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{\varepsilon_{\partial i}} - 1 \right)}. \quad (8.80)$$

где $\varepsilon_{\text{пр}}$ — приведенная степень черноты системы без экрана (8.41). При $n=1$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{\partial}$ из соотношения (8.80) получаем $q'_{12}/q_{12} = 1/2$, т. е. подтверждается полученный выше частный случай (8.79).

Если, например, $n=1$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,8$; $\varepsilon_{\partial} = 0,1$, то $q'_{12}/q_{12} = 1/13,7$, т. е. тепловой поток снижается в 13,7 раза, а если число экранов увеличить до $n=5$, то тепловой поток снижается уже в 64 раза.

Из этих примеров видно, что тепловые экраны целесообразно делать многослойными и из материалов, имеющих малую степень черноты или, соответственно, высокую отражательную способность.

8.10. ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ ГАЗОВ

При высоких температурах газа, которые развиваются в камерах сгорания ЖРД, в электродуговых установках, при полете летательных аппаратов в атмосфере с гиперзвуковыми скоростями, необходимо учитывать перенос тепла излучением. Тепловое излучение газа зависит от его термодинамического состояния и состава.

Спектр излучения высокотемпературного газа, состоящего из молекул, атомов и ионов, очень сложный. Он состоит из линий,

полос и непрерывного спектра [19, 54, 57]. При переносе тепла путем излучения в таком газе необходимо учитывать вклад излучения всех составляющих газа: молекул, атомов, ионов в широком диапазоне длин волн — от ультрафиолетовой области ($\lambda = 0,1$ мкм) до инфракрасной ($\lambda = 50$ мкм).

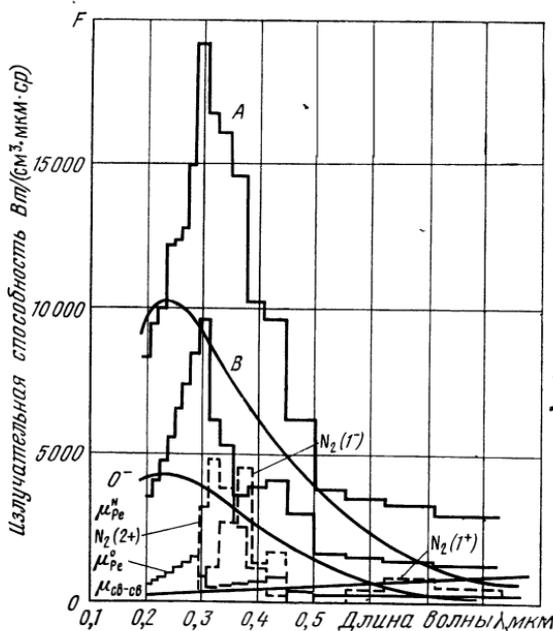


Рис. 8.21 Спектральная излучательная способность E_λ слоя воздуха толщиной $l=1$ см при $T=12\,000$ К и $q=q_0$ (нормальная плотность [9]):

A —суммарное излучение; B —0,1 интенсивности излучения черного тела; $N_2(1^+)$, $N_2(2^+)$, $N_2(1^-)$ —излучения 1-й, 2-й положительной и 1-й отрицательной полосы молекулярного азота; $\mu_{\text{Pe}}^{\text{N}}$ и $\mu_{\text{Pe}}^{\text{O}}$ —излучения от свободно-связанных переходов атома азота и кислорода; $\mu_{\text{св-св}}$ —излучение от свободно-свободных переходов

В качестве примера на рис. 8.21 приведено распределение спектральной излучательной способности (E_λ) для различных компонентов слоя воздуха толщиной $l=1$ см при $T=12\,000$ К и $q=q_0$ (нормальная плотность) [57].

Из рис. 8.21 видно, что излучение высокотемпературного газа происходит в широком диапазоне длин волн.

При рассмотрении процессов теплового излучения газа целесообразно использовать феноменологические методы исследования. В этом случае газ рассматривается как сплошная среда,

обладающая дополнительными, с ранее известными (вязкость и теплопроводность) свойствами, определяющими лучистый перенос тепла. При этом поле излучения можно представить как поток тепловых лучей, пронизывающих газовый объем по всем направлениям, согласно концепции геометрической оптики. Специальные исследования [28] показывают, что применение указанного метода оправдано в случаях, когда характерный размер значительно больше длины волны излучения, а время процесса

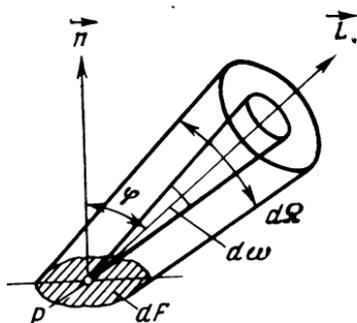


Рис 8.22. К определению спектральной интенсивности излучения газа

много больше периода колебаний всех частот, содержащихся в излучении.

Поток тепловых лучей, распространяющихся в газовом объеме, характеризуется величиной спектральной угловой интенсивности излучения J_λ (или сокращенно — спектральной интенсивностью излучения), имеющей размерность Вт/(м³·ср). Для определения спектральной интенсивности излучения рассмотрим в газовом объеме произвольно ориентированную элементарную площадку dF (рис. 8.22). Выберем на этой площадке точку $\vec{P}(r)$ и из нее проведем нормаль \vec{n} к площадке. В заданный момент времени тепловые лучи, составляющие поле излучения, пересекают заданную элементарную площадку dF во всех направлениях. Выберем произвольное направление \vec{L} , составляющее угол φ с нормалью \vec{n} и рассмотрим излучение в данном направлении. Примем линию в направлении \vec{L} за ось элементарного конуса телесного угла $d\omega$. Из каждой точки площадки dF построим конусы с осями, параллельными \vec{L} и телесными углами $d\omega$ при вершине. Эти конусы образуют полубесконечный усеченный конус с телесным углом $d\Omega$ и площадью поперечного сечения, содержащей точку $P(\vec{r})$, перпендикулярной направлению \vec{L} и равной $dF \cos \varphi$.

Если полное количество спектральной лучистой энергии, проходящее через площадку dF внутри конуса $d\Omega$ в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$ за единицу времени равно $dQ_{\lambda\varphi}$, то спект-

ральная интенсивность излучения определяется следующим выражением:

$$J_{\lambda} = \frac{dQ_{\lambda\varphi}}{dF \cos \varphi d\Omega d\lambda}. \quad (8.81)$$

Спектральная интенсивность излучения J_{λ} — это количество спектральной лучистой энергии, заключенное в единичном интервале длин волн и в единичном телесном угле, которое проходит за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению излучения.

Величина спектральной интенсивности излучения зависит от длины волны λ , времени τ , координат x, y, z рассматриваемой точки P и направления луча \vec{L} . Если J_{λ} не зависит от направления \vec{L} , поле излучения называется *изотропным*.

Если спектральная интенсивность излучения J_{λ} не зависит от положения точки $P(\vec{r})$ (координат x, y, z), поле излучения называется *однородным*.

Если известно распределение спектральной интенсивности по направлениям и по длинам волн, то величина лучистого теплового потока q_R Вт/м², проходящего через произвольную единичную площадку, определяется формулой

$$q_R = \int_{4\pi} \int_0^{\infty} J_{\lambda} \cos \varphi d\Omega d\lambda. \quad (8.82)$$

8.11. РАДИАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ГАЗОВ

Взаимодействие поля излучения с газовой средой определяется способностью этой среды испускать, поглощать и рассеивать лучистую энергию. Указанные свойства газовой среды (так называемые радиационные свойства) выражаются с помощью соответствующих коэффициентов излучения ε_{λ} , поглощения α_{λ} и рассеяния β_{λ} , которые могут рассматриваться как некоторые физические характеристики среды.

Спектральным объемным коэффициентом излучения ε_{λ} называется количество спектральной лучистой энергии, излучаемое единицей объема среды за единицу времени в единичном телесном угле и единичном интервале длин волн, т. е.

$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{(dQ_{\lambda\varphi})_{\text{изл}}}{dV d\Omega d\lambda}, \quad (8.83)$$

и имеет размерность Вт/(м⁴·ср). Коэффициент излучения ε_{λ} зависит от длины волны и параметров состояния среды; кроме того, он зависит от направления луча. Однако для газовых сред экспериментально было установлено, что коэффициент излучения ε_{λ} является изотропным, т. е. не зависит от направления излуче-

ния. Если известен коэффициент излучения κ_λ , то количество спектральной лучистой энергии подсчитывается по формуле

$$(dQ_{\lambda\varphi})_{\text{изл}} = \kappa_\lambda dV d\Omega d\lambda. \quad (8.84)$$

Полная спектральная лучистая энергия, излучаемая элементом объема dV в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$ в единицу времени во все пространство, равна

$$(dQ_\lambda)_{\text{изл}} = 4\pi\kappa_\lambda dV d\lambda. \quad (8.85)$$

Для характеристики интегрального излучения используются понятия интегрального объемного коэффициента излучения (или просто коэффициента излучения)

$$\kappa = \int_0^\infty \kappa_\lambda d\lambda \quad (8.86)$$

и интегральной интенсивности излучения

$$J = \int_0^\infty J_\lambda d\lambda. \quad (8.87)$$

Полное количество лучистой энергии, излучаемое единицей объема среды за единицу времени, по всем направлениям, во всем диапазоне длин волн от $\lambda=0$ до $\lambda=\infty$, равно

$$\eta = 4\pi\kappa. \quad (8.88)$$

Наряду с коэффициентом излучения необходимо ввести характеристики, с помощью которых можно было бы определить ослабление интенсивности излучения в среде.

Рассмотрим прохождение теплового луча со спектральной интенсивностью J_λ через элементарный, оптически неоднородный газовый объем, площадь основания которого (рис. 8.23) перпендикулярна направлению излучения.

Интенсивность луча будет ослабевать вследствие поглощения и рассеяния излучения газа в рассматриваемом объеме. В реальных условиях такие оптически неоднородные газовые среды встречаются очень часто. Например, продукты сгорания топлива, протекающие по сопловому аппарату ЖРД, содержат во взвешенном состоянии частицы сажи и твердые частицы, мелкие твердые частицы, образующиеся при горении твердого топлива в РДТТ, частицы пыли, дыма и капельки жидкости в атмосфере Земли и т. д. При рассмотрении переноса излучения в таких оптически неоднородных средах, в которых содержатся частицы различных размеров от долей микрона до сотен микрон, процессы рассеяния играют существенную роль, и ослабление интенсивности излучения происходит как в силу поглощения, так и в силу рассеяния лучистой энергии средой.

Относительное ослабление спектральной интенсивности луча при прохождении через слой газа толщиной dl пропорционально длине пути луча в этом слое, т. е.

$$dJ_\lambda = -K_\lambda J_\lambda dl. \quad (8.89)$$

Интенсивность излучения меняется по экспоненциальному закону при прохождении через слой толщиной l :

$$J_\lambda = J_\lambda^{(0)} \exp\left(-\int_0^l K_\lambda dl\right). \quad (8.90)$$

Здесь $J_\lambda^{(0)}$ — спектральная интенсивность луча на входе в рассматриваемый газовый объем.

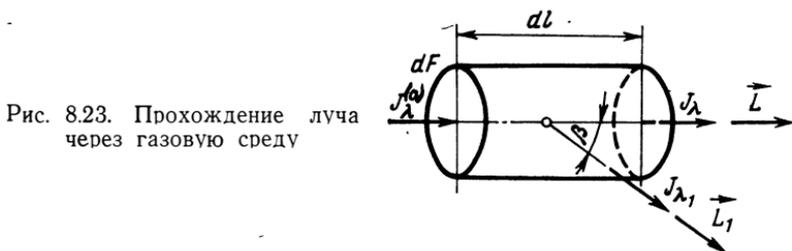


Рис. 8.23. Прохождение луча через газовую среду

Коэффициент пропорциональности K_λ называется спектральным коэффициентом ослабления. Этот коэффициент, характеризующий ослабление интенсивности излучения при прохождении луча через слой газа из-за поглощения и рассеяния, складывается из двух коэффициентов — спектрального коэффициента поглощения α_λ и спектрального коэффициента рассеяния β_λ , т. е.

$$K_\lambda = \alpha_\lambda + \beta_\lambda. \quad (8.91)$$

Коэффициент поглощения α_λ зависит от длины волны излучения, состояния газовой среды и состава газа. Зависимости коэффициента поглощения α_λ (или α_ν) с учетом переизлучения для воздуха от $\nu = 1/\lambda$ см⁻¹ для различных давлений и температур представлены на рис. 8.24, 8.25, 8.26. Определение коэффициентов поглощения является сложной физико-математической задачей, составляющей предмет специальных исследований [19, 28, 54, 57, 128]. Результаты расчетов коэффициентов поглощения для воздуха в широком диапазоне длин волн $\lambda = 0,1 \div 50$ мкм, температур $T = 2000 \text{ К} \div 20\,000 \text{ К}$ и давлений $p = 10^{-3} \div 10$ МПа представлены в работе [18].

Зная коэффициент поглощения α_λ , можно рассчитать количество лучистой энергии, поглощаемое за единицу времени элементарным объемом газа (см. рис. 8.23) с площадью поперечного сечения dF и длиной dl в направлении луча:

$$(dQ_\lambda)_{\text{погл}} = -\alpha_\lambda J_\lambda dF dl d\Omega d\lambda. \quad (8.92)$$

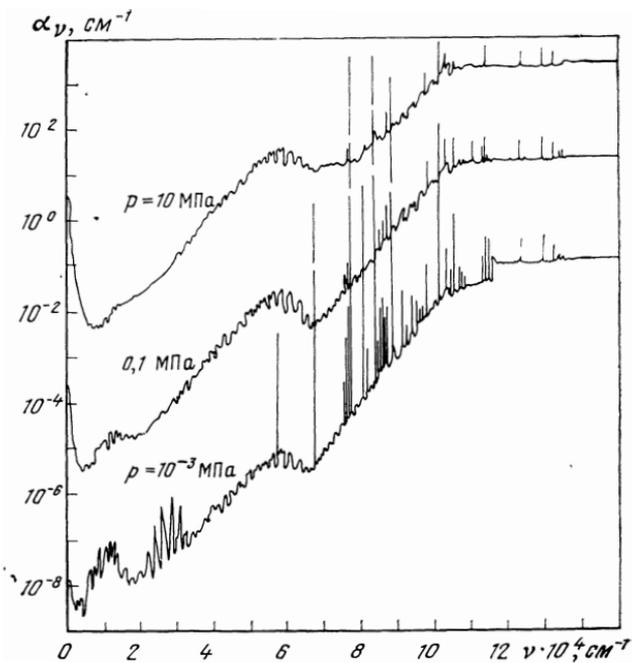


Рис. 824 Зависимость коэффициента поглощения воздуха от волнового числа ν при $T=6000$ К

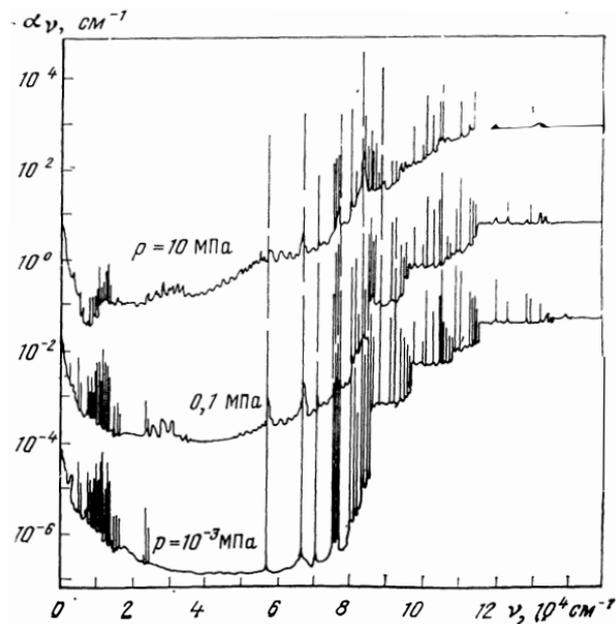


Рис. 825. Зависимость коэффициента поглощения воздуха от волнового числа ν при $T=10000$ К

Аналогично, количество лучистой энергии, которое рассеивает элементарный объем (см. рис. 8.23) за единицу времени, равно

$$(dQ_\lambda)_{\text{рас}} = -\beta_\lambda J_\lambda dF d\Omega d\lambda. \quad (8.93)$$

Рассеяние лучистой энергии твердыми частицами в оптически неоднородной среде происходит неравномерно по различным направлениям. Для характеристики рассеяния излучения в опре-

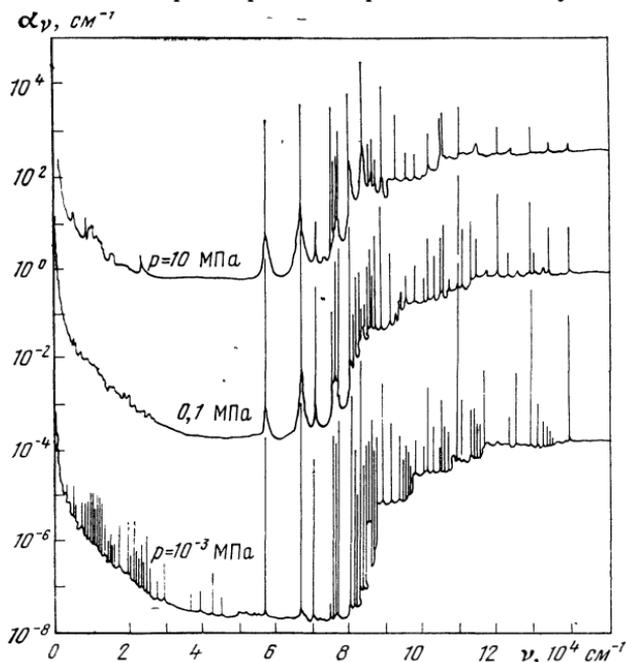


Рис. 8.26. Зависимость коэффициента поглощения воздуха от волнового числа ν при $T = 16\,000\text{ K}$

деленном направлении необходимо рассчитать индикатрису рассеяния $\gamma(\vec{L}\vec{L}_1)$ и коэффициент рассеяния. Индикатриса рассеяния $\gamma(\vec{L}\vec{L}_1)$ определяет долю общего излучения, входящего в элементарный объем (см. рис. 8.23) в направлении \vec{L} и рассеянного этим объемом в произвольном направлении \vec{L}_1 внутри телесного угла $d\Omega_1$. Вероятность рассеяния теплового луча внутри телесного угла $d\Omega_1$ в направлении \vec{L}_1 , составляющего угол β с направлением входа луча \vec{L} в элементарный газовый объем, равна

$$\frac{1}{4\pi} \gamma(\vec{L}\vec{L}_1) d\Omega_1. \quad (8.94)$$

Очевидно, что вероятность рассеяния теплового луча по всем направлениям пространства должна равняться единице, т. е.

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \gamma(\vec{L}, \vec{L}_1) d\Omega_1 = 1. \quad (8.95)$$

В случае сферической индикатрисы рассеяния, когда $\gamma(\vec{L}, \vec{L}_1) \equiv 1$, имеет место изотропное рассеяние излучения. В действительности рассеяние излучения различными оптически неоднородными средами существенно отличаются от изотропного. В этом случае распределение рассеянного излучения по направлениям зависит от двух параметров: от $l = d/\lambda$, представляющего собой отношение диаметра рассеивающей частицы к длине волны спектрального излучения, и от комплексного показателя преломления вещества $m = \sqrt{\chi - i \frac{2\sigma}{c} \lambda}$, определяемого для заданной длины волны λ значениями диэлектрической постоянной χ и электропроводности σ . Параметр l учитывает влияние на эффект рассеяния дифракционных явлений, а параметр m — влияние электрооптических свойств вещества частицы.

Для малых частиц (когда $l \ll 1$) одинаковой геометрии, но из разного материала, индикатрисы рассеяния будут совершенно различные. Для диэлектрических частиц (малые m и $ml \ll 1$) индикатриса рассеяния описывается формулой Релея [2]:

$$\gamma(\vec{L}, \vec{L}_1) = C (1 + \cos^2 \beta), \quad (8.96)$$

где C — константа.

На рис. 8.27 изображена индикатриса рассеяния на малых частицах, построенная по формуле (8.96). Видно, что индикатриса рассеяния является симметричной. Максимальная интенсивность рассеяния имеет место при $\beta = 0$ (вперед по лучу \vec{L}) и $\beta = \pi$ (в обратном направлении луча \vec{L}). Рассеяние в перпендикулярном направлении в 2 раза меньше чем вдоль луча \vec{L} .

Для идеально проводящих (отражающих) частиц ($l \ll 1$, $|m| \rightarrow \infty$) распределение рассеянного излучения по направлению существенно отличается от релейского (рис. 8.28). Видно, что максимум интенсивности рассеянного излучения направлен противоположно ходу луча \vec{L} .

Для больших частиц с $d \gg \lambda$ ($l \gg 1$) индикатриса рассеяния (рис. 8.29 и рис. 8.30) вытянута вперед по ходу луча. Как показано в работе [146], такой специфический характер индикатрис объясняется наличием особых дифракционных явлений на больших частицах. По мере увеличения d/λ дифракционно-рассеянное излучение все более концентрируется в узком пучке, направленном вперед вдоль падающего луча.

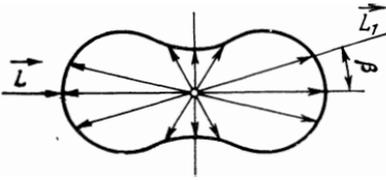


Рис. 8.27. Релеевская индикатриса рассеяния для малой частицы

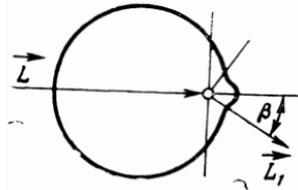


Рис. 8.28. Индикатриса рассеяния для малой идеально проводящей частицы с $|m| \rightarrow \infty$

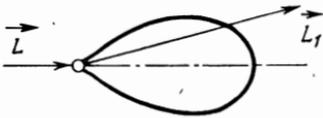


Рис. 8.29. Индикатриса рассеяния для частиц углерода ($d/\lambda = 0.75$ и $m = 2 - i \cdot 2/3$)



Рис. 8.30. Индикатриса рассеяния для идеально проводящих частиц ($l = 10$; $m = \infty$)

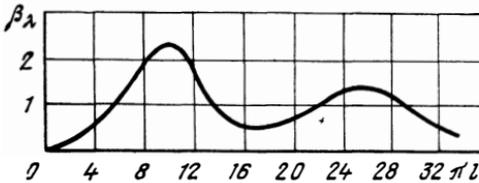


Рис. 8.31. Зависимость коэффициента рассеяния β_λ от величины параметра πl ($|m| = 1.33$)

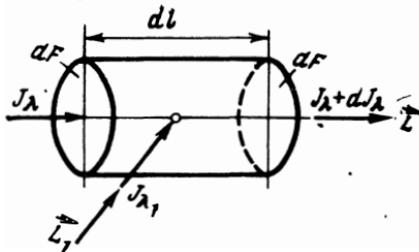


Рис. 8.32. К выводу уравнения переноса излучения

Расчет индикатрис рассеяния и коэффициентов рассеяния для различных частиц (как по размерам, так и по материалу, из которого состоит частица) является сложной физической задачей. Более подробно этот вопрос рассматривается в работе [146]. На рис. 8.31 представлена зависимость коэффициента рассеяния β_λ от параметра πl для капли воды ($|m|=1,33$) [14]. Из рисунка видно, что по мере увеличения d/λ ослабевает зависимость коэффициента рассеяния от параметра l . В пределе при $l \rightarrow \infty$ β_λ стремится к постоянному асимптотическому значению и не зависит от l .

Если известны радиационные свойства среды, то можно рассчитать поле излучения (т. е. распределение интенсивности излучения J_λ по направлению). Для этого необходимо воспользоваться уравнением переноса излучения по направлению, вывод которого рассматривается ниже.

8.12. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Пусть пространство заполнено оптически неоднородной средой, содержащей твердые частицы из одного материала и одинакового размера, способной излучать, поглощать и рассеивать лучистую энергию. Радиационные свойства среды, а также индикатрисы рассеяния частиц, находящихся во взвешенном состоянии в среде, известны. Рассмотрим тепловой луч интенсивностью J_λ , проходящий через элементарный цилиндр с площадью поперечного сечения dF и длиной dl (рис. 8.32), ось которого совпадает с направлением луча \vec{L} . Основания рассматриваемого элементарного цилиндра перпендикулярны к направлению луча \vec{L} . Изменение интенсивности излучения J_λ при прохождении через элементарный цилиндрический объем, заполненный оптически неоднородной средой, определяется процессами излучения, поглощения и рассеяния, происходящими внутри данного элемента объема.

Количество лучистой энергии, входящее через основание элементарного цилиндра dF за единицу времени внутри телесного угла $d\Omega$ в интервале длин волн от λ до $\lambda+d\lambda$ определяется из выражения (8.81):

$$(dQ_\lambda)_{\text{вхот}} = J_\lambda dF d\Omega d\lambda. \quad (8.97)$$

Количество лучистой энергии, выходящее из рассматриваемого элементарного объема через основание dF в направлении луча \vec{L} , равно

$$(dQ_\lambda)_{\text{вых}} = (J_\lambda + dJ_\lambda) dF d\Omega d\lambda. \quad (8.98)$$

Изменение интенсивности излучения проходящего через элементарный объем газа на величину dJ_λ определяется следующими процессами, происходящими внутри цилиндра:

$$(dQ_\lambda)_{\text{изл}} = \kappa_\lambda dF dl d\Omega d\lambda. \quad (8.99)$$

Излучение газа элементарного объема вызывает увеличение интенсивности излучения J_λ . Поглощение

$$(dQ_\lambda)_{\text{погл}} = -\alpha_\lambda J_\lambda dF d\Omega d\lambda \quad (8.100)$$

и рассеяние излучения газом на длине $d\lambda$

$$(dQ_\lambda)_{\text{рас}} = -\beta_\lambda J_\lambda dF d\Omega d\lambda \quad (8.101)$$

вызывает ослабление спектральной интенсивности излучения J_λ . Кроме того, увеличение спектральной интенсивности излучения J_λ в направлении \vec{L} , вызывается рассеянием в данном направлении твердыми частицами лучистой энергии всех тепловых лучей, пересекающих данный элементарный объем по всем направлениям пространства

$$(dQ_\lambda)_{\text{рас}} = \frac{\beta_\lambda}{4\pi} dF d\Omega d\lambda \int_{4\pi} J_{\lambda 1} \gamma(\vec{L}_1, \vec{L}) d\Omega_1. \quad (8.102)$$

Составляя баланс излучения для элементарного объема газа, с учетом уравнений (8.97) — (8.102), получаем

$$dJ_\lambda dF d\Omega d\lambda = \kappa_\lambda dF d\Omega d\lambda - \alpha_\lambda J_\lambda dF d\Omega d\lambda - \beta_\lambda J_\lambda dF d\Omega d\lambda + \frac{\beta_\lambda}{4\pi} dF d\Omega d\lambda \int_{4\pi} J_{\lambda 1} \gamma(\vec{L}_1, \vec{L}) d\Omega_1. \quad (8.103)$$

Если рассматривать процессы переноса излучения как стационарные, уравнение (8.103) после сокращения принимает вид

$$\frac{dJ_\lambda}{d\lambda} = -(\alpha_\lambda + \beta_\lambda) J_\lambda + \kappa_\lambda + \frac{\beta_\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} J_{\lambda 1} \gamma(\vec{L}_1, \vec{L}) d\Omega_1. \quad (8.104)$$

Полученное уравнение (8.104) называется уравнением переноса излучения. Оно является сложным интегродифференциальным уравнением, решение которого встречает большие математические трудности, так как необходимо вычислять интеграл по всему пространству для известных индикатрис рассеяния излучения частицами.

В случае излучающей и поглощающей среды уравнение (8.104) принимает вид

$$\frac{dJ_\lambda}{d\lambda} = -\alpha_\lambda J_\lambda + \kappa_\lambda. \quad (8.105)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для спектральной интенсивности, решение которого не представляет никаких затруднений.

8.13. ЗАКОН КИРХГОФА ДЛЯ ГАЗОВ

Закон Кирхгофа, целиком вытекая из второго начала термодинамики, устанавливает связь между спектральными коэффициентами излучения и поглощения среды и формулируется следующим образом: *отношение спектрального коэффициента излучения \varkappa_λ к спектральному коэффициенту поглощения α_λ зависит*

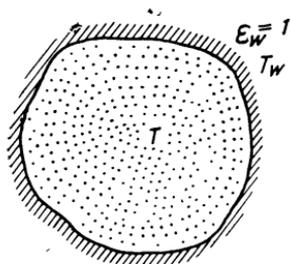


Рис. 8.33. Газ в абсолютно черной емкости

только от длины волны и температуры и не зависит от природы среды.

Рассмотрим замкнутую оболочку (рис. 8.33), внутренняя поверхность которой является абсолютно черной ($\epsilon_w = 1$). Оболочка заполнена газом, находящимся с ней в термодинамическом равновесии, т. е. температура газа T равна температуре оболочки T_w . В этом случае теплообмен между газом и стенкой будет отсутствовать. Следовательно, перенос излучения по любому направлению в газе будет равен нулю:

$$\frac{dJ_\lambda}{d\lambda} = 0, \quad (8.106)$$

а спектральная интенсивность такого равновесного излучения будет зависеть только от длины волны и температуры. Обозначим ее через $J_{\lambda p}$. Очевидно, что уравнение переноса излучения для излучающей и поглощающей сред (8.105) примет вид

$$\varkappa_\lambda - \alpha_\lambda J_{\lambda p} = 0,$$

откуда получаем

$$\frac{\varkappa_\lambda}{\alpha_\lambda} = J_{\lambda p}. \quad (8.107)$$

Это соотношение между спектральными коэффициентами является математической формулой закона Кирхгофа.

В силу того, что оболочка является абсолютно черной, яркость поверхности оболочки ($B_{\lambda 0}$) постоянна по различным направлениям. Так как газ и твердая поверхность находятся в термодинамическом равновесии, то

$$J_{\lambda p} = B_{\lambda 0} = \frac{C_1}{\pi} \lambda^{-5} [e^{C_2/(\lambda T)} - 1]^{-1}. \quad (8.108)$$

Закон Кирхгофа строго справедлив только при наличии термодинамического равновесия. Следует иметь в виду, что при теплообмене между высокотемпературным потоком газа и поверхностью термодинамического равновесия нет. В этом случае

уравнение (8.107) неприменимо. Тем не менее в большинстве практических задач по теплообмену при обтекании поверхности высокотемпературным газовым потоком выполняется условие локального термодинамического равновесия. Если среда находится в локальном термодинамическом равновесии, то процессы излучения в элементарном объеме газа, имеющем температуру T , аналогичны процессам излучения, происходящим в рассмотренной выше оболочке при этой же температуре. Причем нет необходимости в том, чтобы среда была изотермической. Температура в среде может изменяться от точки к точке, но каждый элементарный объем среды излучает и поглощает так, как если бы он находился в термодинамическом равновесии.

Чаще в практических задачах удобно использовать интегральные характеристики: интегральный коэффициент излучения κ (уравнение 8.86), интегральную интенсивность J (уравнение 8.87). Для случая термодинамического равновесия

$$J_p = \int_0^{\infty} J_{\lambda p} d\lambda = \frac{\sigma_0}{\pi} T^4, \quad (8.109)$$

где $\sigma_0 = 5,75 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²К⁴) — коэффициент излучения абсолютно черного тела.

В практических задачах часто рассматривается модель серой среды (или серого газа), коэффициент поглощения которой не зависит от длины волны, т. е. используется некоторый осредненный по длинам волн (или частотам) коэффициент поглощения α

$$\alpha = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda} J_{\lambda p} d\lambda}{\int_0^{\infty} J_{\lambda p} d\lambda}. \quad (8.110)$$

Для серого газа закон Кирхгофа имеет вид

$$\frac{\kappa}{\alpha} = B_0 = \frac{\sigma_0}{\pi} T^4. \quad (8.111)$$

Зная радиационные свойства газа (κ_{λ} , α_{λ} , K_{λ}), можно рассчитать поле излучения, т. е. определить интенсивность по направлению (J_{λ}) и величину лучистого теплового потока.

§14. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГАЗОВЫХ СРЕД

Оптические свойства газовых сред (поглощательная способность A_{λ} , степень черноты ϵ_{λ}) тесно связаны с переносом излучения через газовый объем. Поглощательная способность газового слоя A_{λ} определяется как отношение лучистой энергии, погло-

щенной при прохождении теплового луча через слой газа, к падающей лучистой энергии (8.9). Степень черноты ε_λ определяется как отношение потока собственного излучения среды к потоку черного излучения при той же температуре.

Исследование оптических свойств газов связано с решением уравнения переноса излучения. В общем виде решить уравнение переноса излучения (8.104) аналитически невозможно, поэтому для определения оптических свойств среды рассмотрим излучающую и поглощающую газовую среду и воспользуемся уравнением (8.105). Для большого круга практических задач, особенно при исследовании теплообмена от высокотемпературного газа к поверхности при гиперзвуковых скоростях полета летательных аппаратов, величина рассеянной тепловой энергии пренебрежимо мала. В этом случае газовая среда является только излучающей и поглощающей, и для нее справедливо уравнение (8.105).

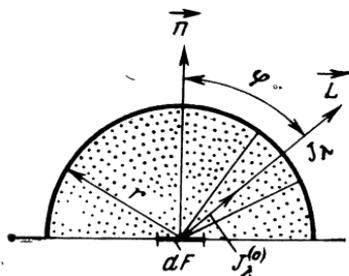


Рис. 8.34. Прохождение теплового луча через полусферический газовый объем

Рассмотрим прохождение теплового луча (рис. 8.34), интенсивностью $J_\lambda^{(0)}$, испускаемого элементарной площадкой dF , через полусферический газовый объем радиуса r . Газ, заполняющий полусферу, является однородным и изотермическим. Следовательно, температура и плотность газа по всему объему постоянны. Радиационные свойства газа (κ_λ , α_λ), которые являются функциями длины волны и термодинамических параметров (p и T) для монохроматического излучения будут постоянны по всему объему. В этом случае все направления излучения по полусфере являются равноценными, т. е. интенсивность излучения J_λ не зависит от угла φ . Рассмотрим одно какое-нибудь направление \vec{L} . Интенсивность излучения J_λ вдоль этого направления будет изменяться в силу поглощения и излучения лучистой энергии газом вдоль рассматриваемого направления.

Уравнение переноса излучения (8.105) с учетом закона Кирхгофа (8.107) имеет вид

$$\frac{dJ_\lambda}{dr} = -\alpha_\lambda(J_\lambda - B_{\lambda 0}). \quad (8.112)$$

Решение этого уравнения с граничным условием

$$r=0 \quad J_\lambda = J_\lambda^{(0)} \quad (8.113)$$

для изотермического слоя газа имеет вид

$$J_\lambda = J_\lambda^{(0)} e^{-\alpha_\lambda r} + B_{\lambda 0} (1 - e^{-\alpha_\lambda r}), \quad (8.114)$$

где первый член уравнения представляет собой интенсивность излучения, вошедшего в рассматриваемый объем извне от каких-то внешних источников и ослабленного из-за поглощения на длине радиуса r , второй член уравнения — собственную суммарную интенсивность излучения, полученную сложением излучений всех элементарных слоев полусферического газового объема, расположенных вдоль луча \vec{L} (от 0 до r), и ослабленную поглощением на этом же отрезке луча. Для серого газа уравнение переноса излучения можно представить как

$$\frac{dJ}{dr} = -\alpha(J - B_0), \quad (8.115)$$

а решение с учетом граничного условия ($r=0$; $J=J^{(0)}$) имеет вид

$$J = J^{(0)} e^{-\alpha r} + B_0(1 - e^{-\alpha r}). \quad (8.116)$$

Если собственное излучение газа много меньше ослабляемого средой внешнего излучения, то уравнения (8.114) и (8.116) принимают, соответственно, следующий вид:

$$J_\lambda = J_\lambda^{(0)} e^{-\alpha_\lambda r}. \quad (8.117)$$

и
$$J = J^{(0)} e^{-\alpha r}. \quad (8.118)$$

Для спектрального излучения поглощательная способность определяется как

$$A_\lambda = \frac{J_\lambda^{(0)} - J_\lambda}{J_\lambda^{(0)}} = 1 - e^{-\alpha_\lambda r}; \quad (8.119)$$

для серого газа

$$A = \frac{J^{(0)} - J}{J^{(0)}} = 1 - e^{-\alpha r}. \quad (8.120)$$

Для случая, когда собственное излучение среды много больше падающего,

$$J_\lambda = B_{\lambda 0}(1 - e^{-\alpha_\lambda r}), \quad (8.121)$$

а
$$J = B_0(1 - e^{-\alpha r}). \quad (8.122)$$

Отсюда спектральная степень черноты

$$\varepsilon_\lambda = \frac{J_\lambda}{B_{\lambda 0}} = 1 - e^{-\alpha_\lambda r}. \quad (8.123)$$

Соответственно, для серого газа можно определить степень черноты газового объема (ε):

$$\varepsilon = \frac{J}{B_0} = 1 - e^{-\alpha r}. \quad (8.124)$$

Из уравнений (8.119) и (8.123) видно, что спектральная поглощательная способность A_λ и спектральная степень черноты ϵ_λ зависят от длины волны, толщины газового слоя и плотности газа (или давления p).

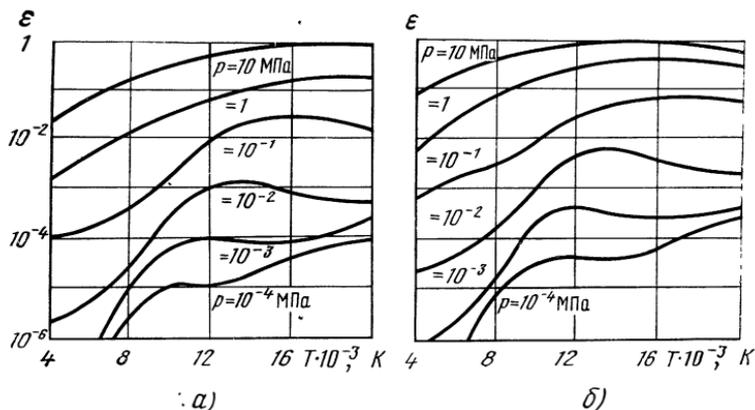


Рис. 8.35. Степень черноты плоского слоя воздуха толщиной $l=1$ и 10 см; при различных температурах и давлениях:

а—толщиной $l=1$ см, б—толщиной $l=10$ см

В случае серого газа

$$A = \epsilon = f(p, l), \quad (8.125)$$

где l — толщина газового слоя.

На рис. 8.35 приведены зависимости степени черноты ϵ , плоского слоя воздуха толщиной $l=1$ см и плоского слоя воздуха толщиной $l=10$ см от температуры и давления [18]. Видно, что степень черноты ϵ сильно зависит от температуры, давления и толщины газового слоя.

8.15. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ТОЛЩИНА СЛОЯ ИЗЛУЧАЮЩЕГО И ПОГЛОЩАЮЩЕГО ГАЗА

Степень черноты (ϵ_λ) или поглощательная способность (A_λ) газа зависит от длины пути, который проходит луч в среде в заданном направлении. Даже в средах сравнительно простой геометрической формы, таких как сфера, цилиндр, плоский слой, длина пути, проходимого лучами в различных направлениях через газовый слой, существенно неодинакова. В случае сферического слоя (рис. 8.36) максимальную длину пути, равную диаметру сферы, будет проходить только один луч, пересекающий центр сферы. Длина пути других лучей будет уменьшаться по мере увеличения угла φ .

В случае бесконечного плоского слоя (рис. 8.37) длина пути луча в направлении нормали к поверхности слоя будет, наобо-

рот, минимальной и равной толщине слоя δ . Во всех остальных направлениях длина пути лучей будет возрастать по мере увеличения φ от δ до бесконечности.

Таким образом, если диаметр сферического газового объема равен толщине плоского слоя (δ), то средняя длина пути лучей в бесконечном плоском слое существенно больше, чем у сферы. Соответственно, степень черноты плоского слоя газа больше, чем сферического газового объема.

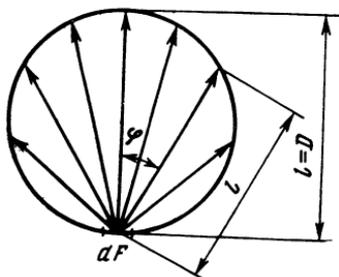


Рис. 8.36. Сферический газовый объем

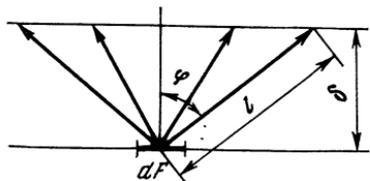


Рис. 8.37. Плоский слой газа

Расчет степени черноты среды различной геометрической конфигурации является весьма сложной и громоздкой задачей. Для наиболее простой геометрии — сфера, цилиндр (конечный и бесконечно длинный), бесконечный плоский слой — получены решения, приведенные в работе [151]:

для сферического газового объема —

$$\varepsilon_\lambda = 1 + \frac{2}{\alpha_\lambda D} (1 + \alpha_\lambda D), \quad (8.126)$$

где D — диаметр сферы;

для бесконечного цилиндра —

$$\varepsilon_\lambda = 1 - \Phi(\alpha_\lambda R), \quad (8.127)$$

где R — радиус цилиндра;

для бесконечного плоского слоя —

$$\varepsilon_\lambda = 1 - \Phi(\alpha_\lambda \delta), \quad (8.128)$$

где δ — толщина слоя.

Функции $\Phi(\alpha_\lambda R)$ и $\Phi(\alpha_\lambda \delta)$ рассчитаны и за tabулированы. На рис. 8.38 приведена зависимость степени черноты для плоского слоя, цилиндра и шара от спектральной оптической толщины $\tau_\lambda = \alpha_\lambda D$ (или $\alpha_\lambda \delta$), характеризующей поглощение излучения в среде. Видно, что при равных значениях τ_λ наименьшей степенью черноты обладает шаровой излучающий и поглощающий слой, а наибольшей — бесконечный плоский слой.

Аналитический метод расчета степени черноты даже для газового объема простой геометрической конфигурации является весьма сложным, а решения в большинстве случаев не могут быть доведены до конечного результата. Тем более аналитические методы не пригодны при определении степени черноты объемов сложной геометрической формы. На практике для расчета степени черноты таких сложных по форме газовых объемов используют метод эквивалентной толщины [151]. Этот метод основан на том, что для полусферического газового объема радиуса R длина пути всех лучей, проходящих через

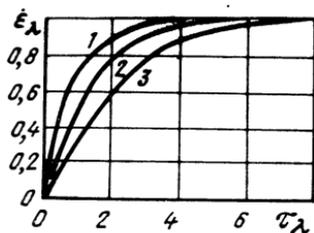


Рис. 8.38. Степень черноты в зависимости от $\alpha_\lambda D$ (или $\alpha_\lambda \delta$):

1—бесконечного плоского слоя; 2—бесконечного цилиндра; 3—сферы

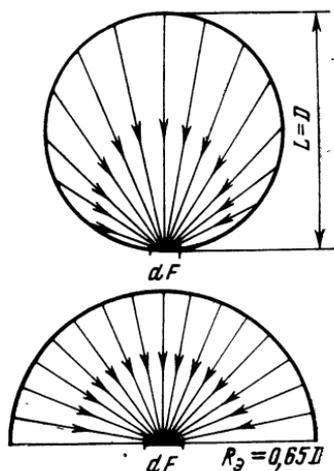


Рис. 8.39 Замена сферического газового объема эквивалентным полусферическим объемом газа

полусферический слой газа от поверхности до центра основания, одинакова и равна радиусу полусферы R . Всякий другой газовый объем сложной геометрической конфигурации может быть заменен эквивалентным полусферическим газовым объемом, т. е. полусферой радиуса R_0 , излучающей в свой центр то же количество лучистой энергии, какое излучает на рассматриваемый элемент поверхности действительный газовый объем. Например, сферический газовый объем диаметром D , излучающий на элементарную поверхность dF (рис. 8.39), может быть заменен полусферой радиусом $R_0 = 0,65D$, излучающей на элементарную поверхность dF , расположенную в центре основания полусферы, такое же количество лучистой энергии, что и сферический газовый объем.

Соотношение между характерным линейным размером газового объема заданной формы и радиусом эквивалентного полусферического объема, излучающего то же количество энергии, представлено для наиболее типичных случаев лучистого теплообмена в табл. 8.2 [31, 151].

Зная $R_э$, можно степень черноты для газового изотермического объема заданной конфигурации определить по формуле

$$\varepsilon_\lambda = 1 - e^{-\alpha_\lambda R_э} \quad (8.129)$$

Соответственно, для серого газа

$$\varepsilon = 1 - e^{-\alpha_\lambda R_э} \quad (8.130)$$

где $R_э$ берется из табл. 8.2 или подсчитывается для объемов сложной формы по приближенной формуле

$$R_э = m \frac{4V}{F} \quad (8.131)$$

где V — объем рассматриваемого газового слоя;

F — площадь поверхности, ограничивающей газовый объем.

Таблица 8.2

Эквивалентная длина луча для газовых объемов различной формы

Форма объема	$R_э$
Сфера диаметром D	$0,60D$
Куб со стороной a	$0,60a$
Бесконечный цилиндр диаметром D , излучающий на центр основания	$0,90D$
Бесконечный цилиндр диаметром D , излучающий на боковую поверхность	$0,90D$
Прямой цилиндр (высота H равна диаметру основания D), излучающий на центр основания	$0,77D$
Тот же цилиндр, излучающий на всю поверхность	$0,60D$
Бесконечный цилиндр полукруглого поперечного сечения радиусом R , излучающий на середину плоского основания	$1,26R$
Слой толщины H между безграничными плоскими пластинами	$1,80H$
Прямоугольный параллелепипед со сторонами $a \times 2a \times 6a$, где a — длина наименьшего ребра, излучающий на любую из граней ($a \times 2a$; $a \times 6a$; $2a \times 6a$)	$1,06a$
Межтрубное пространство, образованное пучком труб с диаметром D ; шаг труб поперек хода газов s_1 ; продольный шаг труб s_2 ; длина труб	$l > D$
при $\frac{s_1 + s_2}{D} \leq 7,0$	$(1,87 \frac{s_1 + s_2}{D} - 4,1) D$
при $7,0 < \frac{s_1 + s_2}{D} < 13$	$(2,82 \frac{s_1 + s_2}{D} - 10,6) D$

Для приближенных расчетов поправочный коэффициент $m \approx 0,9$. Зная степень черноты газа, можно рассчитать лучистый теплообмен между газом и окружающей его оболочкой. Если излучение газовой среды близко к серому, хорошее приближение дает следующая расчетная формула [2]

$$Q_{\text{луч}} = \sigma_0 \frac{\varepsilon_{\text{г}} T_{\text{г}}^4 - A_{\text{г}} T_{\text{в}}^4}{1/A_{\text{г}} + 1/A_{\text{в}} - 1} F, \quad (8.132)$$

где $\varepsilon_{\text{г}}$ — степень черноты газа при температуре $T_{\text{г}}$;

$A_{\text{г}}$ — поглощательная способность газа при температуре $T_{\text{г}}$ по отношению к излучению абсолютно черного тела при температуре $T_{\text{в}}$;

$A_{\text{в}}$ — поглощательная способность стенки;

F — площадь поверхности оболочки.

Расчет лучистого теплообмена между высокотемпературным газовым потоком и поверхностью неразрывно связан с расчетом поля течения вязкого газа, т. е. с решением уравнений пограничного слоя. Из этих соображений исследование лучистого теплообмена, между газовым потоком и стенкой, а также влияние поля излучения на поле течения в данной главе не рассматривается.

Рекомендуемая литература:

основная: [5, 31, 39, 59];

дополнительная: [18, 28, 54, 57, 86, 128, 146, 147, 151].

ГЛАВА IX

ТЕПЛОВОЙ И ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

Совершенствование конструкции летательных аппаратов сопровождается непрерывным ростом энергонапряженности двигательных установок и насыщением летательных аппаратов всякого рода вспомогательными и обслуживающими энергосистемами.

Работа двигательной установки и вспомогательных энергосистем, как правило, сопровождается выделением тепла, которое необходимо отводить. Тепло требуется отводить и из кабин экипажа и салонов для пассажиров.

При малых скоростях полета двигатели, смазочное масло, различная аппаратура и вспомогательные энергосистемы обычно охлаждаются окружающим воздухом или с помощью промежуточных теплоносителей. При больших же скоростях полета вследствие аэродинамического нагрева воздух в заборниках и у обшивки летательного аппарата настолько нагрет, что не может быть использован непосредственно для целей охлаждения. Более того, возникает необходимость в принудительном охлаждении кабины экипажа, отсеков с приборами и некоторых элементов конструкции.

При полете на больших высотах и в космосе воздух либо очень разрежен, либо практически отсутствует. Во всех этих случаях охлаждение двигательных установок, различного рода энергосистем, отсеков с приборами и кабин экипажа осуществляется с помощью теплопоглотителей, запаасаемых на земле перед полетом, или путем отвода тепла излучением.

В качестве основного теплопоглотителя обычно используется топливо, которое по пути из баков в двигатель подогревается, охлаждая при этом элементы конструкции, масло, и некоторые энергосистемы. В качестве вспомогательных теплопоглотителей (стоков тепла) служат специальные жидкости (вода, аммиак, спирт, криогенные жидкости и т. п.), которые, нагреваясь и испаряясь, отбирают тепло.

Таким образом, полет летательного аппарата невозможен без отвода тепла, непрерывно выделяющегося в его энергосистемах. Этот отвод тепла осуществляется различными способами: теплопроводностью, конвективным теплообменом с теплоносителями и

излучением. Как правило, источники тепловыделения удалены от стоков тепла и транспортировка тепла от источника тепловыделения к местам, где оно может быть отведено или воспринято, осуществляется теплоносителями.

Устройства, в которых происходит передача тепла от горячих теплоносителей к холодным, называются теплообменными аппаратами или теплообменниками.

Если в этих устройствах тепло от горячих теплоносителей рассеивается излучением, то они называются излучателями или радиационными холодильниками.

Следовательно, отвод тепла от энергосистем летательного аппарата или элементов его конструкции, как правило, осуществляется с помощью специальных систем, включающих теплоносители, устройства для их перекачки и теплообменные аппараты или излучатели. Такие системы называются системами охлаждения.

В современных летательных аппаратах системы охлаждения играют важную роль, а в ряде случаев (например, космические летательные аппараты) они в значительной мере определяют габариты и массу летательного аппарата в целом и диктуют выбор двигательной установки.

Основными элементами системы охлаждения являются теплообменные аппараты и излучатели, параметры которых в свою очередь сильно зависят от используемых теплоносителей. Свойства теплоносителя, конструкция теплообменных аппаратов и коммуникаций определяют необходимую мощность на прокачку теплоносителей и тип циркуляционных насосов.

Рассмотрим кратко основные схемы авиационных и ракетных теплообменных аппаратов, их гидравлический и тепловой расчет и характеристики наиболее употребительных теплоносителей.

9.1. ОСНОВНЫЕ СХЕМЫ АВИАЦИОННЫХ И РАКЕТНЫХ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

Выбор схемы того или иного теплообменного аппарата всегда связан с компромиссом между различными предъявляемыми к нему требованиями.

Основные требования к авиационным и ракетным теплообменникам следующие.

1. Надежность в пределах заданного ресурса времени работы.
2. Минимальная масса и габариты.
3. Высокая эффективность.
4. Удобство компоновки.
5. Малые гидравлические потери.
6. Технологичность конструкции.
7. Удобство эксплуатации.

В каждом конкретном случае важность каждого из этих требований и их сочетание различны, что определяет многообразие реальных схем теплообменников.

Все теплообменные аппараты по способу передачи тепла могут быть разделены на две большие группы: **поверхностные** и **контактные** (рис. 9.1).

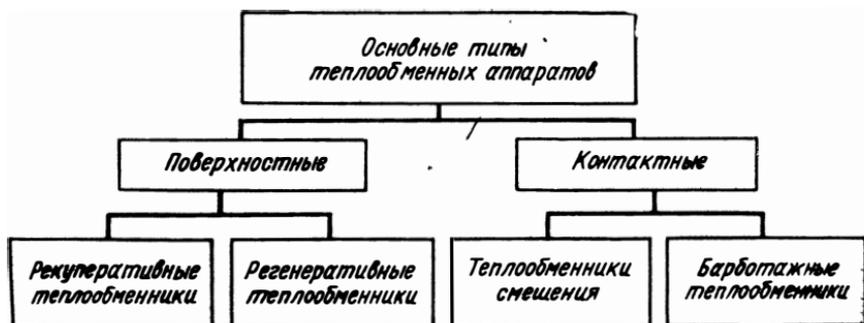


Рис. 9.1. Классификация теплообменных аппаратов

Во всех поверхностных теплообменниках оба теплоносителя омывают обычно разделяющую их твердую стенку, которая таким образом участвует в процессе теплообмена. Каждая поверхность стенки образует, так называемую, поверхность теплообмена. В зависимости от назначения теплообменного аппарата эти поверхности также часто называют поверхностью нагрева или охлаждения.

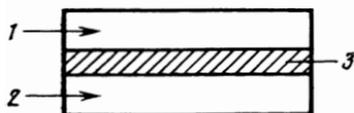


Рис. 9.2. Принципиальная схема рекуперативного теплообменника:

1—первичный (горячий) теплоноситель; 2—вторичный (холодный) теплоноситель; 3—поверхность теплообмена

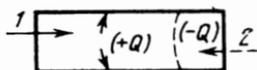


Рис. 9.3. Принципиальная схема регенеративного теплообменника:

1—первичный (горячий) теплоноситель; 2—вторичный (холодный) теплоноситель

В контактных теплообменных аппаратах тепло передается путем непосредственного контакта двух теплоносителей: горячего и холодного; при этом теплообмен сопровождается и массообменом. Все поверхностные теплообменники разделяются на **рекуперативные** и **регенеративные**.

В рекуперативных аппаратах (рис. 9.2) одна поверхность стенки все время омывается одним теплоносителем, а другая — другим. Тепло от одного теплоносителя к другому передается через разделяющую их стенку из теплопроводного материала. Направление теплового потока Q в стенке остается неизменным.

В регенеративных аппаратах одна и та же поверхность теплообмена попеременно омывается то одним, то другим теплоносителем. В период нагрева, т. е. при проходе горячего теплоносителя, стенки теплообменника и набивка в виде шаров, колец и т. п. нагреваются, в них аккумулируется тепло, которое в период охлаждения отдается протекающему вторичному теплоносителю (рис. 9.3). Направление потока тепла в стенках периодически меняется. Примером таких установок являются воздухоподогреватели газотурбинных установок, воздухоподогреватели типа Юнгстрем и др.

Из сказанного следует, что термин «регенеративный теплообменный аппарат» нельзя путать с термином «регенератор», употребляемым, например, в газотурбинных установках, в которых этот термин относится к части установки, где воздух, поступающий в камеру сгорания, предварительно подогревается газами из турбины. Регенератор ГТУ как теплообменный аппарат по способу действия может быть рекуперативным или регенеративным.

Регенеративные теплообменные аппараты в большинстве случаев являются аппаратами периодического действия, а рекуперативные — чаще непрерывного действия.

Контактные теплообменные аппараты в свою очередь подразделяются на смешительные и барботажные.

В аппаратах смешительного типа нагретые и менее нагретые теплоносители перемешиваются и образуют растворы или смеси. Примером таких смешительных теплообменников могут являться различного типа скрубберы.

В аппаратах барботажного типа более нагретый теплоноситель прокачивается через массу менее нагретого (или наоборот), не смешиваясь с ним, как это имеет место в различного рода воздушных градирнях, при охлаждении смазочного масла в камере поршневого двигателя и в некоторых других случаях.

Рекуперативные теплообменные аппараты в свою очередь могут быть классифицированы по следующим признакам.

1. По роду теплоносителей в зависимости от их агрегатного состояния (рис. 9.4).

2. По конфигурации поверхности теплообмена:

- а) трубчатые аппараты с прямыми трубками;
- б) трубчатые аппараты с U-образным трубным пучком;
- в) спиральные;
- г) пластинчатые;
- д) змеевиковые;
- е) ребристые.

3. По компоновке поверхности нагрева:

- а) тип «труба в трубе»;
- б) кожухо-трубчатые аппараты;
- в) оросительные аппараты (не имеющие ограничивающего корпуса) и некоторые другие.



Рис. 9.4. Классификация рекуперативных теплообменников по виду агрегатного состояния теплоносителей

Теплообменные аппараты классифицируются также по наличию или отсутствию изменения агрегатного состояния теплоносителей при прохождении их в теплообменном аппарате. Соответственно имеются аппараты:

- 1) без изменения агрегатного состояния теплоносителей;
- 2) с изменением агрегатного состояния одного теплоносителя — конденсация пара (первичного теплоносителя) или кипение жидкости (вторичного теплоносителя);
- 3) с изменением агрегатного состояния обоих теплоносителей; например, конденсация первичного пара и кипение вторичной воды, подогреваемой этим паром.

Кроме приведенных основных классификационных признаков теплообменных аппаратов, последние можно также классифицировать по целому ряду дополнительных признаков.

Так, например, все теплообменные аппараты поверхностного типа можно классифицировать по виду взаимного направления потоков теплоносителей. Все поверхностные теплообменники могут быть:

- 1) прямоточные, когда оба теплоносителя движутся параллельно в одном направлении (рис. 9.5, а);
- 2) противоточные, когда оба теплоносителя движутся в противоположных направлениях (рис. 9.5, б);

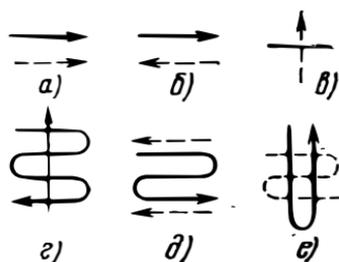


Рис. 9.5 Классификация поверхностных теплообменных аппаратов по виду взаимного направления потоков теплоносителей:

а—прямоток; б—противоток; в—однократный перекрестный ток; г—многократный (четырёхкратный) перекрестный ток; д, е—сложные схемы

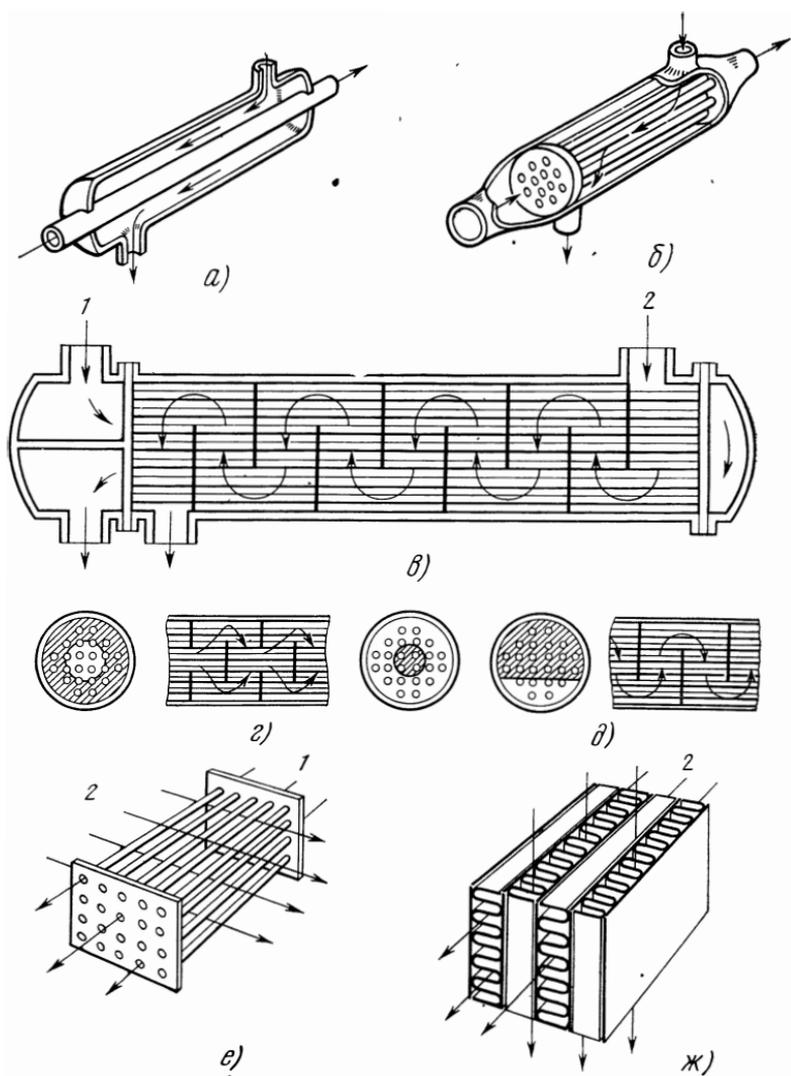


Рис. 9.6. Типичные конструктивные схемы рекуперативных теплообменных аппаратов:

а—«труба в трубе» противоток; *б*—кожухотрубный противоток; *в*, *г*, *д*—кожухотрубный, многократный перекрестный ток; *е*—трубчатый перекрестный ток; *ж*—пластинчато-ребристый перекрестный ток; *1*—горячий поток; *2*—холодный поток

3) с перекрестным током, когда теплоносители движутся во взаимно перпендикулярных направлениях; перекрестный ток может быть однократным и многократным (рис. 9.5, *в* и *г*);

4) с более сложными схемами различного сочетания прямого тока, противотока и перекрестного тока (рис. 9.5, *д* и *е*).

Кроме всех приведенных отличительных признаков, теплообменные аппараты можно также классифицировать по назначению (подогреватели, охладители и т. д.), материалу поверхности теплообмена, числу ходов теплоносителя и т. п.

На рис. 9.6 для иллюстрации приведены некоторые типичные схемы теплообменных аппаратов различного назначения.

9.2. ТЕПЛОНОСИТЕЛИ

Во многих случаях теплоносители не выбираются, а задаются, например, если требуется охлаждать масло топливом или воздухом и т. п. В тех случаях, когда этот выбор возможен, он обычно производится в результате рассмотрения совокупности многих факторов и требований. Иногда выбор теплоносителя связан с расчетом и конструктивной проработкой двигательной установки и даже всего летательного аппарата в целом (например, космические летательные аппараты, самолеты с атомными двигателями и т. п.).

Короче говоря, выбор теплоносителя и типа теплообменного аппарата, т. е. системы охлаждения, в ряде случаев представляет сложную задачу и не может решаться в отрыве от объекта в целом.

При выборе теплоносителей большое значение имеют их теплофизические и эксплуатационные свойства, такие как теплопроводность, вязкость, теплоемкость, плотность, агрегатное состояние, коррозионные свойства, химическая стабильность, доступность, температуры и теплоты плавления и кипения и т. п.

В авиационной и ракетной технике в качестве теплоносителей применяются самые различные вещества: газы, топлива, масла, специальные органические и неорганические жидкости, вода, жидкие металлы, криогенные жидкости и т. д.

Задача этой главы — рассмотрение методов теплового и гидравлического расчета теплообменных аппаратов. Это предполагает, что для каждого варианта расчета теплоносители и схема теплообменного аппарата заданы. Поэтому в данной главе анализ выбора теплоносителей и схемы теплообменного аппарата не приводятся. Как уже отмечалось, выбор теплоносителей и схемы теплообменного аппарата производится на основе анализа конструктивной проработки и вариантных расчетов всей двигательной установки, энергосистемы или системы охлаждения с учетом задач и требований, предъявляемых к объекту в целом*.

* Примеры такого анализа читатель может найти, например, в книге Д. Б. Маккея [102].

93. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТЕПЛОБМЕННЫХ АППАРАТОВ

Задача гидравлического расчета теплообменного аппарата заключается в определении потерь давления теплоносителя Δp между входом p_1 и выходом p_2 . Этот перепад давлений $\Delta p = p_1 - p_2$ необходим для прокачки теплоносителя с заданным расходом через теплообменный аппарат. Перепад давлений необходим для:

- 1) преодоления трения теплоносителя о стенки каналов;
- 2) преодоления местных сопротивлений (сужения, расширения, повороты потока, вентили, задвижки и т. п.);
- 3) преодоления массовых сил (силы тяжести в гравитационном поле и т. п.);
- 4) преодоление инерционных сил (ускорение потока во времени при нестационарном движении теплоносителя, ускорение потока по длине канала при изменении его удельного объема вследствие нагрева).

Искомый перепад давлений Δp может быть найден из решения уравнения (5.2), если известна зависимость $\psi = \psi(x, \tau)$.

На практике принято учитывать потери на трение при одномерном описании не коэффициентом ψ , а коэффициентом гидравлического сопротивления ξ :

$$\xi = \psi \frac{\partial p}{\partial x} / \frac{\rho u^2}{2d}, \quad (9.1)$$

где u — среднерасходная скорость теплоносителя в канале, а для некруглых каналов вместо диаметра трубы d используем эквивалентный диаметр $d_0 = 4f/U$, где f — поперечная площадь канала, а U — его периметр. С учетом уравнения (9.1) одномерное уравнение движения (5.2) будет

$$\frac{G}{u} \frac{\partial u}{\partial \tau} + G \frac{\partial u}{\partial x} = f \rho F_x - f \frac{\partial p}{\partial x} - f \xi \frac{\rho u^2}{2d}. \quad (9.2)$$

Коэффициент гидравлического сопротивления ξ обычно находится из эксперимента, реже — из теоретического решения трехмерной системы уравнений для течения в соответствующем канале.

Согласно формуле (5.9) в общем случае стационарного течения в каналах

$$\xi = \varphi \left[\frac{x}{d}, \text{Re}, \text{Gr}, \frac{\rho_w}{\rho_f}, \frac{\mu_w}{\mu_f}, \frac{\lambda_w}{\lambda_f}, \frac{(c_p)_w}{(c_p)_f} \right].$$

Рассмотрим важные частные случаи решения уравнения (9.2).

1. *Стационарное течение несжимаемых жидкостей* ($\rho = \text{const}$). Тогда уравнение (9.2) будет

$$- \frac{\partial p}{\partial x} = - \rho F_x + \xi \frac{\rho u^2}{2d}. \quad (9.3)$$

Его решение:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \bar{\xi} \frac{\rho u^2}{2} \frac{l}{d} - \rho \bar{F}_x l. \quad (9.4)$$

Здесь $\bar{\xi}$ — средний на длине l коэффициент гидравлического сопротивления

$$\bar{\xi} = \frac{1}{l} \int_0^l \xi(x) dx.$$

Аналогично

$$\bar{F}_x = \frac{1}{l} \int_0^l F_x(x) dx.$$

Если в канале имеются местные сопротивления, то они учитываются коэффициентом местных потерь ζ , который по определению равен

$$\zeta = \frac{\Delta p_M}{\rho u_M^2 / 2}, \quad (9.5)$$

где Δp_M — гидравлические потери на местном сопротивлении;
 u_M — характерная скорость в местном сопротивлении.

Значение ζ для различных типов местных сопротивлений обычно находят из опыта по уравнению (9.5).

Тогда суммарные гидравлические потери на прокачку жидкости через теплообменный аппарат с учетом местных потерь будут

$$\Delta p_{\Sigma} = \bar{\xi} \frac{\rho u^2}{2} \frac{l}{d} - \rho \bar{F}_x l + \sum_{i=1}^n \zeta_i \frac{\rho u_i^2}{2}. \quad (9.6)$$

2. *Стационарное течение газов при дозвуковых скоростях* ($Q = \text{var}$, $M \ll 1$).

Уравнение (9.2) принимает вид

$$G \frac{\partial u}{\partial x} = f \rho F_x - f \frac{\partial p}{\partial x} - f \xi \frac{\rho u^2}{2d}$$

или с учетом, что $G = \rho u f$, после разделения переменных найдем:

$$-dp = \frac{G}{f} du + \xi \frac{G^2}{2 \rho f^2 d} dx - \rho F_x dx.$$

Интегрируя его по длине канала от 0 до l находим

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{G}{f} (u_2 - u_1) + \bar{\xi} \frac{G^2}{2 \rho f^2 d} \frac{l}{d} - \rho \bar{F}_x l. \quad (9.7)$$

Здесь в выражении

$$\int_0^l \frac{\xi}{q} dx = \frac{1}{q} \int_0^l \xi dx = \frac{\bar{\xi}}{q} l$$

и в выражении $\int_0^l q F_x dx = \bar{q} \int_0^l F_x dx = \bar{q} F_x l$ использована обобщенная теорема о среднем, так как ξ/q и $q F_x$ — интегрируемые на $[0, l]$ функции. При этом ξ и F_x не меняют знак, а $1/q$ и q ограничены на $[0, l]$. Таким образом, $\bar{\xi}$, \bar{q} и \bar{F}_x — среднеинтегральные значения соответствующих величин на длине канала l ; u_2 и u_1 — среднерасходная скорость теплоносителя соответственно в конце ($x=l$) и начале ($x=0$) канала.

Если газ совершенный, т. е. его уравнение состояния будет

$$p = qRT, \quad (9.8)$$

тогда уравнение (9.7) можно записать так:

$$\Delta p = \frac{G^2}{f^2} R \left(\bar{\xi} \frac{T}{2\bar{p}} \frac{l}{d} + \frac{T_2}{p_2} - \frac{T_1}{p_1} \right) - \frac{\bar{p}l}{R\bar{T}} F_x. \quad (9.9)$$

Так как в выражении (9.7) обычно неизвестны u_2 и \bar{q} , а в уравнении (9.9) — p_2 , \bar{p} и \bar{T} , то используют метод последовательных приближений, который здесь быстро приводит к цели.

При $M < 0,8$ можно пользоваться более общим уравнением (9.2). Учет местных потерь при течении газа производится так же, как и при течении жидкости, т. е. в правые части уравнений (9.7) и (9.9) добавляется член

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i \frac{\rho_i u_i^2}{2}.$$

Средний коэффициент гидравлического сопротивления $\bar{\xi}$ в экспериментах определяется с помощью этих же формул: для жидкостей — по формуле (9.4), а для газов — по формуле (9.7).

3. *Нестационарное течение несжимаемой жидкости* ($q = \text{const}$).

Из уравнения неразрывности (5.1) при $q = \text{const}$ в общем случае переменного сечения найдем

$$\frac{\partial G}{\partial x} = q f \frac{\partial u}{\partial x} + u q \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

откуда
$$G \frac{\partial u}{\partial x} = -q u^2 \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Используя это соотношение, получим уравнение движения (9.2) в виде

$$\frac{G}{u} \frac{\partial u}{\partial x} - q u^3 \frac{\partial f}{\partial x} = f q F_x - f \frac{\partial p}{\partial x} - f \xi \frac{q u^2}{2d}. \quad (9.10)$$

Из уравнения (9.10) находим общее выражение для экспериментального определения локального значения коэффициента гидравлического сопротивления в нестационарном течении несжимаемой жидкости в канале переменного сечения:

$$\xi = -\frac{(\partial p/\partial x) d}{\rho u^2/2} - \frac{2d}{u^2} \left(\frac{du}{d\tau} - F_x \right) + \frac{2d}{f} \frac{df}{dx}. \quad (9.11)$$

Интегрируя уравнение (9.11) по длине при $f = \text{const}$ на участке $0 \leq x \leq l$ получим выражение для экспериментального определения среднеинтегрального коэффициента гидравлического сопротивления:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{l} \int_0^l \xi(x, \tau) dx = \frac{p_1 - p_2}{(\rho u^2/2)(l/d)} - \frac{2d}{u^2} \left(\frac{du}{d\tau} - F_x \right). \quad (9.12)$$

Тогда выражение для определения гидравлических потерь в общем случае нестационарного течения несжимаемой жидкости в каналах переменного сечения будет

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \bar{\xi} \frac{\rho u^2}{2} \frac{l}{d} + \rho l \left(\frac{du}{d\tau} - F_x \right). \quad (9.13)$$

Здесь $\bar{\xi}$ должен быть найден из эксперимента при аналогичных условиях. Можно ожидать, что в нестационарных условиях $\bar{\xi}$ помимо обычных безразмерных параметров будет зависеть и от параметра типа $(2d/u^2)(du/d\tau)$, т. е.

$$\bar{\xi} = f \left(\frac{l}{d}, \text{Re}, \text{Gr}, \frac{2d}{u^2} \frac{du}{d\tau}, \frac{\mu_w}{\mu_f} \right). \quad (9.14)$$

Так как $\bar{\xi}$ в нестационарных условиях еще практически не исследован, то часто для расчета гидравлических потерь в нестационарных условиях используют квазистационарный метод расчета. По этому методу в выражение (9.13) подставляют значение $\bar{\xi}$ по зависимостям для стационарного течения. Это значит, что расчетный интервал времени разбивается на малые интервалы и для каждого такого интервала берется стационарное значение $\bar{\xi}$, соответствующее средним значениям определяющих ξ параметров [Re, (μ_w/μ_f) и т. п.] на этом интервале времени. Такой метод расчета не учитывает, что в нестационарном течении профиль скорости и структура турбулентного потока отличны от стационарных при тех же значениях числа Рейнольдса, т. е. не учитывает влияния на $\bar{\xi}$ параметра нестационарности типа $(2d/u^2)(du/d\tau)$. Поэтому применение квазистационарного метода расчета может привести к существенным ошибкам и допустимо лишь в тех случаях, когда либо вклад в Δp члена, содержащего $\bar{\xi}$, мал, либо $(2d/u^2)(du/d\tau)$ мало в сравнении с другими членами в выражении (9.12).

4. *Нестационарное течение сжимаемого совершенного газа* ($p = \rho RT$).

Для сжимаемого газа при $f = \text{const}$ уравнение неразрывности (5.1) будет

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (9.15)$$

Плотность газа будет изменяться не только из-за изменения давления, но также из-за подвода тепла вследствие нагрева и вследствие диссипации кинетической энергии вязкого газа.

Следовательно, плотность является функцией давления и энтропии s , т. е. $\rho = \rho(p, s)$. Но давление и энтропия изменяются во времени и по длине канала, т. е.

$$p = p(\tau, x) \text{ и } s = s(\tau, x),$$

следовательно, $\rho = \rho[p(\tau, x), s(\tau, x)]$.

Тогда
$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \frac{\partial s}{\partial \tau}; \quad (9.16)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (9.17)$$

Известно, что $(\partial \rho / \partial p)_s = 1/a^2$, где a — скорость звука. Для совершенного газа $\rho = p/RT$, тогда

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p = - \frac{p}{RT^2} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p.$$

Из термодинамики известно, что

$$c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p.$$

В силу монотонности и непрерывности изменения энтропии при $p = \text{const}$ $s = \varphi(T)$, а в силу конечности и отличия от нуля величины $(\partial s / \partial T)_p$ имеем, что $(\partial T / \partial s)_p = \frac{1}{(\partial s / \partial T)_p}$.

Тогда
$$\left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p},$$

а
$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p = - \frac{p}{RT^2} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p = - \frac{p}{RTc_p} = - \frac{\rho}{c_p}. \quad (9.18)$$

С учетом соотношений (9.16) — (9.18) уравнение неразрывности (9.15) примет вид

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\rho}{c_p} \left(\frac{\partial s}{\partial \tau} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) = 0. \quad (9.19)$$

Здесь $\partial s / \partial \tau + u \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) = \partial s / \partial \tau$ и $\frac{\partial p}{\partial \tau} + u \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\tau}$ есть полные про-

изводные. Для совершенного газа всегда $di = c_p dT$ (где i — удельная энтальпия); тогда уравнение энергии (5.3) будет

$$f \rho c_p \frac{dT_f}{d\tau} = Uq_w + fT_f \sigma + f \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{\text{эф}} \frac{\partial T_f}{\partial x} \right) + f \frac{dp}{d\tau}. \quad (9.20)$$

Здесь подвод тепла, определяющий изменение энтропии, учитывается первыми тремя членами справа, т. е.

$$\rho f T_f \frac{ds}{d\tau} = Uq_w + fT_f \sigma + f \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{\text{эф}} \frac{\partial T_f}{\partial x} \right). \quad (9.21)$$

Подставим выражение (9.21) в уравнение (9.20) и решим его относительно $ds/d\tau$:

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{c_p}{T_f} \frac{dT_f}{d\tau} - \frac{1}{\rho T_f} \frac{dp}{d\tau}. \quad (9.22)$$

Подставим выражение (9.22) в уравнение (9.19) и учтем, что $a^2 = kRT_f$ и для совершенного газа $c_p + kR/c_p = k$, так как $R = c_p - c_v$:

$$\frac{k}{a^2} \frac{dp}{d\tau} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \frac{d(\ln T_f)}{d\tau} = 0. \quad (9.23)$$

Подставим теперь $\rho(\partial u/\partial x)$ из уравнения (9.23) в уравнение движения (9.2) и разрешим его относительно локального коэффициента сопротивления, раскрыв полные производные:

$$\begin{aligned} \xi = & -(1 - k M^2) \frac{(\partial p/\partial x) d}{\rho u^2/2} + \frac{2d}{u^2} \left[\frac{M k}{\rho \sqrt{kRT_f}} \frac{\partial R}{\partial \tau} + \right. \\ & \left. + F_x - \frac{\partial u}{\partial \tau} - u \frac{\partial(\ln T_f)}{\partial \tau} \right] - 2d \frac{\partial(\ln T_f)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Здесь $M = u/a$ — число Маха.

Выражение для экспериментального определения среднего интегрального на длине $0 \leq x \leq l$ значения коэффициента сопротивления получим, интегрируя на $(0, l)$ уравнение (9.24), применяя обобщенную теорему о среднем и деля на l :

$$\begin{aligned} \bar{\xi} = & (1 - k \bar{M}^2) \frac{p_1 - p_2}{(\rho \bar{u}^2/2)(l/d)} + \frac{2d}{\bar{u}^2} \left(\frac{k \bar{M}}{\bar{\rho} \sqrt{kRT_f}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} + F_x - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} - \right. \\ & \left. - \bar{u} \frac{\partial \ln \bar{T}_f}{\partial \tau} \right) - \frac{2d}{l} \ln \frac{T_2}{T_1}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Решая уравнение (9.25) относительно $\Delta p = p_1 - p_2$, найдем выражение для расчета гидравлических потерь, когда значение $\bar{\xi}$ известно:

$$\begin{aligned} \Delta p = & \frac{\bar{\xi}}{(1 - k \bar{M}^2)} \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \frac{l}{d} - \frac{\bar{\rho} l}{(1 - k \bar{M}^2)} \left(\frac{k \bar{M}}{\bar{\rho} \sqrt{kRT_f}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} + \right. \\ & \left. + F_x - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} - \bar{u} \frac{\partial \ln \bar{T}_f}{\partial \tau} \right) + \frac{\bar{\rho} \bar{u}^2}{(1 - k \bar{M}^2)} \ln \frac{T_2}{T_1}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Очевидно, что уравнения (9.24) — (9.26) применимы при $M < \sqrt{1/k}$. Для воздуха $k=1,4$ и M должен быть меньше 0,8. В каналах теплообменных аппаратов, как правило, это условие выполняется.

Уравнение (9.26) применимо и для стационарного течения газа при $M < 0,8$. В этом случае оно будет

$$\Delta p = \frac{\bar{\xi}}{(1 - k \bar{M}^2)} \frac{\bar{q} \bar{u}^2}{2} \frac{l}{d} + \frac{\bar{q}}{(1 - k \bar{M}^2)} \left(\bar{u}^2 \ln \frac{T_2}{T_1} - F_x l \right). \quad (9.27)$$

Следует отметить, что $\bar{\xi}$ практически не исследован для нестационарных течений газа в каналах и очень слабо — для стационарных при больших дозвуковых скоростях.

Гидравлические потери на местных сопротивлениях учитываются добавлением к правой части уравнения (9.26) члена

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i \frac{\rho_i u_i^2}{2}. \quad \text{Но следует помнить, что } \zeta_i \text{ должно находиться из}$$

экспериментов в нестационарных условиях. Влияние нестационарности на ζ_i может быть существенным, но пока этот вопрос также изучен слабо.

9.4. ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ ТЕПЛОБМЕННЫХ АППАРАТОВ

Цель теплового расчета заключается в определении основных габаритных размеров и температурного состояния выбранной конструктивной схемы теплообменного аппарата, исходя из заданных условий. Обычно задаются тепловой поток, расходы теплоносителей, их температуры, допустимые гидравлические потери, допустимые габариты или масса и т. п. в зависимости от конкретного назначения теплообменного аппарата. Как правило, окончательная конструктивная схема теплообменного аппарата выбирается в результате теплового и гидравлического расчетов различных ее вариантов и их сравнительного анализа с учетом требований, предъявляемых к объекту в целом. При этом расчет теплообменного аппарата производится на номинальный режим, а затем расчетом проверяется его работа на других режимах, включая в ответственных случаях и нестационарные режимы работы.

9.4.1. Изменение температуры теплоносителей и стенки по длине канала

В этом разделе тепловой расчет теплообменных аппаратов будет подробно рассмотрен только на примере прямоточной (см. рис. 9.5, а) и противоточной (см. рис. 9.5, б) расчетных схем. Для третьей расчетной схемы, с перекрестным током (см. рис.

9.5, в), будут даны в конечном виде некоторые рекомендации для стационарного случая*. Тепловой расчет теплообменных аппаратов с учетом трехмерного температурного поля в нем, т. е. с учетом температурных полей теплоносителей и стенок, чрезвычайно сложен и в большинстве случаев пока не может быть выполнен. Поэтому обычно тепловой расчет проводят при одномерном описании течения каждого из теплоносителей, т. е. по-

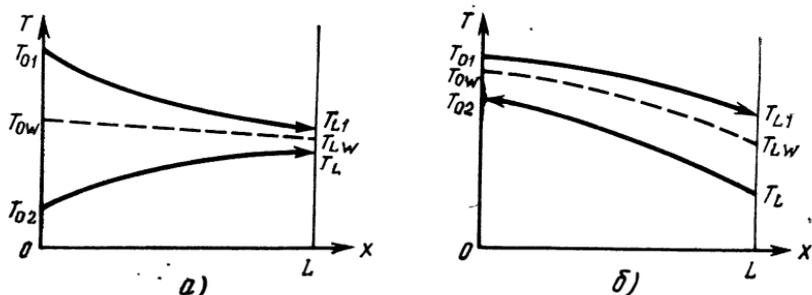


Рис. 9.7. Изменение температуры теплоносителей по длине:
 а—при прямотоке; б—при противотоке

лагают, что скорость и температура теплоносителя могут изменяться только в одном измерении — в направлении движения. Основные уравнения для описания теплообмена в этом случае получены в гл. V.

Для теплового расчета теплообменных аппаратов обычно используется уравнение энергии в виде (5.3), которое записывается для каждого из теплоносителей.

Тогда вместо $q_w = \alpha(T_w - T_f)$ вводят $q_w = k(T_1 - T_2)$, где k — коэффициент теплопередачи, определяемый выражением:

$$k = \frac{q}{T_1 - T_2} \quad (9.28)$$

и имеющий размерность Вт/(м²·К). Здесь T_1 и T_2 — среднемассовые температуры «горячего» и «холодного» теплоносителей, разделенных стенкой, в сечении x (рис. 9.7).

Если известны коэффициенты теплоотдачи для горячего α_1 и холодного α_2 теплоносителей, коэффициент теплопроводности материала стенки λ_w и ее толщина δ , то можно определить и коэффициент теплопередачи k . Покажем это на простейшем примере плоской стенки.

Удельный тепловой поток через стенку можно найти по следующим формулам:

* Подробно тепловой расчет при перекрестном токе излагается, например, в работе [116].

$$\left. \begin{aligned} q &= k(T_1 - T_2); \\ q &= \alpha_1(T_1 - T_{1W}); \\ q &= \frac{\lambda_W}{\delta}(T_{1W} - T_{2W}); \\ q &= \alpha_2(T_{2W} - T_2). \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

Разрешая эти выражения относительно разностей температур и учитывая, что $(T_1 - T_2) = (T_1 - T_{1W}) + (T_{1W} - T_{2W}) + (T_{2W} - T_2)$, получим

$$\frac{q}{k} = \frac{q}{\alpha_1} + q \frac{\delta}{\lambda_W} + \frac{q}{\alpha_2}$$

или, разрешая относительно k , окончательно найдем

$$k = \frac{1}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda_W + 1/\alpha_2}. \quad (9.30)$$

В случае труб* в выражениях (9.29) тепловой поток на внутренней и наружной стенках будет разным. Поэтому коэффициент теплопередачи будет зависеть от того, к какой поверхности трубы он отнесен. Повторяя приведенные выше выкладки, можно получить выражения для определения коэффициентов теплопередачи для труб:

$$k_{\text{вн}} = 1 / \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{2\lambda_W} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{d_1}{d_2} \right) \quad (9.31)$$

— при отнесении к внутренней поверхности и

$$k_{\text{н}} = 1 / \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{d_2}{d_1} + \frac{d_2}{2\lambda_W} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \quad (9.32)$$

— при отнесении к наружной поверхности.

Здесь d_1 и d_2 — соответственно внутренний и наружный диаметры трубы.

Умножая k по выражению (9.30) на ширину пластины y , а $k_{\text{вн}}$ (9.31) и $k_{\text{н}}$ (9.32) на соответствующий периметр трубы, получим выражения для вычисления коэффициентов теплопередачи на единицу длины пластины или трубы. Для плоской пластины

$$k_l = y / \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda_W} + \frac{1}{\alpha_2} \right); \quad (9.33)$$

для трубы

$$k_l = k_{\text{вн}} \pi d_1 = k_{\text{н}} \pi d_2 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_W} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}. \quad (9.34)$$

* Если отношение толщины трубы к ее диаметру мало, то можно пользоваться формулой (9.30) и для труб, относя оmyваемую поверхность к среднему диаметру.

Тогда тепловой поток на единицу длины

$$q_l = Uq = k_l(T_1 - T_2). \quad (9.35)$$

Рассмотрим для простоты стационарные процессы. В стационарных процессах уравнение энергии (5.3) примет вид

$$G \frac{di}{dx} = q_l. \quad (9.36)$$

или с учетом уравнения (9.35)

$$G \frac{di}{dx} = k_l(T_1 - T_2). \quad (9.37)$$

Записывая формулу (9.37) для горячего и холодного теплоносителей, получим систему дифференциальных уравнений для определения температур теплоносителей T_1 и T_2 :

$$T_1 = T_2 + \frac{G_2}{k_l} \frac{di_2}{dx}; \quad T_2 = T_1 + \frac{G_1}{k_l} \frac{di_1}{dx}. \quad (9.38)$$

Как известно из термодинамики, для любого рабочего тела в изобарном процессе ($p = \text{const}$)

$$\frac{di_j}{dx} = (c_p)_j \frac{dT_j}{dx}, \quad (j = 1, 2). \quad (9.39)$$

Для совершенного газа (т. е. газа, уравнение состояния которого $p = \rho RT$) уравнение (9.39) справедливо при любом процессе. Для практически несжимаемых жидкостей $c_p = c_v = c$ уравнение (9.39) тоже справедливо. Тогда система (9.38) примет вид

$$T_1 = T_2 + \frac{G_2 (c_p)_2}{k_l} \frac{dT_2}{dx}; \quad T_2 = T_1 + \frac{G_1 (c_p)_1}{k_l} \frac{dT_1}{dx}. \quad (9.40)$$

Для решения системы (9.40) сведем ее к уравнениям второго порядка, подставляя T_1 из первого уравнения во второе, а T_2 из второго в первое:

$$\frac{d^2 T_j}{dx^2} + A \frac{dT_j}{dx} = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (9.41)$$

Здесь $A = \frac{k_l (W_{\text{э}1} + W_{\text{э}2})}{W_{\text{э}1} W_{\text{э}2}}$ (полагаем c_p и k_l постоянными) *, где

* 1. Если $k_l = k_l(x)$, то решение уравнения (9.41) или системы (9.40) в общем виде получить нельзя. Решение находится численно или в частных случаях. При замене переменного k_l средним значением $\bar{k}_l = 1/L \int_0^L k_l(x) dx$ следует оценивать допускаемую при этом ошибку в определении температуры теплоносителя.

2. Если $c_p = c_p(x) \neq \text{const}$, то тогда вместо системы (9.40) рассматривают систему (9.38).

$W_{эj} = G_j(c_p)_j$ — так называемый водяной эквивалент. В случае прямотока $W_{э1}$ и $W_{э2}$ — положительны. Для противотока водяной эквивалент теплоносителя, текущего в положительном направлении оси x положителен, а в противоположном направлении — отрицателен. Так как $A = \text{const}$, то общее решение уравнения (9.41) имеет вид

$$T_j = C_1 e^{\beta_1 x} + C_2 e^{\beta_2 x},$$

где β_1 и β_2 — корни характеристического уравнения $\beta^2 + A\beta = 0$. Отсюда находим $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -A$ и тогда

$$T_j = C_1 + C_2 e^{-Ax}. \quad (9.42)$$

Рассмотрим два способа задания граничных условий для определения постоянных в уравнении (9.42).

1. *Заданы температуры j -го теплоносителя на входе T_{0j} ($x=0$) и выходе T_{Lj} ($x=L$).*

Получаем систему $T_{0j} = C_1 + C_2$; $T_{Lj} = C_1 + C_2 e^{-AL}$. Отсюда находим C_1 и C_2 . Подставляя их в формулу (9.42), получаем

$$T_j(x) = T_{0j} + \frac{T_{Lj} - T_{0j}}{1 - e^{-AL}} (1 - e^{-Ax}). \quad (9.43)$$

2. *Заданы температуры обоих теплоносителей в сечении $x=0$ или $x=L$.*

Тогда из уравнения (9.40) можно найти значения dT/dx для соответствующего сечения, и после обычных преобразований соответственно получим при задании температур в сечениях $x=0$ и $x=L$:

$$T_j(x) = T_{0j} + \frac{\Delta T_{j0}}{A} \frac{k_l}{W_{эj}} (1 - e^{-Ax}); \quad (9.44)$$

$$T_j(x) = T_{Lj} + \frac{\Delta T_{jL}}{A} \frac{k_l}{W_{эj}} [1 - e^{-A(x-L)}]. \quad (9.45)$$

Здесь $\Delta T_1 = (T_2 - T_1)$, а $\Delta T_2 = (T_1 - T_2)$ при $x=0$ или $x=L$. Частный случай решения уравнения (9.41) получается для противотока при $A=0$, $W_{э1} = W_{э2}$. Так как в этом случае корни характеристического уравнения $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то решение уравнения (9.41) будет

$$T_j = C_1 x e^{\beta_1 x} + C_2 e^{\beta_1 x} = C_1 x + C_2. \quad (9.46)$$

Это означает, что температуры обоих теплоносителей изменяются линейно.

При первом способе задания граничных условий получим

$$T_j(x) = \frac{T_{Lj} - T_{0j}}{L} x + T_{0j}, \quad (9.47)$$

а при втором способе соответственно для задания температур теплоносителей в сечении $x=0$ и $x=L$ найдем

$$T_j(x) = \frac{k_l}{W_j} \Delta T_{j0}(x) + T_{0j}; \quad (9.48)$$

$$T_j(x) = \frac{k_l}{W_j} \Delta T_{jL}(x-L) + T_{Lj}. \quad (9.49)$$

Из формул (9.48) и (9.49) видно, что кривые температуры обоих теплоносителей имеют одинаковый наклон, т. е. они параллельны друг другу.

9.4.2. Температура стенки в произвольном сечении

Так как $\alpha_j(T_{jW} - T_j)U_j dx = k_l \Delta T_j dx$, то температура стенки в любом сечении будет:

$$T_{jW} = T_j + \frac{k_l \Delta T_j}{\alpha_j U_j}. \quad (9.50)$$

Здесь T_{jW} — средняя по периметру температура стенки, омываемая теплоносителем, а U_j — обогреваемый периметр этой стенки.

При перекрестном токе теплоносителей определить их температуры значительно сложнее, так как задача сводится к решению системы двух уравнений первого порядка в частных производных или уравнения второго порядка в частных производных.

Впервые это приближенно решил Нуссельт в 1911 г. и точно — в 1930 г. Это решение в более общем виде изложено в работе [116]. В силу своей громоздкости оно здесь не приводится.

9.4.3. Температурный напор

Определение температурного напора при стационарном процессе и постоянной теплоемкости

Температурный напор в любом сечении (см. рис. 9.7) может быть определен как разность температур, найденных по одной из формул (9.43) — (9.49). Однако во многих расчетах и на первых этапах почти любого расчета нет нужды знать температуры теплоносителей, но нужно знать их разность, т. е. температурный напор. Беря разность $T_1(x)$ и $T_2(x)$, определенных последовательно по формулам (9.43) — (9.45), получим соответственно три выражения для температурного напора в произвольном сечении x :

$$\Delta T(x) = T_1(x) - T_2(x) = \Delta T_0 + \frac{1 - e^{-Ax}}{1 - e^{-AL}} (\Delta T_L - \Delta T_0); \quad (9.51)$$

$$\Delta T(x) = \Delta T_0 e^{-Ax}; \quad (9.52)$$

$$\Delta T(x) = \Delta T_L e^{-A(x-L)}. \quad (9.53)$$

Здесь $\Delta T_0 = \Delta T(0)$ и $\Delta T_L = \Delta T(L)$.

Эти выражения можно получить и непосредственно из дифференциального уравнения

$$\frac{d\Delta T}{dx} + A\Delta T = 0, \quad (9.54)$$

полученного путем вычитания второго уравнения системы (9.40) из первого.

Зная температурный напор $\Delta T(x)$, можно найти тепловой поток в этом сечении на длине dx , а именно: $dq = k_l \Delta T(x) dx$. При расчетах обычно надо знать тепловой поток на всей длине:

$$Q = \int_0^L k_l \Delta T(x) dx = k_l \int_0^L \Delta T(x) dx, \quad (9.55)$$

но
$$\int_0^L \Delta T(x) dx = L \Delta T_{\text{ср}}, \quad (9.56)$$

где $\Delta T_{\text{ср}}$ — среднеинтегральный температурный напор. Тогда

$$Q = k_l \Delta T_{\text{ср}} L. \quad (9.57)$$

Найдем с учетом формулы (9.52) среднеинтегральный температурный напор

$$\Delta T_{\text{ср}} = \frac{1}{L_0} \int_0^L \Delta T(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \Delta T_0 e^{-Ax} dx = \frac{\Delta T_0}{AL} (1 - e^{-AL}),$$

но из равенства (9.52) при $x=L$

$$e^{-AL} = \frac{\Delta T_L}{\Delta T_0}, \quad \text{а} \quad AL = \ln \frac{\Delta T_0}{\Delta T_L}. \quad (9.58)$$

Тогда окончательно

$$\Delta T_{\text{ср}} = \frac{\Delta T_0 - \Delta T_L}{\ln(\Delta T_0/\Delta T_L)}. \quad (9.59)$$

Это выражение в литературе часто называют среднелогарифмическим температурным напором. При его выводе использовано выражение (9.52). С тем же успехом можно использовать выражения (9.51) и (9.53). Выражение (9.59) справедливо для прямотока и противотока. Его можно записать в виде

$$\Delta T_{\text{ср}} = \frac{\Delta T_6 - \Delta T_M}{\ln(\Delta T_6/\Delta T_M)} = \frac{1 - (\Delta T_M/\Delta T_6)}{-\ln(\Delta T_M/\Delta T_6)} \Delta T_6, \quad (9.60)$$

где ΔT_6 и ΔT_M — соответственно больший и меньший из температурных напоров — ΔT_0 при $x=0$ и ΔT_L при $x=L$. Аналогично,

среднеарифметический температурный напор запишется так:

$$\Delta T_{ар} = \frac{\Delta T_6 + \Delta T_m}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta T_m}{\Delta T_6} \right) \Delta T_6. \quad (9.61)$$

Деля уравнение (9.61) на (9.60), найдем $\Delta T_{ар}/\Delta T_{ср} = f(\Delta T_m/\Delta T_6)$. Легко подсчитать, что при

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_6} \geq 0,5 \quad 1 < \frac{\Delta T_{ар}}{\Delta T_{ср}} \leq 1,04$$

и можно с ошибкой менее 4% пользоваться вместо среднелогарифмического более простым среднеарифметическим температурным напором. При одинаковой разности температур теплоносителей на входе в теплообменный аппарат наибольшим является средний температурный напор при противотоке, наименьшим — при прямотоке. Для перекрестного тока и смешанных токов средний температурный напор находят по выражению

$$\Delta T_{ср} = (\Delta T_{ср})_{прот} \psi, \quad (9.62)$$

где $\psi < 1$.

Вычисление ψ для перекрестного тока и различных смешанных случаев течения трудоемко и обычно в литературе дается в виде графиков и таблиц. Сравнительно подробно эти вопросы рассмотрены в работе [116]. Так, например, величина ψ , представляющая собой отношение среднеинтегральных температурных напоров при перекрестных токе и противотоке может быть представлена табл. 9.1 как функция $\chi_1 = (T_{10} - T_{1L}) / (T_{10} - T_{20})$ и $\chi_2 = (T_{20} - T_{2L}) / (T_{10} - T_{20})$ (см. обозначения на рис. 9.7).

Определение температурного напора при стационарном процессе и переменной теплоемкости

Случаи переменной теплоемкости теплоносителей в современных теплообменных аппаратах довольно часты, особенно если теплоносители используются в околокритической области, где зависимость теплоемкости от температуры весьма существенна. Сильно изменяется теплоемкость при наличии диссоциации или рекомбинации, а также при протекании химических реакций в теплоносителе.

В этих случаях удобнее перейти от температур к энтальпиям теплоносителей, как это показано в гл. XIV при рассмотрении внешней задачи с химическими реакциями. Для этого определим коэффициент теплоотдачи для теплоносителя выражением*

* Если определяется средний по длине коэффициент теплоотдачи, то величины, входящие в формулу (9.63), должны быть осреднены также и по длине канала.

Значения ψ для перекрестного тока

$\chi_1 \backslash \chi_2$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0,1	1	0,996	0,994	0,992	0,988	0,984	0,978	0,973	0,961	0,937	0
0,2	1	0,993	0,988	0,983	0,975	0,967	0,955	0,942	0,919	0,873	0
0,3	1	0,990	0,983	0,974	0,962	0,952	0,935	0,308	0,872	0,810	0
0,4	1	0,987	0,975	0,962	0,948	0,935	0,909	0,873	0,824	0,738	0
0,5	1	0,984	0,967	0,95	0,935	0,910	0,875	0,832	0,765	0,665	0
0,6	1	0,980	0,955	0,935	0,909	0,877	0,835	0,780	0,698	0,581	0
0,7	1	0,975	0,942	0,911	0,875	0,832	0,780	0,710	0,614	0,485	0
0,8	1	0,961	0,919	0,872	0,824	0,758	0,698	0,614	0,500	0,360	0
0,9	1	0,928	0,867	0,801	0,738	0,672	0,581	0,490	0,360	0,220	0

$$\alpha = \frac{q}{T - T_W} = \frac{\bar{c}_p}{i - i_W}. \quad (9.63)$$

Здесь

$$\bar{c}_p = \frac{i - i_W}{T - T_W} = \frac{\int_{T_W}^T c_p dT}{T - T_W};$$

i — средняя по сечению энтальпия единицы массы теплоносителя;

i_W — энтальпия единицы массы теплоносителя при температуре стенки.

Определим плотность теплового потока через стенку выражением

$$q = \frac{\lambda_W}{\delta} \left[\left(\frac{i}{c_p} \right)_{W1} - \left(\frac{i}{c_p} \right)_{W2} \right] = \frac{\lambda_W^{(i)}}{\delta} (i_{W1} - i_{W2}), \quad (9.64)$$

где δ — толщина плоской стенки (для трубы $\delta = \frac{d_j}{2} \ln \frac{d_2}{d_1}$).

Тогда эквивалентная теплопроводность стенки $\lambda_W^{(i)}$ найдется из уравнения

$$\lambda_W^{(i)} = \frac{\lambda_W (T_{W1} - T_{W2})}{i_{W1} - i_{W2}} = \frac{\lambda_W \left[\left(\frac{i}{c_p} \right)_{W1} - \left(\frac{i}{c_p} \right)_{W2} \right]}{i_{W1} - i_{W2}}. \quad (9.65)$$

С учетом этих определений мы получим новые выражения для коэффициента теплопередачи, если заменим в выражениях (9.30) — (9.34) α_j на $\alpha_j / (c_p)_i$, а λ_W на $\lambda_W^{(i)}$ по уравнению (9.65). Например, коэффициент теплопередачи на единицу длины тру-

бы при замене температур теплоносителей их энтальпиями вместо формулы (9.34) будет определяться формулой

$$k_l^{(i)} = k_{\text{вн}}^{(i)} \pi d_1 = k_l^{(i)} \pi d_2 = \frac{\pi}{\frac{(\bar{c}_p)_1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda \frac{(l)}{W}} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{(\bar{c}_p)_2}{\alpha_2 d_2}}. \quad (9.66)$$

Тогда вместо формулы (9.35) тепловой поток на единицу длины канала можно записать так:

$$q_l = k_l^{(i)} (i_1 - i_2). \quad (9.67)$$

Записывая формулу (9.36) с учетом выражения (9.67) для первого и второго теплоносителя, получим

$$i_1 = i_2 + \frac{G_2}{k_l^{(i)}} \frac{di_2}{dx}; \quad i_2 = i_1 + \frac{G_1}{k_l^{(i)}} \frac{di_1}{dx}. \quad (9.68)$$

В тех случаях когда с достаточной для практических расчетов точностью можно принять коэффициент теплопередачи $k_l^{(i)}$ постоянным по длине канала и равным средней величине, решение системы (9.68) полностью эквивалентно решению системы (9.40), если вместо постоянной A в уравнении (9.41) ввести также постоянную величину*:

$$A^{(i)} = \frac{k_l^{(i)} (G_1 + G_2)}{G_1 G_2}. \quad (9.69)$$

Тогда, например, вместо формулы для температуры теплоносителя (9.44) получим формулу для энтальпии в Дж/кг:

$$i_j(x) = i_{0j} + \frac{\Delta i}{A^{(i)}} \cdot \frac{k_l^{(i)}}{G_j} [1 - e^{-A^{(i)} x}], \quad (9.70)$$

а вместо среднеинтегрального температурного напора (9.59) получим формулу для среднеинтегрального напора удельных энтальпий:

$$\Delta i_{\text{ср}} = \frac{\Delta i_0 - \Delta i_L}{\ln (\Delta i_0 / \Delta i_L)}. \quad (9.71)$$

В общем случае с учетом химических реакций в теплоносителе удельная энтальпия реагирующей смеси будет

$$i = \sum_{k=1}^n \dot{C}_k i_k; \quad (9.72)$$

$$i_k = \int_0^T (c_p)_k dT + Q_{k0}, \quad (9.73)$$

* Знак $A^{(i)}$ определяется так же, как и A . Если теплоноситель течет в положительном направлении оси x , то принимаем его расход $G > 0$, а если в отрицательном, то и расход принимаем отрицательным $G < 0$.

где C_k — массовая (весовая) доля k -го компонента;
 Q_{k0} — удельная теплота образования k -го компонента
из молекул отдельных элементов при $T = 0\text{K}$;
 $\Delta i_0 = i_{01} - i_{02}$ — разность энтальпий теплоносителей на входе;
 $\Delta i_L = i_{L1} - i_{L2}$ — разность энтальпий теплоносителей на выходе.

9.5. ТЕПЛОПЕРЕДАЮЩИЕ ТРУБЫ КАК ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

Теплопередающая труба (иногда называемая тепловой трубой) представляет особый вид теплообменного устройства. В известных теплообменных аппаратах тепло от одного теплоносителя или охлаждаемого элемента передается другому через твердую или жидкую поверхность теплообмена, а в тепло-

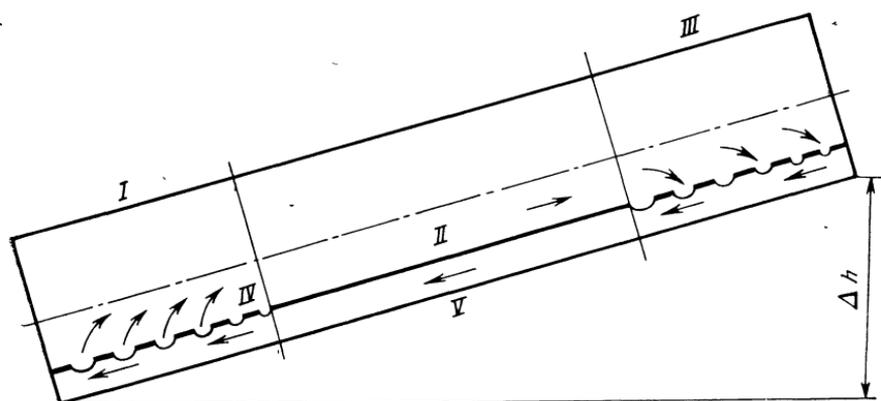


Рис. 9.8. Принципиальная схема теплопередающей трубы:

I—зона подвода тепла (испарения); *II*—зона паропровода; *III*—зона отвода тепла (конденсации); *IV*—фитиль, *V*—корпус трубы, Δh —перепад высот, определяющий гидростатический напор

передающей трубе тепло от охлаждаемой поверхности отбирается испаряющейся жидкостью и может быть потоком пара перенесено на значительное расстояние и отдано тепловоспринимающей поверхности в процессе конденсации рабочего тела [148]. Теплоноситель — рабочее тело в жидкой фазе возвращается к месту испарения капиллярными силами при помощи фитиля той или иной конфигурации. Таким образом, теплопередающая труба простейшей схемы (рис. 9.8) имеет зону подвода тепла *I*, паропровод *II*, зону конденсации *III*, фитиль *IV* и корпус *V*. Известны, правда, более простые схемы, где возврат рабочего тела в жидкой фазе производится гравитационными или центробежными силами.

Рассмотрим основные физические процессы, определяющие работу теплопередающей трубы.

На участке подвода тепла испаряется жидкость с поверхностей менисков, образованных ячейками фитиля и, для того, чтобы теплопередающая трубка действовала, жидкое рабочее тело должно хорошо смачивать элементы фитиля. Тогда при испарении жидкости мениск имеет вогнутую форму и поэтому у поверхности испарения образуется зона пониженного давления, обеспечивающая подсос жидкости из зоны конденсации. Это разрежение зависит от капиллярных свойств жидкости и фитиля и определяется уравнением Лапласа

$$p_{\sigma} = \pm \frac{\sigma}{R_m} \quad (9.74)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; R_m — радиус мениска; знак (+) — для смачивающей жидкости, (—) — для несмачивающей жидкости.

Капиллярное давление p_{σ} устанавливает разность между давлением жидкости и давлением пара

$$\Delta p_{\sigma} = p_{п.ст} - p_{ж.ст}$$

Этот перепад давлений Δp_{σ} и обеспечивает движение жидкости из зоны конденсации в зону испарения.

Для обеспечения максимального перепада давлений в зоне конденсации желательно радиус мениска иметь тоже максимальным. Этому соответствует случай, когда капиллярная система в зоне конденсации покрыта тонким слоем жидкости. Тогда капиллярные силы совсем не препятствуют отсосу жидкости из этой зоны.

В общем случае с учетом разности высоты расположения концов теплопередающей трубы ($h_1 - h_2$), давлений пара (p_1 и p_2) и капиллярных сил, выраженных через радиусы пор R_1 и R_2 и краевые углы смачивания (θ_1 и θ_2), перепад давлений, под действием которого происходит движение жидкости, равен

$$\Delta p_{ж} = p_{ж1} - p_{ж2} = 2\sigma \left(\frac{\cos \theta_1}{R_1} - \frac{\cos \theta_2}{R_2} \right) - (p_1 - p_2) - \rho_{ж} \cdot g (h_1 - h_2) \quad (9.75)$$

Если $R_2 \rightarrow \infty$ и $h_1 \approx h_2$, уравнение принимает вид

$$\Delta p_{ж} = \frac{2\sigma \cos \theta_1}{R_1} - (p_1 - p_2) \quad (9.76)$$

На рис. 9.9 показано распределение полных и статических давлений жидкости и пара по длине трубы.

Количество тепла, переносимого по оси трубы, зависит от массового расхода пара $G_{п}$ и теплоты парообразования $r_{п}$:

$$Q = G_{п} \cdot r_{п} \quad (9.77)$$

Переносимый поток тепла Q в кВт или удельный тепловой поток q в кВт/м² зависит от геометрии теплопередающей трубы, вида рабочего тела, температур испарителя и конденсатора и ограничивается рядом условий:

а) производительностью капиллярного насоса (капиллярное ограничение)

$$\sum \Delta p_{\text{потерь}} = \Delta p_{\sigma};$$

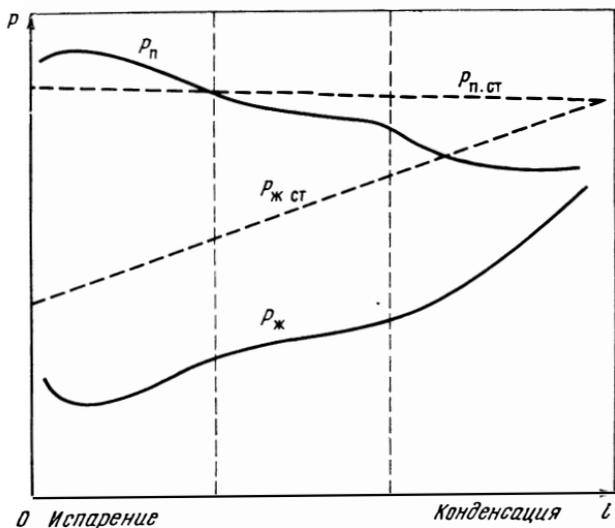


Рис. 9.9. Диаграмма распределения полных и статических давлений пара и жидкости по длине теплопередающей трубы

б) звуковым пределом для скорости пара на его входе в конденсационную зону

$$w_n = a = \sqrt{k, RT_n};$$

в) максимальными тепловыми нагрузками при испарении (как с поверхности менисков, так и по твердой поверхности корпуса трубы). Пределом считается возникновение пузырькового кипения жидкости. Испарение вещества с единицы поверхности жидкости в единицу времени определяется уравнением:

$$G = f \frac{p_0}{(2\pi RT_0)^{1/2}}, \quad (9.78)$$

где T_0 и p_0 — температура и давление на поверхности жидкости;
 f — коэффициент конденсации ($f \leq 1$);
 R — газовая постоянная.

Важнейшим элементом рабочего процесса является капиллярный подсос в зоне испарения. Как уже было сказано, этот

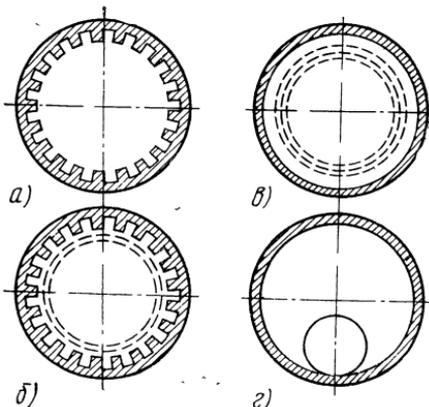
процесс определяется формулой Лапласа, однако практически удобнее рассматривать реальную геометрию капиллярного элемента (рис. 9.10) и учитывать характеристику смачиваемости материала фитиля жидким рабочим телом с помощью краевого угла смачиваемости θ . Тогда капиллярный движущий напор определяется

$$\Delta p_{\sigma} = \frac{\sigma \cos \theta}{R_{\text{эф}}}, \quad (9.79)$$

где $R_{\text{эф}}$ — эффективный радиус пор в фитиле.

Рис. 9.10. Примеры различных форм капиллярной подсосывающей системы—фитиля:

a—продольные каналы прямоугольной или клиновидной формы; *б*—канавки, накрытые сеткой; *в*—многослойная сетка; *г*—фитиль артериального типа (в зоне транспортировки жидкости, в зонах испарения и конденсации фитиль должен быть расположен на поверхности теплообмена)



В свою очередь $R_{\text{эф}}$ связан с геометрией поры так, что для круглого отверстия со сферическим мениском

$$\Delta p_{\sigma} = \frac{2\sigma \cos \theta}{R'}, \quad (9.80)$$

где R' — радиус отверстия в фитиле (поры).

Для цилиндрического мениска (щелевой фитиль)

$$\Delta p_{\sigma} = \frac{\sigma \cos \theta}{b}, \quad (9.81)$$

где b — полуширина канавки.

Для фитиля с канавкой клиновидной формы (угол клина 2φ) капиллярный напор зависит от глубины заполнения канавки c и определяется по полуэмпирической формуле

$$\Delta p_{\sigma} = \frac{\sigma \cos \theta}{c \operatorname{tg} \varphi}. \quad (9.82)$$

Для фитиля из сетки с квадратной ячейкой с размером стороны квадрата $2a$

$$\Delta p_{\sigma} = \frac{2\sigma \cos \theta}{a}. \quad (9.83)$$

Вопросы выбора рабочего тела и материалов для теплопередаю-

Основные характеристики рабочих тел
и материалов теплопередающих труб

Рабочее тело	$t_{пл}$ при $p=0,1$ МПа, $t_{кип}$ °С		Рабочий диапазон температур, °С	Теплота парообразования при $p=0,1$ МПа, кДж	Давление (при $T_{пл}$), мм Hg	Поверхностное натяжение (при $t=900-1600$ °С), Дж/м ²	Материал фитиля	Материал стенки
C ₂ H ₅ OH	-114,4	78,3	-50—+100	308			Медь	Медь, бронза
NH ₃	-77,7	-33,4	-40—0	1380			Хромоникелевая сталь	То же
H ₂ O	0	110	15—260	2256,7			То же	»
Cs	28,5	705	330—730	603	2,10 ⁻⁶	35·10 ⁻³		
K	63,6	760	380—830	2076		86·10 ⁻³	»	»
Na	97,8	883	500—930	4345	1,10 ⁻⁷	110 ⁻³	»	»
Li	180	1317	880—1400	19595	1,26·10 ⁻¹⁰	(210—300)·10 ⁻³	Молибден	Сталь; молибден; тантал
Ba	710	1700	1180—1630	1088	7,610 ⁻¹	0,400	Тантал	То же
Pb	327	1737	1330—1830	860	3,26·10 ⁻⁹	0,385	»	»
Ag	961	2212	1580—2330	2320	2,65·10 ⁻³	0,75	Вольфрам	»

щих труб следует рассматривать совместно. Общие требования к материалам конструкции теплопроводящей трубы (корпус, фитильная система) не ограничиваются совместимостью с рабочим телом в статических условиях. В табл. 9:2 приведены примеры сочетания конструкционных материалов и рабочих тел теплопередающих труб.

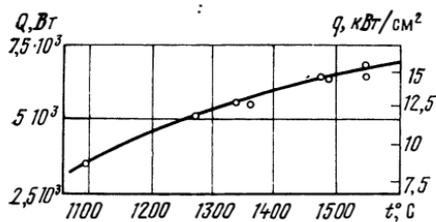


Рис 9.11. Результаты испытаний литиевой теплопередающей трубы

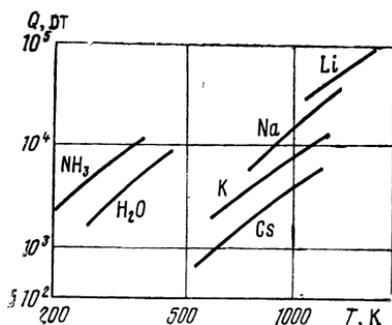


Рис 9.12. Зависимость мощности теплопередающей трубы ($D_{тр}=25,4$ мм, $l=305$ мм) от температуры для различных рабочих тел

В процессе циркуляции основного рабочего тела в теплопередающей трубе одновременно возможен и перенос всевозможных примесей как газовых, так и твердых, имеющих в материале теплопередающей трубы и рабочем теле. Тугоплавкие примеси, как правило, переносятся в зону испарения, а неконденсирующиеся газы — в зону конденсации. При этом в зоне конденсации возможно образование газовых пробок, которые уменьшают размер зоны конденсации и снижают эффективность действия всей теплопередающей трубы. Для устранения этого явления необходимо применять в теплопередающих трубах сверхчистые материалы, в которых примеси не должны превышать $10^{-3} \div 10^{-5} \%$.

Материал фитиля должен максимально смачиваться жидким рабочим телом. Это требование к материалу корпуса теплопередающей трубы не обязательно, так как считается необходимым избегать режимы с кипением на участке подвода тепла. Но с точки зрения устойчивости теплопередающей трубы ко всякого рода нерасчетным отклонениям от рабочего режима выгодно иметь материал самой трубы также смачиваемым рабочим телом. Тогда перегрев поверхности не приводит к возникновению пленочного кипения и разрушению конструкции, а кратковременная работа на режиме пузырькового кипения не представляется очень опасной. Для примера на рис. 9.11 даны результаты испытаний литиевой теплопередающей трубы. На рис. 9.12 сведены результаты испытаний, выполненных, различными авторами.

При пуске теплопередающей трубы следует иметь в виду, что многие рабочие тела для этих труб в эксплуатационных условиях могут находиться в твердом виде, когда особенно сложна проблема запуска теплопередающей трубы.

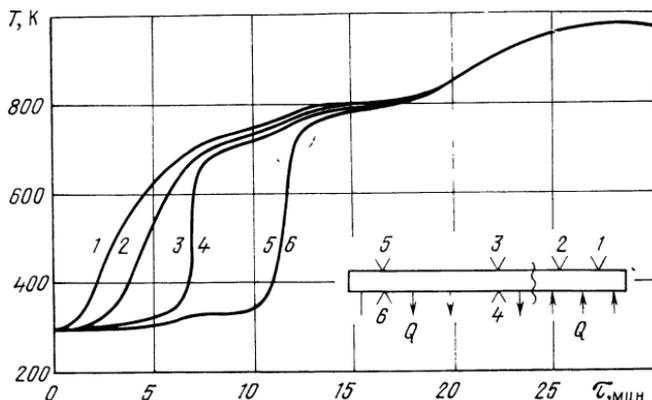


Рис 9.13 Распределение температур по длине теплопередающей трубы в процессе запуска: кривые 1—6—результаты измерений в соответствующих точках

При этом все устройство должно быть прогрето достаточно плавно, чтобы рабочее тело расплавилось по всей длине трубки и чтобы капиллярный насос успел подсосать жидкость, не давая испарительному участку перейти в опасный режим работы, когда вследствие высыхания испарительного участка он перестанет действовать, а при высоких температурах даже может расплавиться.

На рис. 9.13 показано развитие процесса запуска теплопередающей трубы на натрия во времени.

Опыт показывает, что теплопередающую трубу можно вывести на рабочий режим за несколько минут. Проблемы ускоренного запуска в настоящее время изучаются. Прекращение работы теплопередающей трубы также протекает во времени, но в отличие от запуска оно не угрожает опасными режимами.

В настоящее время намечаются пути дальнейшего усовершенствования теплопередающих труб. Так, трубы с составным фитилем, т. е. фитилем, пористость и капиллярность которого оптимизирована по длине трубы (максимальная подсосывающая способность в зоне испарения, минимальные гидравлические потери в адиабатной зоне и т. п.), имеют теплопередающую способность и максимальную длину значительно выше.

Трубы с переменным сечением паропровода и фитиля также лучше могут соответствовать конкретным задачам практики. Трубы с двух- или многокомпонентным рабочим телом могут охватывать большой диапазон температур, обеспечивать передачу тепла на разных уровнях температур.

Теплопередающие трубы обладают способностью трансформировать удельную тепловую нагрузку на единицу поверхности,

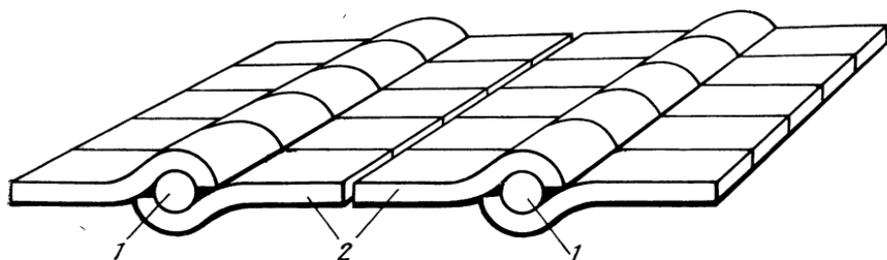


Рис 9.14. Схема сечения холодильника излучателя космической ядерной энергоустановки с панелями из теплопередающих труб:

1—трубы с теплоносителем, или теплопередающие трубы, сбрасывающие тепло в космос;
2—модули теплопередающих труб, увеличивающих поверхность излучения тепла в космосе

могут регулироваться во времени путем присоединения управляемого объема с газом. Газ, будучи вытеснен в рабочую полость теплопередающей трубы и скапливаясь на конце конденсационного участка, будет выключать из работы часть конденсационной зоны, и тем самым будет изменяться режим работы трубы. Наконец, также большие возможности открываются при варьировании геометрией теплопередающих труб: искривления, разветвления, применение кольцевых труб и т. п.

Теплопередающие трубы несмотря на явные их преимущества еще не нашли широкого применения. Известны примеры использования теплопередающих труб в системах терморегулирования космических аппаратов. Здесь перспектива применения теплопередающих труб очень велика в широком диапазоне температур от глубокого холода до сотен градусов тепла.

Особые преимущества имеют теплопередающие трубы при использовании в конструкциях ядерных энергетических (реакторных и радиоизотопных) установок космических аппаратов. На рис. 9.14 показан пример конструкции излучателя с теплопередающими трубами. Отвод тепла от реактора или радиоизотопного источника может быть осуществлен также теплопередающими трубами, что значительно упрощает систему, так как не требует циркуляционных устройств. Известны проекты ядерных термоэмиссионных энергоустановок с использованием теплопередающих труб [46]. Перечень областей применения теплопередающих труб пополняется с каждым днем.

Рекомендуемая литература:

основная: [74, 148];

дополнительная: [46, 83, 102, 107, 116].

КОНТАКТНЫЙ ТЕПЛОБМЕН

Контактным теплообменом называется передача тепла между соприкасающимися твердыми поверхностями.

Если через две соприкасающиеся поверхности проходит тепловой поток, то температура их будет одинаковой лишь в том случае, когда контакт этих поверхностей идеальный и термическое сопротивление в зоне контакта равно нулю. Однако поверхности деталей машин никогда не бывают абсолютно гладкими, на них всегда имеются неровности, зависящие как от характера технологической обработки, так и от качества самого материала. Поэтому контакт соприкасающихся поверхностей имеет дискретный характер.

Возникающее вследствие дискретного характера соприкосновения поверхностей термическое контактное сопротивление приводит к соответствующему перепаду температур в зоне контакта, величина которого при большой плотности тепловых потоков, характерной для современных энергетических и силовых установок, может составлять десятки и даже сотни градусов.

Вопросы контактного теплообмена имеют большое значение при исследовании проблем охлаждения ядерных реакторов, передачи тепла в установках, непосредственно преобразующий тепло в электричество, охлаждения элементов авиационных двигателей (диски, лопатки, турбины), нагрева обшивки космических летательных аппаратов, охлаждения элементов электронных и т. п. устройств.

В задачи исследования контактного теплообмена наряду с определением величины контактного термического сопротивления входит также изучение зависимостей этого сопротивления от различных факторов.

10.1. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ КОНТАКТНОГО ТЕПЛОБМЕНА

Зона контакта представляет собой область, состоящую из выступов микронеровностей, часть которых при соприкосновении деформируется и образует контактные пятна A , и пространства между выступами — межконтактных зазоров B (рис. 10.1). При этом суммарная площадь контактных пятен

(площадь фактического контакта) всегда составляет незначительную часть номинальной площади соприкосновения, определяемой геометрическими размерами поверхностей. В межконтактных зазорах может быть вакуум, газ или жидкость.

Обычно коэффициент теплопроводности контактирующих материалов во много раз больше коэффициента теплопроводности среды, заполняющей межконтактные зазоры. Поэтому наличие в

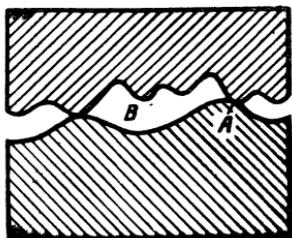


Рис. 10.1. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей

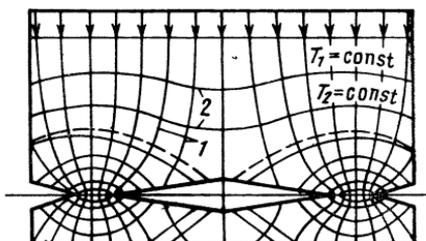


Рис. 10.2. Линии теплового тока и изотермы в зоне контакта (схема)

контактной зоне газовой прослойки и, особенно, вакуума значительно затрудняет переход тепла от одной поверхности к другой через зону контакта.

На рис. 10.2 схематично показаны линии тока 1 и изотермы 2 в зоне контакта на стационарном тепловом режиме. Как видно, вблизи контактной поверхности тепловой поток раздваивается — одна часть его проходит через пятна фактического контакта, а другая — через среду, заполняющую межконтактные зазоры. Так как теплопроводность контактных пятен, как правило, значительно выше теплопроводности среды, заполняющей зазоры, то к этим пятнам стягиваются линии теплового тока, а изотермические поверхности, параллельные друг другу вдали от контактной зоны, принимают в области контакта сложный характер. Плотность теплового потока вблизи пятен контакта сильно возрастает, что приводит к увеличению температурного градиента в зоне контакта и, следовательно, к возникновению температурного перепада между поверхностями, образующими зазор.

На рис. 10.3 представлено распределение температуры в составном теле при идеальном и при реальном контакте двух тел с шероховатой поверхностью. В случае идеального контактирования температура на границе тел одинакова. При соприкосновении реальных тел, поверхности которых имеют микронеровности, в зоне контакта возникает дополнительный температурный перепад ΔT_k , величина которого зависит от целого ряда факторов: теплофизических свойств среды, заполняющей межконтактные зазоры, состояния контактирующих поверхностей, теплофизических и механических свойств материалов контактной пары,

средней температуры в зоне контакта, нагрузки на контактные поверхности, величины теплового потока и др.

В действительности распределение температур в зоне контакта непрерывно и поверхности тел в местах фактического контакта имеют одну и ту же температуру, но поверхности, ограничивающие межконтактные зазоры, не являются изотермическими. Средняя температура поверхности, ограничивающей зазор, у более нагретого тела выше, а у менее нагретого ниже температуры в месте фактического контакта.

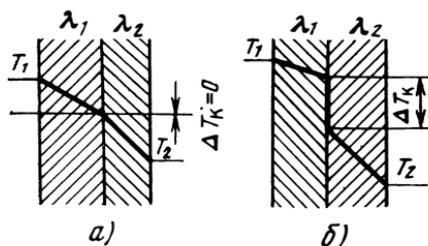


Рис. 10.3. Распределение температур при контактировании двух пластин: а—идеальный контакт; б—реальный контакт

Величина расчетного температурного перепада ΔT_k может быть определена экспериментально путем линейной экстраполяции графика распределения температуры в

контактирующих телах до поверхности соприкосновения.

Перепаду температур в зоне контакта ΔT_k соответствует контактное термическое сопротивление

$$R_k = \frac{\Delta T_k}{q_k}, \quad (10.1)$$

имеющее размерность $\text{м}^2 \cdot \text{К} / \text{Вт}$.

Здесь q_k — средний удельный тепловой поток, проходящий через зону контакта, $\text{Вт} / \text{м}^2$.

В местах фактического контакта тепло передается теплопроводностью. В зазорах передача тепла может осуществляться теплопроводностью, конвекцией и излучением. Как правило, размеры межконтактных зазоров весьма ограничены, что препятствует возникновению конвективных токов, поэтому конвективным теплообменом в зазорах можно пренебречь. При температурах в зоне контакта до 1000°К поток тепла, передающийся излучением, составляет 2—3% от общего теплового потока. Поэтому при умеренных температурах лучистым теплообменом в первом приближении можно также пренебречь.

Таким образом, можно считать, что тепло от одной соприкасающейся поверхности к другой передается лишь теплопроводностью через места фактического контакта и через газовую прослойку в межконтактном зазоре. Общее термическое сопротивление контакта может быть представлено как сумма двух составляющих: термического сопротивления среды — R_c и термического сопротивления контактных пятен — R_m , и находится по правилу сложения параллельных сопротивлений:

$$\frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_m}. \quad (10.2)$$

10.2. ТЕРМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПЛОСКОГО КОНТАКТА

Теоретическому исследованию контактного теплообмена посвящено много работ [132, 144].

Аналитические методы расчета контактной проводимости базируются на определенных модельных представлениях. Так, в основу наиболее распространенной в настоящее время модели контактной проводимости вошли следующие допущения.

1. Две параллельные шероховатые поверхности соприкасаются в ограниченном числе одинаковых по размеру контактных пятен, имеющих форму круга и равномерно распределенных по номинальной поверхности контакта.

2. Средний размер пятен при увеличении нагрузки на контактные поверхности изменяется незначительно, а рост площади фактического контакта происходит в основном из-за увеличения числа пятен.

3. Размеры пятен контакта для различных материалов одной группы близки.

Для теоретического анализа теплообмена в зоне контакта используется следующая расчетная схема, основанная на перечисленных выше допущениях [144]: распределение тепловых потоков на торце цилиндра контактного элемента рассматривается как результат сложения двух потоков. Соответственно этому термическое сопротивление контакта рассматривается как сумма двух дополнительных сопротивлений параллельных каналов постоянного сечения. Одно из них — сопротивление среды, а другое — сопротивление мест фактического контакта.

Контактный элемент принимается состоящим из двух полуограниченных цилиндров, соприкасающиеся торцы которых представляют собой усеченные конусы. Контакт на площадке радиусом r принимается идеальным и температура на ней T_0 считается постоянной (рис. 10.4). Оба соприкасающихся полуограниченных тела рассматриваются составленными из таких элементарных параллельных тепловых каналов. Так как течение тепла во всех контактных элементах идентично, то теплообмен на боковых границах отсутствует и тепловые явления, происходящие в контактном элементе, отражают особенности контактного теплообмена для всей поверхности.

Определение сопротивления контактного элемента сводится к определению температурного поля в рассматриваемой области. Аналитическое решение такой задачи сопряжено с большими математическими трудностями, поэтому возникает необходимость в упрощении задачи.

Из принятой схемы контактного элемента следует, что разность температур на границах зазора и толщина прослойки среды возрастают с увеличением радиуса. Если в первом приближении их отношение принять постоянным, то это будет равносильно тому, что на границе зазора задан тепловой поток посто-

янной плотности. Заменяя приближенно условие на пятне $T_0 = \text{const}$ условием $q_0 = \text{const}$, тем самым сводим задачу с сопряженными смешанными условиями к краевой задаче второго рода, когда на торце полуограниченного цилиндра с теплоизолированной боковой поверхностью задано распределение тепловых потоков. На основе решения данной задачи получена следующая формула для расчета общей термической проводимости контакта:

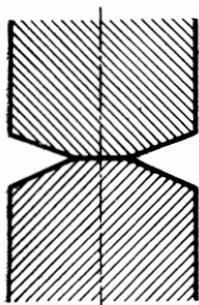


Рис. 10.4.
Схема контактного элемента

$$\frac{1}{R_k} = \frac{\lambda_c}{\delta_3} + \frac{2\bar{\lambda}_m}{\pi r} \frac{\eta}{\psi} \quad (10.3)$$

Здесь λ_c — коэффициент теплопроводности среды, заполняющей межконтактные зазоры;
 δ_3 — эквивалентная толщина зазора, определяемая из условия равенства ее термического сопротивления термическому сопротивлению слоя переменной толщины;

$\bar{\lambda}_m$ — приведенная теплопроводность

$$\bar{\lambda}_m = \frac{2\lambda_{m_1}\lambda_{m_2}}{\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2}} \quad (10.4)$$

$\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}$ — коэффициенты теплопроводности контактирующих материалов;

r — радиус пятна касания;

η — относительная площадь фактического контакта;

$$\psi = 1 - 1,41 \frac{r}{r_0} + 0,3 \left(\frac{r}{r_0} \right)^3 - \text{коэффициент стягивания}; \quad (10.5)$$

r_0 — радиус цилиндра контактного элемента.

Для приближенной оценки величины площади фактического контакта могут быть использованы следующие эмпирические формулы соответственно для первоначального и последующих нагружений:

$$\eta = \frac{p \cdot 10^5}{HB}, \quad \eta = \frac{p_{\max}^{1/3} p^{2/3} \cdot 10^5}{HB}, \quad (10.6)$$

где p — давление в зоне контакта, Па;

HB — число твердости по Бринеллю более мягкого материала.

Формулы (10.3) и (10.6) не учитывают реальной микрогеометрии контактирующих поверхностей. Для более точного определения величины термического сопротивления контакта необходимо учитывать реальную геометрию, механические свойства контактирующих материалов, зависимость площади фактического контакта от нагрузки и температуры в зоне контакта.

При наличии волнистости контактирующих поверхностей пят-

на контакте концентрируются лишь на гребнях волн. В этом случае нагрузку на контактирующие поверхности и площадь фактического контакта следует относить к так называемой контурной площади S_k , на которой располагаются контактные пятна (рис. 10.5).

Тогда относительная фактическая площадь контакта $\eta = S_{\phi}/S_k$. При наличии регулярной сферической или цилиндрической волнистости контурная площадь может быть определена по формулам теории упругости. В случае отсутствия волнистости контурная площадь S_k равна номинальной S_n .

При расчете контактного сопротивления по формуле (10.3) наиболее трудным является определение площади фактического контакта, величина которой обусловлена характером деформации микронеровностей.

Теоретическое решение задачи о площади фактического контакта реальных поверхностей в настоящее время получено лишь для некоторых геометрически правильных тел и материалов, обладающих идеальными свойствами [47]. Поэтому, для практических целей наиболее надежными являются методы определения площади фактического контакта, основанные на экспериментальных данных. Экспериментально установлено, что площадь фактического контакта составляет незначительную часть от номинальной площади (до 2—5%). С уменьшением твердости контактирующих материалов, улучшением чистоты обработки контактных поверхностей и увеличением нагрузки площадь фактического контакта возрастает.

На рис. 10.6 представлен пример зависимости площади фактического контакта от нагрузки. Видно, что в области малых нагрузок рост площади фактического контакта при повышении нагрузки более интенсивный, чем в области больших нагрузок.

В основу расчетов контактного термического сопротивления положены полуэмпирические соотношения, полученные в результате обобщения многочисленных экспериментальных исследований контактного теплообмена [106, 132, 143, 144] и др.

Ниже рассматриваются зависимости контактного термического сопротивления от различных факторов, полученные в экспериментах.

Удельная нагрузка p (средняя нагрузка на контактирующие поверхности) оказывает сильное влияние на величину термического сопротивления контакта R_k (рис. 10.7). С ростом нагрузки контактное термическое сопротивление R_k уменьшается, особенно сильно в области малых нагрузок [до 5—10 МПа], что

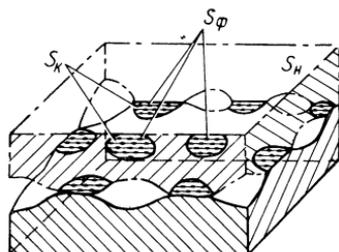


Рис. 10.5. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей со сферической волнистостью

объясняется характером изменения площади фактического контакта (см. рис. 10.6).

Средняя температура в зоне контакта T_K оказывает значительное влияние на величину R_K . Характер изменения контактного термического сопротивления от температуры определяется совокупностью зависимостей физических и механических характеристик материалов контактных пар от температуры. В зависимости от свойств контактирующих материалов и условий контактирования повышение температуры в зоне контакта может вызвать как увеличение, так и уменьшение контактного термического сопротивления (рис. 10.8).

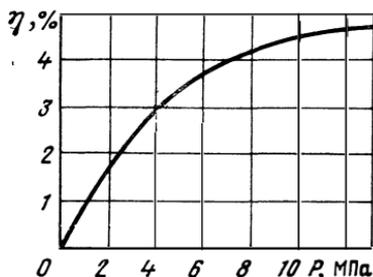


Рис 10.6 Зависимость относительной площади фактического контакта от нагрузки для контактной пары при чистоте поверхностей по 8-му классу Mo/Al_2O_3

Шероховатость контактирующих поверхностей также оказывает влияние на величину R_K . С улучшением чистоты обработки контактных поверхностей термическое сопротивление контакта уменьшается; особенно интенсивно это происходит при улучшении обработки поверхностей до 6—7 классов, что объясняется соответствующим ростом площади фактического контакта (рис. 10.9).

Наличие газовой среды в межконтактных зазорах оказывает значительное влияние на величину контактного термического сопротивления (рис. 10.10). Чем больше теплопроводность среды, заполняющей межконтактные зазоры, тем меньше термическое сопротивление контакта.

На основе рассмотренной выше теоретической модели контактного теплообмена и обобщения результатов экспериментальных исследований [75] получена полуэмпирическая формула для определения термического сопротивления контакта:

$$R_K = 1 \left/ \left[\frac{2\bar{\lambda}_M A (p_K / 3\sigma_H)^n}{\pi r_M} + \frac{\lambda_c K}{\delta_3} \right] \right., \quad (10.7)$$

где r_M — радиус пятна контакта. По данным экспериментов для контакта металлических пар $r_M = 30 \div 40$ мкм, а для пар металл—твердая керамика (Al_2O_3 , BeO) $r_M = 10 \div 15$ мкм;

$$\bar{\lambda}_M = \frac{2\lambda_{M_1} \lambda_{M_2}}{\lambda_{M_1} + \lambda_{M_2}}; \quad (10.8)$$

λ_M — приведенный коэффициент теплопроводности контактирующих материалов при температуре в зоне контакта T_K , Вт/(м·К);

A — коэффициент, учитывающий реальную микрогеометрию контактирующих поверхностей *;
 p_k — удельная нагрузка на контактные поверхности, Па;
 σ_B — предел прочности более мягкого материала при температуре зоны контакта T_k , Па;

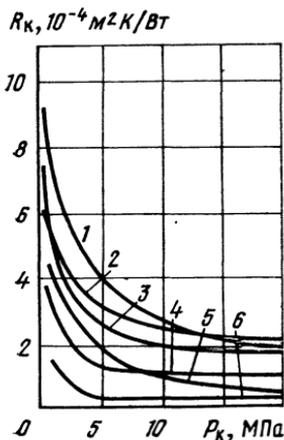


Рис. 10.7. Зависимость контактного термического сопротивления в вакууме 10^{-3} мм рт. ст. при $T_k = 925$ К и при различной шероховатости поверхностей:

- 1 — X18H9T/∇9Al₂O₃ ∇9;
- 2 — Мо ∇8/Al₂O₃ ∇8;
- 3 — X18H9T ∇9/BeO ∇8;
- 4 — X18H9T ∇9/Мо ∇8;
- 5 — Al₂O₃ ∇7/графит ∇6;
- 6 — Мо ∇8/графит ∇6

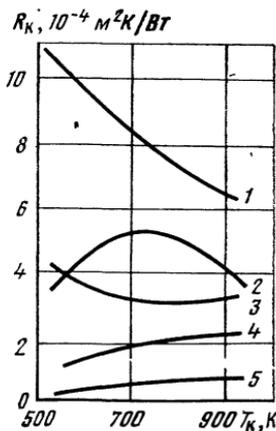


Рис. 10.8. Зависимость контактного термического сопротивления от температуры зоны контакта в вакууме 10^{-3} мм рт. ст. под нагрузкой 2,5 МПа и при различной шероховатости поверхностей:

- 1 — X18H9T ∇9/Al₂O₃ ∇9;
- 2 — Мо, ∇8/Al₂O₃, ∇8;
- 3 — X18H9T ∇9/BeO, ∇8;
- 4 — Al₂O₃, ∇8/графит, ∇6;
- 5 — Мо ∇8/графит ∇6

n — показатель степени, зависящий от рода контактирующих материалов (рис. 10.11);
 λ_c — коэффициент теплопроводности среды при температуре зоны контакта $T_{\text{к}}$ Вт/(м·К);
 K — опытный коэффициент, определяемый по формуле

$$K = 1,4 - \frac{1,5}{p_k^{0,25} \cdot 10^5}; \quad (10.9)$$

δ_3 — эквивалентная толщина зазора.

* Рекомендации по определению A можно найти в работе по исследованию контактирования шероховатых поверхностей [47].

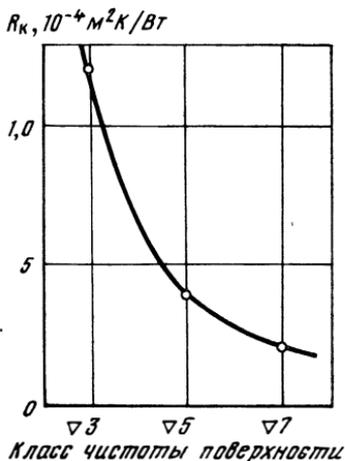


Рис. 10.9. Зависимость контактного термического сопротивления от класса чистоты поверхностей пары бронза/бронза при нагрузке $p_k=2,5$ МПа [1]

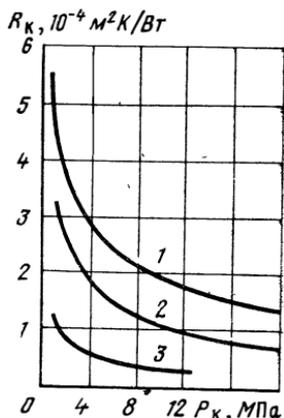


Рис. 10.10. Зависимость контактного термического сопротивления от нагрузки для пары Мо V8/H18H10T V8 в разных газовых средах при $T_k=825$ К:
1—вакуум; 2—азот; 3—гелий

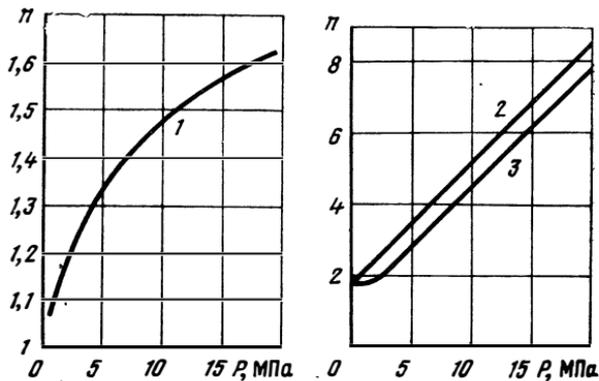


Рис. 10.11. Усредненное значение показателя n :
1—металл/металл и металл/керамика; 2—металл/графит; 3—керамика/графит

Для ориентировочных расчетов можно принять

$$\delta_3 = \frac{h_{\text{ср1}} + h_{\text{ср2}}}{2},$$

где $h_{\text{ср1}}$ и $h_{\text{ср2}}$ — средняя высота микронеровностей контактирующих поверхностей в м.

Приведенная формула позволяет получить достаточно достоверные значения $R_{\text{к}}$ для разнообразных контактных пар в диапазоне температур до 1000 К и давлений $p_{\text{к}} = (0,5 \div 25)$ МПа.

10.3 ТЕРМИЧЕСКОЕ КОНТАКТНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ КОАКСИАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАРЫ

В ряде технических устройств (элементы термоэмиссионных преобразователей, реакторов и др.) тепловой поток передается через прилегающие друг к другу поверхности коаксиальных цилиндров 1 и 2 (рис. 10.12). При проектировании и расчете указанных устройств необходимо знать величину контактного термического сопротивления и соответствующего температурного перепада в контакте.

Принципиальной особенностью контактирования замкнутых поверхностей, образованных полыми цилиндрами, посаженными один в другой с предварительным зазором или натягом по посадочному диаметру $d_{\text{пос}}$, является зависимость удельного давления на посадочных поверхностях $p_{\text{к}}$ от температурного режима, размеров цилиндров, посадки, а также от теплофизических и механических свойств контактирующих материалов, тогда как при контактировании плоских незамкнутых поверхностей величина контактного давления $p_{\text{к}}$ могла выбираться произвольно.

Нетрудно убедиться в том, что при заданной величине удельного теплового потока q и заданной температуре одной из трубок цилиндрической пары в ней автоматически установится стабильный режим теплопередачи с определенной величиной перепада температур в зоне контакта $\Delta T_{\text{к}}$ и определенной величиной давления на контактные поверхности $p_{\text{к}}$.

Пусть задана температура внутренней трубки T_1 и удельный тепловой поток на расчетном режиме q . Тогда увеличение разности температур внутренней и наружной трубок $\Delta T_{\text{к}} = T_1 - T_2$ может быть достигнуто охлаждением наружной трубки (будем для простоты рассуждений пренебрегать небольшим падением температуры в стенках трубок). Примем, что вначале температуры внутренней 1 и наружной 2 трубок одинаковы ($T_1 = T_2$) и между ними имеется некоторый зазор. При этом, конечно, и тепловой поток равен нулю.

Если теперь уменьшить температуру наружной трубки T_2 , то вследствие появления разности температур между трубками возникает тепловой поток q , а величина зазора в силу разницы термического расширения станет уменьшаться.

При определенной температуре T_2 произойдет соприкосновение поверхностей. Этому моменту соответствует точка 1 на диаграмме в координатах $\Delta T_K - p_K$, так как $p_K = 0$ (рис. 10.13). При этом термическое сопротивление контакта R_K еще очень велико, и для прохождения через зону контакта заданного теплового потока q необходима очень большая разность температур ΔT_K (точка 2). При дальнейшем уменьшении температуры T_2 и, сле-

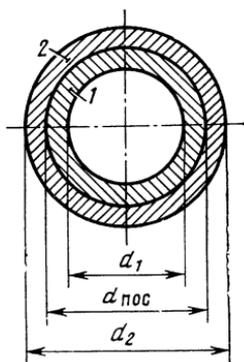


Рис. 10.12. Схема цилиндрической пары

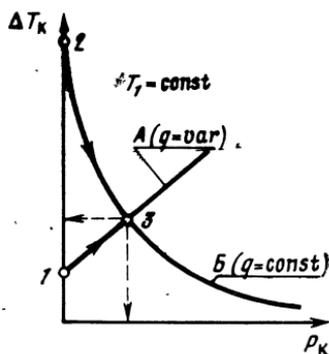


Рис. 10.13 Теплоконтактная характеристика коаксиальной пары

довательно, увеличению ΔT_K между трубками возникнет натяг, будет возрастать контактное давление p_K соответственно кривой A и тепловой поток будет увеличиваться. Но при увеличении p_K будет уменьшаться термическое сопротивление контакта R_K , а следовательно, и разность температур ΔT_K , необходимая для прохождения через место контакта заданного теплового потока q , соответственно кривой B . При некотором определенном значении ΔT_K его величина станет равной необходимой для прохождения через место контакта заданного теплового потока — в точке «3» пересечения кривых A и B . Таким образом установится также и определенное давление в месте контакта p_K , соответственно точке «3».

Совокупность зависимостей A и B называется теплоконтактной характеристикой коаксиальной пары.

Рассмотрение ряда теплоконтактных характеристик, построенных для различных условий контактирования, помогает выбрать наиболее выгодные конструктивные параметры цилиндрической пары (размеры, материалы, посадку и т. п.).

Для расчета зависимости давления в контакте p_K от разности температур ΔT_K можно использовать соотношение между давлением и величиной натяга δ из теории упругости:

$$p_k = \frac{\delta/d_{\text{пос}}}{\frac{1}{E_1} \left[\frac{1 + (d_1/d_{\text{пос}})^2}{1 - (d_1/d_{\text{пос}})^2} - \mu_1 \right] + \frac{1}{E_2} \left[\frac{1 + (d_{\text{пос}}/d_2)^2}{1 - (d_{\text{пос}}/d_2)^2} + \mu_2 \right]}. \quad (10.10)$$

Здесь $d_{\text{пос}}$, d_1 и d_2 — номинальные размеры трубок (см. рис. 10.12);

E_1, E_2 — модули упругости материалов внутренней 1 и наружной 2 трубок;

μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона.

Диаметральный натяг δ можно рассматривать как разность посадочных размеров трубок в нагретом состоянии, обусловленную разницей их термического расширения:

$$\delta = \delta_0 - [\alpha_1 T_1 - \alpha_2 (T_1 - \Delta T_k)] d_{\text{пос}}, \quad (10.11)$$

где δ_0 — диаметральный зазор при $T = 273 \text{ K}$;

α_1 и α_2 — температурные коэффициенты линейного расширения материалов трубок 1 и 2.

Тогда аналитическая зависимость давления в месте контакта от разности температур контактирующих поверхностей имеет вид

$$p_k = \frac{\delta_0/d_{\text{пос}} - (\alpha_1 - \alpha_2) T_1 - \alpha_2 \Delta T_k}{\frac{1}{E_1} \left[\frac{1 + (d_1/d_{\text{пос}})^2}{1 - (d_1/d_{\text{пос}})^2} - \mu_1 \right] + \frac{1}{E_2} \left[\frac{1 + (d_{\text{пос}}/d_2)^2}{1 - (d_{\text{пос}}/d_2)^2} + \mu_2 \right]}. \quad (10.12)$$

Как видно из выражения (10.12), зависимость p_k от ΔT_k линейная, если не учитывать изменений E , μ , α и λ с температурой.

Если учесть падение температуры в стенках трубок, то числитель в формуле (10.12) несколько усложнится:

$$\frac{\delta}{d_{\text{пос}}} = \frac{\delta_0}{d_{\text{пос}}} + \left\{ \alpha_1 \left[T_{W1} - \frac{q^* \varphi (d_{\text{пос}} - d_1)}{2\lambda_1 \pi (d_{\text{пос}} + d_1)} \right] - \alpha_2 \left[T_{W1} - \frac{q^* \varphi (d_{\text{пос}} - d_1)}{\lambda_1 \pi (d_{\text{пос}} + d_1)} - \frac{q^* \varphi (d_2 - d_{\text{пос}})}{\lambda_2 \pi (d_2 + d_{\text{пос}})} - \Delta T_k \right] \right\}, \quad (10.13)$$

где T_{W1} — температура на внутренней поверхности трубки 1;

q^* — тепловой поток на 1 погонный метр трубок;

φ — коэффициент, учитывающий кривизну цилиндрических поверхностей (зависит от отношения внутреннего и наружного диаметров трубок);

λ_1, λ_2 — коэффициенты теплопроводности материалов трубок.

Если известна аналитическая зависимость контактного термического сопротивления R_k от давления p_k , например, уравнение (10.7), то, имея в виду, что $\Delta T_k = R_k q$, расчет сводится к решению уравнений (10.7) и (10.12), из которых найдутся численные значения ΔT_k и p_k на установившемся режиме.

Однако ввиду сложности и недостаточной точности эмпирических зависимостей R_k от параметров удобнее применять графо-

аналитический метод расчета, используя для построения тепло-контактных характеристик непосредственно опытные данные по контактному термическому сопротивлению $R_{\text{к}}$, полученные на плоских моделях.

Проводя расчеты для различных условий, можно выбрать наиболее выгодные конструктивные параметры (размеры трубок, посадку, материалы), а также параметры теплового режима (удельный тепловой поток, рабочие температуры трубок).

При этом из анализа теплоконтактной характеристики можно заключить, что выбором посадки δ_0 можно уменьшить падение температуры в контакте $\Delta T_{\text{к}}$, но лишь ценой повышения давления $p_{\text{к}}$, а это в случае тонкостенных трубок недопустимо.

Очевидно, в цилиндрических системах более целесообразно снижение термического сопротивления одним из способов, рассматриваемых ниже и не требующих повышения $p_{\text{к}}$. В этом случае не только уменьшается падение температуры $\Delta T_{\text{к}}$, но и одновременно снижается давление в контакте $p_{\text{к}}$, что благоприятно отражается на надежности конструкций при длительной работе.

Существуют различные способы регулирования контактного термического сопротивления $R_{\text{к}}$. Увеличение удельного давления $p_{\text{к}}$ на контактирующие поверхности сильно снижает термическое сопротивление, особенно в области малых нагрузок. Однако возможности этого способа ограничены, так как во многих конструкциях не всегда бывает возможным или выгодным увеличивать нагрузку на контактирующие поверхности.

Улучшение чистоты обработки контактирующих поверхностей до 7—8 классов особенно эффективно с точки зрения уменьшения контактного термического сопротивления. Однако дальнейшее повышение чистоты обработки поверхностей технически сложно и дает небольшой эффект.

Наиболее эффективным способом уменьшения контактного термического сопротивления является введение прокладок и покрытий из мягких и теплопроводных материалов в зону контакта. Эксперименты показывают, что применение очень тонких — порядка высоты микронеровностей — металлических покрытий, наносимых на одну или обе контактирующие поверхности различными способами (гальванический, плазменное напыление и др.) существенно снижает величину контактного термического сопротивления. В качестве материалов покрытий могут быть применены теплопроводные металлы и их сплавы (серебро, медь, никель, олово и др.).

В тех случаях когда нанесение покрытий затруднено, примерно тот же эффект может быть получен путем постановки тонких прокладок из тех же материалов.

На рис. 10.14 приведены результаты некоторых экспериментов, иллюстрирующие эффективность прокладок и покрытий.

Наряду с металлическими покрытиями возможно также применение мягких неметаллических покрытий (эмалей, мастик). Заполнение межконтактного зазора газами с высокой теплопроводностью является также достаточно эффективным способом снижения контактного термического сопротивления.

Уменьшение давления газа в межконтактном зазоре сильно сказывается на величине контактного термического сопротивления из-за изменения коэффициента теплопроводности среды. При уменьшении давления газа ниже атмосферного вступает в силу эффект уменьшения теплопроводности для разреженных газов.

В отдельных случаях возможно заполнение межконтактных полостей жидким металлом. При этом термическое сопротивление контакта практически сводится к нулю. Однако осуществление этого способа технически сложно. Для более широкого регулирования величины контактного термического сопротивления возможно применение комбинированного воздействия перечисленных выше способов.

Рекомендуемая литература:
основная: [106, 143];
дополнительная: [47, 75, 132, 144].

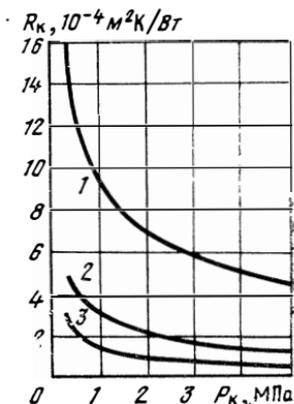


Рис 10.14. Зависимости R_k от p_k для пары СтX18H9TV8/Мо V8 в вакууме при $T_k = 623$ К:

1 — без покрытий; 2 — с прокладкой из серебра, 3 — с покрытием поверхности стали серебром, $\delta = 3$ мкм

ЛАМИНАРНЫЙ ТЕПЛОБМЕН ПРИ ВЫСОКИХ СКОРОСТЯХ И ТЕМПЕРАТУРАХ ГАЗОВОГО ПОТОКА

При конструировании двигателей и летательных аппаратов большое значение имеют правильное определение температуры элементов конструкции, выбор тепловой защиты и теплоизоляции. Вопросы тепловых режимов конструкции стали особенно серьезными и во многих случаях определяющими в связи с развитием реактивных двигателей и летательных аппаратов, движущихся с большими сверхзвуковыми скоростями.

Рассмотрим различные случаи теплообмена при высоких скоростях и температурах газового потока, встречающихся в современной авиационной и ракетной технике.

При движении летательного аппарата в атмосфере частицы газа, примыкающие к стенке, увлекаются стенкой или, что одно и то же, при обтекании аппарата из-за трения тормозятся у стенки. Процесс торможения сопровождается выделением тепла и диссипацией кинетической энергии потока. Если скорость полета достаточно велика, то вблизи стенки образуется слой газа с высокой температурой, нагревающий поверхность аппарата.

Температура газа может достигнуть значений, близких к значениям температуры торможения:

$$T_{0н} = T_n \left(1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \right)^2.$$

Здесь T_n — температура набегающего потока газа;
 $k = c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей (для воздуха $k = 1,4$);

$$M = \frac{u_n}{a_n}$$

u_n — скорость полета;

a_n — скорость звука в атмосфере.

Уже при числах $M > 2,5$ температура в пристеночном слое газа может достигнуть 575 К, что связано с переходом от обычно применяемого в авиационных конструкциях дюралюминиевого сплава к более термостойким материалам; при $M > 5$ стальные конструкции должны защищаться специальными покрытиями;

при $M > 10$ не всегда удается создать неохлаждаемую конструкцию. Наконец, при еще более высоких скоростях полета температура газа у стенки и тепловые потоки становятся такими большими, что приходится допускать унос вещества самой поверхности в силу плавления, сублимации и др.

В камерах сгорания и соплах ракетных двигателей, на лопатках газовых турбин тепловые потоки также достигают очень больших значений. Температура газа в камерах сгорания жидкостно-реактивных двигателей достигает 3—4 тысяч градусов. В связи с использованием высококалорийных топлив значения температуры непрерывно растут. Для того чтобы уменьшить размеры двигателей, конструкторы стремятся повышать давление в них. Совместное действие всех факторов ведет к резкому увеличению тепловых потоков.

Не меньшее значение имеет расчет теплообмена и тепловой защиты элементов воздушно-реактивных двигателей. У этих двигателей для охлаждения отбирается часть поступающего в камеру воздуха. При увеличении числа M температура торможения забираемого воздуха растет и соответственно растет количество воздуха, необходимого для охлаждения, что ведет к заметному падению тяги и экономичности.

Во всех рассмотренных случаях нагрев происходит за счет теплоотдачи от горячего газа. Газ может иметь высокую температуру во всем потоке, либо нагреться вблизи стенки из-за трения при больших скоростях.

Нагрев стенки целиком определяется процессами, протекающими в тонком пристеночном слое, называемом пограничным слоем. Поэтому для расчета конвективного теплообмена необходимо провести расчет пограничного слоя.

В настоящей главе мы рассмотрим ламинарный пограничный слой, в котором перенос тепла и количества движения совершается путем молекулярной теплопроводности и вязкости.

11.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

При обтекании тела потоком жидкости или газа с большими значениями числа Рейнольдса течение в окрестности тела можно разбить на две области.

Первая область (рис. 11.1) представляет собой тонкий слой, примыкающий к телу и называемый пограничным слоем. В пограничном слое вязкость и теплопроводность оказывают существенное влияние на течение. Непосредственно на стенке имеет место явление прилипания, заключающееся в том, что скорость и температура жидкости у поверхности равны скорости и температуре поверхности (исключая течение в разреженном газе). При удалении от поверхности скорость и температура асимптотически стремятся к их значениям в обтекающем потоке.

Толщина пограничного слоя δ намного меньше размера обтекаемого тела l

$$\frac{\delta}{l} \ll 1 \text{ при } Re \gg 1.$$

Вторая область — внешний поток, идеальное течение вне пограничного слоя. Здесь градиенты скорости и температуры малы, а влиянием вязкости и теплопроводности можно пренебречь.

Между этими двумя областями нет резкой границы. Разделение течения на две области существенно упрощает исследование и расчет обтекания тел при больших числах Re .

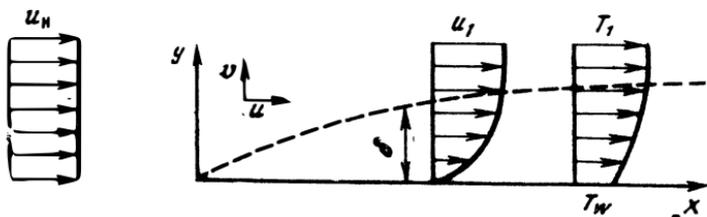


Рис. 11.1. Схематическое изображение пограничного слоя

Благодаря тому что пограничный слой тонкий, давление поперек его сохраняется практически постоянным. При этом расчет обтекания тела, т. е. определение параметров потока вне пограничного слоя, можно производить так, как будто пограничного слоя не существует. Найденные при этом параметры внешнего потока: давление p_1 , плотность ρ_1 , скорость u_1 и температура T_1 могут быть затем использованы для расчета распределения скорости и температуры в пограничном слое.

Если эти распределения известны, то легко вычисляются значения касательных напряжений трения на поверхности и удельных тепловых потоков, идущих в стенку:

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w ; \quad q_w = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w . \quad (11.1)$$

Здесь y — координата по нормали к поверхности тела; индекс W означает, что все величины берутся при значении $y=0$.

Таким образом, расчет трения и конвективного теплообмена на поверхности обтекаемых тел сводится к расчету пограничного слоя при заданных параметрах идеального течения вне слоя.

Рассмотрим некоторые характеристики пограничного слоя.

Распределение скорости в пограничном слое характеризуется профилем скорости

$$\bar{u} = \frac{u}{u_1} = f \left(\frac{y}{\delta} \right) .$$

Здесь δ — условная толщина динамического пограничного слоя, равная, например, значению y , при котором $\bar{u} = 0,99$.

Соответствующее выражение для профиля температуры имеет вид

$$\bar{T} = \frac{T - T_w}{T_1 - T_w} = f_1\left(\frac{y}{\delta_T}\right).$$

Здесь δ_T — толщина теплового пограничного слоя. В общем случае влияние вязкости и теплопроводности является различным и распределения скорости и температуры, так же как и толщины теплового и динамического слоев, не совпадают.

Практическое определение толщины пограничного слоя встречает трудности, так как нельзя точно установить границу между пограничным слоем и внешним потоком и точность определения толщины слоя в большой степени зависит от точности самих измерений. Поэтому в рассмотрении вводят некоторые интегральные характеристики, определяемые более точно, ибо на их величину не оказывает заметного влияния тот факт, что значения параметров течения в пограничных слоях асимптотически стремятся к значениям параметров внешнего потока.

11.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Течение вязкой и теплопроводной жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса, уравнением неразрывности и уравнением энергии.

Как было уже сказано, при больших значениях Re толщина слоя намного меньше характерного размера тела $\delta \ll l$. При этом условии произведем оценку членов в уравнениях Навье — Стокса для двумерного течения при обтекании плоской стенки (рис. 11.1). Ось x направим вдоль поверхности, y по нормали к ней, соответствующие компоненты скорости обозначим u и v .

Уравнения Навье — Стокса для установившегося плоского течения имеют вид [96, 140]

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (11.2)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (11.3)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0. \quad (11.4)$$

Граничными условиями будут: прилипание жидкости к стенке

$$u = v = 0 \text{ при } y = 0, \quad (11.5)$$

и совпадение скорости вдали от стенки со скоростью невозмущенного течения.

Для анализа приведем систему уравнений к безразмерной форме. Для построения безразмерных величин выберем масштабы таким образом, чтобы безразмерные переменные изменялись в узких пределах. При этом уравнение будет нормировано и можно будет сделать оценку различных членов.

Все скорости отнесем к скорости набегающего потока u_H , все длины — к характерному линейному размеру l , который выберем так, чтобы порядок безразмерной величины du/dx не превышал единицы. Давление сделаем безразмерным, разделив его на $\rho_H u_H^2$.

Рассмотрим для простоты случай несжимаемого течения, тогда $\rho = \rho_H$ и $\mu = \mu_H$ принимаются постоянными и с учетом уравнения (11.4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (11.6)$$

Безразмерные величины примут вид

$$u' = \frac{u}{u_H}; \quad v' = \frac{v}{u_H}; \quad x' = \frac{x}{l};$$

$$y' = \frac{y}{l}; \quad p' = \frac{p}{\rho_H u_H^2}; \quad \delta' = \frac{\delta}{l}.$$

Подставим в уравнения (11.2) — (11.4) безразмерные величины. Уравнения Навье — Стокса примут вид

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u'}{(\partial y')^2} + \frac{\partial^2 u'}{(\partial x')^2} \right]; \quad (11.7)$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v'}{(\partial x')^2} + \frac{\partial^2 v'}{(\partial y')^2} \right], \quad (11.8)$$

а уравнение неразрывности —

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0. \quad (11.9)$$

Здесь число Рейнольдса $\text{Re} = \frac{u_H \rho_H l}{\mu_H}$.

Оценку порядка величин начнем с уравнения неразрывности. Поскольку величина du'/dx' имеет порядок единицы, то из

уравнения (11.9) следует, что такой же порядок имеет и величина $\partial v'/\partial y'$. Но так как толщина слоя мала и имеет порядок δ' , то и поперечная скорость имеет порядок δ' и $v' \sim \delta'$.

Отсюда получаем важнейший вывод, что в пограничном слое вертикальная составляющая скорости мала по сравнению с продольной составляющей:

$$\frac{v}{u_1} \sim \frac{\delta}{l}. \quad (11.10)$$

Порядки величин, стоящих в левой части уравнений (11.7), следующие: $u', \partial u'/\partial x', \rho'v' \sim 1$; $v' \sim \delta$; $\partial u'/\partial y' \sim 1/\delta$; $u'\partial u'/\partial x' + v'\partial u'/\partial y' \sim 1$.

Оценим величины, заключенные в скобки. В первом уравнении

$$\frac{\partial^2 u'}{(\partial y')^2} \sim \frac{1}{(\delta')^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u'}{(\partial x')^2} \sim 1.$$

Так как δ' мало, то величину $\partial^2 u'/(\partial x')^2$ можно отбросить как малую, по сравнению с величиной $\partial^2 u'/(\partial y')^2$. Это очень важное обстоятельство, поскольку, отбросив вторую производную по одной переменной, мы изменяем характер дифференциального уравнения в частных производных.

После исключения второго члена в скобках уравнения (11.7) в нем остается член, который нужно учитывать, если его порядок, такой же или больше, чем порядок остальных членов.

Следовательно, влияние вязкости нужно учитывать, если

$$\frac{1}{(\delta')^2 \text{Re}} \sim 1,$$

$$\text{т. е. } (\delta')^2 \sim \frac{1}{\text{Re}}.$$

Толщина пограничного слоя δ , в котором проявляется вязкость, обратно пропорциональна корню квадратному из числа Рейнольдса, или в размерных обозначениях

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (11.11)$$

Перейдем к рассмотрению второго уравнения системы (11.7) — (11.9).

Порядок величин левой части не требует разъяснения. Порядок градиента давления пока неизвестен. В скобке в правой части уравнения можно пренебречь первым членом по сравнению со вторым. Далее, поскольку $\delta' \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$, то порядок последнего члена будет равен δ' , т. е. будет таким же, как и порядок остальных членов левой части.

Окончательно получаем оценку для значения $\partial p/\partial y$:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\delta}{l} \quad (11.12)$$

и перепад давлений в пограничном слое

$$\Delta p \sim \frac{\delta^2}{l^2}. \quad (11.13)$$

Отсюда следует, что в принятых для пограничного слоя приближениях давление поперек слоя можно считать постоянным $p = p(x)$. Это означает, что первое уравнение системы (11.7) можно решать независимо от второго, а значения статического давления и его производных по x по всей толщине пограничного слоя могут приниматься равными их значениям на границе слоя, т. е. могут определяться из течения идеальной жидкости. При необходимости точного определения сил давления, действующих на поверхность, следует учитывать поправку на Δp . Эта поправка определяется из решения уравнения (11.8) при заданных значениях u , v , q . (При течении вдоль криволинейного контура, как будет показано ниже, справедлива другая оценка).

Все сделанные нами выводы остаются справедливыми и в случае течения сжимаемой жидкости с теплообменом. Однако при этом к системе уравнений (11.7) — (11.9) должны быть добавлены уравнения энергии, уравнение состояния газа и законы изменения вязкости и теплопроводности от температуры.

С учетом оценок, аналогичных сделанным для уравнений движения, выпишем без вывода полную систему дифференциальных уравнений пограничного слоя [96, 140] в сжимаемом газе

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (11.14)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0; \quad (11.15)$$

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \quad (11.16)$$

$$p = \rho R T; \quad \mu = \mu(T); \quad \lambda = \lambda(T). \quad (11.17)$$

Эта система уравнений справедлива для так называемого совершенного газа.

Вязкость μ и теплопроводность λ для совершенного газа являются функциями только температуры. Наиболее распространенной является формула Саттерленда. Например, для вязкости

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T^*} \right)^{3/2} \frac{1 + (T_S/T^*)}{(T/T^*) + (T_S/T^*)},$$

где T_S — постоянная Саттерленда, равная для воздуха 102 К;

T^* , μ_0 — значения температуры и вязкости, соответствующие некоторому начальному состоянию.
Широко применяются также и степенные формулы

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{n_2},$$

где n_1 и n_2 — постоянные, подбираемые для заданного диапазона изменения температуры и изменяющиеся в пределах от 0,5 до 1.

В случае течения реального газа необходимо учесть некоторые дополнительные свойства газа, такие, например, как

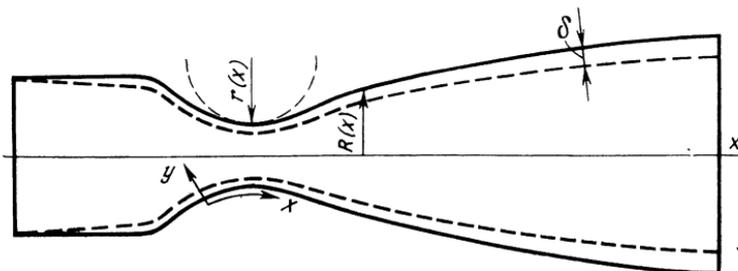


Рис. 11.2. Пограничный слой в сверхзвуковом сопле

переменность теплоемкости c_p и газовой постоянной R , зависимость μ и λ от давления и ряд других физических явлений, которые будут рассмотрены позднее.

Уравнение (11.14) соответствует уравнению количества движения в проекции на ось x . Члены, стоящие в левой части этого уравнения, называют конвективными членами.

Уравнение неразрывности (11.15) выражает собой закон сохранения массы.

Третье уравнение (11.16) также имеет простой физический смысл, представляя собой математическое выражение закона сохранения энергии. Левая часть соответствует конвективному выносу энергии из элементарного объема. Первый член в правой части определяет подвод тепла теплопроводностью; второй член — $u(dp/dx)$ соответствует работе сил давления. Величина $\Phi = \mu (du/dy)^2$ называется иногда диссипативным членом уравнения и определяет количество тепла, выделяемое в объеме необратимым образом при работе сил трения.

Краевыми условиями являются условия прилипания у стенки при $y=0$, $T=T_w(x)$, $u=0$, $v=0$ и условия вне слоя

$$y \rightarrow \infty; \quad u \rightarrow u_1; \quad T \rightarrow T_1.$$

Для решения системы уравнений (11.14) — (11.17) в частных производных необходимо задать также начальные значения по x . При $x=x_0$; $u=f(y)$; $T=f(y)$ [140].

Уравнения выписаны для течения вдоль плоской поверхности. В случае двумерного течения вдоль искривленной стенки, например, вдоль поверхности крыла, координата x направляется вдоль поверхности, а y — по нормали к ней (рис. 11.2). Если толщина пограничного слоя δ мала по сравнению с радиусом кривизны образующей r , то такая система координат будет приближенно ортогональной, и уравнения останутся без изменения.

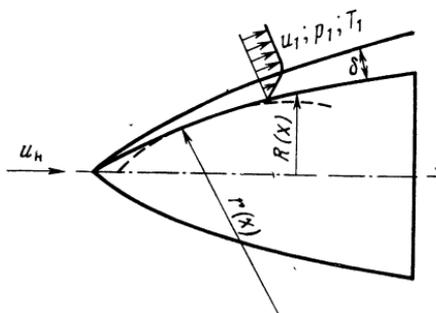


Рис. 11.3. Схема образования пограничного слоя на теле вращения с криволинейной образующей

Из оценок, которые можно сделать для этого случая, следует, что [140]

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} \sim \frac{1}{r'} \quad \text{или} \quad \frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\rho_n u_n^2}{r}$$

Если $r' \sim 1$, то $\partial p'/\partial y' \sim 1$ и $\Delta p \sim \delta/l$, где l — продольный размер тела. Под действием центробежных сил перепад давлений в пограничном слое на теле с криволинейной образующей хотя и остается малым, но значительно больше, чем на пластине. В случае осесимметричного двумерного течения, например, при внешнем обтекании осесимметричного тела и при течении в сопле (рис. 11.2, 11.3) уравнения движения и энергии остаются без изменения, а уравнение неразрывности при $\delta/R \ll 1$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u R) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v R) = 0, \quad (11.18)$$

где $R = R(x)$ — радиус вращения, т. е. расстояние по нормали от оси тела до точек образующей.

Существуют преобразования переменных [96, 140], с помощью которых система уравнений пограничного слоя на осесимметричном теле приводится к виду, совпадающему с видом уравнений для плоского течения.

11.3. ВТОРАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Для того чтобы лучше представить физическую картину теплообмена при переходе от малых скоростей к большим, приведем уравнение энергии к новому виду.

Умножим уравнение движения (11.14) на u и сложим его с уравнением энергии (11.16). Будем учитывать, что

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right)$$

и

$$u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial (u^2/2)}{\partial y} \right] - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Используя связь между статической температурой и температурой торможения

$$dT_0 = dT + d \frac{u^2}{2c_p},$$

получим вторую форму уравнения энергии:

$$\rho u c_p \frac{\partial T_0}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial (u^2/2)}{\partial y} \right]. \quad (11.19)$$

Наиболее интересный вид это уравнение принимает при $Pr = 1$, что приближенно справедливо для газов:

$$\rho u c_p \frac{\partial T_0}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T_0}{\partial y} \right). \quad (11.20)$$

Полученное уравнение по виду совпадает с уравнением (11.16) без двух последних членов, только вместо температуры газа в нем стоит температура торможения.

Уравнение (11.16) без двух последних членов соответствует случаю течения при малых значениях M , когда можно пренебрегать выделением тепла от трения и сжатия. Теплообмен при этом происходит только в силу разности между статической температурой потока и температурой стенки.

При малых скоростях потока мы использовали понятие коэффициента теплоотдачи, записывая выражение для теплового потока в виде

$$q_w = \alpha (T_1 - T_w).$$

Здесь отражен тот факт, что тепловой поток тела тем больше, чем больше перепад статических температур потока и стенки.

При больших скоростях (при $Pr = 1$) уравнение энергии (11.20) сохраняет такой же вид, как и при малых скоростях, но вместо температуры газа в нем стоит температура его торможения. Теплообмен в этом случае определяется перепадом между температурой заторможенного потока и температурой стенки

$$T_{01} - T_w.$$

Выражение для удельного теплового потока при $Pr = 1$ можно записать по аналогии с формулой для малых скоростей:

$$q_w = \alpha (T_{01} - T_w), \quad (11.21)$$

где коэффициент теплоотдачи α может не совпадать с его значением при малых скоростях и должен быть определен из решения уравнений пограничного слоя. Однако поскольку главная величина, определяющая теплообмен при больших скоростях, — перепад температур торможения — выделена в виде множителя, то отличие в α при малых и больших скоростях не очень велико.

В соответствии с формулой (11.21) поток будет нагревать тело ($q_w > 0$), если $T_{01} > T_w$. Статическая температура в потоке может быть выше или ниже температуры стенки. В последнем случае нагрев будет происходить из-за преобразования кинетической энергии газа в тепло в пограничном слое. Подробнее это явление будет рассмотрено в разд. 11.7.

11.4. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ В ПРИМЕНЕНИИ К УРАВНЕНИЯМ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Прежде чем перейти к рассмотрению известных решений системы уравнений (11.14) — (11.17), остановимся сначала на некоторых соображениях подобия, которые должны показать, от каких безразмерных параметров зависят эти решения.

Приведем уравнения к безразмерному виду, используя в качестве масштабов значения параметров газа в набегающем потоке ρ_n, μ_n, λ_n . В качестве масштаба для продольных размеров возьмем характерный размер тела l , для поперечных размеров — масштаб l/\sqrt{Re} , имеющий порядок толщины слоя δ .

Соответственно, для продольных скоростей используем масштаб u_n , а для поперечных — u_n/\sqrt{Re} . Масштабом температуры может служить, например, перепад ($T_{0n} - T_w$). Уравнения в безразмерной форме будут иметь вид ($c_p = \text{const}$)

$$\rho' u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \rho' v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{dp'}{dx'} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right); \quad (11.22)$$

$$\rho' u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + \rho' v' \frac{\partial T'}{\partial y'} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) + \frac{u_n^2}{c_p (T_{0n} - T_w)} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^2 + u' \frac{dp'}{dx'} \right]. \quad (11.23)$$

Граничные условия в безразмерной форме имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} \text{при} \quad y=0 \quad u=0, \quad T' = \frac{T_w}{T_{0n} - T_w}; \\ \text{при} \quad y \rightarrow \infty \quad u' \rightarrow \frac{u_1}{u_n}, \quad T' \rightarrow \frac{T_1}{T_{0n} - T_w}. \end{array} \right\} \quad (11.24)$$

Законы изменения вязкости и теплопроводности в выражении (11.17) возьмем в простейшей форме

$$\frac{\mu}{\mu_n} = \left(\frac{T}{T_n} \right)^{n_1}; \quad \frac{\lambda}{\lambda_n} = \left(\frac{T}{T_n} \right)^{n_2}.$$

Величина, стоящая перед квадратными скобками в уравнении (11.23), может быть представлена через известные критерии подобия

$$\frac{u_n^2}{c_p(T_{0n} - T_w)} = \frac{u_n^2}{c_p T_n} \frac{T_n}{T_{0n} - T_w} = \frac{(k-1) M_n^2}{\frac{k-1}{2} M_n^2 + 1 - \frac{T_w}{T_n}}, \quad (11.25)$$

где $k = c_p/c_v$ — показатель адиабаты.

Как видно, в уравнения и в граничные условия входят безразмерные величины — определяющие критерии подобия

$$M = \frac{u_n}{a_n}, \quad Pr = \frac{\mu_n c_p}{\lambda_n}, \quad \frac{T_w}{T_n}, \quad k, \quad n_1, \quad n_2. \quad (11.26)$$

Число Рейнольдса не входит непосредственно в систему (11.22) — (11.24), что связано со специальным выбором масштабов для длин и скоростей в поперечном направлении так, что безразмерные значения

$$y' = \frac{y}{l} \sqrt{Re} \quad \text{и} \quad v' = \frac{v}{u_n} \sqrt{Re} \quad \text{имеют одинаковый порядок с} \quad x' = \frac{x}{l} \quad \text{и} \quad u' = \frac{u}{u_n}.$$

В практических задачах требуется определить значения удельного теплового потока в стенку и напряжения трения —

$$q_w = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda_w (T_{0n} - T_w) \left(\frac{\partial T'}{\partial y'} \right)_{y'=0} \frac{\sqrt{Re}}{l}; \quad (11.27)$$

$$\tau_w = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu_w u_n \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)_{y'=0} \frac{\sqrt{Re}}{l}. \quad (11.28)$$

Соответствующие безразмерные критерии подобия можно представить в виде

$$Nu = \frac{q_w l}{(T_{0n} - T_w) \lambda_n} = \frac{\lambda_w}{\lambda_n} \left(\frac{\partial T'}{\partial y'} \right)_{y'=0} \sqrt{Re}; \quad (11.29)$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_n u_n^2} = \frac{\mu_w}{\mu_n} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)_{y'=0} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{Re}}. \quad (11.30)$$

Безразмерные значения $\left(\frac{\partial T'}{\partial y'} \right)_{y'=0}$ и $\left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)_{y'=0}$ должны быть получены из решения системы уравнений (11.22) — (11.23) и зависят только от определяющих параметров (11.26).

Следовательно, для ламинарного течения критериальные уравнения для расчета теплообмена и трения в точках поверхности $x' = x/l$ имеют вид

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = f_1 \left(M, Pr, \frac{T_W}{T_H}, k, n_1, n_2, \frac{x}{l} \right); \quad (11.31)$$

$$C_f \sqrt{Re} = f_2 \left(M, Pr, \frac{T_W}{T_H}, k, n_1, n_2, \frac{x}{l} \right). \quad (11.32)$$

Таким образом, при расчете ламинарного теплообмена и трения нет необходимости определять отдельно Nu и C_f , а можно вычислять комплексы Nu/\sqrt{Re} и $C_f \sqrt{Re}$ и далее по значениям этих комплексов определять коэффициент теплоотдачи α и напряжение трения τ_w . Эта особенность является общим свойством ламинарного течения. Если определить

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda_H}; \quad C_f = \frac{\tau_H}{\frac{1}{2} \rho_H u_H^2}; \quad Re = \frac{u_H \rho_H l}{\mu_H};$$

то

$$\alpha = \frac{Nu}{l} \lambda_H = \frac{Nu}{\sqrt{Re}} \cdot \frac{\lambda_H}{l} \sqrt{\frac{u_H \rho_H l}{\mu_H}},$$

и, используя далее условие $\lambda_H = \frac{\mu_H c_p}{Pr_H}$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{Nu}{\sqrt{Re}} \sqrt{\frac{\mu_H \rho_H u_H}{l}} \frac{c_p}{Pr_H}; \\ \tau_w &= \frac{1}{2} C_f \sqrt{Re} \sqrt{\frac{\mu_H \rho_H u_H^3}{l}}. \end{aligned} \right\} \quad (11.33)$$

аналогично

В этих формулах значения Nu/\sqrt{Re} и $C_f \sqrt{Re}$ представляют собой некоторые искомые безразмерные числа, зависящие от определяющих критериев подобия в соответствии с формулами (11.31) и (11.32).

С учетом результатов, полученных в разд. 11.2, можно утверждать, что для ламинарного течения в общем случае справедливы зависимости

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad \frac{v}{u_1} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad \frac{\alpha}{\rho_1 u_1 c_p} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}},$$

$$\text{и} \quad \frac{\tau_w}{\rho u_1^2} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

Рассмотрим далее безразмерное уравнение (11.23). Если отношение T_W/T_H отлично от единицы, то, как видно из уравнения (11.25), влияние двух последних членов будет существенным только при большом M и пренебрежимо мало, если $M \rightarrow 0$.

Это согласуется со сделанным в предыдущем разделе выводом о том, что выделение тепла при трении и сжатии существенно

только при больших значениях M . (Если $T_w/T_n=1$, то нагрев может вызываться только трением и сжатием и последние члены в уравнении (11.23) остаются конечными также и при $M \rightarrow 0$. Поскольку нагрев при этом пренебрежимо мал, то этот случай имеет чисто академическое значение).

11.5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Одной из интегральных характеристик пограничного слоя является толщина вытеснения

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{qu}{q_1 u_1}\right) dy. \quad (11.34)$$

Интегрирование от 0 до ∞ означает, что значение верхнего предела интеграла превышает значение толщины слоя δ . Физический смысл толщины вытеснения следует из выражения

$$\delta^* q_1 u_1 = \int_0^{\infty} (q_1 u_1 - cu) dy. \quad (11.35)$$

Рис. 11.4. Отклонение линий тока внутри пограничного слоя:
1—граница слоя; 2—линии тока



Интеграл соответствует уменьшению расхода жидкости, протекающей вдоль поверхности, из-за образования пограничного слоя. Из-за уменьшения расхода линии тока вблизи поверхности отклоняются так, как это было бы при обтекании идеальной жидкостью некоторого более толстого тела (рис. 11.4). Отсюда следует, что толщина вытеснения представляет собой некоторое условное расстояние, на которое нужно отодвинуть стенку, чтобы при обтекании тела идеальной жидкостью получить распределение давления таким же, как и при обтекании истинного контура тела вязкой жидкостью.

Следующая интегральная характеристика пограничного слоя — толщина потери импульса δ^{**} выражается формулой

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{qu}{q_1 u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy. \quad (11.36)$$

Величина δ^{**} характеризует потерю количества движения из-за трения.

Физический смысл величин толщины вытеснения и толщины потери импульса можно выявить из рассмотрения интегрального уравнения импульса. Для вывода интегрального уравнения используем уравнения (11.14) и (11.18) для осесимметричного течения. Приняв $R = \text{const}$, можно будет легко получить соответствующее соотношение для плоского течения.

Используя уравнение Бернулли для идеального газа

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_1 u_1 \frac{du_1}{dx}$$

и уравнение неразрывности для осесимметричного течения (11.18), преобразуем уравнение (11.14) и получим

$$\frac{\partial}{\partial x} (R \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (R \rho u v) = R \rho_1 u_1 \frac{du_1}{dx} + R \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{du}{dy} \right). \quad (11.37)$$

Умножая обе части уравнения (11.18) на $u_1(x)$, получаем

$$\frac{\partial (\rho R u u_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho R v u_1)}{\partial y} = R \rho u_1 \frac{du_1}{dx}. \quad (11.38)$$

Вычитая почленно обе части уравнения (11.37) из уравнения (11.38), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} [\rho R u (u_1 - u)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho R v (u_1 - u)] + R \frac{du_1}{dx} (\rho_1 u_1 - \rho u) = -R \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (11.39)$$

Интегрируя обе части равенства поперек пограничного слоя от 0 до ∞ , получаем интегральное уравнение количества движения

$$\frac{d}{dx} (R \rho_1 u_1^2 \delta^{**}) + \frac{du_1}{dx} R \rho_1 u_1 \delta^* = R \tau_w, \quad (11.40)$$

где δ^{**} и δ^* определяются выражениями (11.34) и (11.36), и $\tau_w = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$. Для случая течения вдоль пластины без градиента давления при $R = \text{const}$

$$\frac{d}{dx} (\rho_1 u_1^2 \delta^{**}) = \tau_w. \quad (11.41)$$

Сопrotивление трения пластины шириной b , длиной l , будет равно

$$W = b \int_0^l \tau_w dx = b \rho_1 u_1^2 \delta^{**}. \quad (11.42)$$

Таким образом, δ^{**} в этом случае определяет суммарное сопротивление трения. Покажем, что этот вывод справедлив и в общем случае течения на поверхности тела с криволинейной образующей (рис. 11.5).

Соппротивление тела произвольной формы складывается из сопротивления давления и сопротивления трения. Сопротивление давления при наличии пограничного слоя изменяется, во-первых, из-за оттеснения линий тока. Однако это сопротивление не связано непосредственно с вязкими потерями и может быть компенсировано путем исправления контура тела на толщину вытеснения. Кроме того, сопротивление давления может измениться от того, что в пристеночном слое на криволинейной поверхности

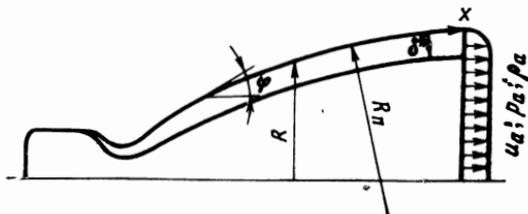


Рис. 11.5. К расчету потерь на трение в сопле

инерционные центробежные силы будут различными в случае распределения скорости и плотности, соответствующих течению идеальной жидкости, и в случае распределения скорости и плотности, соответствующих пограничному слою. Это изменение давления дает вклад в потери импульса в сопле и может быть названо вязким изменением давления. Рассмотрим влияние этих факторов на примере течения в сопле, хотя выводы останутся справедливыми и для случая внешнего обтекания тела.

Пусть параметры идеального сопла (без трения) заданы: G — расход; u_a , p_a , ρ_a — скорость, давление и плотность на срезе сопла (рис. 11.5). Если контур сопла исправлен (расширен) на толщину вытеснения, то эти величины останутся без изменения в реальном сопле [11].

Потери тяги в таком исправленном сопле из-за поверхностно-го трения и изменения сил давления равны

$$W = 2\pi \int_0^x R \tau_w \cos \varphi dx - 2\pi \int_0^x p_1 R \sin \varphi dx + 2\pi \int_0^{x_{ил}} p_1 R \sin \varphi dx_{ил} \quad (11.43)$$

где $R(x)$ — радиус вращения (расстояние по нормали от оси сопла до точек образующей);

$\varphi(x)$ — угол между касательной к образующей сопла и осью;

p_1 — давление на стенке сопла.

$x_{\text{ид}}$ относится к идеальному (не исправленному на толщину вытеснения) соплу.

Обозначим $R_n(x)$ радиус кривизны образующей исправленного сопла в меридиональной плоскости. Так как приращение $dx_{\text{ид}}$ связано со значением dx соотношением $dx_{\text{ид}} = dx \left(1 - \frac{\delta^*}{R_n}\right)$,

то

$$W = 2\pi \int_0^x R \tau_w \cos \varphi dx - 2\pi \int_0^x \Delta (p_1 R \sin \varphi) \times \\ \times dx - 2\pi \int_0^x p_1 \sin \varphi \frac{\delta^*}{R_n} dx. \quad (11.44)$$

Первый член в уравнении (11.44) определяет силы трения, второй — вязкое изменение давления, третий — увеличение силы тяги в силу увеличения поверхности сопла.

Для учета влияния центробежных сил инерции используем уравнение импульсов в проекции на ось y

$$\left| \frac{dp}{dy} \right| = \frac{\rho u_1^2}{R_n}. \quad (11.45)$$

Значение $dp/dy < 0$, если ось y направлена к центру кривизны. Если контур исправлен на толщину вытеснения, то давление p' на некоторой линии тока вне пограничного слоя одинаково в идеальном и реальном сопле, а на стенке оно различно в результате разного действия инерционных сил:

$$p_{1\text{ид}} = p' + \int_{\delta^*}^{y'} \frac{\rho_1 u_1^2}{R_n} dy = p' + \int_0^{y'} \frac{\rho_1 u_1^2}{R_n} dy - \frac{\rho_1 u_1^2}{R_n} \delta^*; \quad (11.46)$$

$$p_1 = p' + \int_0^{y'} \frac{\rho u^2}{R_n} dy. \quad (11.47)$$

Отсюда

$$\Delta p = p_1 - p_{1\text{ид}} = - \frac{\rho_1 u_1^2}{R_n} \delta^{**}. \quad (11.48)$$

Далее из геометрических соображений

$$\Delta \sin \varphi = \cos \varphi \frac{d\delta^*}{dx}; \quad \Delta R = \delta^* \cos \varphi; \quad \frac{1}{R_n} = - \frac{d\varphi}{dx}; \quad \frac{dR}{dx} = \sin \varphi. \quad (11.49)$$

Подставляя эти значения в уравнение (11.44), получаем

$$W = 2\pi \int_0^x R \tau_w \cos \varphi dx - 2\pi \int_0^x \frac{d\varphi}{dx} \rho_1 u_1^2 \delta^{**} R \sin \varphi dx -$$

$$\begin{aligned}
 & -2\pi \int_0^x R p_1 \cos \varphi \cdot \frac{d\delta^*}{dx} dx - 2\pi \int_0^x p_1 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \delta^* dx + \\
 & + 2\pi \int_0^x p_1 R \sin \varphi \cdot \delta^* \frac{d\varphi}{dx} dx. \quad (11.50)
 \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (11.50) значение $R\tau_w$ из равенства (11.40) и используя очевидные соотношения

$$\frac{d}{dx} \cos \varphi = -\frac{d\varphi}{dx} \sin \varphi \quad \text{и} \quad Q_1 u_1 \frac{du_1}{dx} = -\frac{dp}{dx},$$

имеем

$$\begin{aligned}
 W = & 2\pi \int_0^x \frac{d}{dx} (R Q_1 u_1^2 \delta^{**}) \cos \varphi dx + 2\pi \int_0^x R Q_1 u_1^2 \delta^{**} \frac{d \cos \varphi}{dx} dx - \\
 & - 2\pi \int_0^x R \frac{dp_1}{dx} \delta^* \cos \varphi dx - 2\pi \int_0^x R p_1 \frac{d\delta^*}{dx} \cos \varphi dx - \\
 & - 2\pi \int_0^x \frac{dR}{dx} p_1 \delta^* \cos \varphi dx - 2\pi \int_0^x R p_1 \delta^* \frac{d \cos \varphi}{dx} dx = 2\pi \int_0^x \frac{d}{dx} \times \\
 & \times (R Q_1 u_1^2 \delta^{**} \cos \varphi) dx - 2\pi \int_0^x \frac{d}{dx} (R p_1 \delta^* \cos \varphi) dx. \quad (11.51)
 \end{aligned}$$

Принимая в начале сопла $\delta^* = 0$ и $\delta^{**} = 0$, имеем окончательно выражение для потери тяги, тождественно равное (11.43),

$$W = 2\pi R_a Q_a u_a^2 \delta_a^{**} \cos \varphi_a - 2\pi R_a p_a \delta_a^* \cos \varphi_a. \quad (11.52)$$

Этот результат можно получить и непосредственно, сравнивая импульс в выходном сечении идеального (без трения) сопла и сопла, исправленного на толщину вытеснения, но с учетом трения.

Таким образом, толщина потери импульса на срезе сопла δ_a^{**} характеризует все потери количества движения, связанные с вязкостью и диссипацией энергии. Изменение количества движения, связанное с уменьшением расхода через пограничный слой, характеризуется толщиной вытеснения δ_a^* и не является потерей тяги сопла, поскольку может быть компенсировано изменением его геометрии.

В качестве интегральной характеристики теплового слоя используется толщина потери энергии δ_T^{**} . При сверхзвуковой скорости внешнего потока

$$\delta_T^{**} = \int_0^\infty \frac{qu}{Q_1 u_1} \frac{T_{01} - T_0}{T_{01} - T_w} dy. \quad (11.53)$$

Эта величина характеризует количество тепла, потерянное пограничным слоем теплопроводом в стенку. Для пояснения физического смысла этой величины рассмотрим интегральное уравнение энергий. Рассмотрим осесимметричное обтекание некоторого тела, температура которого поддерживается постоянной и равной T_w .

Выделим контур $abcd$ (рис. 11.6), где линия bc совпадает с линией тока, а точка c вне пограничного слоя, и примем, что на

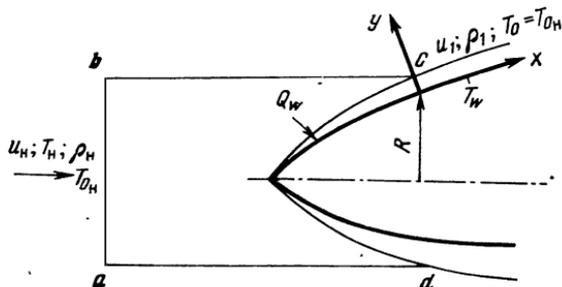


Рис. 11.6. К выводу интегрального уравнения энергии

тело набегаёт поток с параметрами u_n, T_{on}, ρ_n . В сечении cd параметры потока вне пограничного слоя u_1, T_{o1} .

Из условия баланса энергии тепловой поток, уходящий в стенку,

$$Q_w = m_{ab} c_p T_{on} - 2\pi c_p \int_0^y \rho u T_0 (R + y) dy.$$

Здесь m_{ab} — масса, втекающая в сечение ab , причем $m_{ab} = m_{cd}$, поскольку bc — линия тока

$$m_{ab} = 2\pi \int_0^y \rho u (R + y) dy.$$

Внутри тонкого пограничного слоя $y/R \ll 1$ и так как $T_{o1} = T_{on}$,

$$Q_w = 2\pi R c_p \rho_1 u_1 (T_{o1} - T_w) \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_1 u_1} \frac{T_{o1} - T_0}{T_{o1} - T_w} dy. \quad (11.54)$$

Окончательно получаем

$$Q_w = 2\pi R c_p \rho_1 u_1 (T_{o1} - T_w) \delta_T^{**}. \quad (11.55)$$

Из соотношения $Q_w = \int_0^x 2\pi R q_w dx$ следует, что

$$q_w = \frac{1}{2\pi R} \frac{dQ_w}{dx}. \quad (11.56)$$

После дифференцирования уравнения (11.55) с учетом равенства (11.56), получаем интегральное уравнение энергии

$$\frac{d}{dx} [Rc_p \rho_1 u_1 (T_{01} - T_w) \delta_r^{**}] = Rq_w. \quad (11.57)$$

Отсюда видно, что толщина потери энергии пропорциональна полному количеству тепла, отданному потоком в стенку на участке от начала развития пограничного слоя до рассматриваемого сечения, вне зависимости от распределения давления.

Уравнения (11.40) и (11.57) для определения толщин потери импульса и энергии являются вполне строгими. Однако они не являются замкнутыми, поскольку для их решения необходимо иметь связь между τ_w и δ^{**} , q_w и δ_T^{**} и между δ^{**} и δ^* . Благодаря тому, что уравнения (11.40) и (11.57) не зависят от режима течения в пограничном слое и их порядок ниже, чем порядок дифференциальных уравнений (11.14) — (11.16), они с успехом используются в приближенных расчетах и при обработке экспериментальных данных.

11.6. ТЕПЛОБМЕН ПРИ МАЛЫХ СКОРОСТЯХ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим сначала случай, когда жидкость можно считать несжимаемой: $\rho = \text{const}$, $c_p = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$ и число $M \ll 1$. Дифференциальные уравнения (11.22) и (11.23) при этом получают вид (штрихи над обозначениями отброшены)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (11.58)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\mu}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (11.59)$$

а уравнение неразрывности —

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (11.60)$$

Тепловой поток и напряжение трения определяются формулами (11.27) и (11.28):

$$q_w = \lambda (T_1 - T_w) \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \frac{\sqrt{Re}}{l}; \quad (11.61)$$

$$\tau_w = \mu u_n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \frac{\sqrt{Re}}{l}. \quad (11.62)$$

Используя формулу Ньютона, получаем

$$q_w = \alpha (T_1 - T_w) \text{ и } \alpha = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \frac{\sqrt{Re}}{l}.$$

Граничными условиями системы (11.58) — (11.60) будут:

$$\begin{aligned} \text{при} \quad & y=0 \quad u=0, \quad v=0, \quad T=T_w; \\ \text{при} \quad & y \rightarrow \infty \quad u \rightarrow u_1, \quad T \rightarrow T_1. \end{aligned} \quad (11.63)$$

Рассмотрим применение интегральных уравнений для расчета теплообмена в простейшем случае течения — вдоль плоской пластины ($dp/dx=0$). (Строгий метод решения системы дифференциальных уравнений пограничного слоя для пластины будет рассмотрен в разд. 11.11).

Интегральные соотношения имеют вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{v_w}{\rho u_1^2}; \quad (11.64)$$

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dx} = \frac{q_w}{c_p \rho u_1 (T_1 - T_w)}. \quad (11.65)$$

Выберем подходящие выражения для распределения скорости и температуры таким образом, чтобы они удовлетворяли важнейшим граничным условиям и, кроме того, содержали два свободных параметра, которые могли бы быть определены из уравнений (11.64) и (11.65). Примем

$$\frac{u}{u_\infty} = f \left[\frac{y}{\delta(x)} \right] = f(\eta) \quad (11.66)$$

и

$$\frac{T - T_w}{T_1 - T_w} = f_1 \left[\frac{y}{\delta_T(x)} \right] = f_1(\eta_1). \quad (11.67)$$

Здесь принято, что профили скорости и соответственно температуры в различных сечениях отличаются только масштабом координат и что вид функций $f(\eta)$ и $f_1(\eta_1)$ не зависит от x . Следствием принятого условия, обобщенного в разд. 11.10, является также то, что отношение $\xi = \delta_T / \delta = \text{const.}$

Результаты расчета будут тем точнее, чем ближе выбранные профили будут совпадать с истинными. Выберем вид функций таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям (11.63) и дополнительно — дифференциальным уравнениям (11.58) и (11.59) при $y=0$ — $(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0} = 0$ и $(\partial^2 T / \partial y^2)_{y=0} = 0$.

На внешней границе $y \rightarrow \infty$ примем условие плавности сопряжения профилей скорости и температуры с их значениями вне пограничного слоя.

Аппроксимируем функции f и f_1 полиномами третьей степени:

$$\frac{u}{u_1} = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3; \quad (11.68)$$

$$\frac{T - T_w}{T_1 - T_w} = b_0 + b_1 \eta_1 + b_2 \eta_1^2 + b_3 \eta_1^3. \quad (11.69)$$

Для определения коэффициентов a_i и b_i используем восемь условий на границах, оставив значения δ и δ_T свободными параметрами. Тогда получаем

$$\frac{u}{u_1} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3; \quad (11.70)$$

$$\frac{T - T_W}{T_1 - T_W} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3. \quad (11.71)$$

Толщина потери энергии может быть представлена в виде

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{T - T_W}{T_1 - T_W} \right) dy = \int_0^{\delta_T} \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \times \\ \times \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3 \right] dy.$$

Если ξ не сильно отличается от единицы, то, интегрируя, получаем

$$\delta_T^{**} = \delta \left(\frac{3}{20} \xi^2 - \frac{3}{280} \xi^4 \right). \quad (11.72)$$

Соответственно толщина потери импульса равна

$$\delta^{**} = \delta \frac{39}{280}; \quad (11.73)$$

напряжение трения на стенке

$$\tau_W = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \mu \frac{u_1}{\delta}; \quad (11.74)$$

тепловой поток в стенку

$$q_W = \lambda \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \lambda \frac{T_1 - T_W}{\delta_T} = \frac{3}{2} \lambda \frac{1}{\xi} \frac{T_1 - T_W}{\delta}. \quad (11.75)$$

Подставляя выражения (11.72) и (11.73) в интегральное уравнение импульса, имеем

$$\delta d\delta \frac{39}{280} = \frac{3}{2} \mu \frac{u_1}{\rho u_1^2} dx \quad (11.76)$$

$$\text{и} \quad \delta = 4,64 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_1}}. \quad (11.77)$$

Отсюда напряжение трения на стенке

$$\frac{\tau_W}{\rho u_1^2} \sqrt{\text{Re}} = 0,323. \quad (11.78)$$

Подставляя выражения (11.72) и (11.75) в интервальное уравнение энергии (11.65), получаем (при $\xi = \text{const}$)

$$\left(\frac{3}{20}\xi^3 - \frac{3}{280}\xi^5\right)\delta d\delta = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{c_p \rho u_1} dx. \quad (11.79)$$

Разделив почленно левую и правую части уравнения (11.79) на уравнение (11.76), имеем

$$\frac{1}{\text{Pr}} = \frac{14}{13}\xi^3 - \frac{1}{13}\xi^5. \quad (11.80)$$

Пренебрегая вторым членом в правой части, найдем

$$\xi \approx \frac{1}{\sqrt[3]{\text{Pr}}}. \quad (11.81)$$

Подставляя равенства (11.77) и (11.81) в выражение (11.75), имеем выражение для теплового потока:

$$\frac{q_w}{\rho u_1 c_p} \sqrt{\text{Re}} = 0,323 \text{Pr}^{-2/3}, \quad (11.82)$$

или, сравнивая с выражением (11.78),

$$C_H = \frac{1}{2} C_f \cdot \text{Pr}^{-2/3} = \frac{0,323}{\sqrt{\text{Re}}} \text{Pr}^{-2/3}, \quad (11.83)$$

где коэффициент теплоотдачи $C_H = \frac{q_w}{\rho c_p u_1 (T_1 - T_w)}$

и коэффициент трения $C_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_1^2}$.

Точные решения для этого случая дают другой численный коэффициент

$$C_H = \frac{1}{2} C_f \cdot \text{Pr}^{-2/3} = \frac{0,332}{\sqrt{\text{Re}}} \text{Pr}^{-2/3}. \quad (11.84)$$

При значении $\text{Pr} = 1$ уравнение (11.84) переходит в уравнение гидродинамической аналогии между трением и теплообменом.

Для этого случая справедливо также условие

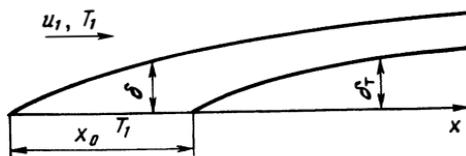
$$\frac{T - T_w}{T_1 - T_w} = \frac{u}{u_1}, \quad (11.85)$$

в чем легко убедиться, подставляя значение T из условия (11.85) в уравнение (11.59) и граничные условия (11.63), которые становятся тождественными с уравнением (11.58) и соответствующими граничными условиями.

Аналогичным образом может быть получена формула для расчета теплообмена на пластине, имеющей переменную температуру стенки. Простейшим случаем является случай ступенча-

того изменения температуры, когда передняя часть пластины длиной x_0 имеет температуру, равную температуре внешнего потока T_1 , а остальная часть пластины при $x > x_0$ поддерживается при температуре T_w (рис. 11.7). При этом на передней части пластины отсутствует теплообмен, динамический пограничный слой развивается от точки $x=0$, а тепловой — от точки $x=x_0$. Отношение толщин слоев $\xi = \delta_T / \delta$ будет являться функцией x/x_0 .

Рис. 11.7 Развитие пограничного слоя на пластине со ступенчатой температурой



Решение уравнений (11.64) и (11.65) дает для этого случая

$$\xi = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{Pr}}} \sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}} \quad (11.86)$$

и

$$\frac{q_w}{\rho_1 u_1 c_p} \sqrt{\text{Re}} = \frac{0,323 \cdot \text{Pr}^{-2/3}}{\sqrt[3]{1 - (x_0/x)^{3/4}}} (T_1 - T_w). \quad (11.87)$$

Поскольку задача решалась в рамках несжимаемой жидкости, то распределение температуры не оказывает обратного влияния на распределение скорости, т. е. решение уравнения (11.64) не зависит от решения уравнения (11.65); напряжение трения при этом может по-прежнему рассчитываться по формуле (11.78).

Используя линейность дифференциального уравнения энергии в несжимаемой жидкости, полученный результат легко распространить на случай, когда температура пластины изменяется ступенчато на величины ΔT_{w1} , ΔT_{w2} , ΔT_{w3} ... в точках x_1 , x_2 , x_3 , x_i .

Тепловой поток в стенку может быть представлен как сумма

$$q_w = \sum_1^n \alpha_i \Delta T_{wi}$$

Здесь

$$\Delta T_{wi} = T_1 - T_{wi} \quad \text{и} \quad \alpha_i = \frac{0,323 \text{Pr}^{-2/3}}{\sqrt[3]{1 - (x_i/x)^{3/4}}} \frac{\rho_1 u_1 c_p}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (11.88)$$

рассчитываются для каждого i -го участка в предположении, что тепловой слой начинается в точке x_i .

11.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И СКОРОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ ПОТОКА

Рассмотрим в качестве примера течение вдоль плоской пластины. При этом $dp/dx=0$ и вне пограничного слоя $u_1=\text{const}$, $T_1=\text{const}$.

Если число $Pr=1$ и $c_p=\text{const}$, то уравнения движения (11.14) для пластины и энергии в форме (11.20) примут вид

$$\zeta u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (11.89)$$

$$\zeta u \frac{\partial T_0}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial y} \right). \quad (11.90)$$

Граничные условия:

при $y=0$ $u=0$, $T_0=T_W$
 $y \rightarrow \infty$ $u \rightarrow u_1$, $T_0 \rightarrow T_{01}$.

Уравнения (11.89) и (11.90) аналогичны по форме. Легко показать, что условие

$$\frac{T_0 - T_W}{T_{01} - T_W} = \frac{u}{u_1} \quad (11.91)$$

является решением уравнения (11.90). Действительно, если определить

$$T_0 = \frac{u}{u_1} (T_{01} - T_W) + T_W$$

и подставить в уравнение (11.90), то уравнение (11.90) и граничное условие для температуры торможения станут тождественны уравнению (11.89) с соответствующим граничным условием. Следовательно, в этом случае справедливо условие подобия профилей скорости и температуры торможения (11.91).

Полученное математическое условие имеет ясный физический смысл и является следствием того, что перенос количества движения и энергии при $Pr=1$ происходит с помощью одинаковых молекулярных процессов.

При малых скоростях $T_0=T$ и, следовательно, профили скорости и статической температуры подобны:

$$\frac{T - T_W}{T_1 - T_W} = \frac{u}{u_1}$$

Распределения скорости и температуры при малых скоростях потока, когда энтальпия газа значительно больше кинетической энергии ($M < 1$) представлены на рис. 11.8. Как видно, при приближении к стенке значения температуры газа в пограничном слое монотонно стремятся к значению, равному температуре стенки.

При больших скоростях потока ($M \gg 1$) монотонным будет только изменение температуры торможения. Распределение статической температуры из-за выделения тепла при торможении

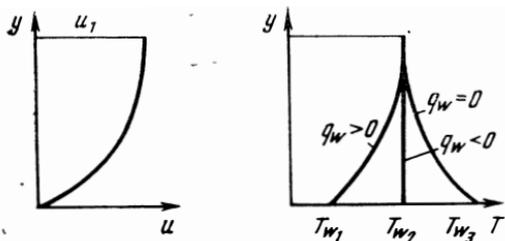


Рис. 11.8. Примерное распределение скорости и температуры в пограничном слое при $M < 1$

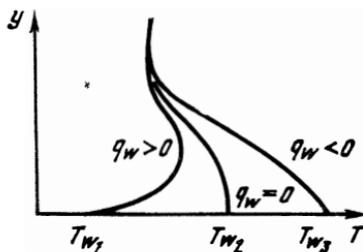


Рис. 11.9. Примерное распределение температуры в пограничном слое при $M > 1$

газа в пограничном слое может иметь другой вид, зависящий от задания условий теплообмена на стенке. На рис. 11.9 показан примерный вид кривых. Для исследования этих кривых рассмотрим некоторые частные случаи.

11.7.1. Теплоизолированная поверхность при $Pr = 1$

Рассмотрим случай, когда стенка теплоизолирована, т. е. на ней отсутствует теплообмен, и число $Pr = 1$.

В действительности на поверхности тела всегда имеет место теплообмен в виде, например, отвода тепла внутрь тела или излучения во вне. Однако для исследования полезно рассмотреть некоторую условную теплоизолированную или адиабатную стенку. В этом случае тепловой поток равен нулю:

$$q_w = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = 0,$$

но

$$T = T_0 - \frac{u^2}{2c_p}$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T_0}{\partial y} - \frac{u}{c_p} \frac{\partial u}{\partial y}$$

на стенке $u = 0$ и поэтому $(\partial T / \partial y)_w = (\partial T_0 / \partial y)_w$.

Уравнение (11.90) должно решаться при граничных условиях, когда при $y = 0$ $\partial T_0 / \partial y = 0$, а при $y \rightarrow \infty$ $T_0 = T_{01}$, и имеет тривиальное решение $T_0 = T_{01}$.

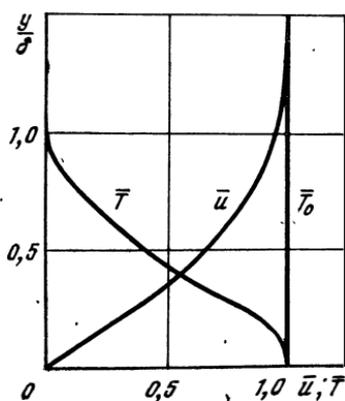
Всюду в пограничном слое при $Pr = 1$ устанавливается постоянная температура торможения, равная температуре заторможенного набегающего потока. На стенке $T_0 = T_w$ и, следовательно

но, температура теплоизолированной поверхности также равна температуре торможения внешнего потока. Распределение статической температуры определяется из формулы

$$T = T_0 - \frac{u^2}{2c_p}$$

Отсюда

$$T = T_1 + \frac{u_1^2}{2c_p} \left(1 - \frac{u^2}{u_1^2} \right). \quad (11.92)$$



$$T = T_0 + \frac{u^2}{2c_p}$$

Рис. 11.10. Распределение безразмерной скорости, температуры и температуры торможения в пограничном слое при $q_w = 0$; $Pr = 1$

Температура плавно изменяется от температуры внешнего потока до температуры T_{01} у стенки. На рис. 11.10 приведены зависимости безразмерных величин

$$\bar{u} = \frac{u}{u_1}, \quad \bar{T} = \frac{T - T_1}{u_1^2 / (2c_p)} \quad \text{и} \quad \bar{T}_0 = \frac{T_0 - T_1}{u_1^2 / (2c_p)}$$

в зависимости от безразмерной координаты y/δ . При больших скоростях потока температура газа в пограничном слое выше, чем вне его. Работа сил трения в каждой точке внутри слоя порождает тепло. Выделение тепла уравнивается непрерывным отводом тепла из области с высокой температурой в область с меньшей температурой. При $Pr = 1$ оба процесса уравновешены, когда

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p} = T_{01}$$

11.7.2. Распределение температуры в пограничном слое на теплоизолированной поверхности при $Pr \neq 1$

Если число Прандтля $Pr \neq 1$, то на теплоизолированной стенке устанавливается температура, отличная от температуры торможения внешнего потока. Для газов $Pr < 1$; например, у возду-

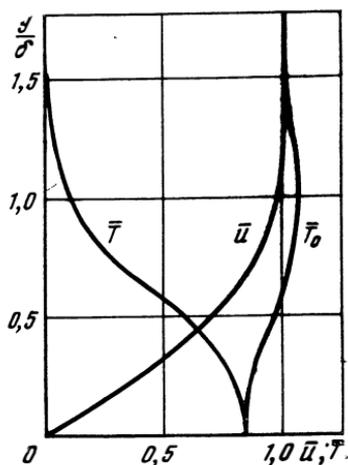
ха $Pr \approx 0,71$. В этом случае температура теплоизолированной стенки ниже температуры торможения внешнего потока.

Обозначим температуру, которую принимает теплоизолированная стенка, через T_e . При $Pr < 1$ процессы выделения тепла вследствие трения и отвода тепла теплопроводностью и конвективным переносом находятся в равновесии, при этом $T_e < T_0$.

Введем понятие — коэффициент восстановления температуры $r = (T_e - T_1) / (T_{01} - T_1)$ или иначе

$$r = \frac{T_e - T_1}{u_1^2 / (2c_p)} T_e = T_1 + r \frac{u_1^2}{2c_p} = T_1 \left(1 + r \frac{k-1}{2} M_1^2 \right).$$

Рис. 11.11. Распределение безразмерной скорости, температуры и температуры торможения в пограничном слое при $q_w = 0$; $Pr < 1$



Коэффициент восстановления температуры r показывает, какая доля кинетической энергии внешнего потока затрачена на повышение теплосодержания газа у стенки. При ламинарном течении вдоль плоской пластины $r \approx \sqrt{Pr}$. Для воздуха $r \approx 0,84$ и

$$T_e = T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} \sqrt{Pr} M_1^2 \right) \quad (11.93)$$

или при $k = 1,4 \quad T_e = T_1 (1 + 0,168 M_1^2)$.

Распределение скорости, температуры и температуры торможения на теплоизолированной поверхности при $Pr < 1$ показано на рис. 11.11. Как видно, температура торможения у стенки ниже температуры торможения внешнего потока. Из этой области часть энергии передалась во внешнюю часть пограничного слоя, вследствие чего температура торможения в этой части стала больше температуры торможения внешнего потока.

В случае когда скорость внешнего потока переменна ($u_1 \neq \text{const}$ и $dp/dx \neq 0$), коэффициент восстановления изменяется

по длине. Расчеты показывают, однако, что местное значение коэффициента восстановления $r = \frac{T_e - T_1}{u_1^2 / (2c_p)}$ достаточно близко его значению на пластине $r \approx \sqrt{\text{Pr}}$

и

$$T_e = T_H + \frac{u_H^2}{2c_p} \left[1 + \frac{u_1^2}{u_H^2} (\sqrt{\text{Pr}} - 1) \right]. \quad (11.94)$$

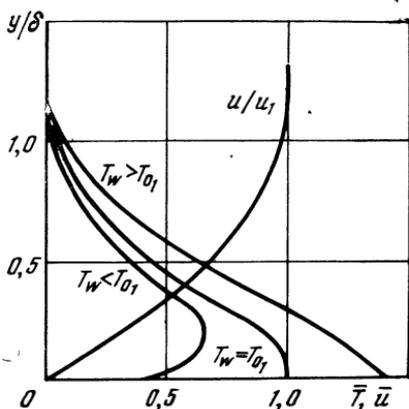


Рис. 11.12. Распределение безразмерной скорости и температуры при наличии теплообмена: $\text{Pr}=1$

В передней критической точке, где $u_1=0$, $T_e=T_{0H}$; в точках, где скорость близка к максимальной, т. е. где

$$\frac{u_{\max}^2}{2c_p} = T_{0H},$$

$$T_e \approx \sqrt{\text{Pr}} \cdot T_{0H}.$$

11.7.3. Распределение температуры в пограничном слое сжимаемого газа на пластине при наличии теплообмена

Рассмотрим сначала случай $\text{Pr}=1$. Тогда $(T_0 - T_w)/(T_{01} - T_w) = u/u_1$. Учитывая, что $T_0 = T + u^2/(2c_p)$ после преобразования получим

$$T = T_w + (T_1 - T_w) \frac{u}{u_1} + \frac{u_1^2}{2c_p} \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1} \right). \quad (11.95)$$

Так как $\frac{u_1^2}{2c_p} = \frac{k-1}{2} M_1^2 T_1$, то

$$\frac{T}{T_1} = \frac{T_w}{T_1} + \left(\frac{T_1 - T_w}{T_1} \right) \frac{u}{u_1} + \frac{k-1}{2} M_1^2 \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1} \right). \quad (11.96)$$

Если число M мало ($M \approx 0$), то получается известное соотношение для малых скоростей:

$$\frac{T - T_w}{T_1 - T_w} = \frac{u}{u_1}.$$

Распределение температуры и скорости поперек пограничного слоя показано на рис. 11.12.

Для случая $Pr=1$, если $T_w < T_{01}$, стенка будет нагреваться. При $T_w > T_{01}$ стенка будет охлаждаться, при $T_w = T_{01}$ тепловой поток $q_w = \lambda_w (\partial T / \partial y)_w = 0$.

Если $T_w < T_{01}$, то кривая распределения температуры имеет максимум. Во внешней части пограничного слоя газ нагревается от трения. Внутри пограничного слоя температура газа может быть значительно выше температуры потока. Нагретый газ далее передает тепло к стенке. Из-за отвода тепла в стенку температура газа вблизи стенки понижается и непосредственно на охлажденной стенке $(\partial T / \partial y)_w > 0$.

Оценим максимальное значение температуры. Полагая $Pr=1$, дифференцируем выражение для определения T по y и приравняем производную $\partial T / \partial y$ нулю. Значение T_{\max} определится по формуле

$$\frac{T_{\max} - T_w}{T_{01} - T_w} = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - T_w/T_1}{\frac{k-1}{2} M_1^2} + 1 \right). \quad (11.97)$$

Если $M \gg 1$ или $T_w \approx T_1$, то $(T_{\max} - T_w) / (T_{01} - T_w) = 1/4$. Например, при числе полета $M \approx 20$, $T_\infty = 250$ К; $T_w \approx 1000$ К; $T_{\max} \approx 5700$ К. Таким образом, хотя температура потока у стенки не превышает 1000 К, внутри пограничного слоя устанавливается весьма высокая температура.

Если $Pr \neq 1$, то распределение температур на стенке с теплообменом имеет аналогичный вид. Однако поскольку при отсутствии теплообмена на стенке устанавливается температура, отличная от температуры торможения ($T_e \neq T_{01}$), то стенка будет охлаждаться внешним потоком, если ее поддерживать при температуре $T_w > T_e$, и будет нагреваться внешним потоком, если ее поддерживать при температуре $T_w < T_e$.

11.8. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОТДАЧИ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

Как уже указывалось, при больших скоростях, для того чтобы учесть выделение тепла из-за диссипации кинетической энергии при $Pr=1$, формула для расчета теплообмена должна быть записана в виде

$$q_w = \alpha (T_{01} - T_w). \quad (11.98)$$

Здесь T_{01} — температура торможения вне пограничного слоя, характеризующая полную тепловую энергию потока.

Однако как следует из рассмотрения распределения температуры на теплоизолированной поверхности при $Pr \neq 1$, в тепло на стенке преобразуется только часть кинетической энергии. Максимально достигаемая при этом температура $T_e = T_1 + r \frac{u_1^2}{2c_p}$ может быть использована как величина, характеризующая тепловую энергию внешнего потока для расчета теплообмена, и выражение для расчета теплообмена может быть записано в виде

$$q_w = \alpha (T_e - T_w). \quad (11.99)$$

Эта формула имеет еще то преимущество, что в случае теплоизолированной стенки, когда $T_w = T_e$, при любом α значение $q_w \equiv 0$. При $Pr = 1$ формулы (11.98) и (11.99) совпадают.

Следует указать, что в формуле (11.99) значение T_e является некоторой эффективной температурой, численно совпадающей с температурой теплоизолированной поверхности. Внутри пограничного слоя на охлажденной поверхности температура во всех точках меньше, чем T_e .

11.9. СВЯЗЬ МЕЖДУ ТРЕНИЕМ И ТЕПЛООТДАЧЕЙ

В разд. 11.6 при расчете пограничного слоя на плоской пластине в несжимаемой жидкости методом интегральных соотношений были получены выражения (11.83) и (11.84), связывающие между собой коэффициенты трения и теплообмена при малых скоростях потока.

Покажем теперь, что, используя определение коэффициента теплообмена по формулам (11.98) и (11.99), можно получить аналогичные, более общие, выражения, справедливые при течении газа с большими скоростями.

Напряжение трения определяется по формуле

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \mu_w u_1 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_w; \quad \bar{u} = \frac{u}{u_1}.$$

Для случая течения вдоль плоской пластины при $Pr = 1$ справедливо условие (11.91). Тогда

$$\tau_w = \frac{\mu_w u_1}{T_{01} - T_w} \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} \right)_w.$$

При

$$y = 0 \quad \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} \right)_w = \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w.$$

Отсюда

$$\tau_w = \frac{\mu_w u_1}{(T_{01} - T_w) \lambda_w} \cdot \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w.$$

Поскольку

$$Pr = \frac{\mu_w \cdot c_p}{\lambda_w} = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = q_w,$$

то

$$\frac{\tau_w}{u_1} = \frac{q_w}{c_p(T_{01} - T_w)}.$$

Переходя к безразмерным величинам, получаем

$$\frac{q_w}{\rho_1 u_1 c_p (T_{01} - T_w)} = \frac{\tau_w}{\rho_1 u_1^2},$$

откуда

$$C_H = \frac{1}{2} C_f. \quad (11.100)$$

Используя условие $Nu \equiv C_H \cdot Re \cdot Pr$, можно записать вместе (11.100)

$$Nu = \frac{1}{2} C_f Re. \quad (11.101)$$

Найденные выражения являются условием аналогии между теплообменом и трением. Уравнения (11.100) и (11.101) справедливы при больших и малых скоростях.

Если число Pr не равно единице, то в эти уравнения необходимо внести поправки. Аппроксимируя расчеты, проведенные на пластине при $Pr \neq 1$, получаем уравнение

$$Nu = \frac{1}{2} C_f \cdot Re \cdot Pr^{1/3}. \quad (11.102)$$

При этом коэффициент теплоотдачи α определяется в соответствии с формулой (11.99).

В потоке с продольным градиентом давления эта связь имеет более сложный вид:

$$Nu = S C_f \cdot Re \cdot Pr^n. \quad (11.103)$$

Здесь S и n зависят от распределения давления.

11.10. ТЕПЛОБМЕН ПРИ ТЕЧЕНИИ ВДОЛЬ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим простейший случай течения вдоль плоской пластины, когда скорость и давление потока вне пограничного слоя постоянны. Этот случай имеет большое практическое значение. При обтекании боковой поверхности корпуса летательного аппарата, поверхности крыла сверхзвуковым потоком и в ряде других случаев изменение давления незначительно и для расчета теплообмена можно использовать формулы, полученные для пластины.

Рассмотрим пластину рис. 11.1. Параметры течения вне пограничного слоя $u_1 = u_n$; $\rho_1 = \rho_n$; $T_n = T_1$. Уравнения пограничного

слоя имеют вид (11.14) — (11.16) при $dp/dx=0$. Для определения теплового потока будем использовать соотношение (11.99)

$$q_w = \alpha(T_e - T_w)$$

и соответственно для числа Nu —

$$Nu = \frac{q_w l}{(T_e - T_w) \lambda_n} \quad (11.104)$$

Поскольку

$$\frac{T_e - T_w}{T_{0H} - T_w} = f(M, Pr),$$

общий вид критериальных зависимостей (11.31) — (11.32) остается без изменения:

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = f_1 \left(M, Pr, \frac{T_w}{T_n}, k, n_1, n_2, \frac{x}{l} \right).$$

$$C_f \sqrt{Re} = f_2 \left(M, Pr, \frac{T_w}{T_n}, k, n_1, n_2, \frac{x}{l} \right).$$

Однако на пластине нельзя указать характерный размер l , входящий в определяющие критерии подобия.

Действительно, тепловой поток в какой-либо точке пластины не должен зависеть от изменения общей длины пластины l . Это связано с тем, что вверх по потоку в направлении уменьшения x влияние длины пластины через тонкий пограничный слой, описываемый дифференциальными уравнениями параболического типа, передаваться не может. Физически точки, лежащие ниже по потоку, оказывают влияние на точки вверх по потоку, однако оно заметно только на расстоянии порядка толщины слоя δ . Поэтому пластину длиной l можно рассматривать как полубесконечную.

Отсюда следует, что в критериальных зависимостях (11.31), (11.32) необходимо отыскать такую комбинацию переменных, при которой выпадает длина l . Исходя из этого, получаем условие

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} \sim \left(\frac{x}{l} \right)^{-1/2} \quad \text{и} \quad C_f \sqrt{Re} \sim \left(\frac{x}{l} \right)^{-1/2},$$

и критериальные зависимости для течения на пластине приобретают вид

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = f_3 \left(M_1, Pr_1, \frac{T_w}{T_1}, k, n_1, n_2 \right); \quad (11.105)$$

$$C_f \sqrt{Re_x} = f_4 \left(M_1, Pr_1, \frac{T_w}{T_1}, k, n_1, n_2 \right), \quad (11.106)$$

где

$$Nu_x = \frac{d_x}{\lambda_1}; \quad Re_x = \frac{u_1 \rho_1 x}{\mu_1}.$$

Аналогично можно получить выражение для линейного размера пограничного слоя, например, для его толщины:

$$\frac{\delta}{x} \sqrt{\text{Re}_x} = f_5 \left(M_1, \text{Pr}, \frac{T_w}{T_1}, k, n_1, n_2 \right). \quad (11.107)$$

Для любой точки x пластины при ламинарном режиме

$$\alpha \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \tau_w \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \delta \sim \sqrt{x}, \quad v \sim \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Из формулы (11.105) следует очень важный вывод, что в любой точке пластины отношение $\text{Nu}_x/\sqrt{\text{Re}_x}$ постоянно. Поэтому, при расчете теплообмена целесообразно не рассматривать отдельно критерии подобия Nu_x и Re_x , а использовать новый комбинированный критерий $\text{Nu}_x/\sqrt{\text{Re}_x}$, что и будет нами сделано при расчете теплообмена.

Отнеся физические параметры ρ , μ , λ к условиям при температуре стенки T_w , получаем расчетные формулы:

$$q_w = \frac{\text{Nu}_w}{\sqrt{\text{Re}_w}} \sqrt{\frac{u_1 \rho_w \mu_w}{x}} \frac{c_p (T_e - T_w)}{\text{Pr}_w}, \quad (11.108)$$

$$\text{где} \quad T_e = T_1 \left(1 + r \frac{k-1}{2} M_1^2 \right) = T_1 (1 + r\omega), \quad (11.109)$$

$$\text{а} \quad \omega = \frac{k-1}{2} M_1^2 \quad (11.110)$$

$$\text{и} \quad \tau_w = \frac{1}{2} (C_f)_w \sqrt{\text{Re}_w} \sqrt{\frac{u_1^3 \rho_w \mu_w}{x}}. \quad (11.111)$$

В этих формулах остаются неизвестными численные значения комплексов $\text{Nu}_w/\sqrt{\text{Re}_w}$ и $(C_f)_w \sqrt{\text{Re}_w}$, являющиеся функциями определяющих критериев подобия

$$M_1, \text{Pr}_w, \frac{T_w}{T_1}, k, n_2, n_1.$$

Вид этих функций может быть получен на основании решения уравнений (11.14) — (11.17) или из экспериментов.

11.11. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕНА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛАСТИНЕ

Уравнения пограничного слоя в частных производных для пластины могут быть преобразованы в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Такая возможность связана с тем, что профили скорости и температуры в разных сечениях

подобны друг другу в переменных y/δ , или с учетом уравнения (11.107) имеет место условие

$$\frac{u}{u_1} = \bar{u}(\eta) \text{ и } \frac{T}{T_1} = \bar{T}(\eta),$$

где
$$\eta = y \sqrt{\frac{1}{2} \frac{u_1 \rho_1}{\mu_1 x}}; \quad \eta \sim \frac{y}{\delta}.$$

Уравнения пограничного слоя (11.14) — (11.17) с учетом условия $dp/dx=0$, справедливого при обтекании плоской пластины, после перехода от независимых переменных x, y к переменным x, η приводятся к виду

$$-\left(\int_0^\eta \bar{\rho} \bar{u} d\eta\right) \bar{u}' = (\bar{\mu} \bar{u}')'; \quad (11.112)$$

$$-\left(\int_0^\eta \bar{\rho} \bar{u} d\eta\right) \bar{T}' = \left(\frac{\bar{\mu}}{\text{Pr}} \bar{T}'\right)' + \bar{\mu} (\bar{u}')^2 (k-1) M_1^2. \quad (11.113)$$

Здесь

$$T' = dT/d\eta; \quad u' = du/d\eta;$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1}; \quad \frac{u_1^2}{c_p T_1} = (k-1) M_1^2; \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_1}.$$

Обозначая

$$\int_0^\eta \bar{\rho} \bar{u} d\eta = \bar{W}; \quad \bar{u}' = \tau; \quad \bar{T}' = q,$$

получаем систему пяти обыкновенных уравнений первого порядка;

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}' &= \tau; \quad \bar{W}' = \bar{\rho} \bar{u}; \\ (\bar{\mu} \tau)' &= -\tau \bar{W}; \quad \bar{T}' = q; \\ \left(\frac{\bar{\mu}}{\text{Pr}} q\right)' &= -q \bar{W} - \bar{\mu} \tau^2 (k-1) M_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (11.114)$$

с граничными условиями

при $y=0 \quad \bar{u} = \bar{W} = 0, \quad \bar{T} = \bar{T}_w;$

при $y \rightarrow \infty \quad \bar{u} \rightarrow 1, \quad \bar{T} \rightarrow 1.$

Система (11.114) может быть решена на вычислительной машине одним из стандартных методов. Результаты расчетов системы (11.114), проведенных в широком диапазоне изменения $M, T_w/T_1, \text{Pr}$ и при различных предположениях о зависимости вязкости и теплопроводности от температуры, могут быть представлены в виде

$$\frac{\text{Nu}_w}{\sqrt{\text{Re}_w}} = 0,332 \text{Pr}^{1/3} K.$$

Соответственно из уравнения (11.108) следует:

$$q_w = 0,332K \sqrt{\frac{\mu_1 \varrho_w \mu_w}{x}} c_p (T_e - T_w) \text{Pr}^{-2/3} = \\ = 0,332K \frac{\varrho_w \mu_1 c_p (T_e - T_w)}{\sqrt{\text{Re}_w}} \text{Pr}^{-2/3}. \quad (11.115)$$

Средний тепловой поток на пластине длиной x определяется по формуле

$$q_{cp} = \frac{1}{x} \int_0^x q_w dx = 2q_w,$$

а полное количество тепла, переданное стенке с шириной, равной единице, — по формуле

$$Q_w = q_{cp} x = 2q_w x. \quad (11.116)$$

Коэффициент K — фактор, учитывающий влияние сжимаемости:

$$K = K(\omega, T_w/T_1, n_1, n_2).$$

Для значения K можно предложить различные аппроксимационные зависимости. Например, используя представления о форме профиля температуры [5],

$$K = \left(\frac{\mu^* \varrho^*}{\mu_w \varrho_w} \right)^{1/3} \frac{\mu_1 \varrho_1}{\mu^* \varrho^*} \frac{1}{15} \frac{T_w}{T_e}. \quad (11.117)$$

Здесь звездочка означает, что данная величина отнесена к максимальной температуре $T^* = T_{\max}$ [см. (11.97)], либо при $T^* = T_w$, если $T_w \geq T_e$, либо при $T^* = T_1$, если $\omega < 1 - \frac{T_w}{T_1}$.

При использовании понятий определяющей температуры

$$T^{(0)} = T_1 + 0,5(T_w - T_1) + 0,22\omega$$

получим

$$K = \left(\frac{\mu^{(0)} \varrho^{(0)}}{\mu_w \varrho_w} \right)^{0,5} \frac{\text{Pr}_w}{\text{Pr}^{(0)}}, \quad (11.118)$$

где верхний индекс (0) означает, что соответствующие величины берутся при определяющей температуре.

В формулы (11.118) и (11.117) не входит в явном виде отношение температур (T_w/T_1). Благодаря этому они пригодны при различных зависимостях физических свойств от температуры. Если $\mu \sim T^n$, $\lambda \sim T^n$ и $\text{Pr} = \text{const}$, то результаты расчетов хорошо аппроксимируются зависимостью

$$K = \left(\frac{\mu_1 \varrho_1}{\mu_w \varrho_w} \right)^{1/2} \left(0,45 + 0,55 \frac{T_w}{T_1} + 0,18\omega \text{Pr}^{1/2} \right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (11.119)$$

В выражении $T_e = T_1(1+r\omega)$ в диапазоне изменения параметров воздуха коэффициент восстановления $r=0,84$.

Возможность подбора простых аппроксимационных формул связана с относительно слабым влиянием M и T_w/T_1 на теплоотдачу и трение. В частности, если $n=1$ и $q \sim 1/T$, то $K=1$ и влияние сжимаемости на теплообмен на пластине исчезает.

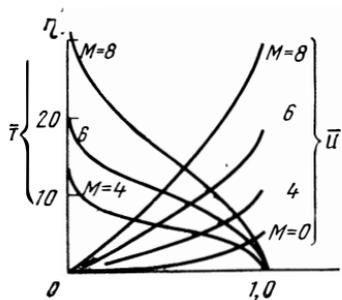


Рис. 11.13. Распределение безразмерной скорости и температуры в пограничном слое при различных числах M на теплоизолированной поверхности $\bar{T} = \frac{T - T_1}{u_1^2 / (2c_p)}$

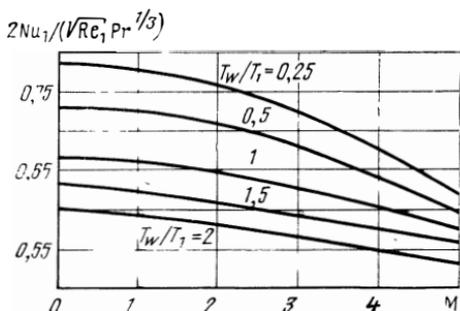


Рис. 11.14 Зависимость $2Nu_1 / (\sqrt{Re_1} Pr^{1/3})$ от M и T_w/T_1

Профили скорости и температуры и толщина пограничного слоя существенно зависят от значений M и T_w/T_1 . На рис. 11.13 приведены результаты расчетов для теплоизолированной поверхности при различных M и $n=0,75$; $Pr=1$. По оси ординат отложена безразмерная координата

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt{Re_x}$$

Как видно, при увеличении M толщина пограничного слоя растет, а профили скорости становятся более прямыми. На рис. 11.14 представлены кривые зависимости $2Nu_1 / (\sqrt{Re_1} Pr^{1/3})$ от M и T_w/T_1 при $n=0,5$.

11.12. РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ДАВЛЕНИИ ВНЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В общем случае произвольного распределения давления вне пограничного слоя для расчета теплообмена необходимо решить систему уравнений пограничного слоя в частных производных. В настоящее время разработан ряд эффективных численных методов расчета такой системы на быстродействующих вычислительных машинах [32, 42 и др].

Наряду с разработкой общих методов расчета теплообмена при произвольном распределении давления возможны решения в некоторых важных частных случаях путем преобразований системы уравнений (11.14) — (11.17) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие решения называются подобными. Значительное распространение получили также весьма эффективные приближенные методы расчета.

11.12.1. ПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ

Распределение скорости вне пограничного слоя зависит от конкретной формы тела и условий его обтекания и может быть самым различным. Если скорость потока вне пограничного слоя изменяется по закону $u_1 = \beta x^m$, где x — расстояние от начала

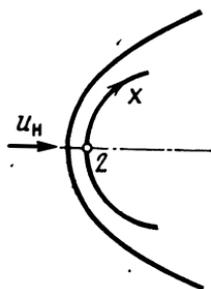


Рис. 11.15. Схема обтекания сферы сверхзвуковым потоком: 1 — ударная волна; 2 — критическая точка

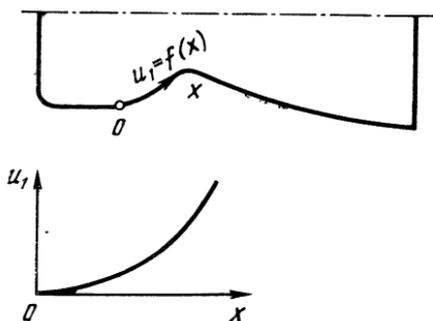


Рис. 11.16. Распределение скорости в дозвуковой части сопла

развития пограничного слоя, то при введении специальных переменных система (11.14) — (11.17) может быть преобразована в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Это справедливо, если значение скорости u_1 существенно меньше скорости звука ($M_1 = u_1/a_1 \ll 1$).

Если $M_1 > 1$, то подобные решения возможны при $Pg = 1$ и $\mu \sim T$, но не в физических переменных u_1, x , а в некоторых переменных, выбранных специальным образом [49, 88].

Решения, полученные для частных случаев течения $u_1 = \beta x^m$, имеют большое практическое значение. В частности, значение $m = 1$ соответствует течению в окрестности передней критической точки затупленного тела (рис. 11.15). Подбирая различные значения m , можно аппроксимировать распределение скорости на всей лобовой поверхности затупленного тела, обтекаемого потоком газа, или распределение скорости в дозвуковой части сопла двигателя (рис. 11.16). Как показывает анализ уравнений, выра-

жение для расчета теплового потока в этом случае совпадает с выражением (11.108):

$$q_w = \frac{Nu_w}{\sqrt{Re_w}} \sqrt{\frac{\mu_1 \varrho_w \mu_w}{x}} \frac{c_p (T_{0н} - T_w)}{Pr_w}. \quad (11.120)$$

Здесь в отличие от выражения (11.108) $u_1 = \beta x^m$, а критериальная формула (11.105) для определения численного значения комплекса $Nu_w / \sqrt{Re_w}$ приводится к виду

$$\frac{Nu_w}{\sqrt{Re_w}} = f \left(Pr, \frac{T_w}{T_1}, n_1, n_2, Eu \right). \quad (11.121)$$

Поскольку рассматривается область течения на теле, где $M \ll 1$, то число M не входит в набор определяющих критериев подобия и $T_e \approx T_{01} = T_{0н}$. Дополнительно в число определяющих критериев подобия вошло число Эйлера $Eu = \frac{du_1}{dx} \frac{x}{u_1} = m$, характеризующее влияние градиента скорости.

Система уравнений пограничного слоя для случая $u_1 = \beta x^m$ при различных предположениях о зависимости вязкости и теплопроводности от температуры решена численно в работах [30, 90].

Рассмотрим сначала наиболее важный случай течения в окрестности передней критической точки. Для использования формулы (11.120) необходимо знать значения комплекса $Nu_w / \sqrt{Re_w}$ и значение

$$\beta = \left(\frac{du_1}{dx} \right)_{x=0} = \frac{u_1}{x}.$$

Тогда

$$q_w = \frac{Nu_w}{\sqrt{Re_w}} \sqrt{\mu_w \varrho_w} \beta \frac{c_p (T_{0н} - T_w)}{Pr_w}.$$

Результаты численных расчетов, проведенных при различных значениях $T_w / T_{0н}$ и различных законах $\mu(T)$, хорошо аппроксимируются для плоского и осесимметричного случаев, соответственно, формулами [18]

$$q_w = 0,51 \left(1 + 0,12 \frac{T_w}{T_{0н}} \right) \left(\frac{\mu_1 \varrho_1}{\mu_w \varrho_w} \right)^{1/3} \sqrt{\mu_w \varrho_w} \beta c_p (T_{0н} - T_w) Pr_w^{-0,6}; \quad (11.122)$$

$$q_w = 0,71 \left(1 + 0,08 \frac{T_w}{T_{0н}} \right) \left(\frac{\mu_1 \varrho_1}{\mu_w \varrho_w} \right)^{1/3} \sqrt{\mu_w \varrho_w} \beta c_p (T_{0н} - T_w) Pr_w^{-0,6}. \quad (11.123)$$

Значения μ_w , ϱ_w , Pr_w берутся при температуре стенки T_w и давлении в передней критической точке $p_{01} = p_0'$; $\beta = (du_1/dx)_{x=0}$. Уравнение Бернулли для струйки тока вне пограничного слоя

$$\varrho_1 u_1 \frac{du_1}{dx} = - \frac{dp_1}{dx}$$

Дифференцируя по x и учитывая, что при $x \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$, $Q_1 \rightarrow Q_0'$, $p_1 \rightarrow p_0'$,

$$\text{имеем} \quad \beta^2 = -k \frac{p_0'}{Q_0'} \frac{\partial^2 (p_1/p_0')}{\partial (x/R_0)^2} \frac{1}{R_0^2 k}.$$

Так как $k (p_0'/Q_0') = a_0^2$, где a_0 — скорость звука в критической точке, то

$$\beta = C \frac{a_0}{R_0} \sqrt{\frac{2}{k}} = C \frac{a_{кр}}{R_0} \sqrt{\frac{k+1}{k}}. \quad (11.124)$$

$$\text{Здесь} \quad C^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (p_1/p_0')}{\partial (x/R_0)^2};$$

$a_{кр} = a_0 \sqrt{2/(k+1)}$ — критическая скорость звука.

В случае сферического или цилиндрического затупления приближенно по теории Ньютона [134] $C^2 \approx 1 - \frac{p_n}{p_0'}$.

Из формул (11.122) — (11.124) следует, что коэффициент теплоотдачи в критической точке обратно пропорционален квадратному корню из радиуса затупления R_0 . Поэтому при больших скоростях полета и соответственно больших температурах торможения радиус затупления передних кромок элементов конструкции летательных аппаратов приходится увеличивать с целью уменьшения тепловых потоков.

При произвольном значении m приближенная зависимость для плоского течения может быть записана в виде [7]

$$\frac{Nu_W}{\sqrt{Re_W}} = 0,332 (m+1)^{1/2} Pr^{1/3} K \cdot K_1. \quad (11.125)$$

Здесь $K \approx \left(\frac{\mu_1 Q_1}{\mu_W Q_W} \right)^{1/3}$ — фактор, учитывающий влияние переменности μ ; Q ;

$$K_1 = \left[1 + 0,16 \left(1 + \frac{T_W}{T_{01}} \right) \left(\frac{2m}{m+1} \right)^{1/3} \right]^{1/2} \quad (11.126)$$

— фактор, учитывающий влияние безразмерного градиента скорости $m = \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{x}{u_1}$. Значения u_1 и $\partial u_1 / \partial x$ должны быть определены из газодинамического расчета.

11.13. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТЕПЛОБМЕНА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ПРОДОЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ. МЕТОД ЭФФЕКТИВНОЙ ДЛИНЫ

Одним из способов упростить уравнения пограничного слоя является переход от удовлетворения дифференциальных уравнений для каждой отдельной частицы к удовлетворению этих

уравнений в среднем по толщине пограничного слоя. При этом задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной x .

Такие методы дают удовлетворительную точность при расчете теплообмена и меньшую точность при расчете характеристик динамического пограничного слоя, особенно в области течения с положительными градиентами давления.

В том случае, когда требуется рассчитать только теплообмен, оказалось возможным получить еще более простые решения, используя методы эффективной длины или локально подобия.

Изложим метод эффективной длины.

Тепловой поток в какой-либо точке тела определяется двумя факторами: толщиной теплового пограничного слоя и формой профиля температуры в данном сечении.

Толщина теплового слоя определяется в основном предысторией развития. Форма профиля температуры зависит от безразмерного локального градиента давления в данной точке тела. Поэтому при приближенном расчете целесообразно эти эффекты разделить.

Зададимся формой профиля температуры в виде функции

$$\frac{T_0 - T_W}{T_e - T_W} = f\left(\frac{y}{\delta_T^{**}}\right), \quad (11.127)$$

где
$$\delta_T^{**} = \int_0^{\infty} \frac{q_u}{\rho_1 u_1} \frac{T_{01} - T_0}{T_e - T_W} dy \quad (11.128)$$

— толщина потери энергии, или интегральная характеристика толщины пограничного слоя, входящая в равенство

$$q_W = \lambda_W \left(\frac{\partial T_0}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\lambda_W}{\delta_T^{**}} \left[\frac{\partial f}{\partial (y/\delta_T^{**})} \right]_{y=0} (T_e - T_W). \quad (11.129)$$

Для учета предыстории течения вместо δ_T^{**} введем эффективную длину. Эффективной длиной $x_{эф}$ будем называть длину плоской пластины, на которой при внешнем течении с постоянными параметрами $\rho_1 u_1$, такими же как в рассматриваемой точке тела, нарастает такой же тепловой пограничный слой, как и на длине x рассматриваемого тела с переменными параметрами $\rho_1 u_1$ вне слоя. В осесимметричном случае $x_{эф}$ будет длина цилиндра с радиусом, равным радиусу в данном сечении.

Для расчета теплообмена можно теперь использовать формулу для пластины (11.115)

$$q_W = 0,332 K K_1 \sqrt{\frac{\mu_W \rho_W u_1}{x_{эф}}} c_p (T_e - T_W) \text{Pr}^{-2/3} \quad (11.130)$$

при условии, что вместо истинной длины x в ней используется эффективная длина $x_{\text{эф}}$.

Здесь K — поправка на переменность физических свойств к формулам (11.117), (11.118) или (11.119). Дополнительно в формулу внесена поправка K_1 на влияние продольного градиента скорости по формуле (11.126), где $\frac{2m}{m+1} = 2 \frac{du_1}{dx} \frac{x}{u_1}$. Все величины, входящие в формулу, являются функциями x .

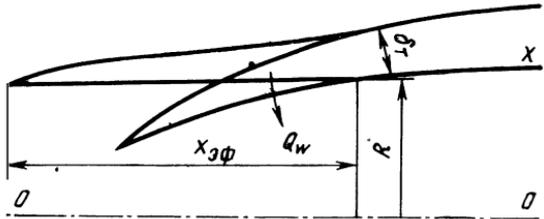


Рис. 11.17. К расчету $x_{\text{эф}}$

Для определения эффективной длины используем уравнение баланса тепла. Используя обозначение для толщины потерь энергии δ_T^{**} (11.53), имеем

$$Q_w = 2\pi R c_{p0} u_1 (T_{01} - T_w) \delta_T^{**}. \quad (11.131)$$

Таким образом, толщина потери энергии определяется количеством тепла Q_w , ушедшим из пограничного слоя. Следовательно, для определения $x_{\text{эф}}$ можно использовать условие равенства потерь тепла на эффективной пластине (или цилиндре) и рассматриваемом теле (рис. 11.17).

На цилиндре с радиусом $R = \text{const}$ общее количество тепла, ушедшее из пограничного слоя на длине $x_{\text{эф}}$, равно

$$Q_w = 2\pi R x_{\text{эф}} q_{\text{ср}} = 4\pi R q_w x_{\text{эф}}, \quad (11.132)$$

так как из уравнения (11.116) на пластине или цилиндре $q_{\text{ср}} = 2q_w$. На рассматриваемом теле на длине x отдано количество тепла

$$Q_w = 2\pi \int_0^x R q_w dx. \quad (11.133)$$

Сравнивая выражения (11.132) и (11.133), имеем

$$2Rq_w x_{\text{эф}} = \int_0^x Rq_w dx,$$

а после дифференцирования по x получаем уравнение для определения $x_{\text{эф}}$:

$$2 \frac{d}{dx} Rq_w x_{\text{эф}} = Rq_w.$$

После подстановки значения q_w из равенства (11.130) найдем

$$2 \frac{d}{dx} \left[R \frac{Nu_w}{\sqrt{Re_w}} \sqrt{\mu_w \varrho_w u_1 x_{\text{эф}} c_p} (T_e - T_w) Pr^{-1} \right] = \\ = R \frac{Nu_w}{\sqrt{Re_w}} \sqrt{\frac{\mu_w \varrho_w u_1}{x_{\text{эф}}}} c_p (T_e - T_w) Pr^{-1}. \quad (11.134)$$

Умножая обе части уравнения на выражение, стоящее в квадратных скобках, получаем в правой части выражение, не зависящее от $x_{\text{эф}}$. После интегрирования формула для $x_{\text{эф}}$ имеет вид

$$x_{\text{эф}} = \frac{\int_0^x \left(\frac{Nu_w}{\sqrt{Re_w}} \right)^2 R^2 \varrho_w u_1 \mu_w c_p^2 (T_e - T_w)^2 Pr^{-2} dx}{\left(\frac{Nu_w}{\sqrt{Re_w}} \right)^2 \mu_w R^2 \varrho_w u_1 c_p^2 (T_e - T_w)^2 Pr^{-2}}. \quad (11.135)$$

В числителе стоит интеграл от некоторой известной функции от x , в знаменателе — значение подинтегральной функции в данной точке.

В частном случае, при $T_w = \text{const}$, можно, пренебрегая переменностью величины $\frac{Nu_w}{\sqrt{Re_w}} c_p^2 (T_e - T_w)^2$, упростить формулу:

$$x_{\text{эф}} = \frac{\int_0^x \varrho_w u_1 R^2 dx}{\varrho_w u_1 R^2}. \quad (11.136)$$

При подстановке равенства (11.136) в выражение (11.130) формула для расчета теплообмена на теле с переменным давлением вдоль образующей имеет вид

$$q_w = 0,332 K K_1 \frac{\varrho_w u_1 c_p (T_e - T_w)}{(Re_{\text{эф}})^{1/2}} Pr^{-2/3}. \quad (11.137)$$

Она совпадает по виду с формулой (11.115) для расчета теплообмена на пластине, только вместо значения числа Рейнольдса Re_w в данной точке в нее входит усредненное значение $Re_{\text{эф}}$:

$$Re_{\text{эф}} = \frac{1}{\mu_w R^2} \int_0^x R^2 u_1 \varrho_w dx. \quad (11.138)$$

Таким образом, учет предыстории развития потока в этом методе сводится по существу к использованию усредненного значения Re_w вместо местного. Чтобы получить формулу для плоского течения, достаточно принять $R=1$. Здесь K_1 — поправка на влияние местного градиента скорости по формуле (11.126), где $2m/(m+1) = 2 (\partial u_1 / \partial x) (x/u_1)$.

Формула (11.137), если в ней принять $K_1 \approx 1$, легко преобразуется в формулу для расчета теплообмена, получаемую по методу «локального подобия». Точность такой формулы достаточно высока при малых T_w/T_{01} , что имеет место, например, при обтекании тел с очень большими, гиперзвуковыми, скоростями. Если T_w/T_{01} не сильно отличается от единицы или если температура стенки переменна, то большую точность дадут формулы (11.135) и (11.130).

11.14. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ТЕЧЕНИЯ И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА $x_{\text{эф}}$

Рассмотрим применение формулы (11.136) в некоторых частных случаях.

1. *Плоская пластина.*

$$u_1 = \text{const}, R = \text{const}, p_1 = \text{const}, \epsilon_w = \text{const}.$$

По формуле (11.136) получаем очевидный результат:

$$x_{\text{эф}} = x.$$

2. *Конус при сверхзвуковом обтекании с углом атаки, равным нулю.* В этом случае, так же как и на пластине,

$$u_1 = \text{const}, p_1 = \text{const}, q_w = \text{const}, K_1 = 1,$$

но радиус рассматриваемого тела вращения $R = x \sin \theta_k$, где θ_k — полуугол при вершине конуса. Тогда

$$x_{\text{эф}} = \frac{\int_0^x x^2 \sin^2 \theta_k dx}{x^2 \sin^2 \theta_k} = \frac{1}{3} x. \quad (11.139)$$

Из формул (11.130) и (11.139) следует, что значение местного удельного теплового потока на конусе в $\sqrt{3}$ раз больше, чем на пластине той же длины и при тех же параметрах течения вне пограничного слоя.

Поскольку значение $x_{\text{эф}}$ определяет толщину слоя δ , а именно: $\delta/x_{\text{эф}} \sim 1/\sqrt{\text{Re}_{\text{эф}}}$, то на конусе

$$\frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} \left(\frac{x_{\text{эф}}}{x} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} \frac{1}{\sqrt{3}},$$

т. е. на конусе из-за растекания толщина пограничного слоя в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем на пластине.

3. *Течение в окрестности передней критической точки $u_1 = \beta x$* (см. рис. 11.15).

Для двумерного течения (например, на кромке крыла), принямая в окрестности критической точки $\rho_w \sim \text{const}$, $R = \text{const}$, получаем

$$x_{\text{эф}} = \frac{\int_0^x \beta x dx}{\beta x} = \frac{1}{2} x,$$

а удельный тепловой поток по формулам (11.26) и (11.130) будет

$$q_w = 0,47 \left[1 + 0,16 \left(1 + \frac{T_w}{T_{01}} \right) \right]^{1/2} \left(\frac{\mu_1 Q_1}{\mu_w Q_w} \right)^{1/3} \times \\ \times \sqrt{\mu_w Q_w} \beta c_p (T_{0н} - T_w) \text{Pr}^{-2/3}; \quad (11.140)$$

для осесимметричного течения в окрестности критической точки

$$R \approx x, \quad x_{эф} = \frac{1}{4} x$$

и

$$q_w = 0,664 \left[1 + 0,16 \left(1 + \frac{T_w}{T_{01}} \right) \right]^{1/2} \left(\frac{\mu_1 Q_1}{\mu_w Q_w} \right)^{1/3} \times \\ \times \sqrt{\mu_w Q_w} \beta c_p (T_{0н} - T_w) \text{Pr}^{-2/3}. \quad (11.141)$$

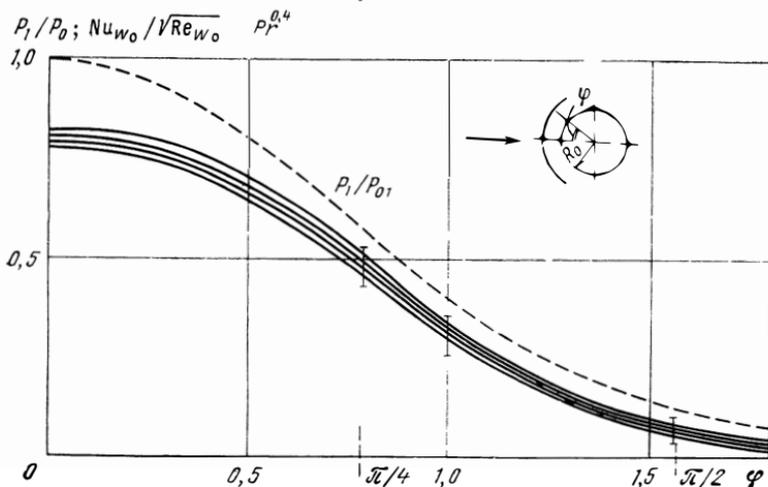


Рис. 11.18. Изменение коэффициентов теплообмена вдоль образующей сферы $T_w/T_{01} = 0,2, 0,4, 0,6, 1$

Формулы (11.140) и (11.141) удовлетворительно согласуются с формулами (11.122) и (11.123), полученными из обработки численных расчетов.

4. *Распределение тепловых потоков по лобовой поверхности затупленного тела.* На рис. 11.18 представлены результаты расчета распределения коэффициента теплоотдачи вдоль образующей сферы. Здесь $Nu_{w0} = \frac{\alpha R_0}{\lambda_w}$; $Re_{w0} = \frac{\alpha_0 Q_{w0} R_0}{\mu_w}$.

Там же приведена кривая распределения давления p_1/p_{01} для этого случая и обозначен примерный разброс экспериментальных точек, взятых из работы [134]. Распределение скорости определялось по газодинамическим таблицам для изэнтропического течения, а распределение плотности — по соотношению $q_w/q_{w0} = p_1/p_{01}$.

На рис. 11.19 приведены аналогичные кривые, полученные для случая течения около плоского торца осесимметричного тела. Как видно, характер кривых распределения p_1/p_{01} и $Nu_{w0}/(Pr^{0,4}\sqrt{Re_{w0}})$ в дозвуковой части тела ($p_1/p_{01} < 0,52$) на сфере и плоском торце качественно различны.

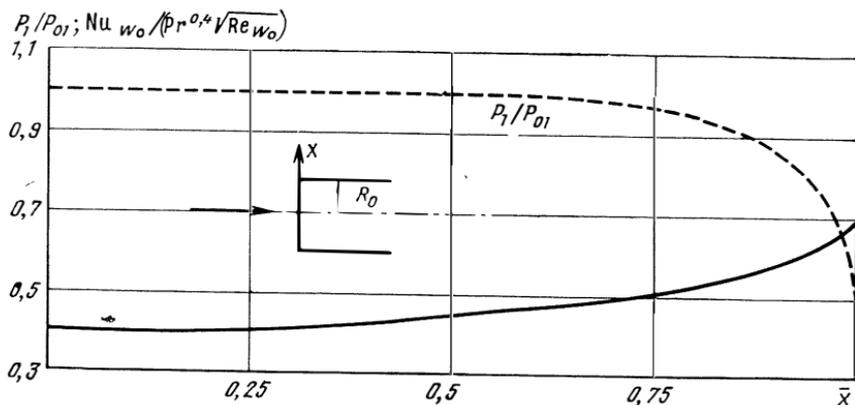


Рис. 11.19. Распределение тепловых потоков на поверхности плоской передней кромки осесимметричного тела при ламинарном режиме течения $T_w/T_{01}=0,2$

Аналогично рассчитывается теплоотдача по длине сопла. На характер распределения удельных тепловых потоков при ламинарном режиме влияет форма сопла. В соплах с крутым входом наблюдается резкое увеличение теплового потока до максимального значения в критическом сечении.

Рекомендуемая литература:

основная: [5, 96, 140];

дополнительная: [1, 6, 7, 18, 30, 32, 49, 50, 88, 90, 134, 142].

ГЛАВА XII

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ ВЫСОКИХ СКОРОСТЯХ И ТЕМПЕРАТУРАХ ГАЗОВОГО ПОТОКА

В предыдущей главе мы рассмотрели ламинарное течение в пограничном слое, при котором перенос количества движения, тепла и вещества происходит в силу молекулярных процессов вязкости, теплопроводности и диффузии. При этом значения напряжения трения и теплового потока являются известными функциями распределения скорости и температуры. Для ламинарного течения можно написать полную систему уравнений, и в настоящее время существуют математические методы их решения. Расчеты требуют некоторого экспериментального уточнения вследствие неизбежной схематизации явлений в сложных случаях течений и неточного знания ряда физических характеристик газа, однако вводимые поправки невелики.

Течения при очень высоких числах Рейнольдса обладают новым особым свойством — турбулентностью. Законы таких течений значительно отличаются от законов ламинарных течений и не описываются стационарными уравнениями Навье — Стокса для вязкой жидкости. При турбулентном течении усиливается обмен импульсом и энергией в поперечном направлении, в связи с чем возрастают трение, теплообмен и массообмен.

Вследствие чрезвычайно сложной картины турбулентного течения и отсутствия рациональных теорий турбулентности, решение задачи в строгой математической постановке в настоящее время невозможно. При решении отдельных задач вводится много различных предположений и упрощающих допущений, поэтому в принятых методах расчета турбулентного теплообмена решающее значение приобретает эксперимент.

Турбулентные течения встречаются так же часто, как и ламинарные. При движении летательного аппарата в верхних слоях атмосферы на его поверхности образуется ламинарный слой, но при полете на высотах ниже 30—50 км в пограничном слое может возникнуть турбулентность. В камерах сгорания и соплах двигателей течение большей частью турбулентное. Однако при низких давлениях на стенках камер сгорания или на поверхностях сопел с большой степенью расширения возможны также и ламинарные течения.

12.1. ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ

Как было показано в гл. IV, первые систематические исследования перехода ламинарного течения в турбулентное в трубах и каналах были выполнены Рейнольдсом. Им был найден закон подобия, согласно которому переход происходит примерно при одном и том же значении числа Re , называемого критическим числом Рейнольдса:

$$Re_{кр} = \left(\frac{u_{ср} d}{\nu} \right)_{кр}, \quad (12.1)$$

где $u_{ср}$ — средняя по сечению скорость течения;

d — диаметр трубы;

ν — кинематический коэффициент вязкости.

Значение критического числа Рейнольдса существенно зависит от условий входа в трубу, степени шероховатости и т. п. и может колебаться в диапазоне

$$2300 < Re_{кр} < 20\,000.$$

Однако если $Re < 2300$, то течение всегда ламинарное.

Переход ламинарного течения в турбулентное происходит не мгновенно. При достижении значений Re , близких к критическим, наступает режим перемежающегося течения, когда течение в трубе становится попеременно то ламинарным, то турбулентным. Поэтому область перехода занимает очень большую часть трубы, измеряющуюся иногда тысячами диаметров трубы.

Явление перехода было обнаружено также и в пограничном слое на обтекаемом теле. Наиболее просто переход наблюдать на плоской пластине. С увеличением расстояния x от передней кромки пластины увеличивается число Рейнольдса:

$$Re_x = \frac{u_1 \rho_1 x}{\mu_1}. \quad (12.2)$$

При достижении некоторого критического значения ($Re_x = Re_{кр}$) наблюдается изменение режима течения, сопровождающееся резким утолщением пограничного слоя и деформацией распределений скорости и температуры. Одновременно возрастают коэффициенты теплоотдачи и трения, а также изменяется характер их зависимости от x (рис. 12.1).

Тщательные измерения, проведенные на гладких пластинах при $M=0$, позволили установить нижнюю границу критического числа Рейнольдса в диапазоне $3 \cdot 10^5$ — $5 \cdot 10^5$. Верхняя граница, достигнутая в специальных опытах в особенно равномерном потоке, находится в диапазоне $3 \cdot 10^6$ — $4 \cdot 10^6$.

В некоторых случаях для определения условия перехода используется число Re_δ :

$$Re_\delta = \frac{u_1 \rho_1 \delta}{\mu_1}. \quad (12.3)$$

Здесь δ — толщина пограничного слоя на пластине при $M=0$, связанная с расстоянием x соотношением

$$\delta \approx 5 \sqrt{\frac{\nu_1 x}{u_1}}. \quad (12.4)$$

Для области перехода $(Re_\delta)_{кр} = 2700 \div 9000$. Полученные значения сравнимы с соответствующими величинами, полученными в трубах.

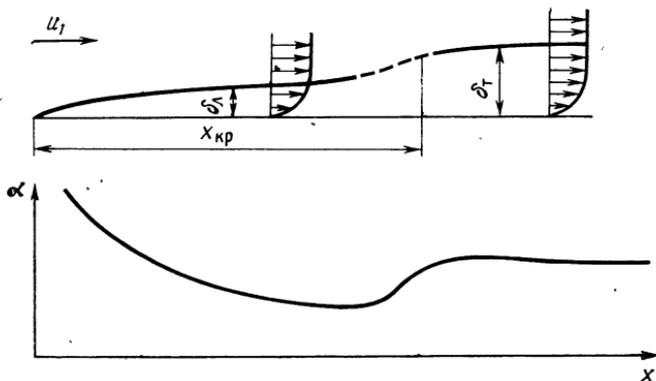


Рис. 12.1. Схема течения и распределение коэффициентов теплоотдачи при переходе ламинарного течения в турбулентное на пластине

Значение $Re_{кр}$ в общем случае обтекания тел потоком сжимаемого газа зависит от весьма большого числа факторов. Ограничиваясь учетом наиболее важных из них, можно получить критериальную зависимость для общего случая течения на теле с градиентом давления

$$(Re_z)_{кр} = F \left(M, \frac{T_W}{T_1}, \frac{z^2}{\nu_1} \cdot \frac{du_1}{dx}, \frac{h}{z}, \frac{u'}{u_1} \right). \quad (12.5)$$

Здесь $\frac{z^2}{\nu_1} \cdot \frac{du_1}{dx}$ определяет влияние местного градиента давления; h — высота бугорков шероховатости; u' — интенсивность турбулентности во внешнем потоке; z — характерный линейный размер пограничного слоя.

Использование в качестве линейного размера условной толщины слоя δ не всегда удобно из-за нечеткого определения ее значения. Поэтому в качестве линейного размера используются интегральные величины: толщина вытеснения δ^* , толщина потери импульса δ^{**} или толщина потери энергии δ_T^{**} [формулы (11.36), (11.53)]. Для определения характера зависимости (12.5) проведено множество теоретических и экспериментальных ис-

следований [53, 140, 141], но они пока не завершены. К тому же экспериментальные данные часто противоречивы, не согласуются с теоретическими предсказаниями и к ним следует относиться с осторожностью. Поэтому ограничимся рассмотрением влияния отдельных факторов на величину $Re_{кр}$.

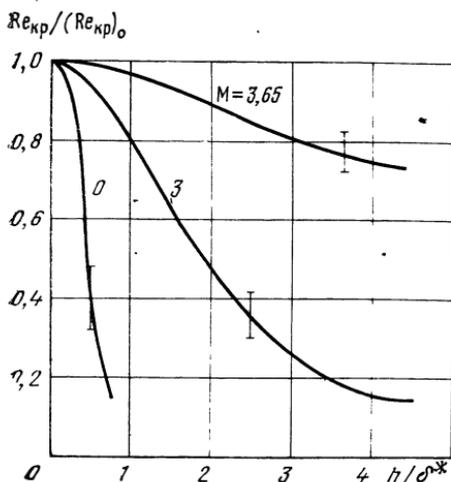
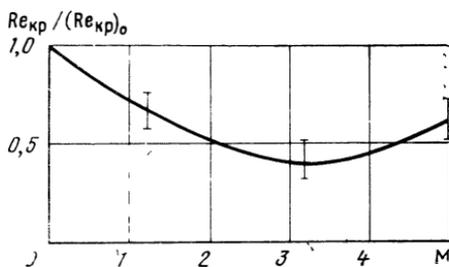


Рис. 12.2. Влияние шероховатостей на $Re_{кр}$ при различных числах M на теплоизолированной пластине

Рис. 12.3. Влияние M на $Re_{кр}$ на гладкой теплоизолированной пластине



Большое практическое значение имеет исследование влияния шероховатости стенки, которая всегда присутствует на так называемых технически гладких поверхностях. Шероховатость вызывает возмущения в ламинарном слое и переход в турбулентное течение происходит при меньших значениях $Re_{кр}$. Интенсивность шероховатости можно характеризовать отношением h/δ^* . Кроме высоты бугорков h , играет роль, хотя и меньшую, также их форма, расстояние между ними и т. д. На рис. 12.2 представлена зависимость отношения значения $Re_{кр}$ на шероховатой поверхности к значению $(Re_{кр})_0$ на гладкой поверхности от h/δ^* для случая течения на плоской пластине без теплообмена. Результаты для различных форм шероховатости и различных $(Re_{кр})_0$ для каждого M укладываются на одну кривую. Как видно с увеличением M влияние шероховатости ослабевает, что может быть объяснено уменьшением плотности газа у стенки.

Влияние числа M на значение $Re_{кр}$ при отсутствии теплопередачи недостаточно ясно. Из экспериментов (рис. 12.3) следует уменьшение $Re_{кр}$ при возрастании M до 3,5 и затем медленное увеличение при $M=5$. Однако это может быть объяснено также изменением условий опыта при возрастании M .

Общее влияние теплообмена на момент перехода ламинарного течения в турбулентное такое, что на охлажденной стенке ($T_w/T_e < 1$) значение $Re_{кр}$ увеличивается, а на нагретой ($T_w/T_e > 1$) — уменьшается. Примерный характер зависимости, пред-

сказываемый теорией и согласующийся с экспериментами на гладкой поверхности, представлен на графике рис. 12.4.

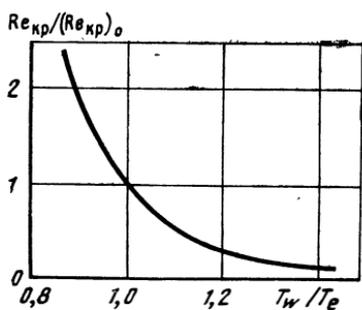


Рис. 12.4. Влияние теплообмена на $Re_{кр}$ на гладкой пластине

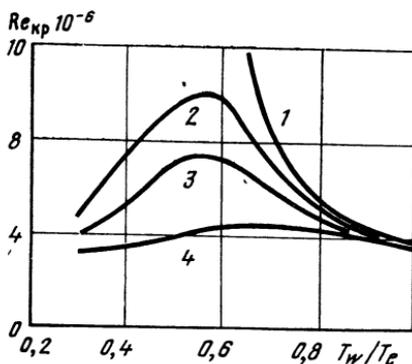


Рис. 12.5. Совместное влияние охлаждения и шероховатости на $Re_{кр}$:

1—гладкая поверхность; 2— $h=0,025$ мм; 3— $h=0,05$ мм; 4— $h=0,075$ мм

Характер зависимости $Re_{кр}$ от T_w/T_e резко изменяется на шероховатой поверхности, что видно, например, из рис. 12.5, где приведены экспериментальные данные по определению $Re_{кр}$ на конусе с углом при вершине 10° , в зависимости от отношения T_w/T_e при различной шероховатости. Существование режимов обратного влияния охлаждения, когда $Re_{кр}$ уменьшается при уменьшении T_w/T_e , может быть качественно объяснено тем, что при сильном охлаждении пограничный слой утоньшается и влияние шероховатости проявляется сильнее.

Исследования в потоках с продольными градиентами давления обнаруживают общую тенденцию стабилизации ламинарного режима в ускоряющихся течениях и, соответственно, ранней турбулизации и замедляющихся.

Экспериментальное определение точки перехода в аэродинамических трубах затруднено влиянием начальной турбулентности, которая, однако, ослабевает при больших M . Приведенные данные могут быть использованы как ориентировочные. В практических случаях, когда положение точки перехода из ламинарного в турбулентное течение не ясно, расчет теплообмена проводится для обоих режимов и используются те значения коэффициентов теплоотдачи, которые обеспечивают необходимый запас работоспособности конструкции.

12.2. ОСРЕДНЕНИЕ И ПУЛЬСАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Исследования турбулентного потока показывают, что в каждой фиксированной точке скорость, давление и температура не

остаются постоянными во времени, а очень часто изменяются и притом неравномерно. Такие изменения скорости, давления и температуры называются пульсациями и являются наиболее характерным свойством турбулентного течения. Элементы жидкости, пульсирующие в потоке, представляют собой крупные макроскопические образования — жидкие комки, или моли.

Значения пульсаций составляют, как правило, всего несколько процентов от средних значений скорости, но очень сильно влияют на развитие течения жидкости. Пульсационное движение, накладывающееся на главное движение, настолько сложно, что его теоретический расчет в настоящее время не представляется возможным. Поэтому закономерности развитого турбулентного течения приходится определять для осредненных по времени величин.

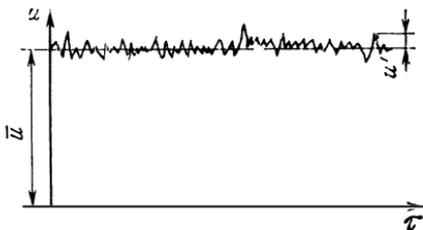


Рис. 12.6 Примерный вид осциллограммы пульсаций продольной составляющей скорости

Для математического исследования течение делят на среднее и пульсационное. Обозначим осредненные во времени значения скорости \bar{u} , \bar{v} , давления \bar{p} , температуры \bar{T}^* , а пульсационные соответственно — u' , v' , p' , T' (рис. 12.6). Тогда мгновенные значения можно записать в виде $u = \bar{u} + u'$; $v = \bar{v} + v'$; $p = \bar{p} + p'$; $T = \bar{T} + T'$.

Осредненное значение продольной составляющей скорости может быть определено как

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} u d\tau. \quad (12.6)$$

Чтобы осреднение не зависело от времени, необходимо для осреднения брать достаточно большой интервал времени τ . Точно так же определяются средние значения всех параметров потока.

Средние значения скорости, давления, температуры представляют собой величины, измеряемые при помощи инерционных датчиков.

Средние значения пульсационных составляющих равны нулю:

$$\bar{u}' = 0; \quad \bar{v}' = 0; \quad \bar{p}' = 0; \quad \bar{T}' = 0.$$

Точно так же равны нулю средние значения произведений типа

$$\overline{uu'} = 0; \quad \overline{vv'} = 0; \quad \overline{pp'} = 0 \text{ и т. д.}$$

Средние значения произведений пульсационных составляющих

ших в турбулентном потоке могут быть не равны нулю:

$$\overline{u'v'} \neq 0, \quad \overline{(u')^2} \neq 0, \quad \overline{v'T'} \neq 0 \text{ и т. д.}$$

В таком случае говорят, что между пульсациями существует корреляция. Появление в турбулентном потоке дополнительного механизма передачи импульса и энергии, как это будет показано ниже, связано с существованием корреляции между пульсациями.

12.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВЯЗКОСТЬ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ОСРЕДНЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим качественно картину появления дополнительных (кажущихся) вязкости и теплопроводности в турбулентном потоке.

Пусть в пограничном слое распределения скорости и температуры заданы некоторыми функциями от координаты y : $u = u(y)$, $T = T(y)$ (рис. 12.7).

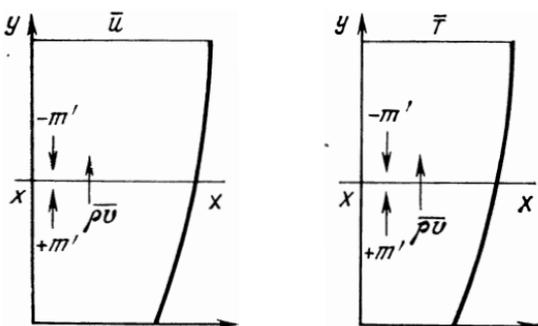


Рис. 12.7. К определению турбулентной вязкости и теплопроводности

Рассмотрим единичную площадку с нормалью, параллельной оси y . Через эту площадку протекает масса газа $m = \rho v$. Перетеканию жидкости соответствует некоторый поток импульса.

Составляющая этого потока вдоль оси x

$$J_x = m u = \rho v u. \quad (12.7)$$

Будем рассматривать пульсацию потока массы вдоль оси y — $m' = (\rho v)'$; не выделяя отдельно пульсации плотности и скорости. При наличии пульсации

$$J_x = [(\bar{m})' + (m)'] (\bar{u} + u') = \bar{m} \bar{u} + \bar{m} u' + (m)' \bar{u} + (m)' u'. \quad (12.8)$$

После осреднения за достаточный промежуток времени, получим

$$\bar{J}_x = \bar{m} \bar{u} + \overline{(m)' u'} = \overline{\rho v} \bar{u} + \overline{(\rho v)' u'}, \quad (12.9)$$

так как второй и третий члены в выражении (12.8) после осреднения равны нулю.

Если второй член в выражении (12.9) не равен нулю, то при наличии пульсаций появляется дополнительный перенос импульса, равный $(\overline{qv})'u'$. Но поток количества движения через некоторую площадку эквивалентен противоположно направленной силе, с которой окружающая среда действует на площадку. Следовательно, при наличии пульсаций (турбулентности) возникает дополнительное воздействие — напряжение трения между верхней и нижней частями потока $\tau_T = -(\overline{qv})'u'$.

Аналогично можно показать, что при наличии пульсаций поток тепла через единичную площадку равен

$$q = \overline{qv}c_p\overline{T} + (\overline{qv})'c_p\overline{T}' \quad (12.10)$$

и что в турбулентном потоке возникает дополнительный перенос энергии

$$q_T = \overline{(qv)'c_pT}'. \quad (12.11)$$

Легко убедиться, что значения τ_T и q_T не равны нулю. Частицы жидкости, попадающие вследствие поперечного движения в слой y снизу [$m' = (\overline{qv})' > 0$] из области с меньшей средней скоростью \bar{u} вызывают в слое y отрицательную пульсацию ($-u'$), так что произведение $(\overline{qv})' \cdot u' < 0$. Точно таким же рассуждением можно показать, что и для частиц, проникших в слой y сверху, $(\overline{qv})' \cdot u' < 0$. Следовательно, и среднее значение $(\overline{qv})' \cdot \bar{u}' < 0$. Отсюда получаем, что $\tau_T = -(\overline{qv})'u' > 0$, т. е. напряжение турбулентного трения при распределении скорости, соответствующем рис. 12.7, имеет направление, совпадающее с положительным направлением оси x . Аналогично получаем, что при распределении температуры, соответствующем рис. 12.8, $q_T = (\overline{qv})'c_p\overline{T}' < 0$, т. е. турбулентный поток направлен от слоев с большей температурой к слоям с меньшей температурой. Используя эти результаты, можно ввести понятия турбулентной вязкости μ_T и теплопроводности λ_T . По аналогии с ламинарным течением

$$\tau_T = -(\overline{qv})'u' = \mu_T \frac{d\bar{u}}{dy}; \quad (12.12)$$

$$q_T = (\overline{qv})'c_p\overline{T}' = -\lambda_T \frac{d\overline{T}}{dy}. \quad (12.13)$$

Тогда с учетом молекулярной вязкости и теплопроводности напряжение трения и удельный тепловой поток могут быть представлены в виде

$$\tau = (\mu + \mu_T) \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad q = -(\lambda + \lambda_T) \frac{d\overline{T}}{dy}. \quad (12.14)$$

Выражения для τ_T и q_T (12.12), (12.13) могут быть строго получены на основании осреднения уравнений Навье — Стокса и энергии [2, 34, 126, 140].

Уравнения турбулентного пограничного слоя относительно средних величин получают вид, совпадающий с видом уравнений ламинарного слоя, только вместо молекулярной вязкости и теплопроводности в них входит полная вязкость и теплопроводность в соответствии с выражениями (12.14):

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\zeta u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\varrho v}) = 0; \quad (12.15)$$

$$\overline{\zeta u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{\varrho v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_T) \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right] - \frac{d\overline{p}}{dx}; \quad (12.16)$$

$$\overline{\mu c_p} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} + \overline{\varrho v c_p} \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + \lambda_T) \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} \right] + (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 + \overline{u} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x}. \quad (12.17)$$

Наряду с числом $Pr = \mu c_p / \lambda$ иногда используется турбулентное число Прандтля $Pr_T = \mu_T c_p / \lambda_T$ и смешанное число Прандтля

$$Pr_m = \frac{(\mu + \mu_T) c_p}{(\lambda + \lambda_T)}. \quad (12.18)$$

Уравнения (12.15) — (12.17) с учетом выражения (12.14) называются уравнениями Рейнольдса и описывают турбулентный поток. Однако они не замкнуты, ибо в них число неизвестных превышает число уравнений. Чтобы получить некоторые приближенные решения этих уравнений, в практических случаях прибегают к дополнительным допущениям и гипотезам.

12.4. ТЕОРИЯ ПУТИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Формулы (12.12) и (12.13) для определения турбулентного трения и турбулентной теплопроводности не могут быть непосредственно использованы, поскольку в них входят неизвестные значения пульсационных составляющих. Следующий шаг в их решении состоит в выражении пульсаций через средние значения. С этой целью Прандтлем была предложена весьма плодотворная идея теории пути перемешивания.

Рассмотрим в параллельном потоке два слоя жидкости на расстоянии Δy (рис. 12.8). Скорости в этих слоях различны и из-за пульсаций происходит обмен количествами движения между отдельными струйками.

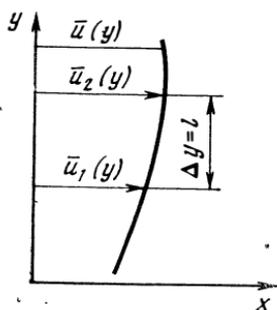


Рис. 12.8. К определению пути перемешивания

Теория пути перемешивания основывается на предположении, что комок жидкости, перемещающийся из-за пульсации из одного слоя в другой, сохраняет составляющую импульса в направлении оси x на некотором расстоянии, названном путем перемешивания. Обозначим эту величину через l . Если расстояние между слоями на рис. 12.8 выбрано так, что $\Delta y = l$, то частицы, поступающие из нижнего слоя в верхний, сохраняют горизонтальную составляющую скорости \bar{u}_1 .

Разность между средней скоростью потока в точке y_2 и мгновенной скоростью поступивших сюда частиц из нижнего слоя дает пульсацию скорости в этом месте

$$u' = \Delta \bar{u} = \bar{u}_2(y_2) - \bar{u}_1(y_1),$$

но если l мало, то $\Delta \bar{u} = l(\partial \bar{u} / \partial y)$. Таким образом, величина пульсации $u' = l(\partial \bar{u} / \partial y)$.

Пульсации в поперечном направлении связаны с пульсациями в продольном направлении. При столкновении двух комков жидкости, движущихся со скоростями, отличающимися на величину пульсации, возникает поперечное движение, интенсивность которого будет пропорциональна пульсации u' , поэтому можно считать, что пульсация потока массы по оси y

$$m' = (\rho v)' \sim \bar{\rho} u'.$$

Окончательно с точностью до некоторого коэффициента пропорциональности, который можно включить в l , получаем формулы: для турбулентного напряжения трения —

$$\tau_r = -(\overline{\rho v' u'}) = \bar{\rho} l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (12.19)$$

и для турбулентной вязкости —

$$\mu_r = \bar{\rho} l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (12.20)$$

Такие же рассуждения могут быть использованы при рассмотрении переноса любой величины Γ , в частности, для переноса тепла. При этом выражение (12.13) принимает вид

$$q_r = (\overline{\rho v' \Gamma'}) = -c_p \bar{\rho} l_1^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial y} \right| \quad (12.21).$$

и

$$\lambda_r = c_p \bar{\rho} l_1^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (12.22)$$

Значение l_1 может отличаться от l и коэффициенты турбулентного обмена при переносе импульсов и тепла не совпадают.

В функциях (12.20) и (12.22) вместо неизвестных значений пульсаций u' и v' введены новые неизвестные l и l_1 . Хотя эти ве-

личины не являются физическими характеристиками жидкости, они могут рассматриваться как функции точки. Во многих случаях удастся установить связи между характерными длинами в рассматриваемом течении и длиной пути перемешивания. Эти связи можно определить только из экспериментальных данных, поэтому такого рода связи в теории турбулентности называются полуэмпирическими.

В заключение необходимо указать, что теория пути перемешивания, хотя и является удачной схематизацией турбулентности, не отражает ее истинной физической картины. В действительности жидкие элементы при пульсациях проникают один внутрь другого и смешиваются, и таким образом в процессе турбулентного переноса эти элементы не сохраняют своей индивидуальности, а непрерывно изменяются.

Теория пути перемешивания имеет и другие недостатки. Так, например, значения l , вычисленные из измерения средних скоростей в трубах, имеют тот же порядок величин, что и размеры среднего потока, в то время как при выводе формулы (12.19) предполагалось, что эта величина мала.

Тем не менее, теория пути перемешивания во многих случаях удачно предсказывает распределение скорости и температуры в турбулентных потоках и имеет ряд практических приложений.

12.5. СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Для расчета турбулентного пограничного слоя большое значение имеют данные о распределениях скорости и температуры.

При турбулентном режиме течения общее напряжение трения складывается из напряжения трения, вызванного молекулярной и турбулентной вязкостью (далее знакосреднения опускаем):

$$\tau = (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (12.23)$$

На большом расстоянии от стенки величина турбулентной вязкости намного превышает молекулярную вязкость. Область пограничного слоя, в которой можно пренебречь молекулярной вязкостью, называется турбулентным ядром (рис. 12.9).

Вблизи стенки турбулентные пульсации затухают и молекулярная вязкость играет решающую роль. Эта часть пограничного слоя называется ламинарным подслоем. Между ними находится переходная область, в которой величины молекулярной и турбулентной вязкости одного порядка.

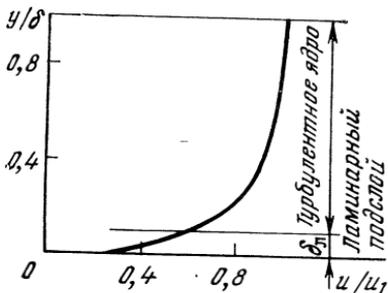


Рис. 12.9 Турбулентное ядро течения и ламинарный подслой

Для описания распределения скорости и температуры используются методы теории подобия. Если ограничиться рассмотрением области турбулентного пограничного слоя, не слишком удаленной от стенки, то в число физических параметров, определяющих течение в этой области в несжимаемой жидкости, войдут τ_w , ρ , μ , координата y и подлежащая определению величина скорости u . Составляя безразмерные комплексы, получим безразмерную скорость $\frac{u}{u_\tau}$ и безразмерное расстояние $\frac{y \sqrt{\tau_w / \rho}}{\nu}$.

Величину $\sqrt{\tau_w / \rho}$, имеющую размерность скорости, обозначают u_τ и называют скоростью сдвига. Тогда распределе-

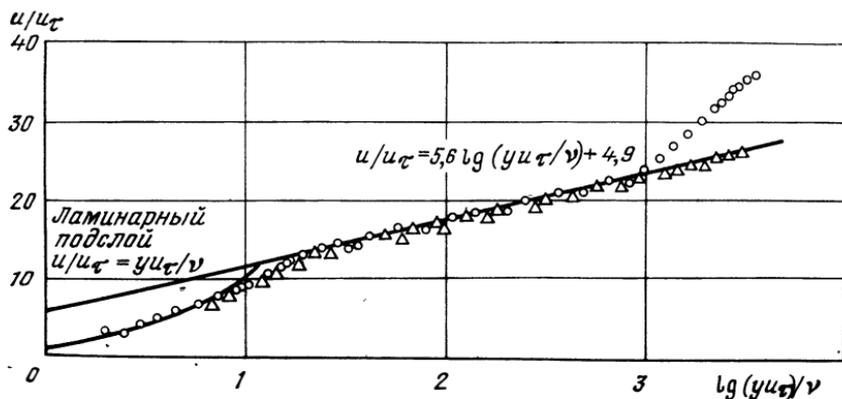


Рис. 12.10. Универсальное распределение скорости в турбулентном пограничном слое на гладкой поверхности (закон стенки):

Δ и \circ —экспериментальные точки

ние скорости в рассматриваемой области может быть представлено в виде универсальной функциональной зависимости, не связанной с Re :

$$\frac{u}{u_\tau} = f\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right). \quad (12.24)$$

Эта важная зависимость называется законом стенки.

Как показывают эксперименты (рис. 12.10), формула (12.24) применима на значительных расстояниях от стенки как на пластине, так и в случае течений с градиентом давления [68, 126, 149].

Непосредственно у стенки в ламинарном подслое

$$\tau_w = \mu \frac{u}{y}$$

и формула (12.4) имеет вид

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{y u_\tau}{\nu}. \quad (12.25)$$

Рассмотрим турбулентное ядро пограничного слоя. В этой области пограничного слоя в силу турбулентного трения скорость уменьшается, по сравнению со скоростью внешнего потока, на величину $u_1 - u$. Это уменьшение есть результат действия касательного напряжения трения. Масштабом скорости в этом случае будет $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ и масштабом длины — толщина слоя δ . Безразмерную зависимость можно представить в виде

$$\frac{u_1 - u}{u_\tau} = g\left(\frac{y}{\delta}\right). \quad (12.26)$$

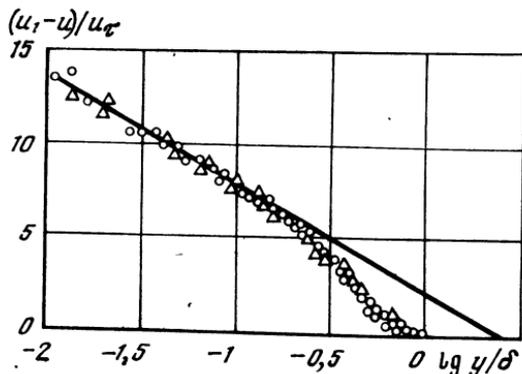


Рис. 12.11. Распределение скорости в турбулентном слое на гладких и шероховатых поверхностях (закон убывания скорости)

Эта зависимость называется законом убывания скорости и выражает собой универсальный закон, хорошо подтверждающийся экспериментами. Интересно отметить, что при обработке результатов опытов в формуле (12.26) на единственную кривую укладываются экспериментальные данные не только для гладких, но и для шероховатых поверхностей, хотя распределение скорости в обычных координатах при этом значительно различаются.

Как видно из рис. 12.10 и 12.11, функции $f\left(\frac{y/u_\tau}{\nu}\right)$ и $g\left(\frac{y}{\delta}\right)$ являются логарифмическими. Можно показать, что логарифмический вид функций f и g непосредственно вытекает из условия, что различные по виду формулы (12.24) и (12.26) описывают одно и то же распределение скорости [126, 149].

Такой же закон может быть получен из формулы Прандтля (12.19):

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2. \quad (12.27)$$

Путь перемешивания l у стенки должен быть равен нулю и в первом приближении может быть принят пропорциональным расстоянию от стенки $l = Ky$, где K — безразмерная постоянная,

которая должна быть определена из опыта. Далее предположим, что τ поперек слоя постоянно, т. е. $\tau = \tau_w$, тогда уравнение (12.27) приводится к виду

$$\frac{du}{dy} = \frac{\sqrt{\tau_w/\varrho}}{Ky} = \frac{u_\tau}{Ky}$$

и

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{K} \ln y + C,$$

или в безразмерном виде при использовании в качестве масштаба длины величины ν/u_τ

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{K} \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + C - \frac{1}{K} \ln \frac{u_\tau}{\nu} = \frac{1}{K} \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + C_1.$$

Полученное распределение скорости зависит от двух постоянных.

Экспериментальные точки на рис. 12.10 хорошо согласуются с формулой (при переходе к десятичным логарифмам)

$$\frac{u}{u_\tau} = 5,6 \lg \frac{yu_\tau}{\nu} + 4,9. \quad (12.28)$$

Отличие заметно только в ламинарном подслое при $\frac{yu_\tau}{\nu} < 10$, где справедлива зависимость (12.25).

При рассмотрении распределения температуры получаем аналогично распределению скорости, что в области, не слишком удаленной от стенки, в число определяющих параметров войдут τ_w , ϱ , μ и тепловые величины: температура стенки T_w , теплопроводность λ , удельный тепловой поток в стенку q_w и теплоемкость c_p .

В качестве масштаба скоростей можно взять по-прежнему $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\varrho}}$ и длину $\frac{\mu}{\varrho u_\tau}$.

Масштаб температуры представим в виде

$$T_\tau = \frac{q_w}{\varrho c_p u_\tau} = \frac{q_w}{c_p \tau_w} \sqrt{\frac{\tau_w}{\varrho}}. \quad (12.29)$$

Тогда для распределения избыточной температуры можно записать безразмерную зависимость

$$\frac{T - T_w}{T_\tau} = f_1\left(\frac{yu_\tau}{\nu}, \text{Pr}\right). \quad (12.30)$$

В непосредственной близости от стенки в ламинарном подслое

$$q_w = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \frac{T - T_w}{y}$$

или с учетом уравнения (12.29)

$$\frac{T - T_W}{T_\tau} = \frac{y u_\tau}{\nu} \text{Pr}. \quad (12.31)$$

Распределение температуры в турбулентном ядре при значениях $\text{Pr} \sim 1$, что приблизительно справедливо для газов, подобно распределению скорости [34, 68, 149]:

$$\frac{T - T_W}{T_\tau} = \frac{u}{u_\tau}. \quad (12.32)$$

Последнее равенство эквивалентно условию

$$\text{Pr}_\tau = \frac{\mu_\tau c_p}{\lambda_\tau} = 1.$$

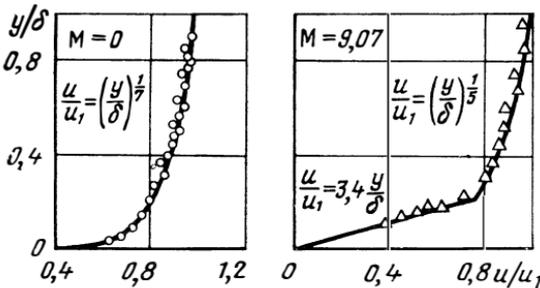


Рис. 12.12. Степенные законы распределения скорости

Выражения для распределений скорости и температуры (12.28) и (12.32) получены при условии $q = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$. Однако экспериментальные данные удовлетворительно согласуются с логарифмическим профилем (12.28) и при сверхзвуковых скоростях [95].

При построении приближенных методов расчета для аппроксимации экспериментальных данных используются так называемые степенные законы (рис. 12.12):

$$\frac{u}{u_1} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n \frac{T - T_W}{T_1 - T_W} = \left(\frac{y}{\delta_\tau}\right)^{n_1}.$$

Логарифмические законы являются универсальными и константы в них не зависят от числа Re . Значения показателей n и n_1 в степенных формулах зависят от Re , изменяясь от $n = 1/7$ до $n = 1/9$, при увеличении Re , и уменьшаясь при больших M .

В сжимаемой жидкости эффективно применяются степенные представления распределения скорости и температуры в преобразованных координатах $\eta = \int_0^y q dy$ [11].

12.6. КОЭФФИЦИЕНТ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

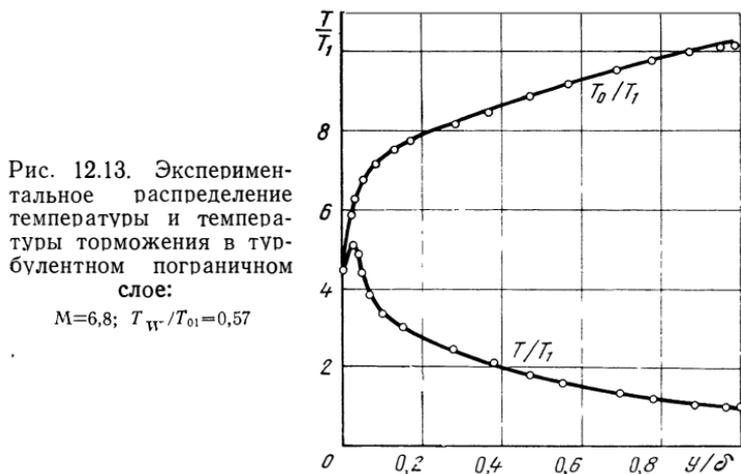
Уравнения турбулентного пограничного слоя (12.15) — (12.17) совпадают по виду с уравнениями ламинарного слоя. Поэтому многие результаты, полученные при исследовании ламинарного течения, могут быть по аналогии использованы при создании методов расчета турбулентного слоя.

12.6.1. Различие между малыми и большими скоростями

При малых скоростях теплообмен определяется разностью температур

$$q_w = \alpha(T_1 - T_w).$$

При больших скоростях в пограничном слое происходит выделение тепла в силу диссипации кинетической энергии и при работе сил давления [второй и третий члены в правой части уравнения



(12.17)]. На рис. 12.13 показано распределение статической температуры и температуры торможения газа в турбулентном пограничном слое на охлажденной стенке при $(T_w/T_{01}) \sim 0,5$ и $M = 6,8$ [95]. Как видно, статическая температура при торможении в пограничном слое растет в силу преобразования кинетической энергии в тепло, достигая максимального значения вблизи стенки в ламинарном подслое. Непосредственно у стенки температура падает и $q_w > 0$, так как тепло идет в стенку, хотя температура стенки больше, чем температура внешнего потока.

Для того чтобы учесть влияние этих факторов, формула для расчета теплообмена записывается в виде

$$q_w = \alpha(T_e - T_w).$$

Здесь

$$T_e = T_1 + r \frac{u_1^2}{2c_p} \quad (12.33)$$

T_e — эффективная температура;

r — коэффициент восстановления температуры.

По определению T_e совпадает со значением температуры теплоизолированной стенки ($q_w = 0$). В частном случае, при малых скоростях, если

$$\frac{u_1^2}{2c_p T_1} = \frac{k-1}{2} M_1^2 \ll 1,$$

значение $T_e \sim T_1$.

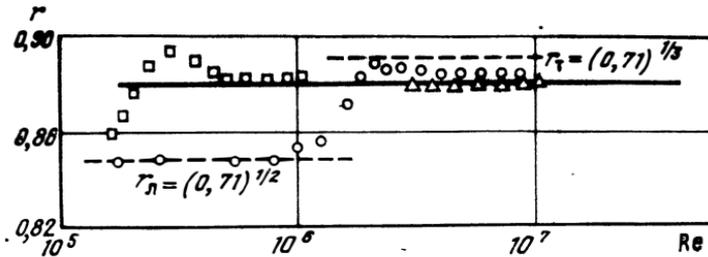


Рис. 12.14. Зависимость коэффициента восстановления температуры от числа Re :

□ — $M_1 = 2.2$; ○ — $M_1 = 3.8$

Коэффициент восстановления температуры r в турбулентном слое должен зависеть от характера преобразования энергии и от соотношения между вязкостью и теплопроводностью в ламинарном подслое и в турбулентном ядре. Поскольку соотношение между толщиной ламинарного подслоя δ_1 и толщиной всего пограничного слоя δ зависит от Re , то можно предполагать, что

$$r = f(Pr, Pr_T, Re);$$

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}; \quad Pr_T = \frac{\mu_T c_p}{\lambda_T}.$$

Для экспериментального определения r проводятся измерения температуры теплоизолированной стенки, равной T_e

$$r_T = \frac{T_e - T_1}{u_1^2 / (2c_p)}.$$

Экспериментальные исследования [34, 149] показывают, что коэффициент восстановления температуры практически зависит только от молекулярного значения Pr (рис. 12.14).

Для расчета обычно принимается формула $r_T = Pr^{1/3}$, которая удовлетворительно согласуется с экспериментом. В частности, для воздуха ($Pr=0,71$) $r=0,88$ (рис. 12.14).

В теоретических работах [34] и других, основывающихся на уравнениях (12.15) — (12.17) и данных о структуре погранично-

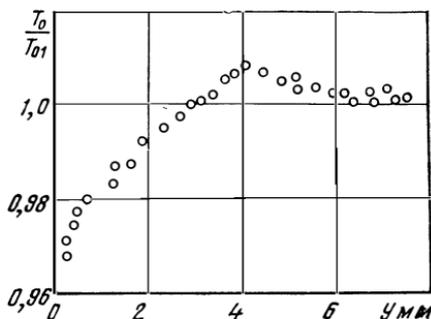


Рис. 12.15. Экспериментальное распределение температуры торможения в пограничном слое на теплоизолированной поверхности ($M=2,8$)

го слоя, удается учесть влияние Re и Pr_T , которое, однако, невелико.

Значение $r < 1$ и $T_e < T_{01}$, что объясняется перераспределением энергии внутри пограничного слоя. Этот факт удалось подтвердить экспериментально. Из рис. 12.15 [149] видно, что температура торможения в некоторой части пограничного слоя на теплоизолированной стенке превышает температуру торможения во внешнем потоке.

12.7. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ТЕПЛОБМЕН НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

12.7.1. Связь между трением и теплообменом

Подобие между процессами переноса количества движения и энергии приводит так же, как и в случае ламинарного движения, к связи между трением и теплообменом.

Уравнения турбулентного пограничного слоя по виду совпадают с уравнениями ламинарного пограничного слоя. Если принять условие $\frac{(\mu + \mu_T) c_p}{\lambda + \lambda_T} = 1$, то из системы (12.15) — (12.17)

для случая течения на плоской пластине ($dp/dx=0$) с помощью преобразований, аналогичных преобразованиям в разд. 11.7 и 11.9, можно получить условие подобия

$$\frac{u}{u_1} = \frac{T_0 - T_W}{T_{01} - T_W}.$$

На стенке при $y=0$

$$q_W = \lambda_W \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda_W \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} \right)_W$$

и

$$\tau_W = \mu_W \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

После преобразований имеем

$$q_w = \tau_w \frac{c_p (T_{01} - T_w)}{u_1}$$

и в безразмерной форме, приняв $l=x$, как и в разд. 11.10 —

$$C_H = \frac{1}{2} C_f \quad \text{или} \quad Nu_x = \frac{x}{2} C_f Re_x, \quad (12.34)$$

$$\text{где } Re_x = \frac{u_1 Q_1 x}{\mu} \quad Nu = \frac{q_w}{(T_{01} - T_w)} \frac{x}{\lambda}.$$

Полученные условия (12.34), называемые условиями аналогии Рейнольдса между трением и теплообменом, выполняются лишь приближенно, поскольку значения Pr и Pr_T отличны от единицы. Поэтому в более общем виде аналогия между трением и теплообменом записывается в виде

$$Nu = \frac{1}{2} C_f Re S, \quad (12.35)$$

$$\text{где} \quad Nu = \frac{q_w}{T_e - T_w} \frac{x}{\lambda}$$

T_e — определяется формулой (12.33);

S — фактор аналогии Рейнольдса.

Теоретические значения S получены в работе [34]. В общем случае $S = S(Pr, M, Re)$. Среднее значение S можно приближенно принять равным [21, 70] $Pr^{0,43}$.

Наличие соотношения (12.35) облегчает исследование пограничного слоя. Следует иметь, однако, в виду, что оно справедливо только при постоянной температуре стенки и при отсутствии продольного градиента давления.

12.7.2. Теплообмен и трение в несжимаемой жидкости

Результаты экспериментальных исследований трения на плоской пластине при малых скоростях ($M=0$) и отсутствии теплообмена представлены на рис. 12.16 [140]. Там же приведена теоретическая зависимость, определенная при использовании логарифмического закона (12.28),

$$C_f = (2 \lg Re_x - 0,65)^{-2,3}. \quad (12.36)$$

Хорошие результаты дает формула [71]

$$C_f = 0,085 Re_x^{-0,29+0,01 \lg Re}. \quad (12.37)$$

В диапазоне значений Re от 10^6 до 10^8 можно использовать более простую формулу

$$C_f = 0,059 Re_x^{-0,2}. \quad (12.38)$$

Подробные экспериментальные исследования теплообмена на пластине в несжимаемой жидкости приведены в работе [21].

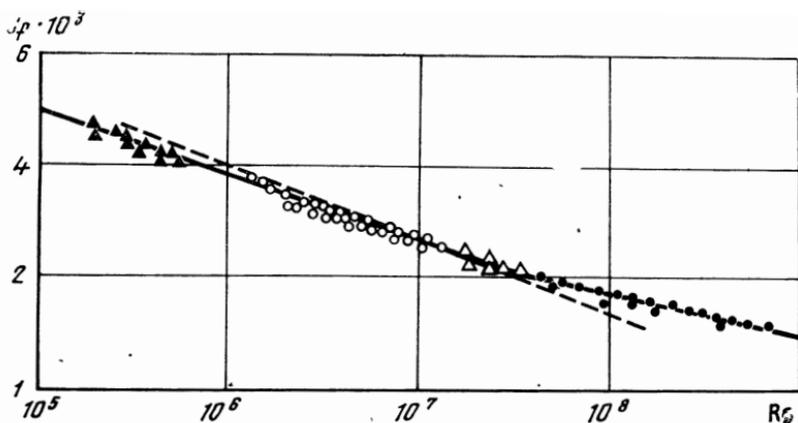


Рис. 12.16. Зависимость коэффициента трения от Re в несжимаемой жидкости по экспериментальным данным различных авторов:
 — $C_f = (2 \lg Re_x - 0,65)^{-2,3}$ — — — $C_f = 0,059 Re_x^{-0,2}$

Обобщением экспериментальных данных (рис. 12.17) установлена следующая зависимость для воздуха:

$$Nu = 0,0296 Re_x^{0,8} Pr^{0,43}$$

в диапазоне изменения Re от 10^5 до 10^7 .

Из сравнения с формулой (12.38) следует, что в этой области изменения Re условие аналогии имеет вид

$$Nu = \frac{1}{2} C_f Re_x Pr^{0,43}.$$

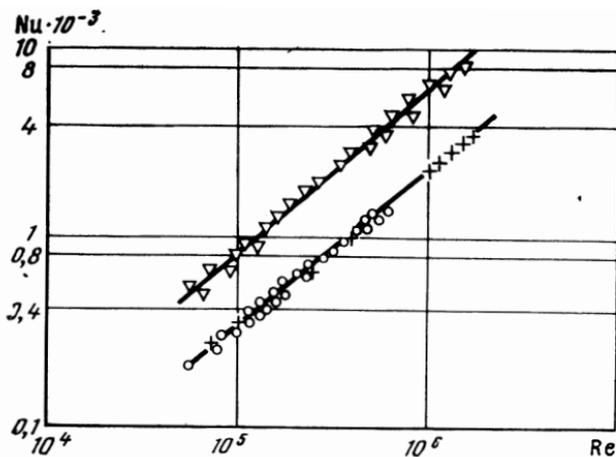


Рис. 12.17. Экспериментальные исследования теплообмена в несжимаемой жидкости:
 ○, + —нагревание воздуха; ▽ —нагревание воды

12.7.3. Турбулентный теплообмен и трение на пластине в сжимаемом газе

Теоретические методы учета влияния сжимаемости, использующие формулы Прандтля (12.19), изложены в работах [34, 149]. В работе [84] предложен метод, основанный на использовании предельного перехода при $Re \rightarrow \infty$. Мы рассмотрим влияние сжимаемости на плоской пластине, основываясь на экспериментальных данных по трению и теплообмену [70, 71, 95, 149].

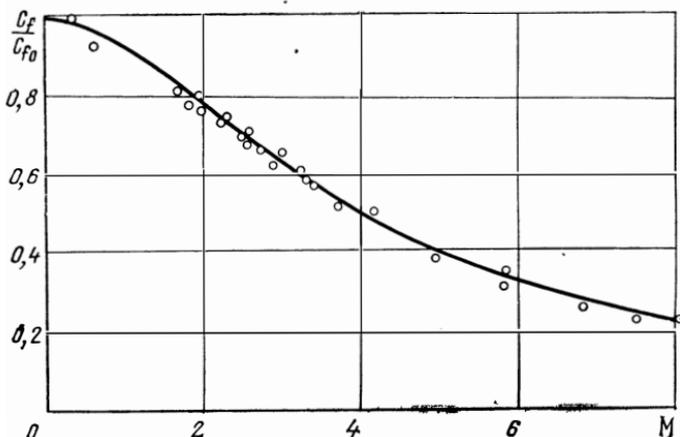


Рис. 12.18. Экспериментальные исследования трения в сверхзвуковом потоке ($T_w/T_e = 1$)

Влияние числа M на значение коэффициента трения на пластине, при отсутствии теплообмена видно из рис. 12.18, где приведены экспериментальные значения $C_f/C_{f0} = f(M)$. Значение C_{f0} соответствует случаю $M=0$ и определяется по одной из формул (12.36) — (12.38).

Результаты исследований различных авторов хорошо согласуются между собой и дают возможность провести единую аппроксимирующую зависимость, проверенную до значения $M=9$:

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = (1 + r\omega)^{-0,55}, \quad (12.39)$$

где $r \approx 0,88$;

$$\omega = \frac{u_1^2}{2c_p T_1} = \frac{k-1}{2} M^2;$$

$C_{f0} = \frac{2\tau_{w0}}{\rho_1 u_1^2}$ — коэффициент трения в несжимаемой жидкости;

$C_f = \frac{\tau_w}{1/2 \rho_1 u_1^2}$ — коэффициент трения при значениях M , отлич-

ных от нуля, но при фиксированном значении Re . Таким образом, поправка на влияние числа M практически не зависит от Re .

Как видно, с увеличением M коэффициент трения на теплоизолированной поверхности падает, что связано с уменьшением плотности у поверхности, которая имеет в этом случае температуру

$$T_e = T_1(1 + r_w).$$

Если температура стенки T_w меньше T_e , то тепловой поток направлен от газа к стенке. В этом случае характер изменения физических свойств газа в пограничном слое будет другим и в формулу (12.39) необходимо ввести поправку на влияние температурного фактора T_w/T_1 . Прямые измерения трения на охлажденной поверхности выполнены в работе [69].

На основании анализа результатов исследований [34, 69, 149] в диапазоне $M = 2 \div 5$, предложена эмпирическая формула в виде

$$C_f = C_{f0} \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{-0,35} (1 + r_w)^{-0,55}; \quad (12.40)$$

при $10^5 < Re_x < 10^8$

$$C_f = 0,059 Re^{0,8} \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{-0,35} (1 + r_w)^{-0,55}. \quad (12.41)$$

Для практических целей удобно отнести параметры течения к температуре поверхности, используя значения

$$(C_f)_w = \frac{2\tau_w}{\rho_w u_1^2}; \quad Re_w = \frac{u_1 \rho_w x}{\mu_w}.$$

Если перейти к этим обозначениям, то формула (12.41) для расчета коэффициента трения может быть приведена к виду

$$(C_f)_w = 0,059 Re_w^{0,8} \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{0,4} (1 + r_w)^{0,11}. \quad (12.42)$$

Благодаря наличию аналогии между трением и теплообменом можно ожидать, что влияние сжимаемости на теплообмен может быть учтено такими же множителями. Это предположение подтверждается экспериментами по измерению теплообмена.

При отнесении физических свойств газа к температуре поверхности эмпирическая формула получает вид, аналогичный формуле (12.42):

$$Nu_w = 0,0296 Re_w^{0,8} \cdot Pr^{0,43} \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{0,4} (1 + r_w)^{0,11}. \quad (12.43)$$

На рис. 12.19 и 12.20 представлены результаты экспериментальных работ [71], подтверждающие формулу (12.43).

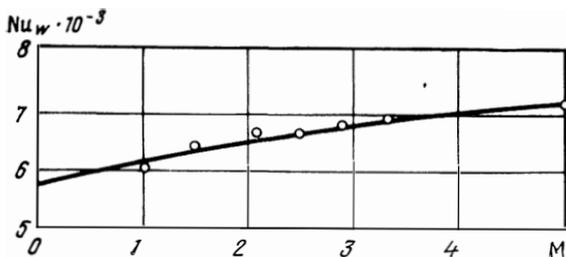


Рис. 12.19. Зависимость Nu_w от числа M на пластине ($\bar{T}_w \approx 1$; $Pr = 0,71$):
 $Nu_w \sim (1 + r \frac{k-1}{2} M^2)^{0,11}$

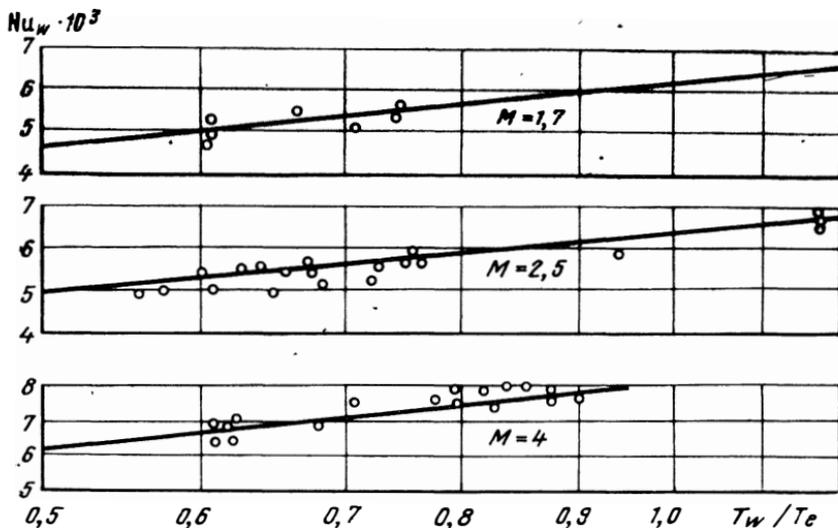


Рис. 12.20. Зависимость Nu_w от T_w/T_e на пластине при различных M :

$$Nu \sim \left(\frac{T_w}{T_e}\right)^{0,4}$$

12.7.4. Расчет теплообмена и трения на пластине

Для расчета теплообмена могут быть использованы критериальные зависимости

$$\frac{Nu_w}{Re_w^{0,8}} = \Phi \left(Pr, \frac{T_w}{T_e}, \omega \right) \quad (12.44)$$

и

$$(C_f)_w Re_w^n = \Phi_1 \left(Pr, \frac{T_w}{T_e}, \omega \right), \quad (12.45)$$

где n изменяется от 0,18 до 0,1 при изменении Re от 10^5 до 10^{10} ; при $Re = 5 \cdot 10^5 \div 10^8$ можно принять $n \approx 0,2$.

Эксперименты показывают, что условия $Nu \approx Re^{0,8}$ и $C_f \approx Re^{-n}$ являются общими для турбулентного пограничного слоя

на произвольной поверхности. Поэтому при расчете турбулентного трения и теплообмена удобнее вместо критериев Re и Nu использовать комплексные критерии подобия $Nu/Re^{0.8}$ и $C_f Re^n$. Расчетные формулы для пластины при этом будут иметь вид

$$q_w = \frac{Nu_w}{Re_w^{0.8}} \frac{q_w^{0.8} u_1^{0.8} \mu_w^{0.2}}{x^{0.2}} \frac{c_p (T_e - T_w)}{Pr}; \quad (12.46)$$

$$T_e = T_1 \left(1 + r \frac{k-1}{2} M_1^2 \right), \quad r \approx 0,88;$$

$$\tau_w = \frac{1}{2} (C_f)_w Re_w^{0.2} \frac{q_w^{0.8} \mu_w^{0.2} u_1^{2.8}}{x^{0.2}} \quad (\text{при } n=0,2). \quad (12.47)$$

Формулу (12.44) можно привести к виду [18]

$$\frac{Nu_w}{Re_w^{0.8}} = 0,0296 Pr^{0,43} K_T. \quad (12.48)$$

Величина K_T учитывает влияние сжимаемости. Приближенные зависимости для K_T могут быть получены разными методами.

Из формулы (12.43) следует, что

$$K_T = (T_w/T_e)^{0,4} (1+r\omega)^{0,11}. \quad (12.49)$$

В методе определяющей температуры

$$K_T = \left(\frac{\mu^{(0)}}{\mu_w} \right)^{0,2} \left(\frac{q^{(0)}}{q_w} \right)^{0,8}, \quad (12.50)$$

где $\mu^{(0)}$ и $q^{(0)}$ вычисляются при некоторой подобранной температуре

$$T^{(0)} = \frac{1}{3} T_1 + \frac{2}{3} T_w + \frac{1}{5} \frac{k-1}{2} r M^2 T_1, \quad (12.51)$$

называемой определяющей.

При малой скорости потока и большом перепаде температур (например, при течении в окрестности передней критической точки или в дозвуковой части сопла) хорошие результаты дает формула

$$K_T = \left(\frac{q_1}{q_w} \right)^{0,6}, \quad (12.52)$$

где q_1 — плотность вне пограничного слоя.

Обобщая формулы (12.49) и (12.52), получим выражение для K_T , удовлетворительно согласующееся с опытами как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях:

$$K_T = \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{0,4+0,2 \exp(-\omega r)} (1+\omega r)^{0,11}. \quad (12.53)$$

12.8. РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ПОТОКЕ С ПРОДОЛЬНОМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

Критериальные зависимости, полученные для расчета теплообмена на пластине, могут быть использованы в расчете теплообмена при произвольном распределении давления вне пограничного слоя.

Рассмотрим метод эффективной длины, использованный в гл. XI для расчета ламинарного слоя. В этом методе предполагается, что тепловой поток в рассматриваемой точке тела будет таким же, как в некоторой точке на пластине с теми же местными параметрами течения при условии, что в рассматриваемых точках тела и пластины одинаковы толщины потери энергии.

Это условие равносильно тому, что на пластине длиной $x_{\text{эф}}$ или цилиндре радиусом R в случае тела вращения будет отдано в стенку количество тепла, такое же как на рассматриваемом теле на длине x .

При этом учитывается предыстория развития пограничного слоя. Для того чтобы учесть влияние местного градиента давления, можно ввести поправки в окончательную формулу. Течение в турбулентном слое более устойчиво к воздействию перепадов давлений, и указанные поправки необходимо вносить только при положительных градиентах давления вблизи точки отрыва.

При указанных предположениях выражение для удельного теплового потока имеет вид

$$q_w = \frac{\text{Nu}_w}{\text{Re}_w^{0,8}} \frac{\varrho_w^{0,8} u_1^{0,8} \mu_w^{0,2}}{x_{\text{эф}}^{0,2}} \frac{c_p (T_e - T_w)}{\text{Pr}}. \quad (12.54)$$

Здесь

$$\frac{\text{Nu}_w}{\text{Re}_w^{0,8}} = 0,0296 \text{Pr}^{-0,43} K_r,$$

где $K_r = K\left(\frac{T_w}{T_0}, M_1\right)$ находится по формулам (12.49)–(12.52);

$$T_e = T_1 \left(1 + r \frac{k-1}{2} M_1^2\right);$$

ϱ_w, β_w, T_w — значения параметров газа в данном сечении при температуре стенки.

Для определения эффективной длины используем условие баланса тепла.

На цилиндре радиусом $R = \text{const}$ общее количество тепла, ушедшее из пограничного слоя на длине $x_{\text{эф}}$

$$Q_w = 2\pi R \int_0^{x_{\text{эф}}} q_w dx_{\text{эф}}.$$

Подставляя q_w из формулы (12.54) и интегрируя (при условии $u_1 = \text{const}$, $p_1 = \text{const}$, $q_w = \text{const}$), получаем

$$Q_w = 2,5\pi R q_w x_{\text{эф}}. \quad (12.55)$$

На рассматриваемом теле $R = \text{var}$ на длине x отдано количество тепла

$$Q_w = 2\pi \int_0^x R q_w dx, \quad (12.56)$$

где $R = R(x)$.

Сравнивая выражения (12.55) и (12.56), получаем

$$1,25 R q_w x_{\text{эф}} = \int_0^x R q_w dx.$$

После дифференцирования по x имеем

$$\frac{d}{dx} (1,25 R q_w x_{\text{эф}}) = R q_w. \quad (12.57)$$

Подставим в выражение (12.57) значение q_w из формулы (12.54) и получим дифференциальное уравнение для определения $x_{\text{эф}}$:

$$1,25 \frac{d}{dx} \left[R \frac{\text{Nu}_w}{\text{Re}_w^{0,8}} \varrho_w^{0,8} u_1^{0,8} \mu_w^{0,2} x_{\text{эф}}^{0,8} \frac{c_p (T_e - T_w)}{\text{Pr}} \right] = \\ = R \frac{\text{Nu}_w}{\text{Re}_w^{0,8}} \frac{\varrho_w^{0,8} u_1^{0,8} \mu_w^{0,2}}{x_{\text{эф}}^{0,2}} \frac{c_p (T_e - T_w)}{\text{Pr}}. \quad (12.58)$$

Обозначая выражение в квадратных скобках в левой части через z , т. е.

$$z = R \frac{\text{Nu}_w}{\text{Re}_w^{0,8}} \varrho_w^{0,8} u_1^{0,8} \mu_w^{0,2} x_{\text{эф}}^{0,8} \frac{c_p (T_e - T_w)}{\text{Pr}},$$

и умножая правую и левую части на $z^{1/4}$, получаем уравнения

$$\frac{5}{4} z^{1/4} \cdot \frac{dz}{dx} = f(x),$$

где

$$f(x) = R^{5/4} \left(\frac{\text{Nu}_w}{\text{Re}_w^{0,8}} \right)^{5/4} \varrho_w u_1 \mu_w^{1/4} \left(\frac{T_e - T_w}{\text{Pr}} \right)^{5/4} c_p^{5/4}$$

— известная функция от x .

После интегрирования получаем окончательно

$$x_{\text{эф}} = \frac{\int_0^x R^{5/4} \left(\frac{\text{Nu}_w}{\text{Re}_w^{0,8}} \right)^{5/4} \varrho_w u_1 \mu_w^{1/4} \left(\frac{T_e - T_w}{\text{Pr}} \right)^{5/4} c_p^{5/4} dx}{R^{5/4} \left(\frac{\text{Nu}_w}{\text{Re}_w^{0,8}} \right)^{5/4} \varrho_w u_1 \mu_w^{1/4} \left(\frac{T_e - T_w}{\text{Pr}} \right)^{5/4} c_p^{5/4}}. \quad (12.59)$$

Формула (12.59) справедлива при переменной температуре стенки. Если $T_w = \text{const}$, то можно пользоваться более простой приближенной формулой

$$x_{\text{эф}} = \frac{\int_0^x R^{5/4} \varrho_w u_1 dx}{R^{5/4} \varrho_w u_1}. \quad (12.60)$$

Подставляя равенство (12.60) в выражение (12.54), получаем следующую формулу для определения q_w :

$$q_w = 0,0296 \text{Pr}^{-0,57} K_{\tau} \varrho_w u_1 R^{1/4} \mu_w^{1/5} \left[\int_0^x R^{5/4} \varrho_w u_1 dx \right]^{-0,2} \times \\ \times c_p (T_e - T_w) = 0,0296 \text{Pr}^{-0,57} K_{\tau} \varrho_w u_1 c_p (T_e - T_w) \text{Re}_{\text{эф}}^{-0,2}, \quad (12.61)$$

где $\text{Re}_{\text{эф}} = \frac{1}{R^{5/4} \mu_w} \int_0^x R^{5/4} \varrho_w u_1 dx$ — среднее значение Рейнольдса.

Таким образом, расчет производится по формуле для плоской пластины, только вместо истинного числа Рейнольдса подставляется некоторое эффективное число Рейнольдса $\text{Re}_{\text{эф}}$.

Для плоской пластины достаточно положить $R = \text{const}$, и после сокращения формула (12.60) не отличается от соответствующей формулы для ламинарного течения.

12.9. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ТЕЧЕНИЯ. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА, СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

12.9.1. Частные случаи распределения скорости вне пограничного слоя

1. *Плоская пластина.* $u_1 = \text{const}$; $R = \text{const}$.

Из формулы (12.60) имеем в этом случае очевидный результат $x_{\text{эф}} = x$.

Теплообмен рассчитывается непосредственно по формуле (12.46).

2. *Конус, обтекаемый сверхзвуковым потоком без угла атаки.* $u_1 = \text{const}$, $p_1 = \text{const}$; $\varrho_w = \text{const}$; $R = x \sin \theta_k$;

θ_k — полуугол при вершине конуса;

$$x_{\text{эф}} = \frac{\int_0^x x^{5/4} (\sin \theta_k)^{5/4} dx}{x^{5/4} (\sin \theta_k)^{5/4}} = \frac{4}{9} x.$$

Как и в случае ламинарного течения эффективная длина на конусе значительно меньше, чем на пластине.

Из формулы (12.54) следует, что тепловой поток на конусе при тех же значениях параметров течения идеальной жидкости больше, чем на пластине:

$$(q_w)_k = (q_w)_{пл} \left(\frac{9}{4} \right)^{0,2} = 1,175 (q_w)_{пл},$$

где $(q_w)_{пл}$ определяется по формуле (12.46).

Физическое объяснение этому состоит в том, что линии потока при удалении от вершины расходятся и нарастание пограничного слоя происходит медленнее.

3. Течение в окрестности передней критической точки (см. рис. 11.15).

а) Для плоского тела.

$$R = \text{const}; \quad M_1 \approx 0; \quad u_1 = \beta x; \quad p_1 \approx \text{const}; \quad q_w \approx \text{const};$$

$$x_{эф} = \frac{\int_0^x \beta x \, dx}{\beta x} = \frac{1}{2} x. \quad (12.62)$$

Подставляя в выражение (12.54) и используя формулу (12.52), получаем расчетную формулу в виде

$$q_w = 0,034 \text{Pr}^{-0,57} q_w u_1 c_p (T_{01} - T_w) \left(\frac{\beta x^2}{v_w} \right)^{-0,2} \left(\frac{q_1}{q_w} \right)^{0,6}, \quad (12.63)$$

где

$$\beta = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

б) Для осесимметричного тела.

$$M_1 \approx 0; \quad u_1 \approx \beta x; \quad p_1 \approx \text{const}; \quad q_w \approx \text{const}; \quad R \approx x;$$

$$x_{эф} = \frac{\int_0^x \beta x^{9/4} \, dx}{\beta x^{9/4}} = \frac{4}{13} x; \quad (12.64)$$

$$q_w = 0,0375 \text{Pr}^{-0,57} q_w u_1 c_p (T_{01} - T_w) \left(\frac{\beta x^2}{v_w} \right)^{-0,2} \left(\frac{q_1}{q_w} \right)^{0,6}. \quad (12.65)$$

При использовании формул (12.63) и (12.65) необходимо иметь в виду, что они справедливы только в окрестности критической точки, где можно пренебрегать изменением q_w в зависимости от x . Для сферического или цилиндрического затупления по формуле (11.124)

$$\beta = \frac{a_{кр}}{R_0} C \sqrt{\frac{k+1}{k}} = \frac{a_0}{R_0} C \sqrt{\frac{2}{k}},$$

где $a_{кр}$ — критическая скорость звука;
 a_0 — скорость звука в заторможенном газе;

$$C^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2(p_1/p_0')}{\partial (x/R_0)^2}; \quad C^2 \approx \left(1 - \frac{p_H}{p_{01}}\right)$$

R_0 — радиус сферы или цилиндра.

Тогда формула для расчета теплообмена в точке поверхности затупления с координатой $\bar{x} = x/R_0$ имеет вид

$$q_W = A Pr^{-0,57} \frac{\varrho_W^{0,8} \mu_W^{0,2} a_0^{0,8}}{R_0^{0,2}} \bar{x}^{-0,6} c_p (T_{01} - T_W) \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_W}\right)^{0,6} \left(C \sqrt{\frac{2}{k}}\right)^{0,8}, \quad (12.66)$$

где $A = 0,034$ для плоского и $A = 0,0375$ для осесимметричного течения.

При увеличении радиуса затупления тепловой поток в сходственных точках тела уменьшается обратно пропорционально $\sqrt[5]{R_0}$.

Непосредственно в критической точке турбулентный тепловой поток равен нулю. Это связано с тем, что на границе пограничного слоя скорость равна нулю. Ламинарный тепловой поток в этой точке сохраняет конечное значение.

Введя безразмерные критерии

$$Nu_{W0} = \frac{q_W}{T_{01} - T_W} \frac{R_0}{\lambda_W} \quad \text{и} \quad Re_{W0} = \frac{a_0 \varrho_W R_0}{\mu_W},$$

можно (при $C^{0,8} \approx 1$) привести формулу (12.66) к виду

$$\frac{Nu_{W0}}{Re_{W0}^{0,8}} = A Pr^{0,43} \bar{x}^{-0,6} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_W}\right)^{0,6} \left(\frac{2}{k}\right)^{0,4}.$$

12.9.2. Примеры расчета при различных законах распределения скорости

а) Турбулентный пограничный слой на лобовой поверхности затупленного тела.

Рассмотрим в качестве примера расчет теплообмена на сферическом и плоском затуплениях осесимметричного тела. Распределение давления на таких телах задается из газодинамического расчета или экспериментов. Изменение скорости определяется по формулам изэнтропического течения, изменение плотности — по формуле

$$\frac{\varrho_W}{\varrho_{W0}} = \frac{p_1}{p_{01}}.$$

Тогда безразмерная формула может быть получена в виде

$$\frac{Nu_{W0}}{Re_{W0}^{0,8} Pr^{0,43} K_T} = 0,0296 \left(\frac{\varrho_W}{\varrho_{W0}}\right)^{0,8} \left(\frac{u_1}{a_0}\right)^{0,8} \left(\frac{x_{\text{эф}}}{R_0}\right)^{-0,2}.$$

$$P_1/P_{01}; Nu_{w0}/(Re_{w0}^{0,8} Pr^{0,43} K_T)$$

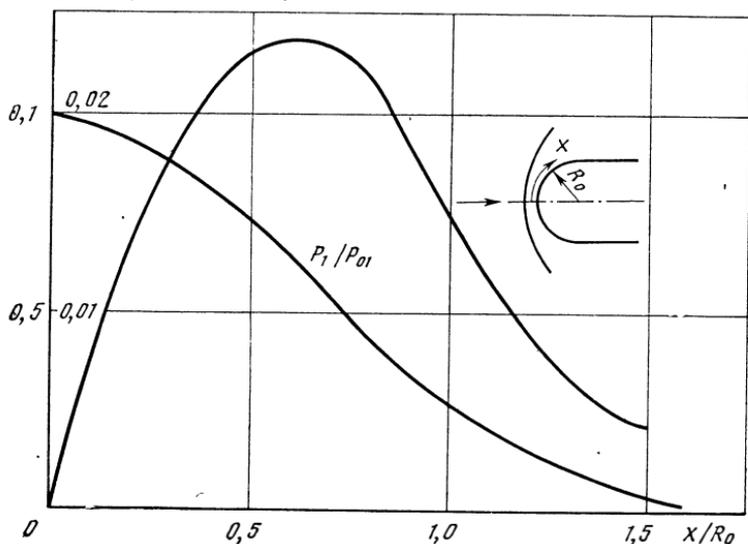


Рис. 12.21. Распределение давления и коэффициента теплоотдачи вдоль образующей сферического затупления при турбулентном режиме

$$P_1/P_{01}; Nu_{w0}/(Re_{w0}^{0,8} Pr^{0,43} K_T)$$

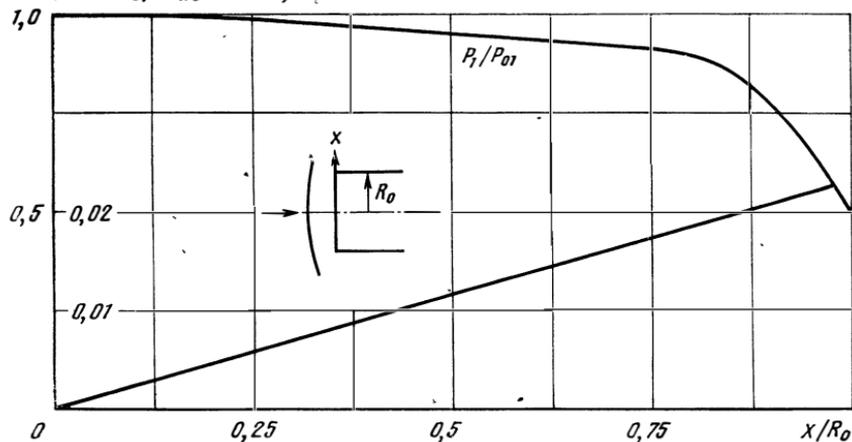


Рис. 12.22. Распределение давления и коэффициента теплоотдачи вдоль образующей плоского затупления при турбулентном режиме

На рис. 12.21 и 12.22 представлены расчетные зависимости для сферического и плоского торцов.

Для сравнения с соответствующими ламинарными тепловыми потоками на рис. 12.23 приведены распределения коэффициентов теплоотдачи при турбулентном и ламинарном режимах для двух значений числа Рейнольдса на каждом режиме.

Как видно, при уменьшении числа Рейнольдса турбулентный тепловой поток снижается сильнее, чем ламинарный. Расчеты по-

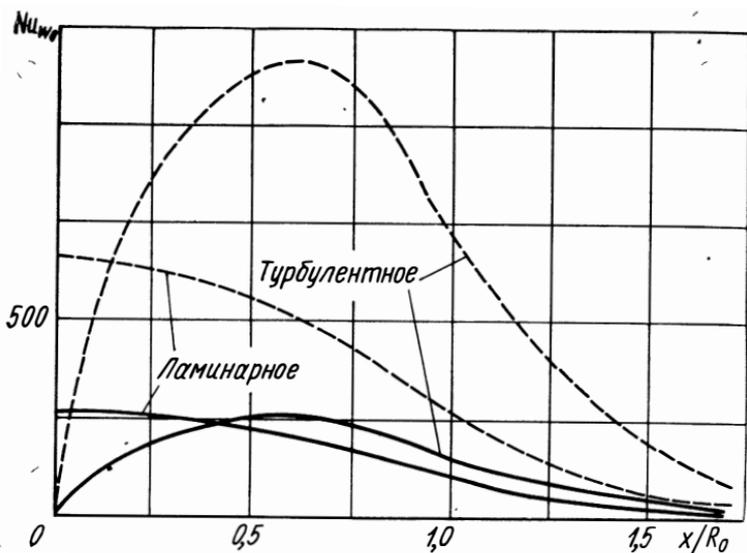


Рис 12.23. Сравнение коэффициентов теплоотдачи на сфере при ламинарном и турбулентном режимах течения:

--- $Re_{w0} = 8 \cdot 10^5$; — $Re_{w0} = 1,3 \cdot 10^5$

казывают, что при значении $Re_{w0} \approx 1,5 \cdot 10^5$ максимальные значения коэффициентов теплоотдачи при ламинарном и турбулентном режимах течения примерно равны. При этом устанавливается ламинарный режим на всей поверхности. Из опытов следует, что значение Re_{w0} при переходе ламинарного слоя в турбулентный равно на гладкой поверхности примерно $5 \cdot 10^5$.

б) Турбулентный пограничный слой в сопле.

Расчет теплообмена в сверхзвуковом сопле при заданном распределении давления ничем не отличается от расчета теплообмена вдоль образующей тела при внешнем обтекании и может быть сделан по формулам (12.54) и (12.59) или (12.60).

При использовании этих формул возникает вопрос о начале расчета. В ресивере или камере сгорания двигателя газ движется с относительно низкой средней скоростью. Около задней стенки обычно образуется несколько вихревых зон и пограничный слой сразу имеет некоторую конечную толщину. Значения коэффици-

ентов теплоотдачи в самой камере сильно зависят от условий подачи в нее газа или горючей смеси и должны определяться экспериментальным путем. Расчет теплообмена в камере сгорания осложняется еще тем, что температура торможения по длине камеры растет вследствие подвода тепла при горении. Расчетные зависимости для разных случаев рассматриваются в специальных курсах и могут быть представлены в виде [20]

$$\frac{Nu_W}{Re_W^{0,8} Pr_W^{0,43} K_T} = A.$$

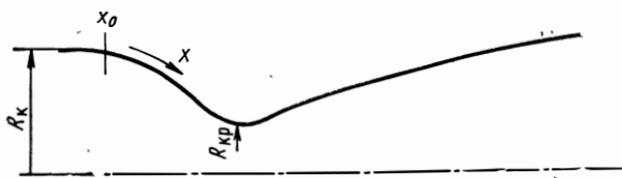


Рис. 12.24. Примерный профиль сверхзвукового сопла

При расчете камер сгорания ЖРД используют в качестве характерной температуры среднюю температуру

$$T' = T_{cp} = \frac{T_W + T_1}{2}.$$

Тогда

$$K_T = \left(\frac{q'}{q_W}\right)^{0,8} \left(\frac{\mu'}{\mu_W}\right)^{0,2}.$$

Значение $A \approx 0,026$.

При приближении к соплу течение стабилизируется и здесь пригодна формула (12.54).

Для камер двигателей можно приближенно принять, что слой стабилизируется на расстоянии от входа в сопло порядка радиуса камеры R_k . Тогда в начале сопла (при $x = x_0$) $x_{эф0} \sim R_k$ (рис. 12.24).

Внутри сопла

$$x_{эф} = x_{эф0} \frac{(q_W u_1 R^{5/4})_k}{q_W u_1 R^{5/4}} + \frac{\int_{x_0}^x q_W u_1 R^{5/4} dx}{q_W u_1 R^{5/4}}. \quad (12.67)$$

Формула для расчета теплообмена

$$q_W = 0,0296 Pr^{-0,57} K_T \frac{q_W u_1 \mu_W^{0,2}}{x_{эф}^{0,2}} c_p \frac{(T_e - T_W)}{Pr}, \quad (12.68)$$

где

$$K_T = \left(\frac{T_W}{T_e}\right)^{0,4+0,2 \exp(-r\omega)} (1 + \omega r)^{0,11};$$

$$T_e = \frac{T_0}{(1 + \omega)} (1 + \omega r); \quad \omega = \frac{k-1}{2} M_1^2; \quad r = 0,88.$$

На рис. 12.25 представлены результаты расчета распределения давления p_1/p_0 по длине сопла, изображенного на рис. 12.24 при $k=1,4$, и распределения комплекса

$$\frac{Nu_{W0}}{(Re_{W0})^{0,8} Pr^{0,43} K_T} = \bar{\alpha}_0,$$

где
$$Nu_{W0} = \frac{\alpha R_{кр}}{\lambda_{W, \lambda}}; \quad Re_{W0} = \frac{a_0 \rho_{W0} R_{кр}}{\mu_W}.$$

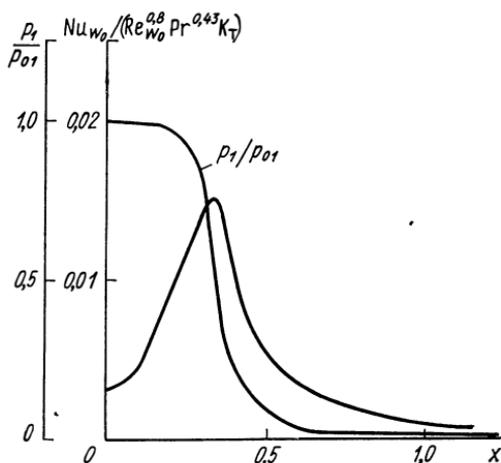


Рис 12.25. Распределение давления и коэффициентов теплообмена по длине сопла

Преобразуя формулу (12.68), получаем

$$\frac{Nu_{W0}}{Re_{W0}^{0,8} Pr^{0,43} K_T} = 0,0296 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{0,8} \left(\frac{u_1}{a_0} \right)^{0,8} \left(\frac{x_{эф}}{R_{кр}} \right)^{-0,2}.$$

Влияние химических реакций на теплообмен изложено в гл. XIV.

12.9.3. Обобщение экспериментальных данных

Формула (12.54) может быть использована для обобщения экспериментальных данных и уточнения значения K_T на основании экспериментов, проведенных в различных случаях, в виде

$$(Nu_W)_{эф} = 0,0296 K_T (Re_W^{0,8})_{эф} Pr^{0,43}, \quad (12.69)$$

где
$$(Nu_W)_{эф} = \frac{\alpha x_{эф}}{\lambda_W}; \quad (Re_W)_{эф} = \frac{u_1 \rho_W x_{эф}}{\mu_W}.$$

Если на каком-либо теле с произвольным распределением давления измерено распределение тепловых потоков, то эффективная длина определяется из формулы (12.55):

$$x_{эф} = \frac{Q_w}{2,5\pi R q_w} \text{ — для осесимметричного течения;}$$

$$x_{эф} = \frac{Q_w}{1,25q_w} \text{ — для плоского течения,}$$

где

$$Q_w = \int_F q_w dF \quad (12.70)$$

— суммарное количество тепла, отданное в стенки на расстоянии от критической точки до рассматриваемого сечения. В слу-

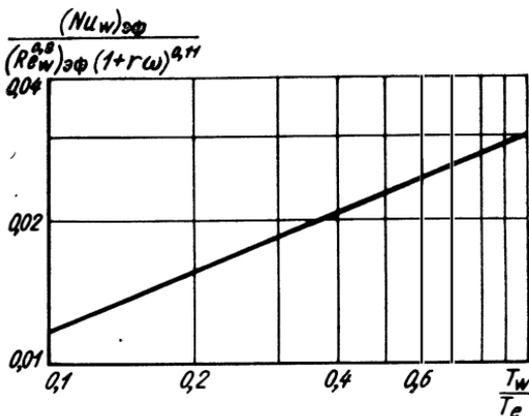


Рис. 12.26. Обобщенная экспериментальная зависимость коэффициента теплоотдачи от температуры при использовании $x_{эф}$:

для пластины и конуса при $M=2,5-4,5$, и сопла при $M=6-10$

чае плоского течения берется полоса поверхности единичной ширины.

При известном значении $x_{эф}$ из экспериментов можно уточнить значение K_T в формуле (12.69).

Если измерения q_w проводились только в одной точке и суммарный тепловой поток в стенки не может быть найден из формулы (12.70), то $x_{эф}$ можно определять по формуле (12.59), задаваясь видом зависимости K_T от M и T_w/T_e .

Далее значение K_T уточняется из эксперимента и формулы (12.69). Вносимая погрешность из-за возможной ошибки в определении $x_{эф}$ будет незначительна, так как значение $x_{эф}$ входит в формулу в степени одной пятой.

На рис. 12.26 представлены результаты измерений теплообмена на различных телах при различных отношениях T_w/T_e .

Рекомендуемая литература:

основная: [5, 140];

дополнительная: [1, 2, 11, 18, 20, 21, 34, 53, 68, 69, 70, 71, 84, 95, 97, 126, 139, 141, 149].

ТЕПЛОБМЕН И ТРЕНИЕ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Термин «проницаемая поверхность» предполагает, что через поверхность тела возможно просачивание газа или жидкости. При этом в пограничный слой подается (вдувается) некоторая масса газа или, наоборот, некоторая масса газа отводится (отсасывается) через стенку из пограничного слоя.

Поток массы газа может создаваться или возникать в самых разнообразных случаях. Так, например, для тепловой защиты элементов летательных аппаратов и двигателей используется пористое охлаждение, при котором через специальную пористую или перфорированную поверхность в пограничный слой подается некоторая масса охлаждающего газа (рис. 13.1) или жидкости. Подача массы в пограничный слой от поверхности имеет место также при испарении, или сублимации, специальных

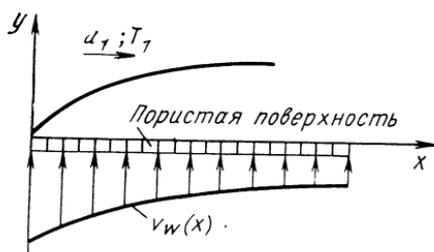


Рис. 13.1. Схема пористого охлаждения

теплозащитных покрытий при подводе извне тепла, при разложении вещества, из которого сделана поверхность, при химических реакциях между внешним потоком и поверхностью с образованием газообразных продуктов и т. д. Дополнительная масса может не только подаваться в пограничный слой, но также и отсасываться из него через пористую или перфорированную поверхность. Это же явление может иметь место, например, при конденсации, в случае протекания химических реакций между внешним потоком и поверхностью с образованием жидких и твердых веществ и т. д. Иногда отсос через проницаемую поверхность организуется принудительно с целью ламинаризации пограничного слоя, предотвращения его отрыва. Просачивание газа через поверхность происходит, например, при обтекании парашюта, изготовленно-

го из проницаемой ткани. Во всех этих случаях поверхность может рассматриваться как проницаемая.

Из приведенного далеко не полного перечня практических примеров видно, насколько важны вопросы теплообмена и трения на проницаемой поверхности.

В большинстве случаев подача или отсос массы через поверхность сопровождается разнообразными физико-химическими явлениями, оказывающими влияние на характеристики пограничного слоя.

В настоящей главе рассматриваются главные особенности, связанные с тем, что при вдуве или отсосе вертикальная скорость на стенке отлична от нуля, и с тем, что физические свойства вдуваемого (отсасываемого) газа могут отличаться от физических свойств газа во внешнем потоке. Предполагается, что газ в пограничном слое является совершенным и что химические реакции и фазовые превращения могут иметь место только на поверхности тела и отсутствуют внутри пограничного слоя. При рассмотрении влияния диффузии с целью наглядности результатов используется, в основном, упрощенная теория, предполагающая справедливость закона Фика, строго верная только для бинарной смеси.

13.1. ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЯ СМЕСИ ГАЗОВ

Если физические свойства газа, подаваемого через поверхность, не отличаются от физических свойств набегающего потока, то система уравнений пограничного слоя полностью совпадает с системой (11.14) — (11.17) на непроницаемой поверхности.

Однако граничные условия на стенке в силу того, что вертикальная составляющая скорости при подаче массы газа в пограничный слой отлична от нуля, будут иметь другой вид:

$$y=0; u=0; v=v_w(x) \quad (13.1)$$

Здесь v_w — задаваемая заранее или определяемая из условия баланса массы на стенке вертикальная скорость подачи газа от стенки. Таким образом, значение v_w в общем случае является некоторой функцией x (рис. 13.1).

Если газ, подаваемый через проницаемую поверхность при ($v_w > 0$), отличается по свойствам от газа во внешнем потоке, то в пограничном слое будет распространяться смесь газов, состоящая из n компонентов, отличающихся по своим физическим свойствам. В такой смеси могут возникнуть перенос массы путем диффузии и связанный с ним перенос энергии.

Обозначим через

ρ_i — плотность i -го компонента, кг/м³;

p_i — парциальное давление i -го компонента, Па;

m_i — молекулярная масса i -го компонента, кг/моль;

ρ — плотность смеси, кг/м³;

p — давление смеси, Па;

m — молекулярная масса смеси, кг/моль.

Каждый компонент смеси представляет собой совершенный газ, для которого справедливо уравнение состояния

$$p_i = \rho_i R_i T, \quad (13.2)$$

где $R_i = R_0/m_i$ — газовая постоянная i -го компонента в Дж/(кг·К);

$R_0 = 8315$ — универсальная газовая постоянная в Дж/(моль·К).

Массовая концентрация i -го компонента в смеси представляет собой отношение ее плотности к плотности смеси, т. е.

$$C_i = \frac{\rho_i}{\rho}. \quad (13.3)$$

Из определения ρ_i и ρ следует, что

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i, \quad (13.4)$$

а для смеси газов, состоящей из n компонентов,

$$\sum_{i=1}^n C_i = 1, \quad (13.5)$$

т. е. сумма массовых концентраций компонентов, составляющих смесь газа, равна единице.

Объемная (или мольная) концентрация i -го компонента в смеси представляет собой отношение парциального давления к давлению смеси:

$$x_i = \frac{p_i}{p}. \quad (13.6)$$

Используя закон Дальтона

$$p = \sum p_i, \quad (13.7)$$

получаем для смеси газов, состоящей из n компонентов,

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1. \quad (13.8)$$

Средняя массовая теплоемкость смеси c_p в кДж/(кг·К) связана с массовыми теплоемкостями компонентов $(c_p)_i$ уравнением

$$c_p = \sum_{i=1}^n (c_p)_i C_i. \quad (13.9)$$

Для совершенного газа предполагается, что $(c_p)_i = \text{const}$. При этом теплоемкость смеси не зависит от температуры, а зависит только от состава смеси. Средняя (кажущаяся) молекулярная масса смеси равна

$$m = \left(\sum_{i=1}^n \frac{C_i}{m_i} \right)^{-1} \quad (13.10)$$

Газовая постоянная смеси

$$R = \frac{R_0}{m} = \sum_{i=1}^n R_i C_i \quad (13.11)$$

и может быть вычислена при известной средней молекулярной массе смеси.

Используя уравнения (13.2), (13.7) и (13.11), получаем уравнение состояния для смеси газов:

$$p = \rho RT, \quad (13.12)$$

где p — полное давление смеси газов;

T — температура смеси.

Массовая энтальпия (или теплосодержание) смеси газов подсчитывается по формуле

$$i = \sum_{i=1}^n i_i C_i, \quad (13.13)$$

где $i_i = \int_0^T (c_p)_i dT$ — теплосодержание единицы массы отдельного компонента в кДж/кг.

Для совершенного газа $(c_p)_i = \text{const}$ и $i_i = (c_p)_i T$.

При решении системы уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя необходимо уметь рассчитывать, кроме термодинамических свойств смеси свойства переноса (коэффициент вязкости μ и коэффициент теплопроводности λ).

Коэффициент вязкости смеси μ может быть определен через коэффициенты вязкости отдельных компонентов по приближенной формуле Манна [38]:

$$\mu = \left(\sum \frac{C_i}{\mu_i} \right)^{-1}. \quad (13.14)$$

Более точное выражение для вязкости смеси можно найти в работе [37].

Коэффициент теплопроводности смеси можно определить по формуле, полученной в работе [152]:

$$\lambda = 0,5 \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i / \lambda_i)} \right]. \quad (13.15)$$

Коэффициенты переноса, подсчитанные для различных газов (кислород, воздух, азот, углекислый газ), представлены на рис. 13.2.

13.1.1. Перенос массы

Если в смеси газов концентрация компонентов переменна, то возникают диффузионные потоки массы

$$\vec{g}_i = \rho_i \vec{v}_i. \quad (13.16)$$

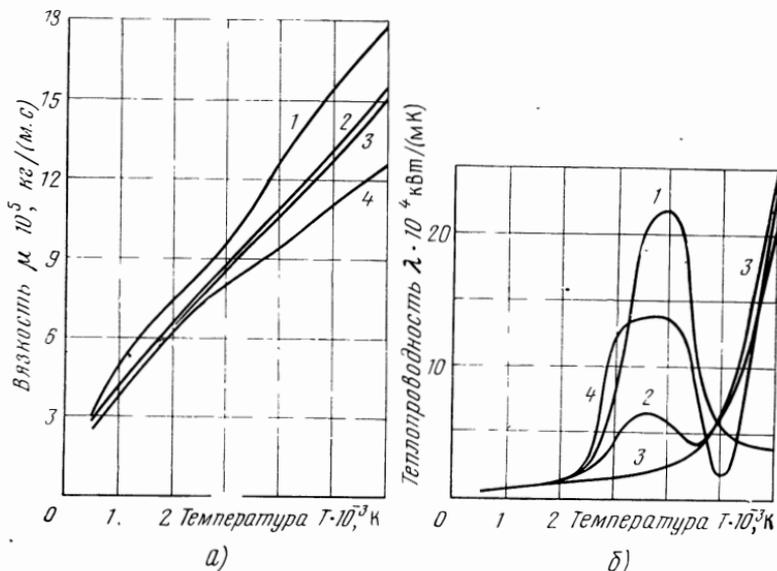


Рис. 13.2. Зависимости от температуры:

а—вязкости различных газов; б—теплопроводности; 1—O₂; 2—воздух; 3—N₂, 4—CO₂

Здесь \vec{v}_i — скорость диффузии i -го компонента в смеси, которая определяется как разность между абсолютной скоростью i -го компонента (\vec{V}_i) и среднемассовой скоростью (\vec{V}) потока, т. е.

$$\vec{v}_i = \vec{V}_i - \vec{V}. \quad (13.17)$$

Поток массы смеси газов равен

$$\rho \vec{V} = \sum_{i=1}^n \rho_i \vec{V}_i, \quad (13.18)$$

и сумма всех диффузионных потоков равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \vec{g}_i = \sum_{i=1}^n \rho_i \vec{v}_i = 0. \quad (13.19)$$

Поток массы какого-либо компонента возникает под действием градиента концентрации этого компонента и зависит также от градиентов концентрации и от диффузионных потоков других компонентов.

Если смесь состоит из двух компонентов, то она называется бинарной, и диффузионные потоки определяются законом Фика:

$$\vec{g}_1 = -\vec{g}_2 = -\rho D_{12} \text{grad } C_1 = \rho D_{21} \text{grad } C_2. \quad (13.20)$$

Здесь $D_{12} = D_{21} = D$ — коэффициент диффузии бинарной смеси. Он пропорционален температуре в некоторой степени ($D \sim T^n$) и обратно пропорционален давлению. Для данной пары компонентов коэффициент бинарной диффузии может быть вычислен на базе кинетической теории газов с учетом взаимодействий между реальными частицами (молекулы, атомы). Относительно характера взаимодействия между молекулами (атомами) приходится делать различные предположения, требующие экспериментальной проверки.

Наряду с критерием подобия Pr в этом случае вводится понятие диффузионного числа Прандтля

$$(Pr)_\mu = \frac{\mu}{\rho D}, \quad (13.21)$$

характеризующего соотношение между вязкостью и диффузией, а также числа Льюиса—Семенова.

$$Le = \frac{\lambda}{\rho D c_p}, \quad (13.22)$$

характеризующего соотношение между диффузией и теплопроводностью.

Если смесь газов включает в себя более, чем два компонента, она называется многокомпонентной, и выражение для диффузионного потока i -го компонента можно определить из кинетической теории газов [37]:

$$\vec{g}_i = \frac{m_i}{m^2} \rho \sum_j^n D_{ij}^* \text{grad } (m C_j), \quad (13.23)$$

где D_{ij}^* — коэффициенты диффузии многокомпонентной смеси [11], сложным образом зависящие от значений коэффициентов бинарной диффузии всех рассматриваемых компонент D_{ij} и их концентраций $D_{ii}^* = 0$. Для бинарной смеси формула (13.23) переходит в формулу (13.20).

В ряде случаев все газы в смеси можно разбить на две группы с примерно одинаковыми свойствами в каждой группе и приближенно такую смесь рассматривать как бинарную.

Рассмотрим здесь систему уравнений и граничных условий для случая течения бинарной смеси в пограничном слое.

13.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВУХМЕРНОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

Система уравнений движения и неразрывности для всей смеси газов имеет вид, аналогичный уравнениям (11.14) и (11.15):

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (13.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0. \quad (13.25)$$

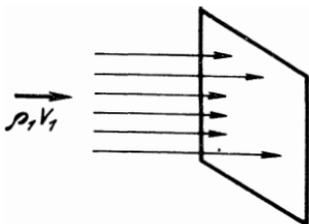


Рис. 13.3. К выводу уравнения диффузии для компонента

Уравнения диффузии могут быть получены из условия неразрывности для отдельных компонентов. Поток массы для первого компонента через единичную площадку, расположенную перпендикулярно потоку (рис. 13.3), равен

$$\vec{K}_1 = \rho_1 \vec{V}_1 = \rho \vec{V} C_1 + \vec{g}_1. \quad (13.26)$$

Условие неразрывности потока первого компонента состоит в том, что для стационарного режима

$$\text{div} (\rho \vec{V} C_1 + \vec{g}_1) = 0. \quad (13.27)$$

В декартовой системе координат уравнение (13.27) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u C_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v C_1) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial C_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial C_1}{\partial y} \right). \quad (13.28)$$

Преобразуем это уравнение:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial C_1}{\partial x} + \rho v \frac{\partial C_1}{\partial y} + C_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial C_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial C_1}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (13.29)$$

Используя уравнение (13.25) и учитывая, что в приближении пограничного слоя (см. разд. 11.2) первый член в правой части значительно меньше второго, получаем уравнение неразрывности для первого компонента:

$$\rho u \frac{\partial C_1}{\partial x} + \rho v \frac{\partial C_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial C_1}{\partial y} \right). \quad (13.30)$$

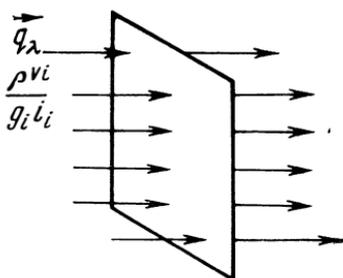
Аналогичным образом можно получить уравнение неразрывности для второго компонента, однако оно не используется, поскольку суммирование уравнений неразрывности для обоих компонентов приводит к уравнению неразрывности для всей смеси (13.25).

13.2.1. Уравнение энергии

Поток тепла через единичную площадку (рис. 13.4) складывается из переноса энергии теплопроводностью, потоком массы и диффузией

$$\vec{g} = -\lambda \text{grad } T + \rho \vec{V} i + \sum_{i=1}^2 \vec{g}_i i_i, \quad (13.31)$$

Рис. 13.4 К выводу уравнения энергии



где i — энтальпия бинарной смеси, подсчитываемая по уравнению

$$i = i_1 C_1 + i_2 C_2. \quad (13.32)$$

Энтальпия для каждого компонента $i_i = \int_0^T (c_p)_i dT$ для совершенного газа [$(c_p)_i = \text{const}$] имеет простое выражение $i_i = (c_p)_i T$.

Выразим температурный градиент ($\text{grad } T$) через градиент энтальпии:

$$\text{grad } i = (c_p)_1 C_1 \text{grad } T + i_1 \text{grad } C_1 + (c_p)_2 C_2 \text{grad } T + i_2 \text{grad } C_2. \quad (13.33)$$

С учетом уравнений (13.5) и (13.9) получаем, что

$$\text{grad } T = \frac{1}{c_p} \text{grad } i - \frac{1}{c_p} (i_1 - i_2) \text{grad } C_1. \quad (13.34)$$

Отсюда, используя уравнения (13.19), (13.20), (13.22) и (13.31), получаем величину удельного теплового потока

$$\vec{q} = -\frac{\lambda}{c_p} \text{grad } i + \rho \vec{V} i - (i_1 - i_2)(1 - \text{Le}) \rho D \text{grad } C_1. \quad (13.35)$$

Учитывая, что внутри элементарного объема выделяется тепло от работы сил трения («диссипация кинетической энергии») и сил давления в количестве (см. разд. 11.2)

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx},$$

уравнение сохранения энергии можно записать в виде

$$\operatorname{div} \vec{q} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx}. \quad (13.36)$$

С учетом обычных допущений для пограничного слоя уравнение энергии при использовании уравнения (13.25) приводится к виду

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial i}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \\ + u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 - \operatorname{Le}) (i_1 - i_2) \rho D \frac{\partial C_1}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (13.37)$$

Если принять $\operatorname{Le} = \lambda / (\rho D c_p) \approx 1$, то уравнение энергии (13.37) по виду будет совпадать с уравнением (11.16), полученным для случая течения однородного газа, с той лишь разницей, что роль теплоемкости $c_p T$ играет теперь энтальпия смеси i . Этот результат справедлив, конечно, и для однородного газа при $i_1 = i_2$. Если воспользоваться уравнениями (13.31) и (13.36), то можно получить другую форму уравнения энергии для бинарной смеси

$$\begin{aligned} \rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx} + \\ + \rho D [(c_p)_1 - (c_p)_2] \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial C_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (13.38)$$

Здесь $c_p = (c_p)_1 C_1 + (c_p)_2 C_2$ — средняя теплоемкость смеси, величина существенно переменная, даже если теплоемкости отдельных компонентов постоянны, а $c_p dT \neq di$.

Полученные уравнения справедливы в общем случае зависимости ρ , μ и λ от температуры и концентрации. Перенос энергии за счет диффузии при различных теплоемкостях компонентов учитывается последним членом в правой части уравнения (13.38).

13.3. ВЛИЯНИЕ ПОДАЧИ В ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ГАЗА С ТЕМИ ЖЕ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ, ЧТО И ВО ВНЕШНЕМ ПОТОКЕ

13.3.1. Критерии подобия

Пусть через стенку подается газ, совпадающий по своим свойствам с газом внешнего потока. К числу физических пара-

метров, определяющих задачу, добавляется величина интенсивности подачи массы через стенку

$$\varrho_w v_w = (\varrho_{w0} v_{w0}) f\left(\frac{x}{l}\right), \quad (13.39)$$

где l — характерный размер тела.

Безразмерная функция $f(x/l)$ в общем случае может быть произвольной. При заданном виде $f(x/l)$ в число критериев подобия, кроме указанных в формуле (11.31), нужно внести критерий, характеризующий интенсивность вдува; например,

$$\overline{\varrho_w v_w} = \frac{\varrho_w v_w}{\varrho u}. \quad (13.40)$$

Критериальная зависимость для расчета теплообмена на теле заданной формы при ламинарном режиме течения будет иметь вид

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \Phi\left(M, Pr, \frac{T_w}{T}, k, \overline{\varrho_w v_w}, \frac{x}{l}\right), \quad (13.41)$$

На практике, однако, удобнее вносить поправку на влияние вдува в относительной форме, относя значение коэффициента теплоотдачи при наличии вдува (α) к его значению на непроницаемой поверхности при тех же условиях течения (α_0). Обозначим

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_0}. \quad (13.42)$$

Поскольку α_0 предполагается заданной величиной, то в качестве безразмерного критерия вдува, вместо $\overline{\varrho_w v_w}$, можно ввести

$$\bar{G} = \frac{\varrho_w v_w}{\alpha_0 / c_p}. \quad (13.43)$$

Тогда критериальную зависимость для теплообмена при наличии вдува можно представить в виде

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \Phi_1\left(M, \frac{T_w}{T}, Pr, \bar{G}, \frac{x}{l}\right). \quad (13.44)$$

Выбор вида критериев подобия и критериальных формул определяется простотой и универсальностью получаемых при их использовании формул.

13.3.2. Ламинарный пограничный слой на плоской проницаемой пластине

Рассмотрим в качестве примера простейший случай течения газа вдоль плоской пластины с малой скоростью (рис. 13.5). Пластина обтекается потоком со скоростью u , через пористую

поверхность подается газ с вертикальной скоростью v_w , в общем случае переменной по длине [$v_w = v_w(x)$].

В этом случае уравнения количества движения и энергии остаются такими же, как и при движении газа вдоль непроницаемой поверхности:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (13.45)$$

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (13.46)$$

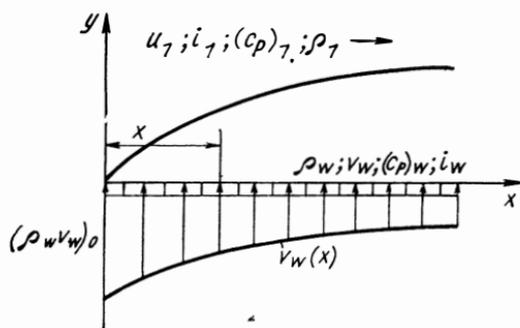


Рис. 13.5. Обтекание пористой пластины потоком газа

Однако граничные условия на стенке при вдуве газа в пограничный слой существенно изменяются:

при $y=0 \quad u=0, \quad v=v_w(x), \quad T=T_w(x); \quad (13.47)$

граничные условия во внешнем потоке остаются без изменения:

при $y \rightarrow \infty \quad u \rightarrow u_1, \quad T \rightarrow T_1. \quad (13.48)$

13.3.3. Баланс массы у поверхности

При взаимодействии пограничного слоя с поверхностью значения концентраций компонентов смеси у стенки и ее температура связаны с условиями отвода (или подвода) вещества и энергии от стенки. Рассмотрим баланс массы на проницаемой поверхности при наличии вдува (рис. 13.6) для случая течения бинарной смеси. Обозначим через G — секундный расход массы газа, подаваемого через единицу площади пористой пластины; C_{10} и C_{20} — концентрации компонентов в подаваемом газе; C_{11} и C_{21} — концентрации компонентов вне пограничного слоя.

Внутри пористой пластины нет источников и стоков массы, поэтому уравнение неразрывности для всей смеси имеет вид

$$G = \rho_w v_w. \quad (13.49)$$

Условие неразрывности для первого компонента —

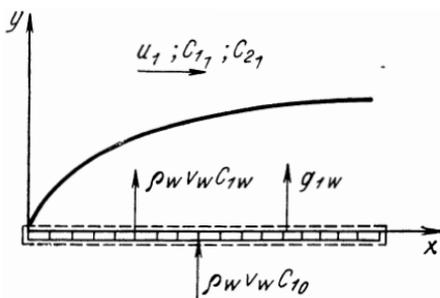
$$\rho_w v_w C_{10} = \rho_w v_w C_{1w} - \rho_w D \left(\frac{\partial C_1}{\partial y} \right)_w. \quad (13.50)$$

Левая часть определяет количество первого компонента, подаваемого через пластину, правая часть — количество первого компонента, отводимое от стенки движущимся от стенки газом (первый член) и диффузией (второй член).

Аналогичный вид имеет уравнение неразрывности для второго компонента:

$$\rho_w v_w C_{20} = \rho_w v_w C_{2w} - \rho_w D \left(\frac{\partial C_2}{\partial y} \right)_w. \quad (13.51)$$

Рис. 13.6. К выводу уравнения баланса массы для компонента в поверхности



Условие (13.50) или (13.51) можно использовать при решении уравнения диффузии (13.30) в качестве граничного условия. В этом случае должны быть заданы G и C_{10} .

13.3.4. Коэффициент массообмена

Диффузионный поток i -го компонента смеси к стенке определяется в бинарной смеси выражением

$$g_{iw} = \rho_w D \left(\frac{\partial C_i}{\partial y} \right)_w. \quad (13.52)$$

В практических приложениях используется понятие коэффициента массообмена β таким образом, чтобы

$$g_{iw} = \beta (C_{i1} - C_{iw}). \quad (13.53)$$

Значение коэффициента массообмена β характеризует интенсивность переноса массы в пограничном слое. Наряду со значением β удобно использовать значение коэффициента массообмена на непроницаемой поверхности β_0 .

Тогда безразмерный комплекс

$$Nu_{\lambda 0} = \frac{\beta_0 l}{D}$$

зависит от определяющих критериев подобия

$$Nu_{\lambda 0} = f \left(Re, M, Pr, \frac{T_w}{T_1}, Pr_{\lambda} \right), \quad (13.54)$$

и влияние подачи массы удается с удовлетворительной точностью учесть, воспользовавшись зависимостью β и β_0 в форме

$$\frac{\beta}{\beta_0} = f\left(\bar{G}, \frac{m_1}{m_w}\right), \quad (13.55)$$

где $\bar{G} = \frac{\rho_w v_w}{\rho_0 / c_p}$ и $\frac{m_1}{m_w}$ — отношения молекулярных масс газа во внешнем потоке и газа, подаваемого через пористую поверхность.

13.3.5. Баланс энергии у стенки

Поток энергии от стенки в пограничный слой определяется формулами (13.31) и (13.35) при $y=0$:

$$(q)_{y=0} = -\frac{\lambda}{c_p} \left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_w + \rho_w v_w i_w - (1 - Le)(i_{1w} - i_{2w}) \rho_w D_w \left(\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)_w \quad (13.56)$$

или

$$(q)_{y=0} = -\lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w + \rho_w v_w i_w - (i_{1w} - i_{2w}) \rho_w D_w \left(\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)_w \quad (13.57)$$

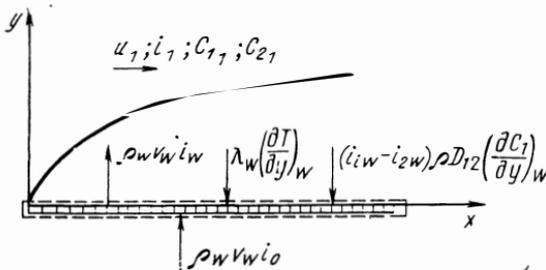


Рис. 13.7. К выводу уравнения теплового баланса на проницаемой поверхности

При отсутствии источников или стоков тепла этот поток энергии из условия ее сохранения равен потоку энергии, подаваемому с другой стороны пористой пластины:

$$q = \rho_w v_w i_0. \quad (13.58)$$

Тогда условие баланса тепла (рис. 13.7) может быть представлено в виде

$$\rho_w v_w (i_w - i_0) = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w + (i_{1w} - i_{2w}) \rho_w D_w \left(\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)_w; \quad (13.59)$$

$$\rho_w v_w (i_w - i_0) = \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial i}{\partial y}\right)_w + (1 - Le)(i_{1w} - i_{2w}) \rho_w D_w \left(\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)_w. \quad (13.60)$$

Правая часть уравнений (13.59) и (13.60) определяет поток энергии, передаваемый к стенке теплопроводностью и диффузией. Он затрачивается на изменение энтальпии вдуваемого га-

за при его подогреве в стенке и изменение энтальпии газа при смешении подаваемого газа с газом в пограничном слое на выходе газа из стенки.

Умножая уравнения неразрывности (13.50) на i_{1W} , а (13.51) — на i_{2W} , и учитывая, что $(\partial C_2/\partial y) = -(\partial C_1/\partial y)$, получаем после сложения с уравнением (13.59)

$$q_W v_W [C_{10}(i_{1W} - i_{10}) + C_{20}(i_{2W} - i_{20})] = \lambda_W \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_W. \quad (13.61)$$

Левая часть уравнения (13.61) определяет количества тепла, переданное стенке и затраченное на подогрев охладителя внутри стенки. Таким образом, поток тепла в стенку

$$q_W = \lambda_W \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_W \quad (13.62)$$

определяется так же, как и в однородном газе.

13.3.6. Коэффициент теплоотдачи

Для определения теплового потока, передаваемого от газа в стенку, может быть использовано выражение в такой же форме, как и в случае течения однородного газа, которое имеет вид (11.99):

$$q_W = \alpha (T_e - T_W). \quad (13.63)$$

Воспользуемся понятием обобщенного коэффициента теплоотдачи, представляющего собой отношение теплового потока к разности энтальпии газа во внешнем потоке и у стенки. Для этого правую часть уравнения (13.63) умножим и разделим на $(c_p)_1$:

$$q_W = \frac{\alpha}{(c_p)_1} [(c_p)_1 T_e - (c_p)_1 T_W]. \quad (13.64)$$

Обозначим $(c_p)_1 T_e = i_e$, где $i_e = (c_p)_1 + ru_1^2/2$ — эффективная энтальпия внешнего потока, а $(c_p)_1 T_W = i_W$ — энтальпия смеси, имеющей температуру стенки и состав внешнего потока. Тогда, опустив индекс «1» у теплоемкости, получаем выражение теплового потока в стенку в виде

$$q_W = \frac{\alpha}{c_p} (i_e - i_W). \quad (13.65)$$

Обобщенный коэффициент теплоотдачи $\alpha/c_p = q_W/(i_e - i_W)$ рассматривается как некоторый новый коэффициент пропорциональности. Формула (13.65) обобщает выражения (11.98), (11.99), введенные ранее.

13.4. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ТЕПЛООБМЕНЕМ И МАССООБМЕНЕМ

Рассмотрим сначала основные качественные физические особенности на примере течения бинарной смеси газов вдоль плоской пористой пластины при малых скоростях.

Стационарное течение бинарной смеси вдоль плоской пластины описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0; \quad (13.66)$$

уравнение количества движения

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (13.67)$$

уравнение неразрывности для компонента смеси (уравнение диффузии)

$$\rho u \frac{\partial C_1}{\partial x} + \rho v \frac{\partial C_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial C_1}{\partial y} \right); \quad (13.68)$$

уравнение энергии

$$\rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 - Le) (i_1 - i_2) \rho D \frac{\partial C_1}{\partial y} \right] \quad (13.69)$$

или

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + [(c_p)_1 - (c_p)_2] \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \rho D \left(\frac{\partial C_1}{\partial y} \right) \quad (13.70)$$

с граничными условиями:

при $y=0$ $u=0$; $v=v_w$; $i=i_w$ (или $T=T_w$); $C_1=C_{1w}$; (13.71)

при $y \rightarrow \infty$ $u \rightarrow u_1$; $i \rightarrow i_1$ (или $T \rightarrow T_1$); $C_1 \rightarrow C_{11}$.

Из этих уравнений можно получить условия аналогии в случае разнородных газов $[(c_p)_1 \neq (c_p)_2]$.

Если диффузионное число Прандтля $Pr_d = \frac{\mu}{\rho D}$ равно единице, то имеет место подобие профилей скорости $\bar{u} = u/u_1$ и концентрации $\bar{C}_1 = \frac{C_1 - C_{1w}}{C_{11} - C_{1w}}$ (рис. 13.8):

$$\frac{u}{u_1} = \frac{C_1 - C_{1w}}{C_{11} - C_{1w}}. \quad (13.72)$$

Если число Льюиса—Семенова $Le = \lambda / (\rho D c_p)$ равно единице, то последний член в уравнении (13.69) пропадает и имеет место по-

добие профилей концентрации \bar{C}_1 и энтальпии $\bar{i} = (i - i_w) / (i_1 - i_w)$ (рис. 13.9):

$$\frac{C_1 - C_{1W}}{C_{1_1} - C_{1W}} = \frac{i - i_w}{i_1 - i_w}. \quad (13.73)$$

И, наконец, при $Pr=1$ и $Le=1$ справедливы оба равенства (13.72) и (13.73) и, следовательно,

$$\frac{u}{u_1} = \frac{i - i_w}{i_1 - i_w} = \frac{C_1 - C_{1W}}{C_{1_1} - C_{1W}}. \quad (13.14)$$

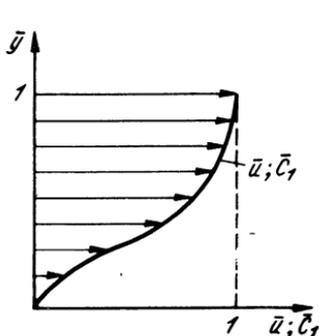


Рис. 13.8. Подобие профилей скорости и концентрации компонента при $Pr_d=1$

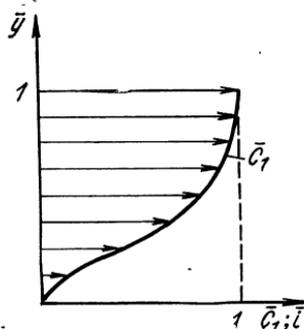


Рис. 13.9. Подобие профилей концентрации компонента и энтальпии при $Le=1$

Интересно отметить, что при выполнении условий (13.72) и (13.73) профили температуры могут иметь произвольный вид, поскольку в уравнении (13.70) последний член пропадает только в случае $(c_p)_1 = (c_p)_2$ (т. е. для однородного газа).

Из уравнения (13.73) следует, что

$$\frac{1}{i_1 - i_w} \left(\frac{\partial i}{\partial y} \right)_w = \frac{1}{C_{1_1} - C_{1W}} \left(\frac{\partial C_1}{\partial y} \right)_w. \quad (13.75)$$

Следовательно, у стенки

$$\left(\frac{\partial i}{\partial y} \right)_w = \frac{i_1 - i_w}{C_{1_1} - C_{1W}} \left(\frac{\partial C_1}{\partial y} \right)_w. \quad (13.76)$$

Для установления условия аналогии между теплообменом и массообменом необходимо найти связь между тепловыми и диффузионными потоками в стенку.

Тепловой поток в стенку на основании уравнения (13.62) равен

$$q_w = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w,$$

или в величинах энтальпии

$$q_w = \left(\frac{\lambda}{c_p}\right)_w \left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_w - \left(\frac{\lambda}{c_p}\right)_w (i_{1w} - i_{2w}) \left(\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)_w. \quad (13.77)$$

Используя соотношение (13.76) для случая $Le=1$, получаем

$$q_w = \frac{(gD)_w (\partial C_1 / \partial y)_w}{C_{1i} - C_{1w}} [(i_1 - i_w) - (i_{1w} - i_{2w})(C_{1i} - C_{1w})]. \quad (13.78)$$

После преобразований уравнения (13.78) получаем связь между тепловым и диффузионным потоками в стенку:

$$q_w = \frac{g_{1w}}{C_{1i} - C_{1w}} (i_1 - i'_w). \quad (13.79)$$

Из уравнения (13.79) следует, что

$$\frac{q_w}{i_1 - i'_w} = \frac{g_{1w}}{C_{1i} - C_{1w}}. \quad (13.80)$$

Левая часть уравнения (13.80) представляет собой обобщенный коэффициент теплоотдачи, а правая часть — коэффициент массообмена. Следовательно, обобщенный коэффициент теплоотдачи равен коэффициенту массообмена:

$$\frac{\alpha}{c_p} = \beta. \quad (13.81)$$

13.5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ. АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Уравнения ламинарного пограничного слоя в частных производных при произвольном распределении скорости внешнего потока и уравнения закона подачи массы через стенку могут быть решены численно на ЭВМ методами, например, описанными в работах [4, 8, 17]. Эффективность методов численного решения непрерывно возрастает в связи с усовершенствованием машин. Приближенные решения могут быть получены с помощью интегральных методов. Следует, однако, указать, что простые приближенные методы, использующие представления об эффективной длине или локальном подобии (см. разд. 11.12 и 11.11), дают в этом случае заметные погрешности, резко возрастающие с увеличением интенсивности подачи массы. Для быстрых оценок целесообразно использовать приближенный метод, основанный на введении поправок на влияние вдува в расчет, проведенный в предположении, что поверхность непроницаема.

Величины поправок можно получить, анализируя результаты расчетов, проведенных для случаев автомодельных течений.

13.5.1. «Подобные» решения

Преобразования подобия при развитии пограничного слоя на проницаемой поверхности возможны в тех же случаях, что и на непроницаемой поверхности (см. разд. 11.12). Однако при этом распределение интенсивности подачи газа через стенку должно удовлетворять условию $\bar{G} = \text{const}$. Если $M \ll 1$ (пограничный слой в дозвуковом двухмерном потоке, например, в области за сильной ударной волной), то условие подобия обеспечивается, если

$$u_1 = \beta x^m,$$

где β — постоянная величина.

Из формулы (11.108) следует, что

$$\frac{\alpha_0}{c_p} = \left(\frac{\text{Nu}}{\sqrt{\text{Re}}} \right)_w \frac{1}{\text{Pr}_w} \sqrt{\frac{\mu_w \varrho_w u_1}{x}}. \quad (13.82)$$

Из условия $\bar{G} = \frac{\varrho_w v_w}{\alpha_0 / c_p} = \text{const}$ получаем, если $T_w = \text{const}$,

$$\varrho_w v_w \sim \frac{\alpha_0}{c_p} \sim \sqrt{\frac{u_1}{x}} \sim x^{\frac{m-1}{2}}. \quad (13.83)$$

Для рассмотренного уже случая течения на пластине

$$\varrho_w v_w \sim x^{-1/2}. \quad (13.84)$$

Для течения в окрестности передней критической точки ($m=1$)

$$\varrho_w v_w = \text{const}. \quad (13.85)$$

Такие «подобные» решения ламинарного пограничного слоя на проницаемой поверхности рассматриваются, например, в работах [4, 5, 8, 25, 145].

В качестве примера приведем некоторые результаты расчетов пограничного слоя на пластине [17] и в окрестности передней критической точки [16, 24, 156]. На рис. 13.10 представлены зависимости безразмерных величин напряжения трения $\bar{\tau}_w = \tau_w / \tau_{w0}$

и обобщенного коэффициента теплоотдачи $\frac{\bar{\alpha}}{c_p} = \frac{\alpha}{c_p} / \left(\frac{\alpha}{c_p} \right)_0$ от безразмерного расхода охладителя \bar{G} .

В результате решения уравнений ламинарного пограничного слоя на пористой пластине было найдено распределение напряжения трения поперек пограничного слоя в зависимости от параметра $f_w = \frac{1}{2} \frac{(\varrho v)_w}{\varrho_1 u_1} \sqrt{\text{Re}_1}$ (рис. 13.11). Максимальное значение напряжения трения имеет место внутри пограничного слоя. Точки максимума соответствуют точкам перегиба профилей скорости. Линия, проходящая через точки перегиба, совпадает с ли-

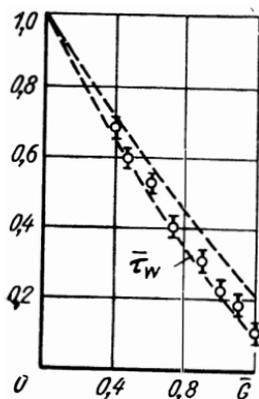


Рис. 13.10. Зависимость касательного напряжения τ_w и обобщенного коэффициента теплоотдачи α/c_p на проникаемой поверхности от расхода охладителя \bar{G}

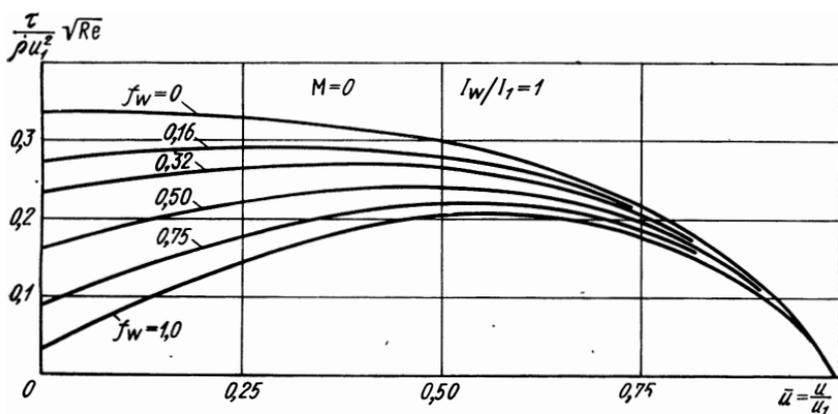
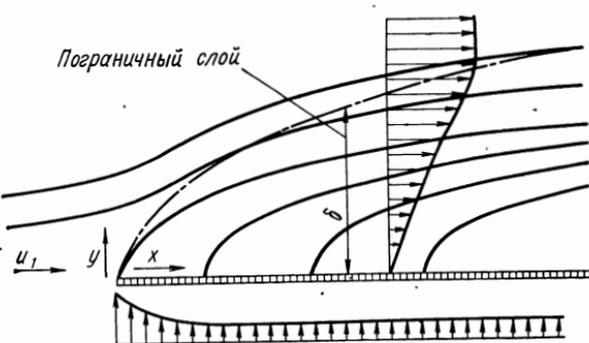


Рис. 13.11. Распределение напряжения трения поперек пограничного слоя при пористом охлаждении в зависимости от f_w

Рис 13.12 Линии тока и профиль продольной скорости в пограничном слое при подаче газа через проникаемую поверхность



нией тока в пограничном слое (рис. 13.12), начинающейся от переднего края пластины. Суммарный расход газа через пористую пластину на расстоянии x от переднего края равен расходу между стенкой и линией тока, проходящей через точки перегиба профилей, в сечении пограничного слоя, взятом на этом же расстоянии x . Эта линия тока как бы отделяет поданный через поверхность газ от внешнего течения. Следует, однако, иметь в виду, что, хотя через эту линию нет конвективного потока, молекулярный обмен между обеими частями (диффузия) всегда существует.

Из анализа уравнений для течения вдоль боковой поверхности конуса в сверхзвуковом потоке (см. разд. 11.14) следует, что для расчета можно пользоваться зависимостями, установленными для пластины, с учетом следующего правила. При одном и том же расстоянии от переднего края тепловые потоки и касательные напряжения на конусе в $\sqrt{3}$ раз больше, чем на пластине, если массовая скорость вдува в $\sqrt{3}$ раз больше массовой скорости вдува на пластине. Таким образом, для расчета могут быть использованы данные, полученные для пластины (см. рис. 13.10) с учетом $x_{эф}$ для конуса, т. е.

$$\left. \begin{aligned} (\tau_w)_{кон} &= \sqrt{3} (\tau_w)_{пл}; \\ (q_w)_{кон} &= \sqrt{3} \left(\frac{\alpha}{c_p} \right)_{пл} (T_e - T_w); \\ \bar{G}_{кон} &= \frac{\rho_w v_w}{(\alpha/c_p)_0} = \sqrt{3} \bar{G}_{пл}. \end{aligned} \right\} \quad (13.86)$$

Результаты численных расчетов ламинарного пограничного слоя на пористой поверхности, представленные на рис. 13.10, были получены при изменении чисел M_1 от 1,5 до 20 и T_w/T_1 от 0,5 до 5. Во всех случаях разброс расчетных точек для τ и α/c_p в данном диапазоне чисел Маха и T_w/T_1 не превышал $\pm 5\%$, т. е. результаты расчета с хорошей точностью ложатся на одни и те же кривые. Если ограничиться значением $\bar{\alpha}/c_p$ и $\bar{\tau}_w > 0,2$, то зависимости для $\bar{\alpha}$ и $\bar{\tau}_w$ могут быть аппроксимированы линейной функцией от \bar{G} [12]:

$$\frac{\bar{\alpha}}{c_p} = 1 - 0,85 \text{Pr}^{2/3} \left(\frac{m_1}{m_w} \right)^{0,3} \bar{G} = 1 - B'G; \quad (13.87)$$

$$\bar{\tau}_w = 1 - 0,85 \left(\frac{m_1}{m_w} \right)^{0,3} \bar{G}, \quad (13.88)$$

где m_1 — молекулярная масса газа внешнего потока;

m_w — молекулярная масса охладителя.

Отметим, что при $\text{Pr} \neq 1$ связь между трением и теплообменом характеризуется фактором аналогии Рейнольд-

с а S, который существенно зависит от интенсивности подачи охладителя. При $\bar{G}=0$ $S \approx \text{Pr}^{2/3}$.

При возрастании \bar{G} коэффициент трения убывает быстрее, чем коэффициент теплоотдачи (см. рис. 13.10) и значение S увеличивается, достигая весьма больших значений при подходе к предельным значениям \bar{G} . Если $\text{Pr}=1$, то $S=1$ при любых \bar{G} .

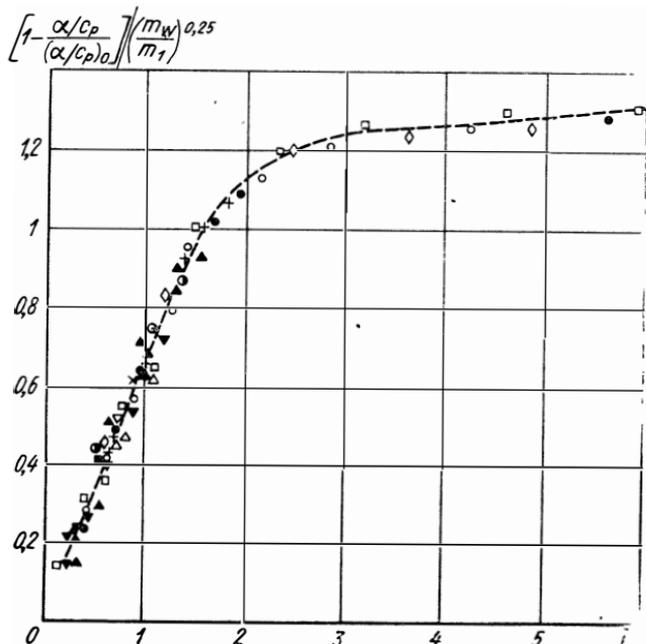


Рис. 13.13. Зависимость параметра $\frac{1 - \bar{\alpha}/c_p}{(m_1/m_w)^{0,25}}$ от безразмерного расхода охладителя \bar{G}

Результаты расчета коэффициента теплоотдачи на проницаемой поверхности для случая течения в окрестности передней критической точки тела [17, 25, 105] представлены на рис. 13.13. Результаты, приведенные различными авторами [17, 25, 105], хорошо согласуются между собой и в области малых массовых расходов охладителя ($\bar{G} < 1,5$); зависимость для коэффициентов теплоотдачи $\bar{\alpha}/c_p$ аппроксимируется линейной функцией от \bar{G} :

$$\frac{\bar{\alpha}}{c_p} = \frac{\alpha/c_p}{(\alpha/c_p)_0} = 1 - 0,67 \left(\frac{m_1}{m_w} \right)^{0,25} \bar{G} = 1 - B'' \bar{G}. \quad (13.89)$$

При $\bar{G} > 1,5$

$$\frac{\bar{\alpha}}{c_p} = \frac{\alpha/c_p}{(\alpha/c_p)_0} = 1 - \left(\frac{m_1}{m_w} \right)^{0,25} \exp [0,2303 (-0,45 + 0,3\bar{G})]. \quad (13.90)$$

Полученные корреляционные зависимости для \bar{a}/c_p и $\bar{\tau}_w$ позволяют быстро и с достаточной точностью рассчитать теплообмен при наличии подачи газа в ламинарный пограничный слой.

13.6. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПОРИСТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ламинарный пограничный слой устанавливается только при малых числах Рейнольдса. При течении вдоль пористой поверхности и подаче газа в пограничный слой устойчивость ламинарного движения уменьшается и переход от ламинарного режима к турбулентному наступает ранее.

При турбулентном режиме теплообмен и сопротивление возрастают так, что при малых скоростях подачи охладителя через пористую стенку пористое охлаждение может привести даже к отрицательному эффекту. При дальнейшем увеличении расходов охладителя тепловые потоки даже в случае турбулентного режима становятся меньше потоков на непроницаемой поверхности при ламинарном режиме.

13.6.1. Влияние подачи газа через пористую поверхность на турбулентный пограничный слой

В общем влияние подачи массы на турбулентный пограничный слой аналогично соответствующему влиянию на ламинарный слой. Профили скорости деформируются — становятся более урезанными (рис. 13.14), толщина слоя возрастает. Однако при малых скоростях подачи охладителя профили не имеют точки перегиба, при дальнейшем увеличении скорости подачи охладителя появляется точка перегиба и профиль скорости имеет вид, аналогичный профилю скорости в свободной турбулентной струе. Деформация профиля происходит аналогично деформации профиля скорости при положительном градиенте давления.

Качественно можно выделить три основных режима течения в турбулентном пограничном слое при вертикальной подаче газа. При сравнительно малых интенсивностях подачи охладителя действие его сказывается только в ламинарном подслое. Если на непроницаемой стенке ($v_w=0$) профиль скорости в подслое близок к линейному (рис. 13.15), то при малой подаче газа через пористую поверхность ($v_w>0$) профиль скорости в ламинарном подслое деформируется,

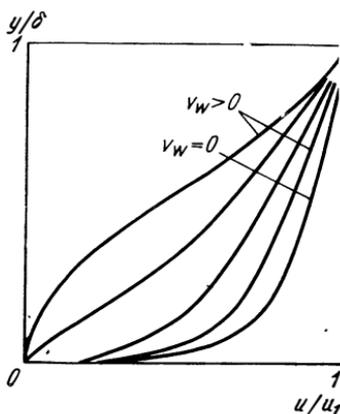


Рис. 13.14. Профили скорости при турбулентном режиме течения вдоль пористой поверхности

получает точку перегиба. При расчете такого случая предполагается, что течение во внешней части — турбулентном ядре — не изменилось и, следовательно, для внешней части могут быть использованы все зависимости, полученные для случая непроницаемой поверхности. Такая теория, называемая пленочной теорией, дает удовлетворительное совпадение с экспериментом даже при значительных скоростях подачи газа.

При дальнейшем увеличении подачи охладителя его влияние начинает сказываться и в турбулентной части слоя. Этот наиболее

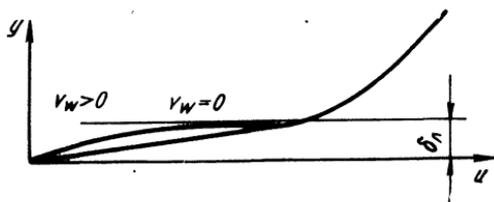


Рис. 13.15. Деформация профиля скорости в ламинарном подслое

важный случай труднее всего поддается теоретическому расчету. Главную роль здесь начинают играть экспериментальные исследования. Однако имеются попытки применить для решения такой задачи метод, аналогичный методу получения логарифмиче-

ского закона для непроницаемой стенки. Напряжение трения представляется в виде формулы Прандтля

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2,$$

(где l — путь перемешивания). Подача газа при этом учитывается тем, что напряжение трения принимается поперек пограничного слоя переменным.

Третий режим течения на пористой поверхности соответствует такому расходу охладителя, при котором влияние стенки на пограничный слой ослабевает, пограничный слой становится подобным пограничному слою на краю турбулентной струи. При этом режиме исчезает влияние числа Рейнольдса. При дальнейшем увеличении скорости подачи охладителя пограничный слой полностью оттесняется от стенки. Коэффициенты трения и теплообмена между внешним потоком и стенкой при этом стремятся к нулю.

При расчете такого случая могут найти применение методы расчета свободных турбулентных струй. Величина расхода охладителя, при котором происходит оттеснение пограничного слоя, примерно соответствует расходу, увлекаемому пограничным слоем на краю свободной турбулентной струи.

13.6.2. Экспериментальные исследования

К настоящему времени накоплен достаточно обширный экспериментальный материал по исследованию теплообмена на про-

ницаемой поверхности при турбулентном режиме течения в пограничном слое.

Рассмотрим течение газа вдоль плоской пластины.

На рис. 13.16 приведены профили скоростей при подаче газа в турбулентный пограничный слой. По мере увеличения интенсивности вдувания газа в пограничный слой толщина слоя возрастает, профили скоростей деформируются и становятся все более урезанными. При больших расходах вдуваемого газа на

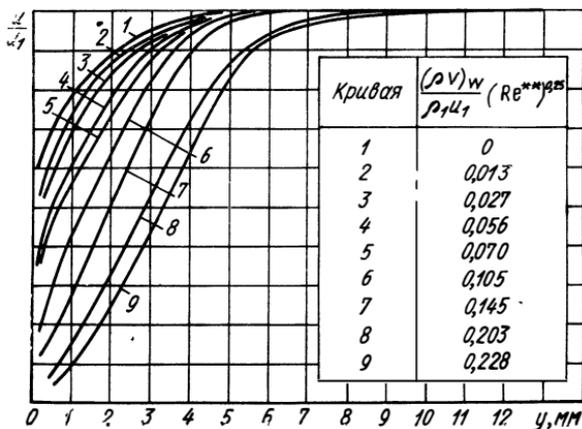


Рис. 13.16. Изменение скорости поперек пограничного слоя с увеличением интенсивности подачи охладителя ($Re^{**} = \rho_1 u_1 \delta^{**} / \beta$)

кривых появляются точки перегиба. Влияние вдувания газа на профиль скорости аналогично действию продольного положительного градиента давления. При увеличении интенсивности вдувания газа профили скоростей становятся подобными профилям в свободной турбулентной струе.

На рис. 13.17 представлены профили температуры потока поперек пограничного слоя при вдуве газа через пористую стенку. Видно, что с увеличением интенсивности вдувания происходит деформация профилей температуры, аналогичная деформации профилей скорости.

Результаты экспериментальных исследований теплообмена на проникаемой поверхности при вдуве различных газов представлены на рис. 13.18. Кривые 1 и 2 получены при вдуве воздуха при различных скоростях обтекания пористой пластины. Из сравнения с кривой 3 следует сильное влияние молекулярной массы вдуваемого газа на величину теплового потока. Если ввести поправку на молекулярную массу в виде $(m_1/m_w)^a$, где a — коэффициент, остающийся постоянным в некотором диапазоне m_1/m_w , все экспериментальные результаты (рис. 13.19) для различных газов, вдуваемых в пограничный слой, хорошо ложатся

Рис 13.17. Изменение температуры потока поперек пограничного слоя при различной интенсивности подачи охладителя

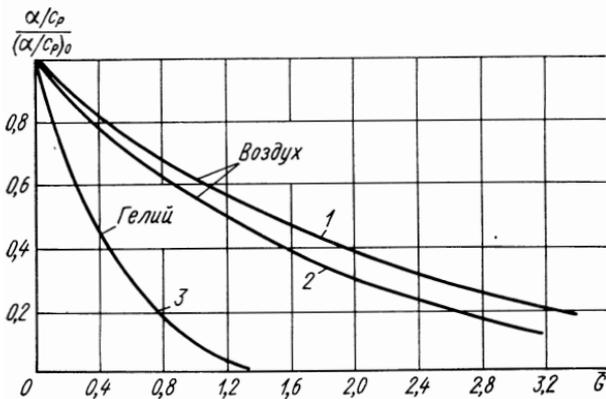
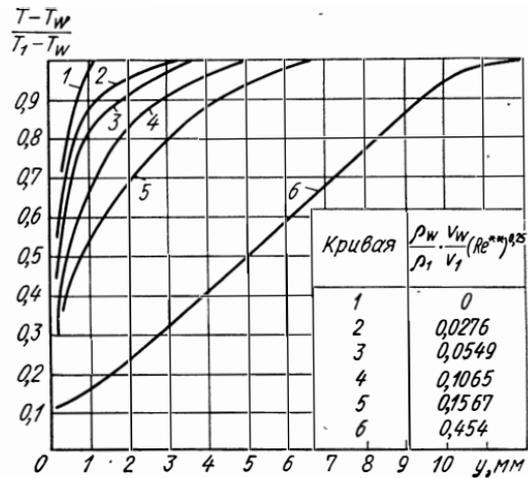


Рис. 13.18. Зависимость обобщенных коэффициентов теплообмена на проникаемой поверхности от расхода в турбулентный пограничный слой различных охладителей

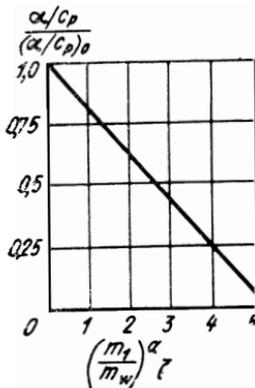


Рис. 13.19. Зависимость обобщенного коэффициента теплообмена на проникаемой поверхности от параметра $\left(\frac{m_1}{m_w}\right)^a \bar{G}$

на единую кривую. На основании анализа результатов экспериментальных исследований по влиянию вдува различных газов на теплообмен была получена простая инженерная формула для расчета теплообмена на проницаемой поверхности при турбулентном течении в пограничном слое:

$$\left(\frac{\bar{\alpha}}{c_p}\right) = \frac{(\alpha/c_p)}{(\alpha/c_p)_0} = 1 - 0,19 \left(\frac{m_1}{m_w}\right)^a \bar{G} = 1 - B''' \bar{G}, \quad (13.91)$$

где m_1 и m_w — молекулярная масса газа внешнего потока и вдуваемого газа.

При $0,2 < \frac{m_1}{m_w} < 1$ $a = 0,35$;

при $1 < \frac{m_1}{m_w} < 8$ $a = 0,7$;

при $\frac{m_1}{m_w} > 8$ $a = 1$.

Формула (13.91) применима для $\left(\frac{\bar{\alpha}}{c_p}\right) \geq 0,1$.

Список рекомендуемой литературы:

основная: [5, 45, 52, 115];

дополнительная: [4, 8, 12, 17, 24, 25, 37, 38, 104, 105, 108, 152, 156].

ГЛАВА XIV

ТЕПЛООБМЕН ПРИ НАЛИЧИИ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

При высоких температурах газа, например, в камерах сгорания реактивных двигателей и вблизи поверхности тел, движущихся в атмосфере с большими скоростями, течение в пограничном слое сопровождается химическими реакциями. Если поверхность непроницаемая и химически не взаимодействует с газом внешнего потока, то химические реакции могут протекать в виде диссоциации и рекомбинации газа. Химические реакции происходят также в случае подачи в пограничный слой через проницаемую поверхность веществ, способных вступать в реакцию с газом внешнего потока. В ряде случаев при высоких температурах и больших тепловых потоках возможно разрушение поверхности тела или специального теплозащитного покрытия, нанесенного на поверхность. Это может быть плавление, сублимация или горение поверхности. Частицы разрушенной поверхности могут вступать в химические реакции между собой и с газом внешнего потока.

При температурах газа $(10-15) \cdot 10^3 \text{ K}$, что соответствует, например, условиям в лобовой точке тела при скоростях потока $10-15 \text{ км/с}$, возможна также частичная ионизация газа, в результате чего в потоке, кроме нейтральных частиц, появляются ионы и электроны.

При наличии химических реакций в пограничном слое необходимо учитывать дополнительное выделение и поглощение тепла внутри слоя. В этих случаях, кроме совокупности уравнений пограничного слоя, нужно рассматривать уравнения, определяющие условия протекания химических реакций. Рассматривая движение смеси газов в целом, нужно иметь в виду, что физические параметры смеси ρ , μ , λ , D , c_p и другие будут зависеть от состава, давления и температуры смеси. Определение этих параметров, особенно характеризующих переносные свойства газовых смесей, связано с некоторыми предположениями, которые делаются при задании потенциалов взаимодействия при столкновении частиц различных типов. Ряд предположений приходится делать при задании кинетики химических реакций. Поэтому расчеты даже в случае ламинарного режима течения в погранич-

ном слое должны обязательно сопоставляться с экспериментальными данными. Кроме того, при высоких температурах появляется еще выделение и поглощение тепла путем излучения. Влияние излучения в воздухе растет при увеличении температуры и особенно существенно при скоростях полета более 10 км/с. Во многих случаях влияние излучения на конвективный теплообмен невелико, при этом лучистый и конвективный потоки могут рассчитываться независимо. В настоящей главе весь анализ приводится для ламинарного пограничного слоя, однако полученные выводы могут использоваться для расчета турбулентного пограничного слоя.

14.1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФFUЗИИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СМЕСИ РЕАГИРУЮЩИХ ГАЗОВ

Система уравнений неразрывности и количества движения сохраняет вид (11.14) и (11.15):

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0; \quad (14.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (14.2)$$

Уравнения диффузии могут быть получены из условия неразрывности для отдельных компонентов.

Учитывая, что вектор потока массы для i -го компонента в пренебрежении термодиффузией равен

$$\vec{K}_i = \rho \vec{V} C_i + \vec{g}_i, \quad (14.3)$$

где \vec{V} — вектор скорости потока;

C_i — концентрация i -го компонента;

\vec{g}_i — диффузионный поток, определяемый по формуле (13.16),

получим

$$\operatorname{div} (\rho \vec{V} C_i + \vec{g}_i) = -\omega_i. \quad (14.4)$$

Здесь ω_i — скорость расходования i -го компонента в результате химических реакций в кг/(м³·с).

В декартовой системе координат уравнения диффузии в пограничном слое принимают вид [см. (13.28) — (13.30)]

$$\rho u \frac{\partial C_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial C_i}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} (g_{iy}) - \omega_i. \quad (14.5)$$

В смеси, состоящей из n компонентов, выполняются условия

$$\sum_1^n C_i = 1; \quad \sum_1^n \vec{g}_i = 0; \quad \sum_1^n \omega_i = 0. \quad (14.6)$$

Суммируя уравнения (14.5) с учетом условий (14.6), получаем уравнение неразрывности для всей смеси (14.1). Поэтому для решения достаточно $(n-1)$ уравнений системы (14.5). Система (14.5) должна быть дополнена выражениями, определяющими значения скоростей расщедования каждой компоненты w_i . Эти скорости связаны между собой стехиометрическими соотношениями, выражающими то, что в результате химических реакций изменяется содержание отдельных компонентов, но общая масса каждого элемента, содержащегося во всех компонентах, остается неизменной.

Если общее число компонентов n , а число элементов, из которых состоят отдельные компоненты, равно r , то уравнения сохранения элементов имеют вид

$$\sum_{i=1}^n w_i v_{ik} = 0, \quad (14.7)$$

где v_{ik} — массовая доля элемента k в компоненте i . Например, в молекуле H_2O доля водорода $v_{H_2} = 2/18$ и т. д. Из определения v_{ik} следуют условия:

$$\sum_{k=1}^r v_{ik} = 1 \text{ и } \sum_{k=1}^r w_i v_{ik} = w_i. \quad (14.8)$$

Всего можно записать r уравнений (14.7). Суммируя их по k от 1 до r , получим с учетом условия (14.8) $\sum_1^n w_i = 0$. Заметим здесь

также, что если число возможных химических реакций равно l , а число элементов r , то выполняется условие $n-r=l$.

Используя уравнение (14.7), можно получить $r-1$ уравнений диффузии, не содержащих в правой части скоростей расщедования компонентов.

Умножая равенство (14.5) на v_{ik} и суммируя по i от 1 до n , получим

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^n C_i v_{ik} + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^n C_i v_{ik} = \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^n g_{iy} v_{ik}. \quad (14.9)$$

Уравнения (14.9), называемые иногда уравнениями диффузии элементов, справедливы при любом предположении о диффузии и характере протекания химических реакций.

Поскольку число уравнений (14.5) равно $n-1$, то система (14.9), содержащая $r-1$ уравнений, не может заменить систему (14.5). Для замыкания задачи необходимо иметь еще $(n-1) - (r-1) = l$ уравнений, соответствующих числу химических реакций. Это могут быть l линейно независимых уравнений системы (14.5), причем скорости расщедования l компонентов должны

быть заданы. В предположении о существовании в пограничном слое химического равновесия система (14.9) вместо (14.5) дополняется системой l уравнений равновесия.

Входящие в уравнения (14.5) или (14.9) значения диффузионных потоков определяются в общем случае для многокомпонентных смесей по формуле [37].

$$g_{iy} = \sum_j \frac{m_i}{m^2} q D_{ij}^* \frac{\partial}{\partial y} (C_j m), \quad (14.10)$$

где m — молекулярная масса смеси;

m_i — молекулярная масса i -го компонента;

C_j — массовая концентрация j -го компонента;

$$m = \left(\sum_{i=1}^n C_i / m_i \right)^{-1};$$

D_{ij}^* — коэффициент диффузии многокомпонентной смеси.

При этом $D_{ii}^* = 0$.

Для решения задач пограничного слоя часто более удобно использовать уравнение для определения диффузионных потоков в следующем виде [37]:

$$\sum_{j \neq i} \frac{m^2}{m_j q} \frac{1}{D_{ij}} (C_i \vec{g}_j - \vec{g}_i C_j) = \text{grad} (C_i m). \quad (14.11)$$

Здесь D_{ij} — бинарный коэффициент диффузии; $D_{ii} \neq 0$.

Суммирование (14.11) ведется по всем компонентам, за исключением i -го.

В случае бинарной смеси из уравнений (14.10) или (14.11) получаем закон Фика:

$$\vec{g}_i = -q D_{ij} \text{grad} C_i. \quad (14.12)$$

В некоторых случаях форма (14.12) используется и в многокомпонентной смеси с разными бинарными коэффициентами диффузии:

$$\vec{g}_i = -q D_i \text{grad} C_i.$$

При этом так называемые обобщенные коэффициенты диффузии D_i будут сложными функциями концентраций и температуры [22]. Однако в ряде случаев такая запись диффузионного потока удобна и мы будем ее использовать.

Полученные уравнения могут приближенно использоваться и в случае частично ионизированного газа, если принять, что электроны и ионы диффундируют совместно и объемный заряд в газе отсутствует. Отклонение от этого условия приводит к воз-

никновению электрического поля, стремящегося рассеять объемный заряд. При таком предположении концентрации коэффициенты диффузии и скорости расходования у соответствующих пар электрон — ион будут равны, а уравнения диффузии — тождественны. При вычислении диффузионных потоков при этом пара ион — электрон может рассматриваться как одна частица, не имеющая заряда, но в общем случае отличающаяся по своим свойствам от нейтрального атома. Более подробно этот вопрос рассмотрен в работе [133].

14.2. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

В уравнении энергии в пограничном слое необходимо учесть выделение тепла в процессе химических реакций H_x и перенос химической энергии путем диффузии.

Поток тепла через единичную площадку в смеси газов определяется теплопроводностью, потоком массы и диффузией [см. (13.31)]:

$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T + \rho \vec{V}i + \sum_{i=1}^n \vec{g}_i i_i, \quad (14.13)$$

где $i_i = \int_0^T (c_p)_i dT$ — термодинамическая энтальпия i -го компонента;

$$i = \sum_1^n C_i i_i \text{ — энтальпия смеси.}$$

С учетом выделения тепла имеем вместо уравнения (13.36) уравнение сохранения энергии в форме

$$\text{div} \vec{q} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx} + H_x. \quad (14.14)$$

Используя обычные допущения пограничного слоя (см. разд. 11.2), из уравнений (14.13) и (14.14) получаем

$$\begin{aligned} \epsilon u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \\ &+ u \frac{\partial p}{\partial x} + H_x - \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^n g_{iy} i_i. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Здесь $di = \bar{c}_p dT$; $\bar{c}_p = \sum (c_p)_i C_i$ — средняя теплоемкость смеси. Уравнение (14.15) аналогично уравнению (13.38). Для его решения в общем случае необходимо определить зависимость H_x от координат или от параметров течения, а в некоторых случаях также и от времени. Значение H_x , имеющего размерность кДж/(м³·с), связано со скоростью расходования компонентов и определяется суммой теплот всех химических реакций в смеси.

Эти реакции могут протекать как с выделением, так и с поглощением тепла.

Для учета тепла химических реакций H_x удобнее всего воспользоваться понятием полной энтальпии

$$I_i = \int_0^T (c_p)_i dT + h_{xi} = i_i + h_{xi}. \quad (14.16)$$

Здесь h_{xi} — тепло образования i -го компонента, равное энергии, которую необходимо затратить, чтобы получить единицу массы данного вещества из элементов при температуре T_0 . Например, при реакции горения водорода при некоторой температуре T_0 в кислороде выделяется тепло



где Q_0 — тепловой эффект реакции при $T = T_0$, отнесенный к одному килограмму H_2O и измеряемый непосредственно в калориметре;

$$(h_x)_{\text{H}_2\text{O}} = -Q_0 + \frac{2}{18} i_{\text{H}_2} + \frac{8}{9} i_{\text{O}_2} - i_{\text{H}_2\text{O}}. \quad (14.18)$$

Величина h_{xi} зависит от выбранной системы отсчета. Обычно в таблицах приводятся данные о теплоте образования из элементов в том состоянии, которое является устойчивым при нормальных условиях $T = 288 \text{ K}$, $p = 0,1 \text{ МПа}$. При этом в рассмотренном примере теплоты образования H_2 и O_2 равны нулю, а теплота образования H_2O получается отрицательной.

Из определения h_{xi} следует, что при любой температуре тепло всех химических реакций равно

$$H_x = \sum_{i=1}^n \omega_i h_{xi} + \sum_{i=1}^n \omega_i i_i = \sum_{i=1}^n \omega_i I_i. \quad (14.19)$$

В этом легко убедиться, рассмотрев реакцию (14.17) при произвольной температуре T :

$$H_x = \omega_{\text{H}_2} I_{\text{H}_2} + \omega_{\text{O}_2} I_{\text{O}_2} + \omega_{\text{H}_2\text{O}} I_{\text{H}_2\text{O}}. \quad (14.20)$$

Значение ω больше нуля, если вещество расходуется в процессе реакции, и меньше нуля — для случая образования вещества. Подставляя равенство (14.16) в уравнение (14.20), получаем

$$\begin{aligned} H_x = & \omega_{\text{H}_2} \int_0^T (c_p)_{\text{H}_2} dT + \omega_{\text{O}_2} \int_0^T (c_p)_{\text{O}_2} dT + \omega_{\text{H}_2\text{O}} \int_0^T (c_p)_{\text{H}_2\text{O}} dT + \\ & + \omega_{\text{H}_2\text{O}} (h_x)_{\text{H}_2\text{O}} = \omega_{\text{H}_2} \int_{T_0}^T (c_p)_{\text{H}_2} dT + \omega_{\text{O}_2} \int_{T_0}^T (c_p)_{\text{O}_2} dT + \\ & + \omega_{\text{H}_2\text{O}} \int_{T_0}^T (c_p)_{\text{H}_2\text{O}} dT + (Q)_{T-T_0} = Q_T, \end{aligned} \quad (14.21)$$

где Q_T — тепловой эффект реакции при температуре T . Таким образом, значение $\sum_{i=1}^n \omega_i i_i$ в формуле (14.19) определяется тем,

что теплоемкости исходных и конечных веществ, участвующих в химической реакции, различны и тепловой эффект реакции зависит от температуры. В ряде случаев этим различием можно приближенно пренебречь и тогда из уравнения (14.19) получаем

$$H_x \approx \sum_{i=1}^n \omega_i h_{x_i}. \quad (14.22)$$

Такое приближение часто используется в литературе [45, 115, 108]. Однако в общем случае необходимо делать оценку допускаемых при этом ошибок.

Следует заметить, что в термодинамических таблицах часто принимается $i_i=0$ не при $T=0$, а при значении $T=T_0$ и давлении, равном 0,1 МПа.

Используя уравнения (14.14) и (14.19), получаем уравнение энергии в виде

$$\operatorname{div} q = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx} + \sum_{i=1}^n \omega_i (h_{x_i} + \Delta i_i), \quad (14.23)$$

где $\Delta i_i = i_i - i_{i0}$.

Из уравнения диффузии (14.4) следует, что $\omega_i = -\operatorname{div}(\rho \vec{V} C_i + \vec{g}_i)$. Тогда уравнение (14.23) может быть записано в виде

$$\operatorname{div} \left[\vec{q} + \sum_{i=1}^n h_{x_i} (\rho \vec{V} C_i + \vec{g}_i) \right] = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx} + \sum_{i=1}^n \Delta i_i \omega_i. \quad (14.24)$$

Обозначив

$$\vec{q}_n = \vec{q} + \sum_{i=1}^n h_{x_i} (\rho \vec{V} C_i + \vec{g}_i), \quad (14.25)$$

получаем уравнение энергии

$$\operatorname{div} \vec{q}_n = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx} + \sum_{i=1}^n \Delta i_i \omega_i. \quad (14.26)$$

Здесь \vec{q}_n — полный поток энергии, учитывающий поток химической энергии.

С учетом уравнений (14.13) получаем

$$\begin{aligned}\vec{q}_n &= -\lambda \text{grad } T + \varrho \vec{V} \sum_1^n C_i (i_i + h_{x_i}) + \sum_1^n \vec{g}_i (i_i + h_{x_i}) = \\ &= -\lambda \text{grad } T + \varrho \vec{V} I + \sum_1^n \vec{g}_i I_i.\end{aligned}\quad (14.27)$$

Здесь I — полная энтальпия смеси —

$$I = \sum_1^n I_i C_i, \quad (14.28)$$

где

$$I_i = \int_0^T (c_p)_i dT + h_{x_i}.$$

Используя равенство (14.28), выразим $\text{grad } T$ через $\text{grad } I$:

$$\begin{aligned}\text{grad } I &= \sum_1^n I_i \text{grad } C_i + \sum_1^n C_i \text{grad } I_i = \\ &= \sum_1^n I_i \text{grad } C_i + \sum_1^n C_i (c_p)_i \text{grad } T.\end{aligned}\quad (14.29)$$

Поскольку $\sum_1^n C_i (c_p)_i = \bar{c}_p$, получаем

$$\text{grad } I = \bar{c}_p \text{grad } T + \sum_1^n I_i \text{grad } C_i. \quad (14.30)$$

Отсюда

$$\text{grad } T = \frac{1}{\bar{c}_p} \text{grad } I - \frac{1}{\bar{c}_p} \sum_1^n I_i \text{grad } C_i. \quad (14.31)$$

Подставляя равенство (14.31) в уравнение (14.27), получаем

$$\begin{aligned}\vec{q}_n &= -\frac{\lambda}{\bar{c}_p} \text{grad } I + \varrho \vec{V} I + \sum_1^n \vec{g}_i I_i + \frac{\lambda}{\bar{c}_p} \sum_1^n I_i \text{grad } C_i = \\ &= -\frac{\lambda}{\bar{c}_p} \text{grad } I + \varrho \vec{V} I + \frac{\lambda}{\bar{c}_p} \sum_1^n I_i \left(1 - \frac{\bar{c}_p \varrho D_i}{\lambda}\right) \text{grad } C_i.\end{aligned}\quad (14.32)$$

Здесь D_i — обобщенный коэффициент диффузии;

$$\vec{g}_i = -\varrho D_i \text{grad } C_i. \quad (14.33)$$

Напоминаем, что при использовании равенства (14.33), следует

иметь в виду сложную зависимость D_i от всех бинарных коэффициентов диффузии в соответствии с уравнением (14.10).

Уравнение энергии с учетом уравнений (14.26) и (14.32) для двухмерной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \varrho u \frac{\partial I}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial I}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda}{c_p} \sum_1^n I_i \left(\frac{c_p \varrho D_i}{\lambda} - 1 \right) \text{grad } C_i \right] + \sum_1^n \Delta i_i \omega_i. \end{aligned} \quad (14.34)$$

Здесь

$$\omega_i = -\text{div}(\varrho \vec{V} C_i + \vec{g}_i) = -\varrho u \frac{\partial C_i}{\partial x} - \varrho v \frac{\partial C_i}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varrho D_i \frac{\partial C_i}{\partial y} \right).$$

Полученное уравнение совместно с системой уравнений диффузии (14.5), уравнениями движения и неразрывности (14.2) и (14.1) полностью определяет течение в пограничном слое с химическими реакциями. Для решения системы необходимо привлечь также систему уравнений, определяющих значения скоростей расходования компонентов ω_i . Это могут быть в общем случае уравнения химической кинетики. При достаточно больших значениях температуры и давления состав смеси в каждой точке определяется уравнениями химического равновесия и системой уравнений диффузии элемента (14.9), не содержащих ω_i . Примеры решения уравнений ламинарного пограничного слоя с химическими реакциями можно найти в работах [8, 26, 40, 45, 115].

14.3. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОТДАЧИ И ТЕПЛОВОЙ ПОТОК НА НЕПРОНИЦАЕМОЙ СТЕНКЕ

Рассмотрим уравнение энергии (14.34) в частном случае, когда значения $\frac{c_p \varrho D_i}{\lambda}$ близки к единице и когда можно пренебречь изменением теплоемкости веществ в процессе протекания химических реакций, т. е. когда $\sum_1^n \Delta i_i \omega_i \approx 0$. При этом уравнение энергии примет вид такой же, как и в случае не реагирующей смеси (11.16), только роль термодинамической энтальпии $c_p T$ в нем будет играть полная энтальпия I :

$$\varrho u \frac{\partial I}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial I}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx}, \quad (14.35)$$

где μ — вязкость.

Вводя понятие полной энтальпии торможения

$$I_0 = I + \frac{u^2}{2} \quad (14.36)$$

и принимая значение $\text{Pr} = \mu c_p / \lambda$ равным единице, получаем уравнение энергии в виде

$$\zeta u \frac{\partial I_0}{\partial x} + \zeta v \frac{\partial I_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial I_0}{\partial y} \right). \quad (14.37)$$

Уравнение (14.37) аналогично соответствующему уравнению энергии (11.20) при отсутствии химических реакций и при значении $\text{Pr} = 1$, но вместо температуры торможения в нем стоит полная энтальпия торможения I_0 .

Тепловой поток в стенку при $y = 0$

$$q_w = \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial I_0}{\partial y} \right)_w.$$

Отсюда следует, что главное влияние химических реакций может быть учтено, если в формулах, полученных для расчета теплообмена, вместо энтальпии торможения i_0 использовать полную энтальпию торможения I_0 . С учетом коэффициента восстановления r формула Ньютона вместо (13.65) приобретает вид

$$q_w = \left(\frac{\alpha}{c_p} \right) (I_e - I_w), \quad (14.38)$$

где
$$I_e = I_1 + r \frac{u^2}{2}; \quad I_1 = \sum_1^n I_{i1} C_{i1};$$

$$I_w = \sum_1^n I_{iw} C_{iw}.$$

Если вместо формулы (14.38) использовать обычную формулу Ньютона в виде $q_w = \alpha (T_e - T_w)$, то можно в ряде случаев допустить весьма существенную ошибку. Например, в камерах сгорания ЖРД устанавливается температура T_e на уровне 3000—3500 К. При этом вследствие сильной диссоциации продуктов сгорания часть химической энергии не переходит в тепловую. На охлажденной стенке при $T_w \approx 1000$ К происходит рекомбинация с выделением тепла. Расчет без учета этого процесса приведет к ошибке, равной примерно 50%. Эта ошибка будет возрастать при увеличении температуры газа и соответствующем возрастании степени диссоциации.

Как видно из формулы (14.38), для расчета необходимо знать значения T_1 и C_{i1} , T_w и C_{iw} . Значения температур T_1 и T_w могут быть заданы или вычислены из условий обтекания тела и теплового баланса на поверхности. Значения концентрации компонентов на стенке и на границе пограничного слоя зависят от условий протекания химических реакций. Предельными случаями, характеризующими эти условия, являются так называемые химически равновесные и замороженные течения.

14.4. ХИМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

В случае химически равновесного течения предполагается, что скорости химических реакций настолько велики, что в каждой точке пограничного слоя устанавливается состав, соответствующий химическому равновесию при данном давлении, температуре и соотношении элементов.

Для решения задачи при этом используется уравнение энергии (14.34), уравнение диффузии элементов (14.9) и уравнение закона действующих масс. Следует указать, что полное решение в общем случае системы уравнений затрудняется недостаточностью сведений о физических свойствах среды и, особенно, о коэффициентах переноса μ , λ , D_i .

На непроницаемой и химически нейтральной поверхности во многих случаях соотношение элементов в смеси внутри пограничного слоя остается неизменным, равным соотношению вне пограничного слоя. При этом уравнения (14.9) могут быть исключены из рассмотрения, а значения энтальпии $I = f(T, p)$ могут быть заранее вычислены для газа внешнего потока из условий химического равновесия. В этом случае значения I_1 и I_w определяются по значениям T_1 и T_w по заранее вычисленным таблицам. Примеры решения уравнений в такой постановке и сравнение с экспериментами даны в работах [16, 45, 115].

14.5. ХИМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНОЕ ТЕЧЕНИЕ НА КАТАЛИТИЧЕСКОЙ СТЕНКЕ

В пределе для таких течений предполагается, что в пограничном слое химические реакции не протекают (заморожены), а на стенке, обладающей каталитической способностью, увеличивать скорость химических реакций, устанавливается химическое равновесие.

Многочисленные расчеты [45, 52, 115, 133] показывают, что значения теплового потока при одних и тех же значениях I_1 и I_w практически совпадают с расчетными, выполненными в предположении, что течение в пограничном слое химически равновесно. Отсюда следует также, что и в случае медленного протекания химических реакций в пограничном слое, определяемого химической кинетикой, но при условии, что стенка каталитическая, может быть использована формула (14.38) с теми же самыми значениями I_1 и I_w при соответствующих значениях T_1 и T_w и с теми же величинами a/c_p . Значения a/c_p могут быть взяты из решений или экспериментов для случая течения не реагирующего газа.

Наиболее подробные расчеты проведены для пограничного слоя в диссоциированном воздухе при обтекании пластины и в окрестности передней критической точки в работах [16, 22, 45, 119, 137].

14.6.1. Химически равновесное течение

Как указывалось выше, для равновесного течения система уравнений (14.5), (14.30) может быть существенно упрощена, если пренебречь изменением соотношения элементов поперек пограничного слоя. Такое предположение строго справедливо для бинарной смеси (например, если принять, что в диссоциированном воздухе смесь можно разделить на две группы—молекулы и атомы) и для многокомпонентной смеси, где все коэффициенты диффузии равны. При этом в каждой точке $I=I(T)$; $\bar{c}_i = \bar{c}_i(T)$ — заданные функции энтальпии и концентрации от температуры, определяющиеся заранее из условий равновесия. Эффективным методом решения в этом случае является метод полных коэффициентов.

Тепловой поток, переносимый в пограничном слое теплопроводностью и диффузией (14.27),

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_1^n (I_i g_i). \quad (14.39)$$

Но из уравнения (14.10) с учетом того, что $C_i = C_i(T)$, получаем

$$g_{iy} = \sum_j \frac{m_j}{m^2} \rho D_{ij}^* \frac{\partial}{\partial y} (C_j m) = \left\{ \sum_j \frac{m_j}{m^2} \rho D_{ij}^* \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial (C_j m)}{\partial T} \right]_p \right\} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (14.40)$$

Для случая равновесного течения, при указанных выше предположениях, в поперечном сечении пограничного слоя $C_j m = f(T)$ и все выражение в фигурных скобках является функцией температуры. Тогда, используя уравнение (14.39), получаем

$$q = -(\lambda + \lambda_x) \frac{\partial T}{\partial y} = -\lambda_{\text{эф}} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (14.41)$$

$$\text{где} \quad \lambda_x = - \sum_{i=1}^n I_i \sum_j \frac{m_j}{m^2} \rho D_{ij}^* \left(\frac{\partial C_j m}{\partial T} \right)_p. \quad (14.42)$$

При высоких температурах λ_x может быть во много раз больше чем λ . Аналогично определяется $(c_p)_{\text{эф}} = (dI/dT)_p$ — полная удельная теплоемкость, учитывающая тепло химических реакций. Из равенства (14.28) следует, что

$$(c_p)_{\text{эф}} = \bar{c}_p + \sum_{i=1}^n I_i \left(\frac{\partial C_i}{\partial T} \right)_p. \quad (14.43)$$

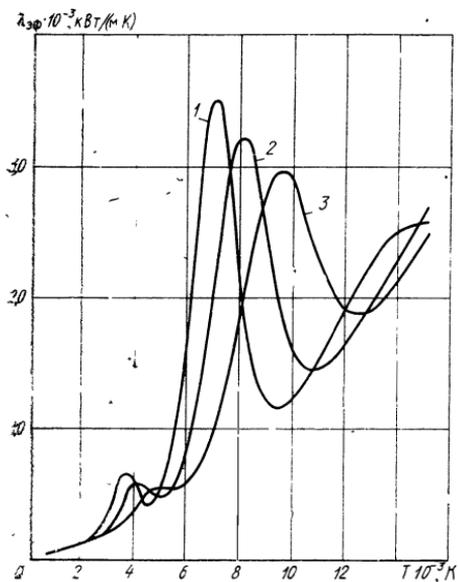


Рис. 14.1. Зависимость полного коэффициента теплопроводности $\lambda_{эф}$ воздуха от температуры:
 1— $p=0.1 \text{ МПа}$; 2— $p=1.0 \text{ МПа}$; 3— $p=10 \text{ МПа}$

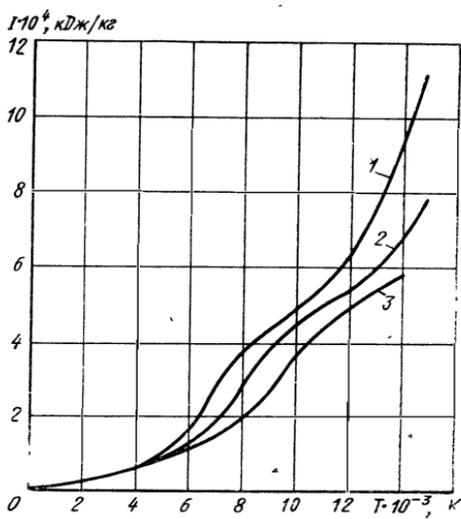


Рис. 14.2. Зависимость полной энтальпии I воздуха от температуры (обозначения по рис. 14.1)

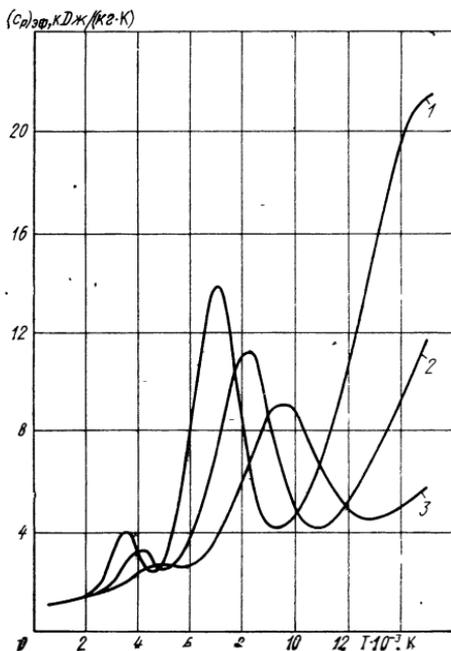


Рис. 14.3. Зависимость полной теплоемкости воздуха $(c_p)_{эф}$ от температуры (обозначения по рис. 14.1)

Первый член представляет собой теплоемкость замороженной смеси, а второй учитывает влияние химических реакций. Значения $I_{\text{эф}}$ и $(c_p)_{\text{эф}}$ для воздуха представлены в работе [114].

На рис. 14.1 приведены результаты расчета полной (эффективной) теплопроводности ($\lambda_{\text{эф}}$) для воздуха в диапазоне температур от 500 до 15 000 К.

На рис. 14.2 и 14.3 представлены расчетные зависимости полной энтальпии I и полной удельной теплоемкости $(c_p)_{\text{эф}}$ воздуха в широком диапазоне температур (от 500 до 15 000 К).

Используя метод полных коэффициентов для случаев, когда можно приближенно считать элементарный состав постоянным, систему уравнений равновесного пограничного слоя можно привести к следующим трем дифференциальным уравнениям.

1. Уравнение неразрывности для смеси

$$\frac{\partial(\rho u R^k)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v R^k)}{\partial y} = 0, \quad (14.44)$$

где $k=0$ — для плоского течения;

$k=1$ — для осесимметричного течения.

2. Уравнение движения

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (14.45)$$

3. Уравнение энергии

$$\rho u \frac{\partial I_0}{\partial x} + \rho v \frac{\partial I_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda_{\text{эф}}}{(c_p)_{\text{эф}}} \frac{\partial I_0}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr_{\text{эф}}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]. \quad (14.46)$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям пограничного слоя для потока однородного газа с большими скоростями, в которых вместо истинных коэффициентов используются полные коэффициенты и в уравнении энергии вместо теплосодержания

$i_0 = \int_0^T c_p dT + \frac{u^2}{2}$ используется энтальпия торможения I_0 реагирующей смеси по формуле (14.36).

Если известны зависимости вязкости смеси газов (рис. 14.4) и эффективного числа Прандтля $Pr_{\text{эф}} = \frac{\mu (c_p)_{\text{эф}}}{\lambda_{\text{эф}}}$ (рис. 14.5) от температуры, решение системы уравнений (14.44) — (14.46) может быть получено на ЭВМ. Задачи подобного типа для случая обтекания передней критической точки тела гиперзвуковым потоком газа (воздуха, азота) были решены в работе [16]. Расчеты теплообмена от высокотемпературного газа к стенке были выполнены в широком диапазоне изменения энтальпии торможения [$I_0 = (2 \div 115) \cdot 10^3$ кДж/кг], давления торможения ($p_0 =$

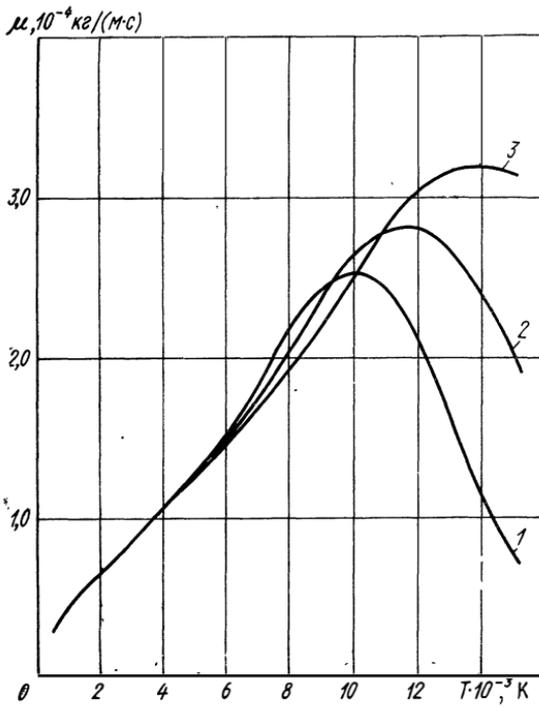


Рис. 14.4. Зависимость вязкости от температуры (обозначения по рис. 14.1)

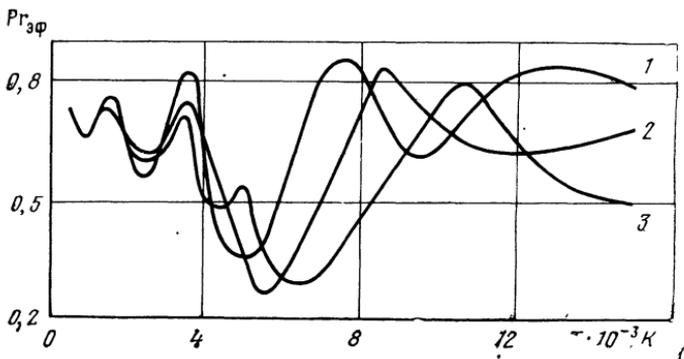


Рис. 14.5. Зависимость эффективного числа Прандтля для воздуха от температуры (обозначения по рис. 14.1)

$= 10^{-1} \div 10$ МПа) и температуры стенки ($T_w = 500 \div 2500$ К). Этот диапазон по энтальпии торможения и давлению охватывает как область диссоциации, так и область частичной ионизации. Распространение уравнений (14.44) — (14.46) на область ионизации является приближенным. Основанием для этого является, во-первых, предположение о постоянстве элементарного состава поперек пограничного слоя, что в случае непроницаемой поверхности, не вступающей в химические реакции с внешним потоком, не вносит серьезных погрешностей в конечные результаты расчета. Кроме того, используется предположение, что в частично ионизованном газе, состоящем из нейтральных и заряженных частиц, ион и электрон в смеси диффундируют совместно, причем принимается, что не происходит заметного изменения элементарного состава поперек пограничного слоя. Подробное обоснование такой схемы расчета дано в труде [133]. Справедливость указанных предположений подтверждается также хорошим совпадением результатов расчетов и экспериментов, проведенных в этом диапазоне температур. Результаты расчетов обрабатывались в форме зависимости параметра теплообмена $(Nu/\sqrt{Re})_w$ от определяющих критериев $[M, Pr_{эф}, (I_w/I_e)]$. Для области диссоциации были получены следующие критериальные уравнения. Для плоской пластины

$$\left(\frac{Nu}{\sqrt{Re}}\right)_w = 0,332(Pr_{эф})_w^{1/3} K, \quad (14.47)$$

где

$$K = \left(\frac{\mu^* q^*}{\mu_w q_w}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu_1 q_1}{\mu^* q^*}\right)^{1/15 I_w/I_e} \quad (14.48)$$

— параметр, учитывающий влияние сжимаемости на теплообмен.

Для расчета теплообмена в окрестности передней критической точки тела, омываемого потоком диссоциированного газа, можно пользоваться одним из следующих двух критериальных уравнений:

$$\left(\frac{Nu}{\sqrt{Re}}\right)_w = 0,763(Pr_{эф})_w^{0,4} \left(\frac{\mu_1 q_1}{\mu_w q_w}\right)^{0,4} \quad (14.49)$$

или

$$\left(\frac{Nu}{\sqrt{Re}}\right)_w = 0,712 \left(1 + 0,08 \frac{I_w}{I_e}\right) Pr_{эф}^{0,4} \left(\frac{\mu_1 q_1}{\mu_w q_w}\right)^{1/3}. \quad (14.50)$$

Для расчета теплообмена в области ионизации (при температурах торможения $\geq 9 \cdot 10^3$ К) критериальными уравнениями (14.47) — (14.50) пользоваться нельзя. Экстраполяция результатов расчета по этим уравнениям в область ионизации дает существенную ошибку. На рис. 14.6 представлена зависимость параметра теплообмена для области ионизации, отнесенного к параметру теплообмена при $\mu q = \text{const}$, от безразмерной величины

$\mu_1 \rho_1 / (\mu_w \rho_w)$, учитывающей сжимаемость газа. На этом же рисунке нанесены результаты, полученные в работе [45] для области диссоциации и в работе [137] — для области ионизации. Видно, что в области диссоциации результаты расчета теплообмена по уравнениям (14.49) и (14.50) хорошо совпадают. Экстраполяция же кривой (14.50) в области ионизации приводит к существ-

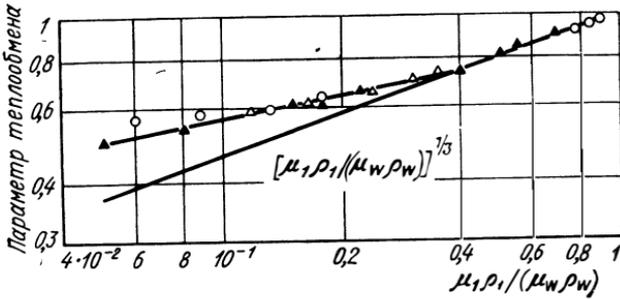


Рис. 14.6. Зависимость параметра теплообмена

$$\frac{Nu_w}{0,712 (1 + 0,08 I_w / I_e) Re_w^{0,5} Pr_w^{0,4}} \text{ от параметра } \frac{\mu_1 \rho_1}{\mu_w \rho_w}$$

$\Delta \bullet [45], \blacktriangle [16], \circ [137]$

венному расхождению с расчетными [16] и экспериментальными [119] данными, полученными для этой области. В области частичной ионизации $[T = (9 \div 15) \cdot 10^3 \text{ K}]$ лучшие результаты дают следующие критериальные уравнения [16]:

$$\left(\frac{Nu}{\sqrt{Re}} \right)_w = 0,763 \left(0,75 + 2,73 \cdot 10^{-2} \frac{T_w}{273} \right) (Pr_{эф})_w^{0,4} \left(\frac{\mu_1 \rho_1}{\mu_w \rho_w} \right)^{0,185}. \quad (14.51)$$

В случае обтекания поверхности потоком частично ионизованного азота, можно использовать следующее критериальное уравнение:

$$\left(\frac{Nu}{\sqrt{Re}} \right)_w = 0,763 \left(0,74 + 1,28 \cdot 10^{-2} \frac{T_w}{273} \right) (Pr_{эф})_w^{0,4} \left(\frac{\mu_1 \rho_1}{\mu_w \rho_w} \right)^{0,16}. \quad (14.52)$$

Зная параметр теплообмена, легко рассчитать величину теплового потока, так как они связаны между собой соотношением

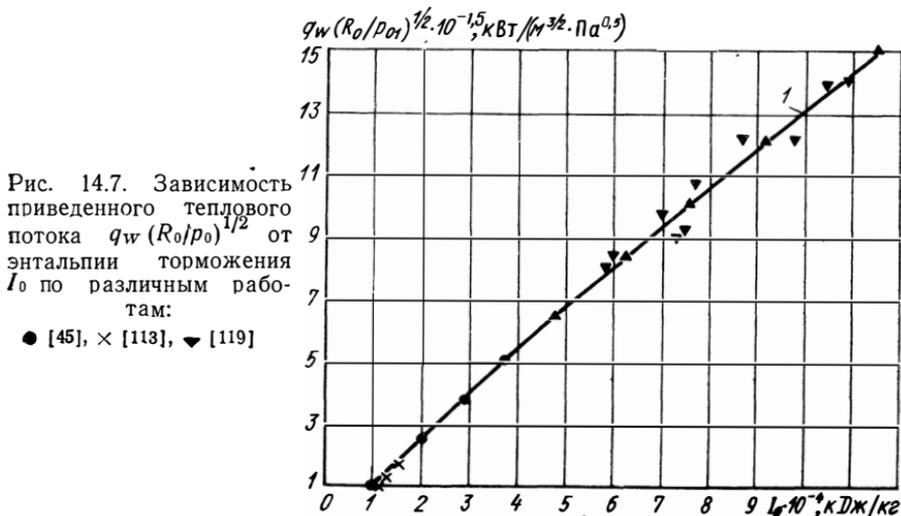
$$q_w = \left(\frac{Nu}{\sqrt{Re}} \right)_w \sqrt{\frac{\mu_w \rho_w u_1}{x}} \frac{(I_e - I_w)}{(Pr_{эф})_w}. \quad (14.53)$$

На рис. 14.7 представлена зависимость приведенного теплового потока в окрестности передней критической точки тела, омы-

ваемого потоком высокотемпературного воздуха. В области диссоциации расчет теплового потока осуществлялся по уравнению

$$q_w \left(\frac{R_0}{p_0} \right)^{1/2} = 0,712 \left(1 + 0,08 \frac{I_w}{I_e} \right) \cdot Pr_w^{0,6} (\mu_1 \rho_1)^{1/3} \times \\ \times (\mu_w \rho_w)^{1/6} (I_{01} - I_w) \left(\frac{2p'_0}{\rho_0} \right)^{1/4} \frac{1}{V p_0}, \quad (14.54)$$

где R_0 — радиус затупления тела в м.
(Здесь p_0 выражено в Па·10⁵)



В этой области теоретические результаты (кривая 1) очень хорошо совпадают с экспериментальными [45, 113, 119].

В области частичной ионизации расчет теплового потока производился по критериальному уравнению, полученному в работе [16]:

$$q_w \left(\frac{R_0}{p_0} \right)^{1/2} = 0,763 \left(0,75 + 2,73 \cdot 10^{-2} \frac{T_w}{273} \right) (Pr_{эф}^w)^{-0,6} (\mu_1 \rho_1)^{0,185} \times \\ \times (\mu_w \rho_w)^{0,315} (I_{01} - I_w) \left(\frac{2p'_0}{\rho_0} \right)^{1/4} \frac{1}{V p_0}. \quad (14.55)$$

Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными [119], полученными на электроразрядных ударных трубах, показало хорошее совпадение.

14.6.2. Химически замороженное течение в пограничном слое на каталитической стенке

При обтекании поверхности высокотемпературным химически замороженным потоком теплообмен будет определяться состоя-

нием поверхности, так как химические реакции могут проходить только на поверхности тела вследствие ее каталитического действия (рис. 14.8). Решения системы уравнений для замороженного ламинарного пограничного слоя были выполнены в работах [45] и [22, 40], где приведены корреляционные уравнения для расчета теплообмена в данных условиях. Результаты расчета по-

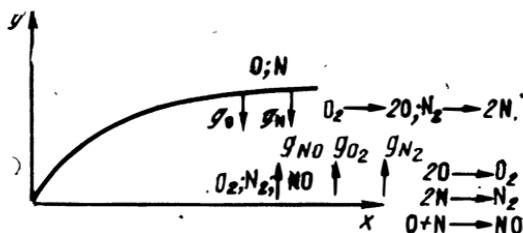


Рис. 14.8. Случай химически неравновесного течения воздуха в пограничном слое

казали, что на каталитической поверхности (скорости рекомбинации на поверхности достаточно велики) не наблюдается значительного изменения параметра теплообмена (рис. 14.9) с изменением параметра рекомбинации C_1 , характеризующего скорость химической реакции. Параметр C_1 [45] представляет собой отношение характерного времени течения к характерному времени химической реакции (диссоциации). Если C_1 велико, тече-

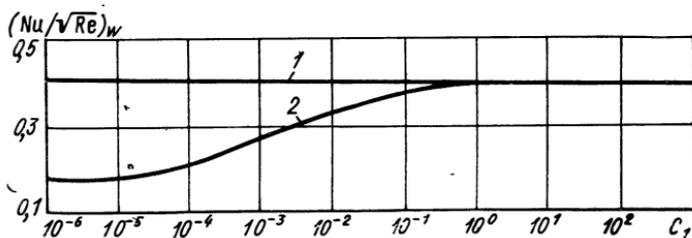


Рис. 14.9. Изменение параметра теплообмена $(Nu/\sqrt{Re})_w$ в критической точке тела в зависимости от параметра скорости рекомбинации (C_1):

1—каталитическая поверхность; 2—некаталитическая поверхность

ние близко к равновесному; если значение C_1 мало — течение «замороженное». На рис. 14.9 видно, что в случае каталитической поверхности параметр теплообмена для замороженного течения отличается несущественно от параметра теплообмена при равновесном течении. Тот же результат получается при расчете неравновесного пограничного слоя [52, 40]. Если стенка каталитическая и на ней устанавливается термомеханическое равновесие, то результаты расчета теплообмена для случая неравновесного течения, как показано в работе [52], отличаются от равновесного течения не более чем на 2%.

Если стенка некаталитическая (предположительно — некоторые стекловидные материалы, окислы), т. е. если поверхность препятствует рекомбинации атомов, тогда может быть достигнуто значительное снижение величины теплового потока (кривая 2). Это снижение вызвано образованием около стенки слоя нере-

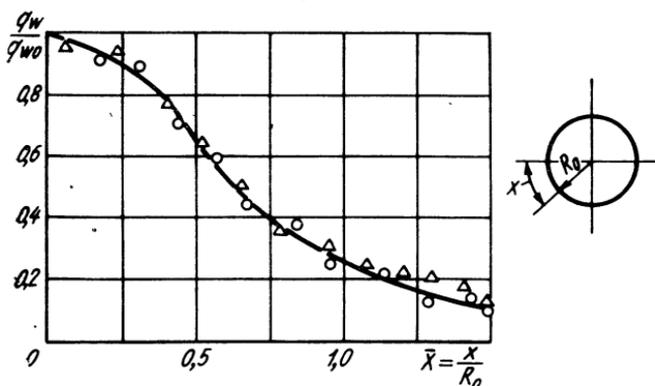


Рис. 14.10. Распределение теплового потока по образующей сферы при обтекании потоком диссоциированного воздуха:

о—метод $x_{эф}$, Δ —метод локального подобия

комбинированных атомов, препятствующих диффузии легких частиц к поверхности, вследствие чего уменьшается перенос тепла к стенке диффузией и, таким образом, уменьшается общий тепловой поток к поверхности.

При расчете теплообмена вдоль криволинейной поверхности, обтекаемой высокотемпературным потоком газа, в котором происходят физико-химические процессы, можно использовать метод эффективной длины (см. гл. XI и XII). На рис. 14.10 представлены результаты расчета теплообмена вдоль сферы, выполненного в работе [45] для равновесного течения в пограничном слое. Здесь нанесены результаты расчета величины теплового потока по образующей сферы с использованием приближенного метода эффективной длины.

14.7. РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА В РЕАГИРУЮЩЕМ ГАЗЕ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Все сделанные выше выводы о влиянии химических реакций остаются справедливыми и при движении газа вдоль пористой поверхности. При этом влияние подачи массы на значение коэффициента теплоотдачи может быть учтено при использовании формул (13.87); (13.89) — (13.91).

Однако в отличие от течения вдоль непроницаемой поверхности выражение $q_w = \frac{\alpha}{c_p} (I_e - I_w)$ определяет полный поток энергии к стенке, который отличается от теплового потока $q_{ст}$, идущего непосредственно в стенку.

Действительно, из условия баланса энергии (рис. 14.11) следует:

$$q_w = \frac{\alpha^*}{c_{p,л}} (I_e - I_w) = \rho_w v_w [I_w - (I_{охл})_0], \quad (14.56)$$

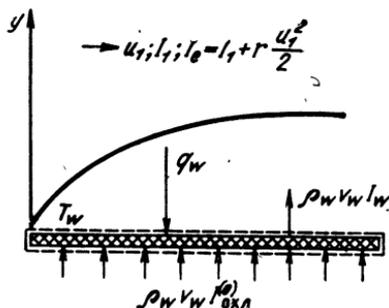


Рис. 14.11. Баланс тепла на проницаемой поверхности при обтекании тела высокотемпературным потоком газа

где $(I_{охл})_0$ — энтальпия охладителя при его начальной температуре;

$G = \rho_w v_w$ — массовый расход охладителя в единицу времени через единицу площади.

Количество тепла, затраченное на подогрев охладителя, определяется по подогреву охладителя внутри стенки:

$$q_{ст} = \rho_w v_w \Delta I_{охл} = \rho_w v_w [(I_{охл})_w - (I_{охл})_0], \quad (14.57)$$

где $(I_{охл})_w$ — энтальпия охладителя при температуре, равной температуре стенки $[(I_{охл})_w \neq I_w]$. Значение $\Delta I_{охл}$ определяет повышение энтальпии охладителя внутри стенки. Если рассматривается сублимирующее вещество, то значение $\Delta I_{охл}$ включает в себя также теплоту подогрева тела до температуры сублимации и тепло сублимации.

Из сравнения уравнений (14.56) и (14.57) следует, что

$$q_{ст} = \frac{\alpha}{c_p} (I_e - I_w) - \rho_w v_w [I_w - (I_{охл})_w], \quad (14.58)$$

т. е. часть подведенной к стенке энергии затрачивается на компенсацию скачка энтальпии, происходящего, когда газ выходит из стенки.

Уравнение (14.58) справедливо при любом законе протекания химических реакций в пограничном слое, в том числе и в случаях химически неравновесных и замороженных течений, когда реакция вообще не протекает.

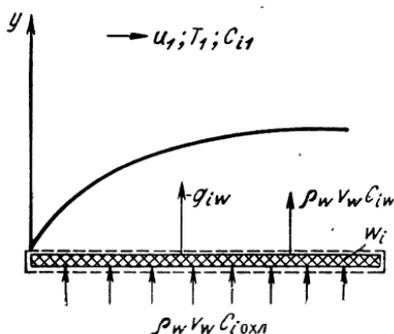
Наиболее просто значение $q_{ст}$ определить, если химические реакции протекают на стенке, а течение в пограничном слое может рассматриваться как замороженное и, приняв условие аналогии между тепло- и массообменом, справедливое при $Le=1$.

Условие баланса массы на стенке для i -го компонента смеси имеет вид (рис. 14.12)

$$GC_{i_{охл}} = GC_{iW} - g_{iW} + w_{iX}, \quad (i=1 \div n). \quad (14.59)$$

Здесь $(-g_{iW})$ — диффузионный поток i -го компонента, от стенки;

Рис. 14.12. Баланс массы для i -го компонента газа на проницаемой поверхности при наличии химических реакций на поверхности



$C_{i_{охл}}$ — концентрация i -го компонента внутри стенки;

$$G = \rho_W v_W. \quad (14.60)$$

Умножая все уравнения (14.59) на I_{iW} и суммируя, получаем

$$\rho_W v_W [(I_{охл})_W - I_W] = - \sum_{i=1}^n g_{iW} I_{iW} + \sum_{i=1}^n w_i I_{iW}. \quad (14.61)$$

Используя аналогию между тепло- и массообменом, получаем

$$-g_{iW} = \frac{\alpha}{c_p} (C_{iW} - C_{i1}) \quad (14.62)$$

и

$$\rho_W v_W [(I_{охл})_W - I_W] = \frac{\alpha}{c_p} I_W - \sum_{i=1}^n C_{i1} I_{iW} + \sum_{i=1}^n w_i I_{iW}. \quad (14.63)$$

Подставляя равенство (14.63) в уравнение (14.58), имеем

$$\begin{aligned} q_{ст} &= \frac{\alpha}{c_p} \left[\sum_{i=1}^n C_{i1} (I_{i1} - I_{iW}) + r \frac{u_1^2}{2} \right] + \sum_{i=1}^n w_{iX} I_{iW} = \\ &= \frac{\alpha}{c_p} (I_e - I'_W) + H_x. \end{aligned} \quad (14.64)$$

Первый член уравнения (14.64) равен тепловому потоку, поступающему в стенку при отсутствии химических реакций, но при вдуве вещества; I_w — полная энтальпия газа, имеющего состав внешнего потока при $T=T_w$. Выражение (14.64) аналогично выражению (13.65).

Второй член равен теплу, выделяемому в процессе реакции. При малой интенсивности подачи вещества через стенку оно полностью расходуется на поверхности и реакции будут происходить на стенке.

Значение H_x определяется секундным расходом G через пористую стенку, полной реакции и теплотой, выделяющейся при соединении охладителя с газом внешнего потока. При определенном значении $G=G_{\text{пред}}$, соответствующем стехиометрическому соотношению в реакции между подаваемым охладителем и внешним потоком, с реакцией эффект на стенке будет максимальным, равным $(H_x)_{\text{max}}$. При дальнейшем увеличении $G > G_{\text{пред}}$ зона реакции будет смещаться внутрь пограничного слоя.

Положение зоны реакции будет определяться условием, что диффузионные потоки, поступающие с двух сторон в нее, находятся в стехиометрическом соотношении. Рассмотрим метод определения $q_{\text{ст}}$ для этого случая.

Пусть в смеси газов присутствуют n компонентов, вступающих в химические реакции. В качестве примера рассмотрим простейший случай, когда число реакций $l=1$. При этом все компоненты связаны между собой стехиометрическими коэффициентами. Если расход одного из компонентов w_j , участвующих в реакции, принять равным единице, то относительный расход i -го компонента равен

$$\varepsilon_i = \frac{w_j}{w_i}. \quad (14.65)$$

Условие баланса массы на пористой стенке для i -го компонента

$$GC_{i_{\text{охл}}} = GC_{i_w} - g_{i_w} + w_i. \quad (14.66)$$

Умножив все уравнения (14.66) на ε_i и вычтя из них уравнение (14.66), при $i=j$ получаем $(n-1)$ уравнение, не содержащее w_i :

$$G(C_{i_{\text{охл}}}\varepsilon_i - C_{j_{\text{охл}}}) = G(C_{i_w}\varepsilon_i - C_{j_w}) - g_{i_w}\varepsilon_i + g_{j_w}. \quad (14.67)$$

В данном случае нельзя воспользоваться формулой $-g_{i_w} = \frac{\alpha}{c_p} (C_{i_w} - C_{i1})$, поскольку внутри пограничного слоя в зоне горения $C_{i_r} = 0$ и g_{i_w} будет больше, чем значение, определяемое формулой (14.62). Формально к уравнению (14.67) может быть присоединено уравнение при $i=j$, являющееся тождеством. Однако, как показано в работе [3], из выражений (14.5) и (14.37) при $Le=1$ и $Pr=1$ можно получить

$$\frac{I_0 - I_w}{I_{01} - I_w} = \frac{(C_i\varepsilon_i - C_j) - (C_{i_w}\varepsilon_i - C_{j_w})}{[(C_i\varepsilon_i)_1 - C_{j1}] - (C_{i_w}\varepsilon_i - C_{j_w})}. \quad (14.68)$$

Легко видеть, что после умножения уравнений (14.5) на ε_i и вычитания уравнения, содержащего члены с индексом « j », получаем систему уравнений, не содержащих ω_i . Из сравнения этих уравнений с уравнением (14.37) получаем уравнение (14.68) в условии аналогии между тепло- и массообменом, которое в случае химических реакций может быть представлено в виде

$$\frac{q_W}{I_{01} - I_W} = \frac{-g_{iW}\varepsilon_i + g_{jW}}{(C_{iW}\varepsilon_i - C_{jW}) - [(C_{i\varepsilon_i})_1 - C_{j1}]} = \frac{\alpha}{c_p}. \quad (14.69)$$

Подставляя $g_{iW}\varepsilon_i + g_{jW}$ из равенства (14.69) в уравнение (14.67) и деля на ε_i , получим

$$G\left(C_{i_{\text{охл}}} - \frac{C_{j_{\text{охл}}}}{\varepsilon_i}\right) = GC_{iW} - G\frac{C_{jW}}{\varepsilon_i} + \frac{\alpha}{c_p} \left[\left(C_{iW} - \frac{C_{jW}}{\varepsilon_i} \right) - \left(C_{i1} - \frac{C_{j1}}{\varepsilon_i} \right) \right]. \quad (14.70)$$

Отсюда, суммируя n уравнений (14.70) (включая уравнение при $i=j$), умноженных на I_{iW} , получаем

$$\begin{aligned} G[(I_{\text{охл}})_W - I_W] &= G\left(\sum_{i=1}^n C_{i_{\text{охл}}} I_{iW} - \sum_{i=1}^n C_{iW} I_{iW} \right) = \\ &= GC_{j_{\text{охл}}} \sum_{i=1}^n \frac{I_{iW}}{\varepsilon_i} - GC_{jW} \sum_{i=1}^n \frac{I_{iW}}{\varepsilon_i} + \frac{\alpha}{c_p} \sum_{i=1}^n C_{iW} I_{iW} - \\ &- \frac{\alpha}{c_p} C_{jW} \sum_{i=1}^n \frac{I_{iW}}{\varepsilon_i} - \frac{\alpha}{c_p} \sum_{i=1}^n C_{i1} I_{iW} + \frac{\alpha}{c_p} C_{j1} \sum_{i=1}^n \frac{I_{iW}}{\varepsilon_i}. \quad (14.71) \end{aligned}$$

Подставляя выражение (14.71) в уравнение (14.58) и учитывая, что $I_W = \sum_{i=1}^n C_{iW} I_{iW}$ и $I'_W = \sum_{i=1}^n C_{i1} I_{iW}$,

получаем

$$\begin{aligned} q_{\text{ст}} &= \frac{\alpha}{c_p} (I_e - I'_W) + \sum_{i=1}^n I_{iW} \frac{1}{\varepsilon_i} \times \\ &\times \left[G(C_{j_{\text{охл}}} - C_{jW}) + \frac{\alpha}{c_p} (C_{j1} - C_{jW}) \right]. \quad (14.72) \end{aligned}$$

Выражение

$$\sum_{i=1}^n I_{iW} \frac{1}{\varepsilon_i} = (H_{xj})_W \quad (14.73)$$

— тепловой эффект реакции, отнесенный к единице массы j -го компонента, израсходованного в реакции при температуре стенки. Из условия (14.19) $H_{xW} = \sum_{i=1}^n \omega_i I_{iW}$. Разделив на ω_j пра-

вую и левую части этого равенства, имеем $\frac{H_{xW}}{\omega_j} = \sum_{i=1}^n \frac{I_{iW}}{\varepsilon_i} = (H_{xj})_W$. Отсюда

$$q_{ст} = \frac{\alpha}{c_p} (I_e - I'_W) + (H_{xj})_W \left[G(C_{j_{окл}} - C_{jW}) + \frac{\alpha}{c_p} (C_{j1} - C_{jW}) \right]. \quad (14.74)$$

Полученное выражение справедливо при условии равенства коэффициентов тепло- и массообмена ($Le \approx 1$), что, вообще говоря, в многокомпонентной смеси выполняется только приближенно.

При выполнении указанного условия формула (14.74) справедлива как при химической реакции во фронте горения, так и при равновесных химических реакциях во всем пограничном слое. Таким образом, при достаточно большой скорости химических реакций теплообмен целиком определяется тепловым эффектом реакции на стенке и условиями на границах пограничного слоя вне зависимости от того, где реакции в действительности протекают.

В качестве компонента с индексом j может быть выбран любой, участвующий в реакции. Например, если через пористую поверхность подается горючее вещество, а во внешней среде присутствуют окислитель, то, приняв окислитель в качестве компонента с индексом j , при $C_{j_{окл}}=0$ и $C_{jW}=0$, т. е. при достаточном количестве поданного через стенку горючего, имеем

$$q_{ст} = \frac{\alpha}{c_p} (I_e + \Delta I_x - I'_W), \quad (14.75)$$

где $\Delta I_x = (H_x)_{ок} C_{j1}$ вне зависимости от положения зоны горения в пограничном слое.

Если концентрация окислителя у стенки больше нуля при малой интенсивности подачи горючего, то в качестве компонента с индексом j удобнее принять горючее. Тогда $C_{j_{окл}}=0$, $C_{j1}=0$ и

$$q_{ст} = \frac{\alpha}{c_p} (I_e - I'_W) + (H_x)_{гор} G C_{j_{окл}}. \quad (14.76)$$

Здесь второй член определяет количество тепла, выделяющегося при полном сгорании горючего, подаваемого через стенку; $C_{j_{окл}}$ в общем случае может быть и меньше единицы.

Если обозначить L — стехиометрическое отношение между количеством окислителя и горючего в реакции, то

$$(H_x)_{гор} = L (H_x)_{ок}.$$

При непрерывном увеличении значения G от нуля до $G = G_{пред}$, когда концентрации горючего и окислителя на стенке становятся равными нулю, т. е. $(C_w)_{гор} = (C_w)_{ок} = 0$, первый член в уравнении (14.76) уменьшается из-за

уменьшения α/c_p при вдуве, а второй член непрерывно растет. При $G > G_{\text{пред}}$, $(C_w)_{\text{гор}} > 0$, а $(C_w)_{\text{ок}} = 0$. Используя в этом случае формулу (14.75), получаем, что тепловой поток в стенку должен непрерывно снижаться из-за уменьшения α/c_p . Примерный вид зависимости $\bar{q}_{\text{ст}}$ от $\bar{G} \left(\frac{m_1}{m_w} \right)^{1/3}$ представлен на

рис. 14.13, где $\bar{q}_{\text{ст}} = \frac{q_{\text{ст}}}{(\alpha/c_p)_0 (I_e - I'_w)}$. Численные расчеты ламинарного пограничного слоя на проницаемой поверхности при наличии фронта горения проведены в работе [136] и др.

Полученное выражение (14.74) легко распространяется и на случай нескольких химических реакций в слое.

Следует в заключение указать, что если скорость протекания химических реакций недостаточна, например, в разреженном газе или при низких температурах газа, теплота реакции будет реализоваться не полностью и значение H_x будет уменьшаться. Таким образом, формулы (14.75) и (14.76) являются менее общими, чем формула (14.58), пригодная во всех случаях.

Полученные в этом разделе формулы (14.58), (14.64) и (14.74) являются наиболее общими для расчета теплообмена с учетом влияния больших скоростей, химических реакций и подачи массы от поверхности.

Значение α_0/c_p в первом приближении может определяться по формулам ламинарного или турбулентного слоя (см. гл. XI и XII).

Отношение $\frac{\alpha}{c_p} / \frac{\alpha_0}{c_p}$ входит в формулы (13.87; 13.89—13.91). При применении для определения α_0/c_p аппроксимационных формул типа (14.50) лучшие результаты дает использование в них отношения энтальпий I'_w/I_e вместо T_w/T_e , где $I_e = I_1 + r \frac{u_1^2}{2}$. Для ламинарного слоя $r \approx \sqrt{\text{Pr}}$, а для турбулентного $r \approx \text{Pr}^{1/3}$.

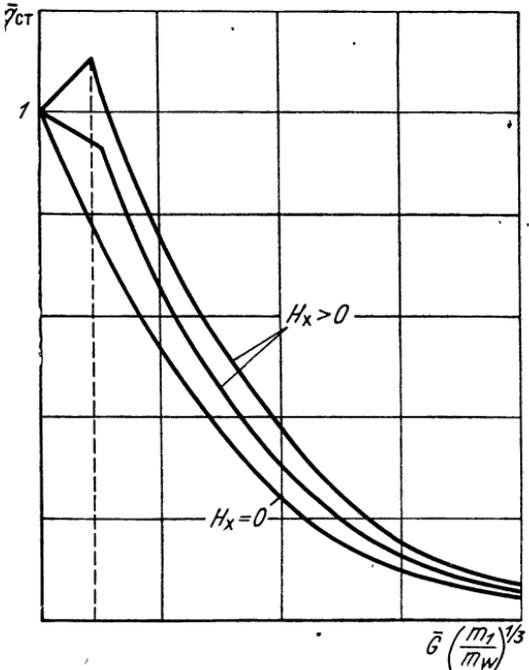


Рис. 14.13. Зависимость теплового потока в стенку $q_{\text{ст}}$ от вдува газа \bar{G}

Величина $I_1 = \sum_{i=1}^n I_{i1} C_{i1}$ определяется по составу вне пограничного слоя и температуре T_1 ; $I'_W = \sum_{i=1}^n I_{iW} C_{i1}$ определяется по составу вне пограничного слоя и температуре стенки T_W ; H_x — теплота реакции между веществом, подаваемым от стенки, и внешним потоком, взятым в стехиометрическом соотношении. Расчет производится в следующем порядке.

При заданном значении температуры стенки T_W определяется распределение α_0/c_p по поверхности тела.

Условие баланса тепла в пренебрежении радиационными потоками $q_{ст} = G \Delta I_{охл}$.

Используя формулы (14.75), (13.87), (13.89) или (13.91), имеем

$$\frac{\alpha_0}{c_p} (1 - B\bar{G} [I_e + \Delta(I_x)_{ок} - I'_W]) = G \Delta I_{охл},$$

где
$$\bar{G} = \frac{G}{\alpha_0/c_p} = \frac{I_e - I'_W}{\Delta I_{охл} + B [I_e + \Delta(I_x)_{ок} - I'_W]}. \quad (14.77)$$

Значение \bar{G} определяет количество охладителя, необходимое для поддержания температуры T_W .

Если значение $G < G_{пред}$, то используется формула (14.76) и тогда

$$\bar{G} = \frac{I_e - I'_W}{\Delta I_{ок} + B [I_e - I'_W + (H_x)_{гор} C_{J_{охл}}]}. \quad (14.78)$$

Следует, однако, иметь в виду, что при высоких температурах большое значение могут иметь лучистые потоки от горячего газа к стенке и излучение от стенки. Расчет теплообмена и тепловой защиты в таких случаях существенно усложняется.

Рекомендуемая литература:

основная: [5, 45, 115];

дополнительная: [2, 3, 8, 16, 22, 26, 37, 40, 43, 44, 52, 60, 87, 93, 108, 113, 114, 119, 133, 135, 136, 137].

ГЛАВА XV

ТЕПЛООБМЕН НА ПОВЕРХНОСТЯХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПРИ ТРЕХМЕРНОМ ОБТЕКАНИИ

Во многих случаях течение вблизи поверхности тела является трехмерным. Это наблюдается при полете летательных аппаратов, при полете осесимметричных тел с углом атаки, при обте-

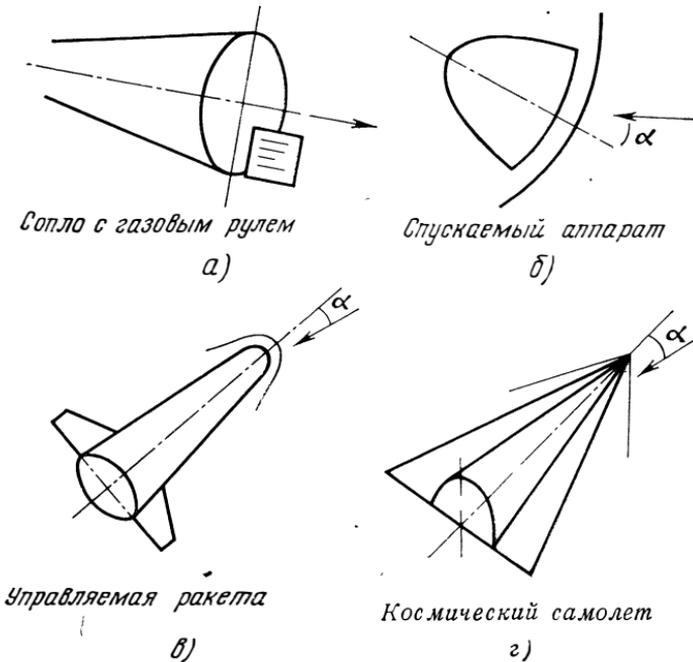


Рис. 15.1. Примеры возникновения трехмерных течений:
 а—сопло с газовым рулем; б—спускаемый аппарат; в—управляемая ракета; г—космический самолет

кании стреловидных крыльев, рулей, надстроек на поверхности обтекаемого тела и др. (рис. 15.1). Вообще, строго двухмерные течения, плоские или осесимметричные, на практике встречаются редко, но во многих случаях трехмерностью можно пренебречь и такие течения рассматривать как двухмерные. Рас-

смотрим методы расчета теплообмена в наиболее важных случаях трехмерного течения, когда непосредственное использование формул гл. XI—XII, выведенных для двухмерных течений, является неверным.

15.1. ТЕЧЕНИЕ В ТРЕХМЕРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В рассматриваемом ранее плоском течении все линии тока идеальной жидкости у поверхности, так же как и линии тока в пограничном слое, лежали в параллельных плоскостях, нормальных к поверхности тела, и поэтому течение в пограничном слое зависело только от двух координат.

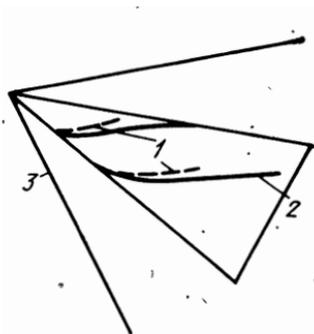


Рис. 15.2. Обтекание конуса под углом атаки α : 1—линии тока у стенки в пограничном слое; 2—линии тока идеальной жидкости; 3—ударная волна

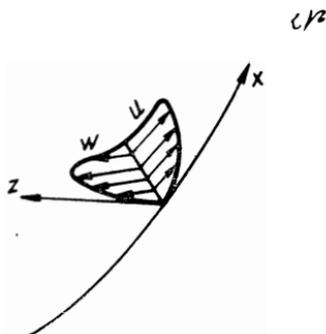


Рис. 15.3. Распределение скорости в трехмерном пограничном слое; координата x совпадает с линией тока идеальной жидкости

В случае пространственного осесимметричного течения линии тока лежат в меридиональных плоскостях, пересекающихся на оси вращения обтекаемого тела. Линии тока у поверхности тела расходятся, но в каждой меридиональной плоскости течение одинаково и при соответствующем выборе системы координат может быть описано двумерными уравнениями.

Трехмерные течения — это такие течения, когда все характеристики пограничного слоя зависят от трех координат.

Примером может служить течение у поверхности конуса, обтекаемого под некоторым углом атаки α (рис. 15.2). На передней, или наветренной, поверхности такого конуса давление повышается и благодаря этому линии тока идеальной жидкости искривляются и расходятся, образуя течение в сторону пониженного давления. В пограничном слое газ обладает меньшей скоростью и меньшим количеством движения, вследствие чего линии тока внутри пограничного слоя искривляются еще сильнее. Бла-

годаря этому внутри пограничного слоя также образуется течение в сторону пониженного давления. Распределение скоростей в пограничном слое носит пространственный характер, т. е. вектор скорости непрерывно поворачивается внутри пограничного слоя в плоскости, параллельной стенке, отклоняясь, по мере приближения к стенке, на больший угол от вектора скорости в идеальной жидкости. Если разложить векторные скорости на составляющие, совпадающие по направлению с линиями тока идеальной жидкости, и по направлению, нормальному к ним (рис. 15.3), то можно разделить течение в пограничном слое на основное, лежащее в поверхностях, нормальных к поверхности тела и проходящих через линии тока идеальной жидкости, и вторичное.

Оба указанных эффекта, связанных с трехмерным течением — искривление и расхождение линий тока идеальной жидкости и образование вторичных течений — существенным образом влияют на теплообмен. На конусе при угле атаки, равном нулю, также имеет место расхождение линий тока идеальной жидкости. Как было показано в гл. XI—XII, это ведет к тому, что пограничный слой становится тоньше и тепловые потоки на конусе больше, чем на пластине. На конусе, обтекаемом под некоторым углом атаки, на наветренной стороне, т. е. обращенной к потоку, расхождение линий тока быстро растет с увеличением угла атаки, что ведет к еще большему утоньшению пограничного слоя. Это явление усиливается вторичными течениями, вызывающими дополнительное перетекание газа внутри пограничного слоя.

Так как на наветренной стороне возрастает давление, можно на ней ожидать существенного увеличения теплового потока из-за резкого утоньшения пограничного слоя и возрастания плотности газа.

На кормовой, или подветренной, стороне конуса все эти эффекты действуют в обратную сторону, но течение здесь обычно сопровождается отрывом пограничного слоя и образованием отрывной области. Указанные свойства, рассмотренные на простейшем примере, справедливы в общем случае произвольного трехмерного течения.

15.2. СИСТЕМА КООРДИНАТ

Для расчета теплообмена необходимо решить уравнения трехмерного пограничного слоя в выбранной системе координат. Наиболее просто уравнения могут быть записаны в ортогональной системе координат, связанной с поверхностью тела. Для этого на поверхности строится координатная сетка x, z криволинейных координат, причем в каждой точке линии $x = \text{const}$ ортогональны линиям $z = \text{const}$. Ось y направлена в каждой точке по нормали к поверхности (рис. 15.4). Внутри тонкого погранич-

ного слоя система координат при этом будет, с точностью приближений пограничного слоя, ортогональной.

Координаты x, z могут быть заданы самым различным образом, но наиболее удобно их связать с какими-либо характерными линиями самой обтекаемой поверхности, либо с линиями тока идеального течения на поверхности тела.

Например, при обтекании осесимметричного тела (рис. 15.5) целесообразно линии x направить вдоль образующих, линии

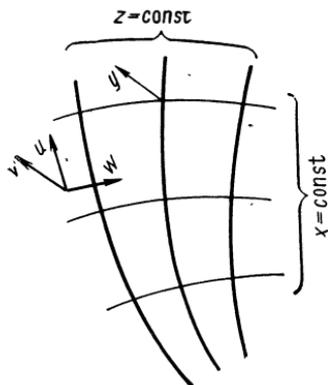


Рис. 15.4. Система координат на поверхности

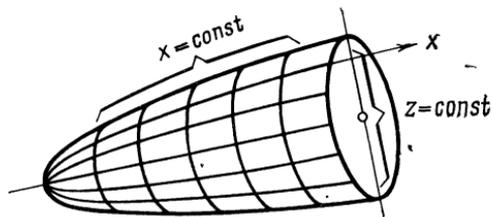


Рис. 15.5. Система координат на осесимметричном теле

z — по окружностям, линии y — по нормали к поверхности. Тогда элемент длины в пограничном слое определится выражением

$$d^2s = dx^2 + R^2 dz^2 + dy^2. \quad (15.1)$$

Здесь z — угол, отсчитываемый от некоторой меридиональной плоскости $z=0$, умноженный на единицу длины $R=R(x)$ — радиус вращения тела.

В общем случае произвольной ортогональной системы координат можно записать

$$d^2s = h_1^2 dx^2 + h_2 dz^2 + dy^2. \quad (15.2)$$

Здесь $h_1(x, z)$ и $h_2(x, z)$ — коэффициенты Ламе, связывающие приращения координат dx и dz с приращениями длины. Значение $h_3=1$, поскольку при расчете пограничного слоя y является линейной координатой.

Наиболее удобной для решения практических задач является, так называемая, полугеодезическая система координат, когда линии $x(z=\text{const})$ направлены вдоль геодезических линий на поверхности, обладающих тем свойством, что их геодезическая кривизна

$$k_1 = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{dh_1}{dz} = 0. \quad (15.3)$$

При этом система координат зависит только от формы поверхности и уравнения пограничного слоя могут быть упрощены.

Примером геодезических линий являются, например, линии, совпадающие с образующими тел вращения. На поверхностях, развертывающихся в плоскость, геодезической является всякая линия, являющаяся на развертке прямой.

Если линии x связываются с линиями тока идеального течения, то система координат зависит как от формы тела, так и от характера обтекания тела, угла атаки и других факторов, но такая система более удобна для построения приближенных методов решения, так как при этом четко можно выделить основное и вторичное течения и сделать некоторые упрощения.

15.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть u , w , v — компоненты скорости вдоль осей x , z , y соответственно.

Система уравнений пограничного слоя в общем случае сжимаемого газа с химическими реакциями имеет вид [9 123]:

уравнения движения в проекции на оси x и z —

$$\begin{aligned} \frac{\rho u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho w}{h_2} \frac{\partial u}{\partial z} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + k_1 \rho u w - k_2 \rho w^2 = \\ = - \frac{1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (15.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho u}{h_1} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\rho w}{h_2} \frac{\partial w}{\partial z} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} - k_1 \rho u^2 + k_2 \rho u w = \\ = - \frac{1}{h_2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (15.5)$$

уравнение неразрывности —

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + k_2 \rho u + k_1 \rho w = 0, \quad (15.6)$$

$$\text{где} \quad p = \Phi(x, z); \quad k_1 = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial z}; \quad k_2 = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \quad (15.7)$$

— геодезические кривизны линий x и z ;

уравнение энергии с учетом результатов гл. XI —

$$\begin{aligned} \frac{\rho u}{h_1} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\rho w}{h_2} \frac{\partial I}{\partial z} + \rho v \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^n g_i I_i + \\ + \frac{1}{h_1} u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{h_2} w \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Физический смысл отдельных членов в уравнении (15.8) такой

же, как и в уравнениях (11.16). Значения $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial z$ связаны со скоростями идеального течения соотношениями

$$-\frac{1}{\rho h_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{w_1}{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial z} + k_1 u_1 w_1 - k_2 w_1^2; \quad (15.9)$$

$$-\frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{w_1}{h_2} \frac{\partial w_1}{\partial z} - k_1 u_1^2 + k_2 u_1 w_1, \quad (15.10)$$

которые переходят в обычное уравнение Бернулли в случае двухмерного течения. Если координатные линии x совпадают с

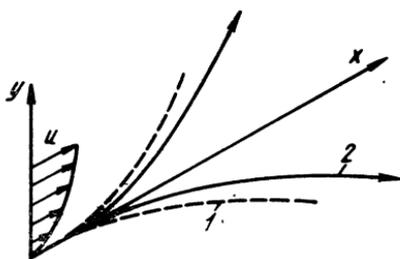


Рис 15.6 Линии растекания:

1—у стенки; 2—идеальной жидкости

линиями тока внешнего течения, то $w_1=0$ (но внутри пограничного слоя $w \neq 0$) и вместо уравнений (15.9) и (15.10) получаем

$$-\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} = u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}; \quad (15.11)$$

$$-\frac{1}{\rho_1 h_2} \frac{\partial p_1}{\partial z} = -k_1 u_1^2. \quad (15.12)$$

15.4. ЛИНИИ РАСТЕКАНИЯ

При расчете трехмерного пограничного слоя важное значение имеют, так называемые, линии растекания. Эти линии образуются на наветренной стороне тела, и в окрестности этих линий тепловые потоки и трение достигают наибольших значений.

Если какая-нибудь линия $z=\text{const}$ является геодезической линией и одновременно линией тока идеальной жидкости на поверхности, то $w_1=0$, $k_1 = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial z} = 0$ и из уравнения (15.12) следует

$$\frac{dp_1}{dz} = 0 \quad (15.13)$$

Используя выражение (15.13), получаем из уравнения (15.5) тривиальное решение $w \equiv 0$. Таким образом, всюду вдоль этих линий, которые называются линиями растекания, составляющие полного вектора скорости лежат в одной плоскости, как и при двухмерном течении.

Уравнение движения вдоль оси x и уравнение энергии при этом по виду совпадают с уравнениями двухмерного пограничного

ного слоя. Следует однако указать, что $dw/dz \neq 0$ в отличие от двухмерного течения, и уравнение неразрывности (15.6) не совпадает с уравнением двухмерного течения. Струйки тока вне пограничного слоя и внутри его расходятся в обе стороны от линии растекания (рис. 15.6). Пограничный слой может рассчитываться на этих линиях независимо от расчета слоя на всей поверхности. При двухмерном течении такими свойствами обладают передние критические точки.

15.5. РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА НА ЛИНИЯХ РАСТЕКАНИЯ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ

Рассмотрим наиболее важные случаи течения на линиях растекания, когда система (15.4) — (15.8) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Общий вид формул такой же, как и при расчете двухмерного пограничного слоя.

$$\text{Обозначим} \quad \text{Nu}_w = \frac{\alpha l}{\lambda_w}, \quad \text{Re}_w = \frac{u \varrho_w l}{\mu_w},$$

где l и u — характерная длина и скорость;
 $\varrho_w, \lambda_w, \mu_w$ — значения плотности, теплопроводности и вязкости в рассматриваемой точке при температуре стенки.

Выражение для коэффициента теплоотдачи имеет обычный вид:

$$\frac{\alpha}{c_p} = \frac{\text{Nu}_w}{\sqrt{\text{Re}_w}} \sqrt{\frac{\mu_w \varrho_w u}{l}} \frac{1}{\text{Pr}}. \quad (15.14)$$

Все расчеты в этой главе будут проведены для случая $\text{Pr} = 1$ и когда произведение $\mu \varrho = \text{const}$ поперек пограничного слоя. Для учета переменности свойств газа и отличия Pr от единицы можно воспользоваться методикой, изложенной в разд. 11.12, 14.6 и ввести поправочные множители K и K_1 . Влияние отличия числа Le от единицы незначительно и им можно пренебречь.

Значение K может быть аппроксимировано формулой [см. (11.117)]:

$$K_1 = \left(\frac{\mu^* \varrho^*}{\mu_w \varrho_w} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_1 \varrho_1}{\mu_w \varrho_w} \right)^\gamma, \quad \text{где } \gamma = \frac{1}{15} \frac{I_w}{I_{01}}. \quad (15.15)$$

Здесь μ^* и ϱ^* определены в точке максимальной энтальпии

$$I^* = I_1 \left[\frac{I_w}{I_1} + \frac{1}{4\omega} \left(1 + \omega - \frac{I_w}{I_1} \right)^2 \right] \quad (15.16)$$

или $I_w = I_1$ при $\omega < 1 - \frac{I_w}{I_1}$.

Величина $\omega = u_1/2I_1$ — важный параметр, характеризующий сжимаемость газа;

для совершенного газа

$$\omega = \frac{u_1^2}{2c_p T_1} = \frac{k-1}{2} M_1^2. \quad (15.17)$$

Значение $K_2 = \text{Pr}^{n_2}$, где n_2 изменяется от 0,33 до 0,45. Учитывая, что значение Pr не сильно отличается от единицы, примем приближенно $n_2 \approx 0,4$.

15.5.1. Теплообмен по линии растекания на конусе

Здесь может рассматриваться теплообмен на наветренной стороне круглого конуса под углом атаки ($\bar{\alpha}$) или на линии максимального давления на конусе произвольной, например, эллиптической формы (см. рис. 15.2).

Выберем систему координат так, чтобы линии $z = \text{const}$ совпадали с образующими конуса, а линии $x = \text{const}$ были направлены по нормали к ним. Получаем $h_1 = 1$ и $h_2 = \varphi(z) \cdot x$, где $\varphi(z)$ — некоторая функция, зависящая от формы поперечного сечения конуса. Для круглого конуса $h_1 = 1$; $h_2 = R = x \sin \theta_k$, где θ_k — полуугол при вершине конуса.

Коническое течение обладает тем свойством, что вдоль линий x и, соответственно, вдоль образующих тела все параметры течения постоянны. Поэтому всюду на поверхности $\partial p_1 / \partial x \equiv 0$; $\partial u_1 / \partial x \equiv 0$; $\partial w_1 / \partial x \equiv 0$. На линии растекания из определения следует также, что $w_1 = 0$, $\partial p_1 / \partial z = 0$, и далее из уравнения (15.9) получаем $\partial u_1 / \partial z = 0$. Влияние трехмерности течения будет определяться значением $\frac{\partial w_1}{\partial z} = b$.

Введем безразмерный параметр для круглого цилиндра под углом атаки в виде

$$C = \frac{2}{3} \frac{\partial w_1 / \partial z}{u_1 \sin \theta_k}. \quad (15.18)$$

Значение C зависит от угла атаки, полуугла при вершине конуса и числа M_∞ набегающего потока. Из уравнения (15.10) имеем для линии растекания в идеальной жидкости

$$-\frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_1}{\partial z} = w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} + \sin \theta_k \cdot u_1 w_1. \quad (15.19)$$

Дифференцируя уравнение (15.19) по x и решая относительно $\partial w_1 / \partial z$, получаем

$$C = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{1 + 4 \frac{x-1}{x} \frac{C_1^2}{\sin^2 \theta_k \cdot \omega_1}}, \quad (15.20)$$

где $C_1^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p_1 / \partial z^2}{\rho_n} \right)_{z=0}$; ρ_n, p_n — значения на линии растекания.

Значения C_1 , ω , u_1 , ρ_W могут быть получены из решений газодинамики идеальной жидкости или по формулам теории Ньютона:

$$\frac{p_1}{p_H} = 1 + k M_H^2 \sin^2(\bar{\alpha} + \theta_K); \quad \frac{u_1}{u_H} = \cos(\bar{\alpha} + \theta_K);$$

$$C_1^2 = \frac{\sin \bar{\alpha} \cos \theta_K}{\sin(\bar{\alpha} + \theta_K)}$$

и

$$\omega_1 = \frac{\omega_H \cos^2(\bar{\alpha} + \theta_K)}{1 + \omega_H \sin^2(\bar{\alpha} + \theta_K)}; \quad \omega_H = \frac{k-1}{2} M_H^2. \quad (15.21)$$

Значения $Nu_W / \sqrt{Re_W}$ рассчитаны в работах [10,140].

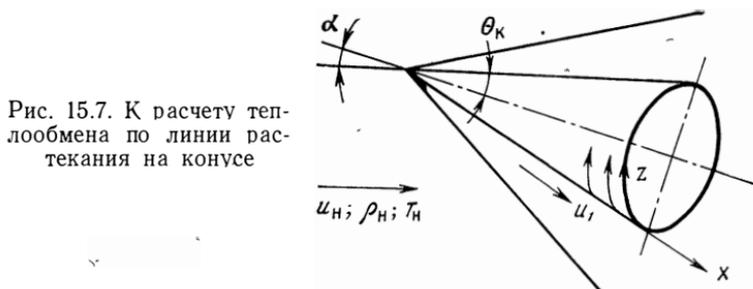


Рис. 15.7. К расчету теплообмена по линии растекания на конусе

Результаты расчетов теплообмена по линиям растекания на конусе (рис. 15.7), проведенных в широком диапазоне значений чисел M (при $M > 3$), полуугла при вершине конуса θ_K и углом атаки $\bar{\alpha}$, могут быть с удовлетворительной точностью приближенно представлены в виде универсальной зависимости

$$\frac{Nu_W (\sin \theta_K)^{1/2}}{\sqrt{(Re_W)_H} M_H Pr^{1/3}} = f(\bar{\alpha} + \theta_K). \quad (15.22)$$

Здесь

$$(Re_W)_H = \frac{(\rho_W)_H u_H x}{\mu_W}; \quad Nu_W = \frac{\alpha x}{\lambda_W};$$

u_H — скорость набегающего на тело потока;

$(\rho_W)_H$ — плотность газа при давлении в набегающем потоке и температуре стенки;

x — расстояние от вершины конуса.

Тепловой поток в стенку равен

$$q_W = \frac{Nu_W}{\sqrt{(Re_W)_H}} \sqrt{\frac{u_H (\rho_W)_H \mu_W}{x} \frac{I_e - I_W}{Pr}} K K_1. \quad (15.23)$$

Здесь

$$I_e = I_1 + r \frac{u_1^2}{2} = \frac{I_0}{1 + \omega_1} (1 + r \omega_1); \quad r \approx \sqrt{Pr}; \quad I_0 = (c_p)_H T_H + \frac{u_H^2}{2};$$

ω_1 определяется по формуле (15.21).

Представление результатов в форме (15.22) удобно, поскольку при использовании кривой рис. 15.8 легко интерполировать на промежуточные значения θ_k . При расчете по формулам (15.23) и (15.21) необходимо знать только параметры набегающего потока u_∞ , ρ_∞ и температуру стенки T_w .

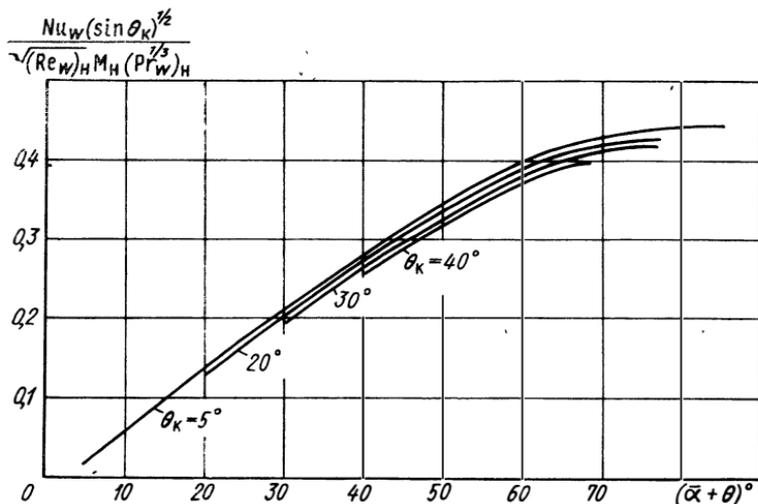


Рис. 15.8. Теплообмен по линии растекания на конусе, обтекаемом под углом атаки

15.5.2. Теплообмен по линии растекания на кромке стреловидного крыла под углом атаки

Передняя кромка стреловидного крыла при больших скоростях всегда имеет некоторое затупление, которое может рассматриваться как цилиндрическое.

Обозначим R_0 — радиус затупления, γ — угол стреловидности крыла, или угол скольжения для передней кромки (рис. 15.9). Направим линии $z = \text{const}$ вдоль образующих цилиндра, при этом $h_1 = h_2 = 1$.

Обозначим постоянную скорость вдоль передней кромки (скорость скольжения) $u_1 = a$, а скорость, направленную перпендикулярно линии растекания, $-\omega_1 = b_1 z$, где z — расстояние от линии растекания.

Параметры течения a и b_1 , плотность ρ_w , ω_1 , необходимые для расчета, могут быть найдены из условия, что скачок уплотнения при сверхзвуковом обтекании кромки параллелен образующей.

Если стреловидное крыло расположено под углом атаки α , то действительный угол скольжения по отношению к набегающему потоку $\gamma_{\text{эф}}$ будет отличаться от γ и может быть найден из условия

$$\sin \gamma_{\text{эф}} = \sin \gamma \cos \alpha;$$

из уравнения энергии —

$$\omega_1 = \frac{\omega_H \sin^2 \gamma_{\text{эф}}}{1 + \omega_H \cos^2 \gamma_{\text{эф}}}; \quad (15.24)$$

значение b_1 определяется по формуле

$$b_1 = \frac{a_H}{R_0} \sqrt{\frac{2}{k}} C; \quad C = -\frac{\partial^2 (p_1/p_H)}{\partial (z/R_0^2)},$$

где p_H и a_H — давление газа и скорость звука у поверхности тела в идеальной жидкости, рассчитываемые в предположении,

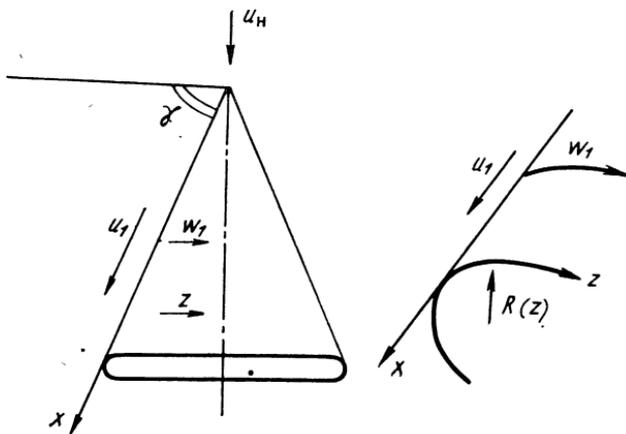


Рис. 15.9. К расчету теплообмена по линии растекания на цилиндре со скольжением или на передней кромке стреловидного крыла

что кромка обтекается потоком, направленным перпендикулярно образующей при числе $M_n = M_H \cos \gamma_{\text{эф}}$. Зависимость $\gamma_{\text{эф}}$ от угла стреловидности γ и угла атаки α показана на рис. 15.10. Решения уравнений ламинарного пограничного слоя в окрестности линии растекания приведены в работе [9].

На рис. 15.11 — 15.14 представлены результаты расчета $\frac{Nu_W}{\sqrt{(Re_W)_H} Pr^{0,4} M_H}$ в функции от $\gamma_{\text{эф}}$ при разных M_H . Как видно при такой обработке влияние M_H невелико. Здесь

$$Nu_W = \frac{\alpha R_0}{\lambda_W}; \quad (Re_W)_H = \frac{u_H (\rho_W)_H R_0}{\mu_W},$$

где R_0 — радиус затупления.

Тепловой поток вычисляется по формуле

$$q_W = \frac{Nu_W}{(Re_W)_H} \sqrt{\frac{u_H (\rho_W)_H \mu_W}{R_0}} \frac{I_e - I_W}{Pr}; \quad (15.25)$$

$(\rho_W)_H$ вычисляется при $T = T_W$ и $p = p_H$.

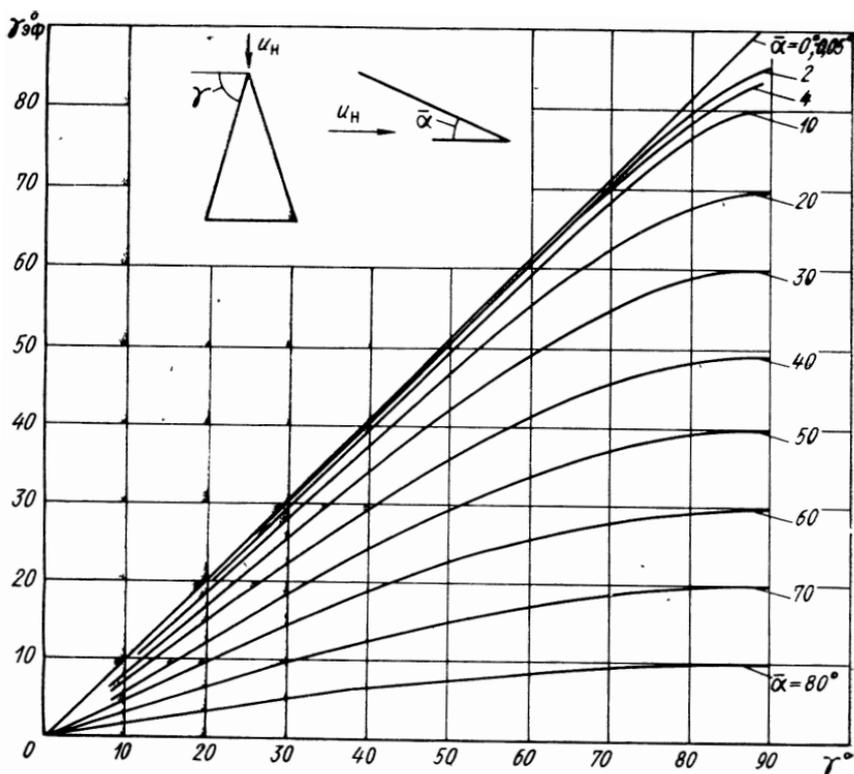


Рис. 15.10. Зависимость $\gamma_{эф}$ от γ при обтекании стреловидного крыла с цилиндрической кромкой

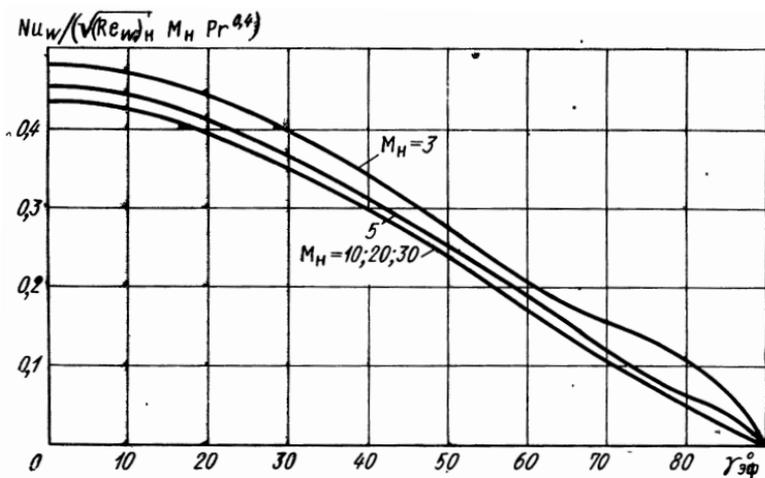


Рис. 15.11. График для расчета теплообмена по линии растекания на цилиндрической кромке стреловидного крыла при $T_w/T_0 \ll 1$

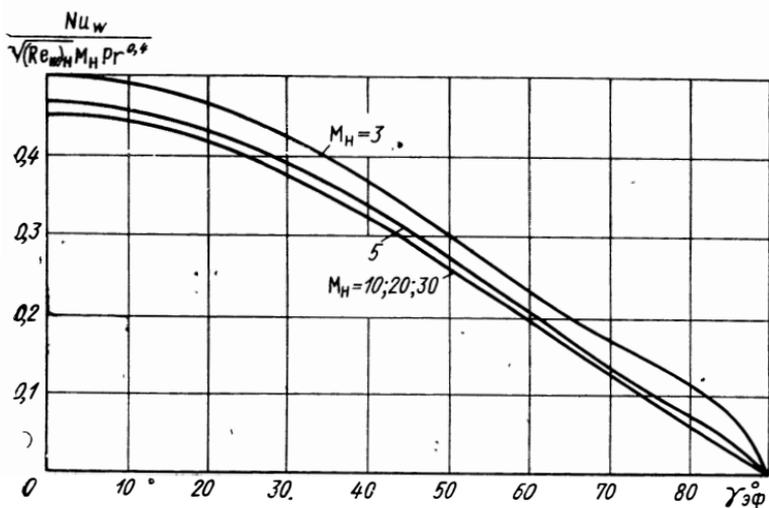


Рис. 15.12. График для расчета теплообмена по линии растекания на цилиндрической кромке стреловидного крыла при $T_w/T_0 \ll 0,6$

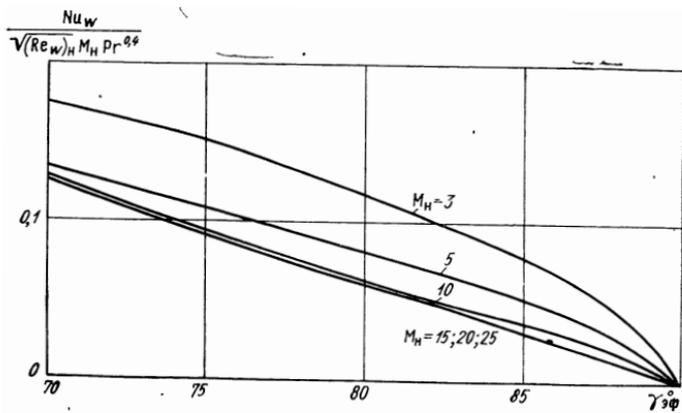


Рис. 15.13 График для расчета теплообмена по линии растекания на стреловидном крыле при больших значениях M_H и $T_w/T_0 \ll 1$

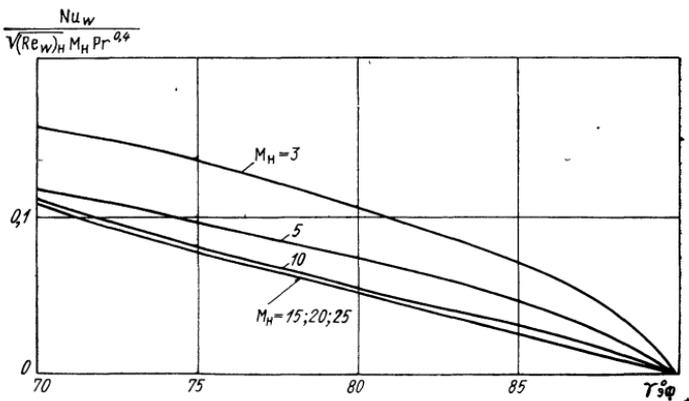


Рис. 15.14 График для расчета теплообмена по линии растекания на стреловидном крыле при больших значениях M_H и $T_w/T_0=0,6$

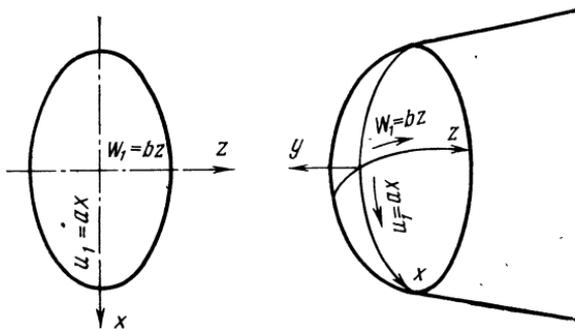


Рис. 15.15. Система координат для расчета пограничного слоя в окрестности передней критической точки в случае трехмерного затупления

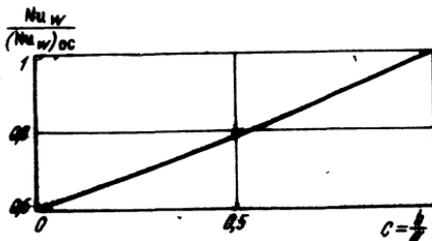


Рис. 15.16. График для расчета тепловых потоков при пространственном течении в окрестности передней критической точки:

$$u_1 = dx; \quad w_1 = bz$$

В целом кривые на рис. 15.13 и 15.14 в области больших значений $\alpha + \theta_k$ близко согласуются с кривой рис. 15.8 при $\gamma_{эф} = \frac{\pi}{2} - (\bar{\alpha} + \theta_k)$, с учетом того, что $R = x \sin \theta_k$. Это свидетельствует о том, что при больших значениях $\bar{\alpha} + \theta_k$ пограничный слой на конусе определяется местным значением радиуса конуса и развивается так же, как на цилиндре со скольжением с теми же местным радиусом и углом между образующей и вектором набегающего потока.

15.5.3. Расчет теплообмена в окрестности трехмерной критической точки

В гл. XI приведены формулы для расчета теплообмена в окрестности передней критической точки для осесимметричного и плоского течений. Если передняя кромка не является осесимметричной, например, имеет эллиптическую форму (рис. 15.15), то распределение скорости может быть записано в виде $u_1 = ax$, $w_1 = bz$, где x и z — плоские координаты ($h_1 = h_2 = 1$).

Трехмерность характеризуется параметром $C = a/b$; $C = 0$ соответствует плоскому случаю (например, обтеканию кромки крыла), $C = 1$ — осесимметричному случаю.

Результаты расчета для случая течения в окрестности трехмерной критической точки [9] представлены на рис. 15.16, где приведены значения $Nu_w / (Nu_w)_{ос} = f(C)$. В качестве линейного размера использован размер затупления в той плоскости, где он имеет меньшее значение. Как видно, зависимость от C является почти линейной:

$$C \approx R_0/R_1,$$

где R_0 и R_1 — характерные размеры затупления вдоль осей z и x . Для осесимметричного течения

$$\left[\frac{Nu_w}{\sqrt{(Re_w)_h Pr^{0,4}}} \right] = 0,8.$$

Значение q_w определяется по значению R_0 , формуле (15.25) и графику рис. 15.16.

15.6. РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ

Расчет теплообмена на теле произвольной формы требует решения полной системы уравнений (15.5) — (15.8). Задача осложняется тем, что не во всех случаях разработаны эффективные методы расчета обтекания тела идеальной жидкостью, и в этих случаях используются экспериментальные данные о распределении давления и скорости на поверхности тел.

Сложность расчета теплообмена определяется главным образом наличием вторичных течений. Однако, если температура стенки значительно ниже температуры торможения внешнего потока, газ у стенки становится более плотным и влияние вторичных течений ослабевает. При этом можно проводить расчет теплообмена вдоль линий тока идеальной жидкости, учитывая их расхождение, но пренебрегая вторичными течениями. В этом случае хорошие результаты дает метод эффективной длины, изложенный для ламинарного течения в гл. XI. По этому методу теплообмен рассчитывается по формулам для плоской пластины, только вместо истинной длины используется эффективная длина:

$$q_w = \left(\frac{Nu_w}{\sqrt{Re_w}} \right)_{пл} \sqrt{\frac{U_1 q_w \mu_w U_1}{x_{эф}}} (I_e - I_w) Pr^{2/3}. \quad (15.26)$$

Здесь $x_{эф}$ — эффективная длина, определяемая из выражения

$$x_{эф} = \frac{1}{U_1 q_w (h_2')^2} \int_0^s U_1 q_w (h_2')^2 ds, \quad (15.27)$$

где U_1 — полный вектор скорости идеальной жидкости;
 s — расстояние вдоль линии тока идеальной жидкости от передней критической точки (точки растекания);
 h_2' — коэффициент Ламе в координатах, связанных с линиями тока внешнего течения, характеризующий расхождение линий тока.

В случае двухмерного плоского течения $h_2' = C$, в случае осесимметричного — $h_2' = R$ и получаем соответственно формулу (11.136).

В общем случае для расчета необходимо иметь распределение параметров течения на поверхности тела, заданное в координатах, связанных с геометрией поверхности. Если задано распределение $u_1 = u_1(x, z)$; $\omega_1 = \omega_1(x, z)$, то значение h_2' может быть выражено через u_1 , ω_1 , h_1 , h_2 .

На рис. 15.17 — 15.19 приведены результаты расчета теплообмена на поверхности круглого конуса, обтекаемого при различных углах атаки, справедливые приблизительно при различных M_n и $\theta_k = 15^\circ$, $\theta_k = 30^\circ$ и $\theta_k = 40^\circ$.

Здесь
$$Nu_w = \frac{\alpha x}{\lambda_w}; \quad (Re_w)_n = \frac{u_n (q_w)_n x}{\mu_w},$$

где u_n — скорость набегающего потока;
 $(q_w)_n$ — плотность при $T = T_w$ и $p = p_n$;
 x — расстояние от вершины вдоль образующей $z = \text{const}$.
 Значение q_w определяется по формуле (15.23). При использовании результатов расчета, приведенных на рис. 15.16 и 15.18, следует иметь в виду, что при больших значениях z в окрестно-

Рис. 15 17. Результаты расчета теплообмена на поверхности конуса при различных углах атаки:
 $\theta_k=15^\circ$, $M_H=6$

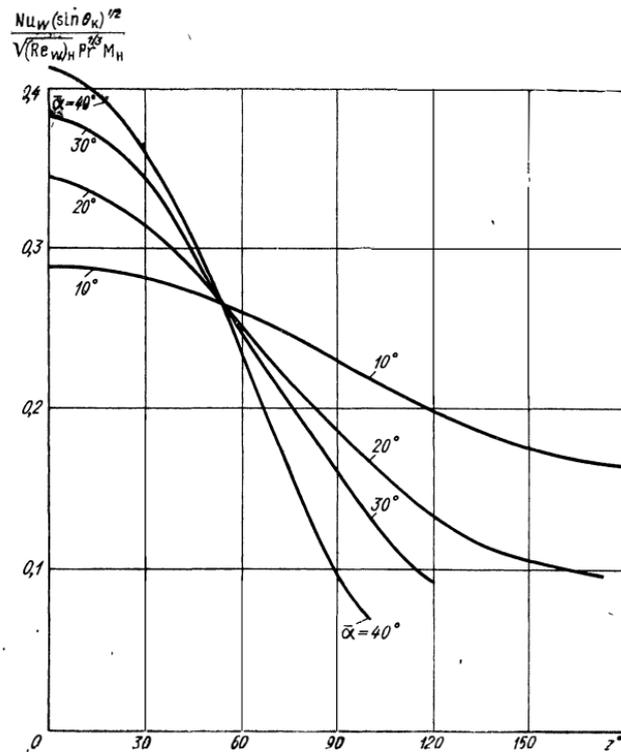
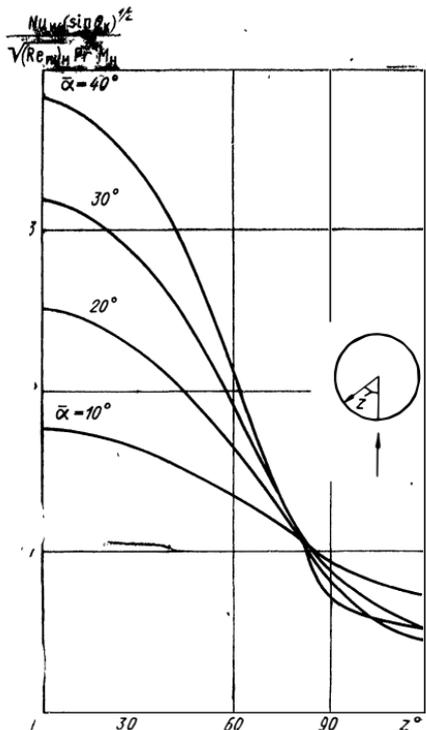


Рис. 15 18. Результаты расчета теплообмена на поверхности конуса при различных углах атаки:
 $\theta_k=30^\circ$

сти линий стекания может возникнуть отрыв пограничного слоя, и истинные значения q_w , начиная с точки отрыва, будут практически постоянными.

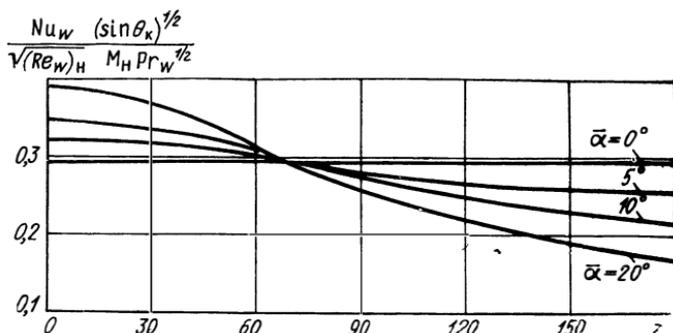


Рис. 15.19. Распределение тепловых потоков на поверхности круглого конуса при различных углах атаки: $\theta_k = 40^\circ$

15.7. РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТРЕХМЕРНОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ И ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В расчете теплообмена при турбулентном режиме течения предполагается, что тепловой поток в данной точке определяется толщиной пограничного слоя δ и полным вектором скорости идеальной жидкости U :

$$C_n = \frac{q_w}{\rho_w U_1 (I_e - I_w)} = f(Re_\delta); \quad Re_\delta = \frac{U_1 \rho_1 \delta}{\mu}. \quad (15.28)$$

При использовании условия (15.28) расчет теплообмена может быть проведен по методу эффективной длины. Тепловой поток в некоторой точке на поверхности, обтекаемой трехмерным потоком, может быть рассчитан по формуле (12.54), приобретающей вид

$$q_w = \frac{Nu_w}{Re_w^{0,8}} \rho_w^{0,8} \mu_w^{0,2} U_1^{0,8} x_{сф}^{-0,2} (I_e - I_w) Pr^{-1}. \quad (15.29)$$

Значение $Nu_w/Re_w^{0,8}$ при этом определяется на основании экспериментальных исследований на плоской пластине:

$$\frac{Nu_w}{Re_w^{0,8}} = 0,0296 \cdot Pr_1^{0,5} K, \quad (15.30)$$

где $K = f(M, I_w/I_e)$ характеризует влияние сжимаемости. Можно принять из гл. XII

$$K \approx \left(\frac{I_w}{I_e} \right)^{0,4} (1 + \omega r)^{0,1}. \quad (15.31)$$

Величина $x_{\text{эф}}$ — эффективная длина, вычисляемая вдоль линии тока идеальной жидкости:

$$x_{\text{эф}} = \frac{\int_0^s \varrho_W U_1 (h_2')^{1,25} ds}{\varrho_W U_1 (h_2')^{1,25}}, \quad (15.32)$$

где ds — приращение координаты вдоль линии тока;

h_2' — коэффициент Ламе в координатах, связанных с линиями тока идеальной жидкости.

Легко видеть, что при $h_2 = 1$ и $h_2' = R$ формула (15.32) переходит в формулы для плоского и осесимметричного движений соответственно (см. гл. XII). Рассмотрим некоторые примеры применения формулы (15.32).

15.7.1. Передняя кромка стреловидного крыла или цилиндр со скольжением

Для линии растекания (см. рис. 15.9) скорость вдоль образующей u_1 ; скорость, нормальная к образующей, $\omega_1 = bz$. Тепловой поток может быть рассчитан по формуле

$$q_W = 0,0308 K \mu_W^{0,2} \mu_H^{0,3} u_1^{0,8} b^{0,2} (I_e - I_W) \text{Pr}^{-0,57}. \quad (15.33)$$

На рис. 15.20—15.21 представлены результаты расчета теплообмена по линии растекания на передней цилиндрической кромке стреловидного крыла в зависимости от эффективного угла стреловидности. По оси ординат отложена величина $\frac{\text{Nu}_W}{(\text{Re}_W)_H^{0,8}} \text{Pr}^{-0,43} \left(\frac{I_W}{I_e}\right)^{-0,6} M_H^{-1,6}$. Как видно, при этом кривые при различных M_H и I_W/I_e хорошо согласуются между собой.

Тепловой поток по параметрам набегающего потока определяется по формуле

$$q_W = \frac{\text{Nu}_W}{(\text{Re}_W)_H^{0,8}} \frac{\varrho_H^{0,8} u_H^{0,8} \mu_W^{0,2}}{R_0^{0,2}} \frac{I_e - I_W}{\text{Pr}}, \quad (15.34)$$

где R_0 — радиус затупления;

$$I_e = \frac{I_0}{1 + \omega_H} (1 + r\omega_1);$$

ω_1 определяется по формуле (15.24);

$\frac{\text{Nu}_W}{(\text{Re}_W)_H^{0,8}}$ определяется по графикам для заданных значений $\text{Pr} M_H$; I_W/I_e .

При малых значениях $\gamma_{\text{эф}}$ турбулентный тепловой поток быстро убывает, стремясь к нулю при $\gamma_{\text{эф}} \rightarrow 0$. При этом тепловой поток

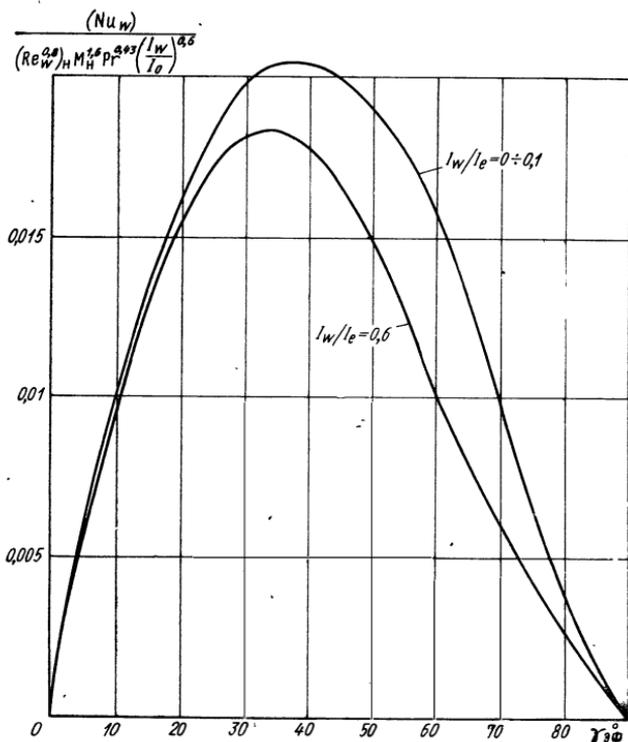


Рис. 15.20. Результаты расчета теплообмена по линии растекания на цилиндрической кромке стреловидного крыла при турбулентном режиме течения

на линии растекания должен определяться по формулам ламинарного течения (15.25) и графикам, показанным на рис. 15.11 и 15.14.

Как видно, в отличие от ламинарного режима с увеличением угла стреловидности до 45° тепловые потоки возрастают, что объясняется увеличением плотности тока q_{11} из-за увеличения скорости скольжения. При дальнейшем увеличении $\gamma_{эф}$ тепловой поток уменьшается из-за снижения q_{11} в силу быстрого падения давления.

На рис. 15.22 приведен график распределения тепловых потоков по поверхности цилиндрического затупления с радиусом R_0 при разных $\gamma_{эф}$. При $\gamma \gg 45^\circ$ кривые имеют максимум на линии растекания $z=0$. При $\gamma < 45^\circ$ максимум смещается в область $0 < z/R_0 < 0.7$. Случай $\gamma_{эф} = 0$ соответствует поперечному обтеканию цилиндра. На рис. 15.23 приведены максимальные значения Nu_w на поверхности цилиндрического затупления в зависимости от $\gamma_{эф}$. Как видно, в отличие от ламинарного течения увеличение

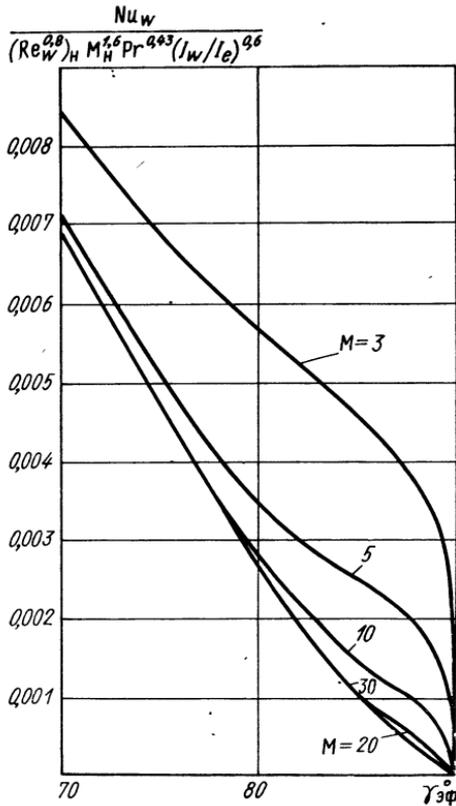


Рис. 15.21 Результаты расчета теплообмена на кромке стреловидного крыла в зависимости от угла стреловидности при больших $\gamma_{\text{эф}}$

угла стреловидности при $\gamma < 45^\circ$ может привести к возрастанию тепловых потоков.

15.7.2. Турбулентный теплообмен в окрестности линии растекания на остром конусе

Тепловой поток в подобном случае при обтекании под некоторым углом атаки может быть рассчитан по формуле

$$q_w = 0,0348 \left(1 + \frac{5}{9} \frac{\partial w_1 / \partial z}{u_1 \sin \theta_k} \right)^{0,2} K \mu_w^{0,2} \rho_w^{0,8} u_1^{0,8} x^{-0,2} (I_e - I_w) Pr^{0,6}. \quad (15.35)$$

При $\partial w_1 / \partial z = b_1 = 0$ формула (15.35) будет соответствовать случаю обтекания (см. разд. 12.9) конуса при угле атаки, равном нулю. При больших углах атаки с учетом того, что $b_1 = b x \sin \theta_k$, формула (15.35) переходит в формулу (15.33) для цилиндра со скольжением.

На рис. 15.24 представлены результаты расчета турбулентного теплообмена по линии растекания на конусах с различными

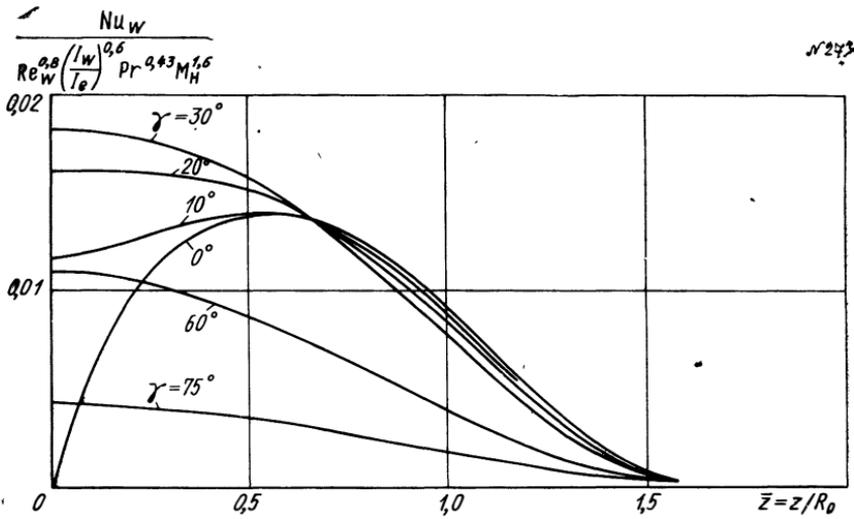


Рис. 15.22 Распределение тепловых потоков на поверхности цилиндрического затупления со скольжением при разных значениях γ : $T_w/T_0 \ll 1$
 $T_w/T_0 \ll 1$

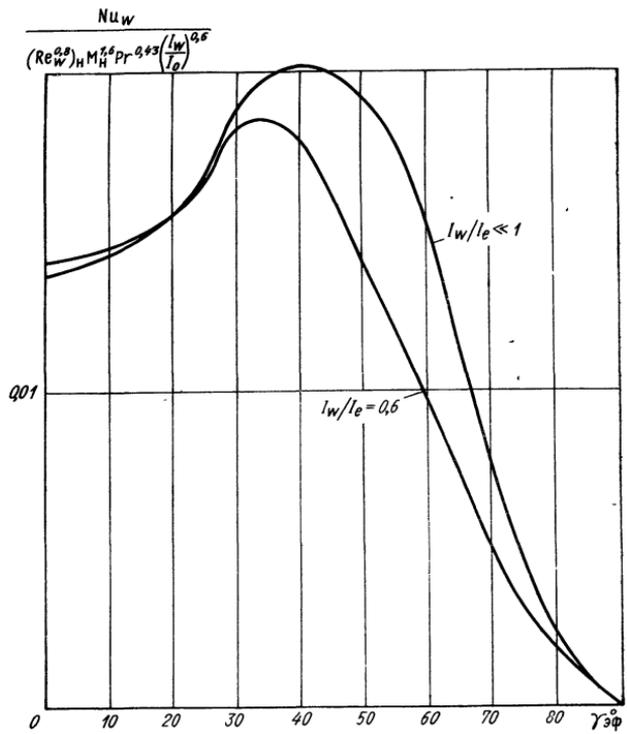


Рис. 15.23. Максимальные значения Nu_w на поверхности кромки крыла в зависимости от угла стреловидности

полууглами при вершине θ_K и различными углами атаки $\bar{\alpha}$. Видно, что зависимость

$$\frac{Nu_W}{(Re_W)_H^{0,8}} Pr^{-0,43} \left(\frac{I_W}{I_e}\right)^{-0,6} M_H^{-1,6} (\sin \theta_K)^{0,2} = f(\bar{\alpha} + \theta_K)$$

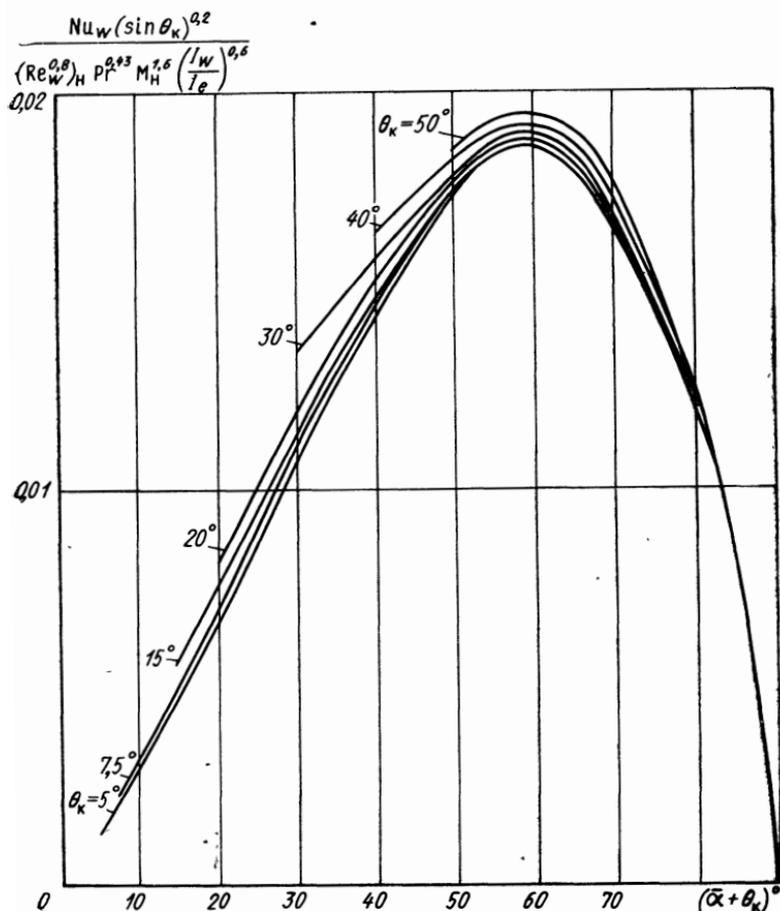


Рис. 15.24. Зависимость (Nu_W) от суммарного угла $(\bar{\alpha} + \theta_K)$ при разных значениях θ_K

слабо зависит от значения θ_K . Во всех случаях максимальное значение Nu_W имеет место при $(\bar{\alpha} + \theta_K) \approx 45^\circ$. Тепловой поток рассчитывается по формуле

$$q_W = \frac{Nu_W}{(Re_W)_H^{0,8}} \frac{(q_W)_H^{0,8} u_H^{0,8} \mu_W^{0,2}}{x^{0,2}} \frac{I_e - I_W}{Pr}, \quad (15.36)$$

где

$$I_e = \frac{I_0}{(1 + \omega_H)} (1 + r\omega_1); \quad r \approx Pr^{1/3};$$

ω_1 и ω_2 определяются по формулам (15.21); x — расстояние от вершины конуса.

Приведенные примеры относятся к отдельным важным случаям теплообмена при трехмерном обтекании.

Зависимости, полученные для острого конуса и цилиндра со скольжением, можно использовать и для расчета теплообмена на поверхности тел овальной формы, обтекаемых под некоторым углом атаки. При этом каждое сечение такого тела может рассматриваться как соответствующее сечение конуса или цилиндра с тем же суммарным местным углом атаки.

Другие примеры и более подробное их рассмотрение можно найти в работах [9, 10, 11, 96].

Следует указать, что пока расчеты теплообмена могут быть достаточно точными только в окрестности линий и точек растекания. При приближении же к линиям стекания обычно возникают отрывные области, существенным образом влияющие на внешнее течение. При расчете таких случаев приходится учитывать взаимодействие вязкого и невязкого потоков, завихренность внешнего потока и другие эффекты, строгие схемы учета которых в настоящее время разработаны недостаточно.

Рекомендуемая литература: [9, 10, 11, 13, 36, 96, 123, 140].

ГЛАВА XVI

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ И В ОТРЫВНЫХ ЗОНАХ

В данной главе рассматриваются особенности течения и теплообмена при шероховатой поверхности и в отрывных зонах для случая течения газа с дозвуковой скоростью.

16.1. ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

При конвективном теплообмене одним из факторов, влияющих на коэффициент теплоотдачи, а следовательно, определяющих интенсивность теплообмена, является состояние поверхности. В ряде практически интересных случаев поверхность, участвующая в конвективном теплообмене, не является абсолютно гладкой. К таким случаям относится, в частности, защита поверхности с помощью специальных покрытий. Указанный метод защиты применяется при больших тепловых потоках, возникающих, например, вследствие аэродинамического нагрева поверхности при перемещении летательного аппарата с большой скоростью в плотных слоях атмосферы. При этом в силу преобразования кинетической энергии потока в теплоту около покрытия образуется пограничный слой, температура газа в котором достигает нескольких тысяч градусов. Под воздействием высокотемпературного газового потока может произойти разрушение слоя покрытия, а из-за неоднородности материала поверхность его станет существенно шероховатой. Появление шероховатости на отдельных узлах конструкций может быть также следствием коррозии материала и отложения солей, содержащихся в термодинамическом рабочем теле. Во всех указанных выше случаях шероховатость появляется не в виде отдельных выступов, а равномерно распределена по поверхности. Именно такая форма шероховатости и влияние ее на теплообмен рассматривается в настоящей главе.

Имеющиеся опытные данные указывают на то, что шероховатость поверхности способствует переходу ламинарной формы течения в турбулентную. Рассмотрим это явление на примере ламинарного пограничного слоя, существующего в условиях турбу-

лентного внешнего потока. Турбулентность внешнего потока вызывает возмущения и в ламинарном пограничном слое. При небольшой величине возмущений ламинарная форма течения в пограничном слое сохраняется. Наличие шероховатости вызывает дополнительные возмущения, которые присоединяются к возмущениям внешнего потока, что способствует потере устойчивости ламинарной формы движения. Уровень возмущений, вызываемых шероховатостью, зависит от высоты выступов h , параметров потока и определяется величиной критерия Рейнольдса, в котором в качестве определяющего размера фигурирует высота h элементов шероховатости:

$$Re_h = \frac{uh}{\nu}$$

При малом значении Re_h возмущения, вызываемые шероховатостью, лежат ниже уровня возмущений, определяемых турбулентностью внешнего потока, и шероховатость не оказывает влияния на переход ламинарного движения в турбулентное. В этом случае переходное сечение определяется величиной $(Re_x)_{кр} = \frac{u x_{кр}}{\nu}$,

соответствующей гладкой поверхности. Влияние шероховатости начинается со значений $Re_h > 100$ и характеризуется заметным уменьшением величины $(Re_x)_{кр}$ (рис. 16.1) [140], что при прочих равных условиях существенно сокращает участок течения с ламинарным пограничным слоем. С точки зрения теплообмена указанное влияние шероховатости приводит к увеличению суммарного для всей поверхности теплового потока, так как больше участок с турбулентным пограничным слоем, в области которого процесс теплоотдачи протекает интенсивнее, чем при ламинарном течении.

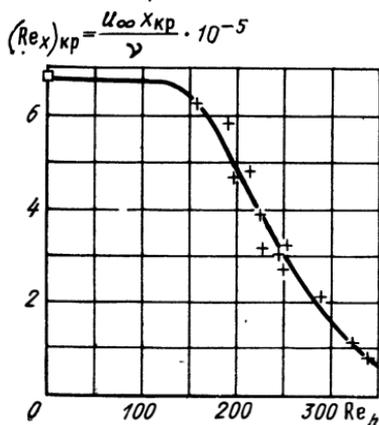


Рис. 16.1. Влияние шероховатости на значение критического числа Рейнольдса, определяющего переход ламинарного течения в турбулентное

Рассмотрим влияние шероховатости на передачу тепла при ламинарном и турбулентном пограничных слоях. При шероховатой поверхности интенсивность теплообмена существенно зависит от состояния газа, заключенного во впадинах, образованных элементами шероховатости. Из имеющихся экспериментальных данных следует, что характер движения газа во впадинах зависит от значений Re_h и относительного шага шероховатости s/h , где s — расстояние между сосед-

ними элементами шероховатости (выступами). Рассмотрим вначале влияние на теплообмен равномерно распределенной плотной шероховатости с величиной $1,5 \leq s/h \leq 2$. В этом случае состояние газа во впадине целиком определяется величиной Re_h , причем при вычислении Re_h в качестве определяющей температуры следует брать температуру газа во впадине $T_{вп}$, которая может быть определена из соотношения

$$\frac{T_{вп} - T_w}{T_1 - T_w} = 0,6.$$

При $Re_h < 100$ во впадинах образуются зоны со слабым движением газа, которые являются своего рода изоляцией, вызывающей уменьшение тепловых потоков.

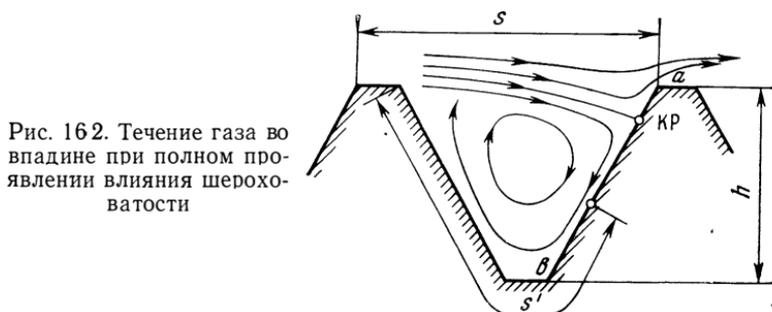


Рис. 162. Течение газа во впадине при полном проявлении влияния шероховатости

Результаты экспериментов с ламинарным пограничным слоем указывают на то, что тепловой поток при шероховатой поверхности в области значений $Re_h < 100$ на 10—15% меньше, чем при гладкой поверхности в тех же условиях [14]. С увеличением Re_h тепловые потоки возрастают, достигают при $Re_h = 100$ значений тепловых потоков, соответствующих гладкой поверхности, а затем превосходят их. При турбулентном пограничном слое диапазон значений Re_h от 100 до 530 характеризует переходный режим от режима, соответствующего гладкой поверхности, до режима полного проявления шероховатости [89]. В этом интервале значений критерия Рейнольдса происходит постепенное развитие движения газа во впадине. В настоящее время наиболее изученной является область полного проявления влияния шероховатости, с которой и целесообразно начать рассмотрение этого влияния на теплообмен в области турбулентного пограничного слоя.

Развитое течение с полным проявлением влияния шероховатости наступает при значении $Re_h > 530$. При этом в случае плотной шероховатости во впадине наблюдается одновихревое течение, при котором центр вихря примерно соответствует центру впадины (рис. 16.2). На наветренной грани ab элемента шероховатости образуется критическая линия, от которой происходит растекание потока в направлении вершины впадины и ее осно-

вания. Распределение статического давления $p_{ст}$ по поверхности впадины (рис. 16.3) указывает на сложный характер движения газа с давлением p_f , при котором имеют место как ускоренные, так и замедленные участки течения, что приводит к существенному различию условий теплообмена на разных участках поверхности. Максимальное значение коэффициента теплоотдачи, соответствующее окрестности критической точки примерно в че-

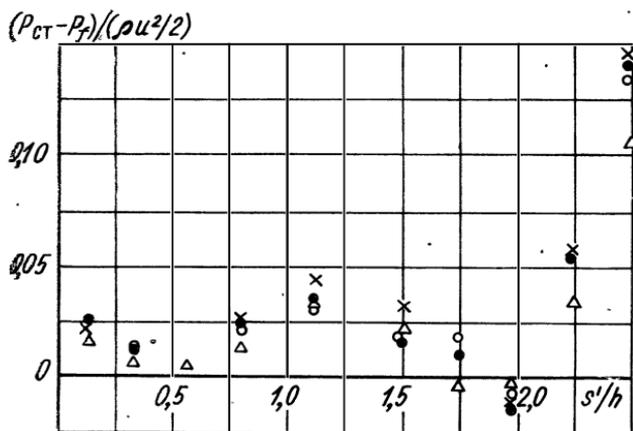


Рис. 16.3. Распределение давления по поверхности впадины при полном проявлении влияния шероховатости и различных значениях u_∞ , м/с:
○ — 26, ● — 52; × — 104; △ — 206

тыре раза выше минимального α в донной части впадины. При расчете теплообмена нас интересует среднее значение теплового потока в рассматриваемом сечении, для определения которого необходимо знать среднее значение коэффициента теплоотдачи на поверхности впадины.

Важным обстоятельством является тот факт, что при плотной шероховатости среднее значение коэффициента теплоотдачи $\alpha_{ср}$ для всей поверхности впадины совпадает с величиной $\alpha_{гп}$ для гладкой поверхности в том же сечении. На рис. 16.4 экспериментальные точки соответствуют значениям $\alpha_{ср}$ для шероховатой пластины, а сплошные линии — коэффициенту теплоотдачи на гладкой пластине, определенному из уравнения

$$Nu_W = 0,029 Re_W^{0,5} Pr_W^{0,4} \left(\frac{T_W}{T_e} \right)^{0,53}. \quad (16.1)$$

Показатель степени при температурном факторе T_W/T_e принят равным 0,53 согласно экспериментальным данным для малой скорости потока ($M < 1$).

Из равенства $\alpha_{ср}$ и $\alpha_{гп}$ следует, что тепловые потоки в области полного проявления шероховатости больше тепловых потоков при гладкой на величину отношения $F_{ш}/F_{гп}$, где $F_{ш}$ — поверхность шероховатой пластины, $F_{гп}$ — поверхность гладкой пластины.

Указанная особенность дает возможность использовать для расчета $\alpha_{\text{ср}}$ критериальные уравнения, полученные для гладкой поверхности. При этом расчет теплового потока сводится к определению $\alpha_{\text{ср}}$ из уравнения (16.1) и теплового потока из уравнения

$$Q = \alpha_{\text{ср}}(T_1 - T_W)F_{\text{ш}}. \quad (16.2)$$

В настоящее время экспериментально доказана возможность использования для определения $\alpha_{\text{ср}}$ уравнения (16.1) в широком диапазоне значений h [89].



На рис. 16.5 приведено сравнение теплообмена на пластинах с различной шероховатостью: $h=0$; $h=0,2$; $h=2$ и $h=10$ мм, из которого следует, что при введении в критерий Нуссельта среднего коэффициента теплоотдачи,

$$Nu_{\text{ср}} = \frac{\alpha_{\text{ср}} \cdot x}{\lambda},$$

получается одна расчетная зависимость для пластин с $h=0 \div 10$ мм. Уравнение (16.1) справедливо для различных форм плогной шероховатости.

С увеличением относительного шага s/h одновихревая схема течения с центральным расположением вихря при плотной шероховатости постепенно деформируется и при больших значениях s/h превращается в двухвихревую. Вихревое движение занимает в этом случае только часть впадины — участки, расположенные у граней, — а между ними находится область турбулизированного течения. При этом среднее значение коэффициента теплоотдачи для шероховатой поверхности увеличивается, стремясь к некоторому максимальному значению при $s/h=12$ (рис. 16.6). Увеличение $\alpha_{\text{ср}}$ объясняется интенсификацией теплообмена в донной части впадины, где при плотной шероховатости условия теплообмена хуже, чем при гладкой поверхности.

Однако анализируя влияние шероховатости на тепловой поток, следует иметь в виду, что при возрастании s/h одновременно с увеличением $\alpha_{\text{ср}}$ уменьшается отношение $F_{\text{ш}}/F_{\text{гл}}$, так как в

этом случае поверхность шероховатой пластины постепенно приближается к значению $F_{г.л.}$.

Расчетная зависимость для определения среднего коэффициента теплоотдачи при переменном s/h имеет вид

$$Nu_{ср} = A Nu_{г.л.},$$

где значения $A = \alpha_{ср}/\alpha_{г.л.}$ берутся из графика рис. 16.6, а критерий Нуссельта для гладкой поверхности $Nu_{г.л.}$ определяется из уравнений (16.1).

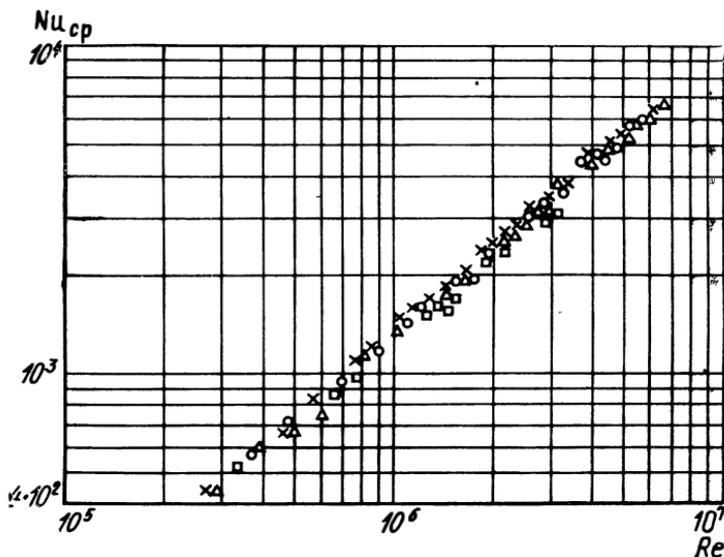


Рис. 16.5 Зависимость $Nu_{ср}$ от критерия Рейнольдса различной высоте выступов шероховатости h мм:

○—0; ×—0,2; △—2; □—10

Поскольку в ряде конкретных случаев затруднительно определение площади шероховатой пластины, то удобно расчетную зависимость для определения теплового потока представить без множителя $F_{ш.}$ Приблизительно это можно сделать, используя частные данные, полученные для шероховатости, выполненной в виде трапецевидных выступов. Для получения указанной зависимости перепишем уравнение (16.2) в виде

$$Q = \alpha_{ср} \frac{F_{ш.}}{F_{г.л.}} (T_1 - T_w) F_{г.л.}$$

Учитывая связь $\alpha_{ср}$ и $\alpha_{г.л.}$, которая при переменном s/h определяется соотношением

$$\alpha_{ср} = A \alpha_{г.л.}, \quad (16.3)$$

будем иметь

$$Q = A \frac{F_{ш.}}{F_{г.л.}} \alpha_{г.л.} (T_1 - T_w) F_{г.л.}$$

или, записывая произведение $A(F_{ш}/F_{гл})$ в виде множителя B , получим окончательную зависимость для приближенного определения теплового потока:

$$Q = B\alpha_{гл}(T_1 - T_w)F_{гл} \quad (16.4)$$

В уравнении (16.4) множитель B одновременно учитывает как увеличение $\alpha_{ср}$, так и уменьшение поверхности при изменении параметра s/h .

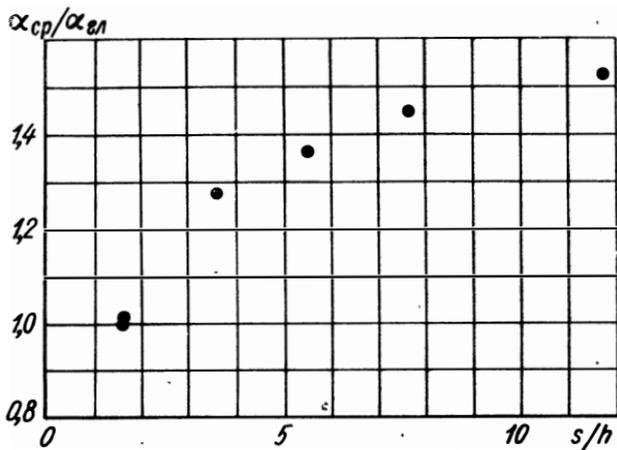


Рис. 16.6 Зависимость среднего по поверхности впадины значения коэффициента теплоотдачи от параметра s/h

Из данных рис. 16.7, на котором приведены значения коэффициента B , следует, что с ростом s/h возрастание $\alpha_{ср}$ почти компенсируется уменьшением отношения $F_{ш}/F_{гл}$, что приводит практически к постоянству коэффициента B и в конечном счете указывает на слабую зависимость теплового потока от параметра s/h . Естественно, последнее замечание относится к значениям

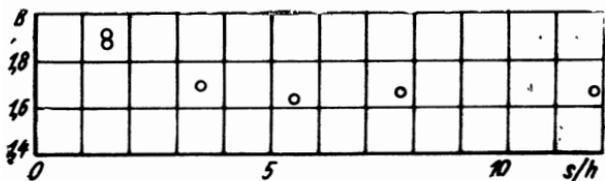


Рис. 16.7. Зависимость коэффициента $B = A(F_{ш}/F_{гл})$ от параметра s/h

$s/h < 12$. Из характера зависимости $\alpha_{ср}/\alpha_{гл} = f(s/h)$ (см. рис. 16.6) и из физических соображений о влиянии шероховатости на теплообмен следует ожидать, что при $s/h > 12$ отношение $\alpha_{ср}/\alpha_{гл}$

будет уменьшаться, стремясь в пределе к единице. Поскольку отношение $F_{\text{ш}}/F_{\text{гл}}$ также уменьшается, асимптотически приближаясь к единице, то не трудно сделать вывод об уменьшении в этой области s/h коэффициента B и постепенном приближении тепловых потоков при шероховатой поверхности к значениям их при гладкой пластине. Используя зависимость (16.4), следует иметь в виду, что могут быть формы шероховатости с отношением $F_{\text{ш}}/F_{\text{гл}}$, отличным от величины $F_{\text{ш}}/F_{\text{гл}}$, которой соответствуют значения коэффициента B , приведенные на рис. 16.7. Поскольку средний коэффициент теплоотдачи практически не зависит от формы впадины, а коэффициент $B = \alpha_{\text{ср}}(F_{\text{ш}}/F_{\text{гл}})$, то для шероховатости с другим отношением $F_{\text{ш}}/F_{\text{гл}}$ коэффициент может иметь иные значения. Расчеты, в частности, показывают, что при прямоугольной форме впадины значение $F_{\text{ш}}/F_{\text{гл}}$, а следовательно, и B для $s/h=1,6$ на 30% выше, приведенных на рис. 16.7. С увеличением s/h разница в значениях B убывает: при $s/h=3,6$ отличие составляет 18%, а при $s/h=12$ только 6%.

Рассмотрим теплообмен на шероховатой поверхности в области переходного режима. Ранее отмечалось, что переходный режим течения находится в диапазоне значений Re_h от 100 до 530.

При возрастании числа Рейнольдса постепенно увеличивается влияние шероховатости на сопротивление и теплообмен. При этом профили скорости в пограничном слое деформируются, становясь более урезанными по сравнению с профилем скорости в турбулентном пограничном слое при обтекании гладкой поверхности (рис. 16.8).

Для фиксированного значения Re_h профиль скорости одинаков при различных значениях x , а при достижении режима полного проявления влияния шероховатости профиль скорости в пограничном слое над шероховатой пластиной одинаков для разных h (рис. 16.9).

Аналогичная картина наблюдается и при исследовании теплообмена (рис. 16.10).

С увеличением Re_h теплообмен интенсифицируется, при этом среднее значение коэффициента теплоотдачи возрастает.

Критериальное уравнение для определения $\alpha_{\text{ср}}$ в области переходного режима имеет вид

$$Nu_{\text{ср}} = A_{\text{пер}} Nu_{\text{гл}},$$

где $A_{\text{пер}} = \alpha_{\text{ср}}/\alpha_{\text{гл}}$ характеризует развитие вихревого движения во впадине, и следовательно, уровень интенсификации теплообмена. Экспериментальные значения $A_{\text{пер}}$ приведены на рис. 16.11. При достижении Re_h значения 530 развитие течения во впадине заканчивается, $A_{\text{пер}}$ становится равным единице, а $\alpha_{\text{ср}} = \alpha_{\text{гл}}$. Следует заметить, что степень влияния шероховатости на теплообмен определяется величиной Re_h и на участке стабилизации не зависит от x .

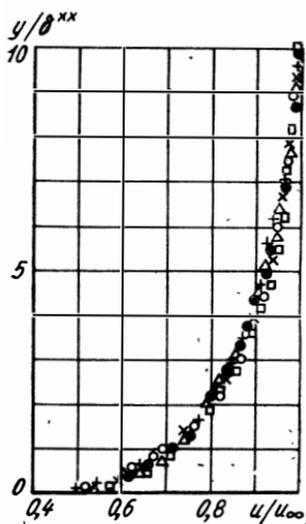


Рис. 16.8. Изменение скорости в пограничном слое на различном расстоянии от начала пластины x , мм:

○—13; ×—113; ●—288; +—438;
△—638; □—888

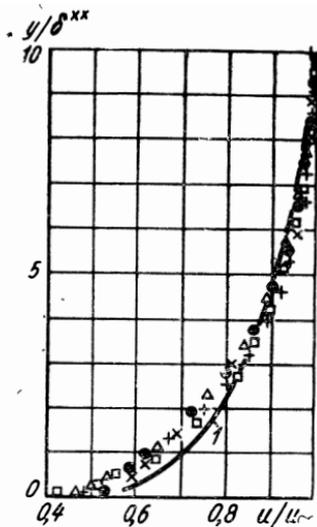


Рис. 16.9 Изменение скорости в пограничном слое шероховатой пластины при полном проявлении влияния шероховатости на различном расстоянии от начала пластины x , мм:

×—112; ●—248; +—402; △—602;
□—802

Кривая 1 соответствует турбулентному пограничному слою на гладкой поверхности

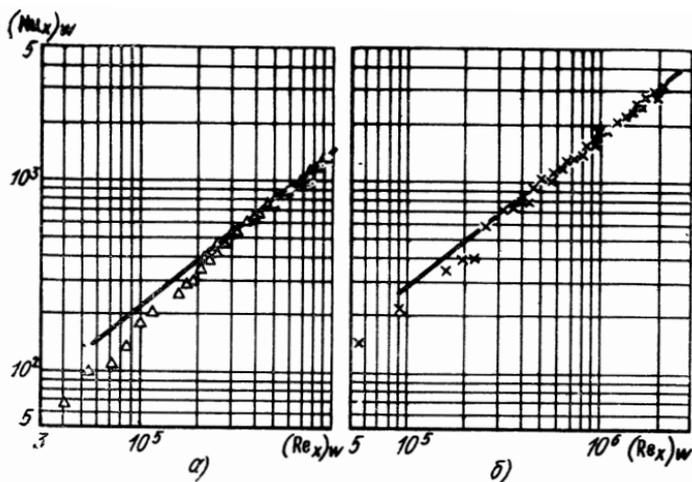


Рис. 16.10. Промежуточная стабилизация теплообмена в области переходного режима:
а—для $Re_{\delta}=110$; б—для $Re_{\delta}=170$

На рис. 16.10 в качестве примера приведены критериальные зависимости для двух режимов промежуточной стабилизации, соответствующих $Re_h=110$ и $Re_h=170$. В обоих случаях средний коэффициент теплоотдачи определяется из уравнения

$$Nu_{cp} = A_{пер} \cdot 0,029 Re_w^{0,8} Pr_w^{0,4} \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{0,53}, \quad (16.5)$$

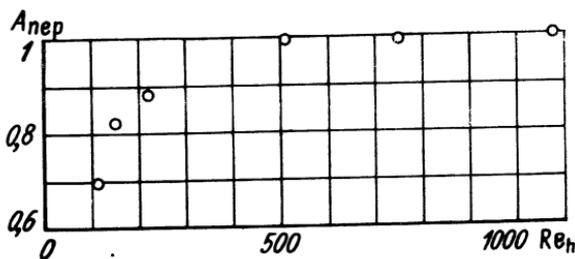


Рис. 16.11. К расчету теплообмена в области переходного режима

в котором для $Re_h=110$ $A_{пер}=0,69$, а для $Re_h=170$ $A_{пер}=0,82$.

Следует заметить, что данные рис. 16.11 соответствуют плогной шероховатости, выполненной в виде сплошных трапециевидных выступов, расположенных перпендикулярно к направлению потока.

Использование этих данных для других форм шероховатости, в том числе и плотной, может дать лишь приближенное значение α_{cp} . Так, например, расчет теплообмена при шероховатости, выполненной в виде отдельных плотно расположенных четырехгранных усеченных пирамидок, с использованием данных рис. 16.11 приведет к завышению теплового потока в среднем для всей области перехода примерно на 15%.

16.2. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СОПРОТИВЛЕНИЕМ И ТЕПЛООБМЕНОМ ПРИ ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В разд. 11.9 при рассмотрении течения газа у гладкой пластины была установлена аналогия между явлениями трения и теплообмена, в результате которой получена связь (11.84) между безразмерным коэффициентом теплообмена и коэффициентом трения

$$St = \frac{1}{2} C_f Pr^{-2/3}. \quad (16.6)$$

В отдельных случаях делаются попытки использования указанной зависимости для расчета теплообмена при шероховатой поверхности. Но при течении газа у шероховатой поверхности основную роль играет сопротивление формы, а не сопротивление трения. Последнее наглядно видно из рис. 16.12, где приведены экспериментальные значения коэффициента сопротивления C_f' и коэффициента формы C_ϕ для шероховатой пластины.

Коэффициент сопротивления определялся из зависимости

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{d\delta^{**}}{dx}$$

Толщина потери импульса δ^{**} вычислялась по измеренным в ряде сечений пластины значениям температуры и скорости. Коэффициент формы C_ϕ определялся путем интегрирования замеренного распределения статического давления во впадине.

Число Стантона (St), вычисленное по зависимости (11.84) для гладкой пластины, существенно отличается от St , подсчитанного по измеренной величине коэффициента теплоотдачи для

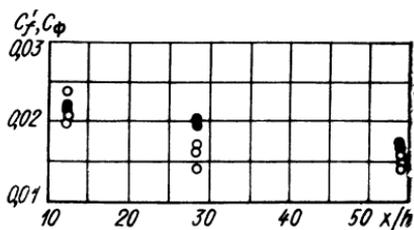


Рис. 16.12. К связи теплообмена и трения при шероховатой поверхности:

○ — C_ϕ ; ● — C_f

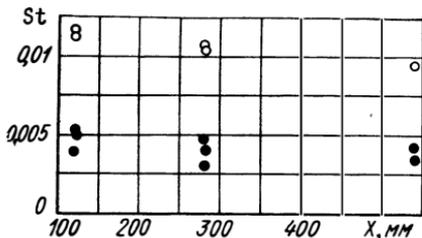


Рис. 16.13. К связи теплообмена и трения при шероховатой поверхности:

○ — числа Стантона по уравнению (16.6); ● — действительные значения числа Стантона (экспериментальные) при шероховатой поверхности

шероховатой поверхности (рис. 16.13). Таким образом, при шероховатой пластине нельзя использовать связь между сопротивлением и теплообменом в виде зависимости (16.6), справедливой для гладкой поверхности.

При расчете теплообмена под допустимой высотой шероховатости $h_{кр}$ понимается та предельная высота выступов, при которой наблюдается увеличение теплового потока по сравнению с тепловым потоком на гладкой пластине. Указанная критическая величина $h_{кр}$ может быть определена из соотношения

$$Re_{кр1} = \frac{u_1 h_{кр}}{\nu_{вп}} = 100,$$

где $\nu_{вп}$ определяется по температуре газа во впадине.

Предельная величина выступов для отдельных конкретных случаев имеет следующие значения.

1. При полете самолета со сверхзвуковой скоростью ($1 < M < 2$) на небольшой высоте ($p = 0,1$ МПа) допустимая высота шероховатости обшивки $h_{кр} = 0,005$ мм.

2. Для лопаток турбины воздушно-реактивного двигателя при температуре газа 1075 К и давлении $p=1,0$ МПа— $h_{кр}=0,004$ мм.

3. Для поверхности сопла ВРД при температуре газа 775 К и давлении $p=0,2$ МПа — $h_{кр}=0,01$ мм.

4. В критическом сечении сопла жидкостно-ракетного двигателя при температуре газа 3275 К и давлении $p=4,0$ МПа допустимое значение $h_{кр}=0,001$ мм.

Понятие допустимой высоты h важно с практической точки зрения, так как оно указывает, к какой чистоте поверхности следует стремиться при обработке с целью уменьшения сопротивления и теплообмена. Кроме того, ранее указывалось, что в ряде случаев первоначально гладкая поверхность может стать шероховатой в процессе эксплуатации, что необходимо учитывать при расчете тепловых потоков.

16.3. ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН В ОТРЫВНЫХ ЗОНАХ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПЕРЕД ПРЕПЯТСТВИЯМИ

Свойства отрывных течений вызывать существенное изменение давления на поверхности используются в авиационно-космической технике для управления летательными аппаратами путем изменения их аэродинамического качества. Отрывные зоны образуются также перед различными выступами на поверхности летательного аппарата в виде антенн, различных обтекателей, сопел управляющих двигателей, рулей, люков и т. д.

В этом случае весьма актуальной становится тепловая защита поверхности летательного аппарата, так как тепловые потоки в зонах отрыва могут в несколько раз превышать тепловые потоки, наблюдающиеся при безотрывном обтекании.

16.3.1. Двухмерные отрывные зоны

Торможение потока перед препятствием вызывает повышение давления, которое при дозвуковом течении распространяется вверх по потоку. Распределение давления перед плоским уступом OS_1R показано кривыми 1 и 2 на рис. 16.14.

Пограничный слой перед препятствием (до точки S) развивается в условиях положительного градиента давления. Наличие трения в пограничном слое приводит к уменьшению полного давления струек газа. Оставшейся кинетической энергии частиц газа, движущихся вблизи стенки, недостаточно для преодоления всей области повышенного давления.

На некотором расстоянии от препятствия частицы газа, израсходовав весь запас кинетической энергии, останавливаются и пограничный слой отрывается от поверхности. Деформация профилей скорости, наблюдающаяся в области течения с положительным градиентом давления, приведена на рис. 16.14.

Характерным для отрывного сечения является равенство нулю градиента скорости у стенки $du/dy=0$. Оторвавшийся в сечении S пограничный слой присоединяется к поверхности ус-

тупа на некотором расстоянии от его вершины — в точке R . В общем случае в эту точку приходит некоторая струйка газа пограничного слоя с давлением p_R . Струйки газа, расположенные ниже этой линии тока, обладают меньшим полным давлением, не могут преодолеть давления, устанавливающегося в точке R , и начинают двигаться к основанию уступа, образуя область

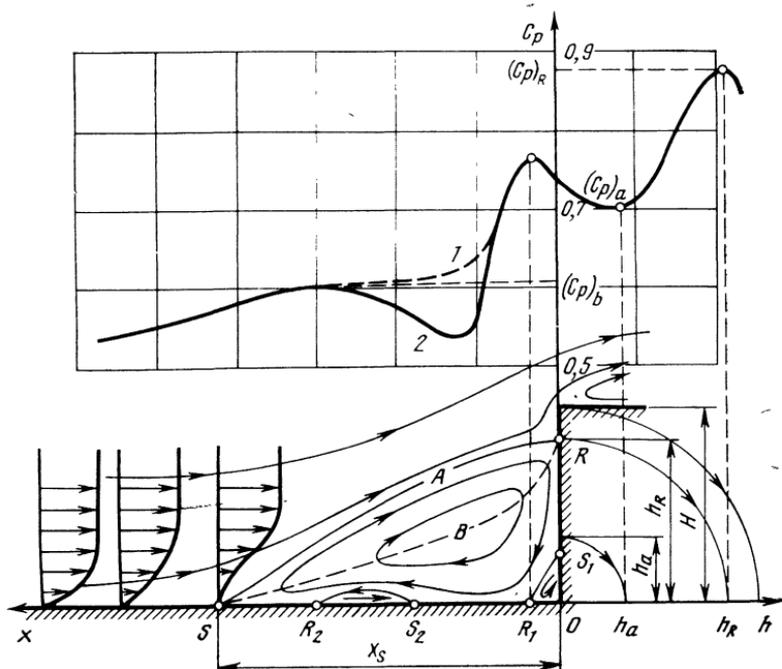


Рис. 16.14. Схема течения газа перед плоским уступом

циркуляционного течения. Линия SAR отделяет газ, движущийся в циркуляционной зоне, от внешнего течения, причем часть потока движется к уступу а часть потока — в направлении, обратном основному течению. Эти потоки разделяются линией SBR .

Между газом, движущимся в циркуляционной зоне, и внешним потоком осуществляется интенсивный турбулентный обмен на линии раздела SAR . Интенсивный турбулентный обмен существует также между частицами газа, движущимися внутри циркуляционной зоны, где согласно экспериментальным данным значение интенсивности турбулентности достигает $40 \div 60\%$.

Течение внутри циркуляционной зоны может осуществляться по разным схемам. Характер течения определяется распределением статического давления на участке от точки отрыва S до точки R_1 . Характер изменения давления определяется отношением толщины вытеснения в точке отрыва δ_s^* к высоте уступа H и

значением критериев Рейнольдса $\frac{u_\infty H}{\nu_f}$ и Эйлера $\frac{p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2}$. При малых значениях критерия Рейнольдса и δ_S^*/H статическое давление плавно изменяется от максимального значения вблизи основания уступа (точка R_1) до величины давления в точке отрыва (кривая 1).

При увеличении числа Re и δ_S^*/H характер распределения давления существенно изменяется (кривая 2). Появляется ярко выраженный минимум статического давления, расположенный в сечении, проходящем через центр вихревого движения. В этом случае движение газа от точки R_1 к точке отрыва S осуществляется вначале в области отрицательного и затем — положительного градиента давления.

При распределении статического давления, соответственно кривой 1, течение внутри циркуляционной зоны осуществляется с одной дополнительной отрывной зоной S_1OR_1 . Газ от точки R движется к основанию уступа (к пластине) вначале с отрицательным градиентом давления до точки $(C_p)_a$ на кривой рис. 16.14, а затем на некотором расстоянии от пластины h_a начинается торможение потока, сопровождающееся ростом давления. Наличие положительного градиента давления вызывает отрыв потока в точке S_1 и прилипание его на пластине в точке R_1 . При этом у основания уступа образуется дополнительная отрывная зона S_1OR_1 . В точке присоединения потока R_1 , которая является критической, давление на стенке имеет максимальное значение. При движении от точки R_1 к точке S газ разгоняется и давление падает.

В случае наличия минимума давления (кривая 2) поток у пластины, двигаясь от точки R_1 , вначале разгоняется, а затем, в области положительного градиента давления, затормаживается. При определенном соотношении параметров потока (δ_S^*/H и Re) положительный градиент давления становится настолько значительным, что вызывает отрыв потока от пластины в точке S_2 с последующим прилипанием его в точке R_2 . При этом в циркуляционной зоне образуется вторая дополнительная отрывная зона S_2-R_2 .

Для расчета теплообмена внутри циркуляционной зоны существенное значение имеет давление в точке присоединения потока на уступе p_R и характерное давление в зоне p_b . Из имеющихся экспериментальных данных следует, что коэффициенты давления $(C_p)_R = \frac{p_R - p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2 / 2}$ и $(C_p)_b = \frac{p_a - p_\infty}{\rho_\infty^3 u_\infty^2 / 2}$ определяются величиной δ_S/H и не зависят от Re.

Значения $(C_p)_R$ и $(C_p)_b$ могут быть определены из следующих соотношений:

$$(C_p)_R = 0,43 (H/\delta_S^*)^{0,25} \text{ и } (C_p)_b = 0,37 (H/\delta_S^*)^{0,25}.$$

Геометрические характеристики циркуляционных зон

Геометрическими характеристиками циркуляционных зон являются длина зоны X_S и расстояние от точки присоединения потока до основания уступа h_R . В случае двухмерного течения дли-

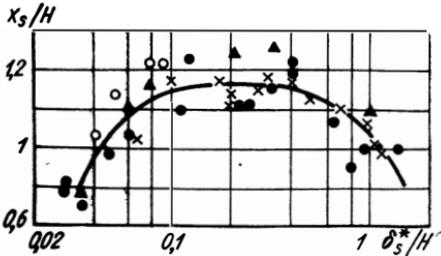


Рис. 16.15. Зависимость длины отрывной зоны от параметра δ_s^*/H при $(Re_\infty) \cdot 10^{-5}$:

× -0,2; ● -1; ▲ -2; ○ -2,8

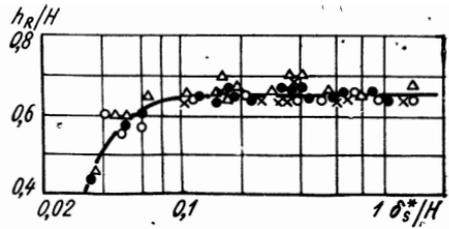


Рис. 16.16. Зависимость координаты присоединения потока h_R от параметра δ_s^*/H при различных скоростях u_∞ м/с:

× -30; ○ -50; ● -120; △ -270

на отрывной зоне является функцией отношения δ_s^*/H и не зависит от критерия Рейнольдса и других параметров. Зависимость $x_S/H = f(\delta_s^*/H)$ приведена на рис. 16.15.

Для определения значения h_R могут быть использованы экспериментальные данные, приведенные на рис. 16.16.

16.3.2. Тепловые потоки внутри циркуляционной зоны

В настоящее время отсутствуют критериальные уравнения для вычисления местного значения коэффициента теплоотдачи в области отрывного течения. На рис. 16.17, а приведены экспериментальные значения α для участка OS , где α_m — его максимальное значение. Для определения α на вертикальной поверхности уступа могут быть использованы экспериментальные данные, приведенные на рис. 16.17, б. Характер качественного изменения α на участке от точки R до основания уступа имеет разный вид для разных значений параметров внешнего потока [98, 99].

Кривая 1 соответствует случаю, когда от точки R до основания уступа течение в пограничном слое ламинарное. При этом максимальное значение коэффициента теплоотдачи на участке отрывной зоны имеет место в точке присоединения потока R (см. рис. 16.14).

При увеличении Re_∞ (кривые 2—4 рис. 16.17, б) интенсивность движения газа в циркуляционной зоне возрастает, и на некотором расстоянии от точки R происходит переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный, что вызывает заметное увеличение коэффициента теплоотдачи. В этом случае на участке

турбулентного пограничного слоя значение коэффициента теплоотдачи может заметно превосходить значение α в точке присоединения потока. Наличие максимума на участке турбулентного пограничного слоя и некоторое уменьшение α при приближении к основанию уступа объясняется ростом толщины ставшего уже турбулентным пограничного слоя, особенно, если иметь в виду

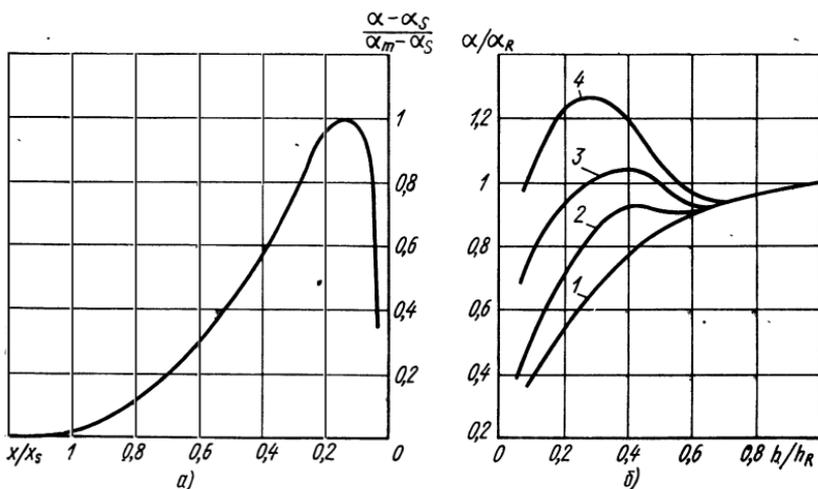


Рис. 16.17. Распределение коэффициента теплоотдачи по вертикальной поверхности уступа для различных значений Re_∞ и $(c_p)_R = 0,35 \div 0,85$:

1— $Re_W < 10^4$; 2— $Re_W = 1,5 \cdot 10^4$; 3— $Re_W = 4,5 \cdot 10^4$; 4— $Re_W = 1,5 \cdot 10^5$

участок течения с положительным градиентом давления. Коэффициент теплоотдачи на линии растекания R определяется с использованием критериального уравнения

$$Nu_W = A Re_W^{0,5} Pr^{1/3} \left(\frac{\rho_\infty \mu_\infty}{\rho_W \mu_W} \right)^{0,4} \quad (16.7)$$

Ранее указывалось, что линия растекания является критической — по ней происходит разделение потока. Часть газа втекает в циркуляционную зону, а основная масса обтекает верхнюю кромку уступа. На линии растекания скорость потока равна нулю. Как известно, теплообмен в такого рода критических линиях или точках зависит от градиента скорости. В рассматриваемом случае

$$Nu_W = \frac{\alpha_R h_R}{\lambda_W}; \quad Re_W = \frac{\rho_W u_{\max} h_R}{\mu_W},$$

где u_{\max} — максимальная скорость, определяемая наибольшим перепадом давлений на вертикальной поверхности уступа.

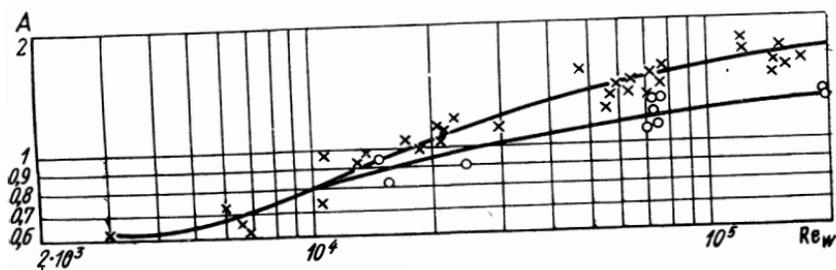


Рис. 16.18. К расчету теплообмена по линии растекания на вертикальной поверхности уступа при различных значениях $(c_p)_R$:
 \times —0,4÷0,7; \circ —0,85

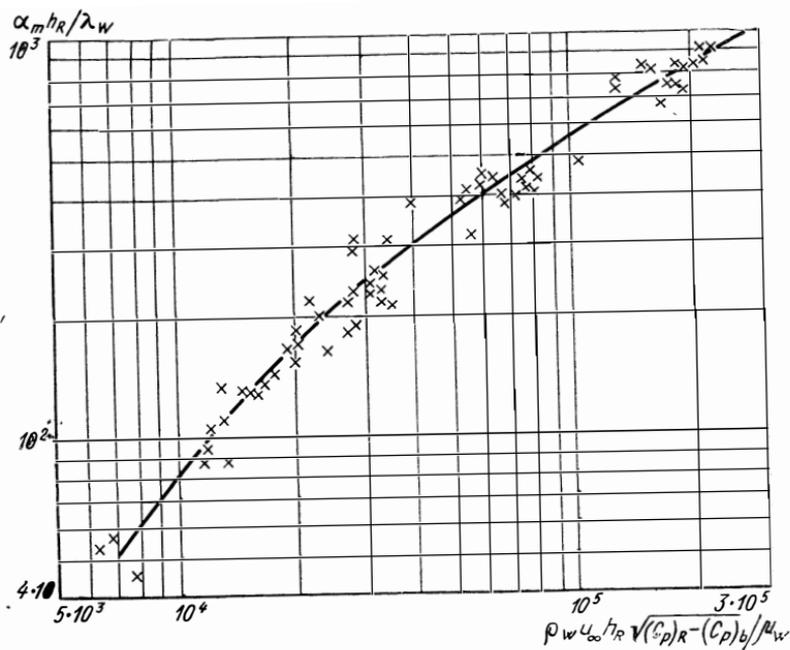


Рис. 16.19. К расчету максимального значения коэффициента теплоотдачи на горизонтальной поверхности уступа

Полагая $u_{\max} \sim u_{\infty} \sqrt{(C_p)_R - (C_p)_a}$, где $(C_p)_a$ (см. рис. 16.14) соответствует минимальному давлению на уступе, получим для критерия Рейнольдса выражение в виде

$$Re_W = \frac{\rho_W u_{\infty} h_R}{\mu_W} \sqrt{(C_p)_R - (C_p)_a}.$$

Результаты экспериментальных исследований указывают на зависимость коэффициента пропорциональности A от величины Re_W и δ_s^*/H . Влияние δ_s^*/H удовлетворительно учитывается значением $(C_p)_R$. Зависимость A от указанных параметров приведена на рис. 16.18. Значение максимального коэффициента теплоотдачи на пластине может быть найдено с помощью данных, приведенных на рис. 16.19, где в качестве определяющего размера принята величина h_R .

16.3.3. Трехмерные зоны

При обтекании уступов с относительно небольшим значением D/H или B/H , где D — диаметр цилиндрического, а B — ширина плоского уступа, возникает новое явление в виде вытекания

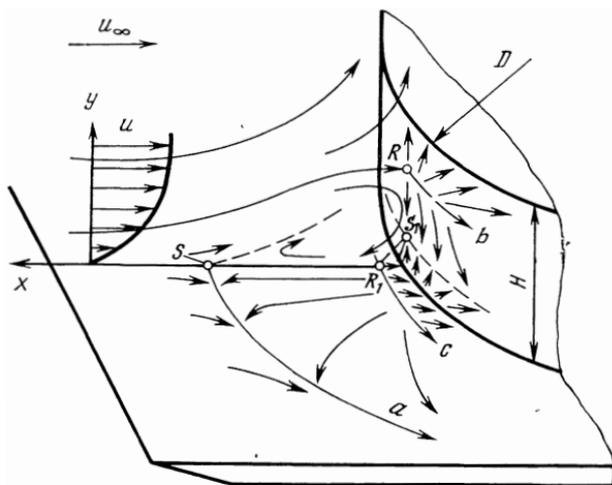


Рис. 16.20. Схема течения газа перед уступом при относительно небольшом значении D/H

части газа из циркуляционной зоны в боковых направлениях [15, 100]. Одна из возможных схем течения с боковым вытеканием приведена на рис. 16.20.

Пограничный слой, развивающийся в условиях положительного градиента давления перед уступом, отрывается от поверхности по линии отрыва S_a и присоединяется на лобовой поверхности уступа в точке R или линии растекания Rb . Часть газа из

области повышенного давления в окрестности линии Rb или точки растекания R поступает в циркуляционную зону перед уступом, откуда частично эжектируется внешним потоком, а частично вытекает в боковом направлении.

На лобовой поверхности уступа схема присоединения потока может быть различной, что в основном определяется геометрической характеристикой уступа (D/H или B/H) и параметрами потока.

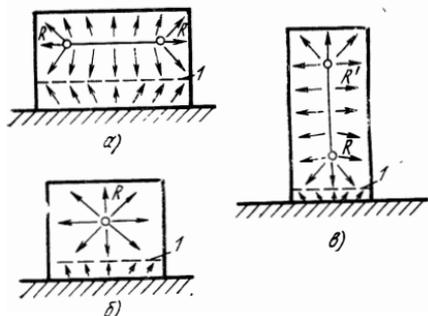


Рис. 16.21. Схемы течения газа у вертикальной поверхности уступа

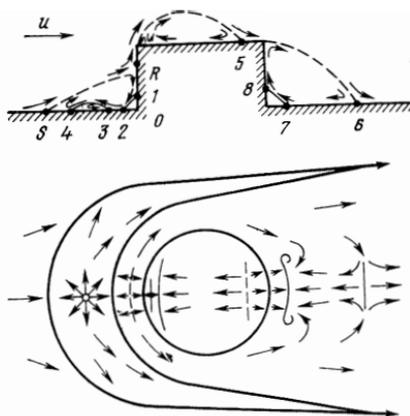


Рис. 16.22. Схема обтекания газом цилиндрического уступа

При $D/H \gg 4$ и $B/H > 2$ поток присоединится с образованием линии растекания $R-R$ (рис. 16.21, а). Характер течения на уступе вблизи плоскости симметрии напоминает течение в случае двумерной отрывной зоны. Уменьшение D/H до 2 или B/H до 1 приводит к перестройке схемы присоединения и образованию точки растекания R (рис. 16.21, б).

При $D/H < 1$ и $B/H < 0,5$ в плоскости симметрии появляется линия растекания RK' , заканчивающаяся точками растекания R и R' (рис. 16.21, в). На рис. 16.21 линиями 1 у основания уступа показано положение образующей дополнительной отрывной зоны.

В отрывной зоне на пластине осуществляются те же схемы течения, которые наблюдались в случае двумерного уступа (см. рис. 16.14) с образованием одной (S_1-R_1) или двух (S_1-R_1 и S_2-R_2) дополнительных отрывных зон.

Общая картина обтекания уступа приведена на рис. 16.22, где точки $1, 2, 3, 4$ соответствуют точкам S_1, R_1, S_2, R_2 (рис. 16.14).

Поток, оторвавшийся от верхней кромки лобовой поверхности уступа, присоединяется на верхней поверхности 5 с образованием циркуляционной зоны сложной формы. За уступом поток присоединяется на линии 6 и часть его, двигаясь по направле-

нию к уступу, вызывает образование дополнительной отрывной зоны 7—8.

Схема течения на верхней поверхности и за уступом зависит от формы уступа.

16.3.4. Геометрические размеры отрывных зон

Размеры трехмерных отрывных зон зависят от формы и размеров препятствия, а также от относительной толщины пограничного слоя перед отрывом.

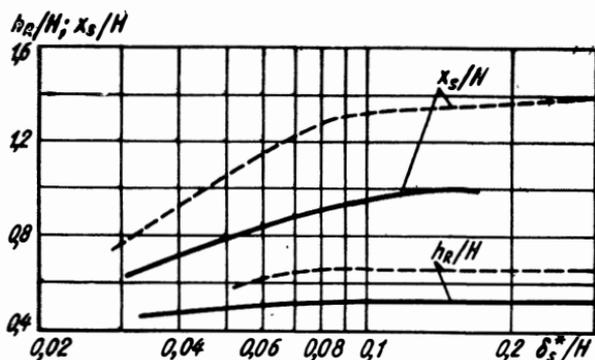


Рис 16.23. К определению геометрических размеров отрывной зоны перед цилиндрическим уступом с $D/H=2$

Для цилиндрического уступа с $D/H=2$ зависимость h_R/H и x_S/H от δ_s^*/H приведена на рис. 16.23. Там же для сравнения пунктиром нанесены размеры двумерной отрывной зоны. Из-за бокового вытекания части газа значения h_R и x_S для трехмерной зоны меньше чем для двумерной.

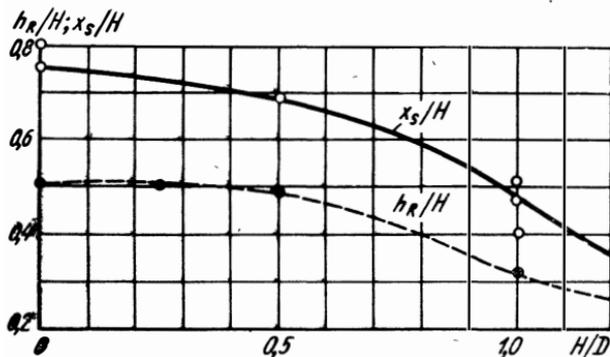


Рис. 16.24. Зависимость геометрических размеров отрывной зоны перед цилиндрическим уступом от параметров H/D

Зависимость x_s/H и h_R/H от H/D для $\delta_s^*/H=0,03$ приведена на рис. 16.24. Увеличение H/D , соответствующее увеличению трехмерности и эффекта бокового вытекания газа, приводит, естественно, к уменьшению размеров отрывной зоны.

Изменение локальных коэффициентов теплоотдачи в плоскости симметрии перед уступом при $D/H=2$ и $\delta_s^*/H=0,1$ приведен на рис. 16.25. Как и в двухмерном случае, распределение α

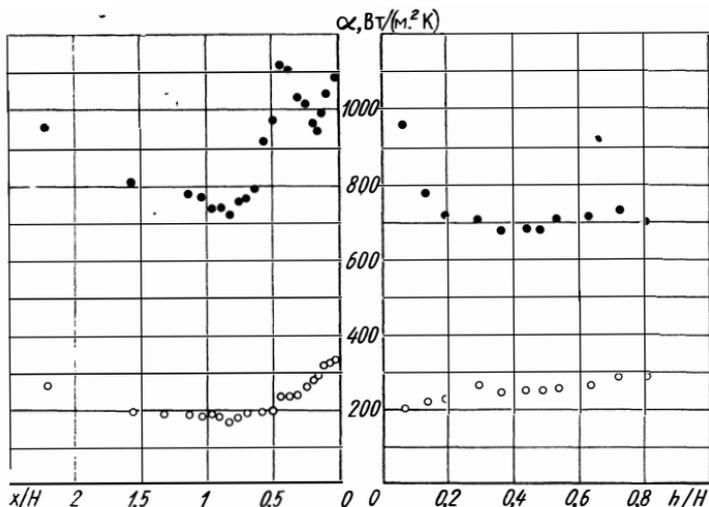


Рис 16.25. Распределение коэффициента теплоотдачи в плоскости симметрии перед цилиндрическим уступом при скорости обтекания u_∞ , м/с:

○ — 71; ● — 341

зависит от Re . При малом значении Re максимальный коэффициент теплоотдачи на уступе наблюдается в точке присоединения потока R , а на пластине — в точке присоединения R_1 . Увеличение скорости внешнего течения приводит к перераспределению тепловых потоков, и коэффициент теплоотдачи вблизи основания уступа становится больше, чем в точке присоединения R . Последнее объясняется теми же причинами, что и при двухмерном уступе, а именно: переходом ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

В отрывной зоне на пластине увеличение Re приводит к существенному возрастанию α на ускоренном участке течения (от точки R_1 к точке S), появлению в конце ускоренного участка второго максимума, положение которого приблизительно совпадает с положением минимального значения статического давления (см. рис. 16.14).

Следует иметь в виду, что величина коэффициента теплоотдачи и характер его изменения в отрывной зоне зависят от трех-

мерности течения, которая в свою очередь определяется формой и размерами уступа, а также параметрами потока. Определить коэффициент теплоотдачи в характерных точках отрывной зоны возможно по приводящимся ниже зависимостям.

Для расчета α на линии растекания RR (см. рис. 16.21, а) используется критериальное уравнение (16.7), в котором коэффи-

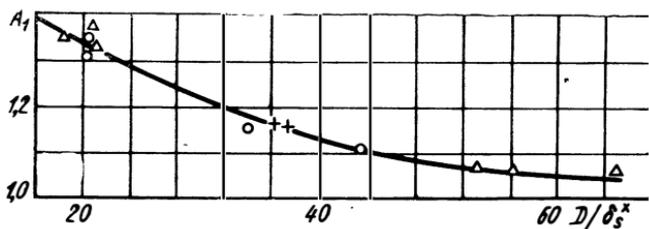


Рис. 16.26. К расчету коэффициента теплоотдачи в точке растекания потока на вертикальной поверхности цилиндрического уступа при $D/H=2$ и различных значениях $Re \cdot 10^5$:

+—0,8; ○—2,4; ▲—4,0

циент A может быть определен из рис. 16.18. При большей трехмерности течения, когда на лобовой поверхности уступа осуществляется схема течения с линией растекания RR' (см. рис. 16.21, в), в качестве определяющего необходимо брать поперечный размер уступа. В этом случае критериальное уравнение имеет вид

$$Nu_W = A_1 Re_W^{0.5} Pr_W^{1/3} \left(\frac{q_{\infty} \mu_{\infty}}{q_W \mu_W} \right)^{0.4},$$

где для цилиндрического уступа с диаметром D

$$Nu_W = \frac{\alpha D}{\lambda_W} \quad \text{и} \quad Re_W = \frac{q_W \mu_{\infty} D}{\mu_W}.$$

Значение коэффициента A_1 на линии RR' равно коэффициенту пропорциональности при обтекании бесконечного цилиндра ($A_1=0,57$). При малом значении δ_s^*/D ($\delta_s^*/D < 0,1$) примерно такое же значение A_1 наблюдается и для точки растекания R (см. рис. 16.21, б).

В случае толстого пограничного слоя для схемы течения с точкой растекания величина A_1 зависит от параметра δ_s^*/D . Указанная зависимость для цилиндра с $D/H=2$ приведена на рис. 16.26.

Коэффициент теплоотдачи в точке растекания R_1 на пластине может быть рассчитан по экспериментальным данным, приведенным на рис. 16.27, удовлетворительно характеризующим условия теплообмена для уступов разной формы при различных

значениях δ_S^*/H . Влияние формы уступа и толщины пограничного слоя учитывается в данном случае через зависимость h_R от указанных факторов.

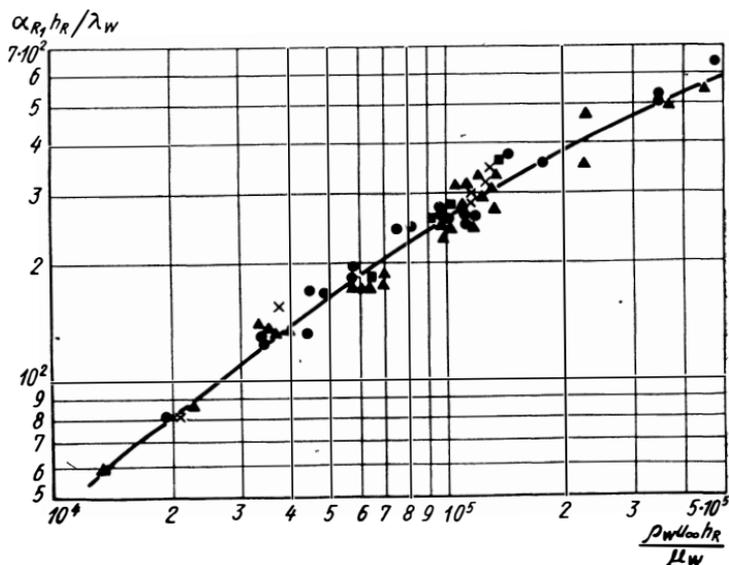


Рис 16.27. К расчету коэффициента теплоотдачи в области растекания потока на горизонтальной поверхности перед уступом при различных значениях D/H :

×—4; ●—2; ▲—1; ■—0,25

16.3.5. Теплообмен в двухмерной отрывной зоне, образующейся за уступом

При обтекании потоком газа обратного уступа пограничный слой, образовавшийся на поверхности $0-S$ (рис. 16.28) отрывается в точке S . Присоединение потока к поверхности происходит в точке R , так что за уступом образуется циркуляционная область движения газа [2]. Линия l отделяет невозмущенный поток, движущийся со скоростью u_∞ , от пограничного слоя и возвратного течения. Область циркуляционного течения отделяется от внешнего потока линией постоянной массы $S-2-R$. В отрывном течении часть газа, расположенная выше линии $S-3-R$, движется в направлении основного потока, а между линией $S-3-R$ и основанием уступа течение газа происходит в обратном направлении. Обратное течение подразделяется на ядро потока, в котором в фиксированном сечении скорость газа постоянна, и пограничные слои. В области линии $S-3-R$ пограничный слой образуется в результате взаимодействия течений движущихся в прямом и обратном направлениях, а у стенки — при взаимодействии газа с твердой поверхностью. Ско-

рость газа в ядре обратного тока возрастает от нуля в точке R до некоторого максимального значения и затем уменьшается. При натекании на уступ, обратный поток тормозится, пограничный слой под действием положительного градиента давления (рис. 16.29) отрывается в точке S_1 (см. рис. 16.28) и присоединяется на вертикальной стенке уступа в точке R_1 . В углу уступа образуется дополнительная зона отрыва.

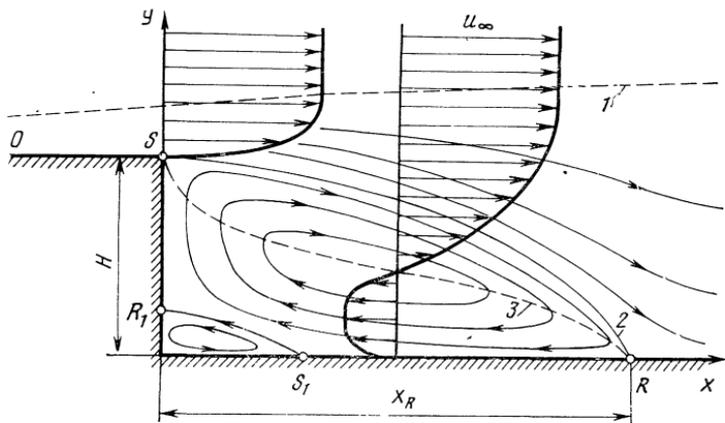


Рис 16.28. Схема течения газа за обратным уступом

Изменение статического давления за уступом показано на рис. 16.29, где $C_p = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2 / 2}$, а x_R характеризует расстояние от основания уступа до точки присоединения потока. Максимум статического давления имеет место при $x/x_R = 1,1$, т. е. располагается за точкой присоединения потока. Значение $(C_p)_R$ заметно ниже величины $(C_p)_{\max}$. В окрестности точки прилипания в диапазоне значений x/x_R от 1 до 0,85 статическое давление выше давления невозмущенного потока. Во всей остальной области отрывного течения давление ниже давления окружающей среды. Минимум давления достигается при $x/x_R \approx 0,6$. От $x/x_R = 1$ до $x/x_R = 0,6$ статическое давление уменьшается. На этом участке скорость обратного потока растет. При $x/x_R < 0,6$ градиент давления в направлении обратного движения положителен. Из рис. 16.29 следует, что величина коэффициента давления не зависит от критерия Рейнольдса. Для разных высот уступа практически одинаковым является безразмерное давление, представляемое в виде

$$\bar{p} = \frac{p - p_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}}.$$

Точка R является критической точкой, в которой скорость потока равна нулю. Как известно, теплообмен в критической точке

зависит от градиента скорости. На рис. 16.30 приведены значения градиента давления для различных высот уступа, которые

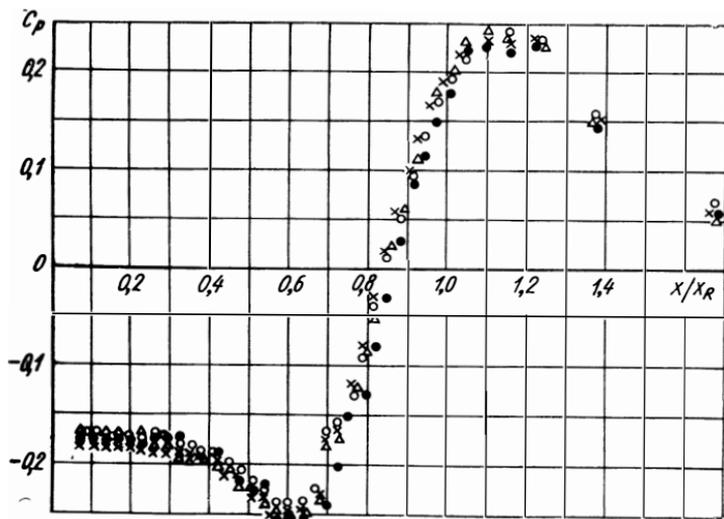


Рис. 16.29. Изменение статического давления на горизонтальной поверхности за уступом при различных скоростях u_∞ , м/с:
 ● — 26; Δ — 45; \times — 77; \circ — 101

характеризуют качественный вид зависимости $(du/dx)_R = f(H)$. Следует иметь в виду, что использование этих данных для вычисления количественной величины du/dx невозможно в силу непостоянства полного давления в зоне отрывного течения.

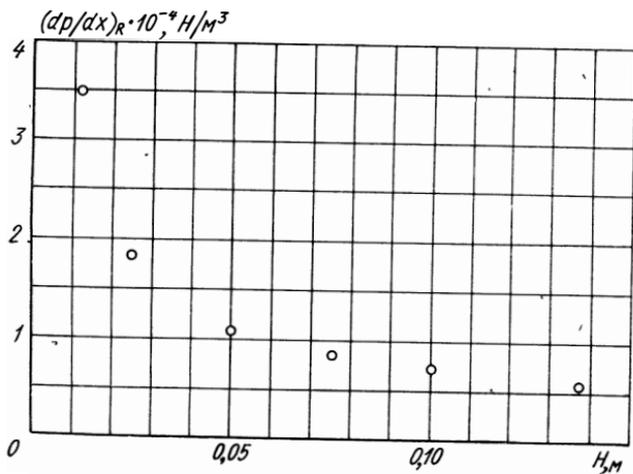


Рис. 16.30. Зависимость градиента давления на линии присоединения потока от высоты уступа

16.3.6. Теплообмен внутри циркуляционной зоны

Изменение коэффициента теплоотдачи на горизонтальной поверхности за уступом приведено на рис. 16.31. Максимальное его значение соответствует точке присоединения потока R . Левее положения максимума находится циркуляционная область тече-

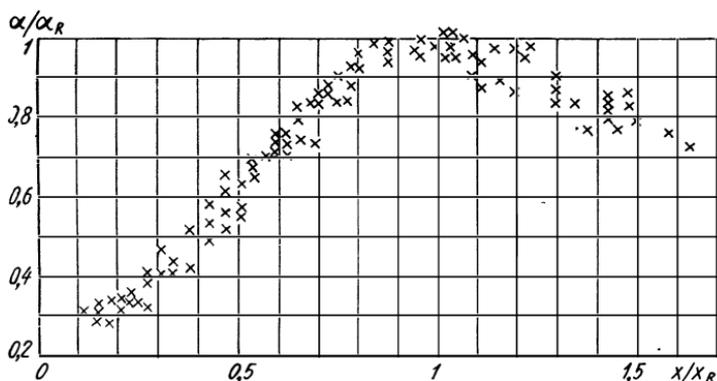


Рис. 16.31. Изменение коэффициента теплоотдачи на горизонтальной поверхности за уступом при изменении его высоты от 12 до 137 мм

ния. В зоне обратных токов величина α существенно переменная. Коэффициент теплоотдачи в точке присоединения потока примерно в 4 раза выше коэффициента теплоотдачи у основания уступа.

Условия теплообмена в отрывной зоне зависят от критерия Рейнольдса внешнего потока $Re = \frac{\rho_\infty u_\infty H}{\mu_\infty}$, высоты уступа и тол-

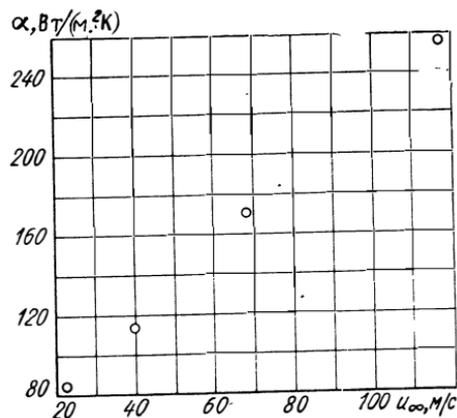


Рис. 16.32. Влияние скорости потока на теплообмен в отрывной зоне

щины пограничного слоя перед отрывом. На рис. 16.32 приведена зависимость коэффициента теплоотдачи в точке присоединения потока от u_∞ . Увеличение скорости невозмущенного потока приводит к интенсификации движения газа в отрывной зоне и вызывает рост тепловых потоков.

Ранее отмечалось, что при увеличении высоты уступа умень-

шается градиент скорости на линии растекания, что в свою очередь вызывает уменьшение тепловых потоков. Увеличение тол-

щины пограничного слоя перед отрывом потока также приводит к уменьшению коэффициента теплоотдачи α_R (рис. 16.33).

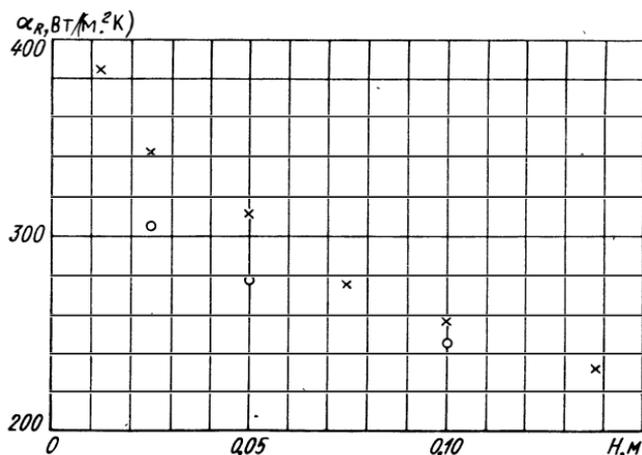


Рис 16.33. Влияние высоты уступа на величину коэффициента теплоотдачи в области присоединения потока при толщине пограничного слоя δ , мм:

×—3; ○—13

Обработка данных эксперимента в координатах $\alpha/\alpha_R = f(x/x_R)$ дает возможность получить одну зависимость, удовлетворительно характеризующую изменение коэффициента теплоотдачи в отрывной зоне при разных значениях критерия Рейнольдса внешнего потока и разных высот уступа (см. рис. 16.31).

Подобие в распределении коэффициентов теплоотдачи позволяет построить методику расчета теплообмена в отрывной зоне через определение характерного значения α , что при наличии аппроксимирующей зависимости рис. 16.31 дает возможность рассчитать его местные значения в любом сечении зоны отрыва.

В качестве характерного значения α принята величина коэффициента теплоотдачи в точке присоединения потока R . Значение α_R удобно выразить через коэффициент теплоотдачи, величина которого определяется с помощью известных критериальных уравнений. Такой величиной целесообразно выбрать значение коэффициента теплоотдачи в точке отрыва потока α_S .

Результаты обработки экспериментальных данных в виде зависимости $\frac{\alpha_R}{\alpha_S} = f\left(\frac{v_S^{**}}{H}\right)$ приведены на рис. 16.34. Толщина пограничного слоя и коэффициент теплоотдачи в точке отрыва потока определяются по известным зависимостям. Для расчета теплообмена, естественно, необходимо знать размеры отрывной зоны. Длина ее зависит от высоты уступа, толщины пограничного слоя перед отрывом и практически не зависит от Re_{∞} .

ТЕПЛООБМЕН В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

Рассмотрим процессы теплообмена тел в столь разреженном газе, что представления о сплошной среде, используемые в обычной газовой динамике (базирующейся на уравнениях Навье—Стокса), оказываются неприменимыми.

Умение рассчитывать теплоотдачу в разреженных газах необходимо при решении многих инженерных задач, таких, например, как создание тепловой защиты гиперзвуковых летательных аппаратов, предназначенных для полетов на больших высотах (70—130 км) около Земли, разработка высотных ядерных реактивных двигателей с накопителем рабочего тела, обеспечение необходимого теплового режима в ряде технологических процессов, осуществляемых в глубоком вакууме, разработка и уточнение методов измерения параметров газа в верхних слоях атмосферы Земли и других планет, разработка систем управления космических кораблей с использованием термодатчиков и т. д.

**17.1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА
В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ****17.1.1. Молекулярная структура газа**

Газ представляет собой совокупность большого числа молекул, разделенных в каждый момент времени в среднем большими расстояниями, значительно превышающими расстояния, на которых становятся заметными межмолекулярные силы. Вследствие этого молекулы газа, находясь в движении, большую часть времени практически не взаимодействуют друг с другом. Взаимодействие между молекулами становится существенным лишь при заметном сближении их. Время их взаимодействия очень мало по сравнению со временем свободного движения. Это время называют временем столкновения, а сам процесс взаимодействия — столкновением.

Поскольку время столкновения очень мало по сравнению с временем свободного движения молекул, вероятность взаимодействия одновременно трех и более молекул (т. е. вероятность тройных и т. д. столкновений) пренебрежимо мала. Практиче-

ски в разреженном газе встречаются лишь парные столкновения молекул.

При столкновениях молекулы обмениваются импульсом и энергией. Законы межмолекулярных взаимодействий, определяющие этот обмен, в общем случае весьма сложны. Однако с достаточной степенью точности для многих целей можно использовать упрощенные (модельные) представления о молекулярных взаимодействиях. Одной из широко используемых моделей взаимодействия является модель, согласно которой молекулы рассматриваются как абсолютно упругие гладкие шары*. Диаметр шаров d при этом назначается из условия осреднения изменений импульса (или энергии и т. д.), которые могут иметь место при различных характерах сближения молекул (встречи могут происходить при различной ориентации молекул относительно друг друга, при различных прицельных расстояниях**). Эффективное сечение столкновения $\sigma = \pi d^2$ зависит от природы молекул и от их относительной скорости перед столкновением. В общем случае при увеличении относительной скорости молекул эффективное сечение столкновения уменьшается.

Молекулы находятся в непрерывном хаотическом движении. Столкновения носят случайный характер. От столкновения к столкновению молекула пробегает путь, который называют свободным пробегом. Длина свободного пробега молекулы от столкновения к столкновению изменяется случайным образом. Осредняя всевозможные значения длин свободного пробега молекулы, мы получим средний свободный пробег L , зависящий от числовой плотности молекул n и размера эффективного сечения столкновения молекул σ :

$$L = \frac{1}{n\sigma}. \quad (17.1)$$

Следует различать среднее расстояние между молекулами и средний свободный пробег молекул. Например, на высоте 300 км от поверхности Земли длина свободного пробега составляет величину $L \approx 10^3$ м ($n \approx 10^{15}$ 1/м³, $\sigma \approx 10^{-18}$ м²), а среднее расстояние между молекулами $\Delta \approx 10^{-5}$ м.

Длину среднего свободного пробега можно выразить через параметры переноса — коэффициенты вязкости и теплопроводности, являющиеся физическими параметрами газа:

$$L = 1,27 \frac{\mu}{\rho \sqrt{RT}}, \quad (17.2)$$

где $\rho = mn$ — плотность газа.

* Модель упругих шаров учитывает лишь коротко действующие силы отталкивания (валентные силы). Существуют модели, которые учитывают и силы притяжения, например, модель Леннарда—Джонса.

** Прицельным называют наименьшее расстояние между сближающимися молекулами, которое имело бы место, если бы молекулы двигались прямолинейно, не испытывая силового воздействия друг на друга.

Воспользовавшись формулой (17.2) и сравнивая ее с формулой (17.1), выразим сечение столкновения σ через коэффициент вязкости μ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{8}{9\pi} \frac{m \sqrt{RT}}{\mu}}. \quad (17.3)$$

Последнее соотношение интересно тем, что, используя известную зависимость μ от T , возможно проследить характер зависимости сечения столкновения σ от скорости молекул $\bar{c} = \sqrt{\frac{8}{\pi} RT}$.

Например, если воспользоваться формулой Сатерленда для вязкости, то получается

$$\sigma = \sigma_1 \left(\frac{T_1}{T} \right) \frac{T+B}{T_1+B}, \quad (17.4)$$

где $T_1 = 273$ К;

σ_1 — сечение столкновения при $\bar{c} = \sqrt{\frac{8}{\pi} RT_1}$;

B — постоянная (для воздуха $B = 114$).

Из формулы (17.4) следует, что при малых T сечение столкновения приблизительно обратно пропорционально T , т. е. $\sigma \sim 1/T$ или обратно пропорционально квадрату относительной скорости. При больших T сечение столкновения можно принять постоянной величиной ($\sigma = \text{const}$), т. е. при больших относительных скоростях сечение столкновения приблизительно постоянная величина*.

17.1.2. Аналитическое описание теплообмена в разреженном газе

В основе молекулярной статистики газов лежит положение о неупорядоченности (хаотичности) движения молекул.

Рассмотрим некоторое пространство, заполненное газом из однородных молекул. Выделим около некоторой фиксированной точки $A(x, y, z)$ объем $dV = dx dy dz$, весьма малый по сравнению с размерами пространства, вдоль которых заметны изменения свойств газа. В то же время этот объем должен быть таким, чтобы в нем содержалось большое количество молекул. Пусть в этом объеме в фиксированный момент времени τ содержится N частиц. Это число можно выразить следующим образом:

$$N = ndV, \quad (17.5)$$

где n — числовая плотность молекул вблизи точки A . Скорости молекул внутри выделенного объема могут иметь самые различные значения. Вероятность того, что взятая наугад молекула это-

* По оценкам сечения столкновения σ в см^2 при $T \approx 100 \div 300$ К для N_2 (и воздуха) $4,5 \cdot 10^{-15}$; для $\text{Ar} = 4,2 \cdot 10^{-15}$; для $\text{He} = 1,4 \cdot 10^{-15}$.

го объема имеет скорость, составляющие которой лежат в интервале значений от ξ_x, ξ_y, ξ_z до $\xi_x + d\xi_x, \xi_y + d\xi_y, \xi_z + d\xi_z$ будет

$$dP = f d\xi_x d\xi_y d\xi_z, \quad (17.6)$$

где f — функция, зависящая от выбранных значений ξ_x, ξ_y, ξ_z . Ожидаемое число молекул с выбранными скоростями в выделенном объеме dV составит

$$dN = n f d\xi_x d\xi_y d\xi_z dx dy dz. \quad (17.7)$$

Очевидно, что в разных точках пространства и в разные моменты времени искомая вероятность dP может быть различной. Следовательно, функция f в выражении (17.6), вообще говоря, будет также функцией координат и времени:

$$f = f(\xi_x, \xi_y, \xi_z, x, y, z, \tau). \quad (17.8)$$

Функция f называется функцией распределения скоростей молекул, поскольку от нее зависит характер распределения вероятностей dP . Из уравнения (17.7) следует, что f представляет собой плотность вероятности обнаружения в момент τ в единичном элементе физического пространства dV (построенного около точки x, y, z) одной молекулы с составляющими скорости из элемента пространства скоростей $d\omega = d\xi_x d\xi_y d\xi_z$ (построенного около точки ξ_x, ξ_y, ξ_z).

Если известна функция распределения скоростей, то можно вычислить любые макроскопические параметры газа. Физический смысл подобных вычислений заключается в осреднении соответствующих молекулярных признаков всех молекул, находящихся в элементарном объеме dV в данный момент времени. Например, составляющую видимой макроскопической скорости u мы получим, если осредним значения ξ_x всех молекул, находящихся в dV :

$$u = \frac{1}{ndV} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_x n f \cdot d\xi_x d\xi_y d\xi_z \right) dV. \quad (17.9)$$

Следовательно

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_x f \cdot d\xi_x d\xi_y d\xi_z. \quad (17.10)$$

Аналогично вычисляются через f составляющие видимой скорости газа v и w , а также температура газа T , тепловые потоки в газе q и т. п.

В общем случае для отыскания вида функции распределения скоростей молекул обращаются к уравнению Больцмана, выведенное им в 1872 г.:

$$\frac{\partial (nf)}{\partial \tau} + \xi_x \frac{\partial (nf)}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial (nf)}{\partial y} + \xi_z \frac{\partial (nf)}{\partial z} + X \frac{\partial (nf)}{\partial \xi_x} + Y \frac{\partial (nf)}{\partial \xi_y} + Z \frac{\partial (nf)}{\partial \xi_z} = I, \quad (17.11)$$

где X, Y, Z — составляющие массовой силы (силы, действующей на единицу массы каждой из молекул газа);

I — член, учитывающий влияние столкновений (интеграл столкновений);

τ — время.

Уравнение (17.11) является основным уравнением кинетической теории газов и называется уравнением Больцмана*. Оно описывает бесчисленное множество конкретных процессов. Чтобы из этого бесчисленного множества выделить рассматриваемый процесс, необходимо добавить к этому уравнению условия однозначности и, в частности, граничные и начальные условия для функции распределения скоростей молекул. Совокупность уравнения Больцмана (или системы уравнений, если газ сложный) и условий однозначности является общим аналитическим описанием процессов теплообмена, протекающих в разреженном газе.

Уравнение Больцмана является нелинейным интегродифференциальным уравнением. Структура входящего в него интеграла столкновений является весьма сложной, и это обстоятельство сильно затрудняет разработку общих методов решения. Однако существует один простой случай, когда отыскание решения не представляет трудности. Это случай, когда газ находится в равновесном состоянии. Если отсутствуют внешние массовые силы (т. е. $X=Y=Z=0$) и свойства газа не изменяются во времени, оставаясь одинаковыми во всех точках пространства, занимаемого газом (т. е. $\partial/\partial\tau=0$; $\partial/\partial x=\partial/\partial y=\partial/\partial z=0$), то из уравнения (17.11) следует, что функция распределения молекул [145]

$$F_M = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT}\right) = n f_M, \quad (17.12)$$

где

$$c_x = \xi_x - u, \quad c_y = \xi_y - v, \quad c_z = \xi_z - w;$$

u, v, w — составляющие макроскопической скорости движения газа в системе координат x, y, z ;

$$R = \frac{k}{m} \text{ — газовая постоянная;}$$

k — постоянная Больцмана;

T — температура.

* Подробный вывод уравнения Больцмана содержится, например, в книгах Д. Гиршфельдер, Ч. Кертисс, Р. Берд. «Молекулярная теория газов и жидкостей», М., ИЛ, 1961 и Л. Больцман. Лекции по теории газов. М., ГИТЛ, 1953.

Эта функция распределения скоростей молекул впервые была найдена Максвеллом и носит его имя.

17.1.3. Взаимодействие молекул с поверхностью твердого тела. Граничные условия для функции распределения скоростей молекул

Для того чтобы сформулировать граничные условия для функции распределения скоростей молекул на поверхности твердого тела, омываемого газом, необходимо знать механизм взаимодействия молекул газа с поверхностью. В конечном счете при этом должна быть определена функция распределения отраженных от поверхности молекул. Характер отражения молекул (функция распределения отраженных молекул) зависит от многих величин: от энергии и массы падающих частиц, от структуры падающих молекул (одно-, двух-, и т. д. -атомные частицы), от вида кристаллической структуры материала поверхности, от температуры поверхности, от характера сил взаимодействия между падающими молекулами и атомами поверхности, от характера механической обработки поверхности и т. д. Характер взаимодействия каждой падающей молекулы, вообще говоря, зависит от скоростей и числа других молекул, падающих на тот же элемент поверхности. В определенных условиях на поверхности образуется сплошной или в виде островов слой адсорбированных молекул (как известно, возможность образования такого слоя определяется временем задержки молекул газа на поверхности и числом их, падающих в единицу времени). Взаимодействие молекул с поверхностью, покрытой слоем адсорбированных молекул, оказывается иным, нежели в случае чистой поверхности.

Установление точного вида функции распределения для отраженных молекул связано с большими трудностями. При расчетах сейчас используют приближенные представления относительно вида этой функции. Механизм взаимодействия молекул с поверхностью тела при этом учитывается путем введения в аппроксимирующую функцию распределения для отраженных молекул некоторого набора макроскопических параметров, зависящих от вышеперечисленных факторов. Эти параметры в свою очередь определяются при помощи эксперимента.

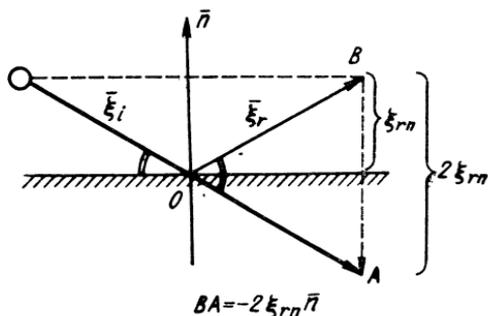
Одной из наиболее давно известных аппроксимирующих функций распределения является предложенная Максвеллом так называемая зеркально-диффузная функция следующего вида:

$$F_r = (1 - a_r) F_i(\bar{r}_w, \bar{\xi}_r - 2\xi_{rn} \bar{n}, \tau) + a_r \frac{\bar{n}_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}} e^{-\xi_r^2 / (2RT_r)} \quad (17.13)$$

Здесь a_τ , T_r , n_r — макроскопические параметры, смысл которых мы рассмотрим ниже;

- F_r — функция распределения отраженных молекул;
- R — газовая постоянная;
- F_i — функция распределения падающих молекул;
- \bar{r}_W — радиус-вектор точки поверхности;
- $\bar{\xi}_r$ — скорость молекулы после удара.

Рис. 17 1. Схема зеркального отражения молекулы от твердой поверхности



Аппроксимирующая функция состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое в правой части равенства (17.13) учитывает молекулы, которые отражаются зеркально от поверхности, а второе — молекулы, отражающиеся диффузно.

Коэффициент a_τ называется коэффициентом диффузного отражения. Он представляет собой долю молекул, отражающихся от поверхности диффузным образом. Величина $(1 - a_\tau)$ представляет долю молекул отражающихся зеркально. В случае зеркального отражения, если молекула после отражения имеет скорость $\bar{\xi}_r$, то перед столкновением с поверхностью она будет иметь скорость (рис. 17.1)

$$\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_r - 2\xi_{rn}\bar{n}, \quad (17.14)$$

где \bar{n} — единичный вектор, нормальный к поверхности. Все молекулы, имеющие перед столкновением скорость ξ_i , после столкновения зеркальным образом с поверхностью перейдут в класс молекул, имеющих скорость $\bar{\xi}_r$. Поскольку $\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_r - 2\xi_{rn}\bar{n}$, то

$$(1 - a_\tau) F_i(\bar{\xi}_i) = (1 - a_\tau) F_r(\bar{\xi}_r - 2\xi_{rn}\bar{n}). \quad (17.15)$$

Величину T_r подбирают таким образом, чтобы принятая аппроксимация для F_r правильно определяла суммарную энергию отраженных молекул. При этом используют опытные данные о термическом коэффициенте аккомодации (приспособления) молекул к условиям на стенке. Термический коэффициент аккомодации $a_{\text{эп}}$ представляет собой долю, отданную падающими молекулами стенке, той энергии, которую они могли бы отдать стен-

ке, если бы молекулы полностью «приспособились» (аккомодировали) к условиям на стенке:

$$a_{\text{ЭН}} = (E_i - E_r) / (E_i - E_W). \quad (17.16)$$

Здесь E_i и E_r — энергия падающих и отраженных молекул;
 E_W — энергия, которую имели бы отраженные молекулы при полной аккомодации.

В случае когда молекулы полностью аккомодируют к условиям на стенке, отраженные молекулы образуют газ, находящийся в тепловом равновесии со стенкой. В этом случае температура газа из отраженных молекул равна температуре стенки, т. е. $T_r = T_W$.

Величину n_r назначают из условия равенства числа падающих N_i и отраженных N_r молекул (т. е. из условия сохранения частиц, которое должно выполняться, если отсутствует захват частиц поверхностью тела):

$$N_i = N_r. \quad (17.7)$$

Таблица 17.1

Экспериментальные значения термических коэффициентов аккомодации гелия и неона на чистых поверхностях металлов

Газ	Металл	Исследователь и год публикации	$a_{\text{ЭН}}$	$\mu = \frac{m^*}{M}$
He	Pt	Brown 1957	0,038	0,0205
He	W	{ Thomas Schafield 1955	0,017	0,0217
He	K	Petersen 1958	0,083	0,1025
He	Al	Faust 1954	0,073	0,148
He	Na	Petersen 1958	0,09	0,174
He	Be	Brown 1957	0,145	0,444
Ne	W	Silvermail 1954	0,042	0,11
Ne	Fe	{ Eggleton Tumpkins 1952	0,056	0,362
Ne	K	Petersen 1958	0,199	0,517
Ne	Al	Faust 1954	0,159	0,747
Ne	Na	Petersen 1958	0,198	0,875
Ne	Be	Brown 1957	0,315	2,24

* m — масса падающей частицы (He, Ne);
 M — масса атома поверхности.

**Влияние адсорбированной пленки на термический коэффициент
аккомодации гелия на вольфраме**

Условия на поверхности	$a_{эН}$	Исследователь	Год публикации
Чистая поверхность W	0,017	Thomas, Schafield	1955
Поверхность вольфрама по- крыта адсорбированными моле- кулами (точные условия неиз- вестны)	0,025 0,057	Roberts	1933
	0,17	Michels	1932
	0,12	Oliver, Farber	1950
	0,53	Michels	1932
Поверхность вольфрама по- крыта адсорбированными моле- кулами водорода	0,041	Wachmann	1957
Поверхность вольфрама по- крыта адсорбированными моле- кулами азота	0,064	Wachmann	1957

Предельным случаем зеркально-диффузной схемы отражения является случай, когда все молекулы отражаются диффузно с максвелловским распределением, отвечающим температуре стенок. В этом случае $a_{\tau}=1$, $a_{эН}=1$. Второй предельный случай, когда все молекулы отражаются зеркально, т. е. когда $a_{\tau}=0$, $a_{эН}=0$. Действительные значения a_{τ} и $a_{эН}$ обычно лежат между этими крайними значениями.

К настоящему времени в целях установления величин a_{τ} и $a_{эН}$ проведено огромное количество экспериментов. Однако надежных данных пока еще далеко не достаточно. В табл. 17.1 собраны наиболее достоверные данные по коэффициентам для гелия и неона на чистых поверхностях различных металлов при сравнительно небольших (порядка обычных тепловых) скоростях (энергиях) падающих молекул.

В табл. 17.2 представлены данные опытных измерений $a_{эН}$ для He на вольфраме, покрытом частично или полностью пленкой адсорбированных молекул той или иной природы при небольших (порядка обычных тепловых) энергиях падающих молекул. В этой таблице приведены также данные для чистой поверхности. Из сравнения можно заключить, что наличие адсорбированной пленки приводит к существенному увеличению коэффициента термической аккомодации.

Наконец, в табл. 17.3 приведены опытные данные по коэффициентам аккомодации для воздуха при небольших (порядка обычных тепловых) энергиях падающих частиц. Эти данные, по-видимому, относятся к условиям, когда поверхность в какой-то степени покрыта адсорбированными молекулами. Из табл. 17.3 следует, что $a_{эН}$ для воздуха мало отличается от единицы. Данных при больших энергиях падающих частиц (соответствующих, например, скоростям движения спутников) сейчас очень мало. В практических расчетах теплообмена и сопротивления из-за недостаточности данных о $a_{эН}$ и a_{τ} в ряде слу-

чаев приходится пользоваться их предельными значениями, оценивая тем самым верхний и нижний пределы исследуемых величин (сопротивление, теплоотдача).

Таблица 17.3

Экспериментальные значения термических коэффициентов аккомодации для воздуха на различных технических поверхностях

Поверхность	Исследователи	$\alpha_{Эн}$
Лак на бронзе	Widmann, Trumpler 1946	0,88—0,89
Полированная бронза		0,91—0,94
Бронза машинной обработки		0,89—0,98
Бронза, обработанная спиртом		0,93—0,95
Литая сталь полированная		0,87—0,93
Литая сталь машинной обработки		0,89—0,96
Алюминий полированный		0,87—0,95
Алюминий машинной обработки		0,95—0,97
Алюминий, обработанный спиртом	0,89—0,97	
Платина	Кнудсен, 1934	0,74—0,91

Максвелловская аппроксимация для функции распределения скоростей отраженных молекул F_r , представляющая собой линейную комбинацию зеркального и диффузного отражений, не всегда может оказаться удовлетворительной в силу частного вида аппроксимирующей функции. В общем случае для F_r необходимы более общие представления [29].

17.2. ПОДОБИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА В РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ. РЕЖИМЫ ТЕПЛОВЫХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

17.2.1. Анализ подобия

Во многих случаях в связи с трудностями решения уравнения Больцмана возникают вопросы об экспериментальных путях исследования теплообмена и течений разреженного газа и, в связи с этим, вопросы о моделировании и критериях подобия.

Обсуждение вопросов подобия мы проведем применительно к характерному (для авиационной техники) классу стационарных задач о теплообмене и сопротивлении тел, обтекаемых безграничным потоком газа, состоящего из однородных одноатомных частиц (т. е. применительно к классу задач о теплообмене при внешнем обтекании). В соответствии с типичными для многих случаев условиями будем полагать, что на бесконечном удалении от тела газ не возмущен и находится в равновесном сос-

тоянии так, что оно описывается максвелловской функцией распределения

$$F_{\infty} = \frac{n_{\infty}}{(2\pi RT_{\infty})^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\xi_x - u_{\infty})^2 + (\xi_y - v_{\infty})^2 + (\xi_z - w_{\infty})^2}{2RT_{\infty}} \right], \quad (17.18)$$

где ξ_x, ξ_y, ξ_z — составляющие скорости движения молекул;
 $u_{\infty}, v_{\infty}, w_{\infty}$ — составляющие видимого макроскопического движения газа в целом в системе координат, связанной с обтекаемым телом;

T_{∞} — температура газа на бесконечности;

n_{∞} — числовая плотность молекул на бесконечности.

Будем считать, что функция распределения F_r для отраженных молекул от поверхности тела в рассматриваемых условиях достаточно хорошо аппроксимируется максвелловской зеркально-диффузной функцией:

$$F_r = (1 - a_r) F_i + a_r \frac{n_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}} \exp \left[-\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2RT_r} \right]. \quad (17.19)$$

Рассмотрим некоторую группу явлений, описываемых уравнением Больцмана и одинаковыми по форме и содержанию условиями однозначности. Различие процессов, принадлежащих к этой группе, может состоять лишь в том, что размерные величины, входящие в условия однозначности, могут иметь различные численные значения. Таким образом, мы будем иметь в виду ряд случаев обтекания тел, геометрия которых подобна, а ориентация, этих тел относительно вектора видимой скорости одинакова. Будем полагать, что во всех случаях координатные системы связаны с телом и введены подобным образом.

В качестве примера можно представить себе стационарное обтекание двух цилиндров различного диаметра, имеющих разную температуру поверхности. Размерные величины — $u_{\infty}, \rho_{\infty}, T_{\infty}$ (скорость, плотность, температура в невозмущенном потоке) — также, вообще говоря, могут различаться по величине. Выявим условия, при которых явления данной группы будут подобными. Приведем уравнение Больцмана и граничные условия к безразмерному виду. В качестве масштабов для скоростей, числовой плотности молекул, температур, диаметров молекул и функций распределения выберем для каждого явления соответствующие размерные величины, связанные всякий раз с условиями на бесконечности. Для координат, в качестве масштаба, выберем характерный размер тела l , а для массовых сил X, Y, Z — ускорение сил тяжести g . Перейдем в уравнении Больцмана и в формулах (17.18) и (17.19) от размерных переменных к безразмерным по формулам

$$\begin{aligned} \xi_{x'} &= \xi_x \frac{c_\infty}{c_\infty} = \tilde{\xi} c_\infty \quad (\text{где } c_\infty = \sqrt{2RT_\infty}); \\ T_w &= T_w \frac{T_\infty}{T_\infty} = \tilde{T}_w \cdot T_\infty; \\ d &= d \frac{d_\infty}{d_\infty} = \tilde{d} d_\infty = d \sqrt{\frac{1}{\pi} \sigma_\infty}; \quad F = \tilde{F} n_\infty / c_\infty^3; \\ n_r &= \tilde{n}_r n_\infty; \quad \beta = \tilde{\beta} c_\infty; \quad x = \tilde{x} l; \quad y = \tilde{y} l, \end{aligned} \quad (17.20)$$

где σ_∞ — сечение столкновений на бесконечности.

Заметим, что величины масштабов c_∞ , n_∞ , T_∞ и т. д. для каждого процесса данной группы, вообще говоря, различны.

Уравнение Больцмана и граничные условия после приведения их к безразмерному виду будут иметь вид:

$$\tilde{\xi}_x \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\xi}_y \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\xi}_z \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{z}} + \left(\frac{B^2}{Fr} \right) \left(\tilde{X} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\xi}_x} + \tilde{Y} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\xi}_y} + \tilde{Z} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\xi}_z} \right) = \frac{1}{\pi Kn} \tilde{I}; \quad (17.21)$$

$$\tilde{F}_\infty = \frac{1}{\pi^{3/2}} \exp \left\{ - [(\tilde{\xi}_x - B\varphi_1)^2 + (\tilde{\xi}_y - B\varphi_2)^2 + (\tilde{\xi}_z - B\varphi_3)^2] \right\}; \quad (17.22)$$

$$\tilde{F}_r = (1 - a_\tau) \tilde{F}_i + a_\tau \frac{\tilde{n}_r}{(\pi \tilde{T}_r)^{3/2}} \exp \left(- \frac{\tilde{\xi}_x^2 + \tilde{\xi}_y^2 + \tilde{\xi}_z^2}{\tilde{T}_r} \right), \quad (17.23)$$

где

$$\tilde{T}_r = \left(1 - \frac{a_{\text{ЭН}}}{a_\tau} \right) \tilde{E}_i + \frac{a_{\text{ЭН}}}{a_\tau} \tilde{T}_w; \quad (17.24)$$

$$\tilde{E}_i = E_i / (2RT_\infty m N_i); \quad \tilde{T}_w = T_w / T_\infty; \quad B = \sqrt{\frac{k}{2} M}; \quad M = \frac{U_\infty}{a_\infty};$$

$a_\infty = \sqrt{kRT_\infty}$ — скорость звука в невозмущенном потоке;

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — направляющие косинусы (т. е. $\varphi_1 = u_\infty / U_\infty$, $\varphi_2 = v_\infty / U_\infty$; $\varphi_3 = \omega_\infty / U_\infty$);

$Fr = U_\infty^2 / (gl)$ — число Фруда;

$Kn = 1 / (n_\infty \sigma_\infty l)$ — число Кнудсена;

$k = c_p / c_v$ — отношение изобарной и изохорной теплоемкостей;

$$\tilde{I} = \frac{\pi c_\infty^2 I}{n_\infty^2 \sigma_\infty} \quad (\text{безразмерный интеграл столкновений}).$$

Безразмерное уравнение Больцмана и граничные условия для всех сравниваемых случаев будут тождественными (а явления, следовательно, подобны), если выполняются условия:

$$\left. \begin{aligned} Kn &= \text{idem}; \quad \sqrt{\frac{k}{2} M} = \text{idem}; \quad T_w / T_\infty = \text{idem}; \\ Fr &= \text{idem}; \quad a_\tau = \text{idem}; \quad a_{\text{ЭН}} = \text{idem}. \end{aligned} \right\} \quad (17.25)$$

Число Кнудсена K_n можно связать с числом Рейнольдса Re , если воспользоваться формулой (17.2), которая позволяет выразить средний свободный пробег L_∞ через коэффициент вязкости μ_∞ :

$$K_n = \frac{L_\infty}{l} \sim \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty \sqrt{RT_\infty}} \frac{1}{l} = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty} \frac{U_\infty}{\sqrt{RT_\infty}} \sim \frac{M}{Re}. \quad (17.26)$$

Из уравнения (17.26) следует, что при одинаковых числах M ($M = \text{idem}$), условие $K_n = \text{idem}$ идентично условию $Re = \text{idem}$.

Как отмечалось ранее, коэффициенты аккомодации a_τ и $a_{\text{эп}}$ в общем случае зависят от очень большого числа факторов. В связи с этим очевидно, что в общем случае последние два условия (17.25) будут выполняться лишь тогда, когда поверхности обтекаемых тел изготовлены из одного и того же материала и одинаковым образом обработаны, когда температуры поверхностей и энергии падающих молекул одинаковы, когда природа газов одинакова и т. д. Эти обстоятельства крайне ограничивают возможности моделирования.

В ряде случаев в сравнительно широком диапазоне условий может наблюдаться одна и та же схема отражения — полностью диффузная с полной термической аккомодацией ($a_\tau = 1$; $a_{\text{эп}} = 1$). Когда это имеет место во всех сравниваемых случаях и если для всех газов $k = \text{idem}$, то для подобия необходимо выполнение условий:

$$\left. \begin{aligned} K_n = \text{idem} \text{ (или } Re = \text{idem}); M = \text{idem}; \\ T_w/T_\infty = \text{idem}; Fr = \text{idem}. \end{aligned} \right\} \quad (17.27)$$

Эти условия подобия являются точно такими же, как и в обычной газовой динамике (в динамике навье—стоксовской среды).

17.2.2. Режимы тепловых и динамических процессов

Рассмотрим физический смысл числа Кнудсена $K_n = L_\infty/l$. Во-первых, это число можно рассматривать, как отношение среднего свободного пробега молекул к характерному размеру тела. Другое физическое содержание числа Кнудсена можно обнаружить, если проанализировать процесс приведения к безразмерному виду уравнения Больцмана.

При приведении к безразмерному виду уравнения Больцмана мы получили число Кнудсена в результате деления размерного множителя, появившегося перед безразмерным интегралом столкновения, на размерный множитель, появившийся перед безразмерными конвективными членами левой части. Размерный множитель перед интегралом столкновения можно рассматривать как масштаб прибыли числа молекул выделенного класса из-за столкновений, множитель перед левой частью — как

масштаб прибыли молекул из-за конвекции. В том случае когда $K_p \rightarrow \infty$, роль столкновений незначительна (т. е. функция распределения практически не зависит от столкновений между молекулами газа), можно отбросить интеграл столкновений. Наоборот, когда основной вклад в баланс выделенных молекул дают столкновения между молекулами газа, число Кнудсена $K_p \rightarrow 0$. В этом случае роль столкновительного члена в уравнении Больцмана становится главной. Таким образом, число Кнудсена можно рассматривать как меру влияния на свойства газа (на функцию распределения) межмолекулярных столкновений.

Режим, когда отсутствует влияние столкновений молекул газа между собой на функцию распределения (а следовательно, и на процессы теплообмена), называют *с в о б о д н о - м о л е ку л я р н ы м*. Этот режим реализуется при очень больших числах Кнудсена ($K_p \rightarrow \infty$). Большие числа Кнудсена ($L \gg l$) в свою очередь реализуются обычно тогда, когда в газе очень низкое давление.

При малых числах Кнудсена ($K_p \rightarrow 0$) функция распределения из-за огромного числа столкновений молекул между собой определяется прежде всего этими столкновениями. Большое число столкновений способствует сглаживанию различий между отдельными группами молекул, т. е. способствует установлению равновесия в газе. Поэтому функция распределения в этом случае в каждой точке должна мало отличаться от максвелловской. Этот режим соответствует режиму «сплошной» среды, которая, как это следует из уравнения Больцмана (решение методом Чепмена—Энскога) описывается уравнениями Навье—Стокса—Фурье. Малые числа Кнудсена ($L_\infty \ll l$) реализуются обычно тогда, когда в газе довольно высокие давления.

Режим, лежащий между свободно-молекулярным и континуумным (навьё — стоксовским), называется *п р о м е жу т о ч н ы м*. При промежуточном и свободно-молекулярном режимах уравнения Навье—Стокса—Фурье являются непригодными. При этих режимах дискретный характер газовой среды проявляется совершенно иначе, чем в случае плотных газов. В свете вышесказанного критерий Кнудсена выступает как параметр степени разреженности.

Рассматривая классификацию режимов, следует отметить, что промежуточный режим в свою очередь иногда разделяют на *п о ч т и - с в о б о д н о - м о л е ку л я р н ы й* режим (режим, когда имеются малые отличия от свободно-молекулярного режима), *р е ж и м с к о л ь ж е н и я* (когда степень разрежения еще мала и отличия от обычной навьё — стоксовской среды незначительны), и, наконец, режим, занимающий *п е р е х о д н о е п о л о ж е н и е* между указанными. Для каждого из режимов имеются (в связи с физическими особенностями влияния межмолекулярных столкновений) различия в методах расчета теплообмена и сопротивления. Рассмотрим вопрос о границах применимости тео-

рий, развитых для различных режимов тепловых и динамических процессов в разреженном газе.

Математически строгим условием существования свободно-молекулярного режима (такого режима, когда можно отбросить в уравнении Больцмана интеграл столкновений I) является условие $Kn \rightarrow \infty$. В этом случае исчезают принципиальные математические трудности, связанные с решением уравнения Больцмана. Для этих условий сравнительно легко строятся теоретические методы расчетов теплоотдачи и сопротивления тел в потоке. Если иметь в виду практические требования к точности определения тепловых потоков и сопротивления, то эти методы при определенных дополнительных условиях могут быть использованы и тогда, когда числа Kn хотя и велики, но не бесконечно велики. При этом встает вопрос о границах применимости методов. В качестве исходного условия при этом, естественно, выставляется некоторая степень точности вычисленных результатов по отношению к действительным (обычно допускается отклонение до 1%). Область, где применимы в указанном смысле методы, основанные на предположении существования свободно-молекулярных условий, называется свободномолекулярной областью. Из аналогичных соображений вводится понятие области континуума Навье—Стокса—Фурье.

17.2.3. Граница свободно-молекулярной области

Оценим приближенно границу свободно-молекулярной области применительно к классу задач внешнего обтекания. Для оценок воспользуемся известными положениями элементарной кинетической теории газов. Будем полагать, что речь идет об обтекании выпуклого тела. При свободно-молекулярных условиях существуют около тела два класса молекул: молекулы набегающего потока (O -молекулы) и молекулы, отраженные поверхностью (W -молекулы) (рис. 17.2). Теория свободно-молекулярного режима будет применима до тех пор, пока число столкновений между молекулами этих двух классов в окрестностях тела достаточно мало (когда столкновения между O - и W -молекулами заметно не сказываются на величинах тепловых потоков и сопротивлений). Это будет иметь место, если средняя длина свободного пробега отраженных молекул в атмосфере налетающих частиц будет велика по сравнению с размерами тела. В этом случае отраженные молекулы без столкновений с падающими частицами уйдут достаточно далеко от тела. Их числовая плотность по мере удаления от тела быстро падает и при столкновениях на больших расстояниях уже не будет существенного влияния отраженных частиц на набегающий поток. Кроме того, вероятность попадания на тело образующихся в результате столкновений молекул (отличающихся в среднем по своим динамическим свойствам от молекул набегающего потока) будет весьма мала, поскольку они рассеиваются во всех направлениях.

Плотность потока отраженных частиц падает из-за их разлета приблизительно пропорционально квадрату расстояния от тела. Следовательно, если в среднем отраженные молекулы будут проходить без столкновений расстояние $L_W \gg 10l$ (где l — характерный размер тела), то их влияние на набегающий поток будет пренебрежимо малым. Таким образом, в качестве границы применимости свободно-молекулярной теории можно принять условие

$$L_W/l \geq 10.$$

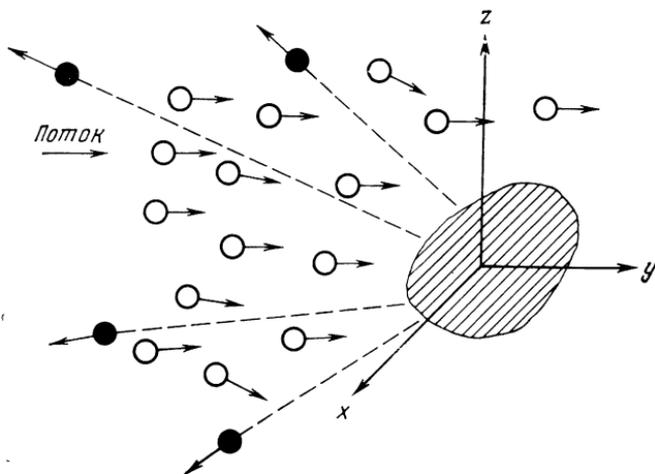


Рис. 17.2. Свободно-молекулярное обтекание тела потоком газа:
 ● — W-молекулы — отраженные молекулы; ○ — O-молекулы — молекулы набегающего потока. Параметры потока: n_∞ ; u_∞ ; T_∞

Средняя длина свободного пробега L_W определяется согласно элементарной кинетической теории формулой

$$L_W = v_W / (n_O \sigma_{OW} v_{OW}), \quad (17.28)$$

где σ_{OW} — поперечное сечение столкновений O- и W-молекул;

n_O — числовая плотность O-молекул ($n_O \sim n_\infty$);

n_∞ — числовая плотность молекул в набегающем потоке;

v_{OW} — величина средней относительной скорости O- и W-молекул перед столкновением;

v_W — скорость отраженных частиц (определяется температурой поверхности и условиями аккомодации).

В случае когда набегающий поток дозвуковой и температура тела T_W не сильно отличается от термодинамической температуры набегающего потока T_∞ , можно считать, что $v_W = w_{WO} \sim \sqrt{RT_\infty}$ (в этом случае относительная скорость падающих и отраженных частиц v_{OW} приблизительно равна средней скорости теплового движения частиц в набегающем потоке; скорость от-

раженных частиц того же порядка). Поскольку относительная скорость перед столкновением v_{0W} того же порядка, что и скорость хаотического движения, то, очевидно (см. 17.4), $\sigma_{0W} \approx \sigma_{\infty}$. С учетом этих положений, получим

$$L_W = 1/(n_{\infty}\sigma_{\infty}) = L_{\infty}.$$

Граница свободно-молекулярной области определяется при $M < 1$ и $T_W \sim T_{\infty}$ условием

$$\frac{L_{\infty}}{l} \approx \frac{\mu_{\infty}}{\rho_{\infty} \sqrt{RT_{\infty}}} \frac{1}{l} \approx \frac{M}{\text{Re}} \gg 10, \quad (17.29)$$

где $M = U_{\infty}/a_{\infty}$ — число Маха в набегающем потоке;

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty} l}{\mu_{\infty}} \text{ — число Рейнольдса.}$$

В случае когда поток гиперзвуковой ($M \gg 1$) и поверхность тела сильно охлаждается, т. е. $T_W \ll T_{0\infty} = T_{\infty} + u_{\infty}^2/(2c_p)$, уже нельзя считать, что $v_{0W} = v_W$. В этом случае $v_{0W} \approx U_{\infty} \approx \sqrt{T_{0\infty}}$. Кроме того, σ_{0W} будет отличаться от σ_{∞} , поскольку v_{0W} и $c_{\infty} \sim \sqrt{T_{\infty}}$ сильно различаются. Воспользовавшись формулой (17.4), получим

$$\sigma_{0W} \approx \sigma_{\infty} \left(\frac{T_{\infty}}{T_{0\infty}} \right)^{1/2} \frac{1}{c_*} \sim \frac{\sigma_{\infty}}{c_* M}, \quad (17.30)$$

где

$$\frac{T_{\infty}}{T_{0\infty}} \approx \frac{k-1}{2} M^2; \quad c_* = \frac{\mu(T_{0\infty})}{\mu(T_{\infty})} \frac{T_{\infty}}{T_{0\infty}}.$$

В этом случае будем иметь:

$$L_W = \left(\frac{T_W}{T_{0\infty}} \right)^{1/2} \frac{c_* M}{n_{\infty} \sigma_{\infty}} = L_{\infty} M c_* t_W^{1/2}, \quad (17.31)$$

где $t_W = T_W/T_{0\infty}$ — безразмерная температура стенки. Таким образом, при $M \gg 1$ граница свободно-молекулярной области определяется условием (рис. 17.3):

$$\frac{L_W}{l} = \frac{L_{\infty}}{l} M t_W^{1/2} c_* = \text{Kn} M t_W^{1/2} c_* \gg 10 \quad (17.32)$$

или

$$\frac{M^2}{\text{Re}} t_W^{1/2} c_* \gg 10. \quad (17.33)$$

Рассмотрим полученный результат применительно к обтеканию тела воздухом. Из формулы (17.4) следует, что при $T_{0\infty} \gg T_{\infty} = 300 \text{ K}$ можно принять $\sigma = \text{const}$. В этом случае $\mu \sim \sqrt{T}$ и $c_* \approx$

$\approx (T_\infty/T_{0\infty})^{1/2} \sim \frac{1}{M}$ и тогда из уравнений (17.32) вытекает следующая формула для границы свободно-молекулярной области:

$$\text{Kn } t_W^{1/2} \approx \frac{M}{\text{Re}} t_W^{1/2} > 10. \quad (17.34)$$

При этом, если $T_W \sim T_\infty$, то $t_W \sim 1/M$; и тогда формула (17.34) примет вид

$$1/\text{Re} > 10.$$

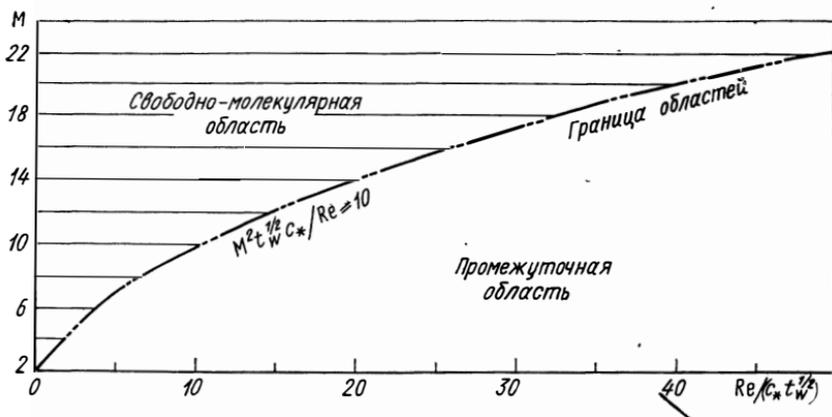


Рис. 17.3. Граница свободно-молекулярной области

Можно представить себе условие, когда нельзя считать постоянным сечение столкновения σ_{0W} . Например, такие условия реализуются часто в вакуумных аэродинамических трубах. Если принять, что сечение столкновений σ_{0W} обратно пропорционально относительной скорости перед столкновением ($\sigma \sim 1/v_{0W}$), то получим

$$\sigma_{0W} \sim \sigma_\infty (T_\infty/T_{0\infty})^{1/2} \sim \frac{\sigma_\infty}{M}; \quad \mu \sim T; \quad c_* \approx 1.$$

В этом случае граница свободно-молекулярной области будет определяться формулой

$$\text{Kn } M t_W^{1/2} \sim \frac{M^2}{\text{Re}} t_W^{1/2} > 10. \quad (17.35)$$

17.2.4. Граница области континуума Навье — Стокса — Фурье

Как известно, в условиях, когда среду рассматривают как континуум Навье—Стокса—Фурье, на поверхности тела выполняются условия «прилипания», т. е. $u_W = 0$; $(T_r)_W = T_W$. По мере увеличения степени разрежения эти условия перестают выполняться. Это можно объяснить на основе молекулярных

представлений о газе [145]. При малых степенях разрежения (т. е. когда длина свободного пробега мала по сравнению с размерами тела, но и с толщиной пограничного слоя) скорость скольжения приближенно может быть оценена следующим образом:

$$u_w \approx L \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (17.36)$$

Из этой формулы следует, что при $L \rightarrow 0$ скорость скольжения $u_w \rightarrow 0$ и условие (17.36) переходит в условие полного прилипания. Температура газа на поверхности тела $(T_r)_w$ также отличается от температуры самой поверхности T_w . Разность этих температур приближенно может быть определена следующим образом:

$$\Delta T_w = (T_r)_w - T_w = L \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (17.37)$$

Величина ΔT_w называется скачком температуры. При $L \rightarrow 0$ скачок температуры практически исчезает, т. е. выполняется условие полного прилипания.

Граница области обычного континуума Навье—Стокса—Фурье (т. е. континуума, для которого выполняются условия полного прилипания) определяется из следующих соображений. С точки зрения точности расчетов теплоотдачи, которая требуется для практических целей, допустимо принять условия полного прилипания, если скорость скольжения u_w и температурный скачок ΔT_w составляют величины по крайней мере на два порядка меньше, чем соответственно скорость u_∞ на внешней границе пограничного слоя и разность $T_\infty - T_w$ (где T_∞ —температура на внешней границе слоя). Таким образом, границей применимости обычной теории пограничного слоя (без учета скольжения и скачка температуры) являются условия

$$\frac{u_w}{u_\infty} < 0,01; \quad \frac{(T_r)_w - T_w}{T_\infty - T_w} < 0,01. \quad (17.38)$$

Условия (17.38) можно представить в иной форме, если воспользоваться формулами (17.36) и (17.37) и учесть, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_\infty}{\delta}; \quad \frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{T_\infty - T_w}{\delta},$$

где δ — толщина пограничного слоя.

На основе сказанного из выражения (17.38) вытекает следующая формула, определяющая границу применимости теории обычного континуума:

$$L/\delta < 0,01. \quad (17.39)$$

Следует отметить, что толщина пограничного слоя δ изменяется вдоль обтекаемого тела, а следовательно, не все части пограничного слоя равноценны с точки зрения применимости обычной теории пограничного слоя. Например, вблизи передней кромки пластины, где слой δ тонок, эффекты разреженности будут большими; вдали от передней кромки эти эффекты ослабевают. Из теории ламинарного пограничного слоя известно, что

$$\delta \sim x \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}}.$$

Если учесть это обстоятельство и воспользоваться формулой (17.2), то из неравенства (17.39) получим следующее соотношение, определяющее границу обычного континуума:

$$\frac{M}{\sqrt{\text{Re}_x}} < 0,01. \quad (17.40)$$

Формула (17.40) может быть использована для оценок, когда числа M невелики и температура газа не сильно отличается от температуры поверхности тела. При $M \gg 1$ и $T_w/T_\infty \ll 1$, как показывает опыт для тонких тел (пластина, клин, конус), граница применимости обычных представлений определяется соотношением

$$M \sqrt{\bar{C}/\overline{\text{Re}_x}} < 0,1,$$

где $C = \mu(T_w)T_\infty / [\mu(T_\infty)T_w]$; $\mu(T_w)$ и $\mu(T_\infty)$ — коэффициенты вязкости газа, соответственно, при температуре стенки T_w и при температуре невозмущенного потока T_∞ .

17.3. ТЕПЛОБМЕН В СВОБОДНО-МОЛЕКУЛЯРНОЙ ОБЛАСТИ

В свободно-молекулярной области можно не учитывать столкновения между молекулами газа. С точки зрения математического описания это значит, что в уравнении Больцмана можно отбросить интеграл столкновений I . Ограничимся рассмотрением стационарных процессов теплообмена, предполагая возможным не учитывать действия массовых сил. Уравнение Больцмана (для однородного газа) для этих условий будет иметь вид

$$\xi_x \frac{\partial F}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial F}{\partial y} + \xi_z \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad (17.41)$$

где $F = n f$.

В качестве примера рассмотрим теплоотдачу выпуклых тел в свободно-молекулярном потоке.

При свободно-молекулярном обтекании выпуклого тела отраженные от его поверхности молекулы газа не могут снова попасть на тело*. На больших расстояниях поток газа не возму-

* Это важное обстоятельство и отличает процесс обтекания выпуклого тела от обтекания невыпуклого тела.

щен и находится в равновесном состоянии, характеризуемом максвелловской функцией распределения. В системе координат, связанной с телом, эта функция распределения запишется следующим образом:

$$F_{\infty} = \frac{n_{\infty}}{(2\pi RT_{\infty})^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\xi_x - u_{\infty})^2 + (\xi_y - v_{\infty})^2 + (\xi_z - w_{\infty})^2}{2RT_{\infty}} \right], \quad (17.42)$$

где n_{∞} , T_{∞} , u_{∞} , v_{∞} , w_{∞} — соответственно числовая плотность молекул, температура газа и составляющие макроскопической (видимой) скорости газа в невозмущенном потоке.

Условия на поверхности тела (температура поверхности тела T_W , схема отражения частиц) будем считать так же, как и условия на бесконечности, заданными.

Для того чтобы найти величину теплового потока от газа в тело, необходимо сначала вычислить энергию e_i , приносимую на единичную площадку в единицу времени падающими частицами, а затем энергию, уносимую отраженными молекулами e_r . Разность этих энергий будет равняться искомой величине теплового потока. Если при этом задан термический коэффициент аккомодации $a_{\text{эп}}$, то тепловой поток в любой точке поверхности тела, приходящийся на единицу площади, можно вычислить по формуле

$$q_W = a_{\text{эп}}(e_i - e_W), \quad (17.43)$$

где e_W — энергия, которая уносилась бы с единицы поверхности отраженными частицами при полной термической аккомодации ($a_{\text{эп}} = 1$), т. е. когда функция распределения для отраженных частиц имеет вид

$$F_W = \frac{n_W}{(2\pi RT_W)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2RT_W} \right). \quad (17.44)$$

Таким образом, при вычислениях тепловых потоков в выпуклое тело нет необходимости знать действительную функцию распределения отраженных частиц, если задан коэффициент аккомодации.

Энергия, приносимая падающими многоатомными частицами, состоит из энергии поступательного движения e_i' и внутренней энергии e_i'' , т. е. $e_i = e_i' + e_i''$. Внутренняя энергия каждой молекулы согласно принципу равного распределения энергии по степеням свободы составляет в среднем величину, равную $mRT_{\infty}j/2$, где j — число внутренних степеней свободы, которое можно выразить через $k = c_p/c_v$ следующим образом: $j = (5 - 3k)/(k - 1)$.

Если энергию одной молекулы умножить на число падающих частиц в единицу времени на единицу поверхности тела N_i , то получим e_i'' , т. е.

$$e_i'' = \frac{1}{2} N_i m j R T_{\infty} = \frac{1}{2} N_i \frac{5 - 3k}{k - 1} m R T_{\infty}. \quad (17.45)$$

Сказанное относительно e_i относится и к e_w , т. е. $e_w = e'_w + e''_w$. Внутренняя энергия отраженной частицы при полной аккомодации в среднем составляет величину $mjRT_w/2$. Умножая энергию одной молекулы на число отраженных с единицы поверхности в единицу времени частиц N_w , мы получим e''_w , т. е.

$$e''_w = \frac{1}{2} N_w m j R T_w = \frac{1}{2} N_w \frac{5-3k}{k-1} m R T_w. \quad (17.46)$$

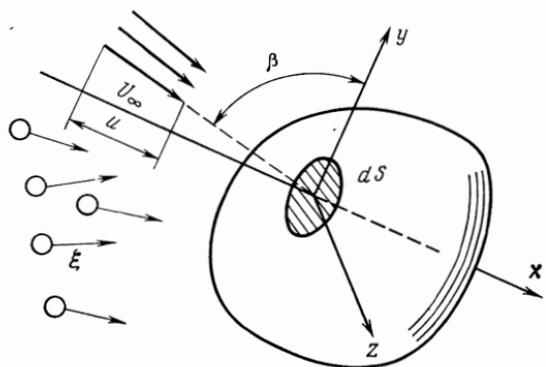
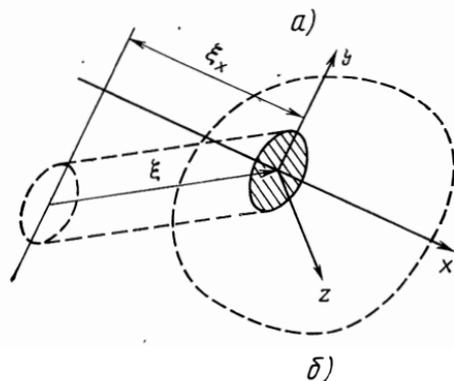


Рис. 17.4. К вычислению числа падающих на тело молекул



Из условия сохранения частиц следует, что количества падающих и отраженных молекул равны между собой, т. е.

$$N_i = N_w. \quad (17.47)$$

Вычислим число молекул, падающих в единицу времени на единицу площади некоторого элемента поверхности тела dS (рис. 17.4, а). Температуру поверхности элемента dS можно считать постоянной. Температура в разных точках поверхности может быть, вообще говоря, различной, однако если элемент dS мал, то можно принять, что во всех точках в пределах dS температура T_w одинакова.

Систему координат расположим так, чтобы начало отсчета ее находилось на выделенном элементе dS . Координатные оси

направим таким образом, чтобы вектор видимой скорости U_∞ лежал в плоскости xy . Кроме того, ось x направим так, чтобы она совпадала с нормалью к элементу dS . В такой системе координат составляющие видимой скорости U_∞ будут иметь следующие значения:

$$w_\infty = 0; \quad v_\infty = -U_\infty \cos \beta; \quad u_\infty = U_\infty \sin \beta, \quad (17.48)$$

где β — угол между U_∞ и осью y .

Рассмотрим падающие молекулы, обладающие скоростью, величина которой лежит в интервале значений от ξ до $\xi + d\xi$. Молекулы, обладающие такой скоростью, обязательно попадут на элемент dS по истечении единицы времени, если они будут лежать внутри параллелепипеда, основанием которого служит dS , а длина боковой поверхности равна ξ (рис. 17.4, б). Объем этого параллелепипеда составляет величину, равную $\xi_x dS$. Число молекул, обладающих указанным значением скорости и находящихся в этом параллелепипеде, можно вычислить, зная функцию распределения скоростей. Число этих молекул составит величину

$$\xi_x dS F_\infty d\xi_x d\xi_y d\xi_z. \quad (17.49)$$

На единицу поверхности элемента dS будет приходиться количество молекул, равное

$$\xi_x F_\infty d\xi_x d\xi_y d\xi_z. \quad (17.50)$$

Если проинтегрируем выражение (17.50) по всем возможным значениям скорости молекул, то мы получим общее количество молекул, падающих на единицу поверхности элемента dS :

$$N_i = n_\infty \sqrt{\frac{RT_\infty}{2\pi}} [e^{-K^2} + \sqrt{\pi} \cdot K (1 + \operatorname{erf} K)], \quad (17.51)$$

где

$$K = \sqrt{\frac{k}{2}} M \sin \beta; \quad M = \frac{U_\infty}{\sqrt{kRT_\infty}}; \quad \operatorname{erf} K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^K e^{-t^2} dt.$$

Подставляя найденное значение N_i в уравнения (17.45) и (17.46), получим e_i' и e_w' .

Перейдем к вычислениям e_i' . Снова рассмотрим падающие молекулы, обладающие скоростью, значение которой лежит в интервале значений от ξ до $\xi + d\xi$. Число этих молекул, падающих на единицу поверхности в единицу времени, равно $\xi_x F_\infty d\xi_x d\xi_y d\xi_z$. Каждая из них обладает энергией, равной $\frac{1}{2} m \xi^2 = \frac{1}{2} m (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)$. Таким образом, выделенные молекулы приносят энергию, равную

$$\frac{1}{2} m (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) \xi_x F_\infty d\xi_x d\xi_y d\xi_z. \quad (17.52)$$

Если проинтегрируем выражение (17.52) по всем возможным значениям скоростей молекул, то получим суммарную энергию, приносимую всеми падающими частицами на единицу поверхности элемента в единицу времени, т. е.

$$e'_i = \frac{q_\infty}{\sqrt{2\pi}} (RT_\infty)^{3/2} \left[\left(\frac{K^2}{\sin^2 \beta} + 2 \right) e^{-K^2} + \sqrt{\pi} \left(\frac{K^2}{\sin^2 \beta} + \frac{5}{2} \right) K (1 + \operatorname{erf} K) \right]. \quad (17.53)$$

По аналогии вычисляется e'_w . Энергия поступательного движения, уносимая с единицы поверхности элемента dS отраженными молекулами, при полной аккомодации составляет величину

$$e'_w = 2mRT_w N_i. \quad (17.54)$$

Подставляя в выражение (17.43) результаты вычислений e'_w , e'_w , e_i , e_i , получим следующую формулу для q_w :

$$q_w = a_{\text{эп}} p_\infty \sqrt{\frac{RT_\infty}{2\pi}} \left\{ [e^{-K^2} + \sqrt{\pi} K (1 + \operatorname{erf} K)] \times \left[\frac{K^2}{\sin^2 \beta} + \frac{k}{k-1} - \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{T_w}{T_\infty} \right] - \frac{1}{2} e^{-K^2} \right\}, \quad (17.55)$$

где $p_\infty = q_\infty RT$ — давление в невозмущенном потоке. Отметим, что условие теплового равновесия продольно ($\beta=0$, $K=0$) обтекаемой поверхности (т. е. условие $q_w=0$) будет выполняться, как это следует из уравнения (17.55), лишь тогда, когда:

$$(T_w)_{q=0} = T_\infty \left(\frac{2k}{k+1} \frac{k-1}{2} M^2 + 1 \right). \quad (17.56)$$

Поскольку $\frac{2k}{k+1} > 1$, то очевидно, что в этом случае равновесная температура поверхности (или температура восстановления) при свободно-молекулярном обтекании оказывается выше, чем температура адиабатно-заторможенного потока $T_{0\infty}$.

Рассмотрим предельный случай $K \gg 1$. Этот случай реализуется при гиперзвуковом ($M \gg 1$) обтекании поверхности, которая расположена так, что $\sin \beta > 0$. В этом случае из уравнения (17.55) следует:

$$q_w = a_{\text{эп}} p_\infty u_\infty \sin \beta \frac{k+1}{2(k-1)} \left[\frac{k(k-1)}{k+1} M^2 - \frac{T_w}{T_\infty} \right] \quad (17.57)$$

Если при этом $\frac{T_w}{T_\infty} \ll \frac{k(k-1)}{k+1} M^2$, то формула (17.57) приводится к виду

$$q_w = a_{\text{эп}} \frac{q_\infty u_\infty^3}{2} \sin \beta. \quad (17.58)$$

Тепловое равновесие в этом случае наступит тогда, когда

$$T_w \approx T_\infty \frac{k-1}{2} M^2 \frac{2k}{k+1}. \quad (17.59)$$

Если учесть, что $\frac{k-1}{2} M^2 T_\infty$ при $M \gg 1$ приблизительно равняется температуре торможения $T_{0\infty}$, а $\frac{2k}{k+1} > 1$, то можно сделать вывод о том, что температура восстановления произвольно ориентированной площадки больше температуры $T_{0\infty}$.

То обстоятельство, что температура восстановления в свободно-молекулярном потоке превышает температуру адиабатно-торможенного потока, объясняется тем, что при свободно-молекулярном потоке вся энергия набегающего потока «достигает» стенки, при адиабатном же торможении часть энергии потока газа расходуется на работу преодоления сил давления.

Температуру восстановления площадки dS при произвольных условиях можно найти по формуле, которая вытекает из формулы (17.55), если положить $q_w = 0$:

$$T_e = T_\infty \frac{2(k-1)}{(k+1)} \left[\frac{k}{k-1} + \frac{K^2}{\sin^2 \beta} - \frac{1/2 e^{-K^2}}{e^{-K^2} + \sqrt{\pi} K (1 + \operatorname{erf} K)} \right]. \quad (17.60)$$

Использование T_e удобно при введении понятия коэффициента теплоотдачи

$$\alpha = q_w / (T_e - T_w). \quad (17.61)$$

Равновесную температуру (температуру восстановления) при свободно-молекулярном режиме можно выразить через температурный коэффициент восстановления, который вводится аналогично тому, как это делается в обычной газовой динамике:

$$r = \frac{T_e - T_\infty}{T_{0\infty} - T_\infty} = (T_e / T_\infty - 1) / \left(\frac{k-1}{2} M^2 \right). \quad (17.62)$$

Формула для вычисления коэффициента восстановления элемента поверхности с учетом уравнения (17.60) будет иметь вид

$$r = \frac{2k}{k+1} \left\{ 1 + \frac{1}{kM^2} \left[1 - \frac{e^{-K^2}}{e^{-K^2} + \sqrt{\pi} K (1 + \operatorname{erf} K)} \right] \right\}. \quad (17.63)$$

Полученные формулы (17.55), (17.60) и (17.63) позволяют рассчитать локальный тепловой поток q_w , локальную температуру восстановления T_e и локальный коэффициент восстановления r для любой точки выпуклого тела произвольной конфигурации.

Для того чтобы определить суммарный тепловой поток, поступающий в единицу времени через всю поверхность тела, необходимо проинтегрировать q_w по поверхности, т. е.

$$Q = \int_{(S)} q_w dS. \quad (17.64)$$

При вычислении интеграла (17:64) следует иметь в виду, что в общем случае температура поверхности T_w может быть переменной, т. е. $T_w = f(x_w, y_w, z_w)$. Конечный результат интегрирования будет зависеть от формы тела.

Для ряда выпуклых тел вычислялся интеграл (17.64) при условии, что температура поверхности постоянная, т. е. $T_w = \text{const}$

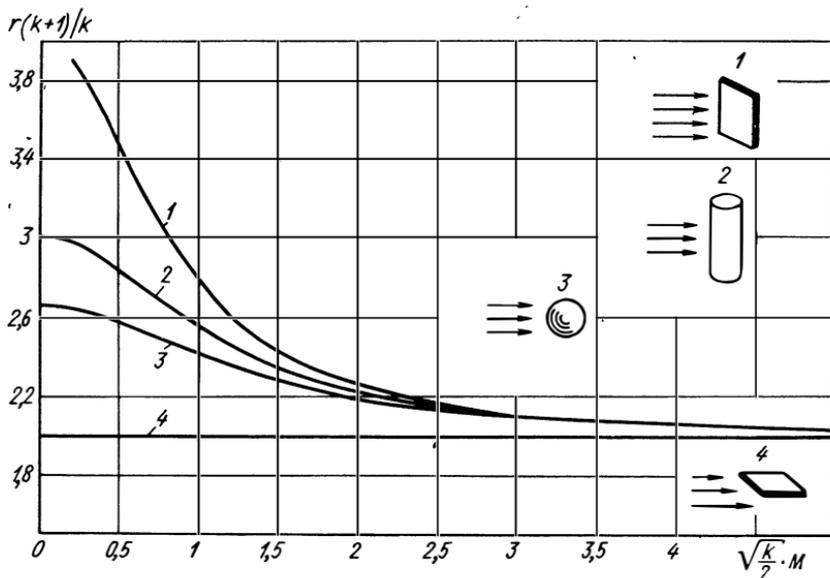


Рис. 17.5. Зависимости средних температурных коэффициентов восстановления различных тел при свободно-молекулярном режиме от числа Маха:

1—поперечно-обтекаемая пластинка; 2—поперечно-обтекаемый цилиндр; 3—обтекаемый шар; 4—продольно-обтекаемая пластина

[109]. На рис. 17.5 и 17.6 результаты этих вычислений для ряда тел представлены графически.

При расчете вакуумно-экранной изоляции необходимо уметь рассчитывать тепловые потоки, обусловленные переносом тепла молекулами, в условиях свободно-молекулярного режима. Формула для определения теплового потока через плоский слой при значениях термических коэффициентов аккомодации, равных единице, имеет вид [80]

$$q = \frac{\bar{c}p}{T} (T_{w1} - T_{w2}) \frac{1}{\left(\frac{T_{w1}}{T_{w2}}\right)^{1/4} + \left(\frac{T_{w2}}{T_{w1}}\right)^{1/4}}, \quad (17.65)$$

где $T = \sqrt{T_{w1} \cdot T_{w2}}$ — температура газа в слое;

$\bar{c} = \sqrt{\frac{8}{\pi} RT}$ — средняя тепловая скорость молекул;

T_{W1}, T_{W2} — температура поверхностей, между которыми заключен газ;
 $p = mnRT$ — давление;
 $R = \frac{k}{m}$ — газовая постоянная;
 k — постоянная Больцмана;
 m — масса молекулы.

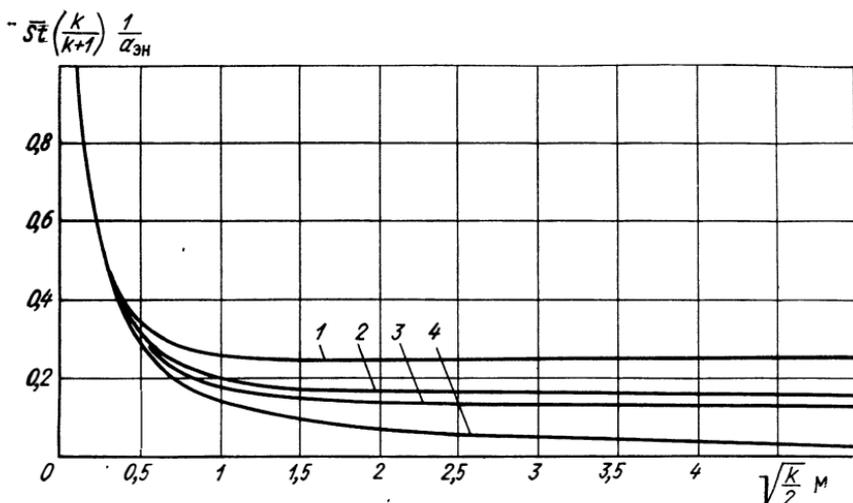


Рис. 17.6. Зависимости средних чисел Стантона различных тел от числа Маха при свободно-молекулярном режиме (обозначения по рис. 17.5)

При небольших перепадах температур ($T_{W1} \rightarrow T_{W2}$) и при произвольных значениях коэффициента аккомодации формула для определения теплового потока имеет вид

$$q = \frac{1}{2} \frac{a_3}{2 - a_3} \frac{\bar{c}p}{T} (T_{W1} - T_{W2}). \quad (17.66)$$

17.4. ТЕПЛОБМЕН В ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОБЛАСТИ

Для того чтобы получить строгое теоретическое решение той или иной задачи о теплообмене при промежуточном режиме, необходимо найти решение уравнения Больцмана (или системы уравнений Больцмана, если газ состоит из молекул различной природы), отвечающее заданным условиям однозначности.

Одним из возможных путей при этом может быть численное решение уравнения Больцмана при помощи электронно-вычислительных машин. Однако этот путь является далеко не простым ввиду ограниченных возможностей современных вычислительных машин и чрезвычайной сложности нелинейного интегро-дифференциального уравнения, каковым является уравнение Больцмана. Тем не менее в некоторых случаях при разумных упрощениях такой путь может оказаться эффективным. Пока численные методы нашли широкое применение, главным образом, лишь для решения задач теплообмена и обте-

кания при условиях, близких к свободно-молекулярным (для почти-свободно-молекулярной области), где необходимо учитывать лишь первые столкновения отраженных и падающих молекул.

Другой путь — построение аналитического решения уравнения Больцмана. Однако сейчас достаточно строгие и общие (т. е. пригодные при любых степенях разрежения) методы аналитического решения уравнения Больцмана пока еще не найдены. Хорошо разработанный, ставший классическим, метод Чепмена — Энского применим лишь до тех пор, пока степень разреженности достаточно мала ($Kn \ll 1$). Метод Чепмена — Энского в конечном итоге приводит в первом приближении к уравнениям Навье — Стокса, т. е. к уравнениям обычной газовой динамики. Этот метод сам по себе не позволяет строго сформулировать граничные условия на поверхности обтекаемого тела для макроскопических параметров, входящих в уравнения обычной газовой динамики. Для получения граничных условий использовались приближенные приемы. Для малых чисел Кнудсена получаются известные условия полного прилипания

Необходимо отметить, что метод Чепмена — Энского приводит в первом приближении к уравнениям Навье — Стокса — Фурье. Этим методом возможно построить приближения и более высокого порядка. Так, например, во втором приближении этот метод приводит к так называемым уравнениям Барнетта; в третьем приближении метод дает супербарнеттовские уравнения и т. д. Однако уравнения более высоких приближений, получаемые методом Чепмена — Энского, не имеют более широких пределов применимости по сравнению с уравнениями Навье — Стокса. Напротив, они годны обычно лишь тогда, когда вполне хороши еще уравнения Навье — Стокса. Метод Чепмена — Энского непригоден для изучения теплоотдачи при очень больших степенях разрежения.

Одним из путей является построение приближенного решения уравнения Больцмана так называемым моментным методом. Этот метод базируется на использовании некоторой аппроксимации функции распределения, подбираемой в соответствии с физическими особенностями задачи. Такой путь может быть оправданным потому, что в конечном счете нас интересует не столько сама функция распределения, сколько некоторые определенные макроскопические величины, выражающиеся через интегралы от функции распределения F следующего типа:

$$M_{\alpha\beta\gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int (\xi_x - u)^\alpha (\xi_y - v)^\beta (\xi_z - w)^\gamma F d\xi_x d\xi_y d\xi_z, \quad (17.67)$$

где α, β, γ — целые числа.

Например, к таким величинам относятся напряжение трения, температура, тепловой поток. Величины $M_{\alpha\beta\gamma}$ называются моментами функции распределения. Они обладают пониженной чувствительностью к виду функции распределения (поскольку это интегралы) и, следовательно, допускают известную свободу в выборе аппроксимации функции распределения. В качестве исходного уравнения в моментном методе используется вместо уравнения Больцмана уравнение переноса, вытекающее из уравнения Больцмана.

Отметим основные этапы моментных методов. Первый этап — выбор аппроксимации функции распределения. В выбранной аппроксимации будет присутствовать набор некоторых макроскопических параметров (например, температура, плотность и т. д.), которые в общем случае зависят от координат и времени. Конкретный вид зависимости этих макропараметров от x, y, z, t неизвестен и подлежит отысканию. Второй этап — получение системы дифференциальных уравнений, описывающих распределение упомянутых макропараметров в пространстве и времени. Уравнения получают из уравнения переноса. Наконец, третий этап — отыскание решения полученных дифференциальных уравнений для макропараметров. Подробно с этими методами можно ознакомиться на примере конкретных задач, решение которых детально излагается в работе [145]. При использовании моментных методов следует, однако, помнить, что эти методы являются весьма приближенными.

В целом возможности чисто теоретических путей решения задач теплообмена в промежуточной области крайне ограничены, поэтому для получения ответов на конкретные вопросы остается использовать эксперимент. В результате большего числа экспериментальных исследований* установлены эмпирические зависимости для расчета теплообмена различных тел в разреженном газе в промежуточной области, приведенные на графиках рис. 17.7—17.11.

Для определения в промежуточной области средних температурных коэффициентов восстановления \bar{r} тонкой пластины бесконечного размаха и острого конуса ($\theta \leq 30^\circ$), обтекаемых газом при нулевом угле атаки, можно воспользоваться следующими эмпирическими формулами (получены для условий $M=2 \div 10$, $k=1,4$):

для пластины

$$r = \frac{r_m - 0,37r_c Z^{1/2}}{1 + 0,37Z^{1/2}}, \quad (17.68)$$

где $r_m = \frac{2k}{k+1}$ — при свободно-молекулярном обтекании;

$r_c = \sqrt{Pr}$ — при континуумном обтекании;

$$Z = \frac{Re}{M^2 C}; \quad k = \frac{c_p}{c_v};$$

$$C = \frac{\mu(T_0)}{\mu(T_\infty)} \frac{T_\infty}{T_0}; \quad Re = \frac{u_\infty \rho_\infty l}{\mu_\infty};$$

l — длина пластины по потоку;

для конуса

$$r = \frac{r_m + r_c A Z^{1/2}}{1 + A Z^{1/2}}, \quad (17.69)$$

где $A = \frac{1 + 10\theta}{6,3 - \theta};$

θ — полуугол при вершине конуса в радианах.

Расчет средних коэффициентов теплоотдачи продольно-обтекаемой пластины в промежуточной области можно выполнить по эмпирической формуле (при условиях $M=2 \div 10$; $t_w = T_w/T_0 = 0,5 \div 1$; $\frac{M \sqrt{C}}{Re} = 0,1 \div 1$; $M^3 \sqrt{C}/\sqrt{Re} > 1$):

* С особенностями методики эксперимента и результатами исследований некоторых задач можно ознакомиться, например, по работам [77, 78].

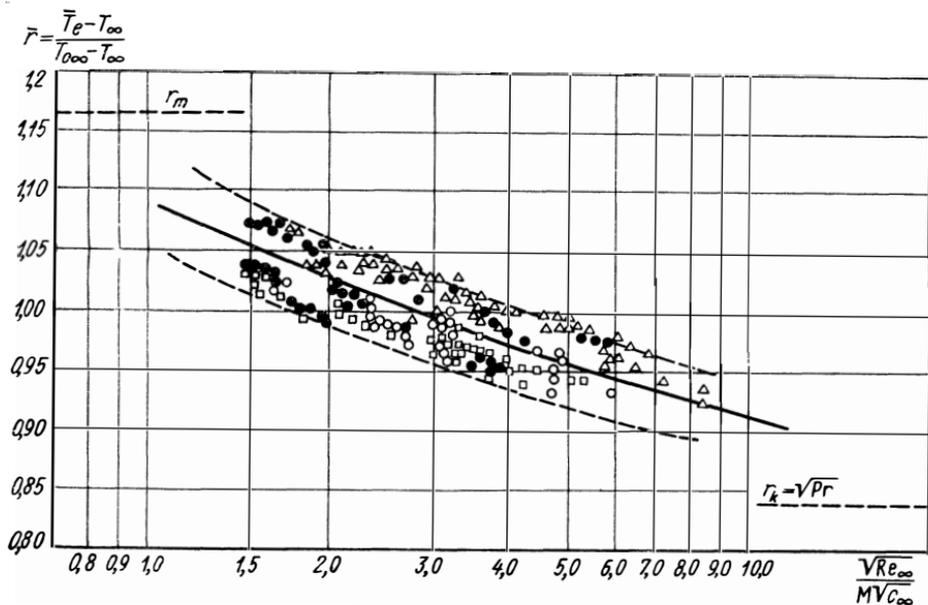


Рис. 17.7. Экспериментальная зависимость среднего температурного коэффициента восстановления продольно-обтекаемой тонкой пластины \bar{r} от параметра разреженности

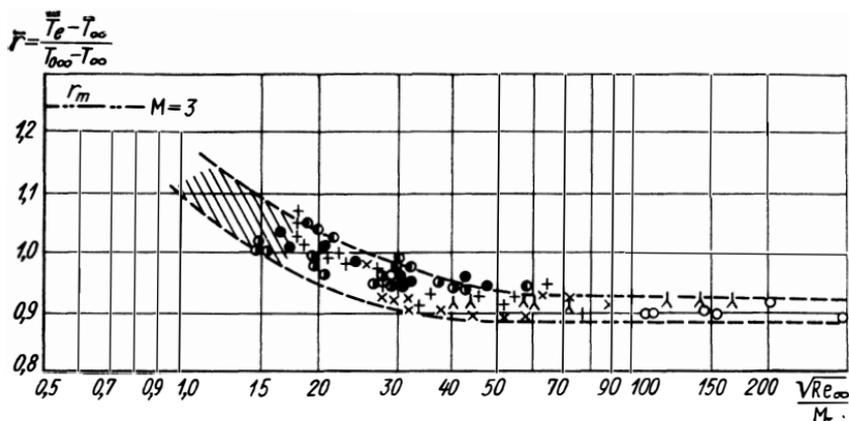


Рис. 17.8. Экспериментальная зависимость среднего температурного коэффициента восстановления шара от параметра разреженности

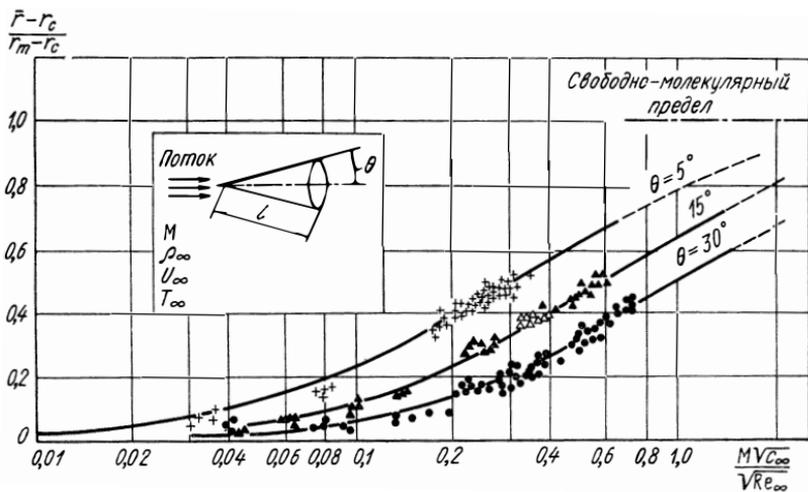


Рис. 17.9. Зависимость среднего температурного коэффициента восстановления конуса при нулевом угле атаки от параметра разреженности

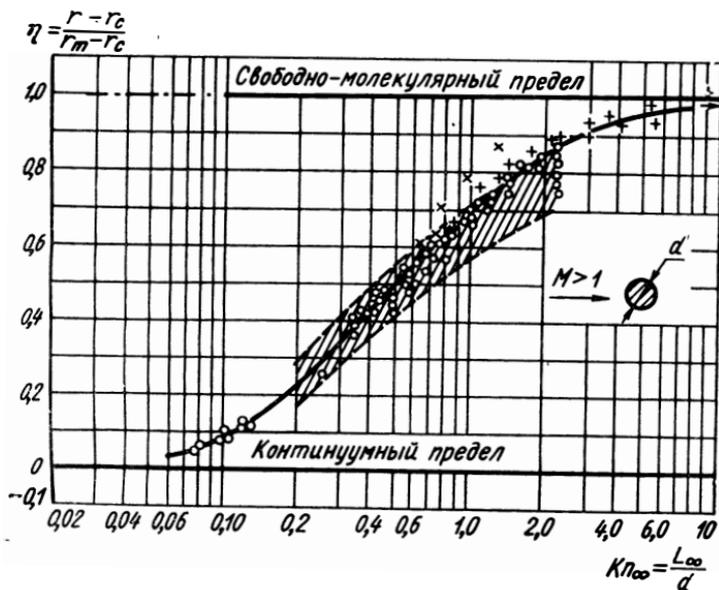


Рис. 17.10. Зависимость среднего температурного коэффициента восстановления поперечно-обтекаемого цилиндра от параметра разреженности

$$St = 4St_0 K^{3/4} [(1 + EK)^{1/4} - EK^{1/4}], \quad (17.70)$$

где

$$E = \frac{12}{1 + \sqrt{t_w}}; \quad K = \frac{M^2 C}{Re}; \quad St = \frac{\alpha}{\rho u c_p}$$

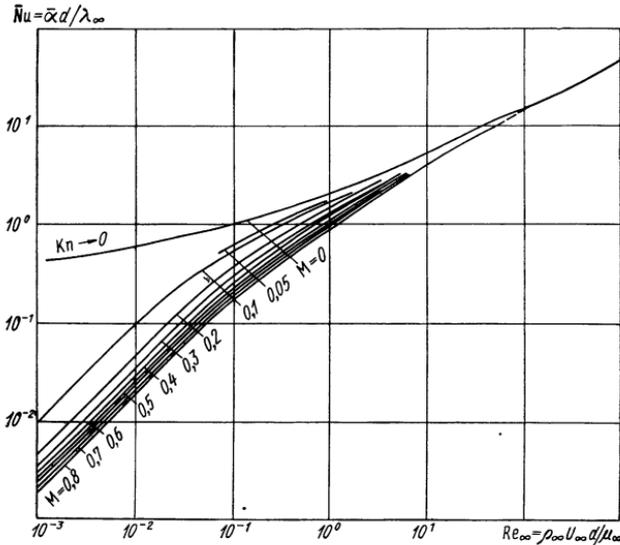


Рис. 17.11. Теплоотдача поперечно-обтекаемого цилиндра в промежуточной области динамики газа

St_0 — затабулированная величина в теории сильного взаимодействия пограничного слоя с невязким потоком.

Рекомендуемая литература: [29, 77, 78, 79, 109, 145].

ТЕПЛОЗАЩИТНЫЕ ПОКРЫТИЯ

Одним из распространенных методов предохранения конструкции от теплового и химического воздействий внешнего потока с высокой температурой является нанесение на поверхность теплозащитных покрытий.

В настоящей главе будет рассмотрен особый класс таких покрытий — так называемые уносимые покрытия. Смысл их применения заключается в том, что под воздействием внешнего потока, материал, из которого сделано покрытие, может частично разрушаться и уноситься потоком. На унос материала затрачивается большое количество поступающего к поверхности тепла. Кроме того, в ряде случаев при уносе массы в силу взаимодействия унесенного материала с пограничным слоем существенно снижаются тепловые потоки.

Толщина теплозащиты должна быть выбрана таким образом, чтобы за время полета аппарата или работы двигателя температура защищаемой конструкции не превысила допустимой. Поэтому масса покрытия определяется количеством унесенного материала и количеством материала, которое должно оставаться на поверхности к концу работы и обеспечивать теплоизоляцию и необходимый перепад температур между поверхностью покрытия и поверхностью конструкции.

18.1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УНОСИМЫХ ПОКРЫТИЙ

Основной характеристикой уносимого покрытия является его способность отбирать тепло при разрушении.

Изменение энтальпии

$$\Delta I = \int_{T_0}^{T_w} c dT + r = \Delta i + r \quad (18.1)$$

складывается из тепла, затрачиваемого на повышение теплосодержания материала покрытия, и тепла фазовых переходов и химических реакций, протекающих в материале при его нагреве. Количество G вещества, унесенного в единицу времени с единицы площади при подводе тепла к поверхности покрытия и выделение тепла в процессе химического взаимодействия покрытия

материала с газом, поступающим из внешнего потока, определяется из условия теплового баланса:

$$G\Delta I = q_W + GH_x - q'_{\text{вн}} - q_r, \quad (18.2)$$

откуда

$$G = \frac{q_W - q_{\text{вн}} - q_r}{\Delta I - H_x}. \quad (18.3)$$

Здесь

q_W — удельный тепловой поток;
 H_x — тепловой эффект реакций на поверхности покрытия, отнесенный к единице массы унесенного материала;

$q'_{\text{вн}} = q_{\text{вн}} - (q_{\text{вн}})_{\text{ст}}$ — дополнительный тепловой поток, отводимый внутрь покрытия теплопроводностью при нестационарном прогреве;

q_r — поток, излучаемый поверхностью покрытия.

В процессе уноса материала происходит сложное взаимодействие поверхности покрытия и газа в пограничном слое. Из-за подачи массы при сублимации уменьшается конвективный тепловой поток в стенку (q_W), при химических реакциях между продуктами разрушения и внешним потоком может дополнительно выделяться или поглощаться тепло и уноситься материал.

Поэтому ΔI недостаточно характеризует эффективность теплозащитного материала в каждом отдельном случае. Более общей характеристикой материала является так называемая эффективная энтальпия:

$$I_{\text{эф}} = \frac{q_{W0}}{G}, \quad (18.4)$$

где q_{W0} — тепловой поток к непроницаемой и не реагирующей поверхности при температуре, равной температуре разрушения;

G — секундный унос массы в реальных условиях.

Легко видеть из уравнений (18.3) и (18.4), что

$$\frac{I_{\text{эф}}}{\Delta I} = \frac{q_{W0}}{q_W - q'_{\text{вн}} - q_r} \frac{\Delta I - H_x}{\Delta I}. \quad (18.5)$$

Таким образом, $I_{\text{эф}}$ является более общей характеристикой материала, учитывающей его теплофизические свойства и влияние всех процессов взаимодействия между поверхностью и внешним потоком.

Унос массы определяется по формуле

$$G = \frac{q_{W0}}{I_{\text{эф}}} = \frac{(a/c_p)_0 (I_e - I_W)}{I_{\text{эф}}}. \quad (18.6)$$

Значение $I_{\text{эф}}/\Delta I$ должно в каждом случае определяться из совместного решения уравнения пограничного слоя и уравнений, описывающих механизм уноса массы. Во многих случаях, когда

механизм уноса массы материала недостаточно хорошо известен, $I_{эф}$ определяется экспериментально по измерению линейного уноса образца материала в струе газа, моделирующей внешний поток.

Если все условия моделирования тепло- и массообмена в пограничном слое выполнены достаточно точно, то унос массы

$$G = \rho \frac{dx}{dt} \quad (18.7)$$

будет зависеть от теплового потока внутрь материала ($q_{вн}$), являющегося функцией времени. Следовательно, экспериментальные значения уноса материала G и эффективной энтальпии $I_{эф}$ будут зависеть от условий эксперимента и не будут пригодны для сравнительной оценки материалов.

Поэтому эффективную энтальпию $I_{эф}$ целесообразно определять при таком режиме, когда $q_{вн}$ постоянно. Такой режим называется квазистационарным режимом уноса. Он возникает по истечении некоторого промежутка времени при постоянных условиях нагрева и характеризуется тем, что линейная скорость уноса $v = dx/d\tau$ становится постоянной и количество тепла, отводимого внутрь,

$$q'_{вн} = 0, \text{ а } (q_{вн})_{ст} = G \int_{T_0}^{T_w} c dT = G \Delta i, \quad (18.8)$$

в точности равно количеству тепла, необходимому для подогрева унесенного материала от начальной температуры до температуры разрушения. При этом скорости перемещения границы поверхности и скорости распространения температурной волны становятся равными и распределение температуры в координатах, связанных с поверхностью, не зависит от времени [см. также (6.47)]

$$T - T_0 = (T_w - T_0) e^{-v \int_0^y \frac{\rho c}{\lambda} dy}. \quad (18.9)$$

Если физические свойства материала — плотность ρ , теплоемкость c и теплопроводность λ — не зависят от T и y , то

$$T - T_0 = (T_w - T_0) e^{-y/\delta_T},$$

где $\delta_T = \frac{\lambda}{\rho c v} = \frac{\bar{a}}{v}$ называется глубиной прогрева. Условие баланса тепла будет иметь вид (18.2)

$$G_{ст} \Delta I = q_w + G_{ст} H_x - q_r, \quad (18.10)$$

откуда

$$G_{ст} = \frac{q_w - q_r}{\Delta I - H_x}. \quad (18.11)$$

Унос массы $G_{ст}$, рассчитанный по значению эффективной энтальпии $I_{эф}$, определенному в квазистационарных условиях, будет отличаться от уноса массы в реальных условиях:

$$G = G_{ст} + \frac{G\Delta i - q_{вн}}{\Delta I - H_x} \sqrt{G_{ст}} + \frac{q'_{вн}}{\Delta I - H_x}. \quad (18.12)$$

При достаточно большой скорости уноса квазистационарный режим уноса наступает быстро и

$$q_{вн} \rightarrow G\Delta i; \quad q'_{вн} \rightarrow 0 \quad (18.13)$$

$$G \rightarrow G_{ст}. \quad (18.14)$$

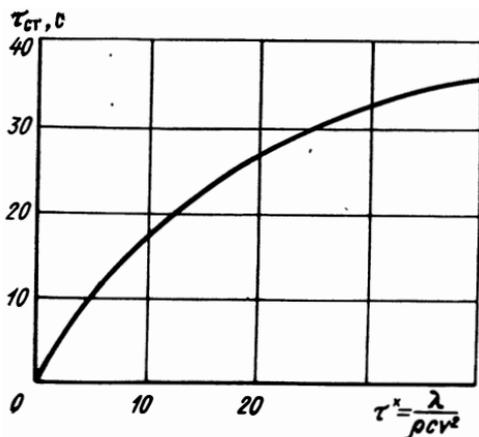


Рис. 18.1. Время установления квазистационарного режима для однородного кварцевого стекла

Характерное время установления квазистационарного режима τ^* определяется некоторым характерным числом Фурье

$$Fo = \frac{\bar{a}\tau^*}{\delta_T^2} = \frac{v^2\tau^*}{\bar{a}} \quad \left(\text{так как } \frac{\delta_T}{v} = \frac{\bar{a}}{v^2} \right),$$

где \bar{a} — средний коэффициент температуропроводности материала.

В качестве примера на рис. 18.1 представлено время установления квазистационарного режима уноса для кварцевого стекла [110].

18.2. ТРЕБОВАНИЯ К ТЕПЛОЗАЩИТНЫМ ПОКРЫТИЯМ

Для уменьшения потери материала и снижения массы теплозащиты летательного аппарата целесообразно увеличивать величину эффективной энтальпии ($I_{эф}$). Это может быть достигнуто выбором соответствующего материала. Однако при этом необходимо иметь в виду, что при уменьшении скорости уноса увеличивается глубина прогрева теплозащиты.

В условиях квазистационарного режима в теплозащитном материале устанавливается распределение температуры (см. 18.9)

$$T = T_0 + (T_W - T_0) \exp \int_0^y -\frac{q_{cv}}{\lambda} dy . \quad (18.15)$$

Принимая теплофизические свойства постоянными, получаем условную глубину прогрева материала до температуры T' :

$$\frac{T' - T_0}{T_W - T_0} = \frac{1}{e} \quad (18.16)$$

при
$$y = \delta_T = \frac{\lambda}{q_{cv}} = \frac{\bar{a}}{v} . \quad (18.17)$$

Если допустимая температура защищаемой поверхности равна T_d , то необходимая толщина теплозащиты (h) в конце нагрева равна

$$\frac{h}{\delta_T} = \ln \frac{T_W - T_0}{T_d - T_0} . \quad (18.18)$$

Линейная скорость уноса равна

$$v = \frac{q_{W0}}{Q I_{\text{эф}}} . \quad (18.19)$$

Отсюда

$$h = \frac{\bar{a} Q I_{\text{эф}}}{q_{W0}} \ln \frac{T_W - T_0}{T_d - T_0} . \quad (18.20)$$

Общая масса теплозащитного покрытия, уносимого с единицы площади и прогреваемого до температуры T_d за время работы τ , определяется выражением

$$G = \frac{q_{W0}}{I_{\text{эф}}} \tau + \frac{\bar{a} Q^2 I_{\text{эф}}}{q_{W0}} \ln \frac{T_W - T_0}{T_d - T_0} . \quad (18.21)$$

Отсюда видно, что при увеличении эффективной энтальпии, растет второй член уравнения (18.21), т. е. увеличивается глубина прогрева материала и в некоторых случаях может возрасти потребная масса материала, затрачиваемого на теплоизоляцию конструкции.

Следует иметь в виду, что выражение (18.21) справедливо, если унос теплозащитного материала может приближенно считаться квазистационарным, т. е. при достаточно большом значении числа Фурье $Fo = v^2 \tau / \bar{a}$ и для однослойного теплозащитного покрытия. Для уменьшения глубины прогрева могут применяться многослойные покрытия, выбираемые таким образом, чтобы

верхний слой обладал большим значением $I_{эф}$, а внутренние слои имели хорошие теплозащитные свойства.

Таким образом, для характеристики материала необходимо знать значения его эффективной энтальпии $I_{эф}$, коэффициента температуропроводности \bar{a} , плотности ρ и температуры поверхности T_w , при которой происходит разрушение и унос материала. Большие значения температуры поверхности T_w теплозащитных покрытий имеют преимущество в том, что с их увеличением растет тепловой поток q_r , излучаемый поверхностью. Поверхность охлаждается излучением, что ведет в соответствии с уравнениями (18.11) и (18.4) к увеличению эффективной энтальпии материала $I_{эф}$. Однако одновременно может увеличиться толщина покрытия h и общая масса теплозащиты может оказаться большой.

Другая группа требований к покрытиям связана с технологическими и конструктивными свойствами. Покрытие должно быть технологичным, легко наноситься на поверхность и обладать хорошей адгезией, т. е. прочно связываться с поверхностью. Эта связь не должна нарушаться при нагревании поверхности контакта. Внешняя поверхность теплозащитного материала должна выдерживать воздействие больших аэродинамических нагрузок, не скалываясь и не трескаясь, т. е. обладать высокими механическими свойствами. Если применяется двухслойное покрытие, то нижний теплозащитный материал (подслой) не должен разлагаться при нагреве, ибо при этом произойдет нарушение целостности верхнего покрытия и их сцепления.

Защищаемые поверхности могут покрываться керамическими материалами, графитом, стеклообразными материалами, пластмассами разных типов.

Керамические материалы обычно обладают большой термостойкостью, высокой температурой разрушения, малой теплопроводностью и большой величиной эффективной энтальпии. Их недостатком является то, что они требуют обжига при высоких температурах и, следовательно, их трудно наносить непосредственно на поверхность аппарата.

Пластмассы применяются с различными видами армирующих наполнителей. Эти материалы обладают высокой прочностью, малой теплопроводностью, большой теплоемкостью. Унос теплозащитных материалов данного класса происходит частично путем сублимации с поверхности, что вызывает большое поглощение тепла при разрушении. Пластмассы обладают хорошими технологическими свойствами.

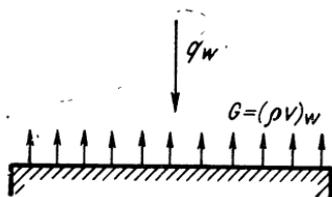
Стекловидные материалы при высоких температурах имеют свойства очень вязкой жидкости, что способствует поглощению тепла материалом до того, как жидкий слой будет снесен под действием аэродинамических сил. Они характеризуются большой теплотой испарения, малой теплопроводностью и хорошими термодинамическими характеристиками.

В настоящей главе дается приближенный метод определения эффективной энтальпии для некоторых наиболее важных случаев при упрощающих предположениях, позволяющих получить простые выражения для оценки влияния различных факторов на скорость уноса. В частности, рассматриваются три типа покрытий: сублимирующих полностью или частично, уносимых в силу горения с образованием газообразных продуктов и плавящихся стеклообразных. На практике может оказаться, что все перечисленные физические явления присутствуют одновременно и сопровождаются механическим уносом материала. Возможно также более сложное взаимодействие с пограничным слоем. Такие задачи более подробно рассмотрены в работах [56, 94, 103, 110, 160, 161].

18.3. СУБЛИМИРУЮЩИЕСЯ ТЕПЛОЗАЩИТНЫЕ ПОКРЫТИЯ

Если в состав покрытия входит материал, способный возгораться, то для определения эффективной энтальпии покрытия необходимо знать долю в нем сублимирующегося материала.

Рис. 18.2. Схема теплообмена при полностью сублимирующемся покрытии



Рассмотрим покрытие, изготовленное из однородного материала (рис. 18.2), который полностью возгорается и не вступает в химические реакции с внешним потоком.

Эффективная энтальпия теплозащитного покрытия рассчитывается по формуле

$$I_{\text{эф}} = \frac{q_{w0}}{G}.$$

С другой стороны, унос материала в квазистационарных условиях можно рассчитать, если известны тепловой поток в стенку и истинная физическая энтальпия материала [см. (18.11)]:

$$G = \frac{q_w - q_r}{\Delta I}. \quad (18.22)$$

Здесь принято $H_x = 0$;

q_w — истинный тепловой поток к поверхности с учетом вдува газов разрушаемого материала;

q_r — радиационный тепловой поток с поверхности тела;

ΔI — истинное физическое изменение энтальпии материала.

Из теории пористого охлаждения (гл. XIII) известно, что с до-

статочной точностью при не очень большой интенсивности вдува можно записать

$$\frac{q_w}{q_{w0}} = 1 - B\bar{G}, \quad (18.23)$$

где $\bar{G} = G / \left(\frac{\alpha}{c_p} \right)_0 = \frac{I_e - I_w}{I_{\text{эф}}}$ — безразмерный унос материала;
 $\left(\frac{\alpha}{c_p} \right)_0 = \left(\frac{q_{w0}}{I_e - I_w} \right)$ — обобщенный коэффициент теплоотдачи на непроницаемой поверхности;
 B — некоторый постоянный коэффициент.

Выразим величину истинного теплового потока q_w к поверхности из уравнения (18.22) через истинную энтальпию материала:

$$q_w = G\Delta I + q_r.$$

Отсюда, с учетом уравнения (18.4)

$$\frac{q_w}{q_{w0}} = \frac{G\Delta I}{GI_{\text{эф}}} + \frac{q_r}{q_{w0}}. \quad (18.24)$$

Подставляя в уравнение (18.24) выражение для q_w/q_{w0} из уравнения (18.23), получаем

$$\frac{\Delta I}{I_{\text{эф}}} = 1 - B\bar{G} - \frac{q_r}{q_{w0}} = 1 - B \frac{I_e - I_w}{I_{\text{эф}}} - \frac{q_r}{q_{w0}}. \quad (18.25)$$

Отсюда значение эффективной энтальпии для полностью сублимирующегося материала

$$I_{\text{эф}} = \frac{\Delta I}{(1 - q_r/q_{w0})} \left(1 + B \frac{I_e - I_w}{\Delta I} \right), \quad (18.26)$$

где
$$I_e = I_1 + r \frac{u_1^2}{2}.$$

На рис. 18.3 представлена зависимость эффективной энтальпии тефлона от безразмерной энтальпии торможения набегающего потока $\bar{I}_e = (I_e - I_w)/\Delta I$. Видно, что у сублимирующихся материалов эффективная энтальпия возрастает с увеличением энтальпии торможения.

С учетом различия физических свойств вдуваемого газа и газа во внешнем потоке значение коэффициента B приближенно находится из выражений (13.87), (13.89):

$$B = (0,67 - 0,85) \left(\frac{m_1}{m_w} \right)^{1/3}, \quad (18.27)$$

где m_1 — молекулярная масса газа во внешнем потоке;

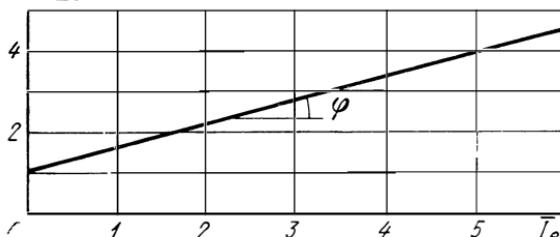
m_w — молекулярная масса вдуваемого газа.

Если молекулярная масса вещества, испаряющегося с поверхности покрытия, мала, то значение коэффициента B возрастает и зависимость эффективной энтальпии материала от энтальпии торможения (\bar{I}_e) становится еще более сильной.

$$\bar{I}_{\text{эф}} = \frac{I_{\text{эф}}}{\Delta I}$$

Рис. 18.3. Зависимость эффективной энтальпии тефлона $I_{\text{эф}}$ от энтальпии торможения набегающего потока I_e :

$$q_r/q_{w0} = 0,1; \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{1 - q_r/q_{w0}}$$



Массовая скорость уноса определяется уравнением

$$G = \frac{q_{w0}}{I_{\text{эф}}} = \frac{(\alpha/c_p)_0' (I_e - I_w)}{I_{\text{эф}}}. \quad (18.28)$$

Используя выражение для $I_{\text{эф}}$ (18.26), получаем

$$G = \frac{(\alpha/c_p)_0' (I_e - I_w) (1 - q_r/q_{w0})}{\Delta I \left(1 + B \frac{I_e - I_w}{\Delta I} \right)}, \quad (18.29)$$

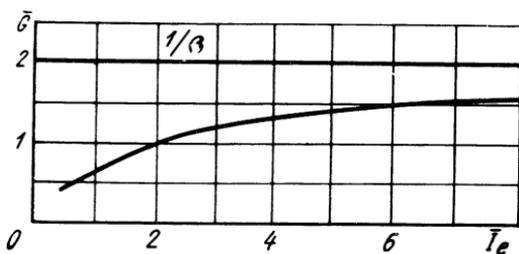


Рис. 18.4. Зависимость скорости уноса сублимирующегося материала \bar{G} от энтальпии торможения набегающего потока I_e :

$$B = 0,5; q_r/q_{w0} = 0$$

или в безразмерном виде

$$\bar{G} = \frac{\bar{I}_e (1 - q_r/q_{w0})}{1 + B \bar{I}_e}, \quad (18.30)$$

где

$$\bar{I}_e = \frac{I_e - I_w}{\Delta I}.$$

Из рис. 18.4, где представлен примерный вид зависимости скорости уноса сублимирующегося материала от энтальпии торможения набегающего потока воздуха, видно, что в некотором

диапазоне изменения безразмерной энтальпии торможения массовый унос является линейной функцией от \bar{I}_e ($0 \leq \bar{I}_e < 2,5$).

Анализ уравнений для $I_{эф}$ и G (18.26) и (18.29) показывает, что излучение с поверхности теплозащитного материала как бы увеличивает эффективную энтальпию материала и уменьшает унос теплозащитного покрытия.

Очевидно, что при $q_r = q_{w0}$ $I_{эф} \rightarrow \infty$, а $G \rightarrow 0$.

18.3.1. Частичное испарение

Если материал испаряется не целиком, а частично, то в рассмотрение вводят коэффициент газификации

$$\varepsilon = \frac{G_{исп}}{G}. \quad (18.31)$$

Рассмотрим случай, когда неиспарившаяся часть материала уносится в расплавленном виде. При этом формулы сохраняют свой вид, а истинная энтальпия материала определяется из

$$\Delta I = \int_{\bar{T}_0}^{\bar{T}_w} c dT + \varepsilon r' + (1 - \varepsilon) r'', \quad (18.32)$$

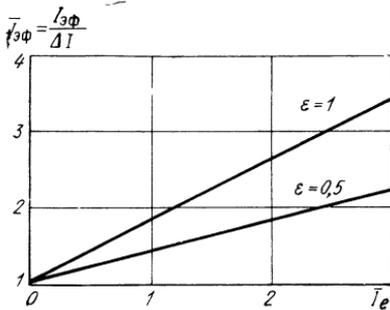


Рис. 185. Зависимость эффективной энтальпии для частично испаряющегося материала $\bar{I}_{эф}$ от энтальпии торможения набегающего потока \bar{I}_e :

$$q_r/q_w = 0,1$$

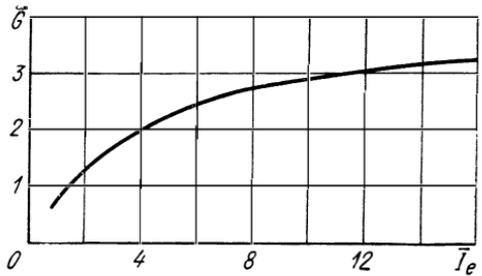


Рис. 186. Зависимость уноса частично испаряющегося материала \bar{G} от энтальпии торможения набегающего потока \bar{I}_e :

$$B=0,5; \varepsilon=0,5$$

где r' — теплота сублимации, а r'' — теплота плавления. Уравнение эффективной энтальпии материала имеет вид

$$I_{эф} = \frac{\Delta I}{1 - q_r/q_{w0}} \left(1 + \varepsilon B \frac{I_e - I_w}{\Delta I} \right). \quad (18.33)$$

При частичном испарении вдув газа в пограничный слой уменьшается ($\varepsilon < 1$). С уменьшением вдува газа (при уменьшении ε) уменьшается угол наклона кривых $\bar{I}_{эф} = f(\bar{I}_e)$ (рис. 185).

Массовая скорость уноса равна

$$G = \frac{q_{w0}}{I_{эф}} = \frac{(\alpha/c_p)_0 (I_e - I_w)}{I_{эф}}. \quad (18.34)$$

С учетом уравнения (18.33) получаем следующее выражение для безразмерной массовой скорости уноса:

$$\bar{G} = \frac{\bar{I}_e \left(1 - \frac{q_r}{q_{w0}}\right)}{1 + \varepsilon B \bar{I}_e}. \quad (18.35)$$

На рис. 18.6 представлен примерный вид зависимости уноса частично испаряющегося материала \bar{G} от энтальпии торможения набегающего потока воздуха \bar{I}_e .

18.4. ВЛИЯНИЕ ГОРЕНИЯ НА УНОС ПОКРЫТИЯ

Если покрытие состоит из вещества, способного вступать в химические реакции с газом набегающего потока, то можно рассмотреть два случая. Если суммарный подвод тепла к поверхности недостаточно велик, то температура поверхности T_w не достигает температуры сублимации и количество унесенного теплозащитного материала будет целиком определяться скоростью диффузии окислителя из внешнего потока.

Во втором случае унос будет происходить при плавлении или сублимации материала при температуре, равной температуре фазового перехода. Однако в этом случае необходимо учитывать дополнительное выделение тепла гетерогенных реакций на поверхности.

Рассмотрим первый случай в предположении, что продукты реакции находятся в газовой фазе. Массовая скорость уноса определяется из условия баланса массы с учетом стехиометрического соотношения

$$G = \frac{g_{ок}}{L}, \quad (18.36)$$

где $g_{ок}$ — массовый диффузионный поток окислителя;

L — количество окислителя, вступающего в химическую реакцию с 1 кг материала покрытия.

Используя аналогию между тепло- и массообменом (см. гл. XIII) и принимая, что концентрация окислителя у поверхности равна нулю, получаем приближенное выражение для диффузионного потока

$$g_{ок} = \left(\frac{\alpha}{c_p}\right) C_{1ок} = \frac{q_w}{I_e - I_w} C_{1ок}, \quad (18.37)$$

где $C_{1ок}$ — концентрация окислителя вне пограничного слоя.

Если тело обдувается воздухом, то C_{10K} равно концентрации кислорода во внешнем потоке, т. е.

$$C_{10K} = 0,23.$$

В этом случае массовая скорость уноса теплозащитного материала определяется выражением

$$G = \frac{0,23}{L} \frac{q_W}{(I_e - I_W)}. \quad (18.38)$$

Учитывая, что при наличии вдува обобщенный коэффициент теплоотдачи равен

$$\frac{\alpha}{c_p} = \frac{q_W}{I_e - I_W} = \left(\frac{\alpha}{c_p} \right)_0 (1 - B\bar{G}),$$

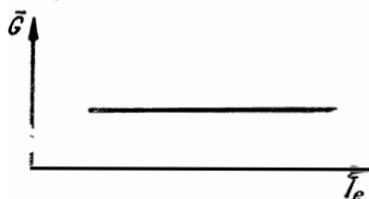


Рис. 18.7. Зависимость количества материала \bar{G} , уносимого из-за химических реакций, от энтальпии торможения набегающего потока I_e

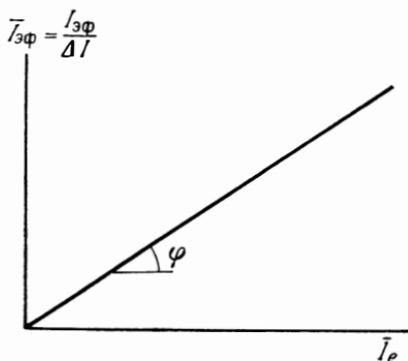


Рис. 18.8. Зависимость эффективной энтальпии $\bar{I}_{эф}$ материала, уносимого из-за химических реакций, от энтальпии торможения набегающего потока I_e :

$$\operatorname{tg} \varphi = L/0,23 + B$$

получаем следующее уравнение для безразмерной скорости уноса материала:

$$\bar{G} = \frac{0,23}{L + 0,23B}. \quad (18.39)$$

Таким образом, если теплозащитный материал уносится в силу химических реакций, то скорость уноса не зависит от энтальпии торможения внешнего потока (рис. 18.7).

Соответственно эффективная энтальпия теплозащитного покрытия данного класса

$$\bar{I}_{эф} = \frac{I_{эф}}{\Delta I} = \frac{q_{W0}}{G\Delta I} = \frac{I_e - I_W}{\bar{G}\Delta I} = \frac{\bar{I}_e}{\bar{G}} \quad (18.40)$$

линейно возрастает при увеличении энтальпии торможения внешнего потока (рис. 18.8).

Уравнение баланса тепла на стенке определяет температуру поверхности:

$$q_w + q_x - q_r = G\Delta I, \quad (18.41)$$

где

$$\Delta I = \int_{T_0}^{T_w} c dT + r; \quad q_x = GH_x;$$

H_x — теплота химической реакции, отнесенная к единице массы покрытия.

Температура поверхности будет возрастать при увеличении энтальпии торможения внешнего потока. С увеличением температуры поверхности T_w растет парциальное давление испаряющегося компонента покрытия.

Если тепловые потоки достаточно велики и поверхность разогревается до температуры сублимации, то механизм уноса материала становится иным. В этом случае количество унесенного материала определяется из теплового баланса на поверхности.

Если диффузия окислителя настолько велика, что соблюдается условие $g_{\text{ок}} \geq GL$, то фронт горения будет совпадать с поверхностью тела, если $g_{\text{ок}} < LG$, то фронт горения может сместиться внутрь пограничного слоя.

Приближенный расчет теплообмена для этого случая можно провести исходя из условия, что профиль полной энтальпии слабо изменяется при наличии химических реакций, и тогда тепловой поток определяется из выражения (14.76)

$$q_w = \frac{\alpha}{c_p} (I_e - I_w) + GH_x$$

независимо от положения фронта пламени. При этом могут быть использованы формулы, полученные для расчета эффективной энтальпии сублимирующихся покрытий (18.26) при подстановке в них, вместо величины ΔI , разности $\Delta I - H_x$:

$$\bar{T}_{\text{эф}} = \frac{1}{1 - q_r/q_{w0}} \left(1 - \frac{H_x}{\Delta I} + B\bar{T}_e \right). \quad (18.42)$$

Тогда выражения для уноса материала получим из формулы (18.29):

$$G = \frac{(\alpha/c_p)_0 (I_e - I_w) (1 - q_r/q_{w0})}{(\Delta I - H_x) \left(1 + B \frac{I_e - I_w}{\Delta I - H_x} \right)} \quad (18.43)$$

или

$$\bar{G} = \frac{\bar{T}_e (1 - q_r/q_{w0})}{1 - H_x/\Delta I + B\bar{T}_e}. \quad (18.44)$$

Область применимости этих формул ограничена кинетикой испарения и кинетикой протекания химических реакций. При больших значениях I_e обычно $H_x/\Delta I \ll (I_e - I_w)/\Delta I$. Примерный вид зависимости $\bar{I}_{эф}$ с учетом горения представлен на рис. 18.9.

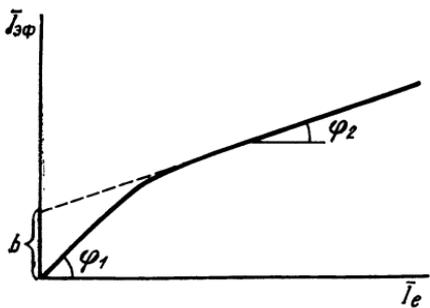


Рис. 18.9 Зависимость эффективной энтальпии $\bar{I}_{эф}$ теплозащитного материала от энтальпии торможения набегающего потока \bar{I}_e с учетом горения:

$$b = \frac{1 - H_x/\Delta I}{1 - q_r/q_w W_0}; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \\ = L/0,23 + B; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \\ = B/(1 - q_r/q_w W_0)$$

Приведенный выше приближенный анализ позволяет выявить лишь качественную картину явлений при уносе сублимирующихся покрытий с горением. Дополнительные сведения по этому вопросу можно получить из работ [56, 94, 160, 161].

18.5. ПЛАВЯЩИЕСЯ СТЕКЛОВИДНЫЕ ПОКРЫТИЯ

Под воздействием теплового потока и сил трения на поверхности покрытия образуется движущаяся пленка расплава. При своем движении пленка расплава может перегреваться, и температура поверхности может отличаться от температуры плавления. Стекловидные материалы не имеют фиксированной температуры плавления.

Если тепловой поток не превышает некоторого критического значения, то на поверхности раздела жидкость — газ нет заметного испарения (пленка сносится, не успевая прогреться до температуры испарения). Скорость жидкой пленки из-за большой вязкости мала относительно скорости потока и, следовательно, пленка не оказывает влияние на характер движения газа в пограничном слое. Поэтому газовый пограничный слой можно рассчитывать независимо от жидкого пограничного слоя. При расчетах принимается также, что жидкая пленка тонкая.

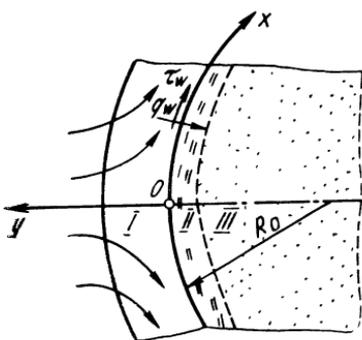


Рис. 18.10. Физическая схема течения и система координат:

I — газообразный пограничный слой; II — жидкая пленка, III — твердое тело

Рассмотрим методику расчета скорости уноса на примере течения в окрестности передней критической

точки осесимметричного затупленного тела (рис. 18.10). Будем считать, что решение для газового пограничного слоя получено и, следовательно, заданы значения обобщенного коэффициента теплоотдачи и коэффициента трения. Поскольку скорость движения пленки мала, то эти коэффициенты принимаются такими же, как и на неподвижной поверхности.

Граничные условия в системе координат, связанной с поверхностью, при $y=0$ на поверхности раздела имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tau_w(x) &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w ; \\ \frac{\alpha}{c_p} (I_{01} - I_w) &= \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w ; \end{aligned} \right\} \quad (18.45)$$

$v=0$ (при наличии испарения $v=v_{исп}$). При $y \rightarrow -\infty$ $T \rightarrow T_0$, $u \rightarrow 0$, $v = v_w$, система координат перемещается вдоль оси с неизвестной заранее скоростью уноса v_w . Для выбранной системы координат стационарное течение жидкой пленки в окрестности критической точки описывается следующей системой уравнений пограничного слоя несжимаемой жидкости.

1. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x} (uR) + \frac{\partial}{\partial y} (vr) = 0. \quad (18.46)$$

где R — расстояние от оси вращения тела.

2. Уравнение количества движения

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (18.47)$$

3. Уравнение энергии

$$\varrho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \varrho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (18.48)$$

Для окрестности передней критической точки, предполагая, что теплофизические свойства пленки (ϱ , c , λ) постоянны, можно найти приближенные аналитические решения приведенных выше дифференциальных уравнений.

В уравнении (18.47) при медленном движении пленки можно пренебречь силами инерции и тогда оно принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{dp}{dx}. \quad (18.49)$$

Интегрируя уравнение (18.49) с использованием граничных условий (18.45), получаем закон распределения для продольной скорости в жидкой пленке:

$$u = \frac{dp}{dx} \int_{-\infty}^y \frac{y}{\mu} dy + \tau_w \int_{-\infty}^y \frac{dy}{\mu}. \quad (18.50)$$

Здесь касательное напряжение τ_w и градиент давления dp/dx

заданы. Для вычисления интегралов необходимо знать закон распределения вязкости в зависимости от y , что возможно при известном распределении температуры. Зная профиль скорости u в жидкой пленке, из уравнения неразрывности (18.46) определяем местную скорость уноса материала

$$v_w = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial(ur)}{\partial x} dy \quad (18.51)$$

при отсутствии испарения с поверхности. Следовательно, для расчета уноса необходимо определить профиль температуры в жидкой пленке $T=f(y)$. Для этого рассмотрим уравнение энергии (18.48). В окрестности критической точки $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$.

В этом случае уравнение (18.48) принимает такой вид при $\lambda = \text{const}$:

$$v \frac{dT}{dy} = a \frac{d^2 T}{dy^2}, \quad (18.52)$$

где a — коэффициент температуропроводности.

Интегрируя уравнения (18.52), с учетом граничных условий (18.45) получаем

$$\frac{dT}{dy} = \left(\frac{dT}{dy} \right)_w \exp \left(\frac{1}{a} \int_0^y v dy \right). \quad (18.53)$$

Таким образом, распределение температуры зависит от распределения скорости $v(y)$ и необходимо решать совместно уравнения движения и энергии, что существенно усложняет анализ.

Однако в случае стекловидных материалов можно внести существенные упрощения. Вязкость этих материалов хорошо описывается формулой

$$\frac{\mu}{\mu_w} = \left(\frac{T}{T_w} \right)^{-n} \quad \text{при } n = 10 \div 20 \quad (18.54)$$

и очень быстро увеличивается по мере уменьшения температуры. Жидкость имеет малую вязкость только на очень малой толщине. Это означает, что динамический, движущийся, слой намного меньше теплового слоя, а поэтому градиент температуры поперек жидкого слоя почти не изменяется.

Учитывая перемещение системы координат относительно твердого тела, имеем $v = v_w$, так что градиент температуры внутри покрытия (18.53) можно представить в виде

$$\frac{dT}{dy} = \left(\frac{dT}{dy} \right)_w \exp \left(\frac{1}{a} \int_0^y v_w dy \right) = \left(\frac{dT}{dy} \right)_w \exp \left(\frac{v_w y}{a} \right). \quad (18.55)$$

Отсюда получаем искомое распределение температуры

$$T = \frac{a}{v_w} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \exp\left(\frac{v_w y}{a}\right). \quad (18.56)$$

Величина $\delta_T = a/v_w$ характеризует глубину прогрева. Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \approx \frac{T_w}{\delta_T}, \quad (18.57)$$

получаем распределение температуры в теле

$$T = T_w \exp\left(\frac{y}{\delta_T}\right). \quad (18.58)$$

Это распределение температуры соответствует квазистационарному плавлению.

Воспользуемся степенным законом вязкости для жидкой пленки (уравнение 18.54). С учетом выражения (18.58) находим распределение вязкости поперек жидкой пленки

$$\frac{\mu}{\mu_w} = \left(\frac{T}{T_w} \right)^{-n} = e^{-\frac{ny}{\delta_T}}, \quad (18.59)$$

$$\text{т. е.} \quad \mu = \mu_w \exp\left(-n \frac{y}{\delta_T}\right) = \mu_w \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right), \quad (18.60)$$

где $\delta = \frac{\delta_T}{n} = \frac{a}{v_w n}$ — толщина динамического слоя или условная толщина жидкого слоя, на которой вязкость падает в e раз.

Подставляя закон изменения вязкости (18.59) в уравнение для распределения скорости (18.50) и интегрируя последнее уравнение, получаем распределение скорости в жидкой пленке

$$u = \left[\delta \frac{dp}{dx} \left(\frac{y}{\delta} - 1 \right) + \tau_w \right] \frac{\delta}{\mu_w} \exp\left(\frac{y}{\delta}\right). \quad (18.61)$$

Используя полученный профиль для скорости (18.61), определяем скорость уноса v_w из уравнения (18.51). Учитывая, что в окрестности передней критической точки $r = x$, а градиент давления dp/dx и касательное напряжение τ_w зависят линейно от x , получаем следующее выражение для v_w :

$$v_w = \frac{2\delta^2}{\mu_w} \left(\frac{d\tau_w}{dx} - 2\delta \frac{d^2 p}{dx^2} \right). \quad (18.62)$$

Так как из уравнения Бернулли для течения на границе газового пограничного слоя, где $\beta = (du_1/dx)_{x=0}$, а u_1 — скорость течения на границе газового пограничного слоя

$$\frac{d^2 p_1}{dx^2} = -Q_1 \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 = -Q_1 \beta^2,$$

то уравнение (18.62) принимает вид

$$v_w = \frac{2\delta^2}{\mu_w} \left(\frac{d\tau_w}{dx} + 2\beta^2 Q_1 \delta \right). \quad (18.63)$$

Полученные соотношения связывают между собой толщину слоя δ , скорость уноса v_w , температуру стенки T_w и касательное напряжение τ_w .

Для дальнейшего решения необходимо привлечь следующие уравнения газового слоя.

1. Условие баланса тепла

$$q_w = \epsilon_w v_w c T_w = \epsilon_w v_w \Delta I, \quad (18.64)$$

где ΔI — тепло, поглощаемое материалом при нагреве.

2. Тепловой поток при ламинарном режиме течения

$$q_w = \frac{\alpha}{c_p} (I_e - I_w) = \left(\frac{Nu}{\sqrt{Re}} \right)_w \sqrt{\frac{u_1 Q_w \mu_w}{x}} \frac{I_e - I_w}{Pr_w}. \quad (18.65)$$

3. Трение при ламинарном режиме течения

$$\tau_w = \left(\frac{1}{2} C_f \sqrt{Re} \right)_w \sqrt{\frac{Q_w \mu_w u_1^3}{x}}. \quad (18.66)$$

Распределение давления и скорости вне пограничного слоя принимается заданным. Дополнительные соотношения (18.64) — (18.66) позволяют определить величину теплового потока q_w и касательное напряжение на стенке τ_w . Зная q_w , можно найти температуру поверхности и скорость уноса по уравнениям (18.58) и (18.63). Характеристики материала могут быть получены из совместного решения данной системы уравнений.

В частности, для кварца получено

$$I_{эф} \sim Q_1^{1/(3+n)} I_0^{3,64/(3+n)}.$$

Унос теплозащитного материала тем меньше, чем выше его вязкость и меньше коэффициент теплопроводности λ . Поскольку n очень велико, то унос слабо зависит от Q_1 и энтальпии торможения I_0 набегающего потока газа.

В случае испарения жидкой пленки эффективная энтальпия материала $I_{эф}$ будет возрастать с увеличением энтальпии торможения I_0 .

Это решение справедливо только в том случае, когда пленка остается стабильной. Опыты показывают, что стабильность пленки нарушается при $Re_\delta \approx 150$. При этом значение эффективной энтальпии теплозащитного материала существенно уменьшается.

Рекомендуемая литература:

[23, 44, 45, 52, 56, 94, 103, 110, 160, 161].

ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

В этой главе рассматриваются тепловые режимы космических аппаратов, летающих либо вне атмосферы, либо в очень разреженной среде. После полета первого советского искусственного спутника Земли в 1957 г. количество космических аппаратов, запускаемых ежегодно, составляет многие десятки. Одновременно резко возрастает сложность задач, решаемых этими аппаратами и соответственно усложняется их конструкция, что в ряде случаев ведет к существенному увеличению их массы и энергетических потребностей. В настоящее время можно выделить две основные группы космических аппаратов: автоматические и пилотируемые. Аппараты этих групп заметно различаются по конструкции, поглощаемой энергии и выделению тепла. Серьезной проблемой для пилотируемых космических аппаратов является создание системы жизнеобеспечения, которая должна быть тесно связана с системами энергоснабжения и терморегулирования.

Поддержание тепловых режимов космических летательных аппаратов обеспечивается специальными системами терморегулирования, которые могут быть пассивными, не содержащими специальных механизмов, так и активными, включающими в себя иногда довольно сложные системы регулируемых теплообменников.

При рассмотрении теплового режима космического аппарата возникает вопрос об определении и поддержании в заданных пределах температур внутренних и внешних элементов конструкции.

Внутри космических аппаратов, как правило, тепло выделяется работающими приборами и аппаратурой, а также в процессе жизнедеятельности в пилотируемых аппаратах. К внешней поверхности аппарата подводится солнечная энергия как непосредственно от Солнца, так и отраженная от поверхности планет, энергия собственного излучения планет и энергия, выделяемая при столкновении поверхности аппарата с молекулами и атомами, которые могут присутствовать даже на больших высотах. Количество поступающей к аппарату энергии может изменяться во много раз в зависимости от расстояния от Солнца и планет и положения аппарата. Излучением космического прост-

ранства, имеющего среднюю температуру ≈ 4 К, можно пренебречь. Поверхность космического аппарата непрерывно излучает энергию, причем количество ее зависит от температуры поверхности, ее формы и радиационных свойств ее покрытия.

Задачей системы терморегулирования является поддержание баланса между подводимыми и отводимыми потоками тепла при заданной температуре элементов конструкции и оборудования. В ряде случаев это становится невозможным, и тогда в систему вводятся дополнительные нагреватели или холодильники, требующие дополнительных источников питания.

Для поддержания теплового режима внутри приборного или жилого отсеков обычно применяются активные системы терморегулирования, включающие в себя систему контролируемого отбора или подвода тепла к элементам конструкции внутри аппарата, систему, обеспечивающую регулирование теплоотдачи между внутренними частями аппарата и специальными радиационными поверхностями, и систему самих радиационных поверхностей.

Большое значение для поддержания теплового режима имеет выбор теплозащиты и теплоизоляции, по возможности исключающей неконтролируемые перетоки тепла.

В пассивных системах присутствуют те же элементы терморегулирования, но они могут поддерживать тепловой режим без принудительного управления. Это возможно в случае малого внутреннего тепловыделения, большой инерционности системы, хорошей теплоизоляции и т. д. В настоящее время разработано весьма большое количество различных систем терморегулирования. Рассмотреть все эти системы, во многих случаях весьма сложные, не представляется возможным в рамках настоящего учебника. Поэтому в данной главе будут освещены только некоторые положения, общие для всех систем и дающие представление о путях и способах поддержания теплового режима космических аппаратов.

19.1. ВНЕШНИЕ ИСТОЧНИКИ ТЕПЛА

Основными внешними источниками тепла при полете в космосе является лучистая энергия от Солнца, Земли и планет. При полетах в окрестности Земли или планет на низких высотах некоторое влияние на нагревание может оказывать соударение с поверхностью аппарата атомов и молекул атмосферы.

19.1.1. Лучистая энергия от Солнца

Количество лучистой энергии, поступающей от Солнца в единицу времени на единицу площади, называется солнечной постоянной. Для аппаратов, находящихся от Солнца на расстоянии, равном среднему расстоянию Земли от Солнца $L_0 = 149$ млн. км, солнечная постоянная равна $S_0 = 1400$ Вт/м².

В зависимости от расстояния от Солнца тепловой поток изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния:

$$S = \frac{S_0 L_0^2}{L^2}. \quad (19.1)$$

Значения солнечной постоянной на различных расстояниях, соответствующих положению космического аппарата вблизи различных планет солнечной системы, приведены в табл. 19.1.

Таблица 19.1

Планета	Расстояние от Солнца в астрономических единицах	Радиус планеты	Альbedo	Солнечная постоянная, кВт/м ²
Меркурий	0,31 0,47 (ср. 0,39)	2437	0,06	14,55 6,36 (Ср. 9,25)
Венера	0,72	6050	0,7	2,73
Марс	1,38 1,67 (ср. 1,52)	3386	0,15	0,733 0,500 (ср. 0,61)
Луна	1	1735	0,07	1,4
Земля	1	6378	0,37	1,4
Юпитер	5,2	70000	0,6	0,053

В ней для Марса и Меркурия, обладающих значительными эксцентриситетами орбит, приведено по два значения, соответствующих наибольшему и наименьшему расстояниям от Солнца. Энергия Солнца излучается в основном в диапазоне длин волн от $\lambda=0,2$ до $\lambda=2,5$ мкм (рис. 19.1), причем бóльшая часть энергии приходится на область видимого излучения.

Расчет нагревания поверхности от прямого солнечного излучения относительно прост, поскольку солнечный поток является практически параллельным. При заданном значении угла между нормалью к площади и направлением на Солнце θ (рис. 19.2) тепловой поток определяется выражением

$$dq_s = A_s S \cos \theta dF, \quad (19.2)$$

где A_S — коэффициент поглощения поверхности солнечных лучей;

dF — элементарная площадка, освещенная Солнцем.

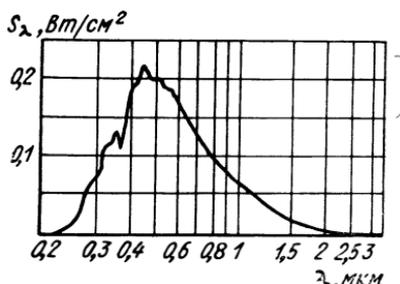


Рис. 19.1. Спектр солнечного излучения



Рис. 19.2. К расчету теплового потока к поверхности от Солнца

В ряде случаев, однако, солнечная энергия может попадать на площадку путем отражения от других частей аппарата. Лучистые потоки отражения, зависящие от формы и расположения аппарата, должны рассчитываться отдельно.

19.1.2. Собственное излучение планеты

Среднее значение теплового потока E_0 , излучаемого с единицы поверхности планеты, может быть определено из условия теплового баланса между количеством тепла от Солнца, поглощенным атмосферой и поверхностью планеты, и количеством тепла, которое отдано планетой излучением в окружающее пространство:

$$S\pi R^2(1 - \alpha) = E_0 4\pi R^2,$$

откуда
$$E_0 = \frac{S(1 - \alpha)}{4}. \quad (19.3)$$

Здесь R — эффективный радиус планеты;

α — Альбедо, определяющее отражательную способность планеты по отношению к солнечным лучам.

Основное значение для планет, обладающих плотной атмосферой, играет излучение атмосферы. Для расчета вводится понятие эффективного радиуса R . Например, для Земли принято значение $R = R_0 + 12$ км; для Венеры, окруженной плотным слоем облаков на высоте $H \approx 60$ км, можно принять $R = R_0 + 60$.

Назовем среднюю температуру поверхности, определяющую интенсивность и спектр излучения, равновесной температурой T_p . Так как

$$E_0 = \frac{S(1-\alpha)}{4} = \varepsilon\sigma_0 T_p^4,$$

где σ — постоянная Стефана, то из уравнения (19.3)

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{(1-\alpha)S}{4\varepsilon\sigma}}. \quad (19.4)$$

Приняв $\varepsilon=1$, получаем для Земли $T_p \approx 250$ К, что значительно ниже средней температуры поверхности $(T_{\text{пов}})_{\text{ср}} \approx 290$ К; для Венеры соответственно $T_p \approx 240$ К и $(T_{\text{пов}})_{\text{ср}} \approx 750$ К.

Такая разница связана с тем, что атмосфера экранирует излучение поверхности и энергия переизлучается верхними слоями атмосферы. Для этих планет собственное излучение слабо зависит от времени суток.

У планет, обладающих тонкой атмосферой (например, у Марса) либо совсем не имеющих атмосферы (Луна), собственное излучение определяется непосредственно поверхностью, температура которой сильно изменяется в зависимости от освещенности Солнцем. Так, температура точек освещенной части диска Луны определяется из условия теплового баланса

$$S(1-\alpha)\cos\psi = \varepsilon\sigma T^4, \quad (19.5)$$

где ψ — зенитный угол.

Приняв $\varepsilon \approx 1$, получаем

$$T_p = 392 \sqrt{\cos\psi}. \quad (19.6)$$

В подсолнечной точке ($\psi=0$) $T_p=392$ К; при $\psi \approx \pi/2$ и на неосвещенной стороне формула приводит к ошибке, так как в ней не учтена теплоемкость грунта. Эксперименты и расчеты, учитывающие влияние теплоемкости грунта, дают значение температуры на неосвещенной стороне Луны 90—120 К.

Температура поверхности Марса также сильно зависит от освещенности поверхности и колеблется в пределах от 150 до 300 К.

При расчете нагревания тела в космосе от собственного излучения планеты в общем случае необходимо учитывать переменность температуры по поверхности планеты. Однако для планет, обладающих толстой атмосферой, переменностью температуры можно пренебречь и получить относительно простые расчетные формулы.

Рассмотрим простейший случай движения вокруг планеты элемента поверхности космического аппарата в виде пластинки, нормаль которой составляет угол β с линией, соединяющей пластинку с центром планеты (рис. 19.3). Если угол β такой, что

плоскость пластинки не пересекается поверхностью планеты ($\beta < \beta_0$), то количество тепла, попадающего на пластинку от собственного излучения планеты, не зависит от предположения о законе излучения, если считать при этом, что планета является однородной сферой.

Из условия равенства энергии, излучаемой поверхностью планеты, и энергии, проходящей через сферу радиусом $(R_0 + H)$, следует для $\beta = 0$, что

$$4E_0\pi R_0^2 = Q_{\text{пл}} 4\pi (R_0 + H)^2,$$

откуда
$$Q_{\text{пл}} = E_0 \left(\frac{R_0}{R_0 + H} \right)^2. \quad (19.7)$$

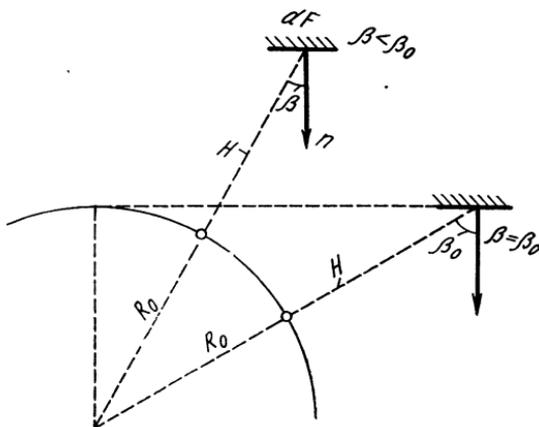


Рис 19.3 К расчету нагревания тела от собственного излучения планеты

где R_0 — радиус планеты;

H — высота полета над планетой.

Для пластинки, расположенной под углом $\beta < \beta_0$

$$Q_{\text{пл}} = E_0 \left(\frac{R_0}{R_0 + H} \right)^2 \cos \beta = E_0 \frac{1}{(1 + \bar{H})^2} \cos \beta, \quad (19.8)$$

где $\bar{H} = H/R_0$.

Обозначая $Q_{\text{пл}} = E_{\text{пл}} \Phi$, где $E_{\text{пл}} = E_0/\pi$ — яркость излучения планеты, а Φ — геометрический фактор, учитывающий форму объекта и его расположение относительно планеты, можно записать для пластины выражение в виде (для $\beta < \beta_0$)

$$\Phi_{\text{пл}} = 2\pi \Phi_1 \cos \beta, \quad (19.9)$$

где
$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \bar{H}} \right)^2. \quad (19.10)$$

Если плоскость пластинки пересекается с поверхностью планеты ($\beta > \beta_0$), то из условия теплового баланса можно получить выражение для разности тепловых потоков, падающих с обеих сторон пластинки

$$Q_1 - Q_2 = E_0 \left(\frac{R_0}{R_0 + H} \right)^2 \cos \beta. \quad (19.11)$$

Значения удельных потоков, падающих на пластинку с обеих сторон, Q_1 и Q_2 , при этом существенно зависят от закона излучения. Примем, что количество тепла, отдаваемое элементом $dF_{\text{пл}}$

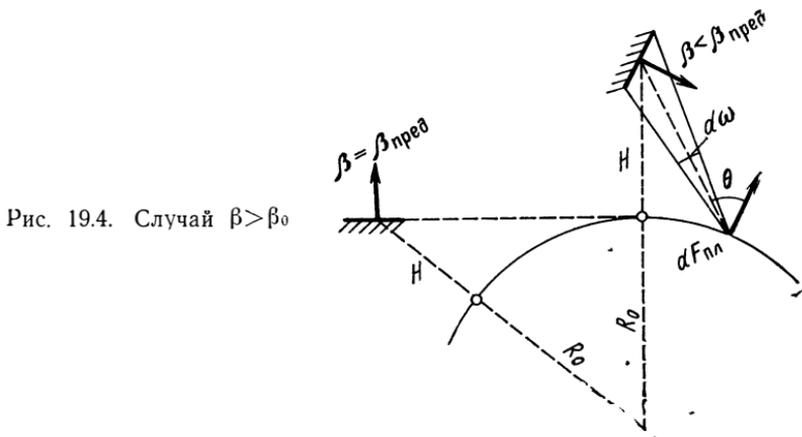


Рис. 19.4. Случай $\beta > \beta_0$

поверхности планеты и падающее на пластинку, определяется законом Ламберта:

$$dQ_{\text{пл}} = \frac{E_0}{\pi} d\omega \cos \theta dF_{\text{пл}}$$

или

$$d\Phi_{\text{пл}} = \cos \theta d\omega dF_{\text{пл}}, \quad (19.12)$$

где $d\omega$ — телесный угол, под которым видна пластинка;

θ — угол между нормалью к $dF_{\text{пл}}$ и направлением на пластинку (рис. 19.4).

Полное количество тепла, попадающее на пластинку с одной стороны, может быть получено интегрированием по поверхности планеты, видимой с этой стороны.

Для значений $\beta < \beta_0 = \arccos \left(\frac{1}{1 + \bar{H}} \right)$ (т. е. когда плоскость пластинки не пересекает поверхность планеты) справедливы формулы (19.9) и (19.10).

Для случая когда $\beta_0 < \beta < \pi/2$, значение Φ определяется следующим аналитическим выражением:

$$\Phi_{\text{пл}} = 2(\pi\Phi_1 - \Phi_2) \cos \beta - 2\Phi_3 \sin \beta, \quad (19.13)$$

где Φ_1 определяется по формуле (19.10);

$$\Phi_2 = -\frac{2\bar{H} + \bar{H}^2}{4(1 + \bar{H})^2} \arccos \left(\text{ctg } \beta \cdot \sqrt{2\bar{H} + \bar{H}^2} \right) -$$

$$-\frac{1}{2} \cos \beta \cdot \arcsin \left[\frac{\sqrt{1 + (2\bar{H} + \bar{H}^2) \operatorname{ctg}^2 \beta}}{1 + \bar{H}} \right] + \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{1}{1 + \bar{H}} \right)^2 \right] \times \\ \times \arcsin \sqrt{1 - (2\bar{H} + \bar{H}^2) \operatorname{ctg}^2 \beta}; \quad (19.14)$$

$$\Phi_3 = -\frac{\sqrt{2\bar{H} + \bar{H}^2} \sqrt{1 - (2\bar{H} + \bar{H}^2) \operatorname{ctg}^2 \beta}}{2(1 + \bar{H})^2} + \\ + \frac{\sin \beta}{2} \arcsin \left[\frac{\sqrt{1 - (2\bar{H} + \bar{H}^2) \operatorname{ctg}^2 \beta}}{1 + \bar{H}} \right]. \quad (19.15)$$

Рассмотрим случай, когда $\pi/2 < \beta < \beta_{\text{пред}}$, где $\beta_{\text{пред}}$ — предельный угол, при котором рассматриваемая сторона пластинки облучается поверхностью планеты. Легко видеть (см. рис. 19.4), что при этом плоскость пластинки касается поверхности так же, как и при $\beta = \beta_0$, но пластинка повернута на 180° так, что

$$\beta_{\text{пред}} = \pi + \beta_0. \quad (19.16)$$

Зависимость $\beta_{\text{пред}}$ от \bar{H} дана на рис. 19.5.

Выражение для расчета лучистого потока может быть получено при этом в виде

$$\Phi_{\text{пл}} = 2\Phi_4 \cos \beta + 2\Phi_5 \sin \beta, \quad (19.17)$$

где $\Phi_4 = \Phi_2(\pi - \beta)$ и $\Phi_5 = \Phi_3(\pi - \beta)$. (19.18)

Для частного случая, когда $\beta = \pi/2$ (пластинка вертикальна),

$$\Phi_{\text{пл}} = \arcsin \left(\frac{1}{1 + \bar{H}} \right) - \frac{\sqrt{2\bar{H} + \bar{H}^2}}{(1 + \bar{H})^2}. \quad (19.19)$$

График зависимости $\Phi_{\text{пл}}$ от \bar{H} представлен на рис. 19.6. Там же приведены также соответствующие величины H_3 для полета на орбите около Земли.

Количество тепла, поступающее на поперечное сечение тела почти шаровой формы, может быть определено по формуле

$$Q_{\text{ш}} = 2\pi F_{\text{м}} \left(1 - \frac{\sqrt{2\bar{H} + \bar{H}^2}}{1 + \bar{H}} \right) E_{\text{пл}}, \quad (19.20)$$

где $F_{\text{м}}$ — площадь миделя тела.

При расчете нагревания тела произвольной выпуклой формы, беспорядочно вращающегося в пространстве, можно приближенно использовать выражение (19.20), полученное для тела шаровой формы для среднего значения $F_{\text{м}}$.

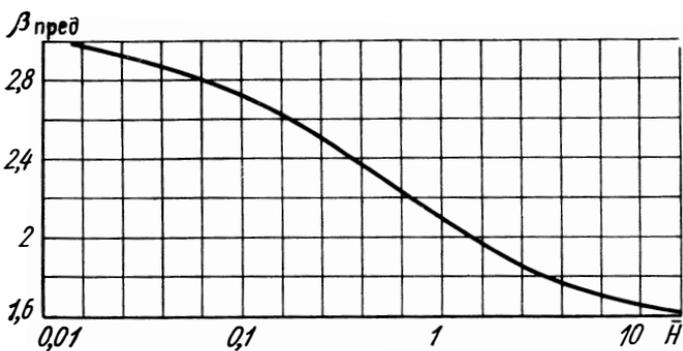


Рис. 19.5. Зависимость $\beta_{\text{пред}}$ от \bar{H}

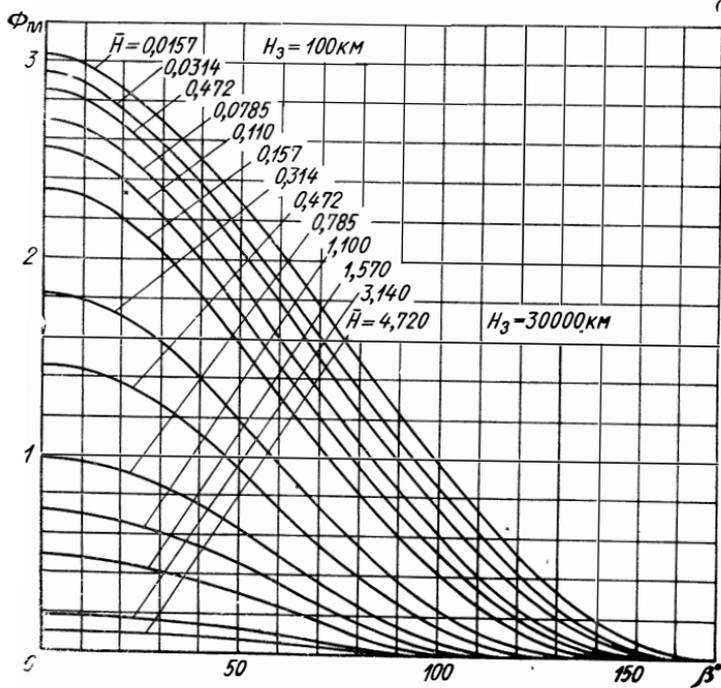


Рис. 19.6. Зависимость $\Phi_{\text{пл}}$ от \bar{H} и β ; H_3 — высота над поверхностью Земли при полете вокруг нее

19.1.3. Нагревание солнечной энергией, отраженной поверхностью планеты

При полетах в окрестности планет и Луны на аппарат попадает дополнительная солнечная энергия, отраженная от поверхности или облачного слоя планет.

Наиболее подробно распределение энергии отраженного в мировое пространство солнечного излучения получено для Земли.

<i>Коротковолновое излучение</i>	в % от S_0
От облаков	27
Из-за рассеяния атмосферой	7
От поверхности Земли	3
Итого	37

Для других планет и Луны среднее значение отраженной энергии может быть найдено по значениям альбедо α , приведенным в табл. 19.1. Альбедо определяет долю отраженной энергии и, следовательно, тепловой поток, отраженный во все стороны единицей поверхности планеты $E_{отр} = \alpha S$.

Лучистый поток от Солнца является практически параллельным, но излучение, отраженное планетой, подчиняется сложному закону, зависящему от характера поверхности. В предельных случаях отражение может быть либо зеркальным, либо диффузным.

Нагревание отраженными лучами зависит от формы и ориентировки летящего тела, а также от взаимного расположения Солнца, Земли и рассматриваемого тела. Полное количество солнечной энергии, отраженной единицей поверхности планеты, определяется выражением

$$(Q_{отр})_0 = \alpha S \cos \gamma, \quad (19.21)$$

где γ — угол между нормалью к площадке на поверхности планеты и направлением солнечных лучей (рис. 19.7). Если принять, что отражение диффузно, то удельное количество тепла, отражаемое от поверхности на пластинку dF , равно

$$Q_{отр} = \frac{\alpha S}{\pi} \int_{F_{П}} \cos \gamma \cos \theta d\Omega dF_{Пл}, \quad (19.22)$$

где θ — угол между нормалью к площадке на планете $dF_{Пл}$ и линией, соединяющей $dF_{Пл}$ и dF .

В качестве примера рассмотрим поток на единичную площадку (пластинку), расположенную на высоте H . Заданы угол β между нормалью к пластинке и радиусом-вектором, проведенным к ней из центра планеты, и угол ψ между радиусом-вектором и направлением на Солнце.

Обозначая $Q_{отр} = \alpha S \Phi_{отр}$ и $\bar{H} = H/R_0$, получаем расчетные формулы для функции Φ в следующем виде.

1. Для случая, когда вся видимая с пластинки поверхность планеты освещена Солнцем, т. е. при $0 < \psi < \psi_1$,

где $\psi_1 = \arcsin\left(\frac{1}{1 + \bar{H}}\right)$ (рис. 19.8) значение

$$\Phi_{\text{отр}} = M(\beta, \bar{H}) \cos \psi - N(\beta, \bar{H}) \sin \psi \cos \sigma. \quad (19.23)$$

Здесь входит дополнительно угол σ между плоскостью P , проходящей через линию OC (направление на Солнце) и линию OA , и плоскостью S , проходящей через линию OA и нормаль к пластинке.

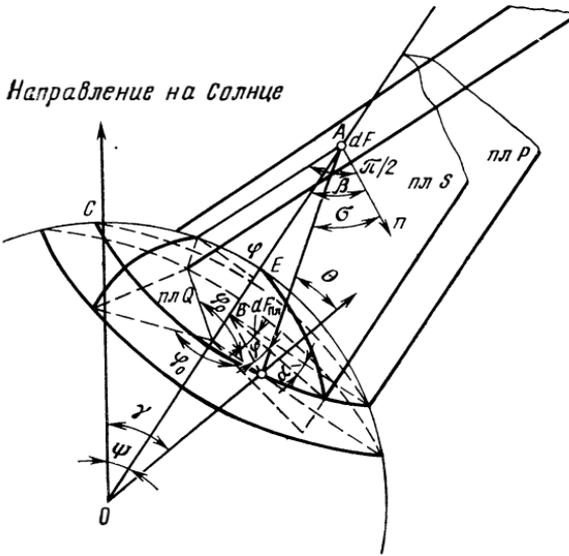


Рис 19.7. К расчету нагревания отражением солнечной энергии от поверхности планеты

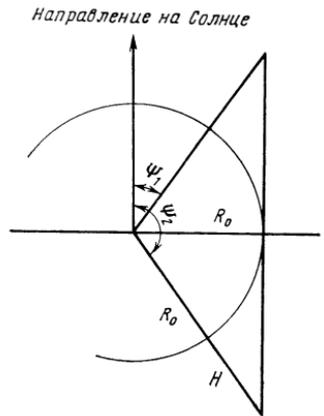


Рис. 19.8. К определению углов ψ_1 и ψ_2

тинке, поскольку в противном случае положение пластинки не было бы определено однозначно. Значение $\sigma = \pi/2$ соответствует случаю, когда пластина направлена на Солнце своим ребром. При изменении σ нормаль n вращается вокруг прямой OA . Зависимости $M(\beta, \bar{H})$ и $N(\beta, \bar{H})$ приведены на рис. 19.9 и 19.10.

Для значений $0 < \beta < \beta_0$, где β_0 соответствует углу, при котором плоскость пластинки касается поверхности планеты, $\beta_0 = \arccos\left(\frac{1}{1 + \bar{H}}\right)$ (рис. 19.3), можно получить аналитические выражения

$$M(\beta, \bar{H}) = 2(\Phi_1 - \Phi_0) \cos \beta; \quad N(\beta, \bar{H}) = \Phi_7 \sin \beta; \quad (19.24)$$

$$\Phi_6 = \frac{(2\bar{H} + \bar{H}^2)^2}{16(1 + \bar{H})^3} \ln\left(\frac{2 + \bar{H}}{\bar{H}}\right) - \frac{\bar{H}^2(3 + \bar{H})}{8(1 + \bar{H})^3}; \quad (19.25)$$

$$\Phi_7 = \frac{\bar{H}}{2(1+\bar{H})} \left\{ \left[1 + \frac{\bar{H}(2\bar{H} + \bar{H}^2)}{8(1+\bar{H})^2} + \frac{\bar{H}^2}{\bar{H}(1+\bar{H})} \right] \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{2+\bar{H}}{\bar{H}} - \left[\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{1+\bar{H}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\bar{H}} \right) \right] \right\}. \quad (19.26)$$

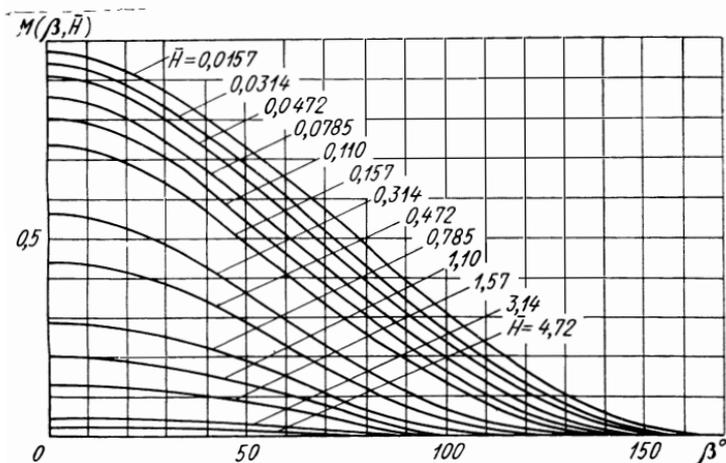


Рис. 19.9. Вспомогательный график для расчета $\Phi_{отр}$

В частном случае, когда пластинка расположена параллельно поверхности планеты ($\beta = 0, \sigma = 0$),

$$\Phi_{отр} = \left[\left(\frac{1}{1+\bar{H}} \right)^2 - \frac{\bar{H}^2(3+\bar{H})}{4(1+\bar{H})^3} - \frac{(2\bar{H} + \bar{H}^2)^2}{8(1+\bar{H})^3} \ln \frac{2+\bar{H}}{\bar{H}} \right] \cos \psi. \quad (19.27)$$

Для частного случая $\beta > \beta_0$, но когда пластинка расположена перпендикулярно поверхности планеты ($\beta = \pi/2$), также может быть получено аналитическое решение:

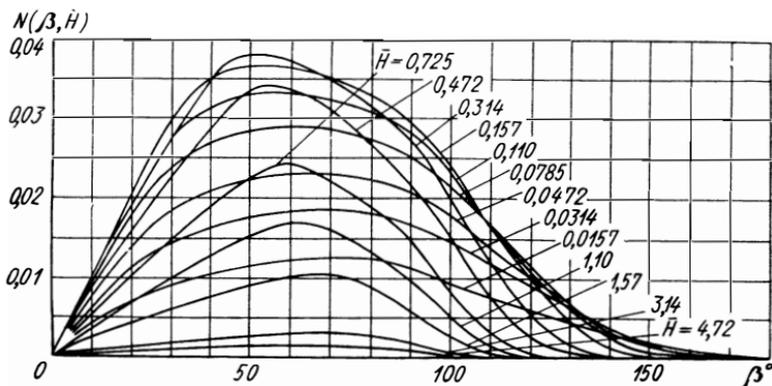
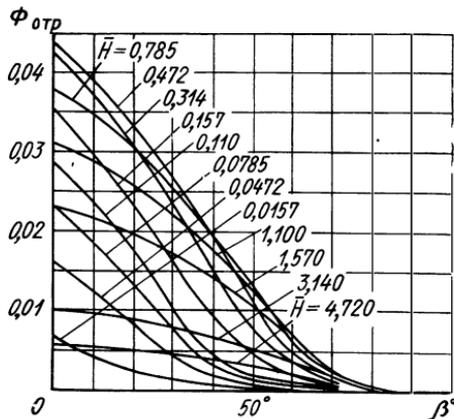


Рис. 19.10. Вспомогательный график для расчета $\Phi_{отр}$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{отр}} = & \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{1}{1+\bar{H}} \right)^3 + \frac{6(1+\bar{H})}{\pi} \arcsin \left(\frac{1}{1+\bar{H}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{2\bar{H} + \bar{H}^2}}{\pi(1+\bar{H})} \left[6 + \frac{4}{(1+\bar{H})^2} \right] \right\} \cos \psi - \frac{1}{4} \frac{\bar{H}}{1+\bar{H}} \times \\ & \times \left\{ \left[1 - \frac{\bar{H}(2\bar{H} + \bar{H}^2)}{8(1+\bar{H})^2} - \frac{\bar{H}^2}{4(1+\bar{H})} \right] \ln \left(\frac{2+\bar{H}}{\bar{H}} \right) - \right. \\ & \left. - \left[\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{1+\bar{H}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\bar{H}} \right)^2 \right] \right\} \sin \psi \cos \sigma. \quad (19.28) \end{aligned}$$

Рис. 19.11. К расчету $\Phi_{\text{отр}}$ при полете над терминатором:
 $\sigma=0$; $\psi=\pi/2$



Если вся видимая с пластинки поверхность находится в тени, т. е. $\psi > \psi_2$, где $\psi_2 = \frac{\pi}{2} + \arccos \left(\frac{1}{1+\bar{H}} \right)$ (см. рис. 19.8), то на пластинку не попадает отраженная энергия и $\Phi_{\text{отр}} = 0$. Если значения ψ больше, чем ψ_1 и меньше ψ_2 , т. е. только часть видимой с пластинки поверхности планеты освещена Солнцем, то простые аналитические выражения получить не удастся и необходимо производить численное интегрирование уравнения (19.22). В качестве примера на рис. 19.11; 19.12; 19.13 приведены результаты вычислений для случая, когда $\psi = \pi/2$, т. е. когда пластинка расположена точно над терминатором, разделяющим тень и освещенную стороны планеты. Расчеты выполнены для трех случаев: $\sigma = 0$, $\sigma = \pi$ и $\sigma = \frac{\pi}{2}$ (или $\frac{3}{2}\pi$). Значения $\Phi_{\text{отр}}$ для промежуточных значений σ можно получить экстраполяцией по этим трем графикам.

Если отражение зеркальное, то $\Phi_{\text{отр}}$ определяется выражением (рис. 19.14).

$$\Phi_{\text{отр}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+\bar{H}} \right)^2 \frac{\sin 2\gamma}{\sin \psi}, \quad (19.29)$$

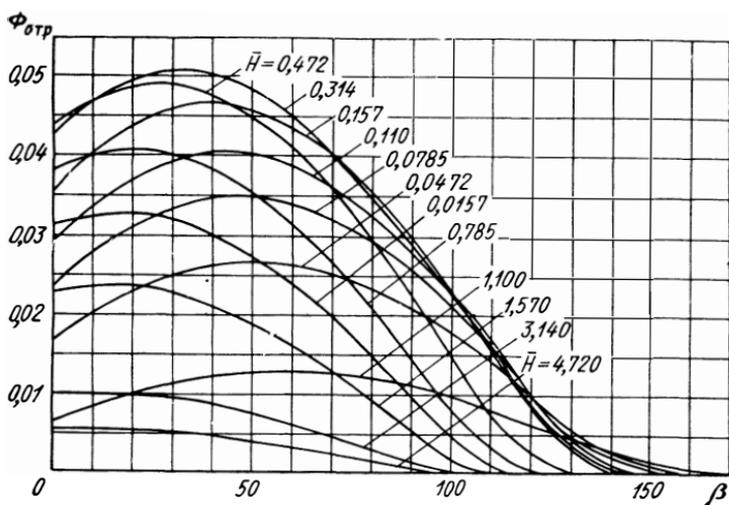


Рис. 19.12. К расчету $\Phi_{отр}$ при полете над терминатором:
 $\sigma = \pi$, $\psi = \pi/2$

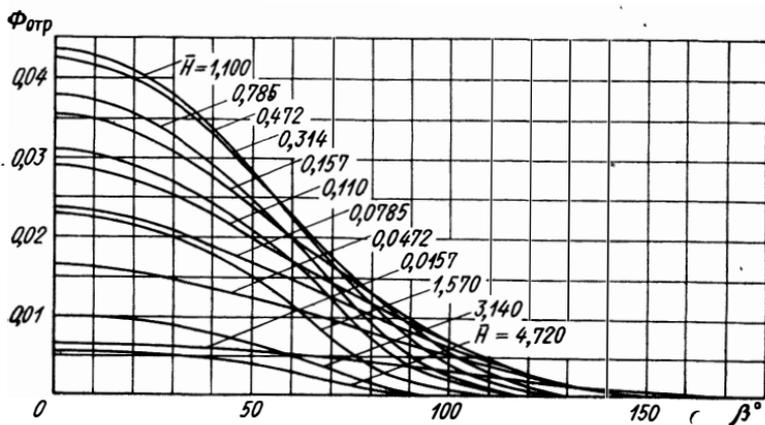


Рис. 19.13. К расчету $\Phi_{отр}$ при полете над терминатором:
 $\sigma = \pi$, $\psi = \pi/2$

причем $\gamma = f(\psi)$ определяется по графику рис. 19.15. Количество тепла, поступающее на единицу поверхности пластины, расположенной под углом β к горизонту, можно определить из выражения

$$\Phi_{\text{отр}} = \frac{1}{4} \left(\frac{R_0}{R_0 + H} \right)^2 \frac{\sin 2\gamma \cos \beta + \delta}{\sin \psi \cos \delta}, \quad (19.30)$$

где
$$\delta = \arcsin \left(\frac{R_0}{R_0 + H} \sin \gamma \right). \quad (19.31)$$

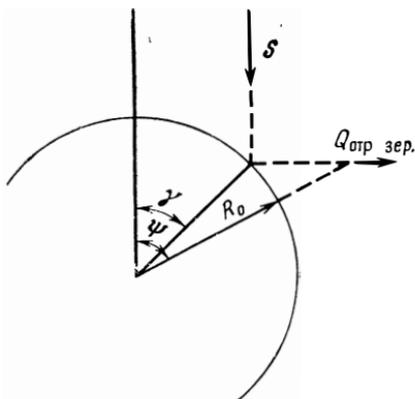


Рис. 19.14. К расчету зеркального отражения солнечной энергии от поверхности планеты

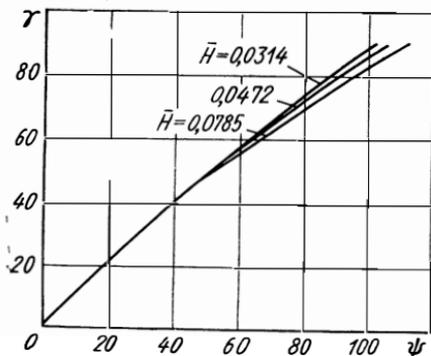


Рис. 19.15. Связь между углами γ и ψ

Предполагается, что зеркальное отражение имеет место при углах γ , близких к $\pi/2$.

В общем случае для тела произвольной формы тепловой поток на единицу площади миделя вычисляется по следующей формуле:

$$\Phi_{\text{отр}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 + \bar{H}} \right)^2 \frac{\sin 2\gamma}{\sin \psi} \frac{1}{\cos \delta}. \quad (19.32)$$

19.1.4. Нагревание при соударении с молекулами и атомами атмосферы

При полете космического аппарата вблизи планеты в ряде случаев некоторый вклад в суммарный тепловой поток, подводимый к аппарату, может вносить нагревание от соударения атомов (молекул) и поверхности. При этом тепло выделяется в силу передачи части кинетической энергии и возможной рекомбинации диссоциированных молекул.

Для наиболее важного случая полета на больших высотах, когда течение является свободно-молекулярным, удельная энер-

гия соударения для единичной пластинки с достаточной точностью может быть определена по формуле

$$Q_{\text{мол}} = n \frac{mv^2}{2}, \quad (19.33)$$

где n — число частиц, ударяющихся о пластинку;
 m — масса частицы;
 v — скорость полета.

При этом $n = Nv \sin \beta$, (19.34)
 где N — число частиц в единице объема;
 β — угол между плоскостью пластинки и направлением полета.

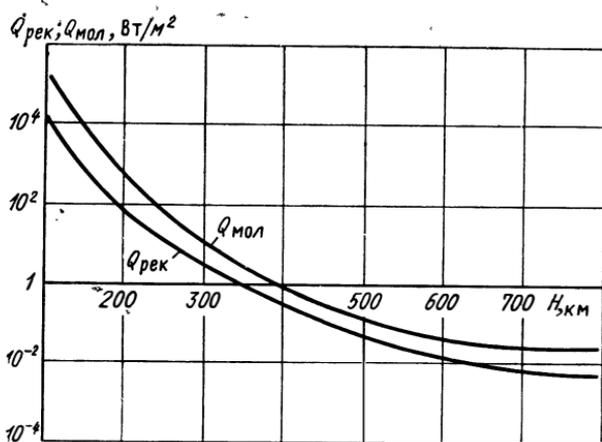


Рис. 19.16. Количество тепла, получаемое пластинкой при столкновении с атомами и молекулами воздуха

В формулах (19.33) и (19.34) принято, что коэффициент аккомодации близок к единице и энергия хаотического движения молекул пренебрежимо мала.

Количество тепла, выделяющееся в силу рекомбинации, зависит от эффективности рекомбинации σ , равной отношению числа столкновений с поверхностью, приводящих к рекомбинации, к общему числу столкновений.

Таким образом, количество энергии рекомбинации, приходящееся на единицу поверхности,

$$Q_{\text{рек}} = n\sigma E, \quad (19.35)$$

где E — энергия рекомбинации, отнесенная в одной частице. В качестве примера на рис. 19.16 приведена зависимость $Q_{\text{мол}}$ и $Q_{\text{рек}}$ от высоты полета над Землей. Как видно, влияние этих членов становится сравнимым с влиянием тепла от солнечного излучения $S = 1140$ на высотах полета ниже 200 км.

19.2. ТЕРМОРЕГУЛИРОВАНИЕ

Поскольку на космическом аппарате устанавливаются различная аппаратура и приборы и должны быть обеспечены для их работы условия, а в пилотируемых кораблях — и для жизни пилотов, то возникает проблема поддержания температуры в определенных пределах. Поступление тепла извне в оболочку через теплоизоляцию и элементы конструкции непостоянно и изменяется в широких пределах в зависимости от положения и ориентации аппарата. Внутреннее выделение тепла в общем случае также может изменяться в несколько раз. В этих условиях для обеспечения требований к стабилизации температуры необходима специальная система терморегулирования.

Термостатирующая система может быть основана либо на поглощении или выделении тепла внутри аппарата, либо на отводе наружу или подводе тепла извне.

В первом случае могут быть использованы химические реакции с выделением или поглощением тепла, либо эффекты выделения и поглощения при изменении агрегатного состояния вещества (плавление, испарение, кристаллизация). Этот метод ограничен по своим возможностям, поскольку запас вещества не может быть большим. Поэтому его применяют либо для автономных приборов с небольшим тепловыделением при переменной температуре наружной оболочки, например, на поверхности Луны, либо как часть общей системы терморегулирования с внешними теплообменниками.

Большими возможностями обладают схемы, в которых элементы конструкции, приборы, газ, заполняющий отсеки аппарата, могут обмениваться теплом со специальными радиационными поверхностями, расположенными на внешней поверхности аппарата. В зависимости от назначения аппарата радиационные поверхности могут быть сделаны так, чтобы их температура была более высокой или более низкой. В первом случае они действуют как нагреватели, если температура внутри аппарата почему-либо понижается, во втором случае — как холодильники для сброса тепла.

Передача тепла от приборов к радиаторам и обратно регулируется тепловым сопротивлением промежуточной среды. Для передачи тепла используются практически все возможные способы: теплопроводность, излучение и конвекция. В последнем случае используется специальный теплоноситель (газ или жидкость), циркулирующий между отсеком и радиаторами.

В качестве примера можно указать на пилотируемые советские корабли «Восток», «Союз» и автоматические станции «Венера», «Марс» и другие, в которых аппаратура и люди размещены в герметических отсеках или контейнерах и тепло передается к радиационным поверхностям с помощью специальных теплоносителей. На американских аппаратах типа «Сервейер»

и «Маринер» аппаратура размещена в вакууме и передача тепла к радиационным поверхностям осуществляется излучением и теплопроводностью.

Расчет температурного режима летательного аппарата по существу сводится к решению двух уравнений баланса тепла: условие теплового баланса контейнера с аппаратурой

$$(Mc)_k \frac{\partial T}{\partial \tau} = - \frac{T - T_r}{R} + Q_{вн} - Q_{ут}, \quad (19.36)$$

где T_r — температура радиационной поверхности;
 T — средняя температура контейнера;
 R — общее тепловое сопротивление между контейнером и радиационной поверхностью;
 $Q_{ут}$ — среднее количество тепла, передаваемое через элементы конструкции и теплоизоляцию к внешней поверхности аппарата и излучаемое в окружающую среду;
 $Q_{вн}$ — количество тепла, выделяемое внутри контейнера;
 $(Mc)_k$ — эффективная средняя теплоемкость контейнера и аппаратуры;
 τ — время;
 M — масса контейнера;
 условие теплового баланса радиатора

$$(Mc)_r \frac{\partial T_r}{\partial \tau} = \frac{T - T_r}{R} + A_S F S + A_S F q_{отр} + \varepsilon F q_{пл} - F \varepsilon \sigma T_r^4, \quad (19.37)$$

где σ — постоянная Стефана—Больцмана;
 $(Mc)_r$ — эффективная теплоемкость радиатора;
 F — площадь поверхности радиатора;
 $S, q_{отр}$ и $q_{пл}$ — удельные потоки тепла от солнечного излучения, от отраженного солнечного излучения и от собственного излучения планеты;
 ε — степень черноты радиационной поверхности для длинноволнового излучения при $T = T_r$;
 A_S — коэффициент поглощения по отношению к солнечной радиации;

$Q_{вн}, S, q_{отр}$ и $q_{пл}$ — задаются.

Решение этих уравнений определяет зависимость значений T и T_r от времени.

Для регулирования температуры возможно воздействовать на значение R , изменяя, например, расход теплоносителя, либо на значение площади радиатора F , закрывая его жалюзи.

Для того чтобы регулирование было возможно, а также для уменьшения потребного диапазона изменения R и F , необходимо правильно выбрать величины A_S и ε и направление радиатора, если аппарат стабилизирован в пространстве. Для получения «холодного» радиатора целесообразно выбрать покрытие с

большим ϵ и, если на радиатор попадает солнечная энергия, с меньшим значением A_S . «Горячий» радиатор обычно располагают так, чтобы он освещался солнцем, и выбирают покрытие с большим значением A_S . Изменяя отношение A_S/ϵ , можно получить широкий диапазон изменения равновесной температуры поверхности радиатора.

Поскольку тепловая изоляция аппарата обладает в вакууме весьма высоким тепловым сопротивлением, то величина $Q_{ут}$ определяется перетеканием тепла главным образом через элементы конструкции, выступающие наружу (тепловые мосты) и не защищенные изоляцией (приборы навигации, антенны, научные приборы, элементы крепления и др.). Значение $Q_{ут}$ может быть положительным, если тепловые мосты расположены с солнечной стороны и отрицательным, если тепло отводится на теневую сторону. Как правило, большие значения $Q_{ут}$ существенно уменьшают возможности системы терморегулирования.

19.3. ВЫБОР ОПТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НАРУЖНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Из сказанного выше следует, что для поддержания теплового режима космического аппарата большое значение имеет правильный выбор оптических коэффициентов наружных поверхностей ϵ и A_S . Для этой цели наружные поверхности аппарата — радиационные поверхности, поверхности теплоизоляции, не защищенные элементы конструкции и приборы — покрываются специальными красками.

Основной характеристикой покрытия поверхности является равновесная температура T_p , которую принимает теплоизолированная поверхность при прямом воздействии на нее солнечного излучения в стационарных условиях.

Из условия теплового баланса следует:

$$F_M A_S S = \epsilon \sigma T_p^4 F_r$$

и

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{F_M A_S S}{F_r \epsilon \sigma}}. \quad (19.38)$$

Здесь F_M — площадь проекции поверхности на плоскость, перпендикулярную направлению солнечных лучей (эффективный мидель);

F_r — площадь излучающей поверхности. Например, для пластины, излучающей в одну сторону и расположенной под углом β к направлению солнечных лучей, $F_M/F_r = \sin \beta$; для сферы $F_M/F_r = 1/4$ и т. д.

Из формулы (19.38) видно, что при заданных значениях F_M/F_r и S главную роль играет отношение коэффициента поглощения солнечной энергии A_S к степени черноты ϵ при длинах волн, соответствующих собственному излучению пластинки. При

определении A_S и ϵ следует иметь в виду, что солнечное излучение передает основную энергию в диапазоне длин волн от 0,2 до 2,5 мкм, а интенсивность собственного излучения при температуре радиатора 300 К имеет максимум при длине волны 9,7 мкм. Таким образом, отношение A_S/ϵ пропорционально отношению среднего коэффициента поглощения данного материала A_λ в об-

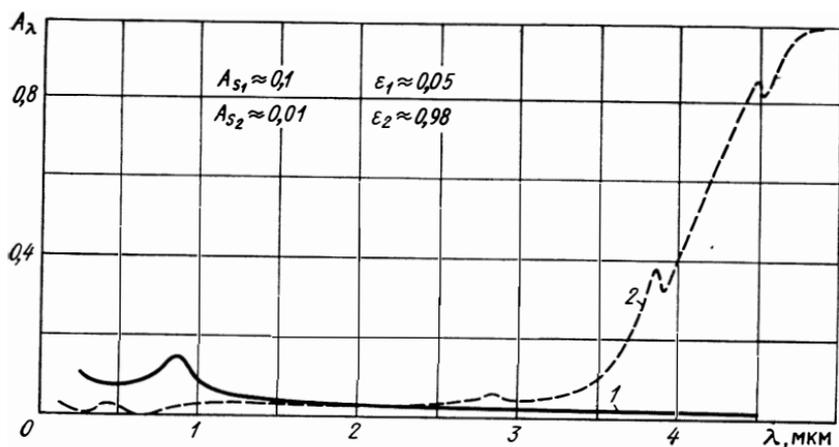


Рис. 19.17. Спектральная поглощательная способность материалов: 1—алюминий, напыленный в вакууме; 2—плавленый кварц толщиной 2,5 мм; $T=293$ К

ласти малых длин волн к его среднему коэффициенту поглощения в области больших длин волн и зависит от температуры поверхности.

В природе существуют вещества с отношением A_S/ϵ больше и меньше единицы. Как правило, отношение коэффициентов поглощения в среднем больше у красок, изготовленных на базе окислов металлов, и меньше — у полированных металлов.

Зависимость коэффициента поглощения A_λ от длины волны, определяющая значение отношения A_S/ϵ , также различна у этих двух групп материалов. У полированных металлов коэффициент поглощения уменьшается с возрастанием длины волны, у красок, образованных на базе окислов, коэффициент поглощения растет с увеличением длины волны.

На рис. 19.17 и 19.18 в качестве примера приведены зависимости коэффициента поглощения некоторых материалов A_λ от длины волны. Как видно, изменяя тип покрытия, можно в широких пределах изменять среднее значение A_λ и отношение A_S/ϵ . Однако на радиационные характеристики покрытий существенное влияние может оказывать космическое излучение, особенно ультрафиолетовое излучение в космосе.

В ряде случаев применяются двухслойные покрытия. Например, полированная металлическая поверхность покрывается тонким плотно прилегающим слоем стекла. При этом солнечные лучи, проходя через стекло, отражаются от полированной поверхности, чем обеспечивается малое значение A_S . В то же время стекло имеет большое ϵ , и при хорошем тепловом контакте тепло хорошо излучается поверхностью так, что температура ее остается достаточно низкой.

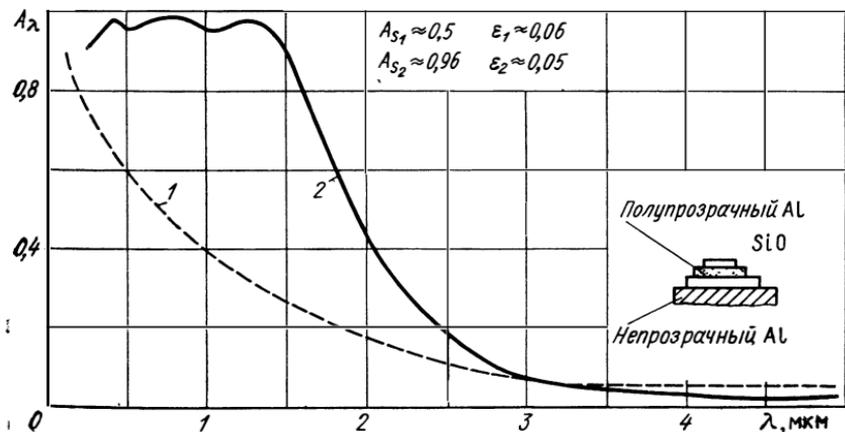


Рис. 19.18. Спектральная поглощательная способность материалов: 1—кадмий полированный; 2—интерференционный фильтр «темное зеркало»; SiO—моноксид кремния

Если между стеклом и поверхностью металла исключить тепловой контакт, то инфракрасное излучение поверхности будет задерживаться стеклом, которое будет являться экраном, и температура поверхности повысится (тепличный эффект).

Если значение T_p должно быть установлено с высокой точностью, этого можно добиться, покрывая участки поверхности красками с разным отношением A_S/ϵ .

Из баланса тепла в стационарных условиях на теплоизолированной поверхности следует

$$A_{S1}K_1 + A_{S2}(1 - K_1) = \sigma T_p^4 [\epsilon_1 K_1 + (1 - K_1) \epsilon_2].$$

При заданных значениях A_{S1} , A_{S2} , ϵ_1 , ϵ_2 , выбирая необходимые отношения площадей поверхностей

$$K_1 = F_1/F; K_2 = F_2/F,$$

покрытых красками с различными значениями A_S/ϵ , можно добиться необходимого значения T_p . Полученные значения T_p в действительности равны только температуре участков поверхности теплоизоляции, так как практически в уравнении теплового баланса можно пренебречь отводом тепла внутрь аппарата.

19.4. ВНЕШНЯЯ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИЯ

Для теплоизоляции поверхности космических аппаратов широкое применение получила экранно-вакуумная изоляция ЭВТИ, представляющая собой покрытие, состоящее из большого числа (20—100) слоев пластичного материала с малым значением степени черноты. В условиях вакуума теплопередача через такое покрытие осуществляется лучеиспусканием и может быть снижена до весьма малых значений. Практически ее наименьшее значение ограничивается тем, что передача тепла через различные элементы конструкции (тепловые мосты) становится намного больше, чем через ЭВТИ.

Оценим влияние ЭВТИ на величину излучаемого теплового потока. Принимая, что изоляция состоит из n слоев с приведенной степенью черноты ε_{np} , получаем, что удельный тепловой поток через изоляцию

$$q = \frac{\varepsilon_{np} \sigma (T_{W1}^4 - T_{W2}^4)}{n}, \quad (19.39)$$

где T_{W1} и T_{W2} — температуры поверхности конструкции и излучения соответственно.

Если наружная поверхность имеет степень черноты ε_n и излучает в космос, то тепловой поток от поверхности

$$q = \varepsilon_n \sigma T_{W2}^4. \quad (19.40)$$

Сравнивая уравнения (19.39) и (19.40), получаем

$$q = \frac{\varepsilon_n}{1 + (\varepsilon_n/\varepsilon_{np}) n} \sigma T_{W1}^4. \quad (19.41)$$

Поверхность T без защитного экрана, но с той же степенью черноты, излучала бы поток

$$q_0 = \varepsilon_n \sigma T_{W1}^4.$$

Таким образом, степень снижения теплового потока

$$\frac{q}{q_0} = \frac{\varepsilon_{np}}{\varepsilon_{np} + \varepsilon_n n}. \quad (19.42)$$

Отсюда следует, что при увеличении n можно добиться существенного снижения энергии, излучаемой через слой теплоизоляции.

Если на поверхность аппарата падает извне некоторый лучистый поток $q_{л}$, то удельный тепловой поток при экранно-вакуумной изоляции определится из выражения

$$q = \frac{\varepsilon_n}{1 + (\varepsilon_n/\varepsilon_{np}) n} \sigma T_{W1}^4 - \frac{q_{л}}{1 + (\varepsilon_n/\varepsilon_{np}) n} = \frac{1}{1 + (\varepsilon_n/\varepsilon_{np}) n} (\varepsilon_n \sigma T_{W1}^4 - q_{л}). \quad (19.43)$$

При больших значениях $q_{л}$, когда

$$q_{л} > \varepsilon_{н} \sigma T_{W1}^4,$$

знак теплового потока изменится вне зависимости от числа слоев изоляции, т. е. поверхность будет нагреваться, однако результирующий поток в стенку при этом будет значительно меньше.

Из формул (19.42) и (19.43) следует, что тепловое сопротивление ЭВТИ может быть достаточно большим при увеличении l и уменьшении степени черноты экранов. На практике часто применяют экраны, покрытые слоем алюминия, имеющего $\varepsilon_{пр} < 0,1$.

Более сложной задачей является уменьшение утечек тепла из-за наличия тепловых мостов. Такими мостами являются узлы крепления антенн, солнечных батарей, выносных приборов и др. Поэтому в общем случае необходимо производить сложный расчет распределения тепловых потоков по конструкции и проверять тепловое состояние в специальных вакуумных камерах, имитирующих космические условия [72].

19.5. СИСТЕМА ПЕРЕНОСА ТЕПЛА

Система переноса тепла от тепловыделяющих элементов к радиационным поверхностям является важнейшим элементом системы терморегулирования. Поддержание заданной температуры внутри аппарата обычно обеспечивается регулированием интенсивности переноса тепла.

Система переноса тепла включает в себя внутреннюю систему, обеспечивающую распределение температуры внутри приборного контейнера, — между приборами и аппаратурой — и наружную систему для передачи тепла к радиатору. Эти системы принципиально различны для аппаратов с герметичным контейнером, заполненным газом, и для аппаратов с негерметичным контейнером или без контейнера вообще, когда аппаратура работает в условиях вакуума.

19.5.1. Вентиляционная система

Для распределения тепла внутри аппарата с герметичными контейнерами, заполненными газом, требуется создание принудительного газообмена, вентиляции, поскольку в условиях невесомости отсутствует естественный конвективный теплообмен.

Рассмотрим некоторые особенности организации принудительной системы вентиляции. Поток газа, приводимый в движение вентилятором, проходит через канал для охлаждения приборов, через теплообменник и возвращается к воздухозаборнику вентилятора. В задачу расчета входит определение потребной мощности вентилятора и геометрических размеров системы.

Исходные соотношения:

$$N_{\text{в}} = \frac{W_{\text{сек}} \Delta p}{\eta}; \quad (19.44)$$

$$Q = c_p \rho W_{\text{сек}} (T_1 - T_2) = F_{\text{пр}} \alpha_{\text{пр}} (\Delta T_{\text{эф}})_{\text{пр}} = F_{\text{то}} \alpha_{\text{то}} (\Delta T_{\text{эф}})_{\text{то}}. \quad (19.45)$$

Здесь $N_{\text{в}}$ — мощность вентилятора при секундном объемном расходе $W_{\text{сек}}$ и напоре Δp ;

η — коэффициент полезного действия;

Q — количество тепла, отводимое от приборов;

$(T_1 - T_2)$ — разность температур на входе и выходе из радиатора;

ρ — плотность газа;

$F_{\text{то}}$ и $F_{\text{пр}}$ — площади поверхностей теплообменников и приборов, участвующих в теплообмене;

$\alpha_{\text{то}}$ и $\alpha_{\text{пр}}$ — коэффициенты теплообмена.

Напор Δp затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений в системе. Сопротивление радиатора определяется трением о стенки и местными сопротивлениями; сопротивления приборов определяется, в основном, потерями на вихреобразование при их обтекании. Однако обычно общая площадь проходных сечений между приборами достаточно велика, поэтому сопротивление приборов большей частью не является определяющим.

Внутри каналов теплообменника должна быть обеспечена необходимая скорость для обеспечения необходимого теплосъема. Используя условие гидродинамической аналогии

$$\tau_w = \frac{\alpha_{\text{то}} W_{\text{сек}}}{c_p S_{\text{то}}}, \quad (19.46)$$

получаем
$$\Delta p = \frac{\rho W_{\text{сек}}}{S_{\text{то}}} \left(\frac{F}{F_{\text{то}}} \frac{T_1 - T_2}{\Delta T_{\text{эф}}} - \xi \frac{S_{\text{то}}^2}{S_1^2} \right). \quad (19.47)$$

Здесь τ_w — напряжение трения;

$S_{\text{то}}$ — площадь проходного сечения теплообменника;

F/F_0 — отношение всей поверхности радиатора к поверхности, участвующей в теплообмене;

S_1 — площадь проходных сечений внутри отсека;

ξ — коэффициент сопротивления внутри отсека.

Отсюда
$$N = M \frac{Q^3}{c_p^3 (T_1 - T_2)^3 \rho^2 S_r^2}, \quad (19.48)$$

где M — некоторая функция, зависящая в основном от геометрических размеров;

S_r — площадь проходных сечений радиатора.

Температура T_2 на выходе из радиатора не должна быть ниже наименьшей температуры, допускаемой для приборов; тем-

пература на входе в радиатор T_1 всегда ниже максимально допустимой температуры приборов. Отсюда следует, что при сужении допускаемого интервала температур мощность вентилятора возрастает. Это обстоятельство не существенно для аппаратов с незначительным тепловыделением, но становится определяющим при увеличении тепловыделения.

При стационарном режиме

$$Q = Q_{\text{пр}} + N_{\text{в}} \text{ и } \frac{N_{\text{в}}}{Q_{\text{пр}}} \sim Q_{\text{пр}}^2. \quad (19.49)$$

При заданных параметрах охлаждающей системы существует максимальное значение мощности приборов, при котором может быть осуществлено охлаждение. При дальнейшем увеличении мощности приборов вентилятор начнет работать на себя.

Если мощность приборов мала, то доля энергии привода вентилятора пренебрежимо мала и выбор его определяется чисто конструктивными соображениями.

19.5.2. Передача тепла к радиационным поверхностям

Тепло от внутреннего теплообменника или непосредственно от приборов может передаваться к радиатору с помощью промежуточного теплоносителя и без него. Если количество передаваемого тепла не велико, то в качестве теплоносителя удобно использовать газ, приводимый в движение вентилятором. При больших количествах снимаемого тепла мощность вентилятора быстро растет и становится целесообразным использовать жидкие теплоносители. Главной трудностью при использовании жидких теплоносителей является опасность их замерзания при переохлаждении радиатора и отсутствии тепловыделения или кипения в теплообменнике. В остальном жидкие теплоносители более удобны благодаря компактности системы, меньшему сечению трубопроводов, значительно меньшей мощности привода и удобству транспортировки теплоносителя на большие расстояния.

В ряде случаев, особенно для аппаратов с относительно небольшим тепловыделением, регулирование интенсивности теплообмена между внутренними частями аппарата и окружающей средой может осуществляться более простыми средствами. Простейшим примером изменения теплопередачи путем регулирования теплопроводности является способ, при котором в двухслойной оболочке, заполненной пористой изоляцией, создается переменное давление газа либо изменяется величина зазора.

Другим методом является установка жалюзей или экранов, с помощью которых можно закрывать или открывать внешнюю поверхность аппарата и изменять при этом эффективную поверхность излучения.

При расположении аппаратуры в вакууме теплообмен между приборами осуществляется только путем излучения и теплопро-

водности. Для правильного выбора компоновки необходимо провести предварительный расчет сложного теплообмена между несколькими телами, взаимно облучающими друг друга.

Для передачи тепла к внешним радиационным поверхностям используются специальные теплопроводы, которые представляют собой стержни из теплопроводящего материала. Более эффективным средством передачи тепла являются так называемые теплопередающие трубки, внутри которых тепло передается путем испарения жидкости в горячей части и конденсации в холодной части. Обратная подача жидкости в условиях невесомости может быть осуществлена при использовании специальных фитилей. Коэффициент теплопередачи в таких системах может достигать весьма больших значений. (Более подробно о теплопередающих трубах см. разд. 9.5).

Рассмотренные способы регулирования теплопередачи в космических аппаратах далеко не охватывают всех возможных методов, используемых для этой цели. Во многих случаях применяются системы холодильников, работающих по паровому или газовому циклу, вихревые трубки, термоэлектрические холодильники. Для малых аппаратов и выносных приборов часто можно ограничиться использованием тепловых аккумуляторов, существенно повышающих теплоемкость системы в силу скрытой теплоты фазовых переходов.

Выбор того или иного метода определяется ограничениями, накладываемыми массовыми и габаритными характеристиками летательного аппарата, его энерговооруженностью и надежностью.

19.6. РАСЧЕТ ХОЛОДИЛЬНИКОВ-ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

19.6.1. Основные схемы холодильников-излучателей

Отвод тепла, выделяемого бортовыми теплосиловыми и энергетическими установками, приборами и человеком, является одной из важнейших задач обеспечения деятельности всего космического летательного аппарата.

При полете в космосе холодильники-излучатели могут применяться для обеспечения следующих основных задач:

- 1) регулирование или поддержание необходимого температурного режима в приборных отсеках или в кабинах экипажа;
- 2) отвод отработанного тепла от энергетических установок.

Этот отвод тепла может быть обеспечен двумя способами: по открытой и закрытой схеме.

При работе по открытой схеме теплоноситель после охлаждения объекта выбрасывается во внешнюю среду, а в случае замкнутой схемы — теплоноситель после его охлаждения в холодильнике-излучателе возвращается снова к охлаждаемому объекту. Таким образом, в открытой схеме отвод тепла от объекта осуществляется без холодильника-излучателя, при отводе же тепла по

замкнутой схеме в системе охлаждения должен быть обязательно холодильник-излучатель. Следовательно, в первом случае к охлаждаемому объекту поступают все время новые порции теплоносителя, а в замкнутой схеме используется определенное одно и то же количество теплоносителя, циркулирующего в системе охлаждения. Всего вероятнее, что в длительно работающих системах охлаждения возможно использование только замкнутых схем, ибо даже очень малый расход теплоносителя в течение длительного времени приведет к необходимости иметь на борту космического летательного аппарата такие запасы теплоносителя, какие приведут к очень большой начальной массе аппарата. Например, для отвода только 1 кВт тепловой мощности в течение года при использовании в качестве теплоносителя водорода, имеющего наибольшую теплоемкость $c_p = 14,75$ кДж/(кг·К) при нагреве его на 500 К, на борту надо иметь 4,5 т водорода.

В связи с этим практически все длительно работающие космические объекты должны для охлаждения иметь системы отвода тепла замкнутого типа. Так как космический аппарат находится в условиях вакуума, то тепловая радиация является единственным способом отвода тепла от летательного аппарата. Однако при умеренных температурах количество тепла, которое может быть отведено излучением, меньше количества тепла, которое можно было бы отвести конвекцией с той же самой поверхности. Поэтому выполнить холодильник-излучатель в виде компактных теплообменников, как, например, автомобильные радиаторы, практически невозможно. Холодильник-излучатель является одним из громоздких и тяжелых элементов космической энергетической установки, масса которого может существенно влиять на общую массу космического аппарата.

Развитие космической техники привело к разработке большого числа разнообразных конструкций холодильников-излучателей. Но так как отвод тепла излучением связан с определенной излучающей поверхностью, то несмотря на появление все новых и новых конструкций холодильников-излучателей сейчас уже возможно их некоторым образом классифицировать.

По характеру изменения теплового потока от излучающей поверхности во времени холодильники-излучатели делятся на:

- а) стационарные,
- б) нестационарные.

В стационарных холодильниках-излучателях температура поверхности (а следовательно, и тепловой поток) по времени не изменяется и излучатель отдает в единицу времени одно и то же количество тепла.

В нестационарных холодильниках-излучателях температура поверхности периодически изменяется во времени, т. е. материал холодильника вначале аккумулирует тепло, а затем излучает его в космос. Стационарные холодильники-излучатели в свою очередь можно классифицировать следующим образом:

I. По типу теплоносителя:

а) без теплоносителя; б) с жидким теплоносителем; в) с газовым теплоносителем.

II. По типу конструкции оребрения излучающих поверхностей:

а) без оребрения; б) двухреберные; в) многореберные.

III. По конструкции внешней формы излучателя:

а) плоские; б) цилиндрические; в) конические; г) лепестковые.

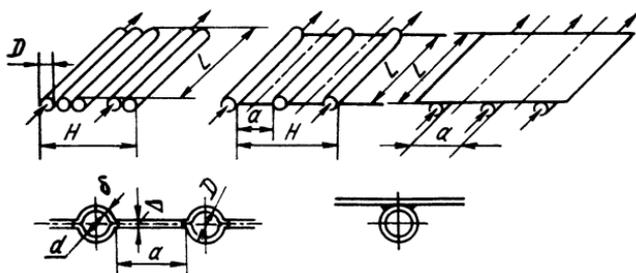


Рис. 19.19. Схемы элементов излучателей стационарного типа

IV. По типу противометеоритной защиты:

а) без защиты; б) экранированные; в) секционные.

Нестационарные холодильники-излучатели классифицируются следующим образом.

I. По типу конструкции излучателя:

а) ленточные; б) дисковые; в) шариковые.

II. По типу нагрева поверхности излучателя:

а) посредством теплопроводности; б) посредством конвекции; в) посредством излучения.

Для иллюстрации классификации холодильников-излучателей на рис. 19.19 приведены различные конструкции оребрения каналов излучающими ребрами. Например, схема в позволяет по сравнению со схемой а уменьшить опасность повреждения излучателя метеоритами.

Различные внешние формы излучателей приведены на рис. 19.20. Схемы а и б соответствуют цилиндрическому излучателю с разным расположением каналов с теплоносителем (осевым и спиральным), схема в — конической форме, схемы г и д — лепестковые.

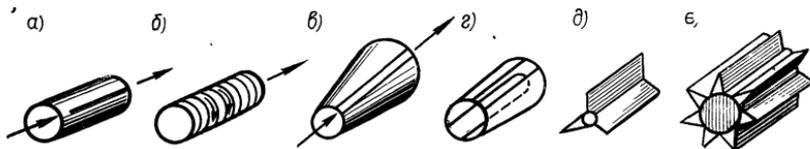


Рис. 19.20. Формы излучателей:

а, б—цилиндрические (сплошные); в—конические; г—цилиндрические с вырезами; д—трехреберный; е—многореберный

стковой форме. На рис. 19.20, *е* показано оребрение массивного излучающего тела цилиндрической формы, характерное для излучателя без теплоносителя.

На рис. 19.21 показан общий вид излучателя космической энергетической установки SNAP-50, выполненный в виде плоских крыльев из трубчато-оребрённых поверхностей, и общий вид излучателя термоэлектронной установки фирмы «Эроджет энд

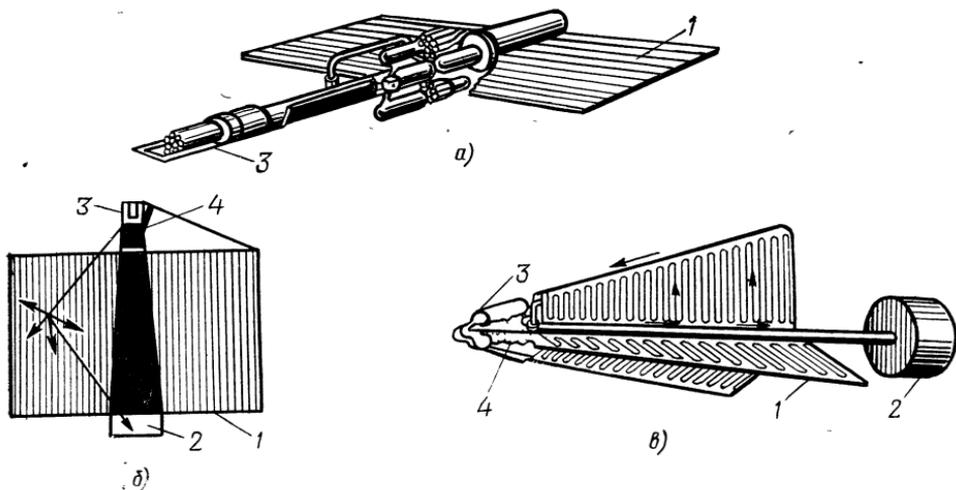


Рис. 19.21. Схемы стационарных холодильников-излучателей:

а—установка SNAP-50; *б*—форма излучателя в плане; *в*—термоэлектронная установка фирмы «Эроджет энд Радио Корпорейшн»; *1*—излучатель; *2*—полезный груз, *3*—реактор; *4*—защита

Рэдио Корпорейшн», состоящий из трех треугольных крыльев (лепестковый).

В ряде схем высокотемпературных устройств для отвода тепла в космос оказывается достаточным отводить его прямо с внешней поверхности тела без теплоносителя. Например, в американской термоэлектрической установке STAR тепло отводится прямо с анодов, образующих внешнюю поверхность.

Рассмотренные схемы стационарных холодильников-излучателей, конечно, не охватывают всех возможных разновидностей конструкций и дают представления только об основных типах.

Одним из существенных недостатков холодильников-излучателей стационарного типа является большая поверхность излучения (десятки или даже сотни квадратных метров), а следовательно, и существенная опасность метеоритного их повреждения. Даже в излучателях со значительным оребрением площадь, занимаемая каналами с теплоносителем (пробивание которой метеоритами недопустимо), опасно велика. В связи с этим был создан нестационарный тип излучателя. В нем тепло от охлаждаемого теплоносителя передается в малогабаритном нагреватель-

ном устройстве вращающейся металлической ленте, диску или шарикам. Затем вместе с вращением ленты (или диска) это тепло переносится в космос, излучается и цикл повторяется снова. На рис. 19.22, а, б показаны схемы нестационарных холодильников-излучателей, выполненные в виде вращающейся ленты.

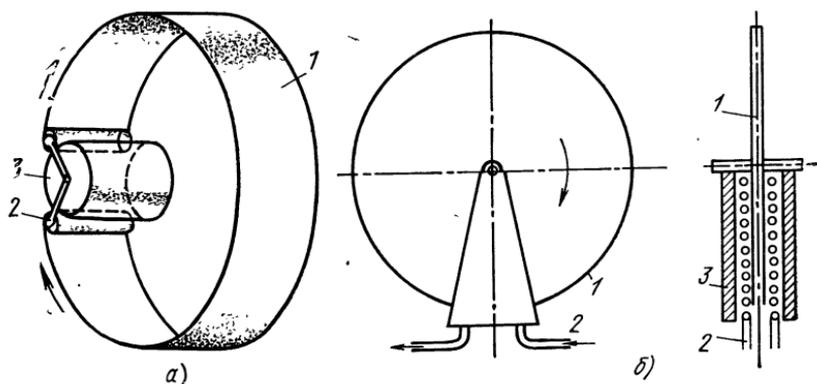


Рис. 19.22. Схемы нестационарных холодильников-излучателей:
 а—ленточный излучатель с барабаном; 1—лента; 2—прижимные ролики;
 3—барабан; б—дисковый излучатель; 1—диск; 2—трубки с теплоносителем;
 3—противометеоритная защита

В схеме ленточного излучателя тепло воспринимается лентой от барабана путем контактного теплообмена при взаимной обкатке. Ввиду того что при вращении ленты или диска в космосе их поверхность за цикл охлаждается, средняя температура излучающей поверхности у нестационарного излучателя будет меньше, чем у стационарных излучателей. Поэтому при той же температуре охлаждаемого объекта полная поверхность излучения у нестационарных холодильников будет больше, чем у стационарных, но опасность метеоритного повреждения существенно меньше.

Значительное термическое сопротивление в зоне контакта между лентой и охлаждаемым объектом является общим недостатком таких излучателей. Если передача тепла от теплоносителя к излучателю осуществляется излучением, то общая масса нестационарного излучателя может стать больше, чем стационарного, даже если, например, сама излучающая лента будет весьма тонкой.

Практическая реализация нестационарных схем излучателей затруднена не только сложностью обеспечения надежной работы в космосе подшипниковых и уплотнительных устройств, но и большой вероятностью сваривания ленты с барабаном или роликами. Очевидно, значительной будет и мощность, необходимая на преодоление сил трения при протяжке ленты. По этим причинам нестационарные холодильники-излучатели в настоящее время не нашли широкого практического применения.

Рассмотрим методику расчета холодильника-излучателя. Холодильник-излучатель представляет из себя теплообменник, по каналам которого движется горячий теплоноситель, а внешняя поверхность излучает тепло в окружающее пространство. Поэтому температура теплоносителя по длине теплообменника все время уменьшается. Если же теплоноситель в теплообменнике изменяет свое агрегатное состояние, например конденсируется, то температура теплоносителя на участке конденсации будет постоянной.

Вначале рассмотрим простейший холодильник-излучатель, представляющий из себя систему каналов без оребрения.

1. Излучающий канал без оребрения.

В наиболее общем случае (с учетом внешнего облучения) отводимое в излучателе тепло от теплоносителя определяется из решения следующих уравнений для элемента длины излучателя dx (рис. 19.23).

1. Количество тепла, отдаваемое теплоносителем

$$dQ_1 = -G c_p dT_f, \quad (19.50)$$

где G — секундный массовый расход теплоносителя;
 c_p и T_f — теплоемкость и температура теплоносителя.

2. Количество тепла, воспринятое от теплоносителя стенкой канала,

$$dQ_2 = \alpha (T_f - T_w) \Pi_1 dx, \quad (19.51)$$

где α — коэффициент теплоотдачи;
 T_w — температура внутренней стенки канала;
 Π_1 — периметр внутренней поверхности канала;
 dx — элемент длины канала.

3. Количество тепла, передаваемое через стенку канала теплопроводностью

$$dQ_3 = \frac{\lambda}{\delta} (T_w - T_0) (\Pi_1 + \pi \delta) dx, \quad (19.52)$$

где λ — коэффициент теплопроводности материала стенок канала;

δ — толщина стенки канала;

T_0 — температура наружной поверхности канала.

4. Количество тепла, излученное наружной поверхностью,

$$dQ_4 = \varepsilon \sigma_0 \varphi T_0^4 \Pi_2 dx - S_{\text{вн}} \Pi_2 dx, \quad (19.53)$$

где Π_2 — периметр наружного сечения канала;

$S_{\text{вн}}$ — тепло, поступающее от внешних источников (ядерное излучение, излучение Солнца и планет, теплообмен с окружающей средой);

φ — угловой коэффициент;

σ — постоянная Стефана—Больцмана.

В стационарных условиях $dQ_1 = dQ_2 = dQ_3 = dQ_4$. Тогда из уравнений (19.52) и (19.53) получим

$$T_W - T_0 = \frac{\varepsilon \sigma_0 \varphi \Pi_2 \delta}{\lambda (\Pi_1 + \pi \delta)} T_0^4 - S_{\text{вн}} \frac{\Pi_2}{(\Pi_1 + \pi \delta)} \frac{\delta}{\lambda} \quad (19.54)$$

или

$$T_W = T_0 + AT_0^4 - \bar{S}_{\text{вн}},$$

где

$$A = \frac{\varepsilon \sigma_0 \varphi \Pi_2 \delta}{\lambda (\Pi_1 + \pi \delta)}; \quad \bar{S}_{\text{вн}} = S_{\text{вн}} \frac{\Pi_2}{(\Pi_1 + \pi \delta)} \frac{\delta}{\lambda}.$$

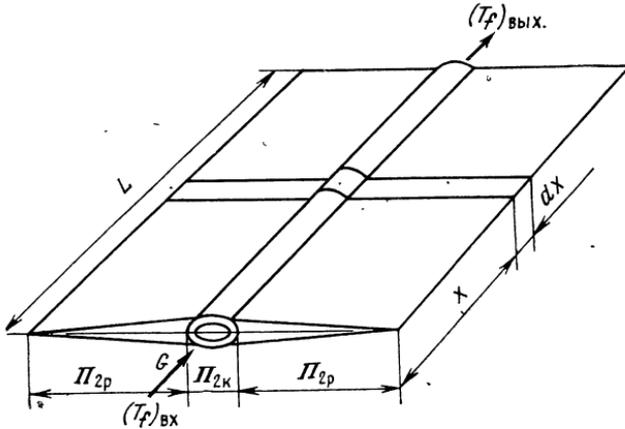


Рис. 19.23 Оребренный канал с двумя излучающими поверхностями

Из уравнений (19.51) и (19.52) получим

$$T_f - T_W = \frac{\lambda (\Pi_1 + \pi \delta)}{\delta \Pi_1 \alpha} (T_W - T_0) \quad (19.55)$$

или

$$T_f = T_W + B (T_W - T_0),$$

где

$$B = \frac{\lambda (\Pi_1 + \pi \delta)}{\delta \Pi_1 \alpha}.$$

Подставляя равенство (19.54) в уравнение (19.55), получаем

$$T_f = T_0 + A(1+B)T_0^4 - \bar{S}_{\text{вн}}(1+B). \quad (19.56)$$

Дифференцируя выражение (19.56), будем иметь

$$dT_f = [1 + 4A(1+B)T_0^3] dT_0. \quad (19.57)$$

Подставляя последнее выражение (19.57) в уравнения (19.50) и (19.53) и учитывая, что поверхность излучателя $dF_2 = \Pi_2 dx$, получим

$$- [1 + 4A(1+B)T_0^3] dT_0 = T_0^4 \frac{\varepsilon \sigma \varphi}{G c_p} dF_2 - S_{\text{вн}} \frac{1}{G c_p} dF_2. \quad (19.58)$$

Введем следующие обозначения:

$$C = (1 + B) A = \varepsilon \sigma \varphi \left(\frac{\delta}{\lambda} \frac{1}{1 + \pi \delta / \Pi_1} + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\Pi_2}{\Pi_1};$$

$$D = \frac{\varepsilon \sigma \varphi}{G c_p}; \quad \bar{q}_s = \frac{S_{\text{вн}}}{G c_p}; \quad E = \frac{q_s}{D} = \frac{S_{\text{вн}}}{\varepsilon \sigma \varphi}.$$

С учетом этих обозначений уравнение (19.58) можно записать в виде

$$\frac{1 + 4CT_0^3}{E - T_0^4} dT_0 = D dF_2. \quad (19.59)$$

Обозначим $T_0^4/E = \chi^4$, тогда $dT_0 = E^{1/4} d\chi$, и уравнение (19.59) примет вид

$$\left(\frac{1}{1 - \chi^4} + \frac{4CE^{3/4}\chi^3}{1 - \chi^4} \right) d\chi = DE^{3/4} dF_0.$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах от $T_{0\text{вх}}$ до $T_{0\text{вых}}$ (или от $\chi_{\text{вх}}$ до $\chi_{\text{вых}}$), получим для первого члена

$$\int_{\chi_{\text{вх}}}^{\chi_{\text{вых}}} \frac{d\chi}{1 - \chi^4} = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \chi_{\text{вых}}}{1 - \chi_{\text{вх}}} \frac{1 - \chi_{\text{вх}}}{1 + \chi_{\text{вх}}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \chi_{\text{вых}} -$$

$$- \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \chi_{\text{вх}} = \frac{1}{4} \ln \frac{E^{1/4} + T_{0\text{вых}}}{E^{1/4} - T_{0\text{вх}}} \frac{E^{1/4} - T_{0\text{вх}}}{E^{1/4} + T_{0\text{вх}}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{T_{0\text{вых}}}{E^{1/4}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{T_{0\text{вх}}}{E^{1/4}};$$

для второго члена

$$4CE^{3/4} \int_{\chi_{\text{вх}}}^{\chi_{\text{вых}}} \frac{\chi^3 d\chi}{1 - \chi^4} = CE^{3/4} \ln \frac{1 - \chi_{\text{вх}}^4}{1 - \chi_{\text{вых}}^4} =$$

$$= CE^{3/4} \ln \frac{T_{0\text{вх}}^4 - E}{T_{0\text{вых}}^4 - E} = 4CE^{3/4} \ln \frac{T_{0\text{вх}}}{T_{0\text{вых}}} + CE^{3/4} \ln \frac{1 - E/T_{0\text{вх}}^4}{1 - E/T_{0\text{вых}}^4}.$$

Окончательное выражение для площади наружной поверхности излучателя будет иметь вид

$$F_{2x} = \frac{1}{D} \left[\frac{1}{4F^{3/4}} \ln \frac{E^{1/4} + T_{0\text{вых}}}{E^{1/4} T_{0\text{вых}}} \cdot \frac{E^{1/4} - T_{0\text{вх}}}{E^{1/4} + T_{0\text{вх}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2E^{3/4}} \left(\operatorname{arctg} \frac{T_{0\text{вых}}}{E^{1/4}} - \operatorname{arctg} \frac{T_{0\text{вх}}}{E^{1/4}} \right) + \right.$$

$$\left. + 4C \ln \frac{T_{0\text{вх}}}{T_{0\text{вых}}} + C \ln \frac{1 - E/T_{0\text{вх}}^4}{1 - E/T_{0\text{вых}}^4} \right]. \quad (19.60)$$

Выражение (19.60) с учетом граничных условий $T_f = (T_f)_{\text{вх}}$ при $F_x = 0$ и $T_f = (T_f)_{\text{вых}}$ при $F_x = (F_x)_{\text{полн}}$ позволяет определить пло-

щадь холодильника-излучателя в наиболее общем случае. На рис. 19.24 приведен график, который позволяет определить температуру поверхности излучателя T_0 в зависимости от температуры теплоносителя при $\bar{q}_s = 0$.

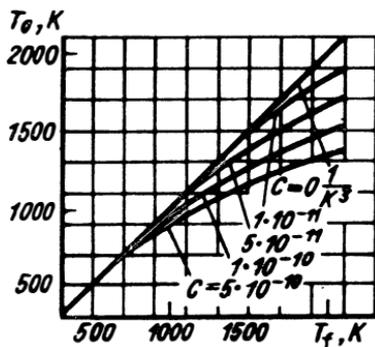


Рис. 19.24. Связь температуры поверхности излучателя T_0 и теплоносителя при $\bar{a}_s = 0$ и $C = A(1+B)$

В случае малого влияния внешнего облучения уравнение (19.60) для определения площади поверхности излучателя может быть упрощено.

Небольшие значения потоков внешнего облучения соответствуют малым значениям параметра E . В этом случае можно ограничиться первыми членами разложения в ряд типа

$$\ln(1-a) = -a - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}, \dots \text{ и } \operatorname{arctg} \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{3\alpha^3} - \frac{1}{5\alpha^5} + \dots$$

Тогда

$$\ln \frac{1 - E/T_{\text{овх}}}{1 - E/T_{\text{овых}}} \approx \frac{E}{T_{\text{овх}}} \left(\frac{T_{\text{овх}}^4 - 1}{T_{\text{овых}}^4} - 1 \right);$$

$$\ln \frac{1 + E/T_{\text{овых}}}{1 - E/T_{\text{овых}}} \approx 2 \left[\frac{E^{1/4}}{T_{\text{овых}}} + \frac{E^{3/4}}{3T_{\text{овых}}^3} + \frac{E^{5/4}}{5T_{\text{овых}}^5} \right].$$

Таким образом, для малых значений E/T_0^4 выражение (19.60) примет вид

$$F_x = \frac{1}{D} \left\{ \frac{1}{3T_{\text{овх}}^3} \left(\frac{T_{\text{овх}}^3}{T_{\text{овых}}^3} - 1 \right) + 4C \ln \frac{T_{\text{овх}}}{T_{\text{овых}}} + \frac{E}{T_{\text{овх}}^4} \left[\frac{1}{3T_{\text{овх}}^3} \left(\frac{T_{\text{овх}}^7}{T_{\text{овых}}^7} - 1 \right) + C \left(\frac{T_{\text{овх}}^4}{T_{\text{овых}}^4} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (19.61)$$

При отсутствии внешнего облучения ($E=0$) уравнение (19.61) примет более простой вид:

$$F_x = \frac{1}{D} \left\{ 4C \ln \frac{T_{\text{овх}}}{T_{\text{овых}}} + \frac{1}{3T_{\text{овых}}^3} \left[\left(\frac{T_{\text{овх}}}{T_{\text{овых}}} \right)^2 - 1 \right] \right\}. \quad (19.62)$$

Подставляя значения констант D и C , получим

$$F_x = \frac{Gc_p}{\varepsilon\sigma\varphi} \left[4 \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \left(\frac{\delta}{\lambda} \frac{1}{1 + \pi\delta/\Pi_1} + \frac{1}{\alpha} \right) \ln \frac{T_{\text{вх}}}{T_{0\text{вых}}} + \frac{1}{3T_{0\text{вых}}^3} \left(\frac{T_{0\text{вых}}^3}{T_{\text{вых}}^3} - 1 \right) \right].$$

Рассмотрим более частные случаи, которые широко используются на практике. Выражения $\frac{\delta}{\lambda} \frac{1}{1 + \pi\delta/\Pi_1}$ и $\frac{1}{\alpha}$ характеризуют температурные перепады в стенке и в теплоносителе.

Для большинства случаев, кроме конденсации пара в канале, можно принять, что $\frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha} \approx \frac{1}{\alpha}$, а следовательно, величина

$C \approx \frac{\varepsilon\sigma\varphi}{\alpha} \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$. Физически это характеризует то, что для рассматриваемых условий температурный перепад в стенке практически небольшой. Для газовых теплоносителей величина C имеет порядок $C \approx 10^{-10} \div 10^{-11} \text{ К}^{-3}$, для жидкостей $C \approx 10^{-10} \div 10^{-11} \text{ К}^{-3}$, для конденсирующего пара $C \approx 10^{-11} \div 10^{-12} \text{ К}^{-3}$.

Влияние величины C на перепад между температурами поверхностей излучателя T_0 и теплоносителя T_f можно определить из рис. 19.24 и установить области практического совпадения температур T_0 и T_f в зависимости от величины C . При малых значениях $CT_0 \approx T_f$ и в расчетах термическим сопротивлением между теплоносителем и наружной поверхностью канала можно пренебречь.

Величина второго члена в фигурных скобках в уравнении (19.62) имеет порядок $10^{-7} - 10^{-9}$. Это показывает, что для жидкостей, а тем более для пара (при технически реальных температурах), уравнение (19.62) может быть упрощено и приведено к виду

$$F_{x\infty} = \frac{Gc_p}{\varepsilon\sigma\varphi} \frac{1}{3T_{0\text{вых}}^3} \left[\left(\frac{T_{\text{свх}}}{T_{0\text{вых}}} \right)^2 - 1 \right]. \quad (19.63)$$

Здесь индекс ∞ обозначает условие $\alpha = \infty$.

Для газов практические расчеты показывают, что отношение первого члена ко второму обычно не превышает 15—25%. Обозначим это отношение через

$$\bar{F}_{\text{тепл}} = \frac{3T_{0\text{вых}}^3 4C \ln(T_{\text{свх}}/T_{0\text{вых}})}{(T_{\text{свх}}/T_{0\text{вых}})^3 - 1}. \quad (19.64)$$

Тогда выражение для площади поверхности излучателя можно записать в виде

$$F_x = F_{x\infty} (\bar{F}_{\text{тепл}} + 1). \quad (19.65)$$

Учитывая, что $Gc_p = \frac{Q}{(T_f)_{\text{вх}} - (T_f)_{\text{вых}}}$ и то, что для жидко-

стей и пара коэффициент перед T_0^4 в выражении (19.56) настолько мал по порядку, что можно считать $T_f \approx T_0$, выражение (19.63) примет вид

$$F_{x\infty} = \frac{Q}{\varepsilon\sigma\varphi} \frac{1}{3} \frac{1}{(T_f)_{\text{ВХ}}^4} \frac{[(T_f)_{\text{ВХ}}/(T_f)_{\text{ВЫХ}}]^3 - 1}{1 - [(T_f)_{\text{ВЫХ}}/(T_f)_{\text{ВХ}}]}$$

Или, обозначив через

$$\bar{F} = \frac{1}{3} \frac{[(T_f)_{\text{ВХ}}/(T_f)_{\text{ВЫХ}}]^3 - 1}{1 - T_{\text{ВЫХ}}/T_{\text{ВХ}}},$$

получим соотношение

$$F_{x\infty} = \bar{F} \frac{Q}{\varepsilon\sigma\varphi} \frac{1}{T_{\text{ВХ}}^4}. \quad (19.66)$$

Выражение (19.66) отличается от простейшего уравнения Стефана—Больцмана для идеального излучателя (т. е. излучателя с постоянной температурой по всей поверхности) только коэффициентом \bar{F} .

Так как поверхность излучателя может быть определена также по среднеинтегральной температуре \bar{T} , т. е.

$$F_{x\infty} = \frac{Q}{\varepsilon\sigma\varphi} \frac{1}{\bar{T}^4},$$

то из выражения (19.66)

$$\bar{T} = \frac{(T_f)_{\text{ВХ}}}{\sqrt[4]{\bar{F}}}. \quad (19.67)$$

Изменение коэффициента \bar{F} в зависимости от степени охлаждения теплоносителя в излучателях $(T_f)_{\text{ВЫХ}}/(T_f)_{\text{ВХ}}$ показано на рис. 19.25.

Отношение температур $(T_f)_{\text{ВЫХ}}/(T_f)_{\text{ВХ}}$ в реальных установках определяется в зависимости от количества отводимого тепла из цикла Q_2 , расходом G , типом теплоносителя (его теплоемкостью) и абсолютным уровнем температур.

II. Излучающий оребренный канал.

В заключение этого раздела рассмотрим приближенный метод расчета оребренного излучателя. Для большинства предварительных расчетов он является достаточно точным и одинаково пригодным для всех типов оребрения.

Методика расчета ребер была дана в гл. II. Особенностью расчета ребер для холодильников-излучателей заключается в том, что в этом случае передача тепла от ребер в окружающее пространство осуществляется не путем конвекции, а исключительно излучением.

При полете космического летательного аппарата в пределах солнечной системы он будет находиться в зоне теплового излучения Солнца и ближайших планет (например: Земли, Венеры, Марса и т. д.). Если на летательном аппарате имеется ядерная энергетическая установка, то элементы конструкции аппарата (в том числе и холодильник-излучатель) будут находиться под действием собственного ядерного излучения. Кроме этого, если летательный аппарат находится в разреженных слоях атмосферы планеты, то поверхность холодильника будет нагреваться также от соударения с молекулами и атомами атмосферы. При этих условиях изменение количества тепла в элементе длины ребра вследствие его теплопроводности dQ будет равно разности между излучаемым теплом dE и теплом от внешних источников, которое поглощается ребром $dS_{\text{вн}}$.

Уравнение теплового баланса для элемента длины ребра можно записать в виде

$$dQ = dE - dS_{\text{вн}}, \quad (19.68)$$

где $S_{\text{вн}}$ — тепло от внешних источников;
 E — лучистый поток тепла от холодильников в окружающее пространство.

Будем считать ребро серым телом, которое излучает тепло в окружающее пространство с постоянным угловым коэффициентом из каждой точки вдоль ребра, внутри которого распределение температуры является только функцией расстояния от его основания (т. е. температурное поле в ребре одномерное). При этих допущениях дифференциальное уравнение теплового баланса (19.68) для ребра, физические свойства материала которого постоянны, будет иметь вид (см. гл. II)

$$\lambda \frac{d}{dx} \left(\delta \frac{dT}{dx} \right) - n\varepsilon\varphi T^4 + S_{\text{вн}} = 0, \quad (19.69)$$

где n — число излучающих сторон ребра ($n=1$ или 2);
 φ — угловой коэффициент;
 δ — толщина ребра;
 λ — коэффициент теплопроводности ребра.

Рассмотрим случай трапециевидных ребер (рис. 19.26):

$$\delta = \delta_0 \left(1 - B \frac{x}{L} \right),$$

где δ_0 — толщина ребра у его основания;
 B — скос (уклон) ребра.

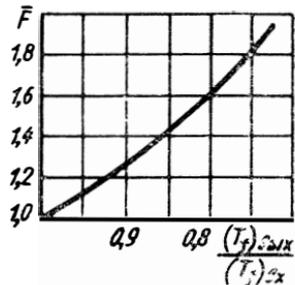


Рис. 19.25. Изменение поверхности холодильника-излучателя в зависимости от степени охлаждения теплоносителя в нем

Тогда температурное поле в ребре определится из уравнения (19.69) со следующими граничными условиями:

$$T \Big|_{x=0} = T_0; \quad \lambda \delta \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0, \quad (19.70)$$

где T_0 — температура у основания ребра.

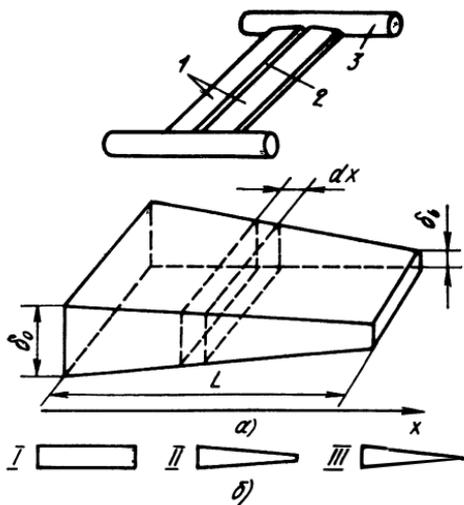


Рис 19.26. Типичные конфигурации ребер:

a —радиатор космических аппаратов; 1—ребра; 2—трубка; 3—трубопровод; б—профили ребер: I—прямоугольный; II—трапециевидный; III—треугольный

Условия (19.70) означают, что излучение тепла с концов ребер считается пренебрежимо малым.

Введем следующие безразмерные параметры:

$$\theta \approx \frac{T}{T_0}; \quad x = \frac{x}{L}; \quad A = \frac{S_{\text{вн}}}{n\sigma\varepsilon\varphi T_0^4}; \quad P = \frac{n\sigma\varepsilon\varphi T_0^3 L^2}{\lambda\delta_0}.$$

Тогда уравнение (19.69) и граничные условия (19.70) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(1 - Bx) \frac{d\theta}{dx} \right] - P(\theta^4 - A) &= 0; \\ \theta \Big|_{x=0} &= 1; \\ \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right) \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=1} &= 0. \end{aligned} \quad (19.71)$$

Количество тепла, отдаваемое ребром в окружающее пространство, определится согласно закону Фурье:

$$Q = -\lambda\delta_0 \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \cdot h,$$

где h — ширина ребра.

Коэффициент эффективности ребра

$$\eta_p = \frac{Q}{Q_{\max}}, \quad (19.72)$$

где Q_{\max} — максимальный тепловой поток для данной геометрии ребра при условии, что температура ребра постоянна и равна T_0 .

Очевидно, максимальный теплоотвод от ребра будет при отсутствии поглощения падающего теплового и ядерного излучений и при равномерном распределении температуры по длине ребра (см. гл. II).

$$\text{В этом случае} \quad Q_{\max} = n\sigma\varepsilon\varphi T_0^4 Lh, \quad (19.73)$$

где L — длина ребра.

Коэффициент эффективности ребра можно представить с помощью безразмерных переменных

$$\eta_p = - \frac{d\theta/dx|_{x=0}}{P}. \quad (19.74)$$

В случае если геометрия ребер и температура T_0 известны, то решение уравнения (19.71) позволяет определить эффективность ребер. Ввиду нелинейности дифференциального уравнения (19.71) точное его решение может быть найдено только для частных случаев [131].

На рис. 19.23 представлена секция излучателя с двумя излучающими ребрами. Рабочее тело входит в теплообменник при температуре $(T_f)_{\text{вх}}$ и выходит при несколько меньшей температуре $(T_f)_{\text{вых}}$. Этим значениям температур теплоносителя будут соответствовать определенные значения температур наружной поверхности канала $T_{\text{овх}}$ и $T_{\text{овых}}$.

Предположим, что температура наружной поверхности канала (за исключением температуры поверхности самих ребер) на элементарной длине dx по всему периметру канала является величиной постоянной. (В тех случаях, когда это допущение дает чрезмерно большую ошибку, необходимо учитывать изменение температуры наружной поверхности по периметру канала).

При вышепринятом допущении количество тепла, излучаемое наружной поверхностью оребренного канала, будет определяться уравнением

$$dQ = \varepsilon\sigma_0\varphi T_0^4 \Pi_{2к} dx - S_{\text{вн}} \Pi_2 dx + 2\varepsilon\sigma_0\varphi T_0^4 \Pi_{2р} \eta dx. \quad (19.75)$$

Здесь $\Pi_{2к}$ — периметр наружной излучающей поверхности канала;

$\Pi_{2р}$ — периметр наружной излучающей поверхности ребра;

$\Pi_2 = \Pi_{2к} + 2\Pi_{2р}$ — полный периметр наружной излучающей поверхности оребренного канала;

η — эффективность ребра.

Последний член в уравнении (19.75) учитывает излучение ребристой поверхности. Выражение (19.75) приведем к виду

$$dQ = (\varepsilon \sigma_0 \varphi T_0^4 - S_{\text{вн}}) \left(\Pi_{2\text{к}} + \Pi_{2\text{р}} \frac{2\eta - \frac{2S_{\text{вн}}}{\varepsilon \varphi \sigma_0 T_0^4}}{1 - \frac{S_{\text{вн}}}{\varepsilon \sigma_0 \varphi T_0^4}} \right) dx. \quad (19.76)$$

Обозначим множитель

$$\Pi_{2\text{к}} + \Pi_{2\text{р}} \frac{2\eta - \frac{2S_{\text{вн}}}{\varepsilon \varphi \sigma_0 T_0^4}}{1 - \frac{S_{\text{вн}}}{\varepsilon \sigma_0 \varphi T_0^4}} = \Pi_{2\text{эк}}, \quad (19.77)$$

называемый эквивалентным периметром ребренного канала. Тогда уравнение (19.76) можно записать в виде

$$dQ = (\varepsilon \sigma_0 \varphi T_0^4 - S_{\text{вн}}) \Pi_{2\text{эк}} dx. \quad (19.78)$$

Из уравнений (19.78) и (19.53) следует, что введение понятия эквивалентного периметра $\Pi_{2\text{эк}}$ позволяет представить уравнение (19.75) для ребренного канала в форме, аналогичной уравнению (19.53) для неоребренного канала.

Эквивалентный периметр ребрения канала $\Pi_{2\text{эк}}$ соответствует периметру неоребренного канала, который излучает при постоянной температуре T_0 по всей поверхности такое же количество тепла, какое излучает ребренный канал с действительным периметром $\Pi_2 = \Pi_{2\text{к}} + 2\Pi_{2\text{р}}$ и постоянной температурой по ребрам.

Таким образом, для расчета ребренного излучателя можно воспользоваться вышеизложенной методикой для простейшего неоребренного излучателя, заменив во всех вышеприведенных уравнениях наружный периметр канала эквивалентным периметром. Система уравнений (19.50) и (19.53) может быть аналитически решена только для случая, когда $\Pi_{2\text{эк}}$ по длине излучателя не изменяется, т. е. когда $\Pi_{2\text{эк}} = \text{const}$. На самом же деле, $\Pi_{2\text{эк}}$ зависит от T_0 и, следовательно, изменяется по длине излучателя. Однако в большинстве практических случаев величина эквивалентного периметра $\Pi_{2\text{эк}}$ изменяется незначительно от одного конца радиатора к другому, и поэтому в первом приближении может быть принята постоянной. Если же изменение эквивалентного периметра по длине излучателя существенно, то расчет необходимо производить по участкам. Для этой цели весь холодильник-излучатель условно разбивается на ряд секций, каждую из которых необходимо рассчитывать отдельно.

Рекомендуемая литература:

основная: [5, 72, 131],

дополнительная: [31, 33, 41, 55, 67, 91, 102, 117, 129].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абрамович Г. Н.** Прикладная газовая динамика. М., Гостехиздат, 1953, 736 с.
2. **Абрамович Г. Н.** Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960, 715 с.
3. **Авдуевский В. С.** Исследование факела горения в свободной турбулентной струе однородной смеси. ЦИАМ, 1952.
4. **Авдуевский В. С.** Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе на пористой или испаряющейся поверхности, при малых продольных градиентах давления. М., Оборонгиз, 1956, 20 с.
5. **Авдуевский В. С.** и др. под ред. проф. Кошкина В. К. Основы теплопередачи в авиационной и ракетной технике. М., Оборонгиз, 1960, 390 с.
6. **Авдуевский В. С., Копятевич Р. Н.** Расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе при произвольном распределении давления вдоль поверхности. — «Известия АН СССР. Сер. Механика и машиностроение», 1960, № 1, с. 3—12.
7. **Авдуевский В. С.** Приближенный метод расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя. — «Известия АН СССР. Сер. Механика и машиностроение», 1960, № 2.
8. **Авдуевский В. С., Оброскова Е. И.** Исследование ламинарного пограничного слоя на пористой пластине с учетом тепло- и массообмена. — «Известия АН СССР. Сер. Механика и машиностроение», 1960, № 4, с. 25—35.
9. **Авдуевский В. С.** Расчет трехмерного ламинарного пограничного слоя на линиях растекания. — «Известия АН СССР, Сер. Механика и машиностроение», 1962, № 1, с. 32—42.
10. **Авдуевский В. С.** Приближенный метод расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя. — «Известия АН СССР, Сер. Механика и машиностроение», 1962, № 2, с. 11—17.
11. **Авдуевский В. С.** Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе. — «Известия АН СССР, Сер. Механика и машиностроение», 1962, № 4, с. 3—13.
12. **Авдуевский В. С., Оброскова Е. И.** Ламинарный пограничный слой на пористой пластине при наличии химических реакций на поверхности. — «Известия АН СССР, Сер. Механика и машиностроение», 1962, № 5, с. 3—13.
13. **Авдуевский В. С.** Влияние кривизны ударной волны на теплообмен при трехмерном обтекании тел сверхзвуковым потоком. — В Сб «Исследования теплообмена в потоках жидкости и газа», М. «Машиностроение», 1965, 175 с.
14. **Авдуевский В. С., Крюков В. Н., Солнцев В. П.** Экспериментальное исследование структуры пограничного слоя и теплообмена на шероховатой поверхности. — В Сб. «Исследование теплообмена в потоках жидкости и газа», М., «Машиностроение», 1965 с. 55—90.
15. **Авдуевский В. С., Медведев К. И.** Физические особенности течения в области отрыва при трехмерном взаимодействии пограничного слоя с ударной волной. — МЖГ, 1967, № 1, с. 25—33.
16. **Авдуевский В. С., Глебов Г. А.** Теплообмен в передней критической точке неразрушаемого тела, омываемого потоком частично ионизованного воздуха — ИФЖ, 1970, т. 18, № 2, с. 9—18.
17. **Авдуевский В. С., Глебов Г. А.** Теплообмен в окрестности критической точки на проницаемой поверхности. — ИФЖ, 1970, т. 18, № 5, с. 27—36.

18. **Авдуевский В. С.** и др. Основы теории полета космических аппаратов. М., «Машиностроение», 1972.
19. **Авилова И. В.** и др. Оптические свойства горячего воздуха. М., «Наука», 1970, 320 с.
20. **Алемасов В. Е.** Теория ракетных двигателей. М., «Машиностроение», 1963, 347 с.
21. **Амбразевичюс А. Б., Жукаускас А. А.** Исследование теплоотдачи пластины в потоке капельной жидкости. — Труды АН Литовской ССР, Сер. Б. 3, 1959.
22. **Анфимов Н. А.** О некоторых эффектах, связанных с многокомпонентным характером газовых смесей. — «Известия АН СССР, Сер. Механика и машиностроение», 1963, № 5, с. 117—224.
23. **Анфимов Н. А.** Горение графита в потоке воздуха при высоких температурах. — «Известия АН СССР. Сер. Механика и машиностроение», 1964, 5, с. 3—12.
24. **Анфимов Н. А., Альтов В. В.** Теплообмен, трение, массообмен в ламинарном многокомпонентном пограничном слое при вдуве инородных газов. ТВТ, 1965, № 3, с. 409—421.
25. **Анфимов Н. А.** Тепло- и массообмен в окрестности критической точки при вдуве и отсосе различных газов через поверхность. — «Известия АН СССР. МЖГ», 1966, № 1, с. 22—32.
26. **Алексеев Б. В.** Ламинарный пограничный слой у сублимирующей поверхности. — ЖВМ и МФ, т. 4, 1964, № 3, с. 512—525.
27. **Артамонов Н. И.** и др. Экспериментальное исследование местной теплоотдачи и гидравлического сопротивления при охлаждении газа в трубе. — «Теплофизика высоких температур», 1970, № 6, стр. 1228—1234.
28. **Бай-Ши-И.** Динамика излучающегося газа. Пер. с англ., М., «Мир», 1968, 323 с.
29. **Баранцев Р. Г.** Взаимодействие газов с поверхностью. — В сб. статей, пер. с англ., М., «Мир», 1965, 227 с.
30. **Беквис Н. П.** Влияние свойств газа на теплообмен в окрестности передней критической точки. — В сб. «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций», М., ИЛ, 1962, с. 225—229.
31. **Блох А. Г.** Основы теплообмена излучением. М., Госэнергоиздат, 1962, 331 с.
32. **Браиловская И. Ю., Чудов Л. А.** Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. — В сб. «Вычислительные методы и программирование», М., Изд. МГУ, 1962.
33. **Брамсон М. А.** Инфракрасное излучение нагретых тел. М., «Наука», 1964, 223 с.
34. **Ван-Дрифт Э. Р.** Конвективная теплопередача в газах. — В сб. «Турбулентные течения и теплопередача», М., ИЛ, 1963, с. 563.
35. **Варгафтик Н. Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. Изд. 2-е, М., «Наука», 1972, 720 с.
36. **Гинзбург И. П.** Теория сопротивления и теплопередачи. Изд. ЛГУ, 1970, 375 с.
37. **Гиршфельдер Дж. О., Кэртисс Ч., Бэрд Р.** Молекулярная теория газов и жидкостей. Пер. с англ., М., ИЛ, 1961, 929 с.
38. **Голубев И. Ф.** Вязкость газов и газовых смесей. М., Физматгиз, 1959, 375 с.
39. **Гребер Г., Эрк С., Григуль У.** Основы учения о теплообмене. М., ИЛ, 1958, 566 с.
40. **Громов В. Г.** Химически неравновесный ламинарный пограничный слой в диссоциированном воздухе — «Известия АН СССР, МЖГ», 1966, № 2, с. 3—10.
41. **Гродзовский Г. Л., Жулев Ю. Г.** Оптимальные системы отвода тепла. Труды XVII Конгресса Международной Астронавтической Федерации, 1967.
42. **Гутенмахер Л. И.** Электрические модели. М., Изд. АН СССР, 1949.

43. Гурвич Л. В. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Изд. АН СССР, 1962 г. 1—2.
44. Газовая динамика космических аппаратов — В сб статей, М., «Мир», 1965, 278 с.
45. «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций». — В сб. статей, М., ИЛ. 1962, 552 с
46. Данилов Ю. И., Каретников Д. В. Состояние и направление разработок термомиссионных преобразователей. — «Атомная энергия», 1970, т. 28, № 1, с. 33—38.
47. Демкин Н. Б. Фактическая площадь касания твердых поверхностей. М., Изд. АН СССР, 1962, 111 с.
48. Дейч М. Е., Филиппов Г. А., Газодинамика двухфазных сред. М., «Энергия», 1968, 423 с.
49. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. — «Прикладная математика и механика», 1942, № 1.
50. Дородницын А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя. ПМИТФ, 1960, № 3.
51. Дорошук В. Е. Кризисы теплообмена при кипении воды в трубах. М., «Энергия», 1970, 167 с.
52. Дорренс У. Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. Пер. с англ., М., «Мир», 1966, 439 с.
53. Драйден Х. Л. Переход ламинарного течения в турбулентное. Турбулентные течения и теплопередача, М., ИЛ, 1963, 563 с.
54. Доклады научно-технической конференции МЭИ, М., «Энергия», 1965, 145 с.
55. Жулев Ю. Г. Оптимальная форма одиночных излучающих элементов. ТВТ, 1967, № 1.
56. Завелевич Ф. С. Горение графита в химически равновесном пограничном слое. — МЖГ, 1966, № 1, с. 161—167.
57. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высоко-температурных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966, 686 с.
58. Ибрагимов М. Х. и др. Расчет коэффициентов гидравлического сопротивления при турбулентном течении жидкости в каналах некруглого поперечного сечения. — «Атомная энергия», т. 23, вып. 4, 1967, с. 300—305.
59. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. М., «Энергия», 1970, 424 с.
60. Исследование гиперзвуковых течений.— Сб. статей, М., «Мир», 1964, 544 с.
61. Калинин Э. К., Дрейцер Г. А. Нестационарный конвективный теплообмен и гидродинамика в каналах. — Итоги науки и техники, Сер. «Электротехника и энергетика», Изд. ВИНТИ, М., 1969, 134 с.
62. Калинин Э. К., Дрейцер Г. А., Ярхо С. А. Интенсификация теплообмена в каналах, М., «Машиностроение», 1972, 220 с.
63. Калинин Э. К. и др. Пленочное кипение в элементах энергетических устройств. Итоги науки. М., Изд ВИНТИ, 1972, 137 с.
64. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965, 704 с
65. Кондратьев Г. М. Регулярный тепловой режим. М., Гостехиздат, 1954, 408 с.
66. Кондратьев Г. М. Исследование в области точных тепловых измерений. Труды ВНИИМ, вып. 25 (85). М—Л., Машгиз, 1955, 136 с.
67. Кондратьев К. Я. Лучистый теплообмен в атмосфере. М., «Высшая школа», 1967
68. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой. — В сб. «Проблемы механики», вып. II, М., ИЛ, 1959, с. 297—340
69. Козлов Л. В. Экспериментальное исследование поверхностного трения на плоской пластине в сверхзвуковом потоке при наличии теплообмена. — «Известия АН СССР. Сер. Механика и машиностроение», № 2, 1963, с. 11—20.

70. Козлов Л. В. Связь аэродинамического нагрева с поверхностным трением. — «Известия АН СССР, Сер. Механика и машиностроение», 1963, № 4.
71. Козлов Л. В. Экспериментальное определение закона теплообмена для турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. — В сб. под ред. Кошкина В. К. М., Машгиз, 1965, с. 91—102.
72. Козлов Л. В. и др. Моделирование тепловых режимов космического аппарата и окружающей его среды. М., «Машиностроение», 1971, 380 с.
73. Кошкин В. К. и др. Теплообмен в канале плотной упаковки пучка труб или стержней. — «Теплофизика высоких температур», т. 5, 1967, № 2, с. 317—321.
74. Кошкин В. К., Калинин Э. К. Теплообменные аппараты и теплоносители (теория и расчет). М., Машиностроение, 1970, 199 с.
75. Кошкин В. К. и др. Экспериментальное исследование контактного термического сопротивления разнородных материалов. — «Авиационная техника», 1971, № 3, с. 75—83.
76. Кошкин В. К. и др. Нестационарный теплообмен. М., «Машиностроение», 1973, 328 с.
77. Кошмаров Ю. А., Горская Н. М. Теплообмен пластины в сверхзвуковом потоке разреженного газа. — Инженерный журнал, т. 5, вып. 2, 1962.
78. Кошмаров Ю. А., Горская Н. М. Теплообмен шара в сверхзвуковом потоке разреженного газа. — МЖГ, 1966, № 4, с. 175—177.
79. Кошмаров Ю. А., Свищевский С. Б. Теплоотдача сферы в промежуточной области динамики разреженного газа. — МЖГ, 1972, № 2, с. 170—172.
80. Кошмаров Ю. А. Конспект лекций по теплопередаче. М., МАИ, 1972, 204 с.
81. Кутателадзе С. С. Теплопередача при конденсации и кипении. М., Машгиз, 1952, 231 с.
82. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена, гл. I, II, VII, М., Машгиз, 1957, 383 с.
83. Кутателадзе С. С., Стырикович М. А., Гидродинамика газоожидкостных систем. М—Л, Госэнергоиздат, 1958, 232 с.
84. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Изд. Сиб. отд. АН СССР, 1962, 180 с.
85. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. Новосибирск, «Наука Сиб. изд.», 1970, 659 с.
86. Кутателадзе С. С., Боришанский В. М. Справочник по теплопередаче. М—Л, Госэнергоиздат, 1959, 414 с.
87. Коэн, Бромберт, Липких. Пограничный слой, в котором протекают химические реакции, обусловленные введением постороннего вещества.—ВРТ, 1959, № 4, с. 3—21.
88. Крокко Л., Кохен С. Б., Ламинарный пограничный слой в сжимаемом градиентном течении при наличии теплообмена. — В сб. «Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи». М—Л, Госэнергоиздат, 1960, 394 с.
89. Крюков В. Н., Солнцев В. П. Исследование теплообмена на шероховатой пластине. — В сб. «Тепло- и массоперенос», Минск, т. 5, ч. I, 1972, с. 57—61.
90. Кэмп Н., Роуз П., Детра Р. Ламинарный теплообмен тупых тел с потоком диссоциированного воздуха. — В сб. «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций». М., ИЛ, 1962, с. 229—256.
91. Краффт, Эрике. Космический полет. Пер. с англ. М., «Наука», 1969, 571 с.
92. Лабораторные работы по курсу «Теплопередача», ч. II, МАИ, 1964, 126 с.
93. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М., «Наука», 1970, 343 с.
94. Лафахан С., Уэлс В. Обугливающиеся уносимые покрытия для планирующих летательных аппаратов, входящих в атмосферу Земли с орбитальной и сверхорбитальной скоростью. — «Астронавтика и ракетостроение», 1964, № 28, с. 24—36.

95. Лобб Р., Винклер Е., Перш Д. Экспериментальное исследование турбулентных пограничных слоев в сверхзвуковом потоке — ВРТ. 1955, № 5, с. 88—103.
96. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962, 479 с.
97. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970, 904 с.
98. Лужанский Б. Е., Солнцев В. П. Экспериментальное исследование теплообмена в зонах отрыва турбулентного пограничного слоя перед уступом. — ПМТФ, 1971, № 1, с. 126—130.
99. Лужанский Б. Е., Солнцев В. П., Лимонов В. Г. К вопросу о расчете теплообмена в отрывных зонах с использованием местных параметров течения на границе пристеночного пограничного слоя. — ИФЖ, 1971, т. XXI, № 1, с. 34—37.
100. Лужанский Б. Е., Солнцев В. П. Экспериментальное исследование течения в трехмерных отрывных зонах перед уступами. ПМТФ, 1972, № 1, с. 50—54.
101. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967, 599 с.
102. Маккей Д. Б. Конструирование космических силовых установок. Пер с англ., М., «Машиностроение», 1966, с. 348.
103. Мартин Дж. Вход в атмосферу. Пер. с англ., М., «Мир», 1969, 320 с.
104. Мугалев В. П. Приближенный метод расчета трения и теплопередачи при вдувании воздуха в турбулентный пограничный слой. — Труды Моск. физ. техн. ин-та, 1960, № 5.
105. Мугалев В. П. Влияние вдувания различных газов на теплообмен вблизи передней критической точки затупленного тела. — «Известия АН СССР, Сер. Механика», 1965, № 1.
106. Миллер В. С. Контактный теплообмен в элементах высокотемпературных машин. Киев, «Наукова думка», 1966, 164 с.
107. Михайлов А. И., Борисов В. В., Калинин Э. К. Газотурбинные установки замкнутого цикла. Изд. АН СССР, 1962, 147 с.
108. Научные проблемы искусственных спутников Сб. статей М, ИЛ, 1959, 528 с.
109. Оппенгейн А. К. К общей теории конвективного теплообмена в свободном молекулярном потоке. Пер. с англ. Сб. пер. и обзоров иностранной периодической литературы — «Механика», ИЛ, 1953, № 5, с. 52—67.
110. Полежаев Ю. В. Процесс установления стационарного режима плавления вязкого стеклообразного материала — ДАН СССР, 1964, № 2.
111. Полежаев В. И. Нестационарная ламинарная тепловая конвекция в замкнутой области при заданном потоке тепла. — МЖГ 1970, № 4, с. 109—117.
112. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967, 411 с.
113. Поляков Ю. А. Применение пленочных датчиков для излучения теплообмена в диссоциированном потоке газа. — В сб «Физическая газодинамика», теплообмен и термодинамика газов высоких температур», М, Изд АН СССР, 1962.
114. Предводителев А. С. Таблицы термодинамических свойств воздуха в интервале температур от 6000° К до 12000° К и в интервале давлений от 0,001 атм. до 1000 атм. М., Изд. АН СССР, 1962, 270 с.
115. «Проблемы движения головной части ракет дальнего действия». — Сб. статей, М.; ИЛ, 1959.
116. Рабинович Г. Д. Теория теплового расчета рекуперативных теплообменных аппаратов. Минск, Изд. АН БССР, 1963, 214 с.
117. Рейнольдс В. С. Расчетный метод подбора оптимальных по весу конфигураций (конструкционная аптимизация) простых заостренных радиаторных ребер. — «Теплопередача», Сер. С, т. 25, 1963, № 3, с. 3—15.
118. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. М., ИЛ, 1960, 262 с.

- 119 **Роуз П. Х., Станкевич Дж. О.** Измерение теплопередачи в критической точке тела, обтекаемого частично ионизованным воздухом. — «Ракетная техника и космонавтика», 1963 № 12 с. 43—58; 1965, № 9, с. 71—82.
120. **Саульев В. К.** Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960, 324 с.
121. **Себан Р. А.** Теплопередача к турбулентному срывному потоку воздуха за уступом на поверхности пластины. Пер. с англ. — Труды ASME, М., «Мир», Сер. С., № 2, 1964 с. 154—161.
122. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1965, 386 с.
123. **Струминский В. В.** Уравнения трехмерного пограничного слоя в сжимаемой жидкости на произвольной поверхности. ДАН СССР, т. 114, 1957, № 2, с. 271—275.
124. **Субботин В. И.** и др. Теплообмен при течи ртуты и воды в плотноупакованном пучке стержней. — «Атомная энергия», т. 9, 1960, № 6, с. 461—469.
125. **Субботин В. И.** и др. Метод расчета температур в каналах некруглого поперечного сечения. — В сб. «Тепло-и массоперенос». М., «Энергия», 1968, с. 504—509.
126. **Таунсенд А. А.** Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., ИЛ, 1959, 399 с.
127. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнение математической физики. М., Гостехиздат, 1953, 679 с.
128. **Унзольд А.** Физика звездных атмосфер М., ИЛ, 1949, 360 с.
129. **Ультрафиолетовое** излучение Солнца и межпланетная среда М., ИЛ, 1962, 431 с.
130. **Ушаков П. А.** Приближенное числовое моделирование цилиндрических тепловыделяющих элементов. — В сб. «Жидкие металлы», Атомиздат, 1967, с. 137—148.
131. **Фаворский О. Н., Каданер Я. С.** Вопросы теплообмена в космосе М., «Высшая школа», 1967, 240 с.
132. **Фенч, Розену.** Теоретическое определение коэффициента теплопередачи в контакте математической поверхности. Труды «Теплопередача», 1963, № 1, стр. 21—32.
133. **Фенстер.** Теплопередача в критической точке для новой бинарной модели воздуха, учитывающей диссоциацию и ионизацию. — «Ракетная техника», 1962, № 10.
134. **Ферри А.** Обзор ряда последних достижений в исследовании гиперзвуковых потоков. — В сб. «Проблемы полета с большими скоростями», М., ИЛ, 1960, 175 с.
135. **Физическая газодинамика.** — Сб. статей. М., Изд. АН СССР, 1959, 167 с.
136. **Хартнет Дж., Эккерт Е.** Охлаждение путем уноса массы при наличии горения в ламинарном пограничном слое. Тех. пер. № 9971, М., ЦАГИ, 1960, 15 с.
137. **Хошизаки Х.** Теплопередача при входе в атмосферы планет со сверхорбитальными скоростями. — «Ракетная техника», 1962, № 10, с. 46—56
138. **Чжен П.** Отрывные течения. Пер. с англ. М., «Мир», 1973, 299 с.
139. **Широков М. Ф.** Физические основы газовой динамики и применение ее к процессам теплообмена и трения. М., Физматгиз, 1958, 340 с.
140. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя М., ИЛ, 1956, 528 с.
141. **Шлихтинг Г.** Возникновение турбулентности М., ИЛ, 1962, 203 с.
142. **Шкалов В. А.** Об интегрировании уравнений пограничного слоя. ДАН СССР, 1960, № 4.
143. **Шлыков Ю. П., Ганин Е. А.** Контактный теплообмен. М., Госэнергоиздат, 1963, 144 с.
144. **Шлыков Ю. П.** Исследование контактного теплообмена. — «Теплоэнергетика», 1965, № 10, с. 79—82.
145. **Шидловский.** Введение в динамику разреженного газа. М., «Наука», 1965, 218 с.

146. **Шифрин К. С.** Рассеяние света в мутной среде. Гостехиздат, М—Л, 1951, 360 с.
 147. **Шорин С. Н.** Теплопередача. М., «Высшая школа», 1964, 490 с.
 148. **Шпильрайн Э. Э.** Тепловые трубы. Сб. статей М., «Мир», 1972, 420 с.
 149. **Шубауэр Г. Б., Чен К. М.** Турбулентное течение. — Сб. «Турбулентные течения и теплопередача», М., ИЛ, 1963, 563 с.
 150. **Эйгенсон Л. С.** Моделирование. М. «Советская наука», 1952, 372 с.
 151. **Якоб М.** Вопросы теплопередачи. М., ИЛ, 1960, 517 с.
 152. **Brokaw R. S.** Ind. Eng. Chem., vol. 47, N 11, 1955
 153. **Koshmarow Yn. A.** Heat transfer of a sharp cone in a supersonic rarefied gas flow. J. of Heat and Mass Transfer 1966, vol. N 9, pp 951—957
 154. **Clark I. A.** Cryogenic Heat Transfer. Advances in Heat Transfer. Ed. By Irvine T. E. and Hartnett I. P., vol. 5, Academic Press. N Y. 1968.
 155. **Chapman A. J.** Heat transfer. Second Edition. N. Y. 1967
 156. **Gross J. F.** and al. Review of binary laminar boundary layer characteristics. J. of Heat and Mass Transfer, 1961, N 3.
 157. **Petukhov B. S.** Heat Transfer and Friction in Turbulent Pipe Flow with Variable Physical Properties, — «Advances in Heat Transfer», vol. 6. Ed. by T. F. Irvine and I. P. Hartnett Academic Press. N. Y., 1970
 158. **Poprins H. C., Worsol — Schmidt.** J. of Heat and Mass Transfer, 1965, 8, N 7.
 159. **Seban R., Emery A., Levy A.** Heat transfer to separated and reattached subsonic turbulent flows obtained downstream of surface step. IASS, 1959, N 12.
 160. **Scala S. M., Gilbert L. M.** Thermal degradation of a charformig plastics during hypersonic flight. ARS Journal, 1962, 32, N 4.
 161. **Rosenzweig R. E. and Beecher N.** Theory for the ablation of fiberglass — reinforced phenolic resin. AIAA, 1963, 1, N 8.
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абсолютно черное тело стр. 251
Адгезия 558
Аналогия гидротепловая 366
Аналогия между тепло- и массо-
обменом 429

Б

Безразмерные комплексы 76

В

Взаимная поверхность излучения
262
Внутренние источники тепла 23
Вынужденное движение 10

Г

Гидродинамический пограничный
слой 111
Гидродинамическая теория кри-
зиса 210
Гидравлические потери 297
Глубина прогрева 555
Геодезическая линия 473
Гидравлический диаметр 130
Гидравлическое сопротивление при
течении в трубах 116, 117, 123
Гидравлическое сопротивление теп-
лообменников 297
Гидродинамическая стабилизация
111
Градиент концентрации 444
Градиент температуры 16, 67
Граничные условия 26, 67

Д

Динамический угол смачивания 203
Дисперсный режим пленочного ки-
пения 227
Движение осредненное 385
Движение пульсационное 385
Диффузионный критерий Прандт-
ля 420
Диссипация кинетической энергии
423
Диаметрические тела 250
Диффузионный перенос тепла 442
Диффузия 442

Ж

Жидкий пограничный слой 566

З

Законы реологические 61
Закон Планка 251
Закон Вина 252
Закон Стефана — Больцмана 252
Закон Ламберта 253
Закон Кирхгофа 257
Закон Кирхгофа для газов 281
Закон Фика 420, 444
Закон Фурье 17, 66
Закон Ньютона 28, 61, 365
Закон Ньютона при наличии хими-
ческих реакций 450
Запуск теплопередающей трубы 319
Зона испарения, паропровод в теп-
лопередающей трубе 316
Зона конденсации теплопередаю-
щей трубы 315
Зона реакции 465

И

Интегральное излучение 248
Интегральная степень черноты 255
Излучение планеты собственное
574
Излучение спектральное 249
Излучение собственное 258
Излучение эффективное 266
Изотермические поверхности 16
Интенсификация теплопередачи 124

К

Критерий Био 155
Критерий Кирпичева 159
Критерий Грасгофа 80
Критерий Нуссельта 76
Критерий Пекле 76
Критерий Прандтля 71
Критерий Кнудсена 71
Критерий Рейнольдса 71, 77, 339
Критерий Стантона 82
Критерий Струхалы 77
Критерий Фруда 77
Критерий Эйлера 77
Критерий Фурье 76, 155, 170
Критерий Льюиса — Семенова 420,
429

Критерий вдува 424
Критерий Рейнольдса при шероховатой поверхности 493
Критерий подобия конвективного теплообмена 73
Квазистационарный режим уноса 555
Касательное напряжение 64
Коэффициент температуропроводности 17, 556
Коэффициент формы 177, 178
Коэффициент Ламе 471
Коэффициент тепловой активности 186
Коэффициент теплоотдачи 28, 93, 114, 133, 208, 364, 428
Коэффициент динамической вязкости 62
Коэффициент аккомодации 196, 237
Коэффициент восстановления 363
Коэффициент теплопроводности 17, 52
Коэффициент гидравлического сопротивления 116, 123, 297
Коэффициент излучения 247, 272
Коэффициент поглощения 247, 274
Коэффициент облученности 262
Коэффициент самооблучения 264
Коэффициент аккомодации термический 527
Коэффициент диффузного отражения 527
Коэффициент ослабления 274
Коэффициент рассеяния 274
Коэффициент диффузии 444
Коэффициент вязкости смеси 418
Коэффициент объемного расширения 92
Коэффициент теплопроводности смеси 418
Коэффициент массообмена 426
Коэффициент теплопередачи 29
Коэффициент теплопроводности 17
Коэффициент теплопроводности газов 19
Коэффициент теплопроводности жидкостей 20, 21, 67
Коэффициент теплопроводности твердых тел 20
Краевые условия 114
Критериальные уравнения эмпирические 116, 117, 123, 137, 138, 139
Критический радиус капли 235
Квазистационарный метод расчета 301
Кризис пузырькового кипения 206
Кризис пленочного кипения 206
Капельные жидкости 117

Константы подобия 69
Контактное термическое сопротивление 323
Капиллярная система (фитиль) теплопередающей трубы 313
Капиллярный напор в теплопередающей трубе 314
Канал оребренный 608
Кипение внутри труб 227
Кипение пленочное 206
Кипение пузырьковое 201
Конвекция свободная 10
Конвекция вынужденная 10, 111
Конвекция естественная 89
Конденсация 235
Конденсация внутри труб 240
Конденсация капельная 238
Конденсация паров жидких металлов 240
Конденсация пленочная 237

Л

Ламинарная свободная конвекция 94
Ламинарный подслон динамический 64
Ламинарный подслон тепловой 66
Лучистый теплообмен 246
Линейная скорость уноса 555
Локальное подобие 375, 507
Линия растекания 473

М

Метаустойчивое состояние 193
Местное сопротивление 297
Местный коэффициент теплоотдачи 133
Мгновенный точечный источник тепла 148, 149
Метод Шмидта (метод конечных разностей) 166
Метод элементарных балансов 170
Метод регулярного режима 177, 178
Моменты функции распределения 548
Материалы и рабочие тела теплопередающих труб 318
Метод Толубинского 202

Н

Недогрев жидкости 198

О

Отражательная способность 250
Обобщенный коэффициент теплоотдачи 428
Определяющая температура 370
Относительный шаг шероховатости 493

Определяющая температура при
шероховатой поверхности 494
Отрывные зоны двухмерные 503
Отрывные зоны трехмерные 509

П

π — теорема 116
Перегрев пара 228
Пузырьковое кипение 201
Переходное кипение 206
Пленочное кипение 214
Переменяемость 134
Пористость 138
Поток излучения 248
Плотность потока излучения 248
Поглощательная способность га-
зов 250, 282, 285
Пропускательная способность 250
Пробег свободный 522
Пробег средний 522
Применение теплопередающих труб
313
Плавление 562
Путь перемешивания 389
Полный коэффициент теплопро-
водности 452
Параметр теплообмена 347
Параметр рекомбинации 459
Параметр трения 347
Полная энтальпия торможения 449
Паросодержание 214
Простое охлаждение 415
Противоток 303
Прямосток 303
Пучки труб, гидравлическое сопро-
тивление 138
Пограничный слой гидродинамиче-
ский 111
Пограничный слой ламинарный 336
Пограничный слой турбулентный
382
Пограничный слой динамический
338
Пограничный слой тепловой 338

Р

Размер определяющий 84
Режим свободномолекулярный 534
Режим промежуточный 534
Реальный газ 342
Равновесная температура 362
Разреженные газы 521
Регенеративные теплообменники
292
Рекуперативные теплообменники
292
Ребро излучающее 608

С

Свободно-гравитационная конвек-
ция 7, 89

Стержневой режим пленочного ки-
пения 227

Снарядный режим пленочного ки-
пения 227

Средне-массовая энтальпия 113
Среднерасходная скорость 113
Скорость роста энтропии 302
Сеточное уравнение 167
Средняя избыточная температура
176

Спектральное излучение 248
Спектральная интенсивность излу-
чения 249, 272
Спектральная яркость излучения
250

Спектральная степень черноты 254
Спектральное серое тело 255
Столкновения парные 522
Скорость скольжения 539
Скачок температуры 539
Сублимация 559
Смешанное число Прандтля 389
Структура турбулентного погра-
ничного слоя 391
Система вентиляционная 594
Совершенный газ 341
Степень черноты газового объ-
ема 283
Свободное движение 89

Т

Тепловой пограничный слой 112
Тепловая стратификация 104
Термодинамически подобные ве-
щества 189, 193
Температурный напор 206, 308
Теплообменники 290
Теплообменные аппараты 291
Темп охлаждения 173
Температурный фактор 87
Температурные волны 180, 181
Температура торможения 335
Температура определяющая 87
Теорема Кондратьева 176
Теоремы подобия 71
Тепловой экран 268
Теплопередающие (тепловые) тру-
бы 313
Теплозащитное покрытие 553
Теплота фазового перехода 553
Турбулентное касательное напря-
жение 388
Турбулентный удельный тепловой
поток 388
Турбулентная вязкость 388
Турбулентная теплопроводность
388
Турбулентное число Прандтля 389
Теплота образования 446
Тепловой эффект реакции 446

Теплоемкость замороженной смеси 454

Теплоемкость полная 454

Теория подобия 345

Тепловой поток 337

Терморегулирование 588

Теплоизоляция внешняя — 593

Толщина пограничного слоя 340

Толщина вытеснения 348

Толщина потери импульса 348

Толщина потери энергии 352

Турбулентная свободная конвекция 96

Теплопроводность 16

Теплоотдача 11

Теплопередача 11

Теплообмен конвективный 10, 89, 111

Теплообмен лучистый 11

Термическое сопротивление контактное 323

Термическое сопротивление плоской стенки 31

Термическое сопротивление теплопередачи 32

У

Уравнение неразрывности 62, 91, 113, 228

Уравнение движения (Навье — Стокса) 62, 91, 113, 229, 338

Уравнение энергии 91, 113, 231

Уравнение состояния 91

Уравнение Коппе и Виджака 198

Уравнение теплопроводности 24

Уравнение Больцмана 524

Уравнение Рейнольдса 63, 389

Уравнение теплоотдачи 25

Уравнение пограничного слоя 341

Уравнение диффузии 442

Уравнение свободной конвекции 78

Уравнение теплопроводности конечных разностей 166

Уравнение осредненного турбулентного движения (уравнение Рейнольдса) 63

Уравнение распространения тепла в турбулентном движении (осредненное уравнение энергии) 66

Уравнение переноса излучения 279

Условие прилипания 538

Условие однозначности 26

Угол атаки 477

Унос массы 554

Угол смачивания динамический 202

Устойчивость численных решений 169, 170

Формула Петухова 123, 138

Формула Кутателадзе 208

Формула Деринга — Фольмера 522

Формула Лапласа 316

Функция температурного влияния мгновенного точечного источника тепла 148

Функция распределения 524

Функция распределения максвелловская 525

Фактор температурный 87

Холодильник-излучатель 597

Ч

Число Грасгофа 93, 116

Число Релея 98

Число Якоба 195

Число Фруда 212

Число Нуссельта 98, 116, 117, 119, 133

Число Рейнольдса 116

Число Прандтля 116

Число Маха 434

Число Кнудсена 532, 533

Ш

Шероховатость равномерно пространственная 492

Шероховатость допустимая 502

Э

Эквивалентный диаметр 130

Эквивалентный радиус 287

Эффективная теплопроводность 100

Эффективное излучение 266

Эффективная длина 376

Эффективная энтальпия теплозащитного материала 554

Эффективность рекомбинации 387

Я

Яркость излучения 249

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Введение	4
Глава I. Виды теплообмена. Основные понятия и определения	9
1.1. Виды теплообмена	9
1.2. Основные понятия и определения	11
Глава II. Теплопроводность при стационарном режиме	16
2.1. Основной закон теплопроводности	16
2.2. Коэффициент теплопроводности	17
2.3. Вывод основного дифференциального уравнения теплопроводности	21
2.4. Условия однозначности. Уравнение теплоотдачи	25
2.5. Плоская стенка. Коэффициент теплопередачи. Термическое сопротивление	29
2.6. Цилиндрическая стенка	36
2.7. Критический диаметр тепловой изоляции трубопровода	41
2.8. Шаровая стенка	43
2.9. Стержень бесконечной длины	45
2.10. Стержень конечной длины	47
2.11. Круглые плоские ребра	49
2.12. Теплопроводность в телах сложной формы	52
2.13. Стационарная теплопроводность при наличии объемного тепловыделения ($q_v \neq 0$)	55
Глава III. Общие положения теории конвективного теплообмена и теория подобия	60
3.1. Уравнения конвективного теплообмена	60
3.2. Подобие физических явлений	66
3.3. Три теоремы подобия	70
3.4. Получение критериев подобия	72
3.5. Физический смысл критериев подобия	78
3.6. Составление критериальных уравнений	83
3.7. Определяющая температура и температурный фактор	86
Глава IV. Теплообмен при свободной гравитационной конвекции	88
4.1. Формулировка проблемы	88
4.2. Теплоотдача при свободной конвекции на вертикальной поверхности	93
4.3. Свободная конвекция на горизонтальных поверхностях	96
4.4. Свободная конвекция в газовых и жидких прослойках между стенками	96
4.5. Свободная конвекция в горизонтальных цилиндрических емкостях	100
4.6. Приближенный расчет тепловой стратификации в вертикальных цилиндрических емкостях	103
4.7. Нестационарная ламинарная свободная конвекция в вертикальном цилиндрическом баке	106

	<i>Стр.</i>
Глава V. Особенности конвективного теплообмена в каналах	110
5.1. Теплообмен в трубах при течении теплоносителей с переменными по сечению теплофизическими свойствами	114
5.2. Интенсификация теплообмена в каналах	123
5.3. Теплообмен в каналах некруглого сечения	129
Глава VI. Теплопроводность при нестационарном режиме	140
6.1. Постановка задачи нестационарной теплопроводности	141
6.2. Аналитические методы решения задач нестационарной теплопроводности	142
6.3. Безразмерная форма решений	153
6.4. Численные методы решения задач нестационарной теплопроводности	164
6.5. Регулярные тепловые режимы	170
6.6. Нестационарная теплопроводность при наличии объемного тепловыделения	181
6.7. Граничные условия 4-го рода	183
6.8. Квазистационарный прогрев тела с подвижной границей	186
Глава VII. Теплообмен при кипении и конденсации	188
7.1. Основные понятия и определения	188
7.2. Рост паровых пузырей в большом объеме чистой перегретой жидкости	193
7.3. Рост паровых пузырей на поверхности нагрева при кипении	195
7.4. Диаметр паровых пузырей при отрыве от стенки и частота их отрыва	198
7.5. Теплоотдача при пузырьковом кипении в большом объеме	200
7.6. Режимы теплосъема при парообразовании в условиях свободной конвекции	203
7.7. Теплоотдача при пузырьковом кипении в условиях вынужденного течения	206
7.8. Кризис пузырькового кипения в большом объеме и при вынужденном течении в каналах	208
7.9. Кризис пленочного кипения	213
7.10. Переходное кипение	221
7.11. Пленочное кипение в большом объеме	224
7.12. Пленочное кипение при вынужденном течении в каналах	226
7.13. Теплообмен при конденсации пара	234
7.14. Теплоотдача при пленочной конденсации неподвижного пара в гравитационном поле	238
7.15. Теплоотдача при пленочной конденсации пара в условиях вынужденного течения	241
Глава VIII. Теплообмен излучением	245
8.1. Основные понятия и определения	247
8.2. Законы излучения абсолютно черного тела	250
8.3. Излучение реальных тел	253
8.4. Закон Кирхгофа для непрозрачных тел	256
8.5. Лучистый теплообмен между двумя параллельными поверхностями	257
8.6. Лучистый теплообмен между двумя абсолютно черными поверхностями, произвольно расположенными в пространстве	259
8.7. Лучистый теплообмен между телом и его оболочкой	263
8.8. Лучистый теплообмен в замкнутой системе	265
8.9. Влияние экрана на лучистый теплообмен	267
8.10. Излучение и поглощение газов	268
8.11. Радиационные свойства газов	271
8.12. Уравнение переноса излучения	278
8.13. Закон Кирхгофа для газов	280
8.14. Оптические свойства газовых сред	281
8.15. Эквивалентная толщина слоя излучающего и поглощающего газа	284

	Стр.
Глава IX. Тепловой и гидравлический расчет теплообменных аппаратов	289
9.1. Основные схемы авиационных и ракетных теплообменных аппаратов	290
9.2. Теплоносители	295
9.3. Гидравлический расчет теплообменных аппаратов	296
9.4. Тепловой расчет теплообменных аппаратов	302
9.5. Теплопередающие трубы как теплообменные аппараты	312
Глава X. Контактный теплообмен	320
10.1. Теплофизические особенности контактного теплообмена	320
10.2. Термическое сопротивление плоского контакта	323
10.3. Термическое контактное сопротивление коаксиальной цилиндрической пары	329
Глава XI. Ламинарный теплообмен при высоких скоростях и температурах газового потока	334
11.1. Предварительные сведения о пограничном слое	335
11.2. Дифференциальные уравнения ламинарного пограничного слоя	337
11.3. Вторая форма уравнения энергии	342
11.4. Теория подобия в применении к уравнениям пограничного слоя	344
11.5. Интегральные характеристики пограничного слоя	347
11.6. Теплообмен при малых скоростях в пограничном слое несжимаемой жидкости	353
11.7. Распределение температуры и скорости	358
11.8. Коэффициент теплоотдачи при больших скоростях	363
11.9. Связь между трением и теплоотдачей	364
11.10. Теплообмен при течении вдоль плоской пластины	365
11.11. Методы расчета теплообмена в пограничном слое на пластине	367
11.12. Расчет теплообмена при переменном давлении вне пограничного слоя	370
11.13. Приближенный метод расчета теплообмена при произвольном продольном распределении давления. Метод эффективной длины	373
11.14. Частные случаи течения и примеры расчета $\chi_{эф}$	377
Глава XII. Турбулентный теплообмен при высоких скоростях и температурах газового потока	380
12.1. Переход ламинарного течения в турбулентное	381
12.2. Осреднение и пульсационное движение	384
12.3. Дополнительные вязкость и теплопроводность осредненного движения в турбулентном потоке	386
12.4. Теория пути перемешивания	388
12.5. Структура турбулентного пограничного слоя	390
12.6. Коэффициент восстановления температуры	395
12.7. Турбулентный теплообмен на плоской пластине	397
12.8. Расчет турбулентного теплообмена в потоке с продольным градиентом давления	404
12.9. Частные случаи течения. Примеры расчета, сравнение с экспериментом	406
Глава XIII. Теплообмен и трение на проникаемой поверхности	414
13.1. Особенности течения смеси газов	415
13.2. Дифференциальные уравнения двухмерного ламинарного пограничного слоя бинарной смеси газов	420
13.3. Влияние подачи в пограничный слой газа с теми же физическими свойствами, что и во внешнем потоке	422
13.4. Аналогия между теплообменом и массообменом	428
13.5. Результаты расчетов. Аппроксимационные зависимости	430
13.6. Турбулентный пограничный слой на пористой поверхности	435

	<i>Стр.</i>
Глава XIV. Теплообмен при наличии химических реакций в пограничном слое	440
14.1. Дифференциальное уравнение диффузии ламинарного пограничного слоя в смеси реагирующих газов	441
14.2. Уравнение энергии	444
14.3. Коэффициент теплоотдачи и тепловой поток на непроницаемой стенке	448
14.4. Химически равновесный пограничный слой	450
14.5. Химически неравновесное течение на каталитической стенке	450
14.6. Примеры расчета теплообмена в реагирующей смеси	451
14.7. Расчет теплообмена в реагирующем газе на проницаемой поверхности	459
Глава XV. Теплообмен на поверхностях летательных аппаратов при трехмерном обтекании	467
15.1. Течение в трехмерном пограничном слое	468
15.2. Система координат	469
15.3. Дифференциальные уравнения трехмерного пограничного слоя на криволинейной поверхности	471
15.4. Линии растекания	472
15.5. Расчет теплообмена на линиях растекания при ламинарном течении	473
15.6. Расчет теплообмена на криволинейной поверхности при ламинарном течении	481
15.7. Расчет теплообмена при трехмерном обтекании тел и турбулентном течении в пограничном слое	484
Глава XVI. Теплообмен при шероховатой поверхности и в отрывных зонах	491
16.1. Течение и теплообмен при шероховатой поверхности	491
16.2. Соотношение между сопротивлением и теплообменом при шероховатой поверхности	500
16.3. Течение и теплообмен в отрывных зонах, образующихся перед препятствиями	502
Глава XVII. Теплообмен в разреженном газе	519
17.1. Исходные положения теории теплообмена в разреженном газе	519
17.2. Подобие процессов теплообмена в разреженных газах. Режимы тепловых и динамических процессов	528
17.3. Теплообмен в свободно-молекулярной области	538
17.4. Теплообмен в промежуточной области	545
Глава XVIII. Теплозащитные покрытия	551
18.1. Основные характеристики уносимых покрытий	551
18.2. Требования к теплозащитным покрытиям	554
18.3. Сублимирующиеся теплозащитные покрытия	557
18.4. Влияние горения на унос покрытия	561
18.5. Плавающие стекловидные покрытия	564
Глава XIX. Тепловые режимы космических аппаратов	569
19.1. Внешние источники тепла	570
19.2. Терморегулирование	585
19.3. Выбор оптических коэффициентов наружных поверхностей	587
19.4. Внешняя теплоизоляция	590
Системы переноса тепла	591
Системы охлаждения	594
Системы защиты от излучения	609
Системы защиты от ударов	616
Системы защиты от пыли	623

*Всеволод Сергеевич Авдеевский, Борис Мефодиевич Галицейский,
Геннадий Александрович Глебов, Юрий Иванович Данилов,
Эльвин Константинович Калинин, Валентин Константинович Кошкин,
Юрий Антонович Кошмаров, Милица Митрофановна Михайлова,
Гатьяна Васильевна Михайлова, Юрий Сергеевич Михеев,
Юрий Алексеевич Рыков, Вячеслав Павлович Солнцев*

ОСНОВЫ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ
В АВИАЦИОННОЙ И РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКЕ

Редактор издательства *М. А. Колосов*
Техн. редактор *И. А. Юдина*

Художник *А. Я. Михайлов*
Корректор *Л. Е. Хохлова*

Сдано в набор 20/III—1975 г. Подписано к печати 11/V—1975 г. Т-09054

Формат 60×90¹/₁₆ Бумага № 2

Печ. л. 39 Уч.-изд. л. 37,75

Тираж 8500 экз.

Изд. заказ 273

Цена 1 р. 55 коп.

Издательство «Машиностроение», 107885, Москва Б-78, 1-й Басманный пер. 9

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СС
по делам издательств, полиграфии и книжной т-
Хохловский г

Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
41	2 сверху	(2. 58)	(2. 59)
41	5 сверху	$T_{II} = \dots (2. 59)$	$R_{II} = \dots (2. 58)$
50	11 сверху	$\theta = T - T_f f_1(x)$	$\theta = T - T_f = f_1(x)$
97	14 сверху	снимаемости	сжимаемости
145	9 сверху	$\theta_n = e^{-\alpha\beta n \tau + C} -$	$\theta_n = e^{-\alpha\beta n \tau + C} =$
148	21 сверху	$T_\varepsilon(x, \tau) \int_0^\delta \dots$	$T_\varepsilon(x, \tau) = \int_0^\delta \dots$
153	1 снизу	$T_0 \neq 0$	$T_f \neq 0$
174	6 снизу Формула (6. 37)	$\frac{d \ln \theta}{d\tau} = \frac{\alpha F}{\rho c V} = -m$	$\frac{d \ln \theta}{d\tau} = -\frac{\alpha F}{\rho c V} = -m$
180	14 сверху	$\theta_W = T_{W_0} -$	$\theta_W = T_W -$
248	16 снизу	Вт/(м ² ·с)	Вт/(м ² ·ср)
287	Формула (8. 130)	$\varepsilon = 1 - e^{-\alpha_\lambda R_\theta}$	$\varepsilon = 1 - e^{-\alpha R_\theta}$
337	Формула (11. 2)	$-\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right);$	$-\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right);$
354	Формула (11. 68)	$+ a_2 \eta^3;$	$+ a_3 \eta^3;$
354	Формула (11. 69)	$+ b_2 \eta_1^3$	$+ b_3 \eta^3;$
369	Формула (11. 117)	$\frac{\mu_1 Q_1}{\mu^* Q^*} \frac{1}{15} \frac{T_W}{T_e}$	$\left(\frac{\mu_1 Q_1}{\mu^* Q^*} \right)^{\frac{1}{15}} \frac{T_W}{T_e}$
378	1 сверху	(11. 26)	(11. 126)
386	Формула (12. 8)	$J_x = [(\bar{m})' +$	$J_x = [(\bar{m}) +$
398	Формула (12. 34)	$= \frac{x}{2} C_f Re_x$	$= \frac{1}{2} C_f Re_x$
403	Формула (12. 47)	$u_1^{2,8}$	$u_1^{1,8}$
404	7 снизу	β_W	μ_W
404	10 снизу	$= 0,0296 Pr^{-0,43} K_T$	$= 0,0296 Pr^{0,43} K_T$
421	Формула (13. 31)	$\vec{g} =$	$\vec{q} =$

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
423	Формула (13. 40)	$= \frac{Q_W v_W}{Q u}$	$= \frac{Q_W v_W}{Q_1 u_1}$
423	Формула (13. 41)	$\frac{T_W}{T},$	$\frac{T_W}{T_1},$
423	Формула (13. 44)	$\frac{T_W}{T},$	$\frac{T_W}{T_1},$
423	1 снизу	u	u_1
427	9 снизу	$= i_W$	$= i'_W$
427	10 снизу	$= (c_p)_1$	$= i_1$
461	Формула (14. 63)	$= \frac{a}{c_p} I_W - \sum_{i=1}^n C_{i1} I_{iW} +$	$= \frac{a}{c_p} \left[I_W - \sum_{i=1}^n C_{i1} I_{iW} \right] +$
466	Формула (14. 77)	$I_e - I'_W$	$I_e - I'_W + \Delta (I_x)_{ок}$
482	Формула (15. 26)	$(I_e - I_W) Pr^{2/3}$	$\frac{I_e - I_W}{Pr}$
518	5 сверху	xR/H	xR/H
525	1 снизу	, той	, от той
530	1 сверху	$= \tilde{\xi} c_\infty$	$= \tilde{\xi}_x c_\infty$
530	Формула (17. 23)	$\exp \left(- \frac{\tilde{\xi}_x^2 + \tilde{\xi}_y^2 + \tilde{\xi}_z^2}{\tilde{T}_r} \right),$	$\exp \left(- \frac{\tilde{\xi}_x^2 + \tilde{\xi}_y^2 + \tilde{\xi}_z^2}{\tilde{T}_r} \right),$
535	13 сверху	$v_{W0} \approx U_\infty \approx \sqrt{T_{0\infty}}$	$v_{0W} \approx U_\infty \sim \sqrt{T_{0\infty}}$
601	11 сверху	$= \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \alpha_{ВЫХ}}{1 - \alpha_{ВХ}}$	$= \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \alpha_{ВЫХ}}{1 - \alpha_{ВЫХ}}$
601	13 сверху	$- \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{T_{0ВЫХ}}{E^{1/4}};$	$- \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{T_{0ВХ}}{E^{1/4}},$
601	Формула (19. 60)	$\ln \frac{E^{1/4} + T_{0ВЫХ}}{E^{1/4} T_{0ВЫХ}}$	$\ln \frac{E^{1/4} + T_{0ВЫХ}}{E^{1/4} - T_{0ВЫХ}}$
603	1 сверху	$\left[4 \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \left(\frac{\delta}{\lambda} \right. \right.$	$\left[4 \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \varepsilon \sigma \varphi \left(\frac{\delta}{\lambda} \right. \right.$
608	Формула (19. 76)	T_4^0	T_0^4

