Н. И. Ахиезер
И. М. Глазман

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

Н. И. Ахиезер
И. М. Глазман

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ТОМ II

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1978

517.5
А95

УДК 517.5

Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. II.

Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Харьков, Издательское объединение «Вища школа», 1978, 288 с.

Второй том монографии посвящен специальным вопросам теории операторов, а также приложениям ее к теории интегральных и дифференциальных уравнений. В ней рассмотрены спектр и возмущения самосопряженных операторов, теория расширения и обобщенные спектральные функции симметрических операторов.

Первое и второе издания вышли в издательстве «Наука» (Москва, 1950, 1966 гг.).

Предназначена для специалистов—математиков и физиков-теоретиков.

Редакция естественнонаучной литературы
И. о. зав. редакцией *Н. Н. Сорокун*

А $\frac{20203-602}{М226(04)-78}$ БЗ—25—4—77

ГЛАВА VII

СПЕКТР И ВОЗМУЩЕНИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

93. Непрерывный спектр самосопряженного оператора. Напомним, что классификация точек спектра самосопряженного оператора была дана в n° 48, а затем в n° 82 было установлено, что полный спектр $\mathfrak{S}(A)$ самосопряженного оператора A совпадает с множеством точек роста его спектральной функции E_t и что множество точек разрыва функции E_t совпадает с совокупностью всех собственных значений оператора A, т. е. с его точечным спектром $\mathscr{D}(A)$. Чтобы непрерывный спектр самосопряженного оператора A также охарактеризовать в терминах спектральной функции, примем для него сейчас новое определение, а затем покажем* его эквивалентность определению n° 48.

Определение. *Непрерывный спектр* $\mathscr{C}(A)$ самосопряженного оператора A (называемый также *предельным спектром* или *спектром сгущения*) есть совокупность всех неизолированных точек роста принадлежащего оператору A разложения единицы E_t, а также собственных значений бесконечной кратности.

Заметим сразу же, что из этого определения следует замкнутость множества $\mathscr{C}(A)$.

Точки непрерывного спектра, подобно собственным значениям оператора A, могут быть описаны с помощью однородного уравнения

$$Af-\lambda f=0. \tag{1}$$

Однако, в отличие от точек $\lambda\in\mathscr{D}(A)$, для которых уравнение (1) имеет точные нетривиальные решения, точки $\lambda\in\mathscr{C}(A)$ характеризуются приближенной нетривиальной разрешимостью этого уравнения. Точный смысл этого утверждения выражает следующая

Теорема 1. *Точка λ принадлежит непрерывному спектру $\mathscr{C}(A)$ оператора A в том и только том случае, когда в D_A существует бесконечная ортонормированная последовательность элементов f_n, для которой*

$$\lim_{n\to\infty}(Af_n-\lambda f_n)=0. \tag{2}$$

* См. теорему 3 настоящего пункта.

Доказательство. Если $\lambda \in \mathscr{C}(A)$, то λ — либо собственное значение бесконечной кратности оператора A, либо неизолированная точка роста функции E_t. В первом случае в качестве $\{f_n\}_1^\infty$ можно взять любую бесконечную ортонормированную последовательность элементов из принадлежащего λ собственного подпространства. Во втором случае при любом $\delta > 0$ существует такое положительное $\delta' < \delta$, что подпространство $(E_{\lambda+\delta'} - E_{\lambda-\delta'})\mathrm{H}$ составляет правильную часть подпространства $(E_{\lambda+\delta} - E_{\lambda-\delta})\mathrm{H}$. Поэтому в $(E_{\lambda+\delta} - E_{\lambda-\delta})\mathrm{H}$ найдется нормированный вектор f, ортогональный к $(E_{\lambda+\delta'} - E_{\lambda-\delta'})\mathrm{H}$. Выберем неограниченно убывающую последовательность положительных чисел δ_n так, чтобы каждый раз пространство $(E_{\lambda+\delta_n} - E_{\lambda-\delta_n})\mathrm{H}$ было правильной частью пространства $(E_{\lambda+\delta_{n-1}} - E_{\lambda-\delta_{n-1}})\mathrm{H}$, и построим бесконечную последовательность элементов $f_n \in (E_{\lambda+\delta_n} - E_{\lambda-\delta_n})H$, для которой

$$\| f_n \| = 1 \text{ и } f_n \perp (E_{\lambda+\delta_{n-1}} - E_{\lambda-\delta_{n-1}})\mathrm{H}.$$

Векторы f_n удовлетворяют соотношению (2), так как

$$\| Af_n - \lambda f_n \|^2 = \int_{\lambda-\delta_n}^{\lambda+\delta_n} (t-\lambda)^2 \, d(E_t f_n, f_n) \leqslant \delta_n^2.$$

Таким образом, одно утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения примем, что существует ортонормированная последовательность векторов $\{f_n\}_1^\infty$, удовлетворяющих соотношению (2), причем, вопреки утверждению теоремы, $\lambda \bar{\in} \mathscr{C}(A)$. Последнее означает, что λ есть либо точка постоянства спектральной функции E_t, либо собственное значение конечной кратности оператора A, изолированное от других точек роста функции E_t. В первом случае мы будем иметь при некотором $\delta > 0$ соотношение

$$(E_{\lambda+\delta} - E_{\lambda-\delta})\,\mathrm{H} = 0,$$

из которого следует неравенство

$$\| Af - \lambda f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\lambda)^2 \, d(E_t f, f) \geqslant \delta^2 \| f \|^2 \tag{3}$$

для любого $f \in \mathrm{D}_A$. Это неравенство, очевидно, несовместимо с существованием указанной выше последовательности $\{f_n\}_1^\infty$. Во втором случае обозначим через G_λ собственное подпространство оператора A, принадлежащее собственному значению λ. Это подпространство конечномерно, пусть $g_1, g_2, \ldots, g_r$ — какой-нибудь его ортонормированный базис. Присоединим эти r векторов к последовательности $\{f_n\}_1^\infty$ и проортонормируем полученную последовательность так, чтобы первыми r векторами были $g_1, g_2, \ldots, g_r$. Дальнейшие векторы обозначим $g_{r+1}, g_{r+2}, \ldots$

Соотношение (2) теперь можно переписать в виде

$$\lim_{n\to\infty}(Ag_n - \lambda g_n) = 0. \tag{2'}$$

С другой стороны, при некотором $\delta > 0$ для любого элемента $f \in \mathrm{D}_A$, ортогонального подпространству G_λ, будем иметь неравенство

$$\| Af - \lambda f \| \geqslant \delta \| f \|. \tag{3'}$$

Поэтому при любом $n > r$

$$\| Ag_n - \lambda g_n \| \geqslant \delta. \tag{3''}$$

Так как соотношения (2′) и (3″) несовместимы, то доказательство теоремы 1 закончено.

Следующие две теоремы дополняют результаты n°n° 48 и 49. При этом, как и в n° 49, A' означает часть оператора A, действующую в инвариантном подпространстве $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \ominus \mathrm{G}_\lambda$, если $\lambda \in \mathscr{D}(A)$ и G_λ — соответствующее собственное подпространство оператора A, и $A' = A$, если $\lambda \overline{\in} \mathscr{D}(A)$.

Теорема 2. 1°. *Если $\lambda \overline{\in} \mathscr{C}(A)$, то оператор $(A' - \lambda I)^{-1}$ ограничен.* 2°. *Если $\lambda \in \mathscr{C}(A)$ и не является собственным значением бесконечной кратности оператора A, то оператор $(A' - \lambda I)^{-1}$ неограничен.*

Доказательство. Если $\lambda \overline{\in} \mathscr{C}(A)$, то для всех $f \in \mathrm{D}_{A'}$ при некотором $\delta > 0$ имеет место неравенство (3′), т. е.

$$\| A'f - \lambda f \| \geqslant \delta \| f \|,$$

откуда следует, что

$$\| (A' - \lambda I)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{\delta},$$

и утверждение 1° доказано.

Пусть выполнено условие второго утверждения. Тогда λ оказывается неизолированной точкой роста для разложения единицы E'_t оператора A' в H', т. е. $\lambda \in \mathscr{C}(A')$, причем $\lambda \overline{\in} \mathscr{D}(A')$. По теореме 1 найдется бесконечная ортонормированная последовательность векторов $f_n \in \mathrm{H}'$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, для которой

$$\lim_{n\to\infty}(A'f_n - \lambda f_n) = 0,$$

а это значит, что оператор $(A' - \lambda I)^{-1}$ неограничен.

Следующая теорема показывает в частности (см. утверждения 3° и 4°), что принятое в этом пункте определение непрерывного спектра эквивалентно определению n° 48.

Теорема 3. 1°. *Соотношение* $\lambda \bar{\in} \mathfrak{S}(A)$ *равносильно равенству* $\overline{\Delta_A(\lambda)} = \mathrm{H}$. 2°. *Соотношение* $\lambda \in \mathfrak{D}(A)$ *равносильно неравенству* $\overline{\Delta_A(\lambda)} \neq \mathrm{H}$. 3°. *Если* $\lambda \bar{\in} \mathscr{C}(A)$, *то* $\overline{\Delta_A(\lambda)} = \Delta_A(\lambda)$. 4°. *Если* $\lambda \in \mathscr{C}(A)$ *и не является собственным значением бесконечной кратности, то* $\overline{\Delta_A(\lambda)} \neq \Delta_A(\lambda)$.

Доказательство. Утверждения 1° и 2° имеют место в силу определения 2 и теоремы 2 n° 48.

Если $\lambda \bar{\in} \mathscr{C}(A)$, то по теореме 2 настоящего пункта оператор $(A' - \lambda I)^{-1}$ ограничен. Отсюда и из замкнутости оператора A' следует замкнутость многообразия $\Delta_{A'}(\lambda)$. А так как, согласно n° 49, $\Delta_{A'}(\lambda) = \Delta_A(\lambda)$, то утверждение 3° также доказано.

Если, наконец, выполнено условие утверждения 4°, то симметрический оператор $(A' - \lambda I)^{-1}$ неограничен, снова по теореме 2 настоящего пункта. Поэтому (см. n° 25) его область определения $\Delta_{A'}(\lambda) = \Delta_A(\lambda)$ не может совпадать со всем подпространством $\overline{\Delta_A(\lambda)}$, и теорема доказана.

Критерий отсутствия в данном интервале точек непрерывного спектра самосопряженного оператора A дает

Теорема 4. *Если замкнутый интервал* $[\lambda_0 - \rho, \lambda_0 + \rho]$ *не содержит точек* $\mathscr{C}(A)$, *то существует конечномерное подпространство* $G \subset H$ *такое, что для любого вектора* $f \neq 0$ *из* $D_A \cap (\mathrm{H} \ominus G)$ *имеет место неравенство*

$$\|(A - \lambda_0 I) f\| > \rho \|f\|. \tag{4}$$

С другой стороны, если существует конечномерное подпространство $G \subset \mathrm{H}$ *такое, что для всех* $f \in D_A \cap (\mathrm{H} \ominus G)$ *справедливо неравенство*

$$\|(A - \lambda_0 I) f\| \geqslant \rho \|f\|, \tag{4'}$$

то открытый интервал $(\lambda_0 - \rho, \lambda_0 + \rho)$ *не содержит точек из* $\mathscr{C}(A)$.

Доказательство. Если $\mathscr{C}(A)$ не имеет точек в интервале $[\lambda_0 - \rho, \lambda_0 + \rho]$, то часть $\mathscr{S}(A)$, лежащая в этом интервале, исчерпывается конечным числом собственных значений конечной кратности. Обозначая через G линейную оболочку всех отвечающих этим собственным значениям собственных векторов, получим при некотором $\delta > \rho$ неравенство

$$\|(A - \lambda_0 I) f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \lambda_0)^2 \, d(E_t f, f) \geqslant \delta^2 \|f\|^2,$$

если только $f \in D_A$ и $f \perp G$. Отсюда и получается (4) (при $f \neq 0$).

Допустим теперь, что условие (4′) выполнено, но, вопреки второму утверждению, множество $(\lambda_0 - \rho, \lambda_0 + \rho) \cap \mathscr{C}(A)$ не пусто. Это значит, что подпространство $(E_{\lambda_0+\rho} - E_{\lambda_0-\rho+0})$ H бесконечномерно. Следовательно, в этом подпространстве найдется вектор $f \neq 0$, ортогональный $(E_{\lambda_0+\rho} - E_{\lambda_0-\rho+0})\,G$. Этот вектор f, очевидно, принадлежит D_A и ортогонален G. Поэтому для него должно быть выполнено (4′). А с другой стороны, для него

$$\|(A-\lambda_0 I)f\|^2 = \int\limits_{\lambda_0-\rho+0}^{\lambda_0+\rho} (t-\lambda_0)^2\, d(E_t f, f) <$$

$$< \rho^2 \int\limits_{\lambda_0-\rho+0}^{\lambda_0+\rho} d(E_t f, f) = \rho^2 (f, f).$$

Противоречие получено; значит, теорема доказана.

В заключение отметим, что в случае произвольного замкнутого, но не самосопряженного оператора T точечный спектр $\mathscr{D}(T)$ определяется как множество собственных значений, а непрерывный спектр $\mathscr{C}(T)$ как множество тех λ, для которых существует ограниченная некомпактная последовательность $\{f_n\}_1^\infty$ векторов, удовлетворяющих условию (2). При этом спектр $\mathscr{S}(T)$, вообще говоря, не исчерпывается точками множеств $\mathscr{D}(T)$ и $\mathscr{C}(T)$, а возможен еще так называемый *остаточный спектр*, состоящий из тех значений λ, при которых $\Delta_{T(\lambda)}$ не плотно в H и которые при этом не являются собственными значениями оператора T.

94. Теоремы Г. Вейля и Неймана о вполне непрерывных возмущениях. Г. Вейлю* принадлежит следующая замечательная

Теорема 1. *Если к самосопряженному оператору A прибавить вполне непрерывный самосопряженный оператор K, то непрерывный спектр оператора A не изменится, т. е.*

$$\mathscr{C}(A+K) = \mathscr{C}(A).$$

Доказательство. Из спектрального разложения вполне непрерывных самосопряженных операторов следует, что при любом $\varepsilon > 0$ оператор K можно представить в виде

$$K = R + B,$$

где R — конечномерный самосопряженный оператор, а B — самосопряженный оператор, для которого $\|B\| \leqslant \varepsilon$. Поэтому теорема 1 будет доказана, если будут доказаны следующие более простые предложения.

---

* См. Weyl H. Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist, Rend. Circolo mat. Palermo, 27, 1909, p. 373—392.

Лемма 1. *Если A — произвольный самосопряженный оператор, а R — конечномерный самосопряженный оператор, то*

$$\mathscr{C}(A+R)=\mathscr{C}(A)$$

Лемма 2. *Если A — произвольный самосопряженный оператор, а B — ограниченный самосопряженный оператор, то $\mathscr{C}(A+B)$, т. е. непрерывный спектр возмущенного оператора, лежит в замкнутой $\|B\|$-окрестности множества $\mathscr{C}(A)$.*

Обе леммы доказываются с помощью теоремы 4 n° 93.

Действительно, введем подпространство $\mathrm{G}=\Delta_R$. Так как на $\mathrm{H}\ominus\mathrm{G}$ оператор R равен 0, то при любом λ и любом $f\in \mathrm{D}_A\cap(\mathrm{H}\ominus\mathrm{G})$ имеет место равенство

$$\|(A+R)f-\lambda f\|=\|Af-\lambda f\|.$$

Отсюда на основании теоремы 4 n° 93, которая здесь применима, так как подпространство Δ_R конечномерно, заключаем, что если некоторый замкнутый интервал $[\alpha, \beta]$ не содержит точек одного из множеств $\mathscr{C}(A)$, $\mathscr{C}(A+R)$, то открытый интервал (α, β) не содержит также точек второго множества. А так как оба множества $\mathscr{C}(A)$, $\mathscr{C}(A+R)$ замкнуты, то они совпадают. Лемма 1 доказана.

Чтобы доказать лемму 2, заметим, что в формулировке этой леммы можно поменять местами операторы A и $A+B$. Поэтому достаточно доказать, что замкнутая $\|B\|$-окрестность каждой точки множества $\mathscr{C}(A)$ содержит по крайней мере одну точку множества $\mathscr{C}(A+B)$. С этой целью допустим противное и примем, что в замкнутой $\|B\|$-окрестности некоторой точки $\lambda\in\mathscr{C}(A)$ нет точек множества $\mathscr{C}(A+B)$. Отсюда в силу теоремы 4 n° 93 вытекает существование конечномерного подпространства G и такого $\rho>\|B\|$, что для любого элемента $f\neq 0$ из $D_A\cap(\mathrm{H}\ominus G)$ имеет место неравенство

$$\|(A+B-\lambda I)f\|>\rho\|f\|.$$

Но тогда для тех же f получим неравенство

$$\|(A-\lambda I)f\|\geqslant\|(A+B-\lambda I)f\|-\|Bf\|>(\rho-\|B\|)\|f\|,$$

откуда по той же теореме 4 n° 93 следует, что $\lambda\,\bar{\in}\,\mathscr{C}(A)$, вопреки нашему предположению.

Таким образом, лемма 2, а вместе с нею и теорема 1, доказаны.

Заметим, что теорема Вейля обобщается на случай произвольного линейного замкнутого оператора A и любого вполне непрерывного оператора K, т. е. требование о самосопряженности этих операторов можно отбросить*.

* См., например, И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, Физматгиз, 1963.

Устанавливая, что вполне непрерывное возмущение K оператора A не меняет его непрерывного спектра, теорема 1 ничего не утверждает о характере изменения точечного спектра $\mathfrak{D}(A)$.

О том, насколько существенным может быть это изменение, говорит следующая, принадлежащая Нейману,

Теорема 2. *К любому самосопряженному оператору A, действующему в сепарабельном гильбертовом пространстве, можно прибавить самосопряженный оператор K, не только вполне непрерывный, но даже имеющий сколь угодно малую абсолютную норму, и такой, что система всех собственных векторов оператора $A+K$ будет полной* в* H.

Доказательство достаточно провести для случая, когда оператор A ограничен. Действительно, неограниченный оператор A можно представить в виде суммы ограниченных самосопряженных операторов $A_j = E(\Delta_j)A$, где $\Delta_j = [j-1,\ j)$ $(-\infty < j < \infty)$. Если для операторов A_j теорема доказана, то можно построить вполне непрерывные операторы K_j, действующие в ортогональных подпространствах $E(\Delta_j)$ H, такие, что $N(K_j) < \frac{\delta}{j^2+1}$, где δ — произвольно выбранное положительное число. Но тогда оператор $K = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \oplus K_j$ будет** искомым возмущением для неограниченного оператора A.

Итак, оператор A будем считать ограниченным.

Приводимое ниже доказательство Неймана*** основано на одном вспомогательном предложении, которое мы сначала лишь сформулируем, а позже докажем.

Лемма 3. *Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор, а $g \neq 0$ — произвольный элемент пространства* H. *В таком случае для любого $\delta > 0$ существует конечномерное подпространство* G $\subset$ H *и конечномерный самосопряженный оператор R такие, что*

1°. $g \in$ G.

2°. G *приводит* $A+R$.

3°. $N(R) \leqslant \delta$.

---

* Таким образом, множество $\mathfrak{D}(A+K)$ будет всюду плотно в $\mathfrak{C}(A) = \mathfrak{C}(A+K)$, хотя множество $\mathfrak{D}(A)$ могло быть пустым.

** При этом, благодаря неравенству треугольника для абсолютной нормы (см. n° 31) : $N(K) \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} N(K_j) < 4\delta$.

*** См. J. von Neumann. Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators (Act. sc. et ind.), Paris, 1935.

Аналогичное теореме 2 предложение было ранее установлено Г. Вейлем, но без утверждения о возможности ограничиться вполне непрерывными возмущениями из класса Гильберта — Шмидта.

С помощью этой леммы путем счетного числа шагов мы построим вполне непрерывный самосопряженный оператор K и полную ортогональную систему конечномерных подпространств, инвариантных относительно $A+K$. Оператор $A+K$, очевидно, будет обладать полной в H системой собственных векторов.

Переходя к этому построению, зададимся всюду плотной в H последовательностью $\{f_k\}_1^\infty$ и некоторым числом $\varepsilon>0$.

Применяя лемму 3 к элементу $g=g_1=f_1$ и числу $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, найдем конечномерное подпространство G_1 и конечномерный самосопряженный оператор K_1 с абсолютной нормой $N(K_1)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. При этом оператор $A+K_1$ приводится подпространством G_1, а значит, и подпространством $\mathrm{H}\ominus\mathrm{G}_1$. Так как последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ плотна в H, то все элементы f_k не могут лежать в G_1. Мы можем, не нарушая общности, принять, что уже f_2 не лежит в G_1. В таком случае назовем g_2 проекцию f_2 на $\mathrm{H}\ominus\mathrm{G}_1$ и применим лемму 3 к $g=g_2$ и числу $\delta=\frac{\varepsilon}{2^2}$, заменяя при этом H на $\mathrm{H}\ominus\mathrm{G}_1$ и A на $A+K_1$. Мы получим конечномерное подпространство $\mathrm{G}_2\subset\mathrm{H}\ominus\mathrm{G}_1$ и оператор K_2 в $\mathrm{H}\ominus\mathrm{G}_1$. При этом оператор $A+K_1+K_2$ в $\mathrm{H}\ominus\mathrm{G}_1$ приводится подпространством G_2 и $N(K_2)\leqslant\frac{\varepsilon}{2^2}$. Если расширить линейно K_2 на все пространство H, положив $K_2=0$ в G_1, то неравенство $N(K_2)\leqslant\frac{\varepsilon}{2^2}$, очевидно, сохранится, а оператор $A+K_1+K_2$ в H также будет приводиться подпространством G_2. Продолжая начатый процесс, мы придем к бесконечной последовательности попарно ортогональных подпространств G_j и последовательности конечномерных операторов K_j с абсолютными нормами $N(K_j)\leqslant\frac{\varepsilon}{2^j}$ таких, что при каждом j оператор $A+K_1+K_2+\cdots+K_j$ приводится каждым из подпространств $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_j$.

Определим теперь оператор K формулой $K=\sum\limits_{j=1}^{\infty}K_j$. Операторный ряд сходится равномерно, а неравенство $N(K)\leqslant\varepsilon$ получается как и выше.

Очевидно, оператор $A+K$ приводится каждым из подпространств G_j $(j=1, 2, 3, \ldots)$ и остается установить, что подпространство

$$\mathrm{G}=\mathrm{G}_1\oplus\mathrm{G}_2\oplus\cdots\oplus\mathrm{G}_n\oplus\cdots$$

совпадает с H. Для этого достаточно доказать, что каждый из векторов f_k $(k=1, 2, \ldots)$ ортогонален к $\mathrm{H}\ominus\mathrm{G}$. Но по построению $f_1=g_1\in\mathrm{G}_1$, так что $f_1\perp\mathrm{H}\ominus\mathrm{G}_1$ и, следовательно, тем более

$f_1 \perp H \ominus G$. Далее $f_2 = g_2 + h_2$, где $g_2 \in G_2$ и $h_2 \perp H \ominus G_1$, откуда следует, что $f_2 \perp H \ominus (G_1 \oplus G_2)$, а значит, и тем более $f_2 \perp H \ominus G$. Эти рассмотрения показывают, что при любом натуральном n справедливо соотношение $f_n \perp H \ominus \sum_{j=1}^{n} \oplus G_j$, откуда и следует, что $f_n \perp H \ominus G$.

Теперь нам осталось доказать лемму 3. С этой целью обозначим через α и β нижнюю и верхнюю грани оператора A и разделим интервал $[\alpha, \beta]$ на n равных частей точками γ_k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$). Способ выбора числа $n = n(\delta)$ будет указан позже.

Положив $\Delta_k = [\gamma_{k-1}, \gamma_k)$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$; $\gamma_0 = \alpha$) и $\Delta_n = [\gamma_{n-1}, \gamma_n]$ ($\gamma_n = \beta$), введем n векторов $h_k = E(\Delta_k) g$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) и обозначим их линейную оболочку через G, а оператор ортогонального проектирования на G — через P. Нормируя векторы h_k, получим ортонормированный базис $\{g_k\}_1^n$ подпространства G. Если некоторые из векторов h_k равны нулю, то размерность G будет меньше n, но это никак не отразится на дальнейших рассуждениях, и мы вправе для удобства считать $\dim G = n$. Положим, далее,

$$R_1 = -(I - P) AP,$$

и определим конечномерный оператор R равенством

$$R = R_1 + R_1^*.$$

Тогда

$$A + R = (I - P) A (I - P) + PAP,$$

так что оператор $A + R$ перестановочен с P и, следовательно, приводится подпространством G.

Остается оценить абсолютную норму $N(R)$. Дополняя последовательность $\{g_k\}_1^n$ до ортонормированного базиса $\{g_k\}_1^\infty$ в H, будем иметь

$$N^2(R_1) = \sum_{j,\, k=1}^{\infty} |(R_1 g_j, g_k)|^2 = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k < \infty}} |(R_1 g_j, g_k)|^2 = \sum_{j=1}^{n} \| R_1 g_j \|^2. \quad (1)$$

Так как $g_j \in E(\Delta_j) H$, то

$$\| A g_j - \gamma_j g_j \| \leqslant \frac{\beta - \alpha}{n}$$

или

$$A g_j = \gamma_j g_j + f_j,$$

где

$$\| f_j \| \leqslant \frac{\beta - \alpha}{n}.$$

Заменяя в полученном равенстве g_j на $Pg_j = g_j$ и применяя к обеим его частям оператор $(P - I)$, получаем соотношение

$$R_1 g_j = (P - I)\, APg_j = (P - I)\, f_j$$

и неравенство

$$\|R_1 g_j\| \leqslant \|f_j\| \leqslant \frac{\beta - \alpha}{n}.$$

Теперь оценка (1) дает

$$N(R_1) \leqslant \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{n}}$$

и, следовательно,

$$N(R) \leqslant N(R_1) + N(R_1^*) = 2N(R_1) \leqslant \frac{2(\beta - \alpha)}{\sqrt{n}}.$$

Выбирая число n достаточно большим, получим требуемое неравенство $N(R) \leqslant \delta$, и лемма доказана.

В связи с теоремой 1 возникает следующий вопрос: что можно сказать о «близости» двух ограниченных самосопряженных операторов A и B, если их непрерывные спектры совпадают? Легко убедиться на простых примерах в том, что разность $A - B$ таких операторов может не быть вполне непрерывным оператором. Таким образом, непосредственное обращение теоремы 1 невозможно. Однако справедлива следующая, установленная Нейманом *,

Теорема 3. *Если пространство* H *сепарабельно и* A, B — *ограниченные самосопряженные операторы в нем с одним и тем же непрерывным спектром, то найдется унитарный оператор* U *такой, что оператор*

$$K = B - UAU^{-1} \tag{2}$$

будет вполне непрерывным.

Доказательство. В силу теоремы 2 можно считать, что каждый из операторов A, B имеет полную в H ортонормированную систему собственных векторов. Пусть этими системами являются $\{e_k\}_1^\infty$ для оператора A и $\{f_k\}_1^\infty$ для оператора B. Соответствующие последовательности собственных значений пусть будут $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{\mu_k\}_1^\infty$. Если при некоторой перестановке $\{p_k\}_1^\infty$ натуральных чисел окажется, что

$$\lim_{k \to \infty} (\lambda_k - \mu_{p_k}) = 0, \tag{3}$$

то, определяя унитарный оператор U соотношениями

$$Ue_k = f_{p_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

* См. ссылку в подстрочном примечании на с. 9.

и самосопряженный оператор K равенством (2), найдем, что

$$Kf_{p_k} = (\mu_{p_k} - \lambda_k) f_{p_k} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

а это означает в силу (3), что оператор K вполне непрерывен.

Теперь доказательство теоремы сводится к построению перестановки $\{p_k\}_1^\infty$, для которой будет выполняться соотношение (3). Возможность этого построения основана на совпадении множества $\mathscr{C}(A)$ предельных точек последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ со множеством $\mathscr{C}(B)$ предельных точек последовательности $\{\mu_k\}_1^\infty$. Относящееся сюда предложение из теории пределов числовых последовательностей формулируется следующим образом:

Пусть множество M предельных точек ограниченной вещественной последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ совпадает со множеством предельных точек аналогичной последовательности $\{\mu_k\}_1^\infty$. В таком случае существует такая перестановка $\{p_k\}_1^\infty$ натуральных чисел, для которой $\lim\limits_{k\to\infty}(\lambda_k - \mu_{p_k}) = 0$.

Для доказательства * определим при любом натуральном k числа

$$\varepsilon_k = \min_{t \in M} |\lambda_k - t| + \frac{1}{k}, \quad \eta_k = \min_{t \in M} |\mu_k - t| + \frac{1}{k}.$$

Так как при любом $\delta > 0$ лишь конечное число точек λ_j, μ_j лежит от M на расстоянии $> \delta$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = \lim\limits_{k\to\infty} \eta_k = 0$.

Из определения чисел ε_k следует, что при любом k интервал $(\lambda_k - \varepsilon_k,\ \lambda_k + \varepsilon_k)$ содержит точки из M; поэтому этот интервал содержит бесконечное число точек μ_j. Обозначим через r_k наименьший индекс r, при котором $\mu_r \in (\lambda_k - \varepsilon_k,\ \lambda_k + \varepsilon_k)$ и который удовлетворяет неравенствам $r > r_j$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1)$, $r > 2k$. Аналогично, отправляясь от интервала $(\mu_k - \eta_k,\ \mu_k + \eta_k)$, определим число s_k. Все индексы r_k, как и индексы s_k, между собою различны и

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda_k - \mu_{r_k}) = \lim_{k\to\infty}(\mu_k - \lambda_{s_k}) = 0. \tag{4}$$

Если бы по крайней мере одна из последовательностей $\{r_k\}_1^\infty$, $\{s_k\}_1^\infty$ содержала все натуральные числа, теорема была бы доказана. Однако это условие здесь не выполнено. Поэтому продолжим построение, а именно, определим индуктивно две последовательности, $\{u_k\}_1^\infty$ и $\{v_k\}_1^\infty$, натуральных чисел следующим образом:

$$u_1 = 1, \quad v_1 = r_1;$$

---

* См. статью Неймана, цитированную на с. 9.

v_{2k} есть наименьшее натуральное число, отличное от v_j ($j=1, 2, \ldots, 2k-1$), $u_{2k}=s_{v_{2k}}$; u_{2k+1} есть наименьшее натуральное число, отличное от u_j ($j=1, 2, \ldots, 2k$), $v_{2k+1}=r_{u_{2k+1}}$.

Покажем, что каждая из построенных последовательностей $\{u_k\}_1^\infty$, $\{v_k\}_1^\infty$ является перестановкой натурального ряда чисел. Для этого установим, что каждая из этих последовательностей содержит все натуральные числа и притом по одному разу. Если числа $1, 2, \ldots, k-1$ содержатся в последовательности $\{u_j\}_1^{2k-2}$, то либо число k также содержится в этой последовательности, либо $u_{2k-1}=k$. В обоих случаях последовательность $\{u_j\}_1^{2k}$ содержит числа $1, 2, \ldots, k$. Так как последовательность $\{u_j\}_1^2$ содержит число 1, то по индукции получается, что последовательность $\{u_j\}_1^\infty$ содержит все натуральные числа. Тем же свойством обладает и последовательность $\{v_j\}_1^\infty$.

Теперь остается установить, что в каждой из последовательностей $\{u_j\}_1^\infty$, $\{v_j\}_1^\infty$ нет одинаковых чисел.

Начнем с последовательности $\{u_j\}_1^\infty$. Так как по построению $u_{2k-1}\neq u_1, u_2, \ldots, u_{2k-2}$, то нужно лишь показать, что $u_{2k}\neq u_1, u_2, \ldots, u_{2k-1}$. По определению, $u_{2k}=s_{v_{2k}}$ и $s_{v_{2k}}\neq s_1, s_2, \ldots, s_{v_{2k-1}}$. Поэтому, в частности, $s_{v_{2k}}\neq s_{v_2}, s_{v_4}, \ldots, s_{v_{2k-2}}$, ибо $v_2<v_4<\cdots<v_{2k-2}$, а последовательность $\{s_k\}_1^\infty$ монотонно возрастает. Полученное неравенство можно переписать в виде $u_{2k}\neq u_2, u_4, \ldots, u_{2k-2}$ и остается показать, что $u_{2k}\neq u_1, u_3, \ldots, u_{2k-1}$. Но по построению $u_{2k}=s_{v_{2k}}\geqslant 2v_{2k}\geqslant 2k$ и $u_1, u_3, \ldots, u_{2k-1}\leqslant 2k-1$, так что $u_{2k}>u_{2k-1}$ и, следовательно, $u_{2k}\neq u_1, u_3, \ldots, u_{2k-1}$.

Переходя к последовательности $\{v_k\}_1^\infty$, отметим в первую очередь, что по построению $v_{2k-1}=r_{u_{2k-1}}\neq r_1, r_2, \ldots, r_{v_{2k-3}}$ и, значит, в частности, $v_{2k-1}\neq v_1, v_3, \ldots, v_{2k-3}$. Далее, $v_{2k-1}=r_{u_{2k-1}}\geqslant 2u_{2k-1}\geqslant 2k$ и так как $v_2, v_4, \ldots, v_{2k-2}\leqslant 2k-2$, то $v_{2k-1}\neq v_1, v_2, \ldots, v_{2k-2}$. Наконец, по построению $v_{2k}\neq v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}$.

Для завершения доказательства достаточно убедиться в том, что

$$\lim_{k\to\infty}(\mu_{v_k}-\lambda_{u_k})=0.$$

Но это следует из того, что при $k\to\infty$

$$|\mu_{v_{2k}}-\lambda_{u_{2k}}|=|\mu_{v_{2k}}-\lambda_{s_{v_{2k}}}|\to 0,$$

$$|\mu_{v_{2k-1}}-\lambda_{u_{2k-1}}|=|\mu_{r_{u_{2k-1}}}-\lambda_{u_{2k-1}}|\to 0$$

в силу (4).

95. Абсолютно непрерывная и сингулярная части спектра. В связи с так называемыми операторами рассеяния или волновыми операторами (см. далее n° 97), возникшими в физических исследованиях, в последние годы появилась необходимость в классификации точек спектра более тонкой, чем та, которую мы приняли в n°n° 82, 93.

Пусть A — самосопряженный оператор, а E_t — его спектральная функция.

Элемент $f \in \mathrm{H}$ назовем *регулярным* относительно A, если функция $\sigma(t; f) = (E_t f, f)$ абсолютно непрерывна, и *сингулярным*, если абсолютно непрерывная часть функции $\sigma(t; f)$ равна нулю.

Множество всех регулярных относительно A элементов обозначим H_a, а множество всех сингулярных элементов обозначим H_s.

Теорема 1. *Множества* H_a *и* H_s *являются подпространствами* H, *они взаимно ортогональны и*

$$\mathrm{H}_a \oplus \mathrm{H}_s = \mathrm{H}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{H}_a$ и $g \in \mathrm{H}_s$. В таком случае, каково бы ни было точечное множество e нулевой лебеговой меры,

$$\int_e d(E_t f, f) = 0 \tag{1}$$

и найдется борелевское множество* θ лебеговой меры нуль такое, что на его дополнении $C\theta$

$$\int_{C\theta} d(E_t g, g) = 0. \tag{2}$$

Воспользуемся теперь неравенством

$$\left| \int_{\mathscr{E}} d(E_t f, g) \right|^2 \leqslant \int_{\mathscr{E}} d(E_t f, f) \int_{\mathscr{E}} d(E_t g, g),$$

которое верно для любого борелевского множества $\mathscr{E} \subset (-\infty, \infty)$ и представляет собой неравенство Коши — Буняковского для квазискалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathscr{E}} d(E_t f, g)$$

(см. n° 3). В силу этого неравенства из (1) и (2) следует, что

$$\int_{\theta} d(E_t f, g) = 0, \qquad \int_{C\theta} d(E_t f, g) = 0.$$

---

* См., например, Смирнов В. И.. Курс высшей математики, т. V, Физматгиз, 1959, или Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная. М., «Наука», 1964.

Поэтому

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} d(E_t f, g) = 0$$

и, значит, $H_a \perp H_s$.

Возьмем теперь произвольный отличный от 0 вектор $h \in H$. Ему принадлежит неубывающая функция $\sigma(t; h) = (E_t h, h)$, из которой мы выделим абсолютно непрерывную часть $\sigma_a(t; h)$:

$$\sigma(t; h) = \sigma_a(t; h) + \sigma_s(t; h).$$

Затем возьмем борелевское множество θ лебеговой меры нуль, дополнение которого $C\theta$ имеет нулевую σ_s-меру, и положим

$$f = \int_{C\theta} dE_u h, \qquad g = \int_{\theta} dE_u h, \tag{3}$$

так что

$$h = f + g. \tag{4}$$

Из (3) следует, что

$$(E_t f, f) = \int_{-\infty}^{t} \chi_{C\theta}(u)\, d(E_u h, h) = \int_{-\infty}^{t} d\sigma_a(u; h),$$

$$(E_t g, g) = \int_{-\infty}^{t} \chi_{\theta}(u)\, d(E_u h, h) = \int_{-\infty}^{t} d\sigma_s(u; h),$$

где χ_θ, $\chi_{C\theta}$ — характеристические функции множеств θ и $C\theta$. Из этих представлений вытекает, что функция $(E_t f, f)$ абсолютно непрерывна и что абсолютно непрерывная часть функции $(E_t g, g)$ есть нуль. Поэтому элементы f и g в представлении (4) принадлежат соответственно H_a и H_s. Из разложения любого элемента $h \in H$ в ортогональную сумму (4) элементов $f \in H_a$ и $g \in H_s$ вытекает линейность и замкнутость множеств H_a и H_s. Тем самым доказательство теоремы закончено.

Теорема 2. *Подпространства* H_a *и* H_s *приводят оператор* A.

Доказательство. Достаточно установить, что при любом λ подпространство H_a приводит E_λ. Если $f \in H_a$, то функция $\sigma(t; f)$ абсолютно непрерывна, но тогда функция

$$\sigma(t; E_\lambda f) = (E_t E_\lambda f, E_\lambda f) = (E_{\min(t,\lambda)} f, f) = \begin{cases} \sigma(t; f) & (t \leqslant \lambda), \\ \sigma(\lambda; f) = \text{const} & (t > \lambda) \end{cases}$$

также абсолютно непрерывна и поэтому $E_\lambda f \in H_a$. Аналогично доказывается, что если $f \in H_s$, то и $E_\lambda f \in H_s$.

Этим теорема доказана.

Часть A_α оператора A, действующая в подпространстве H_α регулярных элементов, называется *абсолютно непрерывной частью оператора* A, а спектр $\mathcal{S}(A_\alpha)$ этого оператора A_α называется *абсолютно непрерывной частью спектра* оператора A. Очевидно, $\mathcal{S}(A_\alpha)$ образует замкнутое множество без изолированных точек (т. е. совершенное множество), причем $\mathcal{S}(A_\alpha) \subseteq \mathscr{C}(A)$. Часть A_s оператора A, действующая в подпространстве H_s сингулярных элементов, называется *сингулярной частью оператора* A, а ее спектр $\mathcal{S}(A_s)$ — *сингулярной частью спектра* оператора A. Очевидно, $\mathscr{D}(A) \subseteq \mathcal{S}(A_s)$.

Собственные значения, которые все входят в $\mathcal{S}(A_s)$, образуют *дискретную компоненту* сингулярной части спектра оператора A. Дополнение этой компоненты до всего $\mathcal{S}(A_s)$ называется *непрерывной компонентой* сингулярной части спектра оператора A.

96. Инвариантность абсолютно непрерывной части спектра относительно конечномерных возмущений. Из установленной в n° 94 теоремы 2 следует, что при произвольных вполне непрерывных возмущениях самосопряженного оператора абсолютно непрерывная часть его спектра, в отличие от непрерывной части, может не сохраняться. Однако при более слабых возмущениях и, в частности, при возмущениях конечномерных, абсолютно непрерывная часть спектра не изменяется. Этот результат, а также его обобщение на случай любых ядерных возмущений, принадлежит М. Розенблюму и Т. Като*.

Пусть A — произвольный самосопряженный оператор в пространстве H, сепарабельность которого мы здесь предполагать не будем. Пусть, далее, K — одномерный самосопряженный оператор, который порождается некоторым ортом g и некоторым вещественным числом γ в том смысле, что для любого $f \in \mathrm{H}$

$$Kf = \gamma(f, g)g. \tag{1}$$

Обозначим E_t и F_t спектральные функции операторов A и соответственно $B = A + K$ и заставим $[\alpha, \beta)$ пробегать множество всех замкнутых слева интервалов числовой оси. Этому множеству интервалов отвечает множество элементов $(E_\beta - E_\alpha)g$, замкнутую линейную оболочку которых обозначим G_A, и множество элементов $(F_\beta - F_\alpha)g$, аналогичную оболочку которых назовем G_B. Ясно, что

---

* Rosenblum M. Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence. Pacif. Journ. Math. 7, N 1, 1957; см. также сборник переводов «Математика», 3:3, 1959. Kato T. On finite-demensional perturbations of selfadjoint operators. J. of the Math. Soc. Jap. 9, N 2, 1957; Perturbation of Continuous Spectra by Trace Class Operators, Proc. of the Jap. Ac. XXXIII, N 5, 1957.

В нашем изложении мы следуем Т. Като.

G_A есть наименьшее подпространство в H, содержащее g и приводящее оператор A, а G_B обладает этим же свойством по отношению к B. Кроме того, каждое из подпространств G_A, G_B приводит оператор K. Из равенства $B = A + K$ поэтому следует, что $\mathrm{G}_A = \mathrm{G}_B \equiv \mathrm{H}_g$. Так как $Kf = 0$, если $f \in \mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_g$, то

$$Af = Bf \qquad (f \in \mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_g),$$

и вопрос о влиянии одномерного возмущения K *на абсолютно непрерывную часть спектра оператора* A *достаточно рассмотреть в подпространстве** H_g. Этим мы сейчас и займемся.

Так как подпространство H_g является замыканием как линейной оболочки элементов $(E_\beta - E_\alpha)\,g$, так и линейной оболочки элементов $(F_\beta - F_\alpha)\,g$, то части операторов A и B, лежащие в H_g, имеют простой спектр. Поэтому (см. n° 83) при любом $f \in \mathrm{H}_g$

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dE_t g, \qquad f = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,dF_t g \tag{2}$$

и

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\,d\rho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2\,d\sigma(t),$$

где $\rho(t) = (E_t g, g)$, $\sigma(t) = (F_t g, g)$.

С другой стороны, при $\Im\zeta \neq 0$

$$(B - \zeta I)^{-1} - (A - \zeta I)^{-1} = -(A - \zeta I)^{-1} K (B - \zeta I)^{-1},$$

откуда, согласно (1),

$$\begin{aligned}([B - \zeta I]^{-1} f, g) - ([A - \zeta I]^{-1} f, g) &= \\ = -\gamma\,([B - \zeta I]^{-1} f, g)\,([A - \zeta I]^{-1} g, g).&\end{aligned} \tag{3}$$

С помощью представлений (2) из этого соотношения выводится равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu)\,d\sigma(\mu)}{\mu - \zeta} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\,d\rho(\lambda)}{\lambda - \zeta} = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu)\,d\sigma(\mu)}{\mu - \zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - \zeta}$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu)\,d\sigma(\mu)}{\mu - \zeta}\left[1 + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - \zeta}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\,d\rho(\lambda)}{\lambda - \zeta}. \tag{4}$$

---

* Заметим, что подпространство H_g сепарабельно.

Если бы мы предварительно приняли в (3) $f = g$, то получили бы равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \zeta}\left[1 + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - \zeta}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - \zeta},$$

которое можно переписать в виде

$$\left(1 + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - \zeta}\right)\left(1 - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \zeta}\right) = 1.$$

Положив здесь $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta = \mathfrak{J}\zeta$, и делая предельный переход $\eta \to 0$, в силу известной теоремы теории функций* найдем, что 1) почти всюду на вещественной оси функция

$$\omega(\zeta) \equiv 1 + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - \zeta} = \frac{1}{1 - \gamma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \zeta}} \tag{5}$$

имеет конечные, отличные от нуля пределы $\omega(\xi + i0)$ и $\omega(\xi - i0) = \overline{\omega(\xi + i0)}$ и 2) почти всюду

$$\pi\gamma\rho'(\xi) = \mathfrak{J}\omega(\xi + i0),$$

$$\pi\gamma\sigma'(\xi) = -\mathfrak{J}\frac{1}{\omega(\xi + i0)} = \frac{\mathfrak{J}\omega(\xi + i0)}{|\omega(\xi + i0)|^2},$$

так что почти всюду

$$\rho'(\xi) = |\omega(\xi + i0)|^2\sigma'(\xi) \tag{6}$$

и, значит, почти всюду

$$\mathfrak{J}\omega(\xi + i0) = \pi\gamma\,|\omega(\xi + i0)|^2\sigma'(\xi). \tag{6'}$$

Из соотношения (6) и сказанного выше относительно функции $\omega(\xi + i0)$ заключаем, что абсолютно непрерывные части спектров операторов A и B совпадают с точностью до множества меры нуль. Однако нетрудно доказать, что если пересечение абсолютно непрерывного спектра с каким-нибудь открытым интервалом имеет лебегову меру нуль, то это пересечение пусто. Поэтому абсолютно непрерывные части спектров операторов A и B совпадают полностью. Более того, из теоремы n° 87 вытекает унитарная эквивалентность абсолютно непрерывных частей A_a и B_a операторов A и B.

Изложенные рассмотрения позволяют сформулировать следующее предложение.

---

* См. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М., Гостехиздат, 1950, с. 183—194.

Теорема. *Пусть A — произвольный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве* H, *а K — произвольный конечномерный самосопряженный оператор в нем. Тогда абсолютно непрерывные части A_a и B_a операторов A и $B = A + K$ унитарно эквивалентны, так что, в частности,*

$$\mathcal{S}(B_a) = \mathcal{S}(A_a).$$

Доказательство для случая, когда оператор K одномерен, мы полностью провели. Так как m-мерное возмущение есть сумма одномерных возмущений, а понятие унитарной эквивалентности транзитивно, то отсюда вытекает справедливость теоремы для любых конечномерных возмущений.

Упомянутое в начале настоящего пункта обобщение этой теоремы на случай любых самосопряженных ядерных возмущений будет дано лишь в n° 99, так как для этого обобщения понадобится аппарат волновых операторов, которым посвящены n°n° 97 и 98.

В заключение установим некоторые вспомогательные факты, которые будут использованы в n° 98.

Прежде всего получим уравнение, связывающее функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ из представлений (2).

Из (4) и (5) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu)\, d\sigma(\mu)}{\mu - \zeta} = \left[1 - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \zeta}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\rho(\lambda)}{\lambda - \zeta}. \tag{4'}$$

Делая здесь предельный переход, получим, что почти всюду

$$\pm \pi i \psi(\xi)\, \sigma'(\xi) + {\int_{-\infty}^{\infty}}' \frac{\psi(\mu)\, d\sigma(\mu)}{\mu - \xi} = \frac{1}{\omega(\xi \pm i0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\rho(\lambda)}{\lambda - (\xi \pm i0)}, \tag{7}$$

где штрих у знака интеграла означает, что интеграл рассматривается как главное значение в смысле Коши. Из соотношений (7) с помощью вычитания находим

$$2\pi i \psi(\xi)\, \sigma'(\xi) = \frac{1}{\omega(\xi + i0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\rho(\lambda)}{\lambda - (\xi + i0)} - \frac{1}{\omega(\xi - i0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\rho(\lambda)}{\lambda - (\xi - i0)}$$

или

$$2\pi i \psi(\xi)\, \sigma'(\xi) = \frac{\omega(\xi - i0) - \omega(\xi + i0)}{|\omega(\xi + i0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\rho(\lambda)}{\lambda - (\xi + i0)} +$$

$$+ \frac{1}{\omega(\xi - i0)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\rho(\lambda)}{\lambda - (\xi + i0)} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\rho(\lambda)}{\lambda - (\xi - i0)} \right].$$

Отсюда, благодаря (6′), следует, что почти всюду

$$2\pi i\psi(\xi)\,\sigma'(\xi)=\frac{2\pi i}{\omega(\xi-i0)}\,\varphi(\xi)\,\rho'(\xi)-2\pi i\gamma\sigma'(\xi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)\,d\rho(\lambda)}{\lambda-(\xi+i0)}.$$

После сокращения получаем искомое соотношение:

$$\psi(\xi)=\omega(\xi+i0)\,\varphi(\xi)-\gamma\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)\,d\rho(\lambda)}{\lambda-(\xi+i0)} \tag{8}$$

почти всюду на множестве, где $\sigma'(\xi)\neq 0$.

Нам понадобится также следующая

Лемма. *Если* $f(\lambda)\in L^2(-\infty,\infty)$, *то*

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(\mu-\lambda)}-1}{\mu-\lambda}f(\lambda)\,d\lambda-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-(\mu+i0)}\right|^2 d\mu=0.$$

Доказательство. Напишем равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-(\mu+i0)}=if(\mu)+\tilde f(\mu),$$

где

$$\tilde f(\mu)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}\,d\lambda.$$

Пусть $F(x)$ — преобразование Фурье функции $f(\lambda)$, так что

$$f(\mu)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}F(x)\,e^{i\mu x}\,dx.$$

В таком случае, как известно*,

$$\tilde f(\mu)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\,\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}F(x)\,\mathrm{sign}\,x\,e^{i\mu x}\,dx$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-(\mu+i0)}=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{A}F(x)\,e^{i\mu x}\,dx.$$

* Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Перев. с англ. М., Гостехиздат, 1948, с. 159—166.

С другой стороны, по теореме о свертке, при $t > 0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(\mu-\lambda)}-1}{\mu-\lambda}f(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,e^{i\mu x}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-ity}}{y}e^{iyx}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,e^{i\mu x}\,dx\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(yx)-\sin y(x-t)}{y}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t}F(x)\,e^{i\mu x}\,dx.$$

Сопоставление полученных соотношений и доказывает лемму.

97. Определение и формальные свойства волновых операторов. Пусть A и B — самосопряженные операторы в H, R_A и R_B — подпространства, образованные регулярными элементами оператора A, соответственно B и P_A, P_B — операторы ортогонального проектирования на R_A и R_B. Примем следующее

Определение. Если существует сильный предел

$$U_+\{B, A\} = \lim_{t\to\infty} e^{itB}e^{-itA}P_A, \tag{1}$$

то говорят, что упорядоченная пара операторов A, B имеет *волновой оператор* $U_+\{B, A\}$.

Аналогично определяется волновой оператор*

$$U_-\{B, A\} = \lim_{t\to-\infty} e^{itB}e^{-itA}P_A. \tag{2}$$

В этом пункте мы установим ряд свойств волновых операторов в предположении, что они существуют. Что касается доказательств существования, то они будут приведены в n° 98. При этом мы будем рассматривать лишь оператор (1), так как формулировка и доказательство соответствующих свойств для оператора (2) совершенно аналогичны.

Теорема 1. *При любом вещественном* τ

$$e^{i\tau B}U_+\{B, A\} = U_+\{B, A\}\,e^{i\tau A}. \tag{3}$$

* Понятие о волновых операторах было впервые введено К. Меллером с помощью выражения

$$\lim_{\pm t\to\infty} e^{itB}e^{-itA}.$$

См. Möller C. Dan. Vid. Selsk.-fys. Medd, **23**, n° 1 (1945).

Действительно,

$$e^{i\tau B}U_+\{B, A\} = \lim_{t\to\infty} e^{i(t+\tau)B}e^{-i(t+\tau)A}e^{i\tau A}P_A = \\ = \lim_{t\to\infty} e^{i(t+\tau)B}e^{-i(t+\tau)A}P_A e^{i\tau A} = U_+\{B, A\}e^{i\tau A}.$$

Теорема 2. *При любом вещественном* λ

$$F_\lambda U_+\{B, A\} = U_+\{B, A\}E_\lambda, \tag{4}$$

где E_λ — *спектральная функция оператора* A, *а* F_λ — *спектральная функция оператора* B.

Действительно, из (3) следует, что при любых $f, g \in \mathrm{H}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}\, d(F_\lambda U_+\{B, A\}f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}\, d(U_+\{B, A\}E_\lambda f, g),$$

откуда, в силу теоремы единственности для интегралов Фурье — Стилтьеса, и получается соотношение (4).

Теорема 3. *Оператор* $U_+\{B, A\}$ *частично изометричен. Его начальная область есть* R_A, *а конечная область лежит в* R_B.

Доказательство. При любом $f \in \mathrm{H}$

$$\|U_+\{B, A\}f\| = \lim_{t\to\infty}\|e^{itB}e^{-itA}P_A f\| = \|P_A f\|, \tag{5}$$

откуда вытекает справедливость первых двух утверждений. Чтобы доказать третье утверждение, заметим, что в силу (4) и (5)

$$(F_\lambda U_+\{B, A\}f, U_+\{B, A\}f) = \|F_\lambda U_+\{B, A\}f\|^2 = \\ = \|U_+\{B, A\}E_\lambda f\|^2 = \|P_A E_\lambda f\|^2 = \|E_\lambda P_A f\|^2 = (E_\lambda h, h), \tag{5'}$$

где $h = P_A f \in \mathrm{R}_A$. Так как правая часть есть абсолютно непрерывная функция, то тем же свойством обладает левая. Следовательно, вектор $U_+\{B, A\}f$ является регулярным элементом оператора B, т. е. $U_+\{B, A\}f \in \mathrm{R}_B$.

Теорема 4. *Если конечная область оператора* $U_+\{B, A\}$ *совпадает с* R_B, *то операторы* A_a *и* B_a *унитарно эквивалентны и при любом* $f \in \mathrm{R}_A \cap \mathrm{D}_A$

$$U_+^* B_a U_+ f = A_a f, \tag{6}$$

где $U_+ = U_+\{B, A\}$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из предыдущей теоремы, если доказано соотношение (6). Поэтому докажем (6). Для этого заметим, что из формулы (5′) следует для любого $f \in \mathrm{R}_A$ равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\, d(F_\lambda U_+ f, U_+ f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\, d(E_\lambda f, f),$$

где оба интеграла сходятся или расходятся одновременно. Итак, если $f \in D_A \cap R_A$, то $U_+ f \in D_B$, а если $U_+ f \in D_B$ при $f \in R_A$, то $f \in D_A$. Далее, в силу теоремы 2 при любом $g \in H$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(F_\lambda U_+ f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(U_+ E_\lambda f, g),$$

но это и означает, что

$$B_a U_+ f = U_+ A_a f, \tag{6'}$$

т. е. равенство (6).

Теорема 5*. *Если существуют волновые операторы* $U_+\{B, A\}$, $U_+\{C, B\}$, *то существует волновой оператор* $U_+\{C, A\}$ *и*

$$U_+\{C, A\} = U_+\{C, B\} U_+\{B, A\}. \tag{7}$$

Доказательство. По определению,

$$U_+\{B, A\} = \lim_{t \to \infty} e^{itB} e^{-itA} P_A,$$

$$U_+\{C, B\} = \lim_{t \to \infty} e^{itC} e^{-itB} P_B.$$

Следовательно,

$$U_+\{C, B\} U_+\{B, A\} = \lim_{t \to \infty} e^{itC} e^{-itB} P_B e^{itB} e^{-itA} P_A.$$

Заменяя P_B на $I - (I - P_B)$, находим, что

$$U_+\{C, B\} U_+\{B, A\} =$$
$$= \lim_{t \to \infty} e^{itC} e^{-itA} P_A - \lim_{t \to \infty} e^{itC} e^{-itB} (I - P_B) e^{itB} e^{-itA} P_A.$$

Первый член правой части есть $U_+\{C, A\}$. Остается доказать, что второй член есть нуль. Но оператор

$$(I - P_B) e^{itB} e^{-itA} P_A$$

при $t \to \infty$ стремится к нулю, а оператор

$$e^{itC} e^{-itB}$$

при любом t унитарен, откуда и следует, что их произведение стремится к нулю.

Теорема 6. *Для совпадения с* R_B *конечной области оператора* $U_+\{B, A\}$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор* $U_+\{A, B\}$.

---

* Эту теорему называют *теоремой умножения* волновых операторов.

Доказательство. Если оба оператора, $U_+\{B, A\}$ и $U_+\{A, B\}$ существуют, то по теореме 5 при любом $f \in \mathrm{R}_B$

$$f = P_B f = U_+\{B, B\} f = U_+\{B, A\} U_+\{A, B\} f$$

или

$$f = U_+\{B, A\} g,$$

где $g = U_+\{A, B\} f$ принадлежит R_A, а значит, f принадлежит конечной области оператора $U_+\{B, A\}$.

Достаточность условия теоремы доказана.

Пусть теперь известно, что конечная область оператора $U_+\{B, A\}$ есть R_B; требуется доказать, что для любого $f \in \mathrm{R}_B$ существует

$$\lim_{t\to\infty} e^{itA} e^{-itB} f.$$

Для элемента f найдется такой элемент $g \in \mathrm{R}_A$, что

$$f = U_+\{B, A\} g.$$

Поэтому

$$f = \lim_{t\to\infty} f_t, \qquad f_t = e^{itB} e^{-itA} g.$$

Но из равенства

$$e^{itA} e^{-itB} f = e^{itA} e^{-itB} (f - f_t + f_t) = e^{itA} e^{-itB} (f - f_t) + g$$

следует, что

$$g = \lim_{t\to\infty} e^{itA} e^{-itB} f.$$

Таким образом, оператор $U_+\{A, B\}$ существует и $g = U_+\{A, B\} f$.

Операторы $U_+\{A, B\}$, $U_+\{B, A\}$, очевидно, взаимно обратны на соответствующих областях, так что

$$U_+\{B, A\} = U_+^*\{A, B\}. \tag{8}$$

Введем еще одно понятие, а именно понятие об *операторе рассеяния* для упорядоченной пары A, B. Так называют оператор

$$S\{B, A\} = U_+^*\{B, A\} U_-\{B, A\} \tag{9}$$

в предположении, что все четыре волновых оператора $U_\pm\{B, A\}$, $U_\pm\{A, B\}$ существуют.

Теорема 7. *Оператор рассеяния $S\{B, A\}$ в пространстве R_A унитарен и коммутирует с оператором A.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теоремы 6.

Далее покажем, что $S\{B, A\}$ перестановочен с разложением единицы E_λ оператора A при любом $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Обозначим коротко $U_{\pm}\{B, A\}$ через $U_{\pm}$. Тогда из (9), дважды используя теорему 2, имеем

$$S\{B, A\} E_\lambda = U_+^* U_- E_\lambda = U_+^* F_\lambda U_- = (F_\lambda U_+)^* U_- = \\ = (U_+ E_\lambda)^* U_- = E_\lambda U_+^* U_- = E_\lambda S\{B, A\}.$$

Это означает, в силу теоремы n° 80, что

$$S\{B, A\} A \subseteq AS\{B, A\},$$

т. е. A и $S\{B, A\}$ перестановочны в H, а поэтому и в приводящем их обоих подпространстве R_A. При этом, если $f \in \mathrm{R}_A$, то

$$(E_\lambda Sf, Sf) = (SE_\lambda f, Sf) = (E_\lambda f, f),$$

где $S = S\{B, A\}$, а значит, f (из R_A) и Sf одновременно либо принадлежат либо не принадлежат $\mathrm{R}_A \cap \mathrm{D}_A$. Поэтому на R_A

$$A_a S\{B, A\} = S(B, A) A_a$$

или во всем H

$$AS\{B, A\} = S\{B, A\} AP_A.$$

Справедлива также следующая теорема умножения для операторов рассеяния.

Теорема 8. *Если существуют операторы рассеяния $S\{B, A\}$ и $S\{C, B\}$, то существует оператор рассеяния $S\{C, A\}$ и притом*

$$S\{C, A\} = S^+(C, B) S\{B, A\},$$

где

$$S^+\{C, B\} = U_+\{A, B\} S\{C, B\} U_+(B, A).$$

Доказательство. Существование оператора $S\{C, A\}$ вытекает из теоремы 5. Далее имеем

$$S\{C, A\} = U_+^*\{C, A\} U_-\{C, A\} = \\ = U_+^*\{B, A\} U_+^*\{C, B\} U_-\{C, B\} U_-\{B, A\} = \\ = U_+^*\{B, A\} U_+^*\{C, B\} U_-\{C, B\} U_+\{B, A\} U_+^*\{B, A\} U_-\{B, A\} = \\ = U_+\{A, B\} S\{C, B\} U_+\{B, A\} S\{B, A\},$$

(последнее равенство справедливо в силу (8)). Теорема доказана.

98. Существование волновых операторов в случае конечномерных возмущений. Этот пункт непосредственно примыкает к n° 96, обозначений которого мы здесь будем придерживаться. Положим вначале, как и в n° 96, что оператор K одномерный и что его область значений порождается элементом g, по которому строится сепарабельное пространство Гильберта H_g. Предположим также, что H_g совпадает со всем H. Определим в $H_g = H$ оператор $V_+ f$, полагая

$$V_+ f = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda + i0)\,\varphi(\lambda)\,dF_\lambda P_B g, \tag{1}$$

если

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,dE_\lambda g.$$

Введем также оператор

$$U_t = e^{itB} e^{-itA} P_A \qquad (-\infty < t < \infty)$$

и докажем, что

$$\lim_{t\to\infty} U_t f = V_+ f \qquad (f \in H). \tag{2}$$

Заметим, что это соотношение достаточно доказать лишь для $f \in R_A$, так как $U_t f = 0$ и $V_+ f = 0$, если $f \perp R_A$. Последнее вытекает из того, что в силу (1) и формулы (6) n° 96 при любом $f \in H$ имеем

$$\| V_+ f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | \omega(\lambda + i0) |^2 \, | \varphi(\lambda) |^2 \, d(F_\lambda P_B g, g) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} | \varphi(\lambda) |^2 \, | \omega(\lambda + i0) |^2 \, d\sigma_a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} | \varphi(\lambda) |^2 \, d\rho_a(\lambda) = \| P_A f \|^2, \tag{3}$$

где $\sigma_a(\lambda) = (F_\lambda P_B g, g)$ — абсолютно непрерывная часть функции $\sigma(\lambda) = (F_\lambda g, g)$, а $\rho_a(\lambda) = (E_\lambda P_A g, g)$ — абсолютно непрерывная часть функции $\rho(\lambda) = (E_\lambda g, g)$.

Таким образом,

$$V_+ P_A = V_+, \qquad U_t P_A = U_t. \tag{3'}$$

Переходим к доказательству соотношения (2) при $f \in R_A$. Для этого воспользуемся равенством

$$(U_t f, h) - (f, h) = i\gamma \int_0^t (e^{-i\tau A} f, g)(e^{i\tau B} g, h)\,d\tau, \tag{4}$$

где $h \in H$. Написанное равенство достаточно проверить при $f \in D_A \cap R_A$; в этом случае оно получается интегрированием тождества

$$\frac{d}{d\tau}(e^{i\tau B} e^{-i\tau A} f, h) = i(e^{i\tau B} B e^{-i\tau A} f, h) - i(e^{i\tau B} A e^{-i\tau A} f, h) =$$

$$= i(e^{i\tau B} K e^{-i\tau A} f, h) = i\gamma(e^{i\tau B}(e^{-i\tau A} f, g)\,g, h) = i\gamma(e^{-i\tau A} f, g)(e^{i\tau B} g, h).$$

Если

$$f=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,dE_\lambda g,\quad h=\int_{-\infty}^{\infty}\varkappa(\mu)\,dF_\mu g,$$

то соотношение (4) можно переписать в виде

$$(U_t f, h)-(f,h)=i\gamma\int_0^t\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\tau\lambda}\varphi(\lambda)\,d\rho(\lambda)\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau\mu}\overline{\varkappa(\mu)}\,d\sigma(\mu)\right]d\tau,$$

где, как легко видеть, можно изменить порядок интегрирования так что

$$(U_t f, h)-(f,h)=\gamma\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(\mu-\lambda)}-1}{\mu-\lambda}\varphi(\lambda)\overline{\varkappa(\mu)}\,d\rho(\lambda)\,d\sigma(\mu).$$

Кроме условия $f\in R_A$ примем теперь, что $h\in R_B$. В таком случае в написанном двойном интеграле можно заменить $d\rho(\lambda)$, $d\sigma(\mu)$ соответственно на $\rho'(\lambda)\,d\lambda$ и $\sigma'(\mu)\,d\mu$. Допустим вначале, что сверх того

$$\varphi(\lambda)\rho'(\lambda)\in L^2(-\infty,\infty),\quad \varkappa(\mu)\sigma'(\mu)\in L^2(-\infty,\infty). \tag{5}$$

Тогда на основании леммы n° 96

$$\lim_{t\to\infty}(U_t f, h)=(f,h)+\gamma\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)\rho'(\lambda)}{\lambda-(\mu+i0)}\overline{\varkappa(\mu)}\,\sigma'(\mu)\,d\lambda\,d\mu,$$

откуда в силу равенства (8) n° 96

$$\lim_{t\to\infty}(U_t f, h)=(f,h)+\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\mu+i0)\,\varphi(\mu)\overline{\varkappa(\mu)}\,d\sigma(\mu)-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\mu)\overline{\varkappa(\mu)}\,d\sigma(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\mu+i0)\,\varphi(\mu)\overline{\varkappa(\mu)}\,d\sigma(\mu)$$

и в силу формулы (1)

$$\lim_{t\to\infty}(U_t f, h)=(V_+ f, h). \tag{6}$$

Это равенство мы доказали в предположении (5), тогда как нам оно необходимо для случая, когда

$$\varphi(\lambda)\sqrt{\rho'(\lambda)}\in L^2(-\infty,\infty),\quad \varkappa(\mu)\sqrt{\sigma'(\mu)}\in L^2(-\infty,\infty), \tag{5'}$$

т. е. когда

$$\varphi(\lambda)\in L^2_{\rho_a}(-\infty,\infty),\quad \varkappa(\mu)\in L^2_{\sigma_a}(-\infty,\infty), \tag{5''}$$

так как только в этом случае соотношение (6) будет доказано для любых $f \in R_A$ и $h \in R_B$. Однако здесь достаточно заметить, что если $\Omega(\lambda)$ пробегает множество всех финитных ступенчатых функций, то множество функций

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\Omega(\lambda)}{\sqrt{\rho'(\lambda)}}, & \rho'(\lambda) \neq 0, \\ 0, & \rho'(\lambda) = 0 \end{cases}$$

плотно в $L^2_{\rho_a}(-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условию (5), а множество функций

$$\varkappa(\mu) = \begin{cases} \dfrac{\Omega(\mu)}{\sqrt{\sigma'(\mu)}}, & \sigma'(\mu) \neq 0, \\ 0, & \sigma'(\mu) = 0 \end{cases}$$

плотно в $L^2_{\sigma_a}(-\infty, \infty)$ и тоже удовлетворяет условию (5).

Так как оператор U_t равномерно ограничен по t, то из (6) и (3′) следует, что всюду в H в смысле слабой сходимости

$$\lim_{t\to\infty} P_B U_t = V_+. \tag{7}$$

Теперь мы докажем, что это равенство справедливо и в смысле сильной сходимости, а также, что множитель P_B в нем можно отбросить. Действительно, из слабой сходимости следует, что

$$\| V_+ f \|^2 = \lim_{t\to\infty} (P_B U_t f, V_+ f) \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \| V_+ f \| \cdot \| P_B e^{itB} e^{-itA} P_A f \|,$$

откуда

$$\| V_+ f \| \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \| P_B e^{itB} e^{-itA} P_A f \| \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \| P_B e^{itB} e^{-itA} P_A f \| \leqslant \| P_A f \|.$$

Но в силу (3)

$$\| V_+ f \| = \| P_A f \|,$$

а поэтому

$$\| V_+ f \| = \lim_{t\to\infty} \| P_B e^{itB} e^{-itA} P_A f \| = \| P_A f \|,$$

откуда следует, что (7) справедливо в смысле сильной сходимости. А так как

$$\| P_A f \|^2 = \| P_B e^{itB} e^{-itA} P_A f \|^2 + \| (I - P_B) e^{itB} e^{-itA} P_A f \|^2,$$

то, в смысле сильной сходимости,

$$\lim_{t\to\infty} (I - P_B) e^{itB} e^{-itA} P_A f = 0,$$

а это благодаря (7) и означает, что

$$\lim_{t\to\infty} U_t f = V_+ f,$$

т. е. соотношение (2) доказано.

Теорема. *Если A — произвольный самосопряженный оператор в* H, K — *конечномерный самосопряженный оператор и $B = A + K$, то волновые операторы $U_\pm\{B, A\}$ и $U_\pm\{A, B\}$ существуют и осуществляют изометрическое соответствие между абсолютно непрерывными частями операторов A и B.*

Доказательство достаточно провести для оператора $U_+\{B, A\}$. Если оператор K одномерен и $\mathrm{H} = \mathrm{H}_g$, то доказательство уже проведено выше. В общем случае одномерного оператора K, когда $\mathrm{H}_g \neq \mathrm{H}$, волновой оператор

$$U_+\{B, A\} = \lim_{t\to\infty} e^{itB} e^{-itA} P_A$$

также существует, причем на подпространстве $\mathrm{H} \ominus \mathrm{R}_A$ он, очевидно, равен нулю; на подпространстве $\mathrm{R}_A \cap (\mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_g)$ он является единичным оператором, и, наконец, на подпространстве H_g он может быть определен, в соответствии с (1) и (2), равенством

$$U_+ f = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda + i0)\, \varphi(\lambda)\, dF_\lambda P_{(R_B \cap \mathrm{H}_g)} g,$$

если

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda g.$$

Переход от одномерного возмущения к любому конечномерному осуществляется с помощью теоремы 5 n° 97.

99. Переход к общему случаю ядерных возмущений.

Лемма*. *Пусть A — самосопряженный оператор в* H *и E_λ — его спектральная функция. Если элемент $f \in$ H регулярен относительно A и если почти всюду*

$$\frac{d(E_\lambda f, f)}{d\lambda} \leqslant \mathcal{M}^2, \tag{1}$$

то для любого оператора Гильберта — Шмидта T с абсолютной нормой $N(T)$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| Te^{-itA} f \|^2 \, dt \leqslant 2\pi \mathcal{M}^2 N^2(T). \tag{2}$$

* Эта тонкая лемма принадлежит М. Розенблюму (см. ссылку на с. 17).

Доказательство. Пусть $\{g_n\}_1^\infty$ — ортонормированный базис в Δ_T. Тогда

$$\| Te^{-itA}f \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | (Te^{-itA}f, g_n) |^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} d(E_\lambda f, T^* g_n) \right|^2. \tag{3}$$

Оценим входящие в (3) интегралы. Для этого докажем, что в силу (1) при любом $h \in \mathrm{H}$, в частности при $h = T^* g_n$, функция $(E_\lambda f, h)$ абсолютно непрерывна, а ее производная

$$\frac{d(E_\lambda f, h)}{d\lambda} \in \mathrm{L}^2(-\infty, \infty)$$

и удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d(E_\lambda f, h)}{d\lambda} \right|^2 d\lambda \leqslant \mathscr{M}^2 \| h \|^2.$$

Действительно, пусть H_f — подпространство, порождаемое совокупностью векторов $E(\Delta) f$, когда Δ пробегает множество всех интервалов числовой оси. Тогда можно положить $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in \mathrm{H}_f$, $h_2 \perp \mathrm{H}_f$. Далее (см. n° 83), найдется такая функция $\varphi(\mu)$, что

$$h_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu)\, dE_\mu f,$$

$$\| h_1 \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | \varphi(\mu) |^2 d(E_\mu f, f) \leqslant \| h \|^2.$$

Поэтому

$$(E_\lambda f, h) = (E_\lambda f, h_1) = \int_{-\infty}^{\lambda} \overline{\varphi(\mu)}\, d(E_\mu f, f),$$

откуда и вытекает наше утверждение.

Этот результат показывает, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} d(E_\lambda f, T^* g_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} \frac{d(E_\lambda f, T^* g_n)}{d\lambda} d\lambda$$

можно рассматривать как преобразование Фурье — Планшереля.

Следовательно, применимо равенство Парсеваля, в силу которого

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} d(E_\lambda f, T^*g_n)\right|^2 dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d(E_\lambda f, T^*g_n)}{d\lambda}\right|^2 d\lambda \leqslant \\ \leqslant 2\pi\mathcal{M}^2 \| T^*g_n\|^2,$$

откуда вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} d(E_\lambda f, T^*g_n)\right|^2 dt \leqslant 2\pi\mathcal{M}^2\sum_{n=1}^{m}\|T^*g_n\|^2 \leqslant \\ \leqslant 2\pi\mathcal{M}^2N^2(T^*) = 2\pi\mathcal{M}^2N^2(T).$$

Благодаря равенству (3) и теореме Фату, при любых конечных α и $\beta > \alpha$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} d(E_\lambda f, T^*g_n)\right|^2 dt = \int_{\alpha}^{\beta} \| Te^{-itA}f\|^2 dt \leqslant 2\pi\mathcal{M}^2N^2(T),$$

откуда (полагая $\alpha \to -\infty$, $\beta \to \infty$) мы и получаем (2).

Теперь мы можем перейти к обобщению результатов n°n° 96 и 98 на случай произвольных ядерных возмущений K. Вот полная формулировка этого обобщения, включающего ранее полученные предложения.

Теорема. *Пусть A — произвольный самосопряженный оператор в* H, *а K — самосопряженное ядерное возмущение, так что в некотором ортонормированном базисе $\{g_j\}_1^\infty$*

$$Kf = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(f, g_j)g_j \quad (f \in \mathrm{H}), \tag{4}$$

где

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j| < \infty.$$

В таком случае

1. *Волновой оператор*

$$U_+ = U_+\{B, A\} = \lim_{t\to\infty} e^{itB}e^{-itA}P_A,$$

где $B = A + K$, существует.

2. *Он частично изометричен: с начальной областью R_A и конечной областью R_B.*

3. *Абсолютно непрерывные части A_a и B_a операторов A и B унитарно эквивалентны, а именно*

$$B_a = U_+A_aU_+^*, \quad A_a = U_+^*B_aU_+.$$

4. *Остальные волновые операторы* $U_-\{B, A\}$ и $U_\pm\{A, B\} = U_\pm^*\{B, A\}$ *также существуют и обладают аналогичными свойствами.*

Доказательство. Благодаря результатам предыдущих пунктов достаточно доказать только первое утверждение. С этой целью положим при любом конечном m:

$$K_m f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (f, g_j)\, g_j, \quad s_m = \sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|, \quad B_m = A + K_m$$

и

$$U_t^{(m)} = e^{itB_m} e^{-itA} P_A \quad (-\infty < t < \infty).$$

Используя дифференцирование по t вектора

$$e^{itB_m} e^{-itA} f,$$

мы, как и в n° 98, найдем, что при $f \in \mathrm{R}_A$

$$(U_t^{(m)} - U_s^{(m)}) f = i \int_s^t e^{i\tau B_m} K_m e^{-i\tau A} f \, d\tau.$$

В силу уже доказанного существования волнового оператора $U_+^{(m)} = U_+\{B_m, A\}$ $(m < \infty)$ мы можем сделать здесь предельный переход $t \to \infty$. Таким путем мы получим соотношение

$$(U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f = i \int_s^\infty e^{i\tau B_m} K_m e^{-i\tau A} f \, d\tau. \tag{5}$$

Так как $\| U_+^{(m)} f \| = \| f \|$ и $\| U_s^{(m)} f \| = \| f \|$, то

$$\| (U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f \|^2 = 2\Re\, ((U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f, U_+^{(m)} f).$$

Отсюда с помощью формулы (5) и теоремы 1 n° 97 находим, что

$$\| (U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f \|^2 = 2\Re i \int_s^\infty (K_m e^{-i\tau A} f, \; U_+^{(m)} e^{-i\tau A} f) \, d\tau. \tag{6}$$

Теперь представим возмущение K_m в виде

$$K_m = W_m |K_m| = W_m |K_m|^{1/2} |K_m|^{1/2}, \tag{7}$$

где $W_m = \operatorname{sign} K_m$ есть частично изометрический оператор. Предположим сначала, что для элемента f

$$\mathcal{M} = \operatorname{vrai\,sup} \frac{d (E_\lambda f, f)}{d\lambda} < \infty. \tag{8}$$

Тогда из (6) и (7) следует, что

$$\| (U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f \|^2 \leqslant 2 \left[\int_s^\infty \| |K_m|^{1/2} e^{-i\tau A} f \|^2 \, d\tau \right]^{1/2} \times$$
$$\times \left[\int_s^\infty \| |K_m|^{1/2} W_m^* U_+^{(m)} e^{-i\tau A} f \|^2 \, d\tau \right]^{1/2}, \qquad (9)$$

причем существование обоих интегралов вытекает из (8) в силу леммы Розенблюма. Во втором из этих интегралов заменим s на $-\infty$. На основании упомянутой леммы и оценки для абсолютной нормы произведения (n° 31), которая дает здесь

$$N^2 (|K_m|^{1/2} W_m^* U_+^{(m)}) \leqslant s_m,$$

неравенство (9) можно представить в виде

$$\| (U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f \| \leqslant (8\pi M^2 s_m)^{1/4} \left[\int_s^\infty \| |K_m|^{1/2} e^{-i\tau A} f \|^2 \, d\tau \right]^{1/4}.$$

Отсюда следует, что

$$\| (U_t^{(m)} - U_s^{(m)}) f \| \leqslant \| (U_+^{(m)} - U_t^{(m)}) f \| + \| (U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f \| \leqslant$$
$$\leqslant (8\pi M^2 s_m)^{1/4} \left\{ \left[\int_s^\infty \| |K_m|^{1/2} e^{-i\tau A} f \|^2 \, d\tau \right]^{1/4} + \right.$$
$$\left. + \left[\int_t^\infty \| |K_m|^{1/2} e^{-i\tau A} f \|^2 \, d\tau \right]^{1/4} \right\}. \qquad (10)$$

Покажем, что в полученном неравенстве возможен предельный переход при $m \to \infty$. Действительно, с одной стороны, при любом m

$$s_m \leqslant s_\infty = \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| < \infty$$

и, как видно из представления (4),

$$\| |K_m|^{1/2} h \| \leqslant \| |K|^{1/2} h \|$$

при всех $h \in \mathrm{H}$.

С другой стороны, при $m \to \infty$

$$U_t^{(m)} h \to U_s h \quad (h \in \mathrm{H}),$$

ибо в смысле сильной сходимости (по крайней мере)

$$e^{itB_m} \to e^{itB}.$$

Это следует из того, что в каждой точке непрерывности спектральной функции F_λ, принадлежащей оператору B, в силу теоремы 2 n° 79 имеет место предельное соотношение

$$\lim_{m\to\infty} F_\lambda^{(m)} = F_\lambda$$

(в смысле сильной сходимости), где $F_\lambda^{(m)}$ — разложение единицы оператора B_m.

Таким образом, при $m\to\infty$ находим из (10):

$$\| (U_t - U_s) f \| \leqslant (8\pi\mathscr{M}^2 s_\infty)^{1/4} \left\{ \left[\int_s^\infty \| |K|^{1/2} e^{-i\tau A} f \|^2 d\tau \right]^{1/4} + \right.$$

$$\left. + \left[\int_t^\infty \| |K|^{1/2} e^{-i\tau A} f \|^2 d\tau \right]^{1/4} \right\},$$

где

$$U_t = e^{itB} e^{-itA} P_A.$$

Из полученного неравенства вытекает существование $\lim\limits_{t\to\infty} U_t f$ для всех элементов $f \in \mathrm{R}_A$, удовлетворяющих неравенству (8). Но множество всех таких элементов f при всевозможных $\mathscr{M}$ плотно в R_A, а оператор U_t равномерно ограничен по t. Поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} U_t f$ существует при всех $f \in \mathrm{R}_A$, а это и означает, что волновой оператор $U_+\{B, A\}$ существует. Таким образом, теорема доказана.

В заключение отметим, что волновые операторы и операторы рассеяния для заданной пары самосопряженных операторов $\{A, B\}$ существуют не только в случае ядерных возмущений, т. е. когда разность $B - A$ ядерна, но также и тогда, когда оказывается ядерной разность некоторых натуральных степеней p резольвент этих операторов:

$$R_z^p(A) - R_z^p(B) \quad (\Im z \neq 0),$$

а также и в ряде более общих случаев*.

---

* Бирман М. Ш. и Крейн М. Г., ДАН СССР, **144**, № 3, 1962; М. Ш. Бирман, ДАН СССР, **143**, № 3, 1962, **159**, № 3, 1964; Kato T. Wave operators and unitary equivalence. Препринт, 1963, (см. также книгу Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., «Мир», 1972).

ГЛАВА VIII

ТЕОРИЯ РАСШИРЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

100. Индексы дефекта. Пусть T — произвольный линейный оператор, область определения которого мы даже не предполагаем пока плотной в H.

Назовем число λ (вещественное или невещественное) *точкой регулярного типа* оператора T, если существует такое $k = k(\lambda) > 0$, что при всех $f \in \mathrm{D}_T$

$$\|(T - \lambda I) f\| \geqslant k \|f\|.$$

Поэтому собственные значения оператора T не являются для него точками регулярного типа. Далее, если λ есть точка регулярного типа оператора T, то оператор $(T - \lambda I)^{-1}$ существует и ограничен, хотя его область определения может оказаться не плотной в H, и обратно, если оператор $(T - \lambda I)^{-1}$ существует и ограничен, то λ есть точка регулярного типа.

Если λ_0 есть точка регулярного типа, то при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta < \frac{1}{2} k(\lambda_0)$ и любом $f \in \mathrm{D}_T$ имеет место неравенство

$$\|(T - \lambda I) f\| \geqslant \|(T - \lambda_0 I) f\| - |\lambda - \lambda_0| \cdot \|f\| \geqslant$$
$$\geqslant \{k(\lambda_0) - \delta\} \|f\| \geqslant \frac{1}{2} k(\lambda_0) \|f\|.$$

Это уже однажды применявшееся нами соображение (см. доказательство теоремы 4 n° 48) показывает, что множество точек регулярного типа всегда открыто. Мы будем называть это множество точек *полем регулярности* оператора T.

Если A есть симметрический оператор и $z = x + iy$ ($y \neq 0$), то (сравни доказательство теоремы 3 n° 48) при любом $f \in \mathrm{D}_A$

$$\|(A - zI) f\|^2 = \|(A - xI) f\|^2 + y^2 \|f\|^2 \geqslant y^2 \|f\|^2,$$

откуда видно, что верхняя и нижняя половины z-плоскости являются связными компонентами поля регулярности любого симметрического оператора.

Поле регулярности изометрического оператора V также содержит две связные компоненты: область внутри и область вне единичного круга. Действительно, при $|\zeta| < 1$

$$\|(V - \zeta I) f\| \geqslant \|Vf\| - |\zeta| \cdot \|f\| = (1 - |\zeta|) \|f\|$$

и, аналогично, при $|\zeta| > 1$,

$$\|(V-\zeta I)f\| \geqslant |\zeta| \cdot \|f\| - \|Vf\| = (|\zeta|-1)\|f\|.$$

Теорема. *Если* Γ *есть связная компонента поля регулярности линейного оператора* T, *то размерность подпространства* $\mathrm{H} \ominus \Delta_T(\lambda)$ *одинакова для всех* $\lambda \in \Gamma$.

Доказательство. Обозначим через P_λ оператор ортогонального проектирования на подпространство

$$\mathfrak{N}_\lambda = \mathrm{H} \ominus \Delta_T(\lambda).$$

Если мы покажем, что для любого $\lambda_0 \in \Gamma$ найдется такое $\delta = \delta(\lambda_0) > 0$, что из $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ следует

$$\|P_\lambda - P_{\lambda_0}\| < 1, \tag{1}$$

то из теоремы n° 39 будет вытекать равенство размерностей подпространств $\mathfrak{N}_\lambda$, $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$. Учитывая затем, что любые две точки λ_1, $\lambda_2 \in \Gamma$ можно соединить путем, который в силу леммы Гейне — Бореля покрывается конечным числом построенных δ-окрестностей, мы и получим, что размерности подпространств $\mathfrak{N}_{\lambda_1}$, $\mathfrak{N}_{\lambda_2}$ одинаковы.

Итак, пусть λ_0 — некоторая фиксированная точка области Γ и пусть

$$\delta = \delta(\lambda_0) \leqslant \frac{1}{3} k(\lambda_0).$$

Так как

$$k(\lambda_0)\|f\| \leqslant \|(T-\lambda_0 I)f\| \leqslant \|(T-\lambda I)f\| + |\lambda - \lambda_0| \cdot \|f\|,$$

то при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta$

$$\|(T-\lambda I)f\| \geqslant \frac{2}{3} k(\lambda_0)\|f\|.$$

Примем, что $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta$. В таком случае для любого $h \in \mathfrak{N}_\lambda$ ($\|h\| = 1$)

$$\|(I - P_{\lambda_0})h\| = \sup_{f \in D_T} \frac{|(h, \{T-\lambda_0 I\} f)|}{\|(T-\lambda_0 I)f\|} =$$

$$= \sup_{f \in D_T} \frac{|(h, \{T-\lambda I\} f + (\lambda - \lambda_0) f)|}{\|(T-\lambda_0 I)f\|} = \sup_{f \in D_T} \frac{|\lambda - \lambda_0| \cdot |(h, f)|}{\|(T-\lambda_0 I)f\|} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{2}$$

и для любого $h \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$ ($\|h\| = 1$)

$$\|(I - P_\lambda)h\| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3}$$

На основании второго определения раствора двух линейных многообразий (см. n° 39) из неравенств (2), (3) следует, что

$$\| P_\lambda - P_{\lambda_0} \| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тем самым теорема* доказана.

Из наших рассмотрений вытекает, что

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \| P_\lambda - P_{\lambda_0} \| = 0 \quad (\lambda, \lambda_0 \in \Gamma).$$

Это соотношение выражает, что подпространство $\mathfrak{N}_\lambda$ *непрерывно* вращается вокруг точки $f = 0$ при движении точки λ по области Γ.

Условимся называть *дефектным числом* линейного многообразия $\mathfrak{M}$ размерность его ортогонального дополнения $\mathfrak{N} = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}$ и будем писать

$$\operatorname{def} \mathfrak{M} = \dim \mathfrak{N}.$$

Дефектное число может быть как конечным, так и бесконечным.

Доказанная только что теорема дает право ввести следующее

Определение. Дефектное число линейного многообразия $\mathfrak{M}_\lambda = \Delta_T(\lambda)$ для точек λ, принадлежащих данной связной компоненте поля регулярности оператора T, называется *дефектным числом* оператора T в этой компоненте поля регулярности. При этом $\mathfrak{N}_\lambda = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_\lambda$ называется *дефектным подпространством* оператора T для точки λ, а любой отличный от нуля элемент дефектного подпространства называется *дефектным элементом.*

Каждый симметрический оператор A имеет два дефектных числа, а именно одно ($\mathfrak{m}$) в нижней, другое ($\mathfrak{n}$) в верхней полуплоскости:

$$\operatorname{def} \Delta_A(z) = \begin{cases} \mathfrak{m} & (\Im z < 0), \\ \mathfrak{n} & (\Im z > 0). \end{cases}$$

Подобным образом два дефектных числа имеет любой изометрический оператор V:

$$\operatorname{def} \Delta_V(\zeta) = \begin{cases} \mathfrak{m} & (|\zeta| > 1), \\ \mathfrak{n} & (|\zeta| < 1). \end{cases}$$

Дефектные числа симметрического (соответственно изометрического) оператора образуют упорядоченную пару $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, которую называют *индексом дефекта* рассматриваемого оператора.

---

* Эта теорема принадлежит М. Г. Крейну и М. А. Красносельскому (см. их статью, цитированную в n° 39). Для симметрических операторов (см. ниже предложения 1° и 2°) теорема была доказана ранее Нейманом, а самый факт, выражаемый теоремой Неймана, был обнаружен еще ранее Г. Вейлем — на дифференциальных операторах второго порядка, Т. Карлеманом — на интегральных операторах и Хеллингером — на якобиевых матрицах (см. работы, цитируемые в n° 102 и в добавлениях).

В тех случаях, когда будет наперед известна конечность дефектных чисел, мы будем обозначать их латинскими буквами.

Из доказанной нами теоремы непосредственно вытекают следующие три предложения.

1°. *Если симметрический оператор имеет вещественную точку регулярного типа, то его дефектные числа равны:* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. *То же справедливо относительно изометрического оператора, если он имеет точку регулярного типа на единичной окружности.*

2°. *Если A — симметрический оператор, то любое невещественное число z является для сопряженного оператора A^* собственным значением: кратности* $\mathfrak{m}$, *если* $\Im z > 0$, *и кратности* $\mathfrak{n}$, *если* $\Im z < 0$.

Действительно, если f пробегает D_A, а g пробегает $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$, то

$$(g, \{A - \bar{z}I\} f) = 0,$$

откуда

$$(A^*g - zg, f) = 0$$

или

$$A^*g = zg.$$

Таким образом, z есть собственное значение оператора A^* и притом кратности $\dim \mathfrak{N}_{\bar{z}}$.

3°. *Дефектные числа изометрического оператора V могут быть определены с помощью следующих равенств:*

$$\mathfrak{m} = \operatorname{def} D_V,$$
$$\mathfrak{n} = \operatorname{def} \Delta_V.$$

Нуждается в доказательстве только первое равенство. Его справедливость следует из того, что при любом $\zeta \neq 0$

$$\Delta_V(\zeta) = (V - \zeta I) D_V = \left(\frac{1}{\zeta} V - I\right) D_V =$$
$$= \left(\frac{1}{\zeta} I - V^{-1}\right) V D_V = \left(V^{-1} - \frac{1}{\zeta} I\right) D_{V^{-1}} = \Delta_{V^{-1}}\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

а потому, при $|\zeta| > 1$,

$$\mathfrak{m} = \operatorname{def} \Delta_V(\zeta) = \operatorname{def} \Delta_{V^{-1}}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \operatorname{def} \Delta_{V^{-1}}(0) = \operatorname{def} \Delta_{V^{-1}} = \operatorname{def} D_V.$$

Справедливо также следующее предложение.

4°. *Если A — произвольный симметрический оператор в* H, *а B — ограниченный самосопряженный оператор в* H, *то индексы дефекта операторов A и $A + B$ одинаковы.*

Для доказательства достаточно взять при фиксированном невещественном λ_0 семейство операторов $A - \lambda_0 I + tB$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$

и установить независимость от t размерности подпространства $\mathrm{H} \ominus \Delta_{A+tB}(\lambda_0)$, подобно тому как это было сделано при доказательстве основной теоремы настоящего пункта.

101. Снова о преобразовании Кэли. В n° 79 мы впервые ввели преобразование Кэли V замкнутого симметрического* оператора A при помощи формул

$$\left.\begin{aligned} (A-\bar{z}I)\,h &= f, \\ (A-zI)\,h &= Vf, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где z — какое-нибудь невещественное число, а h пробегает D_A. Мы будем предполагать в настоящем пункте, что $\Im z > 0$. Оператор V выражается через оператор A формулой

$$Vf = (A-zI)(A-\bar{z}I)^{-1} f;$$

при этом областью определения D_V оператора V является $\Delta_A(\bar{z})$. Заметим также, что в силу формул (1)

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{(V-I)\,f}{\bar{z}-z}, \\ Ah &= \frac{(\bar{z}V-zI)\,f}{\bar{z}-z}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и поэтому

$$Ah = (\bar{z}V - zI)(V-I)^{-1}h. \tag{2'}$$

Для дальнейшего весьма важно, что *индекс дефекта* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *оператора* A *совпадает с индексом дефекта оператора* V. Действительно, по определению,

$$\mathfrak{m} = \operatorname{def} \Delta_A(\bar{z}).$$

Но

$$\Delta_A(\bar{z}) = \mathrm{D}_V,$$

следовательно,

$$\operatorname{def} \mathrm{D}_V = \mathfrak{m}.$$

С другой стороны, снова по определению,

$$\mathfrak{n} = \operatorname{def} \Delta_A(z)$$

и

$$\Delta_A(z) = \Delta_V,$$

так что

$$\operatorname{def} \Delta_V = \mathfrak{n}.$$

---

* В n° 46 было показано, что всякий симметрический оператор допускает замыкание. Поэтому в дальнейшем, рассматривая симметрические операторы, мы будем предполагать их замкнутыми.

Остается принять во внимание предложение 3° п° 100.

Теорема 1. *Если V — изометрический оператор и если многообразие Δ_V (1) плотно в* H, *то определяемый формулой* (2′) *оператор A — симметрический, а оператор V есть его преобразование Кэли.*

Доказательство. Так как Δ_V (1) плотно в H, то обратный оператор $(V-I)^{-1}$ существует. Действительно, несуществование этого оператора означает, что единица есть собственное значение оператора V. Но если

$$Vg = g \quad (g \neq 0),$$

то при любом $f \in \mathrm{D}_V$

$$(Vf - f, g) = (Vf, g) - (f, g) = (Vf, Vg) - (f, g) = 0,$$

т. е. $g \perp \Delta_V(1)$.

Поскольку оператор $(V-I)^{-1}$ существует, то оператор

$$A = (\bar{z}V - zI)(V - I)^{-1}$$

имеет смысл, а его область определения плотна в H. Докажем, что этот оператор — симметрический.

Пусть f, g — произвольные элементы из $\mathrm{D}_A = \Delta_V$ (1):

$$\begin{aligned} f &= V\varphi - \varphi, \\ g &= V\psi - \psi, \end{aligned} \quad (\varphi, \psi \in \mathrm{D}_V).$$

В таком случае,

$$\begin{aligned} Af &= (\bar{z}V - zI)\varphi = \bar{z}V\varphi - z\varphi, \\ Ag &= (\bar{z}V - zI)\psi = \bar{z}V\psi - z\psi. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(Af, g) = (\bar{z}V\varphi - z\varphi, V\psi - \psi) = (z + \bar{z})(\varphi, \psi) - \bar{z}(V\varphi, \psi) - z(\varphi, V\psi)$$

и

$$(f, Ag) = (V\varphi - \varphi, \bar{z}V\psi - z\psi) = (z + \bar{z})(\varphi, \psi) - \bar{z}(V\varphi, \psi) - z(\varphi, V\psi).$$

Мы видим, что

$$(Af, g) = (f, Ag).$$

Доказательство соотношения

$$V = \frac{A - zI}{A - \bar{z}I}$$

не представляет никакого труда. Таким образом, оператор V является преобразованием Кэли оператора A.

В дальнейшем мы будем применять название «преобразование Кэли» к каждому из операторов V, A, связанных соотношениями:

(1) и (2), т. е. мы не только будем называть оператор V преобразованием Кэли оператора A, но и оператор A — преобразованием Кэли оператора V.

Из доказанных нами предложений непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть A_1 и A_2 — симметрические операторы, а V_1 и V_2 — их преобразования Кэли. Для того чтобы оператор A_2 был расширением оператора A_1, необходимо и достаточно, чтобы оператор V_2 был расширением оператора V_1.*

Теоремой 2 вопрос о симметрических расширениях заданного оператора A сводится к вопросу об изометрических расширениях его преобразования Кэли V.

Так как замкнутые линейные многообразия F и G могут служить соответственно областью определения и изменения изометрического оператора тогда и только тогда, когда равны их размерности (см. n° 10), то изометрические расширения оператора V могут быть получены следующим образом.

Выберем в дефектных подпространствах $\mathrm{H} \ominus \mathrm{D}_V$, $\mathrm{H} \ominus \Delta_V$ два подпространства, F и G, равных размерностей и построим произвольный изометрический оператор V_1 с областью определения F и областью значений G.

Определим, далее, линейный оператор $\tilde{V}$ с областью определения $\mathrm{D}_{\tilde{V}} = \mathrm{D}_V \oplus \mathrm{F}$ и областью значений $\Delta_{\tilde{V}} = \Delta_V \oplus \mathrm{G}$ формулами

$$\tilde{V}f = \begin{cases} Vf & \text{при } f \in \mathrm{D}_V \\ V_1 f & \text{при } f \in \mathrm{F}. \end{cases}$$

Очевидно, $\tilde{V}$ есть изометрическое расширение V и при всевозможных изменениях F, G, V_1 мы получим все изометрические расширения $\tilde{V}$ оператора V и каждое по одному разу.

Чтобы найти некоторое симметрическое расширение $\tilde{A}$ оператора A, следует перейти к преобразованию Кэли оператора A, найти по описанному выше методу некоторое расширение $\tilde{V}$ оператора V и, наконец, вернуться к $\tilde{A}$, выполнив преобразование Кэли* над $\tilde{V}$. Соответствующая этому процессу формула будет дана в n° 102.

Из приведенных выше рассуждений следует, в частности, что оператор A является максимальным симметрическим (самосопряженным) тогда и только тогда, когда его преобразование Кэли V является максимальным изометрическим (соответственно унитарным) оператором.

* Число 1 не является собственным значением оператора $\tilde{V}$, так как из равенства $\tilde{V}g = g$ вытекает, что $(\tilde{V}g, Vf) = (g, Vf)$ при всех $f \in D_V$, т. е. $(g, f) = (g, Vf)$ или $(g, f - Vf) = 0$. Многообразие $(I - V) D_V = D_A$ плотно в H; следовательно, $g = 0$.

Поэтому имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы симметрический оператор был максимальным, необходимо и достаточно, чтобы одно из его дефектных чисел равнялось нулю. Для того чтобы симметрический оператор был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы оба его дефектных числа равнялись нулю.*

Из описанного ранее процесса расширения следует также

Теорема 4. *Пусть A — произвольный симметрический оператор с индексом дефекта $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. Оператор A всегда можно расширить до максимального. Если $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то среди таких расширений нет самосопряженных; если $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ конечны, то любое максимальное расширение оператора A является самосопряженным; если же дефектные числа $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ бесконечны и равны, то среди максимальных расширений имеются как самосопряженные, так и несамосопряженные.*

102. Формулы Неймана.

Теорема. *Пусть A — произвольный симметрический оператор с областью определения D_A, а $\mathfrak{N}_{\bar z}$ и $\mathfrak{N}_z$ $(\Im z > 0)$ — какая-нибудь пара его дефектных подпространств. Для области определения D_{A^*} оператора A^* имеет место следующее представление в виде прямой суммы трех линейных многообразий:*

$$D_{A^*} = D_A \oplus \mathfrak{N}_{\bar z} \oplus \mathfrak{N}_z.$$

Доказательство. Покажем, что любой элемент f из D_{A^*} представим в виде

$$f = f_0 + g_z + g_{\bar z}, \tag{1}$$

где* $f_0 \in D_A$, $g_z \in \mathfrak{N}_{\bar z}$, $g_{\bar z} \in \mathfrak{N}_z$; при этом следует заметить, что вместе с (1) будет иметь место формула

$$A^*f = Af_0 + zg_z + \bar z g_{\bar z}. \tag{1'}$$

Пусть $f \in D_{A^*}$. Разложим элемент $A^*f - zf$ на составляющие в ортогональных подпространствах $\mathfrak{M}_z$ и $\mathfrak{N}_z$:

$$A^*f - zf = (Af_0 - zf_0) + (\bar z - z)\, g_{\bar z}.$$

Но $A^*g_{\bar z} = \bar z g_{\bar z}$; поэтому

$$A^*(f - f_0 - g_{\bar z}) = z(f - f_0 - g_{\bar z}),$$

откуда заключаем, что

$$f - f_0 - g_{\bar z} \in \mathfrak{N}_{\bar z},$$

* Напомним (см. предложение 2° n° 100), что $\mathfrak{N}_{\bar z}$ есть собственное подпространство оператора A^*, принадлежащее собственному значению z. Поэтому элементы из $\mathfrak{N}_{\bar z}$ обозначены g_z.

т. е.

$$f - f_0 - g_{\bar{z}} = g_z$$

или

$$f = f_0 + g_z + g_{\bar{z}}.$$

Для окончания доказательства теоремы осталось установить, что представление (1) каждого элемента $f \in D_{A^*}$ единственно. Допуская противное, примем, что

$$f_0 + g_z + g_{\bar{z}} = 0. \tag{2}$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор A^*, получаем

$$Af_0 + zg_z + \bar{z}g_{\bar{z}} = 0. \tag{2'}$$

Умножая далее (2) на z и вычитая из (2′), получим

$$Af_0 - zf_0 + (\bar{z} - z)\, g_{\bar{z}} = 0,$$

откуда, вследствие ортогональности слагаемых, следует, что $(\bar{z} - z)\, g_{\bar{z}} = 0$; точно так же получим, что $(\bar{z} - z)\, g_z = 0$; следовательно,

$$f_0 = g_{\bar{z}} = g_z = 0.$$

Теорема доказана.

Найдем теперь $\mathfrak{J}(A^*f, f)$ при любом $f \in D_{A^*}$. В соответствии с (1) и (1′), имеем $f = f_0 + g$, где $g = g_z + g_{\bar{z}}$, и

$$(A^*f, f) = (Af_0 + A^*g, f_0 + g) =$$
$$= (Af_0, f_0) + (g, Af_0) + (Af_0, g) + (zg_z + \bar{z}g_{\bar{z}}, g_z + g_{\bar{z}}).$$

Так как сумма первых трех слагаемых вещественна, то

$$\mathfrak{J}(A^*f, f) = \mathfrak{J}\{z\, \| g_z \|^2 + \bar{z}\, \| g_{\bar{z}} \|^2 + [z\, (g_z, g_{\bar{z}}) + \bar{z}\, (g_{\bar{z}}, g_z)]\},$$

где в квадратных скобках снова стоит вещественная величина, а потому окончательно находим

$$\mathfrak{J}(A^*f, f) = \mathfrak{J}z\, (\| g_z \|^2 - \| g_{\bar{z}} \|^2). \tag{3}$$

В соответствии с формулой (3) область D_{A^*} состоит из трех (нелинейных) многообразий: Γ^+ (совокупность элементов f, для которых $\mathfrak{J}(A^*f, f) > 0$), Γ^- (совокупность элементов f, для которых $\mathfrak{J}(A^*f, f) < 0$) и Γ^0 (совокупность элементов f, для которых (A^*f, f) вещественно). Элемент

$$f = f_0 + g_z + g_{\bar{z}}$$

принадлежит Γ^+, Γ^- или Γ^0, смотря по тому, будет ли

$$\| g_z \| > \| g_{\bar{z}} \|, \quad \| g_z \| < \| g_{\bar{z}} \| \text{ или } \| g_z \| = \| g_{\bar{z}} \| \text{ (если } \mathfrak{J}z > 0).$$

Найдем теперь для области определения $D_{\tilde{A}}$ любого симметрического расширения $\tilde{A}$ оператора A представление, аналогичное формуле (1).

Чтобы подчеркнуть зависимость введенных в n° 101 подпространств F и G от z, будем писать F_z и G_z. Таким образом, $F_z \subseteq \mathfrak{N}_{\bar{z}}$, $G_z \subseteq \mathfrak{N}_z$.

Из рассмотрений n° 101 следует, что

$$\begin{aligned} D_{\tilde{A}} &= (\tilde{V} - I) D_{\tilde{V}} = (\tilde{V} - I)(D_V \oplus F_z) = \\ &= (V - I) D_V \oplus (V_1 - I) F_z = D_A \oplus (V_1 - I) F_z \end{aligned}$$

или, полагая $V_1 = -V'$,

$$D_{\tilde{A}} = D_A \oplus (V' + I) F_z.$$

Из $A^* \supset \tilde{A}$ следует, что при

$$f = f_0 + g_z + V' g_z \quad (g_z \in F_z) \tag{4}$$

будет

$$\tilde{A} f = A f_0 + z g_z + \bar{z} V' g_z. \tag{4'}$$

Формулы (1) и (4) будем называть соответственно *первой* и *второй формулой Неймана**.

Из первой формулы Неймана непосредственно следует для размерности D_{A^*} по модулю D_A формула:

$$\dim D_{A^*}/D_A = \dim \mathfrak{N}_{\bar{z}} + \dim \mathfrak{N}_z. \tag{5}$$

Отметим, что, используя первую формулу Неймана и введенные выше многообразия Γ^+, Γ^-, Γ^0, нетрудно получить теорему о постоянстве дефектных чисел симметрического оператора в каждой из полуплоскостей $\mathfrak{J} z \gtrless 0$ (т. е. предложение 2° n° 100) без использования общей теоремы n° 100. В частности, в случае равных дефектных чисел названное утверждение вытекает из одной лишь формулы (5), так как левая ее часть, очевидно, не зависит от z.

Вторая формула Неймана вместе с равенством (4') описывает все симметрические расширения $\tilde{A}$ заданного оператора A. Если, в частности, оператор A имеет равные дефектные числа и $\tilde{A}$ есть его самосопряженное расширение, то в формуле (4) элемент g_z будет пробегать все подпространство $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$, а $V' g_z$ — все $\mathfrak{N}_z$. Обратно, если в (4) элемент g_z пробегает все $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$, а $V' g_z$ — все $\mathfrak{N}_z$, то оператор $\tilde{A}$ будет самосопряженным расширением оператора A. Если

* J. von Neumann. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktional Operatoren, Math. Ann. **102** (1929), 49—131. В n°n° 102—104 мы следуем этой статье Неймана.

индексы дефекта оператора A и его симметрического расширения $\tilde{A}$ суть (m, n) и $(m-p, n-p)$, где m, $n < \infty$, то из второй формулы Неймана вытекает соотношение

$$\dim \mathrm{D}_{\tilde{A}}/\mathrm{D}_A = p.$$

Поясним изложенную теорию на примере оператора дифференцирования $\mathscr{P}$, который мы ввели в n° 55.

Уравнение

$$\mathscr{P}^* g = zg$$

имеет вид

$$\frac{dg}{dt} + izg = 0.$$

Его формальным решением является функция

$$g(t) = Ce^{-izt}. \tag{6}$$

В случае полной оси $(-\infty < t < +\infty)$ эта функция принадлежит L^2 только при $C = 0$. Следовательно, индекс дефекта оператора дифференцирования на всей оси есть $(0, 0)$. В случае полуоси $(0 \leqslant t < \infty)$ индексом дефекта является $(0, 1)$, так как функция (6) принадлежит $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ при $\mathfrak{J}z < 0$ и не принадлежит $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ при $\mathfrak{J}z > 0$. Наконец, в случае интервала $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ индекс дефекта есть $(1, 1)$, так как функция (6) принадлежит $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ при любом z.

Полагая в формуле (4)

$$z = i, \quad g_z = e^t$$

и

$$V' g_z = \vartheta g_{\bar{z}},$$

где $g_{\bar{z}} = e^{2\pi - t}$, а ϑ $(|\vartheta| = 1)$ есть постоянная, и меняя $\arg\vartheta$ в интервале $[0, 2\pi)$, получим все самосопряженные расширения $\tilde{\mathscr{P}}$ оператора $\mathscr{P}$ (на интервале $[0, 2\pi]$) в следующем виде:

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \alpha(e^t + \vartheta e^{2\pi - t}),$$
$$\tilde{\mathscr{P}}\varphi(t) = i\varphi_0'(t) + \alpha i(e^t - \vartheta e^{2\pi - t});$$

здесь $\varphi_0(0) = \varphi_0(2\pi) = 0$, а α — произвольная постоянная.

Легко проверить, что этот результат совпадает с результатом n° 55, причем связь между фигурирующими здесь и там параметрами имеет вид

$$\vartheta = \frac{\theta - e^{2\pi}}{1 - e^{2\pi}\theta}.$$

103. Простые симметрические операторы. Симметрический (соответственно изометрический) оператор называется *простым*, если не существует приводящего его подпространства, в котором он индуцировал бы самосопряженный (соответственно унитарный) оператор.

Для простоты симметрического оператора A необходимо и достаточно, чтобы было простым его преобразование Кэли V.

Справедливость этого утверждения вытекает из следующего предложения.

Теорема 1. *Подпространство* $\mathfrak{G}$ *приводит симметрический оператор A в том и только том случае, когда оно приводит преобразование Кэли V оператора A.*

Доказательство. Пусть $h \in \mathfrak{D}_A$, так что

$$h = (V - I)f, \quad Ah = (\bar{z}V - zI)f \quad (f \in \mathfrak{D}_V).$$

Принимая, что подпространство $\mathfrak{G}$ приводит V, и обозначая через P оператор проектирования на $\mathfrak{G}$, будем иметь

$$Pf \in \mathfrak{D}_V, \quad VPf = PVf.$$

Поэтому

$$Ph = (V - I)Pf \in \mathfrak{D}_A$$

и

$$APh = A(V - I)Pf = (\bar{z}V - zI)Pf = P(\bar{z}V - zI)f = PAh.$$

Таким образом, достаточность условия теоремы доказана.

Чтобы доказать необходимость, предположим, что $f \in \mathfrak{D}_V$ и, следовательно,

$$f = (A - \bar{z}I)h, \quad Vf = (A - zI)h \quad (h \in \mathfrak{D}_A).$$

Принимая, что подпространство $\mathfrak{G}$ приводит оператор A, будем иметь

$$Pf = (A - \bar{z}I)Ph \in \mathfrak{D}_V.$$

Остается проверить, что

$$VPf = PVf.$$

Но

$$VPf = V(A - \bar{z}I)Ph = (A - zI)Ph = P(A - zI)h = PVf,$$

и теорема доказана.

Если изометрический оператор V не простой и, значит, имеет унитарные части, то среди этих унитарных частей существует *максимальная* (в том смысле, что она является расширением любой другой унитарной части оператора V). Действительно, максимальной унитарной частью оператора V является часть V, лежащая в замкнутой линейной оболочке $\mathfrak{G}_0$ всех тех приводящих V подпространств, в которых V индуцирует унитарные операторы.

Подобным образом может быть определена *максимальная самосопряженная часть* непростого симметрического оператора.

Лемма. *Пусть V — изометрический оператор с равными дефектными числами, U_0 — его максимальная унитарная часть и U — какое-нибудь унитарное расширение оператора V.*

В таком случае D_{U_0} *является ортогональным дополнением линейной оболочки* L *подпространств* $U^k(\mathrm{H}\ominus\mathrm{D}_V)$ $(\pm k=0, 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Введем подпространство

$$\mathrm{G}=\mathrm{H}\ominus\overline{\mathrm{L}}.$$

Оно является инвариантным подпространством как для U, так и для U^{-1}. Поэтому по теореме 3 n° 47 подпространство G приводит U. Пусть U' есть часть U, лежащая в G.

Так как G ортогонально L, то и подавно G ортогонально $\mathrm{H}\ominus\mathrm{D}_V$ и, следовательно, принадлежит D_V:

$$\mathrm{G}\subseteq\mathrm{D}_V.$$

Равным образом

$$\mathrm{G}\subseteq\Delta_V.$$

Следовательно, G приводит V, а потому U' есть унитарная часть V, лежащая в G и, значит,

$$\mathrm{G}\subseteq\mathrm{D}_{U_0}. \tag{1}$$

Но, с другой стороны,

$$\mathrm{D}_{U_0}\subseteq\mathrm{D}_V,$$

и, значит, D_{U_0} ортогонально подпространству $\mathrm{H}\ominus\mathrm{D}_V$. А так как $U^k\mathrm{D}_{U_0}=U_0^k\mathrm{D}_{U_0}=\mathrm{D}_{U_0}$, то $U^k\mathrm{D}_{U_0}$ ортогонально к $\mathrm{H}\ominus\mathrm{D}_V$ при $\pm k=0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, D_{U_0} ортогонально L, т. е.

$$\mathrm{D}_{U_0}\subseteq\mathrm{G}. \tag{2}$$

Сравнение (1) с (2) и доказывает лемму.

В дальнейшем нам понадобится непосредственно вытекающее из доказанной леммы

Следствие. *В несепарабельном пространстве не существует простых симметрических операторов с равными и конечными дефектными числами.*

Дальнейшим следствием леммы является

Теорема 2. *Для простоты изометрического оператора V с равными дефектными числами необходимо, чтобы при любом. и достаточно, чтобы при каком-нибудь его унитарном расширении U линейная оболочка подпространств* $U^k(\mathrm{H}\ominus\mathrm{D}_V)$ $(\pm k=0, 1, 2, \ldots)$ *была плотной в* H.

Из этой теоремы и теоремы 1 n° 83 следует, что любое унитарное (самосопряженное) расширение простого изометрического (симметрического) оператора с индексом дефекта (1, 1) имеет простой спектр.

Аналогично доказывается общая

Теорема 3. *Кратность спектра любого унитарного (самосопряженного) расширения простого изометрического (симметрического) оператора с индексом дефекта* (m, m) *не превосходит числа* m.

104. Структура максимальных операторов. Пусть пространство H сепарабельно и $\{e_k\}_1^\infty$ — какой-нибудь ортонормированный базис в нем. Введем в рассмотрение линейные операторы V_+ и V_-, определяемые формулами

$$
\begin{aligned}
V_+e_k &= e_{k+1} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),\\
V_-e_k &= e_{k-1} \quad (k = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots).
\end{aligned}
$$

Очевидно, V_+ и V_- — изометрические операторы с индексами дефекта (0, 1) и (1, 0).

Желая перейти к преобразованиям Кэли A_+ и A_- операторов V_+ и V_-, проверим, что многообразия $\Delta_{V_+}(1)$ и $\Delta_{V_-}(1)$ плотны в H. Установим это, например, для первого многообразия. Беря

$$f = e_k + \frac{r-1}{r} e_{k+1} + \cdots + \frac{1}{r} e_{k+r-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

найдем

$$
\begin{aligned}
(V_+ - I) f &= \left(e_{k+1} + \frac{r-1}{r} e_{k+2} + \cdots + \frac{1}{r} e_{k+r}\right) - \\
&\quad - \left(e_k + \frac{r-1}{r} e_{k+1} + \cdots + \frac{1}{r} e_{k+r-1}\right) = \\
&= \frac{1}{r}(e_{k+1} + e_{k+2} + \cdots + e_{k+r}) - e_k.
\end{aligned}
$$

Но

$$\left\| \frac{1}{r}(e_{k+1} + e_{k+2} + \cdots + e_{k+r}) \right\|^2 = \frac{1}{r},$$

откуда заключаем, что орты e_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ являются предельными для векторов из $\Delta_{V_+}(1)$ и, следовательно, многообразие $\Delta_{V_+}(1)$ плотно в H.

Симметрические операторы A_+ и A_- являются максимальными с индексами дефекта (0, 1) и (1, 0).

Теорема 1. *Операторы* A_+ *и* A_- *неприводимы.*

Для доказательства утверждения относительно A_+ достаточно установить (см. n° 103), что оператор V_+ неприводим.

Допустим, что подпространство F (и, следовательно, его ортогональное дополнение G) приводит V_+, и положим $V_+\mathrm{F} = \mathrm{F}_+$, $V_+\mathrm{G} = \mathrm{G}_+$.

Тогда

$$F_+ \subseteq F, \quad G_+ \subseteq G.$$

В двух последних соотношениях одновременное выполнение знаков равенства невозможно, ибо из $F_+ = F$ и $G_+ = G$ следовало бы $V_+H = H$. Пусть, например, $F \ominus F_+ \neq \{0\}$ и

$$f \in F \ominus F_+ \quad (f \neq 0).$$

Вектор f, как элемент из F, ортогонален G и, следовательно,

$$f \perp F_+ \oplus G_+. \tag{1}$$

Из (1) следует $f \perp e_k$ ($k = 2, 3, \ldots$), т. е. $f = \alpha e_1$ ($\alpha \neq 0$), откуда $e_1 \in F \ominus F_+$ и, стало быть, $e_1 \in F$.

Так как F приводит V_+, то вместе с e_1 подпространство F содержит все e_k ($k = 2, 3, \ldots$), т. е. $F = H$, и теорема доказана относительно A_+. Вторая часть доказывается аналогично.

Итак, мы показали, что операторы A_+, A_- неприводимы и, следовательно, являются простыми симметрическими операторами.

Важное принципиальное значение этих операторов вытекает из следующего предложения.

Теорема 2. *Если простой симметрический оператор A в пространстве* H *имеет индекс дефекта* (0, 1) *(соответственно* (1, 0)*), то пространство* H *сепарабельно, а оператор A изоморфен оператору A_+ (соответственно A_-).*

Доказательство. Примем для определенности, что индексом дефекта оператора A является (0, 1). Пусть V — преобразование Кэли оператора A и пусть $e_1 \perp \Delta_V$ ($\|e_1\| = 1$). Образуем замкнутую оболочку M векторов $V^k e_1 = e_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). M есть подпространство, и $\{e_k\}_0^\infty$ является ортонормированным базисом в нем.

Так как M инвариантно относительно V и V^{-1}, то M приводит V и, следовательно, $H \ominus M$ также приводит V. Часть V, лежащая в M, очевидно, изоморфна V_+ и, значит, имеет индекс дефекта (0, 1). Часть V, лежащая в $H \ominus M$, должна быть унитарной, так как в противном случае по крайней мере одно из дефектных чисел оператора V превосходило бы соответствующее дефектное число оператора V_+ и, значит, оператора A.

С другой стороны, простой оператор V не имеет унитарных частей. Таким образом, $H \ominus M = \{0\}$ и оператор V изоморфен V_+, а следовательно, его преобразование Кэли A изоморфно A_+, что и требовалось доказать.

С помощью оператора A_+ (A_-) можно построить максимальный оператор с индексом дефекта $(0, \mathfrak{n})$ (соответственно $(\mathfrak{m}, 0)$). С этой целью достаточно построить ортогональную сумму сепарабельных гильбертовых пространств H_α, где α пробегает множество мощности $\mathfrak{n}$ (соответственно $\mathfrak{m}$), и в каждом из них реализовать оператор A_+ (соответственно A_-).

Как показал впервые Нейман, таким путем может быть получен любой простой максимальный оператор, т. е. имеет место

Теорема 3. *Простой симметрический оператор A с индексом дефекта* $(0, \mathfrak{n})$ (*или* $(\mathfrak{m}, 0)$) *распадается в ортогональную сумму операторов A_+ (соответственно A_-):*

$$A = \sum_{\alpha \in \mathbf{M}} \oplus A_+^{(\alpha)} \quad (\mathbf{M} \text{ — \textit{множество мощности} } \mathfrak{n})$$

или, соответственно,

$$A = \sum_{\alpha \in \mathbf{M}} \oplus A_-^{(\alpha)} \quad (\mathbf{M} \text{ — \textit{множество мощности} } \mathfrak{m}).$$

Доказательство. Пусть V есть преобразование Кэли оператора A и $D_V = H$, $H \ominus \Delta_V = M_1$ ($\dim M_1 = \mathfrak{n}$).

Положим

$$V^k M_1 = M_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так же как в теореме 2, получим, что

$$M_i \perp M_k \quad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, 3, \ldots),$$

и что замыкание линейной оболочки подпространств M_k ($k = 1, 2, \ldots$) совпадает с H.

Пусть $\{e_1^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathbf{M}}$ — ортонормированный базис в M_1, а H^α — замыкание линейной оболочки векторов $\{e_k^{(\alpha)}\}_{k=1}^{\infty}$, где $e_{k+1}^{(\alpha)} = V^k e_1^{(\alpha)}$. Подпространства $H^{(\alpha)}$ и $H^{(\alpha')}$ ортогональны при $\alpha \neq \alpha'$ и ортогональная сумма всех таких подпространств равна H, так как при каждом k совокупность $\{e_k^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathbf{M}}$ образует ортонормированный базис в M_k.

Очевидно, каждое из подпространств $H^{(\alpha)}$ приводит V, и часть V, лежащая в $H^{(\alpha)}$, изоморфна V_+. Переходя к преобразованиям Кэли, завершаем доказательство теоремы.

Теорема 3 исчерпывает вопрос о структуре простых максимальных операторов.

Операторы A_+ и A_- (соответственно V_+ и V_-) будем называть *элементарными максимальными операторами.*

С помощью элементарных максимальных операторов можно построить оператор с заданным индексом дефекта $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. Для этого следует по описанному выше способу построить операторы с индексами дефекта $(\mathfrak{m}, 0)$ и $(0, \mathfrak{n})$, а затем образовать их ортогональную сумму. Однако произвольный простой оператор с индексом дефекта $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, вообще говоря, не может быть сконструирован из элементарных максимальных операторов.

В качестве иллюстрации предложений настоящего пункта рассмотрим снова оператор дифференцирования $\mathcal{P}$ на полуоси $(0, \infty)$. Этот оператор имеет индекс дефекта $(0, 1)$. Для этого чтобы выяснить структуру оператора $\mathcal{P}$, перейдем к его преобразованию Кэли

$$V = (\mathcal{P} - iI)(\mathcal{P} + iI)^{-1}$$

и рассмотрим степени $V^k g$, где $g = e^{-t}$ есть дефектный элемент оператора $\mathcal{P}$ для точки i. Будем рассматривать этот элемент e^{-t} как нулевую функцию Лагерра (см. n° 12) от удвоенного аргумента:

$$e^{-t} = \psi_0(2t),$$

и покажем, что

$$V\psi_k(2t) = \psi_{k+1}(2t) \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Представим $\psi_k(2t)$ в виде

$$\psi_k(2t) = if'(t) + if(t) \equiv (\mathcal{P} + iI)f;$$

так как $f(0) = 0$, то

$$f(t) = -ie^{-t}\int_0^t \psi_k(2s)\,e^s ds.$$

Поэтому

$$V\psi_k(2t) = (\mathcal{P} - iI)f = \psi_k(2t) - 2e^{-t}\int_0^t \psi_k(2s)\,e^s ds.$$

Таким образом, все сводится к доказательству тождества

$$\psi_{k+1}(2t) = \psi_k(2t) - 2e^{-t}\int_0^t \psi_k(2s)\,e^s ds.$$

Это доказательство никакого труда не представляет.

Так как функции Лагерра образуют полную ортонормированную систему в $L^2(0, \infty)$, то оператор V изоморфен V_+ и, следовательно, $\mathcal{P}$ изоморфен A_+.

Таким образом, мы доказали, что *любой простой оператор с индексом дефекта* $(0, 1)$ *или* $(1, 0)$ *изоморфен оператору дифференцирования* $\mathcal{P}$ *на полуоси* $(0, \infty)$ *или соответственно* $(-\infty, 0)$.

Оператор $\mathcal{P}$ дифференцирования на оси $(-\infty, \infty)$ изоморфен некоторому самосопряженному расширению оператора $A_+ \oplus A_-$. Отсюда (см. n° 89) можно вывести унитарную эквивалентность оператора $\mathcal{P}$ и оператора умножения на независимую переменную, что уже было установлено непосредственно в n° 55.

105. Спектры самосопряженных расширений заданного симметрического оператора. Спектр симметрического, но не самосопряженного оператора, в соответствии с общим определением n° 48, содержит дополнение множества точек регулярного типа рассматриваемого оператора. Хотя спектр и не исчерпывается этим дополнением (так, например, по крайней мере одна из открытых полуплоскостей $\mathfrak{J}z > 0$, $\mathfrak{J}z < 0$ принадлежит остаточному спектру), оно, тем не менее, занимает в спектре оператора особое место.

Определение. Дополнение множества точек регулярного типа симметрического оператора называется *ядром спектра* этого оператора.

Желая дать классификацию точек, образующих ядро спектра симметрического оператора A, условимся, как и прежде, обозначать через $A'_\lambda = A'$ часть оператора A, лежащую в подпространстве $\mathrm{H} \ominus \mathrm{G}_\lambda$, где G_λ есть собственное подпространство оператора A, принадлежащее числу λ, если λ есть собственное значение оператора A, и G_λ есть нулевое подпространство в противном случае.

Прежде всего в ядре спектра выделяется *точечная часть*; это — совокупность всех собственных значений оператора (она отсутствует, если оператор простой).

Переходя к характеристике остальной части ядра спектра оператора A, заметим, что оператор $A' - \lambda I$ имеет обратный для любого λ. Совокупность тех значений λ, для которых оператор $(A' - \lambda I)^{-1}$ не ограничен, очевидно, принадлежит ядру спектра; эту совокупность мы назовем *непрерывной частью* ядра спектра*. Таким образом, всякая точка ядра спектра принадлежит либо точечной части, либо непрерывной части, либо им обеим.

Для самосопряженного оператора понятия регулярной точки и точки регулярного типа совпадают. Поэтому ядро спектра самосопряженного оператора совпадает со спектром этого оператора. Следовательно, ядро спектра самосопряженного оператора не может быть пустым множеством. Для произвольного симметрического оператора такое утверждение было бы неправильным **.

Если $\tilde{A}$ есть симметрическое (в частности, максимальное или самосопряженное) расширение оператора A, то, как легко видеть, ядро спектра оператора $\tilde{A}$ содержит ядро спектра оператора A.

Отметим один частный случай, когда непрерывная часть ядра спектра оператора A не меняется при симметрических расширениях этого оператора. Этим случаем является тот, когда дефектные числа оператора A конечны. Действительно, в этом случае в силу второй формулы Неймана (см. n° 102) многообразие $(\tilde{A}' - \lambda I)\,\mathrm{D}_{\tilde{A}}$,

* Легко видеть, что непрерывная часть ядра спектра симметрического оператора A принадлежит его непрерывному спектру $\mathscr{C}(A)$, определенному в конце n° 93.

** См. пример в подстрочном примечании на с. 61.

где $\tilde{A}$ — какое-нибудь симметрическое расширение оператора A, шире многообразия $(A' - \lambda I)\, D_A$ разве лишь на конечное число измерений (в смысле числа измерений по модулю) и, следовательно, оператор $(\tilde{A}' - \lambda I)^{-1}$ ограничен вместе с оператором $(A' - \lambda I)^{-1}$.

Из сказанного вытекает следующая простая

Теорема 1. *Все самосопряженные расширения оператора с равными и конечными дефектными числами имеют один и тот же непрерывный спектр.*

Относительно точечной части ядра спектра имеет место

Теорема 2. *При произвольном расширении оператора с индексом дефекта* (m, m) до самосопряженного оператора кратность собственных значений повышается не более чем на m единиц (в частности, новые собственные значения имеют кратность, не превосходящую m).*

Доказательство. Пусть $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение оператора A и λ — собственное значение кратности p оператора A. Предположим, что кратность числа λ, как собственного значения оператора $\tilde{A}$, равна $p+q$ и, вопреки утверждению теоремы, $q > m$. Выберем линейно независимую систему решений $f_1, f_2, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_{p+q}$ уравнения $\tilde{A}f - \lambda f = 0$ так, чтобы $f_k \in D_A$ при $k \leqslant p$. Так как число измерений $D_{\tilde{A}}$ по модулю D_A равно m, то существуют константы α_k такие, что

$$\alpha_1 f_{p+1} + \alpha_2 f_{p+2} + \cdots + \alpha_q f_{p+q} \in D_A.$$

Последнее означает, что кратность λ, как собственного значения оператора A, выше p, вопреки предположению.

Следующая теорема является в некотором смысле обращением теоремы 2.

Теорема 3. *Если λ — вещественная точка регулярного типа симметрического оператора A с индексом дефекта (m, m), то существует самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A, для которого число λ является собственным значением кратности m.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}_\lambda$ означает линейное многообразие всех решений уравнения

$$A^* g - \lambda g = 0.$$

В силу теоремы об инвариантности дефектного числа в поле регулярности (см. n° 100) число измерений многообразия $\mathfrak{N}_\lambda$ равно m.

Область определения D_A оператора A и линейное многообразие $\mathfrak{N}_\lambda$ линейно независимы, ибо в противном случае число λ было бы собственным значением оператора A.

Положим

$$D = D_A \oplus \mathfrak{N}_\lambda \qquad (1)$$

* Напомним, что $m < \infty$ (см. с. 39).

и пусть $\tilde{A}$ означает оператор, совпадающий с оператором A^* на $\mathrm{D} = \mathrm{D}_{\tilde{A}}$, так что число λ будет собственным значением оператора $\tilde{A}$ кратности m.

Покажем, что оператор $\tilde{A}$ самосопряженный.

Для этого достаточно установить, что оператор $\tilde{A}$ симметрический, ибо из (1) следует, что

$$\dim \mathrm{D}_{\tilde{A}} = m \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{D}_A).$$

Если f и g — произвольные элементы из $\mathrm{D}_{\tilde{A}}$ и

$$f = f_1 + f_2 \qquad (f_1 \in \mathrm{D}_A,\ f_2 \in \mathfrak{N}_\lambda),$$
$$g = g_1 + g_2 \qquad (g_1 \in \mathrm{D}_A,\ g_2 \in \mathfrak{N}_\lambda),$$

то

$$(\tilde{A}f,\ g) = (Af_1,\ g_1) + (A^*f_2,\ g_1) + (Af_1,\ g_2) + (A^*f_2,\ g_2) =$$
$$= (Af_1,\ g_1) + \lambda (f_2,\ g_1) + \lambda (f_1,\ g_2) + \lambda (f_2,\ g_2)$$

и

$$(f,\ \tilde{A}g) = (f_1,\ Ag_1) + (f_1,\ A^*g_2) + (f_2,\ Ag_1) + (f_2,\ A^*g_2) =$$
$$= (f_1,\ Ag_1) + \lambda (f_1,\ g_2) + \lambda (f_2,\ g_1) + \lambda (f_2,\ g_2),$$

откуда следует симметричность оператора $\tilde{A}$.

В заключение отметим еще одну теорему, относящуюся к числу решений уравнения

$$A^*g - \lambda g = 0$$

при вещественных λ.

Теорема 4. *Если A — симметрический оператор с индексом дефекта $(m,\ m)$ и λ — вещественное число, не принадлежащее точечному спектру оператора A, то число $m(\lambda)$ решений уравнения*

$$A^*g - \lambda g = 0 \tag{2}$$

не превосходит дефектного числа m.

Для доказательства достаточно построить с помощью многообразия $\mathfrak{N}_\lambda$ решений уравнения (2) область $\mathrm{D}_{\tilde{A}}$ по формуле (1), где снова $\tilde{A} \subseteq A^*$.

Из доказательства предыдущей теоремы следует, что оператор $\tilde{A}$ является симметрическим расширением оператора A и, следовательно,

$$m(\lambda) = \dim \mathrm{D}_{\tilde{A}} \leqslant m \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{D}_A).$$

Теорема доказана.

106. Формула М. Г. Крейна для резольвент самосопряженных расширений заданного симметрического оператора. В этом пункте мы будем рассматривать симметрические операторы с равными и конечными дефектными числами.

Пусть A_1 и A_2 — два самосопряженных расширения такого оператора A, имеющего индекс дефекта (m, m). Таким образом,

$$A_1 \supset A, \quad A_2 \supset A.$$

Всякий оператор C, удовлетворяющий условиям

$$A_1 \supset C, \quad A_2 \supset C, \tag{1}$$

естественно называть *общей частью* операторов A_1 и A_2.

Среди операторов C, удовлетворяющих условиям (1), существует, очевидно, такой, который является расширением любой общей части операторов A_1 и A_2; такой оператор назовем *максимальной общей частью* операторов A_1 и A_2. Максимальная общая часть либо является расширением оператора A, либо совпадает с A; в последнем случае расширения A_1 и A_2 будем называть *взаимно простыми*.

Для того чтобы расширения A_1 и A_2 были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы одновременное выполнение условий

$$h \in \mathrm{D}_{A_1}, \quad h \in \mathrm{D}_{A_2}, \quad A_1 h = A_2 h \tag{2}$$

влекло принадлежность h к D_A.

Если максимальное число линейно независимых по модулю D_A векторов, удовлетворяющих условиям (2), равно p $(0 \leqslant p \leqslant m)$, то максимальная общая часть A_0 операторов A_1 и A_2 имеет индекс дефекта $(m-p,\ m-p)$. В этом случае операторы A_1 и A_2 могут рассматриваться как взаимно простые самосопряженные расширения оператора A_0.

Задачей настоящего пункта является вывод формулы, связывающей резольвенты двух самосопряженных расширений оператора A. Пусть $\mathring{B}$ — фиксированное самосопряженное расширение, B — произвольное самосопряженное расширение, а $\mathring{R}_z$ и R_z — их резольвенты. Пусть, далее, λ — любая общая точка регулярности операторов $\mathring{B}$ и B (в частности, λ может быть произвольным невещественным числом).

Чтобы не выделять случая, когда $\mathring{B}$ и B не являются взаимно простыми расширениями оператора A, будем рассматривать их как взаимно простые расширения их максимальной общей части A_0, имеющей индекс дефекта (r, r), где $0 < r \leqslant m$.

Положим $\mathfrak{M}_\lambda = \Delta_{A_0}(\lambda)$ и $\mathfrak{N}_\lambda = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_\lambda$. Для разности резольвент будем иметь

$$(\mathring{R}_\lambda - R_\lambda) f \begin{cases} = 0 & \text{при } f \in \mathfrak{M}_\lambda, \\ \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} & \text{при } f \in \mathfrak{N}_\lambda. \end{cases} \tag{3}$$

Последнее вытекает из того, что при любом $h \in \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$

$$(\{\mathring{R}_\lambda - R_\lambda\} f,\ h) = (f, \{\mathring{R}_\lambda - R_\lambda\}^* h) = (f,\ \{\mathring{R}_{\bar{\lambda}} - R_{\bar{\lambda}}\} h) = (f,\ 0) = 0.$$

Выберем как-нибудь r линейно независимых векторов $g_1\ (\bar{\lambda})$, $g_2\ (\bar{\lambda}), \ldots, g_r\ (\bar{\lambda})$ из $\mathfrak{N}_\lambda$ и r линейно независимых векторов $g_1\ (\lambda)$, $g_2\ (\lambda), \ldots, g_r\ (\lambda)$ из $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$. Из (3) для любого $f \in \mathrm{H}$ следует

$$(\mathring{R}_\lambda - R_\lambda) f = \sum_{k=1}^{r} c_k g_k (\lambda). \tag{4}$$

Согласно (4) константы c_k являются линейными функционалами от f, и мы можем положить

$$c_k = (f,\ h_k(\lambda)) \qquad (k = 1,\ 2, \ldots, r).$$

Так как, в силу (3) и линейной независимости векторов $g_1\ (\lambda)$, $g_2\ (\lambda), \ldots, g_r\ (\lambda)$, при любом f, ортогональном к $\mathfrak{N}_\lambda$, должно быть

$$(f,\ h_k(\lambda)) = 0 \qquad (k = 1,\ 2, \ldots, r),$$

то

$$h_k(\lambda) \in \mathfrak{N}_\lambda \qquad (k = 1,\ 2, \ldots, r),$$

т. е.

$$h_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{r} \overline{p_{ik}(\lambda)}\ g_i(\bar{\lambda}) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3, \ldots r), \tag{5}$$

и (4) принимает вид

$$(\mathring{R}_\lambda - R_\lambda) f = \sum_{i,\ k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)\ (f,\ g_i(\bar{\lambda}))\ g_k(\lambda). \tag{6}$$

Заметим, что матричная функция $(p_{ik}(\lambda)) = \mathfrak{P}(\lambda)$, определенная на множестве общих точек регулярности операторов $\mathring{B}$ и B, является неособенной.

Действительно, предположение $\det\ (p_{ik}\ (\lambda_0)) =$ влечет в силу (5) линейную зависимость векторов $h_k(\lambda_0)$ $(k = 1,\ 2, \ldots, r)$, что означает существование вектора $h \neq 0$, удовлетворяющего условиям

$$h \perp h_k(\lambda_0), \qquad h \in \mathfrak{N}_{\lambda_0} \qquad (k = 1,\ 2, \ldots, r).$$

Для вектора h получаем из (4)

$$(\mathring{R}_{\lambda_0} - R_{\lambda_0})\ h = 0,$$

а это противоречит взаимной простоте операторов $\mathring{B}$ и B, как расширений оператора A_0.

Опуская в (6) элемент f и рассматривая $(\ .\ ,\ g_i(\bar{\lambda}))\ g_k(\lambda)$ $(i, k = 1, 2, 3, \ldots, r)$ как операторы, получаем для любого значе ния λ из множества общих точек регулярности операторов $\mathring{B}$ и B формулу

$$R_\lambda = \mathring{R}_\lambda - \sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)\,(.,\,g_i(\overline{\lambda}))\,g_k(\lambda). \tag{7}$$

До сих пор выбор вектор-функций $g_k(\lambda)$ и $g_i(\overline{\lambda})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$ оставался произвольным. Вместе с тем левая, а значит, и правая части формулы (6) являются регулярными аналитическими вектор-функциями от λ. Теперь мы *покажем, что* $g_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ *могут быть определены как регулярные аналитические вектор-функции от* λ, *и получим соответствующую этому выбору формулу для матричной функции* $\mathfrak{P}(\lambda)$.

С этой целью возьмем какое-нибудь фиксированное значение λ_0 и введем оператор

$$U_{\lambda\lambda_0} = (\mathring{B} - \lambda_0 I)\,(\mathring{B} - \lambda I)^{-1} = I + (\lambda - \lambda_0)\,\mathring{R}_\lambda$$

с областью определения

$$(\mathring{B} - \lambda I) D_{\mathring{B}} = \mathrm{H}$$

и областью значений

$$(\mathring{B} - \lambda_0 I)\, D_{\mathring{B}} = \mathrm{H}.$$

Оператор $U_{\lambda\lambda_0}$ определяется формулами

$$\begin{aligned} &(\mathring{B} - \lambda I)\, f = h, \qquad\qquad (f \in D_{\mathring{B}}),\\ &(\mathring{B} - \lambda_0 I)\, f = U_{\lambda\lambda_0} h \end{aligned}$$

из которых следует, что осуществляемое им отображение H на H взаимно однозначно.

В частном случае, при $\lambda = \overline{\lambda_0}$ оператор $U_{\lambda\lambda_0}$ приводится к преобразованию Кэли оператора $\mathring{B}$ и отображает дефектное подпространство $\mathfrak{N}^-_{\overline{\lambda}_0}$ оператора A_0 в его дефектное подпространство $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$. Покажем, что вообще

$$U_{\lambda\lambda_0} \mathfrak{N}^-_{\overline{\lambda}_0} = \mathfrak{N}^-_{\overline{\lambda}}.$$

Выберем произвольно базис $g_1(\lambda_0), g_2(\lambda_0), \ldots, g_r(\lambda_0)$ (векторы $g_k(\lambda_0)$, вообще говоря, не ортогональны и не нормированы) и докажем, что

$$U_{\lambda\lambda_0} g_k(\lambda_0) \in \mathfrak{N}^-_{\overline{\lambda}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \overset{*}{A_0} U_{\lambda\lambda_0} g_k(\lambda_0) &= \overset{*}{A_0} \{I + (\lambda - \lambda_0)\} \overset{\circ}{R}_\lambda\} g_k(\lambda_0) = \\ &= \lambda_0 g_k(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \overset{\circ}{B} \overset{\circ}{R}_\lambda g_k(\lambda_0) = \\ &= \lambda_0 g_k(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)(I + \lambda \overset{\circ}{R}_\lambda) g_k(\lambda_0) = \\ &= \lambda \{I + (\lambda - \lambda_0) \overset{\circ}{R}_\lambda\} g_k(\lambda_0) = \lambda U_{\lambda\lambda_0} g_k(\lambda_0), \end{aligned}$$

т. е. $U_{\lambda\lambda_0} g_k(\lambda_0) \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}^- (k = 1, 2, \ldots, r)$. При этом в силу взаимной однозначности отображения, осуществляемого оператором $U_{\lambda\lambda_0}$, векторы $U_{\lambda\lambda_0} g_k(\lambda_0)$ образуют базис в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}^-$, и мы можем принять, что векторы $g_k(\lambda)$ в любой точке регулярности оператора $\overset{\circ}{B}$ определены формулами

$$g_k(\lambda) = U_{\lambda\lambda_0} g_k(\lambda_0) = g_k(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \overset{\circ}{R}_\lambda g_k(\lambda_0)$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, r),$$

и, следовательно, являются регулярными аналитическими вектор-функциями от λ.

С помощью функционального уравнения резольвенты легко проверить, что в таком случае для любых двух регулярных точек λ и μ оператора $\overset{\circ}{B}$ имеют место равенства

$$g_k(\mu) = U_{\mu\lambda} g_k(\lambda) = g_k(\lambda) + (\mu - \lambda) \overset{\circ}{R}_\mu g_k(\lambda). \tag{8}$$

Теперь значение матричной функции $\mathfrak{P}(\lambda)$ при любом λ (регулярном для $\overset{\circ}{B}$ и B) определяется по ее значению $\mathfrak{P}(\lambda_0)$; для нахождения соответствующей формулы воспользуемся функциональным уравнением резольвенты

$$R_\lambda = R_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda R_{\lambda_0}. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу (7)

$$\left.\begin{aligned} R_\lambda &= \overset{\circ}{R}_\lambda - \sum_{i,\, k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}))\, g_k(\lambda), \\ R_{\lambda_0} &= \overset{\circ}{R}_{\lambda_0} - \sum_{i,\, k=1}^{r} p_{ik}(\lambda_0)(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}_0))\, g_k(\lambda_0). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Вставляя правые части (10) в (9) (и пользуясь функциональным уравнением резольвенты $\overset{\circ}{R}_z$), получаем:

$$- \sum_{i,\, k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}))\, g_k(\lambda) =$$
$$= - \sum_{i,\, k=1}^{r} p_{ik}(\lambda_0)(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}_0))\, g_k(\lambda_0) -$$

$$-(\lambda-\lambda_0)\sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda_0)(\cdot,\ g_i(\bar\lambda_0))\,\mathring{R}_\lambda g_k(\lambda_0)-$$
$$-(\lambda-\lambda_0\sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(\mathring{R}_{\lambda_0}\cdot,\ g_i(\bar\lambda))\,g_k(\lambda)+$$
$$+(\lambda-\lambda_0)\sum_{i,\,k,\,j,\,s=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(g_s(\lambda_0),\quad g_i(\bar\lambda))\,p_{js}(\lambda_0)(\cdot,\ g_j(\bar\lambda_0))\,g_k(\lambda).\quad (11)$$

Если с помощью (8) приведем сумму второго и третьего слагаемых в правой части к виду

$$\sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda_0)(\cdot,\ g_i(\bar\lambda_0))\,\{g_k(\lambda_0)-g_k(\lambda)\}+$$
$$+\sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(\cdot,\ g_i(\bar\lambda_0)-g_i(\bar\lambda))\,g_k(\lambda),$$

и после этого приведем в (11) подобные члены, то получим

$$-\sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda_0)(\cdot,\ g_i(\bar\lambda_0))\,g_k(\lambda)+\sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(\cdot,\ g_i(\bar\lambda_0))\,g_k(\lambda)+$$
$$+(\lambda-\lambda_0)\sum_{i,\,k,\,j,\,s=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(g_s(\lambda_0),\ g_i(\bar\lambda))\,p_{js}(\lambda_0)(\cdot,\ g_j(\bar\lambda_0))\,g_k(\lambda)=0.$$

Отсюда, в силу линейной независимости векторов $g_k(\lambda)$,

$$-\sum_{i=1}^{r} p_{ik}(\lambda_0)(\cdot,\ g_i(\bar\lambda_0))+\sum_{i=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(\cdot,\ g_i(\bar\lambda_0))+$$
$$+(\lambda-\lambda_0)\sum_{i,\,j,\,s=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(g_s(\lambda_0),\ g_i(\bar\lambda))\,p_{js}(\lambda_0)(\cdot,\ g_j(\bar\lambda_0))=0$$

и, далее, в силу линейной независимости $g_i(\bar\lambda_0)$

$$-p_{ik}(\lambda_0)+p_{ik}(\lambda)+(\lambda-\lambda_0)\sum_{j,\,s=1}^{r} p_{is}(\lambda_0)(g_s(\lambda_0),\ g_j(\bar\lambda))\,p_{jk}(\lambda)=0$$

или, в матричном виде,

$$\mathfrak{P}(\lambda)-\mathfrak{P}(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)\,\mathfrak{P}(\lambda_0)\,((g_s(\lambda_0),g_j(\bar\lambda)))_{s,\,j=1}^{r}\,\mathfrak{P}(\lambda)=0.$$

Умножая последнее равенство справа на $\mathfrak{P}^{-1}(\lambda)$ и слева на $\mathfrak{P}^{-1}(\lambda_0)$, получаем, наконец, искомое соотношение

$$\mathfrak{P}^{-1}(\lambda)=\mathfrak{P}^{-1}(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)\,((g_s(\lambda_0),\ g_j(\bar\lambda)))_{s,\,j=1}^{r}.\qquad (12)$$

Нетрудно проверить, что из (12) для любых двух общих регулярных точек λ и μ операторов $\mathring{B}$, B следует

$$\mathfrak{P}^{-1}(\lambda)=\mathfrak{P}^{-1}(\mu)+(\lambda-\mu)\,((g_s(\mu),\ g_j(\bar\lambda)))_{s,\,j=1}^{r}.$$

107. О самосопряженных расширениях полуограниченных операторов. Не снижая общности, будем считать полуограниченный оператор положительным. Тогда отрицательная полуось принадлежит его полю регулярности, ибо из неравенства

$$(Af, f) \geqslant 0$$

при отрицательных λ следует

$$\| (A - \lambda I) f \|^2 = \| Af \|^2 - 2\lambda (Af, f) + \lambda^2 \| f \|^2 \geqslant \lambda^2 \| f \|^2,$$

т. е.

$$\| (A - \lambda I) f \| \geqslant | \lambda | \cdot \| f \|.$$

Из этого обстоятельства на основании предложения 1° n° 100 вытекает, что дефектные числа полуограниченного оператора равны между собою и, следовательно, полуограниченный оператор допускает самосопряженные расширения.

Отметим, что из принадлежности отрицательной полуоси полю регулярности симметрического оператора A нельзя сделать вывод о положительности этого оператора *, кроме случая, когда оператор A самосопряженный. В этом последнем случае при любом $f \in D_A$

$$(Af, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} t d (E_t f, f) = \int_0^{\infty} t d (E_t f, f) \geqslant 0.$$

Квадрат произвольного самосопряженного оператора является положительным оператором. Обратно, любой положительный самосопряженный оператор A можно представить в виде квадрата некоторого самосопряженного оператора B. В самом деле, если

$$A = \int_0^{\infty} t\, dE_t,$$

то можно, например, положить

$$B = \int_0^{\infty} \sqrt{t}\, dE_t.$$

Если полуограниченный оператор имеет конечные дефектные числа, то любое его самосопряженное расширение также полуограничено. Более того, имеет место следующая

Теорема 1. *Если A — положительный оператор с индексом дефекта (m, m), то любое его самосопряженное расширение имеет*

* Например, для оператора дифференцирования на конечном интервале полем регулярности является вся плоскость, но этот оператор не полуограничен.

конечное число отрицательных собственных значений, сумма кратностей которых не превосходит m.

Доказательство. Пусть $\tilde{A}$ — некоторое самосопряженное расширение оператора A и

$$\tilde{A} = \int_{-\infty}^{\infty} t\,dE_t.$$

Пусть, далее, Δ означает интервал $[-N, -\varepsilon)$.

Для доказательства теоремы достаточно установить, что число измерений подпространства $E(\Delta)\,\mathrm{H}$ при любых $N > \varepsilon > 0$ не превосходит дефектного числа m.

Предположим, что при некоторых $N > \varepsilon > 0$

$$\dim E(\Delta)\,\mathrm{H} > m. \tag{1}$$

Так как $E(\Delta)\,\mathrm{H} \subseteq \mathrm{D}_{\tilde{A}}$ и

$$\dim \mathrm{D}_{\tilde{A}} = m \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{D}_A),$$

то, в силу (1), в подпространстве $E(\Delta)\,\mathrm{H}$ существует вектор $f_0 \neq 0$ принадлежащий D_A. Для f_0 будет

$$(Af_0, f_0) = (\tilde{A}f_0, f_0) = \int_{-N}^{-\varepsilon} t\,d(E_t f_0, f_0) < 0,$$

что противоречит положительности оператора A.

Теорема доказана.

С помощью приведенных рассуждений легко также установить следующее предложение, аналогичное теореме 1 п° 105.

Теорема 2. *Если отрицательная часть спектра одного из самосопряженных расширений оператора с индексом дефекта (m, m) исчерпывается конечным числом собственных значений конечной кратности, то этим свойством обладает и любое другое самосопряженное расширение данного оператора.*

Заметим, что теорема 2, как и теорема 1 п° 105, являются также непосредственными следствиями теорем 1 и 2 п° 82 соответственно.

Справедлива также следующая теорема о самосопряженных расширениях полуограниченных операторов с произвольными индексами дефекта.

Теорема 3. *Полуограниченный снизу оператор A может быть расширен до самосопряженного оператора $\tilde{A}$ с той же нижней гранью.*

Эта теорема была высказана в виде предположения Нейманом и затем различными методами была доказана другими авторами *.

К доказательству теоремы 3 мы вернемся ниже, а сейчас докажем более простую теорему, которая была установлена Нейманом.

Теорема 3′. *Полуограниченный оператор A с нижней гранью μ может быть расширен до самосопряженного оператора $\tilde{A}$ с нижней гранью, не меньшей, чем произвольно взятое число $\mu' < \mu$.*

Доказательство. Установим сначала справедливость теоремы при $\mu = 1$, $\mu' = 0$.

Имеем

$$(f, f) \leqslant (Af, f) \leqslant \| Af \| \cdot \| f \|,$$

т. е.

$$\| Af \| \geqslant \| f \|,$$

откуда следует существование и ограниченность оператора A^{-1}, определенного на подпространстве Δ_A. Рассуждая так же, как и при доказательстве предложения 2° п° 100, легко усмотреть, что

$$\mathfrak{N}_0 = \mathrm{H} \ominus \Delta_A.$$

есть собственное подпространство оператора A^*, принадлежащее собственному значению $\lambda = 0$. При этом подпространство $\mathfrak{N}_0$ и многообразие D_A линейно независимы, так как если элемент g из $\mathfrak{N}_0$ принадлежит D_A, то $Ag = 0$, что возможно лишь при $g = 0$.

Определим расширение $\tilde{A}$ оператора A на область

$$\mathrm{D}_{\tilde{A}} = \mathrm{D}_A \oplus \mathfrak{N}_0,$$

полагая

$$\tilde{A}h = Af$$

---

* М. Стоном, К. Фридрихсом, Г. Фрейденталем. См. M. Stone. Linear Transformations in Hilbert Spaces, New-York, 1932; K. Friedrichs. Spektraltheorie halbbeschränkten Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differential Operatoren, Math. Ann. **109** (1934); H. Freudental, Über die Friedrichsche Fortsetzung halbbeschränkter Operatoren, Akad. van Wetenschappen te Amsterdam, XXXIX, N 7 (1936).

Сравнительно недавно Кильпи предложил новое доказательство теоремы 3, которое, в отличие от построений перечисленных здесь авторов, остается в рамках теории расширений Неймана. См. Y. Kilpi. Über selbstadjungierte Fortsetzungen symmetrischer Transformationen im Hilbertschen Raum, Ann. Acad. Fennicae, 1959.

Наиболее полная теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов с сохранением грани была построена М. Г. Крейном. См. работу этого автора: Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения: (часть I — «Мат. сб.», т. 20 (62): 3 (1947), с. 431—495; часть II — «Мат. сб.», т. 21 (63): 3, (1947), с. 366—404).

при

$$h = f + g, \quad f \in D_A, \quad g \in \mathfrak{N}_0.$$

Очевидно, $\tilde{A}$ — симметрическое расширение A, так как при

$$h_1, h_2 \in D_{\tilde{A}} \qquad (h_i = f_i + g_i,\ f_i \in D_A,\ g_i \in \mathfrak{N}_0,\ i = 1, 2)$$

справедливо равенство

$$(\tilde{A}h_1, h_2) = (Af_1, f_2 + g_2) = (Af_1, f_2) =$$
$$= (f_1, Af_2) = (f_1 + g_1, Af_2) = (h_1, \tilde{A}h_2).$$

Далее очевидно, что подпространство $\mathfrak{N}_0$ приводит $\tilde{A}$, ибо $\mathfrak{N}_0 \subset D_{\tilde{A}}$ и $\tilde{A}h = 0$ при $h \in \mathfrak{N}_0$. Вместе с $\mathfrak{N}_0$ приводит $\tilde{A}$ его ортогональное дополнение Δ_A. Пусть $\tilde{A}'$ и $\tilde{A}''$ — части $\tilde{A}$, лежащие соответственно в Δ_A и $\mathfrak{N}_0$.

Область значений оператора $\tilde{A}'$ заполняет подпространство Δ_A и, следовательно (см. n° 46), оператор $\tilde{A}'$ — самосопряженный. Так как $\tilde{A}'' = 0$, то оператор

$$\tilde{A} = \tilde{A}' \oplus \tilde{A}''$$

также самосопряженный.

Далее, при

$$h = f + g \qquad (f \in D_A,\ g \in \mathfrak{N}_0)$$

будем иметь

$$(\tilde{A}h, h) = (Af, f + g) = (Af, f) \geqslant \|f\|^2 \geqslant 0,$$

т. е. нижняя грань оператора $\tilde{A}$ не менее нуля.

Таким образом, для случая $\mu = 1$, $\mu' = 0$ теорема доказана, а общий случай сводится к рассмотренному с помощью линейного преобразования

$$A_1 = \frac{1}{\mu - \mu'} A - \frac{\mu'}{\mu - \mu'} I.$$

Вернемся теперь к теореме 3. Она легко доказывается в случае, когда дефектные числа оператора A конечны.

Действительно, пусть A — симметрический оператор с нижней гранью $\mu > -\infty$ и конечными дефектными числами, так что $\dim \mathfrak{N}_{\bar{z}} = \dim \mathfrak{N}_z < \infty$. В силу теоремы 3' для каждого $\mu_n < \mu$ существует самосопряженное расширение $\tilde{A}_n$ оператора A с нижней гранью $\geqslant \mu_n$. Каждому такому расширению по формулам Неймана (4) и (4') n° 102 будет соответствовать изометрическое отображение V'_n всего $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$ на все $\mathfrak{N}_z$. При $\mu_n \to \mu$ в силу компактности последовательности $\{V'_n\}_1^\infty$ конечномерных изометрических операторов найдется подпоследовательность $V'_{n_k} \to V'$, где V' — некоторое изометрическое отображение всего $\mathfrak{N}_z^-$ на все $\mathfrak{N}_z$. Очевидно, полученный оператор V' по тем же формулам (4) и (4′) n° 102 определит искомое самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A с сохранением его нижней грани.

Общему случаю теоремы 3 будет посвящен n° 109, содержащий изложение основных результатов М. Г. Крейна по теории расширения полуограниченных снизу симметрических операторов с сохранением их нижней грани. Здесь же мы кратко остановимся на общем описании метода М. Г. Крейна.

Прежде всего заметим, что для доказательства теоремы 3 достаточно установить, что любой положительный симметрический оператор допускает положительное самосопряженное расширение. Это вытекает из того, что нижняя грань оператора $A - \mu I$ равна нулю, если нижняя грань A есть μ, и наоборот. Если теперь оператор A положительный, то точка $\lambda = -1$ является его точкой регулярного типа и, следовательно, имеет смысл дробно-линейное преобразование

$$S = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

Оператор S, определенный на подпространстве $D_S = (I + A)\, D_A$, удовлетворяет условию симметрии

$$(Sg_1, g_2) = (g_1, Sg_2) \qquad (g_1, g_2 \in D_S)$$

и, как легко показать, его норма не превосходит единицы. При этом оказывается, что задача самосопряженного расширения оператора A с сохранением положительности эквивалентна построению самосопряженного расширения $\tilde{S}$ оператора S, удовлетворяющего условию $\|\tilde{S}\| \leqslant 1$. Соответствующее построение М. Г. Крейна и некоторые его вспомогательные предложения, необходимые для описания всевозможных расширений, упомянутых в теореме 3, приводятся в n° 108.

108. Самосопряженные расширения ограниченного симметрического оператора с неплотной в H областью определения, сохраняющие его норму. Пусть S есть произвольный линейный оператор, определенный на неплотной в H области D_S и удовлетворяющий для любых $f, g \in D_S$ соотношению симметрии

$$(Sf, g) = (f, Sg).$$

Мы будем называть такие операторы *симметрическими с неплотной областью определения* *.

* Общая теория расширений таких операторов, аналогичная изложенной нами теории расширений Неймана, была построена М. А. Красносельским (см. его работу «О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов». Укр. матем. ж. № 1 (1949)).

Теорема 1. *Любой ограниченный симметрический оператор* S *с неплотной в* H *областью определения* $\mathrm{D}_S \subset \mathrm{H}$ *можно расширить до самосопряженного оператора* $\tilde{S}$ ($\mathrm{D}_{\tilde{S}} = \mathrm{H}$) *с сохранением его нормы* ($\|\tilde{S}\| = \|S\|$).

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать $\|S\| = 1$. Область D_S будем считать замкнутой, так как в противном случае оператор S можно расширить по непрерывности на замыкание D_S. Обозначим через P оператор ортогонального проектирования на D_S и построим операторы

$$S_1 = PS, \qquad S_2 = (I - P) S,$$

так что $\mathrm{D}_{S_1} = \mathrm{D}_{S_2} = \mathrm{D}_S$, и при любом $\varphi \in \mathrm{D}_S$

$$S\varphi = S_1\varphi + S_2\varphi. \tag{1}$$

Будем расширять на H каждый из операторов S_1 и S_2 в отдельности.

Чтобы расширить S_1, напишем для любых $f, g \in \mathrm{D}_S$ равенство

$$(Sf, g) = (f, Sg) = (Pf, Sg) = (f, S_1 g). \tag{2}$$

Левая часть имеет смысл при любом $g \in \mathrm{H}$ и представляет для всякого такого g линейный функционал от $f \in \mathrm{D}_{S_1}$ с нормой $\leqslant \|g\|$. Так как D_S есть гильбертово пространство, то по теореме Ф. Рисса однозначно определится элемент $h \in \mathrm{D}_S$, для которого $(Sf, g) = (f, h)$ при любом $f \in \mathrm{D}_S$ и при этом $\|h\| \leqslant \|g\|$. Полагая

$$h = \tilde{S}_1 g,$$

мы получаем некоторый линейный оператор в H, который совпадает с S_1 в D_S в силу равенства (2), причем $\|\tilde{S}_1 g\| \leqslant \|g\|$, откуда

$$\|\tilde{S}_1\| \leqslant 1. \tag{3}$$

Отметим, что, по построению, $\Delta_{\tilde{S}_1} \subseteq \mathrm{D}_S$ и что при $f \in \mathrm{D}_S$, $g \in \mathrm{H}$

$$(Sf, g) = (f, \tilde{S}_1 g). \tag{2'}$$

Оператор S_2 будем расширять на H так, чтобы неравенство

$$\|\tilde{S}_1 f\|^2 + \|\tilde{S}_2 f\|^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{4}$$

вытекающее для $f \in \mathrm{D}_S$ из (1), имело место для любого $f \in \mathrm{H}$. С этой целью определим в H билинейный функционал $[f, g]$ по формуле

$$[f, g] = (f, g) - (\tilde{S}_1 f, \tilde{S}_1 g). \tag{5}$$

При этом в силу (3) будет

$$[f, f] = (f, f) - (\tilde{S}_1 f, \tilde{S}_1 f) \geqslant 0,$$

но здесь равенство нулю не исключено при $f \neq 0$. Следовательно, билинейный функционал (5) является квазискалярным произведением в смысле n° 3. Линейное многообразие $\mathfrak{N}$ всех тех $f \in \mathrm{H}$, для которых $[f, f] = 0$, замкнуто, так как оператор $\tilde{S}_1$ непрерывен. Переходя от H к фактор-пространству, мы получим линейную метризованную систему $\mathrm{H}/\mathfrak{N}$. Если эта система не полна, то пополним ее обычным способом (см. n° 4). В результате мы получаем гильбертово пространство $\mathbf{H}$.

Из неравенства (4), которое теперь можно переписать в виде

$$\| \tilde{S}_2 f \|^2 \leqslant [f, f], \tag{6}$$

вытекает, что при $\varphi, \psi \in \mathrm{D}_S$ и $\varphi - \psi \in \mathfrak{N}$ будет $S_2\varphi = S_2\psi$. Это дает нам право рассматривать S_2 как оператор из $\mathbf{H}$ в H. Областью определения этого оператора является линейное многообразие

$$\mathbf{F} = \mathrm{D}_S/\mathfrak{N} \subset \mathbf{H},$$

а его область значений лежит в $\mathrm{H} \ominus \mathrm{D}_S$.

Далее, из (6) следует возможность доопределения по непрерывности в $\mathbf{H}$ оператора S_2 на замыкании $\overline{\mathbf{F}}$ многообразия $\mathbf{F}$ в $\mathbf{H}$. Но при этом, очевидно, значения оператора S_2 по-прежнему будут принадлежать $\mathrm{H} \ominus \mathrm{D}_S$ и сохранится неравенство (6).

Обозначим теперь через $\mathbf{P}$ оператор ортогонального проектирования $\mathbf{H}$ на $\overline{\mathbf{F}}$ и расширим S_2 на $\mathbf{H}$, положив

$$\tilde{\mathbf{S}}_2 \mathbf{f} = S_2 \mathbf{P} \mathbf{f} \qquad (\mathbf{f} \in \mathbf{H}).$$

Очевидно, оператор $\tilde{\mathbf{S}}_2$ отображает все пространство $\mathbf{H}$ на $\mathrm{H} \ominus \mathrm{D}_S$ и в силу (5) для любого $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$

$$\| \tilde{\mathbf{S}}_2 \mathbf{f} \|^2 = \| S_2 \mathbf{P} \mathbf{f} \|^2 \leqslant [\mathbf{P}\mathbf{f}, \mathbf{P}\mathbf{f}] \leqslant [\mathbf{f}, \mathbf{f}]. \tag{7}$$

Построенное расширение $\tilde{\mathbf{S}}_2$ можно рассматривать как оператор в исходном пространстве, если для любого $f \in \mathrm{H}$ положить

$$\tilde{S}_2 f = \tilde{\mathbf{S}}_2 \mathbf{f},$$

где $\mathbf{f}$ есть тот из элементов $\mathbf{H}$, которому в H отвечает подмножество, содержащее f. При этом в силу (5):

$$\| \tilde{S}_2 f \|^2 \leqslant [\mathbf{f}, \mathbf{f}] = (f, f) - (\tilde{S}_1 f, \tilde{S}_1 f),$$

т. е. при любом $f \in \mathrm{H}$ будет выполняться неравенство (4).

Построим теперь оператор T по формуле

$$Tf = \tilde{S}_1 f + \tilde{S}_2 f \qquad (f \in \mathrm{H}). \tag{8}$$

В силу ортогональности слагаемых в правой части (8) и неравенства (4), получаем:

$$\| Tf \|^2 = \| \tilde{S}_1 f \|^2 + \| \tilde{S}_2 f \|^2 \leqslant \| f \|^2.$$

При этом для любого $\varphi \in D_S$:

$$T\varphi = \tilde{S}_1\varphi + \tilde{S}_2\varphi = S_1\varphi + S_2\varphi = S\varphi.$$

Таким образом, оператор T является расширением (вообще говоря, несамосопряженным) оператора S на все пространство H с сохранением его нормы. Покажем, что оператор T^* обладает этими же свойствами.

При любых $\varphi \in D_S$, $g \in H$ имеем, учитывая (2′), что

$$(T^*\varphi, g) = (\varphi, Tg) = (\varphi, \tilde{S}_1 g + \tilde{S}_2 g) = (\varphi, \tilde{S}_1 g) = (S\varphi, g),$$

так что, действительно, $T^*\varphi = S\varphi$ при $\varphi \in D_S$, т. е. $T^* \supset S$. А кроме этого, также

$$\| T^* \| = \| T \| = 1.$$

Полагая, наконец,

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}(T + T^*);$$

получаем искомое самосопряженное расширение $\tilde{S}$ оператора S с сохранением его нормы.

Теорема доказана.

Для описания *всех* самосопряженных расширений оператора S с сохранением его нормы потребуется следующая

Лемма. *Пусть B — ограниченный положительный оператор в* H*; а* G *— некоторое подпространство* H. *Пусть, далее,* $\mathfrak{C}$ *означает множество всех самосопряженных операторов C, удовлетворяющих условиям*

$$C \leqslant B, \tag{9}$$

$$Cg = 0 \quad (g \in G). \tag{10}$$

В таком случае в $\mathfrak{C}$ существует максимальный оператор $\bar{C}$ (т. е. оператор, который $\geqslant$ любого из операторов множества $\mathfrak{C}$) *и этот оператор $\bar{C}$ представим в виде*

$$\bar{C} = B^{1/2}QB^{1/2}, \tag{11}$$

где Q — оператор ортогонального проектирования на $H \ominus F$, *а* F — многообразие всех векторов $B^{1/2}g$ $(g \in G.)$.

Доказательство*. Если $C \in \mathfrak{C}$, то в силу (10) при любых $h \in H$, $g \in G$ имеет место равенство $(Ch, g) = 0$ и поэтому

$$(Ch, h) = (C[h - g], h - g).$$

Отсюда в силу (9) и (10)

$$(Ch, h) \leqslant (B[h - g], h - g) = \| B^{1/2}h - B^{1/2}g \|^2$$

---

* Приводимое доказательство принадлежит И. М. Гельфанду. См. работу М. Г. Крейна, цитированную на с. 63.

и, следовательно,

$$(Ch, h) \leqslant \inf_{g \in G} \| B^{1/2}h - B^{1/2}g \|^2.$$

Из этого неравенства вытекает соотношение

$$(Ch, h) \leqslant \| QB^{1/2}h \|^2 = (B^{1/2}QB^{1/2}h, h) = (\bar{C}h, h) \quad (h \in \mathrm{H}),$$

которое и требовалось установить. Лемма доказана.

Теперь пусть $\tilde{S}_0$ есть фиксированное, а $\tilde{S}$ — произвольное самосопряженное расширение оператора S ($\| S \| = 1$) с сохранением его нормы. Тогда оператор C, определяемый равенством

$$\tilde{S} = \tilde{S}_0 + C, \tag{12}$$

обладает следующими двумя свойствами:

$$-(I + \tilde{S}_0) \leqslant C \leqslant (I - \tilde{S}_0), \tag{13}$$

$$Cf = 0 \text{ при } f \in \mathrm{D}_S. \tag{14}$$

Очевидно также, что если самосопряженный оператор C обладает свойствами (13) и (14), то оператор $\tilde{S}$, определяемый равенством (12), будет самосопряженным расширением оператора S с сохранением его нормы.

Отсюда пользуясь леммой, уже нетрудно получить описание всех самосопряженных расширений оператора S с сохранением его нормы.

Для этого обозначим через Q_1 и Q_2 ортопроекторы на ортогональные дополнения к многообразиям $(I + \tilde{S}_0)^{1/2}\mathrm{D}_S$ и $(I - \tilde{S}_0)^{1/2}\mathrm{D}_S$ соответственно. Далее построим операторы

$$\bar{C}_1 = (I + \tilde{S}_0)^{1/2} Q_1 (I + \tilde{S}_0)^{1/2} \tag{15}$$

и

$$\bar{C}_2 = (I - \tilde{S}_0)^{1/2} Q_2 (I - \tilde{S}_0)^{1/2}. \tag{16}$$

Наконец, определим два самосопряженных оператора S' и S'' равенствами

$$S' = \tilde{S}_0 - \bar{C}_1, \qquad S'' = \tilde{S}_0 + \bar{C}_2. \tag{17}$$

Теорема 2. *Для того чтобы самосопряженный оператор T являлся расширением оператора S с сохранением его нормы, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял двойному неравенству*

$$S' \leqslant T \leqslant S''. \tag{18}$$

Доказательство. Если T есть самосопряженное расширение оператора S с сохранением его нормы, то (18) непосредственно вытекает из (13), (14) и леммы.

Пусть теперь оператор T удовлетворяет соотношению (18). Если T есть расширение оператора S, то из (13), (14) и леммы непосредственно вытекает равенство $\|T\| = \|S\|$. Поэтому остается показать, что любой оператор, удовлетворяющий двойному неравенству (18), является расширением оператора S.

Положив

$$W = T - S',$$

получаем из (18) двойное неравенство

$$0 \leqslant W \leqslant S'' - S'$$

и, поскольку $S' \supset S$, $S'' \supset S$, то для любого $f \in D_S$ имеем

$$0 \leqslant (Wf, f) \leqslant ([S'' - S']f, f) = 0,$$

откуда

$$(Wf, f) = 0 \quad (f \in D_S).$$

Из этого равенства и неотрицательности оператора W вытекает, что $Wf = 0$ при $f \in D_S$, т. е. $Tf = S'f$ при $f \in D_S$ и, значит, $T = \tilde{S}$. Теорема доказана. Каждому самосопряженному расширению $\tilde{S}$ оператора S ($\|S\| = 1$) с сохранением его нормы отнесем $\tilde{S}$-скалярное произведение, и $\tilde{S}$-норму по формулам

$$(f, g)_{\tilde{S}} \times (f, g) + (\tilde{S}f, g)$$

и

$$\|f\|_{\tilde{S}} = \sqrt{(f, f)_{\tilde{S}}},$$

где $f, g \in H$.

Теорема 3. *Пусть T есть самосопряженное расширение оператора S с сохранением нормы $\|T\| = \|S\| = 1$. Тогда для совпадения оператора T с нижней гранью S' в формуле* (18), *необходимо и достаточно, чтобы многообразие D_S было плотно в H по T-норме.*

Доказательство. Принимая T в качестве оператора $\tilde{S}_0$ при построении формул (17), видим, что равенство $T \equiv \tilde{S}_0 = S'$ эквивалентно равенству $\tilde{C}_1 = 0$. С другой стороны, в силу (15)

$$(\tilde{C}_1 f, f) = \| Q_1 (I + \tilde{S}_0)^{1/2} f \|^2, \qquad (f \in H).$$

Правая часть полученного равенства в силу определения Q_1 есть

$$\inf_{g \in D_S} \|(I + \tilde{S}_0)^{1/2} f - (1 + \tilde{S}_0)^{1/2} g\|^2 = \inf_{g \in D_S} \|f - g\|^2_{\tilde{S}_0}.$$

Таким образом,

$$(\tilde{C}_1 f, f) = \inf_{g \in D_S} \|f - g\|^2_{\tilde{S}_0} \qquad (f \in H),$$

откуда и вытекает справедливость теоремы.

В заключение заметим, что хотя для построения операторов S' и S'' по формулам (15) — (17) необходимо задаться некоторым расширением $\tilde{S}_0$, на деле, как это вытекает из самой теоремы 2, они не зависят от выбора $\tilde{S}_0$, а являются единственными экстремальными (т. е. наименьшим и наибольшим) элементами множества всех самосопряженных расширений оператора S с сохранением его нормы. Поэтому мы положим $S' = \tilde{S}_{\min}$, $S'' = \tilde{S}_{\max}$ и в дальнейшем вместо (18) будем писать

$$\tilde{S}_{\min} \leqslant T \leqslant \tilde{S}_{\max}. \tag{19}$$

109. Самосопряженные расширения полуограниченного симметрического оператора с сохранением его нижней грани. Как уже упоминалось в n° 107, полученные в n° 108 результаты позволяют доказать теорему 3 n° 107, если воспользоваться преобразованием (2) n° 107. Мы начинаем настоящий пункт с изучения этого дробнолинейного преобразования.

Пусть A — замкнутый симметрический положительный оператор с плотной в H областью определения D_A. Так как точка $\lambda = -1$ является точкой регулярного типа оператора A, то многообразие $(I+A) D_A$ есть подпространство и при любом $g \in (I + A) D_A$ уравнение $Af + f = g$ имеет единственное решение $f \in D_A$. Поэтому мы можем определить на подпространстве $D_S = (I + A) D_A$ оператор S формулами

$$\left.\begin{aligned} g &= f + Af, && (1)\\ Sg &= f - Af && (2)\end{aligned}\right\} \quad (f \in D_A).$$

Нетрудно проверить, что построенный оператор S является симметрическим (вообще говоря, с неплотной областью определения) и его норма не превосходит единицы.

Действительно, при любых $g_1 = f_1 + Af_1 \in D_S$ и $g_2 = f_2 + Af_2 \in D_S$:

$$(Sg_1, g_2) = (f_1 - Af_1, f_2 + Af_2) = (f_1, f_2) - (Af_1, Af_2),$$
$$(g_1, Sg_2) = (f_1 + Af_1, f_2 - Af_2) = (f_1, f_2) - (Af_1, Af_2).$$

Далее, при любом $g = f + Af \in D_S$

$$\|Sg\|^2 = (f - Af, f - Af) = \|f\|^2 - 2(Af, f) + \|Af\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|^2 + 2(Af, f) + \|Af\|^2 = (f + Af, f + Af) = \|g\|^2,$$

так что

$$\|S\| \leqslant 1. \tag{3}$$

Сверх отмеченных свойств, оператор S обладает еще одной особенностью: число $\mu = -1$ не является его собственным значением. Действительно,

$$Sg + g \neq 0 \quad (\text{при } g \neq 0), \tag{4}$$

так как при $g \neq 0$ из (1) следует, что $f \neq 0$, а тогда из (1) и (2) вытекает, что* $Sg + g = 2f \neq 0$.

Пусть, обратно, S есть симметрический оператор в H, определенный на подпространстве $\mathrm{D}_S \subset \mathrm{H}$ и обладающий свойствами (3) и (4).

В силу (4) мы можем определить на линейном многообразии $\mathrm{D}_A = (I + S)\,\mathrm{D}_S$ оператор A формулами

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}(g + Sg), \qquad &(5)\\ Af &= \frac{1}{2}(g - Sg) \qquad &(6)\end{aligned}\right\}\quad (g \in \mathrm{D}_S).$$

Нетрудно проверить, что построенный оператор A является симметрическим и положительным.

Действительно, при любых $f_1 = \frac{1}{2}(g_1 + Sg_1) \in \mathrm{D}_A$ и $f_2 = \frac{1}{2}(g_2 + Sg_2) \in \mathrm{D}_A$ имеем

$$\begin{aligned} 4(Af_1, f_2) &= (g_1 - Sg_1,\ g_2 + Sg_2) = (g_1, g_2) - (Sg_1, Sg_2),\\ 4(f_1, Af_2) &= (g_1 + Sg_1,\ g_2 - Sg_2) = (g_1, g_2) - (Sg_1, Sg_2).\end{aligned}$$

Далее, при любом $f = \frac{1}{2}(g + Sg) \in \mathrm{D}_A$

$$4(Af, f) = (g - Sg,\ g + Sg) = \|g\|^2 - \|Sg\|^2 \geqslant 0.$$

Заметим, что область определения D_A оператора A может быть неплотной в H.

Очевидно, из формул (1) и (2) следуют формулы (5) и (6), и наоборот. Определяемое этими формулами преобразование можно также представить в виде

$$S = (I - A)(I + A)^{-1} \tag{7}$$

или

$$A = (I - S)(I + S)^{-1}. \tag{8}$$

Легко проверить, что из самосопряженности одного из двух операторов (7) и (8) вытекает самосопряженность другого.

Как уже указывалось в конце n° 107, для доказательства теоремы 3 n° 107 достаточно установить следующее предложение.

Теорема 1. *Любой положительный симметрический оператор A, область определения которого D_A плотна в H, обладает по крайней мере одним положительным самосопряженным расширением.*

* Не мешает заметить, что при выводе свойств оператора S мы не использовали плотность D_A в H.

Доказательство. Обозначим через S оператор, определяемый формулой (7) и, пользуясь теоремой 1 n° 108, построим его самосопряженное расширение $\tilde{S}$ с нормой $\|\tilde{S}\| = \|S\|$ $(\leqslant 1)$.

Легко видеть, что оператор $\tilde{S}$ удовлетворяет условию (4), т. е. $\tilde{S}g + g \neq 0$ при $g \neq 0$. Действительно, если бы при некотором $g \neq 0$ было $\tilde{S}g + g = 0$, то было бы также для любого $h \in \mathrm{H}$

$$(g, h + \tilde{S}h) = (g + \tilde{S}g, h) = 0$$

и, в частности $(g, h + Sh) = 0$ при любом $h \in \mathrm{D}_S$, но $(I + S)\,\mathrm{D}_S = \mathrm{D}_A$, и равенство нулю последнего скалярного произведения противоречит плотности D_A в H.

Так как оператор $\tilde{S}$ удовлетворяет условиям (3) и (4), то существует оператор $\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1}$, который, очевидно, является положительным расширением оператора A. Так как, наконец, оператор $\tilde{S}$ самосопряженный, то оператор $\tilde{A}$ также является самосопряженным. Таким образом, теорема доказана.

Обозначим через $\mathfrak{A}(A)$ множество всех положительных самосопряженных расширений оператора A, а через $\mathfrak{S}(S)$ — множество всех самосопряженных расширений оператора S, связанного с A соотношением (7), имеющих не превосходящую единицы норму. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что в формуле

$$\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1},$$

где

$$\tilde{S} \in \mathfrak{S}(S), \quad S = (I - A)(I + A)^{-1},$$

оператор $\tilde{A}$ пробегает все $\mathfrak{A}(A)$, если оператор $\tilde{S}$ пробегает все $\mathfrak{S}(S)$.

Из теоремы 2 n° 108 следует, что общий вид операторов $\tilde{A} \in \mathfrak{A}(A)$ дается формулой

$$\tilde{A} = (I - T)(I + T)^{-1},$$

где T — любой самосопряженный оператор, удовлетворяющий двойному неравенству (19) n° 108. Крайним членам $\tilde{S}_{\min}$ и $\tilde{S}_{\max}$ этого неравенства отвечают операторы

$$A_\mu = (I - \tilde{S}_{\min})(I + \tilde{S}_{\min})^{-1}$$

и

$$A_M = (I - \tilde{S}_{\max})(I + \tilde{S}_{\max})^{-1}.$$

При $A_\mu = A_M$, и только в этом случае, оператор A имеет единственное положительное самосопряженное расширение.

В общем случае $A_\mu \neq A_M$. При этом оба оператора A_μ и A_M обладают некоторыми экстремальными свойствами. Из этих двух операторов наибольший интерес представляет оператор A_μ, который называется *жестким расширением* положительного оператора A. Именно это расширение и было получено иным путем К. Фридрихсом при доказательстве справедливости предположения Неймана. Оставшуюся часть этого пункта мы посвятим изучению жесткого самосопряженного расширения $\tilde{A}_\mu$ положительного симметрического оператора A.

Определим на многообразии D_A сходимость элементов следующим образом. Последовательность элементов $f_n \in \mathrm{D}_A$ будем называть *A-сходящейся*, если она сходится в H и, сверх того,

$$\lim_{m,\, n\to\infty} (A[f_n - f_m],\ f_n - f_m) = 0. \tag{9}$$

Замыкание многообразия D_A в смысле A-сходимости обозначим $\mathrm{D}[A]$.

Очевидно, A-сходимость совпадает со сходимостью по A-норме, если последнюю определить соотношениями

$$(f,\ g)_A = (f,\ g) + (Af,\ g),$$
$$\|f\|_A = \sqrt{(f,\ f)_A}.$$

Лемма*. *Если $\{g_n\}_1^\infty$ и $\{f_n\}_1^\infty$ — какие-нибудь две последовательности из D_A, A-сходящиеся к $g \in \mathrm{D}[A]$ и $f \in \mathrm{D}[A]$ соответственно, то существует*

$$\lim_{n\to\infty} (Ag_n,\ f_n). \tag{10}$$

При этом величина (10) не зависит от выбора последовательностей $\{g_n\}_1^\infty$ и $\{f_n\}_1^\infty$, и для любого $\tilde{A} \in \mathfrak{A}(A)$ имеют место соотношения

$$\mathrm{D}[A] \subset \mathrm{D}_{\tilde{A}^{1/2}},$$
$$\lim_{n\to\infty} (Ag_n,\ f_n) = (\tilde{A}^{1/2} g,\ \tilde{A}^{1/2} f) \qquad (g,\ f \in \mathrm{D}[A]).$$

Доказательство. Из спектрального представления самосопряженного положительного оператора $\tilde{A}$ легко следует включение $\mathrm{D}_{\tilde{A}} \subset \mathrm{D}_{\tilde{A}^{1/2}}$. Поэтому соотношение (9) можно представить в виде

$$\lim_{m,\, n\to\infty} \|\tilde{A}^{1/2} f_n - \tilde{A}^{1/2} f_m\| = 0,$$

откуда в силу сходимости f_n к f и замкнутости оператора $\tilde{A}^{1/2}$ получаем включение $f \in \mathrm{D}_{\tilde{A}^{1/2}}$ и соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{A}^{1/2} f_n = \tilde{A}^{1/2} f.$$

* Это предложение принадлежит К. Фридрихсу.

Аналогичным образом,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{A}^{1/2} g_n = \tilde{A}^{1/2} g.$$

Из полученных соотношений непосредственно следует справедливость обоих утверждений леммы.

Следующая теорема М. Г. Крейна дает характеристику жесткого расширения A_μ положительного оператора A.

Теорема 2. *Среди всевозможных самосопряженных полуограниченных снизу расширений положительного симметрического оператора A существует единственное расширение $\tilde{A}$, для которого $D_{\tilde{A}} \subset D[A]$. Этим расширением является оператор A_μ и для него*

$$D[A_\mu] = D[A]. \tag{11}$$

Доказательство. Ограничимся сначала расширениями $\tilde{A} \in \mathfrak{A}(A)$, так что

$$\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1},$$

где $\tilde{S} \in \mathfrak{S}(S)$ и

$$S = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

Если

$$D_{\tilde{A}} \subset D[A], \tag{12}$$

то, очевидно, многообразие D_A будет плотным по $\tilde{A}$-норме в D_A.

С другой стороны, если $f \in D_{\tilde{A}}$, то

$$f = \frac{1}{2}(g + \tilde{S}g), \qquad \text{где } g = f + \tilde{A}f,$$

и, следовательно,

$$2[(f,f) + (\tilde{A}f, f)] = (g, g) + (\tilde{S}g, g),$$

т. е.

$$2\|f\|^2_{\tilde{A}} = \|g\|^2_{\tilde{S}}.$$

Поэтому из плотности D_A в $D_{\tilde{A}}$ по $\tilde{A}$-норме вытекает плотность многообразия $D_S = (I + A) D_A$ по $\tilde{S}$-норме в $D_{\tilde{S}} = (I + \tilde{A}) D_{\tilde{A}} = H$. Но тогда, по теореме 3, n° 108 $\tilde{S} = S_{\min}$ и, следовательно,

$$\tilde{A} = A_\mu.$$

Обратно, если $\tilde{A} = A_\mu$, то $\tilde{S} = S_{\min}$; по той же теореме 3 n° 108 многообразие D_S будет по $\tilde{S}$-норме плотным в H, а следовательно, многообразие D_A будет плотным в $D_{\tilde{A}}$ по $\tilde{A}$-норме. А так как $\mathrm{D}[A]$ есть замыкание D_A по $\tilde{A}$-норме, то $\mathrm{D}_{\tilde{A}} \subset \mathrm{D}[A]$.

С другой стороны, $\mathrm{D}_{\tilde{A}} \supset \mathrm{D}_A$. Поэтому замыкание $\mathrm{D}_{\tilde{A}}$ по $\tilde{A}$-норме совпадает с $\mathrm{D}[A]$, т. е.

$$\mathrm{D}[A] = D[\tilde{A}],$$

что совпадает с (11).

Теперь остается показать, что из соотношения (12) следует равенство $\tilde{A} = A_\mu$ не только в том случае, когда $\tilde{A} \in \mathfrak{A}(A)$, но и в более общем случае, когда $\tilde{A}$ есть произвольное полуограниченное снизу самосопряженное расширение оператора A.

С этой целью по данному $\tilde{A}$ достаточно подобрать число $a > 0$ такое, чтобы было $\tilde{A} + aI > 0$. Тогда из (12) вытекает соотношение

$$\mathrm{D}_{\tilde{A}+aI} = \mathrm{D}_{\tilde{A}} \subset \mathrm{D}[A] = \mathrm{D}[A + aI]$$

и, следовательно, согласно уже доказанному будет

$$\tilde{A} + aI = (A + aI)_\mu.$$

Так как, в частности, соотношение (12) имеет место при $A = A_\mu$, то будет

$$A_\mu + aI = (A + aI)_\mu,$$

откуда получаем $\tilde{A} = A_\mu$, и теорема доказана полностью.

ГЛАВА IX

ОБОБЩЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

110. Обобщенное разложение единицы. Теорема М. А. Наймарка*. Мы будем называть *обобщенным разложением единицы* всякое однопараметрическое семейство операторов F_t, удовлетворяющее следующим условиям:

(A) При $t_2 > t_1$ разность $F_{t_2} - F_{t_1}$ является ограниченным положительным оператором,

(B) $F_{t-0} = F_t$,

(C) $F_{-\infty} = 0$, $F_{\infty} = I$.

В отличие от определения обычного разложения единицы (см. n° 67), здесь уже не требуется, чтобы оператор F_t был проектирующим; в соответствии с этим отпадает требование ортогональности

$$F_u F_v = F_s \quad (s = \min\{u, v\}), \tag{1}$$

ибо из (1), (A), (B), (C) вытекало бы, что оператор F_t — проектирующий.

Из теоремы 3 n° 33 о монотонных последовательностях операторов (и замечания к этой теореме) следует, что при наличии свойства (A) всегда можно надлежащей нормировкой операторной функции F_t добиться выполнения условия (B).

Обычное разложение единицы является частным случаем обобщенного. Иногда обобщенное разложение единицы называют просто разложением единицы, а обычное разложение единицы называют *ортогональным*.

Вместе с F_t введем также положительную аддитивную операторную функцию интервала $F(\Delta)$ или F_Δ, полагая

$$F(\Delta) = F_\Delta = F_{t_2} - F_{t_1},$$

где $\Delta = [t_1, t_2)$.

Простейший пример обобщенного разложения единицы дает операторная функция F_t, определенная равенством

$$F_t = \mu_1 E_t^{(1)} + \mu_2 E_t^{(2)},$$

* См. Наймарк М. А. Спектральные функции симметрического оператора. — «Изв. АН СССР», т. 4, № 3, 1940, с. 277—318. Наймарк М. А. Об одном представлении аддитивных операторных функций множеств, — ДАН СССР, т. XLI, 1943, с. 373, — 375.

где $E_t^{(1)}$ и $E_t^{(2)}$ — произвольные ортогональные разложения единицы, а μ_1 и μ_2—положительные числа, сумма которых равна единице.

Более поучительный пример представляет операторная функция F_t, получаемая нижеследующим построением.

Пусть E_t — ортогональное разложение единицы пространства H, G — некоторое подпространство пространства H и P — оператор ортогонального проектирования на G. Положим

$$F_t = PE_t$$

и будем рассматривать F_t как оператор, действующий в пространстве G. Легко видеть, что операторная функция F_t удовлетворяет условиям (A), (B), (C) и является, следовательно, разложением единицы (вообще говоря, не ортогональным) пространства G.

М. А. Наймарк установил, что любое обобщенное разложение единицы пространства H может быть получено только что описанным приемом после вложения пространства H в некоторое пространство H^+.

При доказательстве теоремы М. А. Наймарка нам придется использовать один важный прием построения гильбертовых пространств; изложением этого приема мы и займемся в первую очередь.

С этой целью введем понятие об эрмитово-положительной функции.

Числовая функция $\Phi(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$, определенная на любой паре $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ элементов некоторого множества $\mathfrak{H}$, называется *эрмитово-положительной*, если при любых $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ из $\mathfrak{H}$,

$$\Phi(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \overline{\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})}$$

и если при любом $n < \infty$ и любых $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ из $\mathfrak{H}$ эрмитовы формы

$$\sum_{i,k=1}^{n} \Phi(\mathfrak{f}_i, \mathfrak{f}_k)\, \xi_i \bar{\xi}_k$$

неотрицательны.

Примером эрмитово-положительной функции от пар векторов гильбертова пространства является скалярное произведение, так как

$$(f, g) = \overline{(g, f)}$$

и

$$\sum_{i,k=1}^{n} (f_i, f_k)\, \xi_i \bar{\xi}_k = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i \right\|^2 \geqslant 0.$$

Если, наоборот, задана эрмитово-положительная функция от пары элементов произвольного множества $\mathfrak{H}$, то это множество можно обратить в гильбертово пространство. Точнее говоря, можно вложить $\mathfrak{H}$ в некоторое гильбертово пространство H^+ так, чтобы на элементах $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ из $\mathfrak{H}$ скалярное произведение определялось формулой

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \Phi(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}).$$

Для построения H^+ дополним сначала $\mathfrak{H}$ до линейной системы $\widehat{\mathfrak{H}}$, введя формально конечные суммы

$$\hat{\mathfrak{f}} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathfrak{f}_i$$

при любом $n < \infty$, любых $\mathfrak{f}_i \in \mathfrak{H}$ и любых числах ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, \ldots, n)$.

Далее определим в $\widehat{\mathfrak{H}}$ квазискалярное произведение (см. n° 3), полагая

$$(\hat{\mathfrak{f}}, \hat{\mathfrak{g}}) = \sum_{i, k=1}^{n} \Phi(\mathfrak{f}_i, \mathfrak{g}_k)\, \xi_i \bar{\eta}_k,$$

если

$$\hat{\mathfrak{f}} = \sum_{i=1}^{p} \xi_i \mathfrak{f}_i, \quad \hat{\mathfrak{g}} = \sum_{k=1}^{q} \eta_k \mathfrak{g}_k, \quad n = \min\{p, q\}.$$

Обозначим через $\widehat{\mathfrak{N}}$ линейное многообразие всех тех $\widehat{\mathfrak{f}} \in \widehat{\mathfrak{H}}$, для которых $(\hat{\mathfrak{f}}, \hat{\mathfrak{f}}) = 0$, и перейдем к фактор-многообразию

$$R^+ = \widehat{\mathfrak{H}} / \widehat{\mathfrak{N}}.$$

После пополнения линейной метризованной системы R^+ мы получим некоторое гильбертово пространство, которое обозначим через H^+. Это пространство H^+ и является искомым.

Теперь мы можем перейти к теореме М. А. Наймарка.

Теорема. *Пусть F_t — обобщенное разложение единицы пространства* H.

В таком случае существует гильбертово пространство H^+, *содержащее* H *в качестве подпространства, и существует такое ортогональное разложение единицы E_t^+ пространства* H^+, *что при любом $f \in H$*

$$F_t f = P^+ E_t^+ f,$$

где P^+ — оператор ортогонального проектирования на H.

Доказательство. Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{H}$ пар $\mathfrak{p}$ вида

$$\mathfrak{p} = \{\Delta, f\},$$

где Δ — произвольный замкнутый слева подынтервал интервала $\Omega = [-\infty, \infty)$, а f — произвольный вектор из H.

Определим, далее, на $\mathfrak{H}$ функцию $\Phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$, полагая при $\mathfrak{p}_1 = \{\Delta_1, f_1\}$, $\mathfrak{p}_2 = \{\Delta_2, f_2\}$,

$$\Phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = (F_{\Delta_1 \cdot \Delta_2} f_1, f_2).^*$$

Покажем, что функция $\Phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ является эрмитово-положительной.

Действительно,

$$\Phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = (F_{\Delta_1 \cdot \Delta_2} f_1, f_2) = (f_1, F_{\Delta_1 \cdot \Delta_2} f_2) = \overline{(F_{\Delta_1 \cdot \Delta_2} f_2, f_1)} = \overline{\Phi(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1)},$$

а, с другой стороны,

$$\sum_{i,k=1}^{n} \Phi(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) \xi_i \bar{\xi}_k = \sum_{i,k=1}^{n} (F_{\Delta_i \cdot \Delta_k} f_i, f_k) \xi_i \bar{\xi}_k. \tag{2}$$

Если интервалы Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ попарно не пересекаются, то

$$\sum_{i,k=1}^{n} (F_{\Delta_i \cdot \Delta_k} f_i, f_k) \xi_i \bar{\xi}_k = \sum_{i=1}^{n} (F_{\Delta_i} f_i, f_i) \, |\xi_i|^2 \geqslant 0. \tag{3}$$

Если же интервалы Δ_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ попарно не пересекаются, а интервалы Δ_1 и Δ_2 совпадают, то сумма в правой части (2) распадается на две: часть, содержащая индексы от 3 до n, будет вида (3), а часть, содержащая индексы 1 и 2, будет

$$\sum_{i,k=1}^{2} (F_{\Delta_i \cdot \Delta_k} f_i, f_k) \xi_i \xi_k = \sum_{i\ k=1}^{2} (F_{\Delta_1} f_i, f_k) \xi_i \bar{\xi}_k = (F_{\Delta_1} \sum_{i=1}^{2} \xi_i f_i, \sum_{k=1}^{2} \xi_k f_k) \geqslant 0.$$

Общий случай расположения интервалов Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ сводится к рассмотренным, если с помощью дополнительного разбиения привести заданную систему интервалов к системе непересекающихся или совпадающих интервалов и воспользоваться верным при $\Delta_1 \cdot \Delta_2 = 0$ соотношением

$$(F_{(\Delta_1 + \Delta_2) \cdot \Delta_3} f, g) = (F_{(\Delta_1 \cdot \Delta_3 + \Delta_2 \cdot \Delta_3)} f, g) = (F_{\Delta_1 \cdot \Delta_3} f, g) + (F_{\Delta_2 \cdot \Delta_3} f, g).$$

Таким образом, функция $\Phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ эрмитово-положительна на $\mathfrak{H}$.

Пользуясь описанным ранее приемом, вложим $\mathfrak{H}$ в гильбертово пространство H^+.

Не желая вводить новых обозначений для тех элементов $\mathfrak{P}$ пространства H^+, которые являются подмножествами из $\widehat{\mathfrak{H}}$, т. е. для элементов из R^+, мы условимся в следующем: если некоторый элемент $\mathfrak{p}$ из $\widehat{\mathfrak{H}}$ принадлежит $\mathfrak{P}$, то вместо $\mathfrak{P}$ будем писать $\mathfrak{p}$.

---

* Пересечение интервалов Δ_1, Δ_2 обозначено $\Delta_1 \cdot \Delta_2$, а объединение $\Delta_1 + \Delta_2$.

Отмечая скалярное произведение в пространстве H^+ знаком $_+$, имеем

$$(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)_+ = \Phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2).$$

Рассмотрим теперь элементы из H^+ вида $\{\Omega, \mathfrak{f}\}$.

Равенство

$$(\{\Omega, f\}, \{\Omega, g\})_+ = (F_\Omega f, g) = (f, g)$$

дает нам право отождествить пару $\{\Omega, f\}$ с элементом f из H. При этом элемент $\sum_{k=1}^{n} \xi_k \{\Omega, f_k\}$ пространства H^+ отождествится с элементом $\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k$ пространства H. Таким образом, H можно рассматривать как подпространство пространства H^+.

Решим следующую задачу: найти проекцию элемента $\{\Delta, f\}$ пространства H^+ на подпространство H. Обозначая искомую проекцию через $\{\Omega, g\}$, мы должны иметь при любом h из H равенство

$$(\{\Delta, f\} - \{\Omega, g\}, \{\Omega, h\})_+ = 0$$

или

$$(\{\Delta, f\}, \{\Omega, h\})_+ - (\{\Omega, g\}, \{\Omega, h\})_+ =$$
$$= (F_\Delta f, h) - (g, h) = (F_\Delta f - g, h) = 0,$$

откуда

$$g = F_\Delta f,$$

т. е.

$$P^+\{\Delta, f\} = \{\Omega, F_\Delta f\}. \tag{4}$$

Определим теперь операторную функцию E_Δ^+ на любом элементе вида $\{\Delta', f\} \in H^+$ равенством

$$E_\Delta^+\{\Delta', f\} = \{\Delta \cdot \Delta', f\}. \tag{5}$$

Учитывая, что линейная оболочка элементов вида $\{\Delta', f\}$ плотна в H^+, расширим оператор E_Δ^+ по линейности, а затем по непрерывности на все пространство H^+.

Теорема будет доказана, если будет установлено, что операторная функция E_Δ^+ является ортогональным разложением единицы пространства H^+, ибо тогда (4) можно будет представить в виде

$$P^+E_\Delta^+ f = P^+E_\Delta^+\{\Omega, f\} = P^+\{\Delta \cdot \Omega, f\} = P^+\{\Delta, f\} = \{\Omega, F_\Delta f\} = F_\Delta f$$

при любом $f \in H$.

Очевидно, E_Δ^+ — аддитивная операторная функция интервала. Далее из двух равенств

$$(E_\Delta^+)^2\{\Delta', f\} = E_\Delta^+\{\Delta \cdot \Delta', f\} = \{\Delta \cdot \Delta \cdot \Delta', f\} = E_\Delta^+\{\Delta', f\}$$

и

$$(E_{\Delta}^{+}\{\Delta', f\}, \{\Delta'', g\})_{+} = (\{\Delta \cdot \Delta', f\}, \{\Delta'', g\})_{+} =$$
$$= (F_{\Delta\cdot\Delta'\cdot\Delta''}f, g) = (\{\Delta', f\}, E_{\Delta}^{+}\{\Delta'', g\})_{+}$$

следует, что E_{Δ}^{+} — проектирующий оператор.

Наконец, очевидно, что $E_{\Omega}^{+}\{\Delta', f\} = \{\Delta', f\}$.

Учитывая свойства (В) и (С) семейства F_t, получаем, что E_{Δ}^{+} есть ортогональное разложение единицы пространства H^{+}. Теорема доказана.

111. Самосопряженные расширения с выходом из пространства и спектральные функции симметрических операторов*. Основой наших дальнейших рассмотрений является обобщение понятия о симметрических расширениях.

Пусть A — некоторый симметрический оператор, действующий в пространстве H, а H^{+} — некоторое гильбертово пространство, содержащее H.

В дополнение к определению n° 46 мы будем называть *симметрическим* (в частности, *самосопряженным*) *расширением* оператора A любой симметрический (в частности, самосопряженный) оператор B^{+}, действующий в H^{+} и являющийся расширением оператора A. (При этом считаем, что область D_A плотна в H, а область $D_{B^{+}}$ плотна в H^{+}).

Аналогично обобщается понятие об *изометрических* (в частности, *унитарных*) *расширениях* изометрического оператора.

Очевидно, преобразование Кэли симметрического (самосопряженного) расширения B^{+} оператора A является изометрическим (соответственно унитарным) расширением преобразования Кэли оператора A.

Обратно, преобразование Кэли изометрического (унитарного) расширения некоторого изометрического оператора является симметрическим (соответственно самосопряженным) расширением преобразования Кэли этого оператора.

При $H^{+} = H$ получаем рассматривавшиеся до сих пор обычные симметрические и изометрические расширения.

---

* См. Наймарк М. А. О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора.— «Изв. АН СССР», т. 4, № 1, 1940, с. 53—104; Наймарк М. А. Спектральные функции симметрического оператора.— «Изв. АН СССР», т. 4, № 3, 1940, с. 277—318.

До построения М. А. Наймарком общей теории, которая излагается в этом и следующем пунктах, отдельные результаты различными методами получили А. И. Плеснер и Н. И. Ахиезер. См. Плеснер А. И. Спектральный анализ максимальных операторов.— ДАН СССР, т. XXII, № 5, 1939, с. 225—228; Ахиезер Н. И. К теории максимальных симметрических операторов в гильбертовом пространстве.— «Уч. зап. Харьк. авиационного ин-та». Т. III, вып. 2, 1940.

Пусть B^+ — произвольное симметрическое расширение оператора A.

Так как имеют место включения

$$\mathrm{D}_A \subseteq \mathrm{D}_{B^+} \cap \mathrm{H} \subseteq \mathrm{D}_{B^+},$$

то удобно классифицировать симметрические расширения B^+ оператора A по следующей схеме.

1. Расширения I рода — при $\mathrm{D}_A \neq \mathrm{D}_{B^+} \cap \mathrm{H} = \mathrm{D}_{B^+}$; эти расширения совпадают с обычными, ибо в этом случае $\mathrm{H}^+ = \mathrm{H}$.
2. Расширения II рода — при $\mathrm{D}_A = \mathrm{D}_{B^+} \cap \mathrm{H} \neq \mathrm{D}_{B^+}$.
3. Расширения III рода — при $\mathrm{D}_A \neq \mathrm{D}_{B^+} \cap \mathrm{H} \neq \mathrm{D}_{B^+}$.

Таким образом, обычные симметрические расширения (т. е. расширения без выхода из пространства) совпадают с расширениями I рода, а симметрические расширения с выходом из пространства могут быть II или III рода.

Очевидно, максимальный оператор может допускать лишь симметрические расширения II рода, так как если бы B^+ было расширением III рода, то P^+B^+ оказалось бы в H нетривиальным симметрическим расширением максимального оператора, что невозможно.

Если симметрическое расширение B^+ оператора A приводится некоторым подпространством $\mathrm{G}^+ \subset \mathrm{H}^+ \ominus \mathrm{H}$, то это подпространство G^+ мы условимся исключать из H^+ (т. е. будем заменять пространство H^+ пространством $\mathrm{H}^+ \ominus \mathrm{G}^+$ и оператор B^+ — его частью в $\mathrm{H}^+ \ominus \mathrm{G}^+$).

В силу этого соглашения самосопряженный оператор не допускает симметрических расширений.

Мы можем теперь перейти к основной теореме настоящего пункта.

Теорема 1. *Действующий в гильбертовом пространстве* H *симметрический оператор A с произвольным индексом дефекта* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *может быть расширен до самосопряженного оператора B^+, действующего в пространстве* $\mathrm{H}^+ \supseteq \mathrm{H}$.

Доказательство. Построим в некотором пространстве H' достаточно большой размерности какой-нибудь симметрический оператор A' с индексом дефекта $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ (можно, например, взять H' изоморфным H и A' — изоморфным $(-1)A$).

Построим теперь пространство

$$\mathrm{H}^+ = \mathrm{H} \oplus \mathrm{H}'$$

и введем в этом пространстве симметрический оператор

$$A^+ = A \oplus A'.$$

Очевидно, оператор A^+ является симметрическим расширением II рода оператора A и для доказательства теоремы достаточно установить, что оператор A^+ можно расширить до самосопряженного оператора, а для этого следует убедиться в равенстве дефектных чисел оператора A^+.

При $\mathfrak{J}z \neq 0$ получаем

$$\mathfrak{M}_z^+ = (A^+ - zI^+)\,\mathrm{D}_{A^+} = (A^+ - zI^+)\,(\mathrm{D}_A \oplus \mathrm{D}_{A'}) =$$
$$= (A - zI)\,\mathrm{D}_A \oplus (A' - zI')\,\mathrm{D}_{A'} = \mathfrak{M}_z \oplus \mathfrak{M}_z'$$

или, переходя к ортогональным дополнениям многообразий $\mathfrak{M}_z^+$, $\mathfrak{M}_z$ и $\mathfrak{M}_z'$ в пространствах H^+, H и H', —

$$\mathfrak{N}_z^+ = \mathfrak{N}_z \oplus \mathfrak{N}_z',$$

откуда следует, что индекс дефекта оператора A^+ есть $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n}, \mathfrak{m}+\mathfrak{n})$.

Теорема доказана.

Выбирая различным образом пространство H' и оператор A', мы будем получать различные самосопряженные расширения оператора A.

Построенный при доказательстве теоремы 1 оператор B^+ будет, вообще говоря, расширением III рода исходного симметрического оператора A. Однако всегда можно добиться того, чтобы оператор B^+ являлся расширением II рода оператора A. Для этого достаточно построить унитарный оператор U^+, преобразованием Кэли которого явится искомый оператор B^+ так, чтобы

$$U^+\,\mathfrak{N}_z = \mathfrak{N}_{\bar z}'.$$

Опираясь на доказанную теорему, мы покажем теперь, что произвольные симметрические операторы допускают интегральные представления, подобные спектральному разложению самосопряженных операторов, которые мы изучали в гл. VI.

Итак, пусть в H дан симметрический оператор A. Расширим его* до самосопряженного оператора B^+, выйдя, если нужно, из пространства H в пространство H^+. Пусть $E^+(\Delta)$ — разложение единицы оператора B^+, а P^+ — оператор проектирования H^+ на H. Пусть, наконец,

$$F(\Delta) = P^+E^+(\Delta).$$

Для любых двух элементов $f \in \mathrm{D}_{B^+}$, $g \in \mathrm{H}^+$ имеют место формулы

$$(B^+f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d\,(E_t^+f,\ g),$$

$$\|B^+f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\,(E_t^+f,\ f).$$

* Мы здесь не предполагаем, что расширение производится тем специальным способом, который послужил для доказательства теоремы 1.

Если, в частности, $f \in D_A$ и $g \in H$, то эти формулы могут быть записаны в виде

$$(Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} t d(F_t f, g), \tag{1}$$

$$\| Af \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(F_t f, f). \tag{2}$$

Мы получили, таким образом, интегральное представление произвольного симметрического оператора, которое напоминает спектральное разложение самосопряженного оператора.

Опираясь на это сходство, примем следующее определение, обобщающее понятие спектральной функции самосопряженного оператора.

Определение. Если A — симметрический оператор, а F_t — обобщенное разложение единицы, такое, что при любом $f \in D_A$ и любом $g \in H$ имеют место формулы (1) и (2), то разложение единицы F_t называется *спектральной функцией* оператора A.

Прежде чем сопоставить формулы (1) и (2) с полученным ранее спектральным разложением самосопряженного оператора, мы покажем, что метод, с помощью которого мы пришли к этим формулам, является общим, а именно, имеет место

Теорема 2. *Всякая спектральная функция симметрического оператора A, действующего в пространстве* H, *имеет вид*

$$F_t = P^+ E_t^+,$$

где E_t^+ есть разложение единицы некоторого самосопряженного расширения B^+ оператора A, полученного с помощью выхода из пространства H *в пространство* $H^+ \supseteq H$, *а P^+ — оператор проектирования H^+ на* H.

Доказательство. Построим по теореме М. А. Наймарка пространство H^+ и в нем ортогональное разложение единицы E_t^+ так, чтобы

$$F_t = P^+ E_t^+. \tag{3}$$

Покажем, что оператор B^+, определенный формулой

$$B^+ f = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t^+ f$$

на элементах $f \in H^+$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t^+ f, f) < \infty,$$

является самосопряженным расширением оператора A.

Самосопряженность оператора B^+ следует из теоремы n° 72. Если $f \in \mathrm{D}_A$, то $f \in D_{B^+}$, ибо

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t^+ f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(F_t f, f) = \| Af \|^2 < \infty.$$

Далее, при $f \in \mathrm{D}_A$ и $g \in \mathrm{H}$ из равенств

$$(Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} t d(F_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} t d(E_t^+ f, g) = (B^+ f, g)$$

следует, что

$$Af = P^+ B^+ f \qquad (f \in \mathrm{D}_A). \tag{4}$$

Но при $f \in \mathrm{D}_A$

$$\| Af \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(F_t f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t^+ f, f) = \| B^+ f \|^2. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$Af = B^+ f \qquad (f \in \mathrm{D}_A).$$

При этом можно считать, что оператор B^+ не приводится никаким подпространством из $\mathrm{H}^+ \ominus \mathrm{H}$.

Действительно, если подпространство G из $\mathrm{H}^+ \ominus \mathrm{H}$ приводит оператор B^+, то оно приводит разложение единицы E_t^+ и исключение G из H^+ сведется к исключению части оператора E_t^+, лежащей в G, что не окажет влияния на формулу (3).

Теорема доказана.

Если спектральная функция F_t симметрического оператора представлена в виде (3), где E_t^+ — разложение единицы самосопряженного расширения B^+ оператора A, то мы будем говорить, что спектральная функция F_t порождается самосопряженным расширением B^+.

Таким образом, *каждое самосопряженное расширение оператора A порождает некоторую спектральную функцию этого оператора и, обратно, каждая спектральная функция оператора A порождается некоторым его самосопряженным расширением.*

Приведем теперь ряд фактов, выясняющих, насколько далеко простирается аналогия между представлением (1) и (2) и спектральным представлением самосопряженного оператора.

1°. Определенное в гл. VI разложение единицы самосопряженного оператора является его единственной спектральной функцией в смысле определения настоящего пункта. Других спектральных функций самосопряженный оператор не имеет, так как каждая такая спектральная функция должна в силу теоремы порождаться некоторым самосопряженным расширением, а самосопряженный оператор не допускает таких расширений.

2°. Из формулы (2) следует, что при $f \in D_A$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(F_t f, f) < \infty, \tag{6}$$

но обратное заключение, вообще говоря, неверно. Можно лишь утверждать, что если при некотором $f \in H$ сходится интеграл (6), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t^+ f, f) < \infty, \tag{7}$$

так что вектор f принадлежит многообразию $D_{B^+} \cap H$, которое совпадает с D_A тогда и только тогда, когда B^+ есть расширение II рода оператора A.

Таким образом, *те и только те спектральные функции оператора A, которые порождаются самосопряженными расширениями II рода оператора A, характеризуют область определения D_A как множество векторов, для которых сходится интеграл (6).*

В частности, этим свойством обладают спектральные функции максимальных операторов, ибо такие операторы допускают лишь расширения II рода.

В общем случае спектральная функция F_t оператора A, порожденная его самосопряженным расширением B^+, характеризует область определения оператора $C = P^+B^+$, рассматриваемого как действующий в H, который является для A симметрическим расширением I рода с максимальной областью определения D_C, удовлетворяющей условию

$$D_A \subset D_C \subset D_{B^+}, \tag{8}$$

а именно,

$$D_C = D_{B^+} \cap H.$$

С этой точки зрения естественнее было бы считать разложение единицы F_t спектральной функцией оператора C, а не оператора A и в соответствии с этим включить в определение требование, чтобы разложение единицы F_t помимо представлений (1) и (2) определяло еще область D_A неравенством (6).

Однако с точки зрения дальнейшего оказывается неудобным введение в определение дополнительного требования относительно характеристики области D_A.

Таким образом, определение допускает, чтобы одно и то же разложение единицы являлось спектральной функцией двух различных операторов (например, операторов A и C, рассмотренных выше).

В частности, спектральная функция некоторого самосопряженного расширения I рода B заданного оператора A с равными дефектными числами в силу определения является спектральной функцией самого оператора A и любого оператора C, удовлетворяющего условию $C \subseteq B$.

3°. Из предыдущего следует, что каждому симметрическому оператору принадлежит некоторое множество спектральных функций и что одна и та же спектральная функция принадлежит некоторому множеству симметрических операторов.

В связи с этим возникает вопрос о том, всякое ли данное наперед обобщенное разложение единицы является спектральной функцией некоторого симметрического оператора.

В случае ортогонального разложения единицы положительный ответ на этот вопрос был дан теоремой n° 72.

Если же F_t — неортогональное разложение единицы, то заранее нельзя утверждать, что множество векторов, для которых существует интеграл (6), будет плотно в пространстве H.

В действительности, как заметил М. А. Наймарк, существуют такие разложения единицы, что интеграл (6) не сходится ни при каком векторе $f \neq 0$ из H.

В качестве примера* такого рода рассмотрим операторную функцию, определенную в пространстве H равенствами

$$F_t = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ e^{-1/t} I, & t > 0. \end{cases}$$

Очевидно, операторная функция F_t удовлетворяет условиям (A), (B), (C) n° 110 и, следовательно, является разложением единицы. Однако это разложение единицы не является спектральной функцией какого-либо симметрического оператора, ибо интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(F_t f, f) = (f, f) \int_0^{\infty} t^2 de^{-1/t} = (f, f) \int_0^{\infty} e^{-1/t} dt$$

расходится, каков бы ни был вектор $f \neq 0$.

4°. В главе VI было выяснено, что для самосопряженного оператора представление (1) имеет место в сильном смысле.

В случае неортогональных разложений единицы переход от слабого представления (1) к сильному представлению вида

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} t dF_t f \tag{9}$$

неосуществим, и мы будем рассматривать равенство (9) лишь как символическую запись формул (1) и (2).

Вообще, понятие об интеграле в сильном смысле в случае неортогональных разложений единицы не вводится.

* Этот пример указал нам М. А. Красносельский.

5°. Из свойства ортогональности спектральной функции E_t самосопряженного оператора A вытекает, что для любого конечного интервала Δ числовой оси вектор $E(\Delta) f$ $(f \in \mathrm{H})$ принадлежит D_A и

$$(AE(\Delta) f, g) = \int\limits_{\Delta} td(P_t f, g)$$

при любом $g \in \mathrm{H}$. Этот важный факт, которым мы неоднократно пользовались в гл. VI, уже не имеет места для рассматриваемых теперь интегральных представлений симметрических операторов (даже если бы мы ограничились лишь спектральными функциями, порождаемыми расширениями II рода).

Однако справедливо следующее предложение: *если A — симметрический оператор, F_t — его спектральная функция, Δ — конечный интервал оси и g — произвольный вектор из* H, *то имеет место включение*

$$F(\Delta) g \in \mathrm{D}_{A^*}$$

и равенство

$$(A^*F(\Delta) g, h) = \int\limits_{\Delta} td(F_t g, h)$$

при любом $h \in \mathrm{H}$.

Действительно, если B^+ — расширение, порождающее F_t, и P^+ — оператор проектирования H^+ на H, то при любом $f \in \mathrm{D}_A$, $g \in \mathrm{H}$

$$\begin{aligned}(Af, F(\Delta) g) &= (B^+f, P^+E^+(\Delta) g) = (B^+f, E^+(\Delta) g) = \\ &= \int\limits_{\Delta} td(E_t^+ f, g) = \int\limits_{\Delta} td(E_t^+ f, P^+g) = \int\limits_{\Delta} td(F_t t, g). \qquad (10)\end{aligned}$$

Но интеграл

$$\int\limits_{\Delta} td(F_t h, g)$$

есть билинейный функционал от h, g в H и поэтому допускает представление (h, Cg), где C — некоторый ограниченный оператор.

Отсюда вытекает, что

$$(Af, F(\Delta) g) = (f, g^*)$$

и, значит,

$$F(\Delta) g \in \mathrm{D}_{A^*}.$$

Поэтому из (10) следует

$$(f, A^*F(\Delta) g) = \int\limits_{\Delta} td(F_t f, g),$$

а так как D_A плотно в H, то вместо $f \in D_A$ здесь можно взять произвольный вектор $h \in H$.

Отметим в заключение, что существует также теория расширения ограниченных несимметричных операторов до нормальных, с выходом из пространства (такие расширения возможны лишь при выполнении ряда условий). Указанной теории и связанным с нею вопросам посвящены работы Б. С.-Надь и его школы*, в которой нашел отражение ряд полученных в этой области результатов.

112. Спектральные функции симметрического оператора и обобщенные резольвенты. Введем теперь в рассмотрение операторную функцию $\boldsymbol{R}_z$, которая по отношению к спектральной функции симметрического оператора будет играть роль, аналогичную роли резольвенты самосопряженного оператора по отношению к его разложению единицы.

Определение. Пусть A — некоторый симметрический (но не самосопряженный) оператор, B^+ — какое-нибудь самосопряженное расширение этого оператора с выходом из пространства H в H^+ $(H \subset H^+)$ и резольвентой R_z^+ и, наконец, P^+ — оператор проектирования H^+ на H. Оператор $\boldsymbol{R}_z$, определенный при любом невещественном значении z формулой

$$\boldsymbol{R}_z = P^+ R_z^+$$

во всем пространстве H, называется *обобщенной резольвентой* оператора A, порожденной самосопряженным расширением B^+.

Обобщенные резольвенты оператора A (с равными дефектными числами), порожденные его самосопряженными расширениями I рода, называются *ортогональными*; эти обобщенные резольвенты оператора A являются одновременно обычными резольвентами тех самосопряженных расширений, которыми они порождаются.

Следующая теорема устанавливает для обобщенных резольвент интегральное представление, аналогичное полученному в гл. VI для обычных резольвент самосопряженных операторов.

Теорема 1. *Для того чтобы операторная функция $\boldsymbol{R}_z$ $(\Im z \neq 0)$ была обобщенной резольвентой симметрического оператора A, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$(\boldsymbol{R}_z f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(F_t f, g)}{t - z} \quad (f, g \in H), \tag{1}$$

где F_t — некоторая спектральная функция оператора A.

---

* См. С.-Надь и Фояш. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1970.

Для доказательства необходимости представления (1) следует взять спектральную функцию F_t, принадлежащую тому самосопряженному расширению B^+, которое порождает обобщенную резольвенту $\boldsymbol{R}_z$.

Для доказательства достаточности представления (1) следует взять обобщенную резольвенту $\boldsymbol{R}_z$, порожденную тем самосопряженным расширением B^+, которому принадлежит спектральная функция F_t.

Если обобщенная резольвента $\boldsymbol{R}_z$ и спектральная функция F_t связаны формулой (1), то говорят, что они принадлежат друг другу.

В силу формулы обращения Стилтьеса (n° 69) между множеством спектральных функций заданного симметрического оператора и множеством его обобщенных резольвент существует взаимно однозначное соответствие.

Заметим, что на каждом векторе из подпространства

$$\mathfrak{M}_z = \Delta_A(z) \quad (\Im z \neq 0)$$

значения всех обобщенных резольвент оператора A совпадают.

Действительно, если

$$(A - zI) f = g, \tag{2}$$

то

$$\boldsymbol{R}_z g = \boldsymbol{R}_z (A - zI) f = P^+ R_z^+ (B^+ - zI^+) f = P^+ f = f. \tag{3}$$

Если обобщенная резольвента $\boldsymbol{R}_z$ порождена расширением B^+ с резольвентой R_z^+, то при $f,\ g \in \mathrm{H}$

$$(\boldsymbol{R}_z f,\ g) = (P^+ R_z^+ f, g) = (R_z^+ f, g) = (f,\ R_{\bar z}^+ g) = (f, P^+ R_{\bar z}^+ g) = (f,\ \boldsymbol{R}_{\bar z} g),$$

и, значит,

$$\boldsymbol{R}_{\bar z} = \boldsymbol{R}_z^*. \tag{4}$$

Если A — максимальный симметрический оператор и, например, при $\Im z > 0$

$$\mathfrak{M}_z = \mathrm{H},$$

то его обобщенные резольвенты должны совпадать при $\Im z > 0$, так как в силу (2) и (3) при $\Im z > 0$ для любого $g \in \mathrm{H}$

$$\boldsymbol{R}_z g = (A - zI)^{-1} g.$$

Но согласно (4) из совпадения операторов $\boldsymbol{R}_z$ при $\Im z > 0$ следует их совпадение при $\Im z < 0$.

Таким образом, максимальный оператор имеет единственную обобщенную резольвенту и, следовательно, обладает единственной спектральной функцией.

С другой стороны, обобщенная резольвента немаксимального симметрического оператора A не определяется однозначно.

Чтобы в этом убедиться, достаточно взять два различных максимальных симметрических расширения I рода C' и C'' оператора A и затем расширить их до самосопряженных операторов B'^{+} и B''^{+}. Очевидно, обобщенные резольвенты $\boldsymbol{R}'_z$ и $\boldsymbol{R}''_z$ оператора A, порожденные расширениями B'^{+} и B''^{+}, не будут совпадать.

Поскольку немаксимальный симметрический оператор имеет различные обобщенные резольвенты, то его спектральная функция не определяется однозначно.

Если учесть сказанное ранее (п° 111, 1°) о спектральной функции самосопряженного оператора, то можно считать доказанным следующее предложение:

Теорема 2. *Симметрический оператор имеет единственную спектральную функцию в том и только в том случае, когда он максимален.*

Эта единственная спектральная функция является ортогональной в том и только в том случае, когда оператор самосопряженный.

Легко видеть, что множество всех спектральных функций (обобщенных резольвент) заданного симметрического оператора A является *выпуклым*.

Это означает, что если F'_t и F''_t ($\boldsymbol{R}'_z$ и $\boldsymbol{R}''_z$) — две спектральные функции (соответственно обобщенные резольвенты) оператора A, то при $\alpha' + \alpha'' = 1$, $\alpha' > 0$, $\alpha'' > 0$ операторная функция $\alpha' F'_t + \alpha'' F''_t$ (соответственно $\alpha' \boldsymbol{R}'_z + \alpha'' \boldsymbol{R}''_z$) также есть спектральная функция (соответственно обобщенная резольвента) этого оператора.

В связи с этим укажем один прием построения обобщенных резольвент (спектральных функций) и притом порожденных самосопряженными расширениями II рода с помощью операций в пределах пространства H.

Пусть A — симметрический оператор, действующий в пространстве H, а A' и A'' — какие-нибудь два его максимальных симметрических расширения I рода.

Предположим, для определенности, что при $\Im z > 0$

$$\Delta_{A'}(z) = \Delta_{A''}(z) = \mathrm{H}.$$

Определим операторы $\boldsymbol{R}'_z$ и $\boldsymbol{R}''_z$ равенствами

$$\boldsymbol{R}'_z = \begin{cases} (A' - zI)^{-1} & (\Im z > 0), \\ (\boldsymbol{R}'_{\bar z})^* & (\Im z < 0), \end{cases}$$

$$\boldsymbol{R}''_z = \begin{cases} (A'' - zI)^{-1} & (\Im z > 0), \\ (\boldsymbol{R}''_{\bar z})^* & (\Im z < 0). \end{cases}$$

Операторы $\boldsymbol{R}'_z$ и $\boldsymbol{R}''_z$ являются обобщенными резольвентами максимальных симметрических операторов A' и A'' соответственно.

По обобщенным резольвентам R'_z и R''_z найдем спектральные функции F'_t и F''_t операторов A' и A'' и образуем операторную функцию

$$F_t = \alpha' F'_t + \alpha'' F''_t \quad (\alpha' + \alpha'' = 1,\ \alpha' > 0,\ \alpha'' > 0).$$

В силу выпуклости множества спектральных функций операторная функция F_t является спектральной функцией оператора A.

Покажем теперь, как выбрать максимальные расширения A' и A'', чтобы спектральная функция F_t оказалась порожденной расширением II рода или, иначе говоря, чтобы спектральная функция F_t задавала область определения D_A оператора A с помощью неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\,(F_t f,\ f) < \infty. \tag{5}$$

Легко видеть, что вектор $f \in H$ удовлетворяет условию (5) тогда и только тогда, когда

$$f \in D_{A'} \cap D_{A''}.$$

Нам остается доказать, что максимальные расширения A', A'' оператора A можно выбрать так, чтобы пересечением областей $D_{A'}$, $D_{A''}$ была область D_A.

На основании второй формулы Неймана (n° 102)

$$D_{A'} = D_A + \Gamma', \quad D_{A''} = D_A + \Gamma''.$$

При этом Γ' есть множество всех векторов вида

$$g + U'g \quad (g \in \mathfrak{N}_{\bar z}),$$

где U' — некоторый изометрический оператор, переводящий $\mathfrak{N}_{\bar z}$ в $U'\mathfrak{N}_{\bar z} \subseteq \mathfrak{N}_z$ ($\mathfrak{I} z < 0$, если для определенности предположить, что $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$). Подобным образом определяется Γ''.

При этом $D_{A'} \cap D_{A''} \supseteq D_A$. Примем, что D_A есть истинная часть пересечения $D_{A'} \cap D_{A''}$ и пусть вектор $h \bar{\in} D_A$ принадлежит как $D_{A'}$, так и $D_{A''}$. Следовательно,

$$h = f' + g' + U'g', \quad h = f'' + g'' + U''g'',$$

где f', $f'' \in D_A$; g', $g'' \in \mathfrak{N}_{\bar z}$. Из написанных представлений вытекает, что

$$(f'' - f') + (g'' - g') + (U''g'' - U'g') = 0.$$

Но слагаемые в левой части равенства принадлежат соответственно многообразиям D_A, $\mathfrak{N}_{\bar z}$ и $\mathfrak{N}_z$, а так как эти многообразия линейно независимы, то

$$f' = f'', \quad g' = g'' = g, \quad U'g = U''g. \tag{6}$$

Из последнего равенства следует, что для выполнения условия

$$\mathrm{D}_{A'} \cap \mathrm{D}_{A''} = \mathrm{D}_A$$

нужно выбрать изометрические операторы U' и U'', определяющие расширения A' и A'', так, чтобы равенство (6) не имело места ни для какого отличного от нуля вектора из $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$.

Этого всегда можно достигнуть, выбирая, например, U' произвольно и полагая $U'' = -U'$.

Таким образом, построенные операторные функции

$$F_t = \alpha' F'_t + \alpha'' F''_t$$

и

$$\boldsymbol{R}_z = \alpha' \boldsymbol{R}'_z + \alpha' \boldsymbol{R}''_z$$

при произвольных α', α'' $(\alpha' + \alpha'' = 1,\ \alpha' > 0,\ \alpha'' > 0)$ являются спектральными функциями и, соответственно, обобщенными резольвентами оператора A, порожденными в смысле n° 111 некоторыми самосопряженными расширениями II рода B^+ оператора A.

Нельзя, однако, утверждать, что подобным приемом можно исчерпать все спектральные функции симметрического оператора*.

Из указанного приема построения спектральных функций следует, между прочим, что теорема 2 останется справедливой, если даже ограничиться лишь спектральными функциями, порожденными самосопряжёнными расширениями II рода.

Чтобы это установить, надо показать, что немаксимальный симметрический оператор A имеет различные спектральные функции, порожденные самосопряженными расширениями II рода оператора A.

Но это, действительно, имеет место, так как обобщенные резольвенты

$$\alpha \boldsymbol{R}'_z + \beta \boldsymbol{R}''_z$$

и

$$\beta \boldsymbol{R}'_z + \alpha \boldsymbol{R}''_z,$$

где $\alpha \neq \beta$, при указанном выборе максимальных расширений A' и A'' совпадают лишь на векторах из $\Delta_A(z)$ и, следовательно, порождают различные спектральные функции.

* По этому поводу см. Наймарк М. А. Экстремальные спектральные функции симметрических операторов. —«Изв. АН СССР», т. 11, № 4, 1947, а также Глазман И. М. и Найман П. Б. О выпуклой оболочке ортогональных функций. —ДАН СССР, т. 102, № 3, 1955.

Дальнейшее развитие теория обобщенных резольвент получила в работах А. В. Штрауса*. Им, в частности, получена формула, описывающая всевозможные обобщенные резольвенты в терминах пространства H.

В заключение проиллюстрируем изложенные в этом и предыдущем пунктах факты и методы на примере оператора дифференцирования.

Пусть $\mathcal{P}_0$ — оператор дифференцирования, действующий в $L^2(0, \infty)$. Индекс дефекта оператора $\mathcal{P}_0$ есть (0, 1).

Для получения обобщенного самосопряженного расширения оператора $\mathcal{P}_0$ по методу теоремы 1 n° 111 построим оператор $\mathcal{P}_0'$ дифференцирования в $L^2(-\infty, 0)$, определяя его формулой

$$\mathcal{P}_0' = i\frac{d}{dt}$$

на абсолютно непрерывных функциях $\varphi(t)$, принадлежащих вместе со своей производной $\varphi'(t)$ к $L^2(-\infty, 0)$ и удовлетворяющих граничному условию $\varphi(0) = 0$.

Очевидно, индекс дефекта оператора $\mathcal{P}_0'$ есть (1, 0).

Образуем ортогональные суммы

$$L^2(-\infty, \infty) = L^2(-\infty, 0) \oplus L^2(0, \infty),$$
$$\mathcal{P}_0^+ = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_0'.$$

Оператор $\mathcal{P}_0^+$ определяется, очевидно, формулой

$$\mathcal{P}_0^+\varphi = i\frac{d}{dt}\varphi(t)$$

на функциях $\varphi(t)$, которые абсолютно непрерывны в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, принадлежат вместе со своими производными $\varphi'(t)$ к $L^2(-\infty, \infty)$ и удовлетворяют граничному условию $\varphi(0) = 0$.

Легко видеть, что область определения сопряженного оператора $D_{(\mathcal{P}_0^+)^*}$ получится из $D_{\mathcal{P}_0^+}$, если опустить граничное условие $\varphi(0) = 0$. Отсюда следует, что каждое из уравнений

$$(\mathcal{P}_0^+)^*g + ig = 0, \quad (\mathcal{P}_0^+)^*g - ig = 0$$

имеет единственное решение; эти решения определяются соответственно формулами

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ e^{-t} & (t \geqslant 0), \end{cases} \qquad g_2(t) = \begin{cases} e^{t} & (t < 0), \\ 0 & (t \geqslant 0). \end{cases}$$

* См. Штраус А. В. Обобщенные резольвенты симметрических операторов. —«Изв. АН СССР, сер. мат.», 18, 1954, с. 51—86; О расширениях симметрического оператора, зависящих от параметра, там же, 29, 1965, с. 1389—1416.

Таким образом, индекс дефекта оператора $\mathcal{P}_0^+$ есть (1, 1).

Рассмотренный в n° 55 оператор $\mathcal{P}$ дифференцирования на оси $(-\infty, \infty)$ является, очевидно, некоторым самосопряженным расширением оператора $\mathcal{P}_0^+$.

Мы получили, таким образом, в качестве обобщенного самосопряженного расширения оператора дифференцирования на полуоси оператор дифференцирования на оси.

113. Формула М. Г. Крейна для обобщенных резольвент. В связи с результатами предыдущих пунктов возникает вопрос об описании совокупности всех спектральных функций заданного симметрического оператора. Так как между множеством всех спектральных функций и множеством всех резольвент симметрического оператора имеется взаимно однозначное соответствие, вытекающее из формулы

$$(\boldsymbol{R}_\lambda f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(F_t f, g)}{t-\lambda},$$

то указанный вопрос сводится к вопросу об описании всех резольвент. Этот вопрос для случая равных и конечных дефектных чисел решил М. Г. Крейн*. Мы приведем здесь результат М. Г. Крейна для случая индекса дефекта (1, 1).

Пусть A — симметрический оператор с индексом дефекта (1, 1); $\mathring{A}$ — какое-нибудь фиксированное самосопряженное расширение I рода оператора A; $\mathring{R}_\lambda$ — резольвента оператора $\mathring{A}$ и, наконец, $\boldsymbol{R}_\lambda$ — произвольная обобщенная резольвента оператора A, так что

$$\boldsymbol{R}_\lambda = P^+ R_\lambda^+,$$

где R_λ^+ — ортогональная резольвента некоторого самосопряженного расширения A^+ оператора A с выходом из пространства H в H^+, а P^+ — оператор проектирования H^+ на H.

Положим, как обычно,

$$\mathfrak{M}_\lambda = \Delta_A(\lambda) \quad (\Im\lambda \neq 0),$$
$$\mathfrak{N}_\lambda = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_\lambda.$$

В рассматриваемом случае подпространство $\mathfrak{N}_\lambda$ одномерно.

---

* См. Крейн М. О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m', m). — ДАН СССР, т. LII, № 8, 1946, с. 657—660. В иной форме формула для обобщенных резольвент оператора с индексами дефекта (1, 1) была получена М. А. Наймарком; см. его статью «О спектральных функциях симметрического оператора». —Изв. «АН СССР», т. 7, № 6, 1943, с. 285—296.

Для разности резольвент, так же как и в n° 106, получаем

$$(\overset{\circ}{R}_\lambda - \boldsymbol{R}_\lambda) f \begin{cases} = 0 & \text{при } f \in \mathfrak{M}_\lambda, \\ \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}^- & \text{при } f \in \mathfrak{N}_\lambda. \end{cases} \tag{1}$$

Последнее вытекает из того, что при $f \in \mathfrak{N}_\lambda$ и любом $h \in \mathfrak{M}_{\bar\lambda}^-$ в силу формулы (4) n° 112

$$((\overset{\circ}{R}_\lambda - \boldsymbol{R}_\lambda) f, h) = (f, (\overset{\circ}{R}_{\bar\lambda}^- - \boldsymbol{R}_{\bar\lambda}^-) h) = (f, 0) = 0.$$

Из (1), повторяя рассуждения n° 106, получим аналог формулы (6) n° 106 для нашего случая:

$$\boldsymbol{R}_\lambda f = \overset{\circ}{R}_\lambda f - p(\lambda)(f, g(\bar\lambda))\, g(\lambda), \tag{2}$$

где

$$g(\lambda) = g(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \overset{\circ}{R}_\lambda g(\lambda_0), \tag{2'}$$

а $g(\lambda_0)$ — вектор из $\mathfrak{N}_{\bar\lambda_0}^-$ с равной единице нормой. При этом мы примем для определенности, что фиксированная точка λ_0 лежит в верхней полуплоскости (можно было бы положить $\lambda_0 = i$). Однако функция $Q(\lambda) \equiv p^{-1}(\lambda)$, вообще говоря, уже не удовлетворяет соотношению

$$Q(\lambda) = Q(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)(g(\lambda_0), g(\bar\lambda)), \tag{3}$$

которое мы получили в n° 106 (формула (12)) для случая ортогональных резольвент.

Займемся выяснением природы функции $p(\lambda)$. Прежде всего найдем $p(\lambda_0)$, для чего положим в (2) $\lambda = \lambda_0$ и перейдем от резольвент к преобразованиям Кэли:

$$\overset{\circ}{U}_{\lambda_0} = (\overset{\circ}{A} - \lambda_0 I)(\overset{\circ}{A} - \bar\lambda_0 I)^{-1}, \quad U_{\lambda_0}^{+} = (A^+ - \lambda_0 I^+)(A^+ - \bar\lambda_0 I^+)^{-1}.$$

После элементарной выкладки получаем

$$P^+ \overset{+}{U}_{\bar\lambda_0}^{-} f = \overset{\circ}{U}_{\bar\lambda_0}^{-} f - (\lambda_0 - \bar\lambda_0)\, p(\lambda_0)(f, g(\bar\lambda_0))\, g(\lambda_0).$$

В этой формуле положим $f = g(\bar\lambda_0)$. Тогда будем иметь

$$P^+ U_{\lambda_0}^{\pm} g(\bar\lambda_0) = g(\lambda_0) - (\lambda_0 - \bar\lambda_0)\, p(\lambda_0)\, g(\lambda_0). \tag{4}$$

С другой стороны, поскольку элемент $\psi = \overset{+}{U}_{\bar\lambda_0}^{-} \varphi$ пробегает $\mathfrak{M}_{\bar\lambda_0}^-$, когда φ пробегает $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$, имеет место равенство

$$0 = (g(\bar\lambda_0), \varphi) = (\overset{+}{U}_{\lambda_0}^{-} g(\bar\lambda_0), \overset{+}{U}_{\lambda_0}^{-} \varphi) = (\overset{+}{U}_{\lambda_0}^{-} g(\bar\lambda_0), \psi) = (P^+ \overset{+}{U}_{\lambda_0}^{-} g(\bar\lambda_0), \psi),$$

показывающее, что

$$P^{+}U^{+}_{\bar{\lambda}_0} g(\bar{\lambda}_0) = \vartheta g(\lambda_0), \tag{5}$$

где $\vartheta = \vartheta(\lambda_0)$ — некоторый параметр, по модулю не превосходящий 1, определяемый расширением A^+ и равный по модулю 1 в том и только в том случае, когда A^+ есть расширение I рода.

Из наших рассмотрений вытекает важное следствие: *пусть равенство*

$$\boldsymbol{R}_\lambda = \mathring{R}_\lambda,$$

или даже только

$$\boldsymbol{R}_\lambda g(\bar{\lambda}) = \mathring{R}_\lambda g(\bar{\lambda}),$$

имеет место хотя бы при одном невещественном значении $\lambda = \lambda_1$, *тогда оно имеет место при всех невещественных* λ.

Действительно, при $\lambda = \lambda_1$ из формулы (2) находим, что $p(\lambda_1) = 0$, а затем, полагая $\lambda_0 = \lambda_1$ в формулах (4) и (5), получаем, что множитель $\vartheta = \vartheta(\lambda_1)$ в формуле (5) равен единице. Поэтому $\boldsymbol{R}_\lambda$ есть ортогональная резольвента, а две ортогональные резольвенты одного и того же оператора, совпадающие в одной точке, очевидно, тождественны. Сопоставляя (4) и (5), находим, что

$$p(\lambda_0) = \frac{1-\vartheta}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0} \quad \text{или} \quad Q(\lambda_0) \equiv p^{-1}(\lambda_0) = i\Im\lambda_0 + \tau, \tag{6}$$

где τ — новый параметр, связанный с параметром ϑ формулой

$$\tau = i\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\Im\lambda_0,$$

отображающей единичный круг ϑ-плоскости на верхнюю половину τ-плоскости.

Если $\boldsymbol{R}_\lambda$ пробегает совокупность ортогональных резольвент, то благодаря справедливости в этом случае формулы (3) формула (2) принимает вид

$$\boldsymbol{R}_\lambda f = \mathring{R}_\lambda f - \frac{(f, g(\bar{\lambda}))\, g(\lambda)}{\tau + Q_1(\lambda)}, \tag{7}$$

где

$$Q_1(\lambda) = i\Im\lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)(g(\lambda_0), g(\bar{\lambda})), \tag{7'}$$

а параметр τ пробегает вещественную ось ($-\infty < \tau \leqslant \infty$). Определяемое формулой (7) соответствие между совокупностью всех ортогональных резольвент и значениями параметра τ взаимно однозначно.

В общем случае, когда $\boldsymbol{R}_\lambda$ — произвольная резольвента, мы положим в формуле (2)

$$p(\lambda) = Q^{-1}(\lambda) = [\tau(\lambda) + Q_1(\lambda)]^{-1}.$$

Таким образом,

$$R_\lambda f = \mathring{R}_\lambda f - \frac{(f, g(\bar{\lambda}))\, g(\lambda)}{\tau(\lambda) + Q_1(\lambda)}. \tag{8}$$

Покажем, что функция $\tau(\lambda)$ голоморфна и имеет неотрицательную мнимую часть в верхней полуплоскости. С этой целью заметим, что при $\Im\lambda \neq 0$

$$\boldsymbol{R}_\lambda g(\bar{\lambda}) \neq \mathring{R}_\lambda g(\bar{\lambda}),$$

а также

$$(\boldsymbol{R}_\lambda g(\bar{\lambda}),\ g(\lambda)) \neq (\mathring{R}_\lambda g(\bar{\lambda}),\ g(\lambda))$$

в силу доказанного выше утверждения. Поэтому положим в (8) $f = g(\bar{\lambda})$ и умножим обе части скалярно на $g(\lambda)$. Мы получим тогда, что

$$\frac{1}{\tau(\lambda) + Q_1(\lambda)} = ((\mathring{R}_\lambda - \boldsymbol{R}_\lambda)\, g(\bar{\lambda}),\ g(\lambda)).$$

Так как здесь $Q_1(\lambda)$ и правая часть голоморфны, причем правая часть отлична от нуля, то голоморфность функции $\tau(\lambda)$ при любом невещественном значении λ доказана. А теперь докажем, что равенство $\Im\tau(\lambda') = 0$ хотя бы в одной точке верхней полуплоскости возможно лишь при $\tau(\lambda) = \text{const}$. Отсюда, между прочим, будет следовать, что неравенство $\Im\tau(\lambda) < 0$ невозможно ни в одной точке верхней полуплоскости. Итак, пусть $\Im\tau(\lambda') = 0$ $(\Im\lambda' > 0)$. Возьмем $\lambda = \lambda'$ в обеих формулах (7) и (8), выбрав в формуле (7) в качестве константы τ число $\tau(\lambda')$. Тогда правые части этих формул будут тождественны при любом f. Следовательно, в точке $\lambda = \lambda'$ обобщенная резольвента $\boldsymbol{R}_\lambda$ совпадает с некоторой ортогональной резольвентой R_λ, а отсюда, как мы выше показали, уже вытекает совпадение этих резольвент.

Умножая скалярно обе части равенства (8) на f и приводя к общему знаменателю, мы получаем формулу вида

$$(\boldsymbol{R}_\lambda f, f) = \frac{p_0(\lambda) + p_1(\lambda)\,\tau(\lambda)}{Q_1(\lambda) + \tau(\lambda)}.$$

При фиксированном f функции $p_0(\lambda)$, $p_1(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$ не зависят от выбора резольвенты $\boldsymbol{R}_\lambda$, определяющего функцию $\tau(\lambda)$. Так как ортогональные резольвенты получаются, когда $\tau(\lambda)$ есть вещественная константа, а остальные, когда $\tau(\lambda)$ пробегает некоторую совокупность голоморфных функций с неотрицательной мнимой частью, то точка $w = (\boldsymbol{R}_\lambda f, f)$ принадлежит некоторой круговой области. Граница этой области — окружность $C(f;\lambda)$ — пробегается точкой w, когда $\boldsymbol{R}_\lambda$ есть ортогональная резольвента. Иначе говоря, окружность $C(f;\lambda)$ описывается точкой

$$w=\frac{p_0(\lambda)+p_1(\lambda)\tau}{Q_1(\lambda)+\tau},$$

когда τ пробегает вещественную ось.

Так как множество всех резольвент заданного оператора выпукло, то точка $w=(\boldsymbol{R}_\lambda f, f)$ пробегает круг $K(f;\lambda)$ с границей $C(f;\lambda)$, когда $\boldsymbol{R}_\lambda$ пробегает совокупность всех резольвент оператора A.

Предшествующими рассуждениями установлено, что *всякая резольвента* $\boldsymbol{R}_\lambda$ *симметрического оператора* A *с индексом дефекта* (1, 1) *представима в виде*

$$\boldsymbol{R}_\lambda=\mathring{R}_\lambda-\frac{(\cdot, g(\bar\lambda))\,g(\lambda)}{\tau(\lambda)+Q_1(\lambda)}, \tag{9}$$

где $\tau(\lambda)$ *принадлежит классу* N *функций, определенных и голоморфных в полуплоскости* $\Im\lambda>0$ *и имеющих в этой полуплоскости неотрицательную мнимую часть.*

Теперь докажем, что справедливо и обратное предложение, а именно: *всякая функция* $\tau(\lambda)$ *класса* N *порождает с помощью формулы* (9) *некоторую резольвенту оператора* A.

Итак, пусть $\tau(\lambda)\in N$ и пусть S_λ — оператор, определяемый равенством

$$S_\lambda=\mathring{R}_\lambda-\frac{(\cdot, g(\bar\lambda))\,g(\lambda)}{\tau(\lambda)+Q_1(\lambda)}. \tag{9'}$$

Так как окружность $C(f;\lambda)$ лежит в верхней полуплоскости, а точка $(S_\lambda f, f)$ лежит в круге $K(f;\lambda)$, то скалярное произведение $(S_\lambda f, f)$, являясь в полуплоскости $\Im\lambda>0$ голоморфной функцией, очевидно, принадлежит классу N.

Так как, далее, для ортогональных резольвент R_λ скалярное произведение $(R_\lambda f, f)$ удовлетворяет неравенству

$$|(R_\lambda f, f)|\leqslant\frac{(f,f)}{\Im\lambda}\quad(\Im\lambda>0),$$

то для скалярного произведения $(S_\lambda f, f)$, лежащего в круге $K(f;\lambda)$ также будет иметь место неравенство

$$|(S_\lambda f, f)|\leqslant\frac{(f,f)}{\Im\lambda}.$$

Пользуясь этим неравенством и повторяя рассуждения n° 74, мы придем к представлению скалярного произведения $(S_\lambda f, f)$ в виде

$$(S_\lambda f, f)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega(t;f)}{t-\lambda}, \tag{10}$$

где $\omega(t; f) = \omega(t)$ — неубывающая непрерывная слева функция, стремящаяся к нулю при $t \to -\infty$ и удовлетворяющая условию

$$\omega(t; f) \leqslant (f, f) \quad (-\infty < t \leqslant \infty).$$

Из формулы (10), повторяя выкладки n° 74, мы придем к представлению оператора S_λ в виде

$$(S_\lambda f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(F_t f, g)}{t - \lambda}, \tag{10'}$$

где F_t — неубывающая непрерывная слева операторная функция, стремящаяся к нулю при $t \to -\infty$ и удовлетворяющая условию

$$(F_t f, f) \leqslant (f, f) \quad (-\infty < t \leqslant \infty). \tag{11}$$

Но теперь, в отличие от n° 74, операторная функция S_λ уже не удовлетворяет функциональному уравнению Гильберта и, следовательно, нельзя вывести для F_t свойство ортогональности

$$F_u F_v = F_s \quad (s = \min\{u, v\}). \tag{12}$$

Вместе с этим отпадает и опиравшееся на последнее соотношение доказательство свойства

$$\lim_{t \to \infty} F_t f = f \quad (f \in \mathrm{H}), \tag{13}$$

приведенное в конце n° 74.

Чтобы показать, что операторная функция F_t является обобщенным разложением единицы, нам надлежит, обойдя соотношение (12), доказать свойство (13).

Так как согласно теореме о монотонно возрастающей последовательности операторов (n° 33) предел в левой части равенства (13) существует, то достаточно установить, что при $t \to \infty$ оператор F_t стремится к I слабо, т. е. что при любых f и g из H

$$\lim_{t \to \infty} (F_t f, g) = (f, g).$$

Это соотношение, очевидно, будет выполняться, если для любого $f \in \mathrm{H}$ будет

$$\lim_{t \to \infty} (F_t f, f) = (f, f). \tag{14}$$

Но в силу (11) норма операторной функции F_t ограничена ($\|F_t\| \leqslant 1$) и поэтому достаточно проверить равенство (14) для некоторого плотного в H множества векторов. В качестве такого множества мы примем область определения D_A оператора A.

В силу (10′) подлежащее доказательству равенство (14) эквивалентно равенству

$$\lim_{\eta\to\infty} i\eta\,(S_{i\eta}f, f) = -(f, f). \tag{15}$$

Так как точка $(S_{i\eta}f, f)$ принадлежит кругу $K(f;\ i\eta)$, то, очевидно,

$$|\,i\eta\,(S_{i\eta}f, f) + (f, f)\,| \leqslant \max_{-\infty<\tau\leqslant\infty} |\,i\eta\,(R^{\tau}_{i\eta}f, f) + (f, f)\,|,$$

где через R^{τ}_{λ} обозначена резольвента I рода, отвечающая параметру τ, и нам остается установить, что при $\eta\to\infty$ величина

$$|\,i\eta\,(R^{\tau}_{i\eta}f, f) + (f, f)\,|$$

стремится к нулю равномерно относительно τ $(-\infty<\tau\leqslant\infty)$.

Последнее обстоятельство действительно имеет место, ибо при $f\in \mathrm{D}_A$ и $\eta>0$

$$|\,i\eta\,(R^{\tau}_{i\eta}f, f) + (f, f)\,| =$$
$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\eta}{t-i\eta}\,d\,(E^{\tau}_{t}f, f) + \int_{-\infty}^{\infty} d\,(E^{\tau}_{t}f, f)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{t-i\eta}\,d\,(E^{\tau}_{t}f, f)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,d\,(E^{\tau}_{t}f, f)}\,\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t-i\eta|^2}\,d\,(E^{\tau}_{t}f, f)} \leqslant \frac{1}{\eta}\,\|Af\|\cdot\|f\|.$$

Таким образом, соотношение (13) доказано, так что операторная функция F_t действительно является обобщенным разложением единицы и согласно теореме М. А. Наймарка допускает представление

$$F_t = P^+E^+_t.$$

Введем в рассмотрение самосопряженный оператор

$$A^+f = \int_{-\infty}^{\infty} t\,dE^+_t f.$$

Очевидно,

$$S_\lambda = P^+R^+_\lambda,$$

где R^+_λ — резольвента оператора A^+, и для завершения доказательства теоремы остается показать, что оператор A^+ является расширением оператора A:

$$A^+ \supset A,$$

или что

$$R^+_\lambda f = \boldsymbol{R}_\lambda f$$

при $f\in\mathfrak{M}_\lambda$.

Из формулы (9′) следует, что при $f \in \mathfrak{M}_\lambda$

$$P^+\overset{+}{R}_\lambda f = S_\lambda f = \overset{\circ}{R}_\lambda f,$$

откуда

$$\overset{+}{R}_\lambda f = \boldsymbol{R}_\lambda f + h,$$

где $h \perp$ H. Покажем, что $h = 0$. Имеем при $f \in \mathfrak{M}_\lambda$

$$A\boldsymbol{R}_\lambda f = f + \lambda \boldsymbol{R}_\lambda f,$$
$$A^+(\boldsymbol{R}_\lambda f + h) = f + \lambda \boldsymbol{R}_\lambda f + \lambda h,$$

откуда, полагая $g = \boldsymbol{R}_\lambda f$, получим

$$(A^+(g + h),\ g + h) = (Ag + \lambda h,\ g + h) = (Ag, g) + \lambda (h, h),$$

что возможно лишь при $h = 0$, ибо $\mathfrak{J}\lambda \neq 0$.

Теорема доказана полностью.

114. Квазисамосопряженные расширения и характеристическая функция симметрического оператора. В настоящем пункте мы рассмотрим еще один вид расширений симметрических операторов с конечными и равными дефектными числами, введенный М. С. Лившицем *.

Квазисамосопряженным расширением симметрического оператора A с индексом дефекта (m, m) мы будем называть любой линейный оператор B, который удовлетворяет условиям

$$A \subset B \subset A^*, \tag{1}$$
$$\dim \mathrm{D}_B = m \,(\mathrm{mod}\, \mathrm{D}_A), \tag{2}$$

но не является самосопряженным расширением оператора A.

Для простоты изложения мы ограничимся случаем операторов с индексом дефекта (1, 1). В этом случае условие (2) является следствием условия (1) и может быть опущено.

Мы будем предполагать, что оператор A прост (n° 103).

Приведем пример квазисамосопряженного расширения симметрического оператора. Пусть $\mathscr{P}$ есть оператор дифференцирования в пространстве $L^2(0, a)$ при краевых условиях

$$\varphi(0) = \varphi(a) = 0.$$

В главе IV мы установили, что область определения любого самосопряженного расширения $\mathscr{P}_\theta$ оператора $\mathscr{P}$ задается краевым условием

$$\varphi(a) = \theta\varphi(0) \quad (|\theta| = 1) \tag{3}$$

* Лившиц М. С. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве. — «Мат. сб.», т. 19 (61): 2 1946, с. 239—260: Лившиц М. С. К теории изометрических операторов с равными дефектными числами. — ДАН СССР, т. LVIII, № 1, 1947, с. 13—15.

и, обратно, каждое такое условие при $|\theta|=1$ задает область определения некоторого самосопряженного расширения оператора $\mathcal{P}$.

Если теперь взять в равенстве (3) вместо θ любое комплексное число ρ, не равное по модулю единице, то оператор $\mathcal{P}_\rho$ ($\mathcal{P}_\rho \subset \mathcal{P}^*$), определенный на функциях $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(a) = \rho\,\varphi(0) \quad (|\rho| \neq 1), \tag{4}$$

будет квазисамосопряженным расширением оператора $\mathcal{P}$. Очевидно, каждое квазисамосопряженное расширение оператора $\mathcal{P}$ задается условием (4) (одно из них — при $\rho=\infty$).

Для квазисамосопряженных расширений B оператора A можно ввести преобразование Кэли S, определяемое на многообразии

$$\mathrm{D}_S = \Delta_B(\bar\lambda)$$

формулами

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= (B-\bar\lambda I)f, \\ S\varphi &= (B-\lambda I)f \end{aligned}\right. \quad (f\in \mathrm{D}_B,\ \Im\lambda \neq 0). \qquad \begin{aligned}(5)\\(6)\end{aligned}$$

Это определение теряет смысл лишь тогда, когда вектор f определяется вектором φ не однозначно, т. е. когда $\bar\lambda$ есть собственное значение оператора B. Но если $\bar\lambda$ есть собственное значение оператора B, то λ таковым не является, ибо в противном случае имели бы место включения

$$g_\lambda \in \mathrm{D}_B,\quad g_{\bar\lambda} \in \mathrm{D}_B,$$

а вместе с ними равенство

$$B = A^*,$$

противоречащее условию (1).

Мы можем поэтому считать, что в формуле (5) $\bar\lambda$ не есть собственное значение оператора B. Приняв для определенности $\lambda = i$, запишем формулы (5) и (6) в виде

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= (B+iI)f, \\ S\varphi &= (B-iI)f \end{aligned}\right. \quad (f\in \mathrm{D}_B). \qquad \begin{aligned}(5')\\(6')\end{aligned}$$

Очевидно, оператор S определен во всем пространстве и является расширением преобразования Кэли V оператора A. Однако теперь, в отличие от случая самосопряженных расширений, оператор S уже не будет унитарным.

Покажем, что ортогональное дополнение многообразия

$$\mathrm{D}_V = \mathfrak{M}_{-i} = \Delta_A(-i)$$

переводится оператором S в ортогональное дополнение многообразия

$$\Delta_V = \mathfrak{M}_i = \Delta_A(i).$$

Действительно, если

$$g \perp \mathfrak{M}_{-i},$$

то, полагая в соответствии с (5')

$$g = (B + iI)h \quad (h \in \mathrm{D}_B),$$

имеем при любом $f \in \mathrm{D}_A$

$$((B + iI)h, \ (A + iI)f) = 0.$$

С другой стороны, при любом $f \in \mathrm{D}_A$, используя включение $B \subset A^*$, получаем

$$\begin{aligned}(Sg, (A - iI)f) &= ((B - iI)h, \ (A - iI)f) = \\ = (Bh, Af) - i(h, Af) + i(Bh, f) + (h, f) &= (Bh, Af) - i(Bh, f) + \\ + i(h, Af) + (h, f) &= ((B + iI)h, \ (A + iI)f) = 0,\end{aligned}$$

так что $Sg \perp \mathfrak{M}_i$ (в частности, может быть $Sg = 0$).

Если g^* означает вектор, ортогональный к многообразию $\mathfrak{M}_i$ и такой, что $\|g^*\| = \|g\|$, то на основании доказанного

$$Sg = \varkappa g^*. \tag{7}$$

При этом число $\varkappa$ не равно по модулю единице, ибо в противном случае оператор B, который, очевидно, выражается через S с помощью формул

$$f = \frac{1}{2i}(I - S)\varphi, \tag{8}$$

$$(\varphi \in \mathrm{H}),$$

$$Bf = \frac{1}{2}(I + S)\varphi \tag{9}$$

был бы самосопряженным.

Оператор $S \equiv S_\varkappa$ называется *квазиунитарным расширением* изометрического оператора V. Легко проверить, что при $\varkappa \neq 0$

$$S_\varkappa^* = S_\eta^{-1},$$

где

$$\eta = \bar{\varkappa}^{-1}.$$

Вообще, *квазиунитарным расширением* заданного изометрического оператора V с индексом дефекта (m, m) $(m < \infty)$ называется любой линейный (но не унитарный) оператор $S \supset V$, определенный во всем пространстве и переводящий ортогональное дополнение многообразия D_V в некоторое подпространство $F \subseteq \mathrm{H} \ominus \Delta_V$.

Очевидно, каждое квазиунитарное расширение S оператора V порождает по формулам (8) и (9) некоторое квазисамосопряженное расширение B оператора A.

Для случая индекса дефекта (1, 1) существует взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех квазисамосопряженных расширений B оператора A (соответственно квазиунитарных расширений S оператора V) и множеством всех комплексных чисел $\varkappa$, не равных единице по модулю. Отмечая это соответствие, мы будем обозначать рассматриваемые расширения $B_\varkappa$ (соответственно $S_\varkappa$).

Перейдем теперь к изучению спектра квазисамосопряженного расширения B оператора A с индексом дефекта (1, 1).

Напомним, что согласно общему определению n° 48 число λ называется регулярной точкой линейного оператора T, если оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ существует, ограничен и определен во всем пространстве H. Спектром оператора T называется дополнение множества его регулярных точек.

Теорема 1. *Спектр любого квазисамосопряженного расширения B простого оператора A с индексом дефекта* (1, 1) *состоит из ядра спектра* (см. n° 105) *оператора A и собственных значений. Множество собственных значений целиком лежит либо в верхней полуплоскости, либо в нижней. Если оставить в стороне один исключительный случай*, когда вся полуплоскость (верхняя или нижняя) состоит из собственных значений, то множество собственных значений может иметь лишь вещественные предельные точки.*

Доказательство. Обозначим ядро спектра оператора A через Λ. При любом $\lambda \in \Lambda$ оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ неограничен и поэтому не может быть ограниченным оператор $(B-\lambda I)^{-1}$. Следовательно, Λ входит в спектр оператора B.

Положим теперь, что $\lambda \bar{\in} \Lambda$. Если оператор $(B-\lambda I)^{-1}$ не существует, то λ есть собственное значение оператора B.

Если же оператор $(B-\lambda I)^{-1}$ существует, то λ есть регулярная точка оператора B.

Действительно, оператор $(B-\lambda I)^{-1}$ не может быть неограниченным, так как ограничен оператор $(A-\lambda I)^{-1}$, а $\Delta_B(\lambda)$ отличается от $\Delta_A(\lambda)$ не более чем на одно измерение. Остается показать, что $\Delta_B(\lambda) = \mathrm{H}$. Допуская противное, найдем, что $\Delta_B(\lambda) = \Delta_A(\lambda)$. Если теперь взять вектор f из D_B, который не принадлежит D_A, то вектор

$$(B-\lambda I) f = f^*,$$

принадлежащий $\Delta_B(\lambda) = \Delta_A(\lambda)$, представим в виде

$$f^* = (A-\lambda I) f' = (B-\lambda I) f' \quad (f' \in \mathrm{D}_A).$$

Следовательно,

$$(B-\lambda I)(f-f') = 0,$$

* В дальнейшем этот случай будет охарактеризован (см. следствие теоремы 3).

что противоречит существованию оператора $(B - \lambda I)^{-1}$, а значит, регулярность точки λ доказана.

Таким образом, спектр оператора B состоит из ядра спектра Λ оператора A и собственных значений.

Введя преобразование Кэли $S_\varkappa$ оператора $B = B_\varkappa$, мы без труда замечаем, что точка λ пробегает спектр оператора B, когда точка

$$\zeta = \frac{\lambda - i}{\lambda + i} \tag{10}$$

пробегает спектр оператора $S_\varkappa$, и, наоборот, причем формула (10) устанавливает взаимно однозначное соответствие также между собственными значениями операторов B и $S_\varkappa$.

На основании сказанного достаточно найти расположение собственных значений оператора $S_\varkappa$.

Так как оператор A прост, то его преобразование Кэли V не имеет собственных значений, а потому, как легко видеть, при $|\varkappa| < 1$ модули собственных значений оператора $S_\varkappa$ меньше единицы, а при $|\varkappa| > 1$ они больше единицы, поэтому все собственные значения оператора B лежат в верхней полуплоскости (если $|\varkappa| < 1$) или в нижней полуплоскости (если $|\varkappa| > 1$).

Мы будем предполагать, что $|\varkappa| < 1$. Условимся всюду в дальнейшем обозначать через g вектор, ортогональный к многообразию $\mathfrak{M}_{-i}$ и равный по норме единице, через $\overset{\circ}{U}$ — некоторое унитарное расширение оператора V, через g^* — вектор, определенный равенством

$$g^* = \overset{\circ}{U} g,$$

и через $S_\varkappa$ — квазиунитарное расширение оператора V, определенное равенством

$$S_\varkappa g = \varkappa g^*.$$

Представим отвечающий числу ζ собственный вектор оператора $S_\varkappa$ в виде $\varphi + \alpha g$ $(\varphi \in \mathrm{D}_V)$. Таким образом,

$$S_\varkappa(\varphi + \alpha g) = \zeta(\varphi + \alpha g),$$

откуда

$$S_\varkappa \varphi + \alpha\varkappa g^* = \zeta\varphi + \alpha\zeta g,$$

или

$$\overset{\circ}{U}\varphi - \zeta\varphi = \alpha(\zeta g - \varkappa g^*),$$

и, значит,

$$\frac{1}{\alpha}\varphi = \zeta(\overset{\circ}{U} - \zeta I)^{-1} g - \varkappa(\overset{\circ}{U} - \zeta I)^{-1} g^*. \tag{11}$$

Умножая скалярно обе части (11) на g, получаем уравнение, которому удовлетворяют собственные числа оператора $S_\varkappa$:

$$\zeta((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g, g) - \varkappa((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g^*, g) = 0. \tag{12}$$

Обращая ход выкладок, получим, что каждый корень уравнения (12) есть собственное число оператора $S_\varkappa$.

Так как левая часть уравнения (12) есть регулярная функция при $|\zeta| \neq 1$, то утверждение теоремы относительно предельных точек дискретного спектра оператора B доказано, за исключением случая, когда левая часть равенства (12) обращается тождественно в нуль при $|\zeta| < 1$.

В этом последнем случае любая точка ζ внутренности единичного круга есть собственное значение оператора $S_\varkappa$.

Покажем, что этот упомянутый в формулировке теоремы исключительный случай действительно может иметь место.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\tilde{U}$ — унитарный оператор, определенный формулами

$$\tilde{U}e_k = e_{k-1}.$$

Пусть, далее, $\tilde{V} \subset \tilde{U}$ и $D_{\tilde{V}} = H \ominus \{e_0\}$, а следовательно, $\Delta_{\tilde{V}} = H \ominus \{e_{-1}\}$.

Оператор $\tilde{V}$ изометрический с индексом дефекта (1, 1).

Пусть теперь S_0 — квазиунитарное расширение оператора $\tilde{V}$, определенное условием

$$S_0 e_0 = 0.$$

Легко проверить, что при любом ζ из круга $|\zeta| < 1$ вектор

$$\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k e_k$$

является собственным вектором оператора S_0, отвечающим числу ζ.

Ниже мы увидим, что этот исключительный случай является единственным в том смысле, что если некоторый простой симметрический оператор с индексами дефекта (1, 1) допускает квазисамосопряженное расширение с точечным спектром, заполняющим полуплоскость, то этот оператор изоморфен преобразованию Кэли оператора $\tilde{V}$.

Займемся теперь преобразованием уравнения (12).

Если $\mathring{F}_t$ — разложение единицы оператора $\mathring{U}$, то

$$2\zeta((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g, g) =$$

$$= 2\zeta\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{is}-\zeta} d(\mathring{F}_s g, g) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta} d(\mathring{F}_s g, g) - 1, \tag{13}$$

$$2\,((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g^*,\,g)=2\,((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}\mathring{U}g,\,g)=$$
$$=2\int_0^{2\pi}\frac{e^{is}}{e^{is}-\zeta}\,d\,(\mathring{F}_s g,\,g)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\,d\,(\mathring{F}_s g,\,g)+1. \qquad (14)$$

Из последней формулы следует, в частности, что скалярное произведение $((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g^*,\,g)$ не обращается в нуль при $|\zeta|<1$ и, следовательно, уравнение (12) можно представить в виде

$$w(\zeta)-\varkappa=0,$$

где

$$w(\zeta)=\frac{\zeta\,((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g,\,g)}{((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g^*,\,g)}\quad (g^*=\mathring{U}g). \qquad (15)$$

На основании формул (13) и (14) функцию $w(\zeta)$ можно представить в виде

$$w(\zeta)=\frac{\Phi(\zeta)-1}{\Phi(\zeta)+1}, \qquad (15a)$$

где

$$\Phi(\zeta)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\,d\,(\mathring{F}_s g,\,g). \qquad (15b)$$

Из этих представлений следует (n° 69), что функция $w(\zeta)$ регулярна в единичном круге, отображает его в свою часть и удовлетворяет условию нормировки $w(0)=0$.

Следуя М. С. Лившицу, мы будем называть функцию $w(\zeta)$ *характеристической функцией изометрического оператора* V, а функцию

$$\omega(\lambda)=w\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right) \qquad (15c)$$

— *характеристической функцией симметрического оператора* A.

Функция $\omega(\lambda)$ регулярна в верхней полуплоскости, отображает ее в часть единичного круга и удовлетворяет условию нормировки $\omega(i)=0$.

Чтобы оправдать приведенное определение, следует показать, что функция $w(\zeta)$ в существенном определяется оператором V, хотя по виду (см. формулу (15)) она зависит от выбора унитарного расширения $\mathring{U}$.

С этой целью выразим в формуле (15) оператор $\mathring{U}$ через его преобразование Кэли:

$$\mathring{U}=(\mathring{A}-iI)(\mathring{A}+iI)^{-1}.$$

После элементарной выкладки получаем для характеристической функции $\omega(\lambda)$ формулу

$$\omega(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda + i} \frac{(\{I + (\lambda - i) \mathring{R}_\lambda\} g, g^*)}{(\{I + (\lambda - i) \mathring{R}_\lambda\} g, g)}, \tag{16}$$

где $\mathring{R}_\lambda$ — резольвента оператора $\mathring{A}$.

В n° 106 было установлено (см. формулу (8)), что вектор

$$\{I + (\lambda - i) \mathring{R}_\lambda\} g$$

принадлежит дефектному подпространству $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, а так как в рассматриваемом случае оно одномерно, то при ином выборе расширения $\mathring{A}$ этот вектор умножится на скаляр, что не окажет влияния на $\omega(\lambda)$. Что касается вектора g^*, то он при этом умножится на число, равное по модулю единице.

Таким образом, характеристическая функция симметрического (изометрического) оператора определяется этим оператором с точностью до произвольной мультипликативной постоянной, равной по модулю единице. Две характеристические функции, отличающиеся друг от друга таким множителем, мы не будем считать различными.

Теперь формулу (16) можно записать в виде

$$\omega(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda + i} \frac{(g_\lambda, g^*)}{(g_\lambda, g)}, \tag{17}$$

где g_λ — произвольное решение уравнения

$$A^*h - \lambda h = 0.$$

Вычислим, например, характеристическую функцию оператора дифференцирования $\mathcal{P}$ на интервале $[0, a]$ при краевом условии

$$\varphi(0) = \varphi(a) = 0.$$

Для этого случая

$$g = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2a} - 1}} e^t, \quad g^* = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - e^{-2a}}} e^{-t}, \quad g_\lambda = e^{-i\lambda t}$$

и согласно формуле (17)

$$\omega(\lambda) = \frac{e^a - e^{-ia\lambda}}{1 - e^a e^{-ia\lambda}}. \tag{18}$$

Кроме функций $w(\zeta)$ и $\omega(\lambda)$, мы введем функции

$$w(\zeta; \varkappa) = \frac{w(\zeta) - \varkappa}{\bar\varkappa w(\zeta) - 1}, \quad \omega(\lambda; \varkappa) = \frac{\omega(\lambda) - \varkappa}{\bar\varkappa \omega(\lambda) - 1}$$

и будем их называть *характеристическими функциями* квазиунитарного расширения $S_\varkappa$ оператора V и соответственно квазисамосопряженного расширения $B_\varkappa$ оператора A.

Характеристические функции $w(\zeta;\varkappa)$ и $\omega(\lambda;\varkappa)$ нормированы условиями

$$w(0,\varkappa)=\varkappa,\quad \omega(i;\varkappa)=\varkappa.$$

С помощью характеристической функции $\omega(\lambda)$ определяется также ядро спектра оператора A, как показывает следующая

Теорема 2. *Для того чтобы вещественное число λ_0 было точкой регулярного типа простого симметрического оператора A с индексом дефекта* (1, 1), *необходимо и достаточно одновременное выполнение двух следующих условий:*

1°. *функция $\omega(\lambda)$ регулярна в окрестности λ_0,*

2°. *функция $\omega(\lambda)$ по модулю равна единице в некотором интервале $\lambda_0-\varepsilon<\lambda<\lambda_0+\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть λ_0 — точка регулярного типа оператора A и V — его преобразование Кэли.

Очевидно, существует самосопряженное расширение $\mathring{A}\supset A$, для которого точка λ_0 является регулярной, так как если два самосопряженных расширения $\mathring{A}_1$ и $\mathring{A}_2$ имеют общее собственное число λ_0, то

$$\mathring{A}_1f_1=\lambda_0f_1,\quad \mathring{A}_2f_2=\lambda_0f_2\quad (f_1,\ f_2\,\overline{\in}\,D_A),$$

откуда

$$A^*f_1=\lambda_0f_1,\quad A^*f_2=\lambda_0f_2$$

и, следовательно,

$$f_1=\alpha f_2,$$

так что

$$D_{\mathring{A}_1}=D_{\mathring{A}_2},$$

т. е.

$$\mathring{A}_1=\mathring{A}_2.$$

Если выбрать теперь в формуле (15) в качестве $\mathring{U}$ преобразование Кэли оператора $\mathring{A}$, то из формул (15a), (15b), (15c) будет вытекать, что функция $\omega(\lambda)$ обладает свойствами 1° и 2°.

Пусть, обратно, функция $\omega(\lambda)$ обладает свойствами 1° и 2°. Тогда, выбирая в формуле (15) расширение $\mathring{U}$ так, чтобы

$$w(\zeta_0)\neq 1\quad\left(\zeta_0=\frac{\lambda_0-i}{\lambda_0+i}\right),$$

получим, что функция

$$\Phi(\zeta)=\frac{1+w(\zeta)}{1-w(\zeta)}$$

регулярна в окрестности точки $\zeta_0 = e^{is_0}$, а также, что на некоторой дуге единичного круга, содержащей точку ζ_0, имеет место равенство $\Re\Phi(\zeta) = 0$.

Из этого после применения формулы обращения n° 69 к представлению (15b) следует, что s_0 есть точка постоянства функции $(\overset{\circ}{F}_s g, g)$, а так как вектор g является порождающим для оператора $\overset{\circ}{U}$ (см. n° 103), то ζ_0 — регулярная точка этого оператора (см. n° 83).

Таким образом, λ_0 есть регулярная точка оператора $\overset{\circ}{A}$ и, следовательно, не принадлежит ядру спектра оператора A.

Из доказанной теоремы 2 мы получаем следующее уточнение теоремы 1: *конечные предельные точки множества собственных значений любого квазисамосопряженного расширения $B_\varkappa$ заданного оператора A принадлежат (за исключением случая, упомянутого в теореме 1) ядру спектра оператора A.*

Если ζ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) — корни характеристической функции $w(\zeta; \varkappa)$ квазиунитарного расширения $S_\varkappa$ оператора V при $\varkappa \neq 0$, то $w(\zeta; \varkappa)$ можно представить в виде произведения Бляшке

$$\omega(\zeta; \varkappa) = e^{-G(\zeta)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k - \zeta}{1 - \bar{\zeta}_k \zeta} \frac{|\zeta_k|}{\zeta_k},$$

где $G(\zeta)$ — регулярная при $|\zeta| < 1$ функция с неотрицательной вещественной частью.

Представляя функцию $G(\zeta)$ в виде (n° 69)

$$G(\zeta) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is} + \zeta}{e^{is} - \zeta} d\rho(s) + i\beta,$$

где $\rho(s)$ — неубывающая функция ограниченного изменения, получаем

$$w(\zeta; \varkappa) = Ce^{\int_0^{2\pi} \frac{\zeta + e^{is}}{\zeta - e^{is}} d\rho(s)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{\zeta}{\zeta_k}}{1 - \bar{\zeta}_k \zeta} |\zeta_k| \quad (|C| = 1). \tag{19}$$

Из теорем 1 и 2 следует, что точечный спектр квазиунитарного расширения $S_\varkappa$ оператора V состоит из точек ζ_k, а остальная часть спектра состоит из точек роста функции $\rho(s)$ и предельных точек множества корней ζ_k*.

* Представление (19) послужило отправным пунктом для построения так называемых треугольных моделей некоторых классов несамосопряженных операторов (см. Лившиц М. С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов. — «Мат. сб.», 34 (76); 1, 1954, с. 145—198. См. также обзорную статью Бродского М. С. и Лившица М. С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. — УМН, 1958, XIII, вып. 1 (79), с. 3—85).

Если ядро спектра оператора A пусто, то собственные значения любого квазисамосопряженного расширения $B_\varkappa$ оператора A могут сгущаться лишь на бесконечности.

В частности, может случиться, что спектр некоторого квазисамосопряженного расширения оператора A есть пустое множество. Таким примером является квазисамосопряженное расширение оператора дифференцирования $\mathcal{P}$, определенное краевым условием

$$\varphi(0) = 0.$$

Ниже (см. теорему 4) мы увидим, что этот исключительный случай является единственным, если не рассматривать изоморфные операторы как различные.

Докажем общую теорему, показывающую, что характеристическая функция определяет оператор с точностью до изоморфизма.

Теорема 3. *Для того чтобы простые симметрические (изометрические) операторы с индексом дефекта* (1, 1) *были унитарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их характеристические функции совпадали.*

Доказательство. Приведем доказательство для изометрических операторов.

Пусть операторы V и $\tilde{V}$, действующие соответственно в пространствах H и $\tilde{\mathrm{H}}$, унитарно эквивалентны, т. е. пусть

$$\tilde{V} = \mathfrak{U} V \mathfrak{U}^{-1},$$

где $\mathfrak{U}$ — изометрический оператор, отображающий H на $\tilde{\mathrm{H}}$. Взяв некоторое унитарное расширение U оператора V, построим унитарное расширение $\tilde{U}$ оператора $\tilde{V}$ по формуле

$$\tilde{U} = \mathfrak{U} U \mathfrak{U}^{-1}.$$

Выберем, далее, в H вектор g, ортогональный к многообразию D_V ($\|g\| = 1$), и положим

$$\tilde{g} = \mathfrak{U} g.$$

При таком выборе вектора $\tilde{g}$ и оператора $\tilde{U}$ из формул

$$w(\zeta) = \frac{\zeta\,((U - \zeta I)^{-1} g, g)_{\mathrm{H}}}{((U - \zeta I)^{-1} U g, g)_{\mathrm{H}}}, \tag{20}$$

$$\tilde{w}(\zeta) = \frac{\zeta\,((\tilde{U} - \zeta \tilde{I})^{-1} \tilde{g}, \tilde{g})_{\tilde{\mathrm{H}}}}{((\tilde{U} - \zeta \tilde{I})^{-1} \tilde{U} \tilde{g}, \tilde{g})_{\tilde{\mathrm{H}}}}, \tag{21}$$

следует

$$\tilde{w}(\zeta) = w(\zeta).$$

Пусть, обратно, характеристические функции $\tilde{w}(\zeta)$ и $w(\zeta)$ операторов $\tilde{V}$ и V, определяемые формулами (20) и (21), совпадают. Полагая

$$\tilde{\Phi}(\zeta)=\frac{1+\tilde{w}(\zeta)}{1-\tilde{w}(\zeta)}, \quad \Phi(\zeta)=\frac{1+w(\zeta)}{1-w(\zeta)}$$

и применяя к представлениям функций $\tilde{\Phi}(\zeta)$ и $\Phi(\zeta)$ формулы обращения, получим

$$(\tilde{E}_t\tilde{g},\ \tilde{g})_{\tilde{\mathrm{H}}}=(E_tg,\ g)_{\mathrm{H}},$$

С другой стороны, из простоты операторов $\tilde{V}$ и V следует простота спектров их унитарных расширений $\tilde{U}$ и U; при этом дефектные векторы $\tilde{g}$ и g являются порождающими для $\tilde{U}$ и U (n° 103).

Таким образом, операторы $\tilde{U}$ и U приводятся к одной и той же канонической форме — к оператору умножения на e^{it} в пространстве L^2_σ с функцией распределения

$$\sigma(t)=(\tilde{E}_t\tilde{g},\ \tilde{g})_{\tilde{\mathrm{H}}}=(E_tg,\ g)_{\mathrm{H}}$$

(n° 83) и поэтому изоморфны.

Из изоморфизма операторов $\tilde{U}$ и U непосредственно следует изоморфизм операторов $\tilde{V}$ и V.

Теорема доказана*.

Следствие. Любой простой симметрический оператор с индексом дефекта (1, 1), допускающий квазисамосопряженное расширение с точечным спектром, заполняющим всю полуплоскость, изоморфен преобразованию Кэли оператора $\tilde{V}$, определенного на с. 108.

Действительно, характеристические функции таких операторов должны тождественно равняться нулю, так что все эти операторы изоморфны.

Приводимая ниже теорема дает любопытную абстрактную характеристику оператора дифференцирования на конечном интервале.

Теорема 4. *Любой простой симметрический оператор с индексом дефекта* (1, 1), *допускающий квазисамосопряженное расширение без спектра, изоморфен оператору дифференцирования на конечном интервале.*

Доказательство. Пусть A — оператор, обладающий свойством, указанным в формулировке теоремы, $B_\varkappa$ — его квазисамо-

---

* В связи с дальнейшими обобщениями понятия характеристической функции и формулировкой в ее терминах условий унитарной эквивалентности, кроме работ, названных в подстрочном примечании на с. 112, см. также Штраус А. В. Характеристические функции линейных операторов. — «Изв. АН СССР, сер. мат.», 24, 1960 с. 43—74. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969. Надь-Фояш, loc. cit., с. 90.

сопряженное расширение без спектра и $\omega(\lambda;\varkappa)$ — характеристическая функция оператора $B_\varkappa$.

Пусть, далее, V — преобразование Кэли оператора A и $w(\zeta;\varkappa)$ — характеристическая функция преобразования Кэли $S_\varkappa$ оператора $B_\varkappa$.

Так как оператор $B_\varkappa$ не имеет собственных значений, то функция $w(\zeta;\varkappa)$, отображающая единичный круг в свою часть, не имеет нулей, а поэтому представима в виде

$$w(\zeta;\varkappa)=e^{-G(\zeta)},$$

где функция $G(\zeta)$ регулярна в единичном круге и имеет там неотрицательную вещественную часть.

Заменяя ζ на

$$\frac{\lambda-i}{\lambda+i},$$

получаем

$$\omega(\lambda;\varkappa)=e^{iH(\lambda)},$$

где $H(\lambda)$ — функция, регулярная в верхней полуплоскости и отображающая ее в себя.

На основании n° 69 функция $H(\lambda)$ представима в виде

$$H(\lambda)=\alpha+\mu\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+t\lambda}{t-\lambda}\,d\sigma(t),$$

где число α вещественно, $\mu\geqslant 0$, а $\sigma(t)$ — неубывающая функция ограниченного изменения.

Так как, далее, ядро спектра оператора A пусто, то функция $H(\lambda)$ регулярна и вещественна на вещественной оси. Поэтому в силу формулы обращения Стилтьеса (n° 69)

$$\sigma(t)=\mathrm{const}$$

и

$$H(\lambda)=\alpha+\mu\lambda.$$

Таким образом, если отбросить постоянный множитель, равный по модулю единице, то

$$\omega(\lambda;\varkappa)=e^{i\mu\lambda},$$

откуда

$$\omega(\lambda)=\frac{\varkappa-\omega(\lambda;\varkappa)}{1-\bar{\varkappa}\omega(\lambda;\varkappa)}=\frac{\varkappa-e^{i\mu\lambda}}{1-\bar{\varkappa}e^{i\mu\lambda}},$$

а так как должно быть

$$\omega(i)=0,$$

то

$$\omega(\lambda)=\frac{e^{\mu}-e^{-i\mu\lambda}}{1-e^{\mu}e^{-i\mu\lambda}}.$$

Сравнивая полученную формулу с формулой (18), мы видим, что характеристическая функция оператора A совпадает с характеристической функцией оператора дифференцирования на интервале $[0, \mu]$ при нулевых условиях на концах.

Согласно теореме 3 оператор A унитарно эквивалентен оператору дифференцирования, что и требовалось доказать.

В связи с теоремой 3 возникает вопрос о существовании симметрического (изометрического) оператора с заданной характеристической функцией.

Для изометрических операторов этот вопрос решается в положительном смысле, а именно, имеет место

Теорема 5. *По любой заданной функции $w(\zeta)$, регулярной в единичном круге, отображающей его в себя, удовлетворяющей условию нормировки $w(0)=0$, можно построить изометрический оператор V, для которого $w(\zeta)$ является характеристической функцией.*

Доказательство. Введем функцию $\Phi(\zeta)$ равенством

$$w(\zeta)=\frac{\Phi(\zeta)-1}{\Phi(\zeta)+1}.$$

Согласно n° 69 функция $\Phi(\zeta)$ представима в виде

$$\Phi(\zeta)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\,d\sigma(s),$$

где $\sigma(s)$ — неубывающая функция с полным изменением, равным единице.

Построим пространство $L_\sigma^2(0, 2\pi)$ и в нем унитарный оператор умножения на e^{it}:

$$\overset{\circ}{U}f(t)=e^{it}f(t).$$

Пусть V — изометрический оператор, совпадающий с оператором $\overset{\circ}{U}$ на гиперплоскости D_V, ортогональной к функции $g(t)\equiv 1$.

Легко видеть, что оператор V и есть искомый.

Действительно, так как разложение единицы $\overset{\circ}{E}_t$ оператора $\overset{\circ}{U}$ определяется равенствами

$$\overset{\circ}{E}_t f(s)=\begin{cases} f(s) & (s\leqslant t),\\ 0 & (s>t),\end{cases}$$

то

$$((\overset{\circ}{U}-\zeta I)^{-1}g,\ g)=\int_0^{2\pi}\frac{d\sigma(s)}{e^{is}-\zeta},$$

$$((\overset{\circ}{U}-\zeta I)^{-1}\overset{\circ}{U}g,\ g)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{is}\,d\sigma(s)}{e^{is}-\zeta}$$

и

$$\frac{\zeta\,((\overset{\circ}{U}-\zeta I)^{-1}g,\ g)}{((\overset{\circ}{U}-\zeta I)\,\overset{\circ}{U}g,\ g)}=\frac{\Phi(\zeta)-1}{\Phi(\zeta)+1}=w(\zeta),$$

что и доказывает (см. формулу (15)) теорему.

Если для оператора V, построенного по заданной характеристической функции $w(\zeta)$, многообразие Δ_V (1) не плотно в H, то нельзя перейти от V к его преобразованию Кэли A, так что в этом случае не существует симметрического оператора, характеристическая функция которого равна

$$\omega(\lambda) = w\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right). \tag{22}$$

Для того чтобы многообразие Δ_V (1) было плотно в H, на функцию (22) необходимо наложить дополнительное ограничение.

Этот последний вопрос исчерпывает

Теорема 6. *Для того чтобы заданная функция $\omega(\lambda)$, регулярная в верхней полуплоскости, отображающая ее внутрь единичного круга и удовлетворяющая условию нормировки $\omega(i) = 0$, была характеристической функцией простого симметрического оператора с индексом дефекта* (1, 1), *необходимо и достаточно выполнение соотношения*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \{\omega(\lambda) - e^{i\alpha}\} = \infty \quad (0 < \varepsilon \leqslant \arg \lambda \leqslant \pi - \varepsilon)$$

при любом α $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ *и любом* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Покажем, что необходимым и достаточным условием для несовпадения замыкания многообразия Δ_V (1) с H является наличие унитарного расширения оператора V с собственным числом, равным единице.

Достаточность условия очевидна, так как если U — унитарное расширение оператора V и $U\psi = \psi$ $(\psi \neq 0)$, то при любом $\varphi \in D_V$

$$((V - I)\varphi, \psi) = ((U - I)\varphi, \psi) = (\varphi, (U^{-1} - I)\psi) = 0.$$

Для доказательства необходимости условия предположим, что при любом $\varphi \in D_V$

$$((V - I)\varphi, \psi) = 0 \quad (\|\psi\| = 1).$$

Представляя любой вектор $f \in$ H в виде $f = \varphi + \gamma g$, получаем для произвольного квазиунитарного расширения $S_\varkappa$ оператора V

$$((S_\varkappa - I)f, \psi) = (V\varphi - \varphi + \gamma\varkappa g^* - \gamma g, \psi) = \gamma\{\varkappa(g^*, \psi) - (g, \psi)\}. \tag{23}$$

Заметим, что $(g^*, \psi) \neq 0$, ибо в противном случае вектор ψ допускал бы представление $\psi = V\varphi_1$ $(\varphi_1 \in D_V, \|\varphi_1\| = 1)$, так что

$$((V - I)\varphi_1, V\varphi_1) = 0,$$

т. е.

$$(\varphi_1, V\varphi_1) = 1.$$

Но это равенство возможно лишь при $V\varphi_1 = \varphi_1$, что противоречит простоте оператора V.

Таким образом, $(g^*, \psi) \neq 0$, и мы вправе положить в (23)

$$\varkappa = \frac{(g, \psi)}{(g^*, \psi)},$$

после чего для любого $f \in$ H получаем

$$((S_\varkappa - I)f, \psi) = 0$$

или

$$(f, (S_\varkappa^* - I)\psi) = 0.$$

Так как $S_{\varkappa}^* = S_{\eta}^{-1}$, где $\eta = \bar{\varkappa}^{-1}$, то полученное равенство означает, что $S_{\eta}^{-1}\psi = \psi$, следовательно, $S_{\eta}\psi = \psi\ (\psi \neq 0)$, а это возможно лишь при $|\eta| = |\varkappa| = 1$, так что $S_{\varkappa} = S_{\eta}$ и есть искомое унитарное расширение оператора V, имеющее собственное значение, равное единице.

Теперь доказательство теоремы сведено к отысканию необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять характеристическая функция изометрического оператора V, чтобы ни одно из его унитарных расширений не имело собственного значения, равного единице.

Пусть $\mathring{U}$ — унитарное расширение оператора V, фигурирующее в формуле (15), а $U^{(\alpha)}$ — произвольное унитарное расширение того же оператора, так что $U^{(\alpha)}g = e^{i\alpha}g^*$. Так как дефектный элемент g является порождающим для каждого из операторов $U^{(\alpha)}$, то отсутствие у операторов $U^{(\alpha)}\ (0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ собственного значения, равного единице, эквивалентно отсутствию скачка при $t = 0$ у функции распределения $(F_t^{(\alpha)}, g, g)$, где $F_t^{(\alpha)}$ — спектральная функция оператора $U^{(\alpha)}\ (0 \leqslant \alpha < 2\pi)$.

С другой стороны, если $w_\alpha(\zeta)$ — характеристическая функция, построенная по формуле (15) с заменой $\mathring{U}$ на $U^{(\alpha)}$, то в силу формул (15c) и (17)

$$w_\alpha(\zeta) = e^{-i\alpha} w(\zeta),$$

а потому из (15a) и (15b) следует равенство

$$\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - w(\zeta)} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - \zeta}\, d(F_t^{(\alpha)}g, g).$$

Отсюда для величины σ скачка функции $(F_t^{(\alpha)}g, g)$ в точке $t = 0$ легко получить выражение

$$\sigma = \lim_{\zeta \to 1} \frac{(1 - \zeta)\, e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - w(\zeta)},$$

где $\zeta \to 1$ изнутри круга $|\zeta| < 1$ по любому некасательному направлению.

Пользуясь сделанными указаниями, уже легко закончить доказательство теоремы, что предоставляется читателю.

115. О треугольном разложении некоторых несамосопряженных операторов. По аналогии с характеристической функцией квазисамосопряженного расширения симметрического оператора с индексами дефекта (1,1) М. С. Лившиц построил характеристические матрицы-функции для широкого класса несамосопряженных операторов. Характер ограничений, накладываемых на эти операторы, заключается в том, что они в известном смысле должны мало отличаться от самосопряженных операторов. Так, например, в случае определенного всюду в H ограниченного оператора T требуется, чтобы его мнимая часть $\frac{1}{2i}(T - T^*)$ была вполне непрерывной. С помощью так называемой теоремы умножения для характеристических матриц-функций были получены (см. подстрочное примечание на с. 114) первые треугольные разложения для несамосопряженных операторов в H. Эти разложения представляют собой бесконечномерный аналог алгебраической теоремы Шура о приведении конечной матрицы к треугольному виду с помощью унитарного преобразования. Для некоторых классов несамосопряженных операторов треугольное разложение может быть выведено непосредственно из теоремы Неймана (см. n° 66) о существовании нетривиального инвариантного подпространства у любого вполне непрерывного оператора. В настоящем пункте мы, следуя М. С. Бродскому *, проведем такой вывод для *вольтерровых операторов*, т. е. для вполне непрерывных операторов с единственной точкой спектра $\lambda = 0$. Этот вывод фактически использует лишь результаты гл. V и понятие разложения единицы (n° 67).

Начнем с конечномерного случая. Пусть T есть вольтерров оператор в евклидовом пространстве E. Тогда по теореме Шура существует такой ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ пространства E, что

$$\left.\begin{aligned} &Te_1 = 0, \\ &Te_k = t_{k,1}e_1 + t_{k,2}e_2 + \cdots + t_{k,k-1}e_{k-1} \quad (k > 1) \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Если P_k есть ортопроектор на одномерное подпространство, содержащее e_k, то

$$\begin{aligned} &P_kTP_j = 0 \quad (k \geqslant j), \\ &P_kT^*P_j = 0 \quad (k \leqslant j), \end{aligned}$$

так что

$$T = \sum_{j,\,k=1}^{n} P_kTP_j = \sum_{j=2}^{n} \sum_{1\leqslant k<j} P_kTP_j = 2i \sum_{j=2}^{n} \sum_{1\leqslant k<j} P_k \frac{T-T^*}{2i} P_j. \tag{2}$$

Введем теперь множество $\mathscr{M}$, состоящее из $(n+1)$ точек $0 = \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_n = 1$, и зададим на $\mathscr{M}$ операторную функцию $E(\mu)$, полагая

$$E_0 = 0, \; E(\mu_k) = P_1 + P_2 + \cdots + P_k \;\; (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда равенство (2) можно представить в виде

$$T = 2i \int\limits_{\mathscr{M}} E(\mu)\, K\, dE(\mu), \tag{3}$$

где

$$K = \frac{1}{2i}(T - T^*). \tag{4}$$

---

* Бродский М. С. О треугольном представлении вполне непрерывных операторов с одной точкой спектра.—УМН, т. XVI, вып. 1 (97), 1961, с. 135—141. Более полное изложение и дальнейшее развитие см. в книге Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее применения. М., «Наука», 1967.

Целью всего дальнейшего изложения является обобщение треугольного спектрального разложения (3) на произвольные вольтерровы операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H. При этом мы будем опираться на следующее определение интеграла от операторных функций. Пусть $\mathcal{M}$ есть произвольное замкнутое множество точек отрезка $[0, 1]$, содержащее его концы. Совокупность принадлежащих $\mathcal{M}$ чисел $0 = \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_m = 1$ назовем δ-разбиением множества $\mathcal{M}$, если точки μ_{k-1} и μ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) либо являются концами дополнительного для $\mathcal{M}$ интервала, либо удовлетворяют условию $\mu_k - \mu_{k-1} < \delta$. Если на $\mathcal{M}$ заданы оператор-функции $F(\mu)$ и $G(\mu)$, то под интегралом

$$\int\limits_{\mathcal{M}} E(\mu)\, dG(\mu)$$

будем понимать предел при $\delta \to 0$ интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^{m} F(\xi_k)\{G(\mu_k) - G(\mu_{k-1})\},$$

$$(\mu_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant \mu_k, \quad \xi_k \in \mathcal{M})$$

в смысле операторной нормы, если этот предел существует.

Теперь мы несколько специализируем понятие ортогонального разложения единицы $E(\mu)$, относя его не ко всему отрезку $[0, 1]$, а лишь к множеству $\mathcal{M}$. Таким образом, мы будем считать функцию $E(\mu)$ определенной лишь на $\mathcal{M}$, так что $E(\mu') < E(\mu'')$ при $\mu' < \mu''$ ($\mu', \mu'' \in \mathcal{M}$), $E(0) = 0$, $E(1) = I$. Кроме того, будем предполагать функцию $E(\mu)$ непрерывной на $\mathcal{M}$ и еще удовлетворяющей следующему *условию* A: если (α, β) есть дополнительный интервал множества $\mathcal{M}$, то $E(\beta) - E(\alpha)$ есть одномерный оператор. Если оператор-функция $E(\mu)$, обладающая всеми указанными свойствами, такова, что при любом $\mu \in \mathcal{M}$ подпространство $E(\mu)$ H инвариантно относительно вольтеррова оператора T, то мы будем называть $E(\mu)$ *спектральной функцией* этого оператора. Следует обратить внимание на то, что здесь μ не является спектральной переменной, как это было в случае ортогональных спектральных функций самосопряженных операторов. Спектр вольтеррова оператора состоит из одной лишь нулевой точки, а переменная μ играет роль, аналогичную роли индекса k в формулах (1).

Покажем, что *любой вольтерров оператор* T *в* H *обладает спектральной функцией.*

Будем называть некоторую совокупность $\mathfrak{G}$ инвариантных подпространств G оператора T *цепочкой*, если выполнены следующие условия: 1) если $G_1 \in \mathfrak{G}$ и $G_2 \in \mathfrak{G}$, то либо $G_1 \subset G_2$, либо $G_2 \subset G_1$, 2) нулевое подпространство и все H принадлежат $\mathfrak{G}$.

Множество всех цепочек $\Gamma\{T\}$, принадлежащих оператору T, можно частично упорядочить, если считать $\mathfrak{G}' < \mathfrak{G}''$, когда каждое инвариантное подпространство G из $\mathfrak{G}'$ принадлежит также $\mathfrak{G}''$. Цепочку $\mathfrak{G}$ назовем *максимальной*, если она следует за любой сравнимой с ней цепочкой из $\Gamma\{T\}$. Если γ есть некоторая монотонно возрастающая последовательность цепочек из $\Gamma\{T\}$, то теоретико-множественная сумма всех инвариантных подпространств из этих цепочек является, очевидно, максимальной относительно совокупности γ и также принадлежит $\Gamma\{T\}$. В силу известной леммы Цорна каждая цепочка из $\Gamma\{T\}$ содержится в некоторой максимальной цепочке, принадлежащей $\Gamma\{T\}$.

Пусть теперь $\mathfrak{G}$ есть некоторая максимальная цепочка из $\Gamma\{T\}$ и $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — какой-нибудь ортонормированный базис пространства H. Назовем *весом* любого подпространства $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ число

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \| Pg_k \|^2, \tag{5}$$

где P есть ортопроектор на F. Очевидно, различные подпространства из H, принадлежащие одной и той же цепочке, не могут иметь одинаковый вес. Обозначим через $\mathcal{M}$ совокупность весов всех подпространств некоторой максимальной цепочки $\mathfrak{G}$, а через $E(\mu)$ — ортопроектор на подпространство из $\mathfrak{G}$, вес которого равен μ. Легко проверить, что множество $\mathcal{M}$ замкнуто, а оператор-функция $E(\mu)$ обладает всеми свойствами спектральной функции оператора T, за исключением, быть может, свойства A. Проверка этого последнего свойства основана на теореме Неймана из n°65.

Предположим, что условие A не выполняется. Это означает, что для некоторого дополнительного интервала (α, β) множества $\mathcal{M}$ будет $\dim\{\mathrm{G}_\beta \ominus \mathrm{G}_\alpha\} > 1$, где G_α и G_β — подпространства, на которые проектируют $E(\alpha)$ и $E(\beta)$. В силу теоремы 1 n°65° оператор PTP, где $P = E(\beta) - E(\alpha)$, имеет в $\mathrm{G}_\beta \ominus \mathrm{G}_\alpha$ инвариантное подпространство F ($\mathrm{F} \neq \{0\}$, $\mathrm{F} \neq \mathrm{G}_\beta \ominus \mathrm{G}_\alpha$). Но тогда подпространство $\mathrm{G}_\alpha \oplus \mathrm{F}$ инвариантно относительно T и заключено строго между G_α и G_β, что противоречит максимальности цепочки $\mathfrak{G}$. Итак, $E(\mu)$ является спектральной функцией оператора T.

Максимальную цепочку $\mathfrak{G} \in \Gamma\{T\}$, для которой по формуле (5) введены веса входящих в ее состав подпространств, построено множество $\mathcal{M}$ и определена спектральная функция $E(\mu)$ ($\mu \in \mathcal{M}$), назовем *нормированной максимальной цепочкой*.

Лемма. *Для любого дополнительного интервала* (α, β) *множества* $\mathcal{M}$, *построенного для нормированной максимальной цепочки* $\mathfrak{G} \in \Gamma\{T\}$,

$$[E(\beta) - E(\alpha)]\, T\, [E(\beta) - E(\alpha)] = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Подпространство $\mathfrak{G}_\alpha$ инвариантно относительно части T_β оператора T в $\mathfrak{G}_\beta$. Поэтому одномерное подпространство $\mathfrak{G}_\beta \ominus \mathfrak{G}_\alpha$ инвариантно относительно оператора T_β^*. Но так как вместе с T вольтерровым является оператор T_β, а следовательно, и T_β^*, то $\mathfrak{G}_\beta \ominus \mathfrak{G}_\alpha$ есть нулевое подпространство оператора T_β^*. Поэтому многообразие Δ_{T_β} значений оператора T_β ортогонально к $\mathfrak{G}_\beta \ominus \mathfrak{G}_\alpha$, откуда и вытекает соотношение (6).

Теперь мы можем перейти к теореме М. С. Бродского, являющейся конечной целью этого пункта.

Теорема. *Любой вольтерров оператор T допускает треугольное представление*

$$T = 2i \int_{\mathcal{M}} E(\mu)\, K\, dE(\mu), \tag{7}$$

где K — его мнимая часть (4), *а $E(\mu)$ — его произвольная спектральная функция. Интегральные суммы интеграла* (7) *сходятся к оператору T равномерно.*

Доказательство. Пусть $0 = \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_m = 1$ есть некоторое δ-разбиение множества $\mathcal{M}$. Вводя обозначение $\Delta E(\mu_k) = E(\mu_k) - E(\mu_{k-1})$ и замечая, что $\Delta E(\mu_k)\, T \Delta E(\mu_j) = 0$ при $k > j$, получаем

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j,\, k=1}^{m} \Delta E(\mu_k)\, T \Delta E(\mu_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{1 \leqslant k \leqslant j} \Delta E(\mu_k)\, T \Delta E(\mu_j) = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \Delta E(\mu_k)\, T \Delta E(\mu_k) + 2i \sum_{j=2}^{m} \sum_{1 \leqslant k < j} \Delta E(\mu_k)\, K \Delta E(\mu_j) = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \Delta E(\mu_k)\, T \Delta E(\mu_k) + 2i \sum_{j=1}^{m} E(\mu_{j-1})\, K \Delta E(\mu_j). \end{aligned}$$

Поэтому, если $\mu_{j-1} \leqslant \xi_j \leqslant \mu_j$, то

$$\begin{aligned} &\| T - 2i \sum_{j=1}^{m} E(\xi_j)\, K \Delta F(\mu_j) \| \leqslant \\ &\leqslant \| T - 2i \sum_{j=1}^{m} E(\mu_{j-1})\, K \Delta E(\mu_j) \| + 2 \| \sum_{j=1}^{m} E(\mu_{j-1})\, K \Delta E(\mu_j) - \\ &- \sum_{j=1}^{m} E(\xi_j)\, K \Delta E(\mu_j) \| \leqslant \| \sum_{k=1}^{m} \Delta E(\mu_k)\, T \Delta E(\mu_k) \| + \\ &+ 2 \| \sum_{j=1}^{m} \Delta E(\mu_j)\, K \Delta E(\mu_j) \| \leqslant 3 \| \sum_{k=1}^{m} \Delta E(\mu_k)\, T \Delta E(\mu_k) \|. \end{aligned}$$

Теперь остается доказать, что при $\delta \to 0$ стремится к нулю норма оператора

$$S_\delta = \sum_{k=1}^{m} \Delta E(\mu_k) T \Delta E(\mu_k). \tag{8}$$

Рассмотрим отдельно операторы $\frac{1}{2i}(S_\delta - S_\delta^*)$ и $\frac{1}{2}(S_\delta + S_\delta^*)$. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис собственных векторов оператора K в его области значений, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$—соответствующая последовательность собственных значений. Тогда для любого $f \in H$

$$\left|\left(\frac{1}{2i}[S_\delta - S_\delta^*]f,\ f\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} (\Delta E(\mu_k) K \Delta E(\mu_k) f,\ f)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} |(\Delta E(\mu_k) f,\ e_j)|^2 \cdot |\lambda_j| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \|\Delta E(\mu_k) f\|^2 \, \|\Delta E(\mu_k) e_j\|^2 \times$$

$$\times |\lambda_j| + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=n+1}^{\infty} |(\Delta E(\mu_k) f,\ e_j)|^2 \cdot |\lambda_j| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|^2 \left\{\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \max_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \|\Delta E(\mu_k) e_j\|^2 + \max_{j > n} |\lambda_j|\right\}.$$

Здесь второе слагаемое в фигурных скобках можно сделать сколь угодно малым за счет выбора n. В первом же слагаемом следует учитывать лишь те значения индекса k, для которых $\mu_k - \mu_{k-1} < \delta$, так как для остальных значений k соответствующее слагаемое в (8) выпадает в силу (6). Поэтому, используя равномерную непрерывность функций $E(\mu) e_j$ на замкнутом множестве $\mathscr{M}$, можно и первое слагаемое в фигурных скобках также сделать сколь угодно малым, если при фиксированном n уменьшать δ. Таким образом, $\lim\limits_{\delta \to 0} \|S_\delta - S_\delta^*\| = 0$ и совершенно аналогично $\lim\limits_{\delta \to 0} \|S_\delta + S_\delta^*\| = 0$. Тем самым теорема доказана полностью.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

116. Определения и вспомогательные факты. Среди линейных интегральных операторов простейшими являются операторы Гильберта — Шмидта (см. n° 32). Ядра $K(s, t)$ этих операторов характеризуются неравенством

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int |K(s, t)|^2 ds\, dt < \infty.$$

В классических работах Гильберта* изучен также более общий случай, когда для любой функции $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} ds \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt \right|^2 \leqslant M^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt,$$

где M — некоторая константа. В этом случае ядро $K(s, t)$ порождает ограниченный интегральный оператор.

Еще более общим является тот случай, когда предполагается лишь, что для почти всех $s \in (-\infty, \infty)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 dt < \infty.$$

Изучение интегральных операторов с симметрическими ядрами, удовлетворяющими этому условию, является предметом настоящего добавления. Теория таких операторов, а также и операторов с ядрами более общего характера, принадлежит Карлеману**.

---

* См. H i l b e r t. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Berlin, 1912.

** Построение этой теории относится к 1920—1923 годам. Первое систематическое изложение дано в книге: C a r l e m a n T. Sur les équations intégrales singulières, Uppsala, 1923. Несколько отличное от первоначального изложение дано в монографии. S t o n e M. Linear Transformations in Hilbert Space. New-York, 1932.

В нашем изложении мы в основном следуем статье: А х и е з е р Н. И. Интегральные операторы с ядрами Карлемана.—УМН, т. II, вып. 5 (21), 1947.

Во всем дальнейшем мы будем иметь дело с пространством L^2 функций на всей числовой оси, хотя теория остается в силе и для функций от многих переменных, а также в случае, когда вместо всего (одно- или многомерного) евклидова пространства взято принадлежащее ему произвольное измеримое в смысле Лебега точечное множество положительной меры.

Определение. *Ядром Карлемана* называется всякая измеримая (комплекснозначная) функция $K(s, t)$ $(-\infty < {s \atop t} < \infty)$, для которой

a) почти всюду в плоскости s, t

$$\overline{K(s, t)} = K(t, s),$$

b) почти всюду на оси s

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 dt < \infty.$$

Положим

$$K(s) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 dt}, \qquad (1)$$

если правая часть конечна, и

$$K(s) = 0$$

в противном случае.

Заметим прежде всего что почти всюду

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t, s)|^2 dt = K^2(s). \qquad (2)$$

Действительно, в силу условия a) имеем

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |K(s, t) - \overline{K(t, s)}|^2 ds\, dt = 0,$$

а отсюда по теореме Фубини следует, что при почти всех s

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t) - \overline{K(t, s)}|^2 dt = 0.$$

Но это означает, что при почти всех s

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t, s)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 dt$$

и (2) доказано.

Теперь введем интегральный оператор, порождаемый ядром Карлемана. Если $f(t) \in L^2$, то для почти всех s существует

$$h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt, \tag{3}$$

однако функция $h(s)$ может и не принадлежать L^2. Поэтому выделим прежде всего множество D^* всех тех функций $f(t) \in L^2$, для которых $h(s) \in L^2$. На этом множестве формула (3) определяет линейный оператор, который мы обозначим A^*. Всякий другой интегральный оператор в пространстве L^2 с ядром $K(s, t)$ будет частью оператора A^*.

Один такой оператор мы теперь определим. Предварительно условимся об одном обозначении, а именно: если $P(s)$ $(-\infty < s < \infty)$ — фиксированная, измеримая, вещественная, неотрицательная функция, то под $[L^2]_P$ мы будем понимать совокупность всех функций $\varphi(s) \in L^2(-\infty, \infty)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(s) \,|\, \varphi(s) \,|\, ds < \infty.$$

Условимся левую часть этого неравенства обозначать символом $\|\varphi\|_P$.

Докажем теперь, что $[L^2]_K \subseteq D^*$, где $K(s)$ определена почти всюду формулой (1). В самом деле, пусть $f(t) \in [L^2]_K$, т. е. $f(t) \in L^2$, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s) \,|\, f(s) \,|\, ds < \infty.$$

Мы должны доказать, что в таком случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt \right|^2 < \infty.$$

Но это следует из теоремы Фубини, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, K(s, u) \overline{K(s, v)} f(u) \overline{f(v)} \,|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant |\, f(u) \,| \cdot |\, f(v) \,| \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\, K(s, u) \,|^2 ds} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\, K(s, v) \,|^2 ds} =$$

$$= K(u) K(v) \,|\, f(u) \,| \cdot |\, f(v) \,| \tag{4}$$

почти всюду в плоскости u, v, а с другой стороны,

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} K(u)\,K(v)\,|f(u)|\cdot|f(v)|\,du\,dv=\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(u)\,|f(u)|\,du\right\}^2<\infty.$$

Теперь определим оператор A_0 с областью $D_{A_0}=[L^2]_K$, полагая

$$A_0 f=A^*f \quad (f\in D_{A_0}).$$

Отметим, что область D_{A_0} плотна в L^2. Это утверждение является следствием приводимой ниже леммы.

Отметим также, что в силу (4)

$$\|A_0 f\|\leqslant\|f\|_K. \tag{5}$$

Лемма. *Пусть измеримая функция $P(s)\geqslant 0$ $(-\infty<s<\infty)$ почти всюду конечна, а функция $h(s)$ измерима и такова, что*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\,h(s)\,ds=0$$

для любой функции $f(s)\in[L^2]_P$. Тогда почти всюду

$$h(s)=0. \tag{6}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $h(s)$ может обращаться в бесконечность лишь на множестве меры нуль. Далее, обозначим через $e(a)$ множество всех s, для которых

$$P(s)\leqslant a,\quad |h(s)|\leqslant a,$$

и пусть e — произвольное подмножество множества $e(a)$, имеющее конечную меру. Его характеристическая функция $\chi_e(s)$, очевидно, принадлежит $[L^2]_P$. Поэтому

$$\int\limits_e h(s)\,ds=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi_e(s)\,h(s)\,ds=0.$$

Так как e произвольно, то равенство (6) верно почти всюду в $e(a)$, а в силу произвольности a оно верно почти всюду на всей оси.

Следствие. *Множество $[L^2]_P$ плотно в L^2.*

Теорема. *Оператор A_0 симметричен, а оператор A^* является для A_0 сопряженным оператором.*

Доказательство. Пусть $f(t) \in D_{A_0}$, $g(t) \in L^2$. В таком случае почти всюду

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)| \cdot |f(t)\overline{g(s)}|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant |f(t)| \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 ds} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|^2 ds} = K(t) \cdot |f(t)| \cdot \|g\|.$$

Поэтому

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)| \cdot |f(t)\overline{g(s)}|\, ds\, dt \leqslant \|f\|_K \|g\|,$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt\right\} \overline{g(s)}\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(t, s)}\, \overline{g(s)}\, ds. \tag{7}$$

Если предположить, что не только $f(t)$, но и $g(t) \in D_{A_0}$, то полученное соотношение запишется в виде

$$(A_0 f, g) = (f, A_0 g),$$

т. е. первое утверждение доказано

Докажем второе утверждение. Заметим прежде всего, что при $f(t) \in D_{A_0}$ и $g(t) \in D^*$ соотношение (7) можно представить в виде

$$(A_0 f, g) = (f, g^*),$$

где

$$g^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s)\, g(s)\, ds$$

есть какой-то элемент пространства L^2. Отсюда следует, что $g(t) \in D_{A_0^*}$ и, значит, доказано включение $D^* \subseteq D_{A_0^*}$.

Теперь нужно доказать обратное включение. Для этого примем, что $g(t) \in D_{A_0^*}$. Это значит, что существует функция $g^*(t) \in L^2$, для которой при любом $f \in D_{A_0}$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt\right\} \overline{g(s)}\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \overline{g^*(t)}\, dt.$$

В силу (7) это можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K(t,\ s)}\,\overline{g(s)}\,ds-\overline{g^*(t)}\right\}=0.$$

Отсюда следует, в силу леммы, что почти всюду

$$g^*(t)=\int_{-\infty}^{\infty} K(t,\ s)\,g(s)\,ds,$$

а так как функция $g^*(t)$ принадлежит L^2, то $g(s)\in D^*$ и $A^*g=g^*(t)$. Таким образом, мы доказали, что $D^*\supseteq D_{A_0^*}$. Тем самым доказано, что $D^*=D_{A_0^*}$, а вместе с тем доказана теорема.

Определение. *Интегральным оператором Карлемана* с ядром $K(s,\ t)$ называют оператор $A=A_0^{**}$, т. е. замыкание оператора A_0.

Мы сохраним обозначение D^* для D_{A^*} и, кроме того, будем писать D вместо D_A.

Следуя Карлеману, назовем $K(s,\ t)$ *ядром первого рода*, если A — оператор самосопряженный, и *ядром второго рода* — в противном случае.

117. Пример. Обозначим через $\{\psi_n(s)\}_0^\infty$ ортонормированную последовательность функций Хаара для интервала $[0,\ 1]$. Эти функции определяются следующим образом:

$$\psi_0(s)=1 \qquad (0\leqslant s\leqslant 1),$$

$$\psi_1(s)=\begin{cases} -1 & \left(0\leqslant s<\frac{1}{2}\right),\\ 1 & \left(\frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\right),\end{cases}$$

$$\psi_n(s)=\begin{cases} 0 & \left(0\leqslant s<1-\frac{1}{2^{n-1}}\right),\\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant s<1-\frac{1}{2^n}\right),\\ 2^{\frac{n-1}{2}} & \left(1-\frac{1}{2^n}\leqslant s\leqslant 1\right)\end{cases}$$

$$(n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Так как для всякого $s\in[0,\ 1)$ существует такое p_s, что $\psi_p(s)=0$ при $p\geqslant p_s$, то ряды

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p\psi_p(s),\qquad \sum_{p=0}^{\infty} c_p\psi_p^2(s)$$

сходятся абсолютно в интервале $0 \leqslant s < 1$, каковы бы ни были коэффициенты c_p.

Лемма 1. Чтобы сумма

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p \psi_p(s) = \theta(s)$$

равнялась нулю почти всюду в интервале $0 \leqslant s < 1$, *необходимо и достаточно выполнение всех равенств*

$$c_p = 2^{\frac{p-1}{2}} c_0 \quad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Доказательство. Представим интервал $0 \leqslant s < 1$ в виде суммы интервалов

$$(d_n) \quad 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant s < 1 - \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как в интервале (d_1)

$$\theta(s) = c_0 - c_1$$

и в интервале (d_n) $(n \geqslant 2)$

$$\theta(s) = c_0 + c_1 + 2^{\frac{1}{2}} c_2 + 2^{\frac{2}{2}} c_3 + \cdots + 2^{\frac{n-2}{2}} c_{n-1} - 2^{\frac{n-1}{2}} c_n,$$

то, чтобы функция $\theta(s)$ равнялась нулю, по крайней мере, в одной точке каждого из интервалов (d_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, необходимо выполнение всех равенств

$$c_0 - c_1 = 0,$$
$$c_0 + c_1 + 2^{\frac{1}{2}} c_2 + 2^{\frac{2}{2}} c_3 + \cdots + 2^{\frac{n-2}{2}} c_{n-1} - 2^{\frac{n-1}{2}} c_n = 0$$
$$(n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Если все эти равенства выполнены, то функция $\theta(s)$ равна нулю всюду в интервале $0 \leqslant s < 1$. Отсюда и вытекает утверждение леммы 1.

Ниже нам понадобятся функции

$$\varkappa_n(s) = \psi_0(s) + \psi_1(s) + 2^{\frac{1}{2}} \psi_2(s) + \cdots + 2^{\frac{n-2}{2}} \psi_{n-1}(s) - 2^{\frac{n-1}{2}} \psi_n(s)$$
$$(n = 2, 3, \ldots)$$

и

$$\varkappa_1(s) = \psi_0(s) - \psi_1(s).$$

Нетрудно видеть, используя доказательство леммы 1, что

$$\varkappa_n(s) = \begin{cases} 0 & \left(0 \leqslant s < 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right), \\ 2^n & \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant s < 1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (n = 2,\ 3, \ldots), \\ 0 & \left(1 - \frac{1}{2^n} \leqslant s < 1\right) \end{cases}$$

и

$$\varkappa_1(s) = \begin{cases} 2 & \left(0 \leqslant s < \frac{1}{2}\right), \\ 0 & \left(\frac{1}{2} \leqslant s < 1\right). \end{cases}$$

Таким образом, функция $\varkappa_n(s)$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$ имеет постоянное, отличное от нуля значение в интервале (d_n) и равна нулю вне этого интервала.

Лемма 2. *Всякую функцию $\varphi(s) \in L^2(0,\ 1)$ можно представить в виде сходящегося ряда*

$$\varphi(s) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p \psi_p(s) + \omega(s),$$

где

$$\omega(s) \in L^2(0,\ 1), \quad \sum_{p=0}^{\infty} |c_p|^2 < \infty,$$

$$c_p = \int_0^1 \varphi(s)\, \psi_p(s)\, ds \quad (p = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

и

$$\int_0^1 \omega(s)\, \psi_p(s)\, ds = 0 \quad (p = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Доказательство. Последовательность частичных сумм

$$\theta_n(s) = \sum_{p=0}^{n} c_p \psi_p(s)$$

сходится в метрике $L^2(0,\ 1)$ к некоторой функции $\theta(s) \in L^2$. Поэтому (см. n° 11) существует некоторая подпоследовательность $\{\theta_{n_k}(s)\}_{k=1}^{\infty}$, которая сходится к $\theta(s)$ почти всюду. А так как ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p \psi_p(s) \quad (0 \leqslant s < 1)$$

сходится всюду, то его сумма почти всюду равна $\theta(s)$, и для доказательства леммы остается заметить, что

$$\int_0^1 \theta(s)\,\psi_p(s)\,ds = c_p \quad (p = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Теперь рассмотрим функцию

$$K(s,\ t) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \psi_p(s)\,\psi_p(t) \quad \left(0 \leqslant {s \atop t} < 1\right), \tag{1}$$

где a_p — вещественные числа. Легко видеть, что это — вещественное ядро Карлемана, причем

$$K^2(s) = \int_0^1 [K(s,\ t)]^2\,dt = \sum_{p=0}^{\infty} a_p^2 \psi_p^2(s). \tag{2}$$

Свойства ядра $K(s,\ t)$, естественно, зависят от того, как выбраны числа a_p.

Покажем в первую очередь, что $K(s,\ t)$ будет в том и только в том случае ядром Гильберта — Шмидта, когда ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p^2 \tag{3}$$

сходится.

Действительно, по теореме о почленном интегрировании ряда с неотрицательными членами имеем в силу (2):

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(s,\ t)]^2\,ds\,dt = \sum_{p=0}^{\infty} a_p^2,$$

где левая и правая части конечны или бесконечны одновременно, откуда и вытекает наше утверждение.

Так как ядра Гильберта — Шмидта здесь интереса не представляют, то примем, что ряд (3) расходится, и рассмотрим следующую альтернативу:

$$(\mathscr{D}) \qquad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{p-1}}{1 + a_p^2} = \infty$$

и

$$(\mathscr{C}) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{p-1}}{1 + a_p^2} < \infty.$$

Покажем, что в случае $(\mathcal{D})$ $K(s, t)$ является ядром первого рода, а в случае $(\mathcal{C})$ ядром второго рода.

Род ядра зависит от индекса дефекта интегрального оператора A, порождаемого ядром $K(s, t)$. Дефектные числа здесь одинаковы, так как ядро $K(s, t)$ вещественно. Для их нахождения мы должны искать собственные функции оператора A^*, отвечающие произвольно взятому невещественному числу λ, скажем, $\lambda = i$. Искомую собственную функцию на основании леммы 2 можно представить в виде

$$\varphi(s) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p \psi_p(s) + \omega(s),$$

где числа c_p и функция $\omega(s)$ должны удовлетворять всем условиям леммы 2. Кроме того, функция $\varphi(s)$ должна удовлетворять уравнению

$$A^*\varphi = i\varphi. \tag{4}$$

Возьмем интервал (d_n). В нем почти всюду левая часть уравнения (4) равна

$$A^*\varphi = \sum_{p=0}^{n} a_p \psi_p(s) \int_0^1 \varphi(t)\,\psi_p(t)\,dt = \sum_{p=0}^{n} a_p c_p \psi_p(s),$$

а правая часть равна

$$i\left\{\sum_{p=0}^{n} c_p \psi_p(c) + \omega(s)\right\}.$$

Таким образом, почти всюду в интервале (d_n)

$$\omega(s) = -\sum_{p=0}^{n} (1 + ia_p)\, c_p \psi_p(s).$$

Это равенство показывает, что $\omega(s)$ в каждом интервале (d_n) постоянна. Пусть

$$\omega(s) = \gamma_n, \; s \in (d_n), \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Так как $\omega(s)$ ортогональна ко всем функциям $\psi_p(s)$, то, припоминая свойство функций $\varkappa_n(s)$, находим, что

$$0 = \int_0^1 \omega(s)\,\varkappa_n(s)\,ds = \int_{(d_n)} \omega(s)\,\varkappa_n(s)\,ds = \gamma_n \cdot 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \gamma_n$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Как видим, функция $\omega(s)$ должна равняться нулю, а коэффициенты c_p должны быть такими, чтобы всюду в интервале $0 \leqslant s < 1$

$$\sum_{p=0}^{\infty} (1 + ia_p)\, c_p \psi_p(s) = 0.$$

На основании леммы 1 это равенство имеет место в том и только том случае, когда*

$$(1 + ia_p)\, c_p = 2^{\frac{p-1}{2}} (1 + ia_0)\, c_0 \quad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

и, значит,

$$|c_p|^2 = |c_0|^2 (1 + a_0^2) \frac{2^{p-1}}{1 + a_p^2} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Полученные формулы показывают, что в случае $(\mathscr{D})$ точка i не является собственным значением оператора A^*, а в случае $(\mathscr{C})$ она будет его собственным значением и притом кратности 1. Тем самым наше утверждение доказано, причем мы показали, что в случае $(\mathscr{C})$ индекс дефекта оператора A есть $(1, 1)$.

118. Спектральные функции интегрального оператора с ядром Карлемана. Пусть A — интегральный оператор с ядром Карлемана $K(s, t)$, а E_λ $(-\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty)$ — какая-нибудь из принадлежащих этому оператору спектральных функций. Положим

$$F_\lambda = \begin{cases} E_\lambda & (\lambda < 0), \\ 0 & (\lambda = 0), \\ E_\lambda - I & (\lambda > 0), \end{cases}$$

так что $F_\lambda \operatorname{sign} \lambda$ есть отрицательный самосопряженный оператор с нижней гранью $\geqslant -1$. Из этих свойств оператора F_λ следует, что оператор $F_\lambda^2 + F_\lambda \operatorname{sign} \lambda$ отрицателен. Поэтому при любом $f \in \mathrm{L}^2$ имеет место неравенство

$$(F_\lambda f,\ F_\lambda f) \leqslant |(F_\lambda f, f)|. \tag{1}$$

Нам понадобится также неравенство

$$|(F_\lambda f,\ f)| \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \|f\|_K^2, \tag{2}$$

верное при любом $f \in [\mathrm{L}^2]_K$. Докажем его, например, при $\lambda > 0$. С этой целью достаточно заметить, что для любого $f \in [\mathrm{L}^2]_K = \mathrm{D}_{A_0}$

$$(A_0 f,\ A_0 f) = (Af,\ Af) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2\, d(E_\mu f, f) \geqslant \lambda^2 \int_{\lambda}^{\infty} d(E_\mu f, f) =$$
$$= \lambda^2 ((I - E_\lambda) f, f) = \lambda^2 |(F_\lambda f, f)|$$

* Отметим, что в $L^2(0,1)$ рассматриваемый ряд не сходится.

и, с другой стороны (см. (4) n° 116),

$$(A_0 f,\ A_0 f) \leqslant \| f \|_K^2.$$

Теорема 1. F_λ *является интегральным оператором с ядром Карлемана* $F(t, s; \lambda)$, *которое при каждом* $\lambda \neq 0$ *удовлетворяет почти всюду на оси* t *неравенству*

$$\int_{-\infty}^{\infty} | F(t, s; \lambda) |^2 ds \leqslant \frac{K_1^2(t)}{\lambda^2}, \tag{3}$$

где

$$K_1(t) = \max\{1, K(t)\}.$$

Доказательство для удобства разобьем на несколько частей.

1°. Прежде всего заметим, что на основании леммы 1 n° 25 существует функция $G(s, t; \lambda)$, принадлежащая L^2 по t при каждом s, причем $G(0, t; \lambda) = 0$ такая, что для любой функции $f(t) \in L^2$

$$(F_\lambda f)(s) = \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} G(s, x; \lambda) f(x)\, dx \tag{4}$$

почти всюду* по s.

Докажем, что функцию $G(s, t; \lambda)$ можно так изменить при каждом s на некотором множестве меры нуль оси t, что измененная функция будет иметь при каждом t почти всюду по s производную

$$F(s, t; \lambda) = \frac{\partial}{\partial s} G(s, t; \lambda),$$

принадлежащую L^2 (по s).

С этой целью положим

$$k(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{K(s)}, & \text{если } K(s) \geqslant 1, \\ 1, & \text{если } K(s) < 1, \end{cases}$$

и применим формулу (4) к функции

$$f_{t,h}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} k(x) & \text{при } x \in (t, t+h), \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} (t, t+g), \end{cases}$$

*) Множество меры нуль, на котором (4) не выполнено, зависит от $f(t)$, а также от λ. Это обстоятельство нужно в дальнейшем иметь в виду. Впрочем, в настоящем рассмотрении можно считать значение $\lambda \neq 0$ фиксированным.

которая при любом $h > 0$ принадлежит $[L^2]_K$. Мы получим, что почти всюду по s

$$(F_\lambda f_{t,h})(s) = \frac{d}{ds}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s, x; \lambda)\, k(x)\, dx = \frac{d}{ds} G_h(s, t; \lambda),$$

где

$$G_h(s, t; \lambda) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s, x; \lambda)\, k(x)\, dx. \tag{5}$$

Поэтому в силу неравенств (1) и (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d}{ds}G_h(s, t; \lambda)\right|^2 ds = (F_\lambda f_{t,h}, F_\lambda f_{t,h}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda^2}\|f_{t,h}\|_K^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{1}{h}\int_t^{t+h} K(s)\, k(s)\, ds\right\}^2 \leqslant \frac{1}{\lambda^2}. \tag{6}$$

Отсюда следует существование зависящей от t последовательности $h_n \to 0$ $(h_n > 0)$ и функции (от s) $g(s, t; \lambda)$, принадлежащей L^2, для которых при $n \to \infty$

$$\frac{d}{ds}G_{h_n}(s, t; \lambda) \xrightarrow{\text{сл.}} g(s, t; \lambda).$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} G_{h_n}(s, t; \lambda) = \int_0^s g(x, t; \lambda)\, dx$$

при каждом s. С другой стороны, в силу (5) при каждом s для почти всех t

$$\lim_{h\to 0} G_h(s, t; \lambda) = G(s, t; \lambda)\, k(t).$$

Поэтому при каждом s для почти всех t

$$G(s, t; \lambda)\, k(t) = \int_0^s g(x, t; \lambda)\, dx. \tag{7}$$

Изменяя функцию $G(s, t; \lambda)$ при каждом s на некотором множестве меры нуль оси t, добьемся того, что (7) будет иметь место для всех s и t. Так как $k(t) \neq 0$, то измененная функция $G(s, t; \lambda)$ будет иметь при каждом t почти всюду по s производную

$$F(s, t; \lambda) = \frac{\partial}{\partial s} G(s, t; \lambda),$$

которая по s принадлежит L^2.

2°. Следующий шаг состоит в доказательстве того, что для всякой функции $f \in L^2$ имеет место равенство

$$(F_\lambda f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(s, t; \lambda)}\, f(s)\, ds \tag{8}$$

почти всюду на оси t. Этот факт очень просто доказывается для элементарной ступенчатой функции в конечном интервале $[\alpha, \beta)$:

$$\chi_{\alpha, \beta}(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s \in [\alpha, \beta), \\ 0 & \text{при } s \overline{\in} [\alpha, \beta), \end{cases}$$

а значит, и для любой финитной ступенчатой функции. В самом деле, при любой функции $h(t) \in \mathrm{L}^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda)\, \chi_{\alpha, \beta}(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \{G(\beta, t; \lambda) -$$

$$- G(\alpha, t; \lambda)\}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\alpha, \beta}(s)\, ds \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, G(s, t; \lambda)\, dt =$$

$$= (F_\lambda h, \chi_{\alpha, \beta}) = (h, F_\lambda \chi_{\alpha, \beta}).$$

Поэтому для почти всех t

$$(F_\lambda \chi_{\alpha, \beta})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(s, t; \lambda)}\, \chi_{\alpha, \beta}(s)\, ds.$$

Для произвольной функции $f \in \mathrm{L}^2$ можно найти сильно сходящуюся к ней последовательность финитных ступенчатых функций $\{f_n\}_1^\infty$. Тогда последовательность $\{F_\lambda f_n\}_1^\infty$ будет сильно сходиться к функции $F_\lambda f$ и, между прочим, найдется последовательность индексов $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что для почти всех t

$$\lim_{i \to \infty} (F_\lambda f_{n_i})(t) = (F_\lambda f)(t). \tag{9}$$

С другой стороны, можно указать множество меры нуль так, чтобы в каждой не принадлежащей ему точке t имели место одновременно все равенства

$$(F_\lambda f_{n_i})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(s, t; \lambda)}\, f_{n_i}(s)\, ds \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

В каждой из этих точек t правая часть стремится к пределу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(s, t; \lambda)}\, f(s)\, ds,$$

а в силу (9) этот предел равен $(F_\lambda f)(t)$.

Итак, утверждение 2° доказано.

3°. Теперь докажем соотношение (3). Для этого возьмем содержащееся в (6) неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \left| \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} F(x, s; \lambda)\, k(x)\, dx \right|^2 = (F_\lambda f_{t, h}^{*}, F_\lambda f_{t, h}) \leqslant \frac{1}{\lambda^2},$$

из которого следует, что

$$\int_{e} dt \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{1}{k^2(t)} \left| \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} F(x, s; \lambda)\, k(x)\, dx \right|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \int_{e} \frac{dt}{k^2(t)},$$

где e есть произвольное подмножество конечной меры множества $e(a)$ всех тех t, для которых

$$\frac{1}{k(t)} \leqslant a.$$

Так как при каждом s функция

$$\frac{1}{k^2(t)} \left| \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} F(x, s; \lambda)\, k(x)\, dx \right|^2$$

стремится для почти всех $t \in e$ к пределу $|F(t, s; \lambda)|^2$, когда $h \to 0$, то по теореме Фату

$$\int_{e} dt \int_{-\infty}^{\infty} |F(t, s; \lambda)|^2\, ds \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \int_{e} \frac{dt}{k^2(t)}.$$

Поскольку число a и множество $e \subset e(a)$ произвольны, то для почти всех t

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t, s; \lambda)|^2\, ds \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{k^2(t)},$$

откуда и вытекает неравенство (3).

Соотношение (3) и формула (8), дающая представление оператора F_λ, не препятствуют изменению функции $F(t, s; \lambda)$ при каждом из почти всех t на множестве меры нуль оси s.

Воспользуемся этим, чтобы в согласии с леммой 2 n° 25 сделать функцию $F(t, s; \lambda)$ измеримой в плоскости s, t.

4°. Остается доказать, что почти всюду в плоскости s, t имеет место равенство

$$\overline{F(s, t; \lambda)} = F(t, s; \lambda).$$

Для этого возьмем функции $f \in L^2$ и $g \in [L^2]_{K_1}$ и запишем для них равенство

$$(F_\lambda g, f) = (g, F_\lambda f)$$

в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(s)}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(t, s; \lambda)}\, g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda)\, \overline{f(s)}\, ds.$$

Так как в силу (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \cdot |f(s)| \cdot |F(t, s; \lambda)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \cdot \|f\| \frac{1}{|\lambda|} K_1(t)\, dt < \infty,$$

то по теореме Фубини можно изменить порядок интегрирования в левой части равенства. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(t, s; \lambda)}\, \overline{f(s)}\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda)\, \overline{f(s)}\, ds,$$

откуда и вытекает справедливость утверждения, поскольку f из L^2 произвольна, а множество функций g плотно в L^2.

Таким образом, доказательство теоремы 1 закончено.

Рассмотрим дальнейшие свойства оператора F_λ.

Лемма. *Пусть*

$$\Omega(\lambda) = (F_\lambda f, g), \tag{10}$$

где $f, g \in L^2$, и пусть Δ — произвольный интервал оси λ, удаленный на расстояние $\delta > 0$ от точки $\lambda = 0$. Тогда

$$\mathrm{Var}_\Delta \Omega(\lambda) \leqslant \|f\| \cdot \|g\|. \tag{11}$$

Если, кроме того, $g \in [L^2]_K$, то

$$\mathrm{Var}_\Delta \Omega(\lambda) \leqslant \frac{1}{\delta} \|f\| \cdot \|g\|_K, \tag{12}$$

и если $f, g \in [L^2]_K$, то

$$\mathrm{Var}_\Delta \Omega(\lambda) \leqslant \frac{1}{\delta^2} \|f\|_K \|g\|_K. \tag{13}$$

Доказательство. Возьмем точки

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$$

интервала Δ и составим выражение

$$V_n \equiv \sum_{k=1}^{n} |\Omega(\lambda_k) - \Omega(\lambda_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |((F_{\lambda_k} - F_{\lambda_{k-1}}) f, g).$$

Так как $F_{\lambda_k} - F_{\lambda_{k-1}}$ — позитивный оператор, то благодаря неравенству Коши — Буняковского

$$V_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{((F_{\lambda_k} - F_{\lambda_{k-1}}) f, f)} \sqrt{((F_{\lambda_k} - F_{\lambda_{k-1}}) g, g)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} ((F_{\lambda_k} - F_{\lambda_{k-1}}) f, f)} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} ((F_{\lambda_k} - F_{\lambda_{k-1}}) g, g)} =$$

$$= \sqrt{((F_{\lambda_n} - F_{\lambda_0}) f, f)} \sqrt{((F_{\lambda_n} - F_{\lambda_0}) g, g)} \leqslant \sqrt{(F_\delta f, f)(F_\delta g, g)}.$$

Поскольку $\|F_\delta\| \leqslant 1$, то отсюда вытекает справедливость оценки (11). Применяя к $(F_\delta g, g)$ при $g \in [L^2]_K$ оценку (2), убеждаемся в справедливости оценки (12) и, наконец, если $f, g \in [L^2]_K$, то с помощью той же оценки (2) устанавливаем справедливость (13). Лемма доказана.

Теорема 2. *В качестве ядра оператора F_λ можно выбрать (из совокупности эквивалентных по (s, t) при каждом λ) такую функцию $F^0(s, t; \lambda)$, что, за исключением не зависящего от λ множества меры нуль в (s, t)-плоскости, эта функция имеет ограниченную вариацию по λ в любом конечном или бесконечном интервале Δ оси λ, находящемся на положительном расстоянии от точки $\lambda = 0$. При этом имеет место оценка*

$$\mathrm{Var}_\Delta F^0(s, t; \lambda) \leqslant \frac{1}{\delta^2} K(s) K(t),$$

если указанное расстояние есть δ, и оценка

$$|F^0(s, t; \lambda)| \leqslant \frac{1}{\lambda^2} K(s) K(t)$$

при $\lambda \neq 0$. Наконец, при каждом $\lambda \neq 0$ почти всюду в (s, t)-плоскости

$$F^0(s, t; \lambda - 0) = F^0(s, t; \lambda).$$

Доказательство. Пусть $F(s, t; \lambda)$ — некоторое ядро оператора F_λ. Мы построим по нему эквивалентное ему в (s, t)-плоскости при каждом λ ядро $F^0(s, t; \lambda)$, удовлетворяющее условиям теоремы.

С этой целью введем функции

$$\varphi_n(s;u)=\begin{cases}\frac{n}{2}, & \text{если } |s-u|\leqslant\frac{1}{n},\\ 0, & \text{если } |s-u|>\frac{1}{n},\end{cases}$$

и пусть

$$\varphi_n^{(a)}(s;u)=\begin{cases}\varphi_n(s;u), & \text{если } u\in e(a),\\ 0, & \text{если } u\,\overline{\in}\,e(a),\end{cases}$$

где $e(a)$ — множество тех значений u, при которых $K(u)\leqslant a$. При фиксированном s, очевидно, $\varphi_n^{(a)}(s;u)\in[L^2]_K$. Положим, далее,

$$\Phi_n^{(a)}(s,t;\lambda)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}F(u,v;\lambda)\,\varphi_n^{(a)}(s;u)\,\varphi_n^{(a)}(t;v)\,du\,dv. \tag{14}$$

Заметим, что этот интеграл существует благодаря оценке (3) как двойной в смысле абсолютной сходимости, а не только как повторный.

В силу (13)

$$\operatorname{Var}_\Delta\Phi_n^{(a)}(s,t;\lambda)\leqslant\frac{1}{\delta^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}K(u)\,K(v)\,\varphi_n^{(a)}(s;u)\,\varphi_n^{(a)}(t;v)\,du\,dv\leqslant\frac{a^2}{\delta^2}. \tag{15}$$

Таким образом, все функции $\Phi_n^{(a)}(s,t;\lambda)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ имеют равномерно ограниченную вариацию по λ в интервале Δ. Следовательно, применима теорема Хелли, комбинируя которую с повторным диагональным процессом, найдем последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, зависящую от произвольно выбранной точки (s,t), такую, что при всех $\lambda\neq 0$ существует

$$\lim_{k\to\infty}\Phi_{n_k}^{(a)}(s,t;\lambda)\equiv\Phi^{(a)}(s,t;\lambda).$$

При этом в силу (15) при любых s, t

$$\operatorname{Var}_\Delta\Phi^{(a)}(s,t;\lambda)\leqslant\frac{a^2}{\delta^2}. \tag{16}$$

Последнее неравенство допускает следующее уточнение. Пусть $e_2^*(a)$ — множество всех тех точек $(s,t)\in e(a)\times e(a)\equiv e_2(a)$, в которых

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}K(u)\,K(v)\,\varphi_n^{(a)}(s;u)\,\varphi_n^{(a)}(t;v)\,du\,dv=K(s)\,K(t).$$

В силу известных теорем $\operatorname{m\acute{e}s}\{e_2(a)\setminus e_2^*(a)\}=0$.

При $(s, t) \in e_2^*(a)$ можно перейти при $n \to \infty$ к пределу в среднем члене неравенства (15), откуда следует, что

$$\mathrm{Var}_\Delta \Phi^{(a)}(s, t; \lambda) \leqslant \frac{1}{\delta^2} K(s) K(t), \quad (s, t) \in e_2^*(a). \tag{17}$$

Это — уточнение неравенства (16).

С другой стороны, благодаря (14) при каждом $\lambda \neq 0$ почти всюду в $e_2(a)$ имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n^{(a)}(s, t; \lambda) = F(s, t; \lambda),$$

и, значит, при каждом $\lambda \neq 0$ почти всюду в $e_2(a)$

$$\Phi^{(a)}(s, t; \lambda) = F(s, t; \lambda). \tag{18}$$

Представим теперь (s, t)-плоскость E_2 в виде суммы непересекающихся множеств: $\mathrm{E}_2 = \bigcup\limits_{a=1}^{\infty} \mathrm{E}_2(a)$, где $\mathrm{E}_2(1) = e_2(1)$, $\mathrm{E}_2(a+1) = e_2(a+1) \setminus e_2(a)$, и определим функцию $F^0(s, t; \lambda)$, полагая

$$F^0(s, t; \lambda) = \Phi^{(a)}(s, t; \lambda) \text{ при } (s, t) \in \mathrm{E}_2(a).$$

Очевидно, при каждом λ почти всюду в (s, t)-плоскости будет в силу (18)

$$F^0(s, t; \lambda) = F(s, t; \lambda),$$

и поэтому $F^0(s, t; \lambda)$ является ядром оператора F_λ, т. е. при любых $f, g \in \mathrm{L}^2$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int F^0(s, t; \lambda) f(t) \overline{g(s)}\, ds\, dt = (F_\lambda f, g).$$

При этом на множестве $\mathrm{E}_2^* = \bigcup\limits_{a=1}^{\infty} (\mathrm{E}_2(a) \cap e_2^*(a))$, т. е. во всей (s, t)-плоскости, за исключением не зависящего от λ множества меры нуль, в силу (17) справедлива оценка:

$$\mathrm{Var}_\Delta F^0(s, t; \lambda) \leqslant \frac{1}{\delta^2} K(s) K(t).$$

Из этой оценки вытекает, в частности, что при $\lambda \neq 0$ почти всюду в (s, t)-плоскости

$$|F^0(s, t; \lambda)| \leqslant \frac{1}{\lambda^2} K(s) K(t).$$

Покажем теперь, что при каждом $\lambda \neq 0$ почти всюду в (s, t)-плоскости

$$F^0(s, t; \lambda - 0) = F^0(s, t; \lambda). \tag{19}$$

Для этого достаточно заметить, что, во-первых, при $(s, t) \in E_2^*$ существует предел $F^0(s, t; \lambda - 0)$ при любом λ, а во-вторых, что при любых $f, g \in [L^2]_K$

$$|F^0(s, t; \mu) f(t) \overline{g(s)}| \leqslant \frac{1}{\mu^2} K(s) K(t) \cdot |f(s)| \cdot |g(t)|,$$

где правая часть интегрируема во всей (s, t)-плоскости, и поэтому при $\lambda \neq 0$ возможен предельный переход под знаком интеграла в следующем равенстве:

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} F^0(s, t; \lambda) f(t) \overline{g(s)}\, ds\, dt = (F_\lambda f, g) = (F_{\lambda-0} f, g) =$$

$$= \lim_{\mu \to \lambda - 0} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F^0(s, t; \mu) f(t) \overline{g(s)}\, ds\, dt =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F^0(s, t; \lambda - 0) f(t) \overline{g(s)}\, ds\, dt.$$

Отсюда и вытекает (19). Теорема полностью доказана.

Во всем дальнейшем под ядром $F(s, t; \lambda)$ оператора F_λ мы будем подразумевать ядро $F^0(s, t; \lambda)$.

Замечание. С помощью аналогичных рассуждений, используя вместо оценки (13) оценку (12), легко доказать, что, какова бы ни была функция $f \in L^2$,

$$\mathrm{Var}_\Delta \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda) f(t)\, dt \leqslant \frac{1}{\delta} K(s) \cdot \| f \|,$$

за исключением не зависящего от Δ множества меры нуль на оси s.

119. Спектральное представление ядра Карлемана.

Теорема 1. *Пусть* $\Delta = [\alpha, \beta)$ — *конечный интервал, находящийся на положительном расстоянии от точки* $\lambda = 0$, *и*

$$F(s, t; \Delta) = F(s, t; \beta) - F(s, t; \alpha).$$

В таком случае почти всюду в (s, t)*-плоскости*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(s, u) F(u, t; \Delta)\, du = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda d_\lambda F(s, t; \lambda) \qquad (1)$$

(исключительное множество меры нуль в (s, t)*-плоскости, на котором* (1) *не имеет места, зависит, вообще говоря, от* α *и* β*).*

Теорема означает, что (1) справедливо при каждом $s \bar{\in} e_{\alpha,\beta}$ для почти всех t ($e_{\alpha,\beta}$ — некоторое множество меры нуль на оси s).

Доказательство. При любых $f,\ g \in \mathrm{L}^2$ имеем равенство

$$(A^*E(\Delta)f,\ g) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda d_{\lambda}(E_{\lambda}f,\ g),$$

которое, очевидно, можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)}\,ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s,\ u)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} F(u,\ t;\ \Delta) f(t)\,dt\right\} du =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \lambda d\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)}\,ds \int_{-\infty}^{\infty} F(s,\ t;\ \lambda) f(t)\,dt\right\}.$$

Положим, что $f,\ g \in [\mathrm{L}^2]_{K_1}$. Тогда в силу теоремы 2 n° 118 правая часть равна

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(s)}\left\{\int_{\alpha}^{\beta} \lambda d_{\lambda} F(s,\ t;\ \lambda)\right\} dt\,ds.$$

Но почти всюду в силу теоремы 1 n° 118,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,\ u)\,F(u,\ t;\ \Delta)|\,du \leqslant 2K(s)\frac{K_1(t)}{\delta},$$

где δ — расстояние интервала $[\alpha,\ \beta)$ от точки $\lambda = 0$. Поэтому в левой части тоже можно изменить порядок интегрирования, а значит,

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(s)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} K(s,\ u)\,F(u,\ t;\ \Delta)\,du\right\} dt\,ds =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(s)}\left\{\int_{\alpha}^{\beta} \lambda d_{\lambda} F(s,\ t;\ \lambda)\right\} dt\,ds$$

при любых $f,\ g \in [\mathrm{L}^2]_{K_1}$. Так как $[\mathrm{L}^2]_{K_1}$ плотно в L^2, то отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s,\ u)\,F(u,\ t;\ \Delta)\,du = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda d_{\lambda} F(s,\ t;\ \lambda)$$

почти всюду в $(s,\ t)$-плоскости. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для почти всех s формула*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s,\ u)\,F(u,\ t;\ \Delta)\,du = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda d_{\lambda} F(s,\ t;\ \lambda)$$

справедлива также при $\beta = \infty$, $\alpha > 0$ *(соответственно при* $\alpha = -\infty$, $\beta < 0$*), если правую часть рассматривать как* l. i. m. *по* t, *когда* $\beta \to \infty$ $(\alpha \to -\infty)$ *по произвольно выбранной последовательности.*

Доказательство. Предполагая, что $\alpha > 0$, а β — конечно, перепишем равенство (1) в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda d_{\lambda} \overline{F(s, t; \lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(s, u)}\, \overline{F(u, t; \Delta)}\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(t, u; \Delta) K(u, s)\, du = (F_{\beta} - F_{\alpha}) K_s, \tag{2}$$

где для почти всех s функция $K_s(t) = K(t, s)$ принадлежит L^2. Возьмем стремящуюся к бесконечности последовательность значений β_k. Тогда в силу теоремы 1 можно указать множество e_{α} меры нуль, зависящее только от α и такое, что при любом $s \overline{\in} e_{\alpha}$ будут иметь место почти всюду на оси t одновременно все равенства (2) с $\beta = \beta_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Отсюда следует, что при $s \overline{\in} e_{\alpha}$ и $k = 1, 2, \ldots$

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta_k} \lambda d_{\lambda} \overline{F(s, t; \lambda)} + F_{\alpha} K_s \right\| = \| E_{\beta_k} K_s - K_s \|.$$

Правая часть стремится к нулю при $k \to \infty$. Таким образом, для всех $s \overline{\in} e_{\alpha}$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} F(t, u; \alpha) K(u, s)\, du = \underset{k \to \infty}{\text{l. i. m.}} \int_{\alpha}^{\beta_k} \lambda d_{\lambda} \overline{F(s, t; \lambda)}$$

и, значит, для почти всех s

$$-\int_{-\infty}^{\infty} K(s, u) F(u, t; \alpha)\, du = \underset{k \to \infty}{\text{l. i. m.}} \int_{\alpha}^{\beta_k} \lambda\, d_{\lambda} F(s, t; \lambda),$$

откуда и следует теорема.

Теорема 3. *Для почти всех* s

$$K(t, s) = \text{l. i. m.} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_{\lambda} F(t, s; \lambda),$$

где правая часть есть l. i. m. *по* t *несобственного интеграла с особыми точками* $\lambda = -\infty,\ 0,\ \infty$; *иными словами, для почти всех* s

$$\lim \int_{-\infty}^{\infty} \left| K(t, s) - \left(\int_{-N'}^{-\varepsilon'} + \int_{\varepsilon}^{N} \right) \lambda d_\lambda F(t, s; \lambda) \right|^2 dt = 0,$$

когда $\varepsilon,\ \varepsilon' \to 0$, $N,\ N' \to \infty$ *по произвольно выбранным последовательностям положительных чисел.*

В том же смысле при почти всех s

$$K(s, t) = \text{l. i. m.} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_\lambda F(s, t; \lambda).$$

Доказательство. Выберем произвольно последовательности положительных чисел $\varepsilon_i,\ \varepsilon_i' \to 0$ $(\varepsilon_i,\ \varepsilon_i' < 1)$ и $N_k,\ N_k' \to \infty$ $(N_k,\ N_k' > 1)$. Тогда, как и при доказательстве предыдущей теоремы, найдется множество e меры нуль такое, что при каждом $s \,\bar{\in}\, e$ будут иметь место почти всюду на оси t одновременно для всех $i,\ k,\ l,\ m$ равенства

$$\left(\int_{-N_k'}^{-\varepsilon_i'} + \int_{\varepsilon_l}^{N_m} \right) \lambda d_\lambda F(t, s; \lambda) = (F_{-\varepsilon_i'} - F_{-N_k'}) K_s + (F_{N_m} - F_{\varepsilon_l}) K_s$$

или

$$\left(\int_{-N_k'}^{-\varepsilon_i'} + \int_{\varepsilon_l}^{N_m} \right) \lambda d_\lambda F(t, s; \lambda) - E_0 K_s + E_{+0} K_s - K_s =$$
$$= (E_{-\varepsilon_i'} - E_0) K_s + (E_{+0} - E_{\varepsilon_l}) K_s + (F_{N_m} - F_{-N_k'}) K_s.$$

При каждом $s \,\bar{\in}\, e$ правая часть, как функция от t, стремится к нулю в метрике L^2, когда $i,\ k,\ l,\ m \to \infty$. Следовательно, при $s \,\bar{\in}\, e$

$$K_s(t) - (E_{+0} - E_0) K_s = \text{l. i. m.} \left(\int_{-N_k'}^{-\varepsilon_i'} + \int_{\varepsilon_l}^{N_m} \right) \lambda d_\lambda F(t, s; \lambda).$$

Остается проверить, что $\| (E_{+0} - E_0) K_s \| = 0$ для почти всех s. Но при любом $f \in L^2$

$$(f, (E_{+0} - E_0) K_s) = ((E_{+0} - E_0) f, K_s) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K_s(t)}\, ((E_{+0} - E_0) f)(t)\, dt = A^* (E_{+0} - E_0) f = 0.$$

120. Обобщение формулы Гильберта — Шмидта.

Теорема. *Какова бы ни была функция* $f \in L^2$, *для почти всех* s

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda) f(t)\, dt \right\},$$

причем интеграл по λ *несобственный относительно точек* $\lambda = -\infty, 0, \infty$.

Доказательство. В силу теоремы 3 n° 119 для любой $f \in L^2$ справедливо при почти всех s равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_\lambda F(s, t; \lambda) \equiv$$

$$\equiv \lim_{\substack{\varepsilon'_l,\ \varepsilon_l \to 0 \\ N'_k,\ N_m \to \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \left(\int_{-N'_k}^{-\varepsilon'_l} + \int_{\varepsilon_l}^{N_m} \right) \lambda d_\lambda F(s, t; \lambda).$$

Нам нужно лишь доказать, что в правой части этого равенства можно изменить порядок интегрирования. Для этого заметим, что

$$\mathrm{Var}_\Delta \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda) f(t)\, dt \leqslant \frac{1}{\delta} K(s) \| f \|,$$

в силу замечания в конце n° 118, и поэтому для почти всех s при $\alpha\beta > 0$ $(\beta > \alpha)$ интеграл Стилтьеса

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda) f(t)\, dt \tag{1}$$

существует. Также для почти всех s существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{\alpha}^{\beta} \lambda d_\lambda F(s, t; \lambda) \tag{2}$$

при любом $f(t) \in L^2$, так как

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda d_\lambda F(s, t; \lambda) \in L_t^2(-\infty, \infty),$$

в силу формулы (2) n° 119.

Если $f(t) \in [\mathrm{L}^2]_K$, то равенство этих интегралов следует из оценки величины

$$J_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \left\{ \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda d_\lambda F(s,\ t;\ \lambda) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F(s,\ t;\ \Delta_k) \right\},$$

где в фигурных скобках — разность между интегралом Стилтьеса и его интегральной суммой. Действительно, в силу теоремы 2 n° 118*

$$|J_n| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\Delta_k| \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,[\mathrm{Var}_{[\alpha,\ \beta)} F(s,\ t;\ \lambda)]\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\Delta_k| \cdot \frac{1}{\delta^2} K(s)\, \| f \|_K,$$

а следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} J_n = 0$, откуда и вытекает равенство интегралов (1) и (2).

Для произвольной функции $f(t) \in \mathrm{L}^2$ можно выбрать сходящуюся к ней в L^2 последовательность функций $f_n(t) \in [\mathrm{L}^2]_K$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ и затем найти исключительное множество e меры нуль на оси s, общее для всех этих функций. Но тогда по теореме Хелли о предельном переходе в интеграле Стилтьеса будем иметь при $s \in \bar{e}$ соотношение

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda d_\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s,\ t;\ \lambda)\ f_n(t)\,dt \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda d_\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s,\ t;\ \lambda)\ f(t)\,dt.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,dt \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda d_\lambda F(s,\ t;\ \lambda) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda d_\lambda F(s,\ t;\ \lambda).$$

Поэтому интегралы (1) и (2) равны между собой для любой функции $f(t) \in \mathrm{L}^2$ при любом $s \in \bar{e}$. Теорема доказана.

121. Характеристические свойства интегральных операторов Карлемана.

Теорема.** *Линейный оператор T в L^2 с плотной в L^2 областью определения является интегральным оператором с ядром*

---

* Благодаря указанным в этой теореме свойствам функции $F(s,\ t;\ \lambda)$ ее вариацию по λ можно вычислять, исходя из разбиения интервала $[\alpha,\ \beta)$ лишь рациональными точками. Поэтому $\mathrm{Var}_{[\alpha,\ \beta)} F(s,\ t;\ \lambda)$ измерима в $(s,\ t)$-плоскости.

** См. Коротков В. Б. Об интегральных операторах с ядрами Карлемана.— ДАН СССР, 1965, 165, с. 748—751. Мы доказываем эту теорему в несколько иной, но эквивалентной формулировке.

Карлемана в том и только том случае, когда существует конечная измеримая функция $P(s) \geqslant 0$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\begin{array}{lll} 1^\circ. & [\mathrm{L}^2]_P \subseteq \mathrm{D}_{T^*}, & \\ 2^\circ. & \|T^*g\| \leqslant \|g\|_P & \text{для любого } g \in [\mathrm{L}^2]_P, \\ 3^\circ. & (T^*f, g) = (f, T^*g) & \text{для любых } f, g \in [\mathrm{L}^2]_P. \end{array}$$

Доказательство необходимости условий очень просто. Действительно, пусть T есть интегральный оператор с ядром Карлемана $K(s, t)$. Покажем, что в таком случае условия 1°—3° будут выполнены при $P(s) = K(s)$. Для этого введем операторы $A_0 \subseteq A \subseteq A^*$, принадлежащие ядру $K(s, t)$ согласно n° 116. Всякий интегральный оператор с ядром $K(s, t)$ является частью оператора A^*. Следовательно, $T \subseteq A^*$. Поэтому $T^* \supseteq A^{**} = A$ и, значит, $[\mathrm{L}^2]_K \subseteq \mathrm{D}_{T^*}$, т. е. условие 1° доказано. Равным образом доказано условие 3°, так как при $f, g \in [\mathrm{L}^2]_K$

$$(T^*f, g) = (A_0f, g) = (f, A_0g) = (f, T^*g).$$

Наконец, условие 2° следует из того, что при любых $f, g \in [\mathrm{L}^2]_K$

$$(T^*f, T^*g) = (A_0f, A_0g) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s, u) f(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(s, v)}\, \overline{g(v)}\, dv$$

и, значит,

$$|(T^*f, T^*g)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, du \int_{-\infty}^{\infty} |g(v)|\, dv \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, u) K(s, v)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, K(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} |g(v)|\, K(v)\, dv = \|f\|_K \cdot \|g\|_K.$$

Переходя к доказательству достаточности, примем, что требуемая теоремой функция $P(s)$ существует. Далее возьмем какой-нибудь элемент $f \in \mathrm{D}_T$ и произвольный элемент $g \in [\mathrm{L}^2]_P$. Скалярное произведение $(g, Tf) = (T^*g, f)$ является в силу 1° и 2° линейным функционалом от g в $[\mathrm{L}^2]_P \subseteq \mathrm{L}_P$ с нормой $\leqslant \|f\|$. Этот функционал можно расширить по непрерывности на все пространство L_P. Зна́чит, существует такая измеримая функция $\alpha(s)$, что

$$(g, Tf) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \overline{\alpha(s)}\, ds$$

и

$$\operatorname{vrai\,max} \frac{|\alpha(s)|}{P(s)} \leqslant \|f\|.$$

Так как почти всюду

$$(Tf)(s) = \alpha(s),$$

то для почти всех s

$$|(Tf)(s)| \leqslant P(s)\,\|f\|. \tag{1}$$

Это неравенство, таким образом, имеет место для выбранной функции $f \in \mathrm{D}_T$ при любом $s \bar{\in} e_f$, где e_f — зависящее от f множество меры нуль. Возьмем теперь какое-нибудь счетное множество, всюду плотное в D_T. Ортогонализируя это множество, получим некоторую ортонормированную последовательность $\{h_k\}_1^\infty \subset \mathrm{D}_T$ и возьмем множество $\mathfrak{N}$ элементов вида

$$f_n = c_1 h_1 + c_2 h_2 + \ldots + c_n h_n,$$

где n пробегает натуральный ряд, а при каждом n коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ принимают всевозможные комплексные значения с рациональными компонентами. Множество $\mathfrak{N}$ счетно. Каждому элементу $f_n \in \mathfrak{N}$ отвечает свое исключительное множество e_{f_n} меры нуль на оси s. Соединение всех этих множеств e_{f_n} обозначим e. Оно также имеет меру нуль. Таким образом, при $s \bar{\in} e$ для любого элемента $f \in \mathfrak{N}$

$$|(Tf)(s)| \leqslant P(s)\,\|f\|.$$

Это неравенство будет иметь место при $s \bar{\in} e$ для любого элемента f^*, принадлежащего линейной оболочке $\mathfrak{M}$ множества $\{h_k\}_1^\infty$. В самом деле, пусть

$$f^* = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \ldots + \gamma_n h_n \in \mathfrak{M}.$$

Возьмем элемент

$$f_n = c_1 h_1 + c_2 h_2 + \ldots + c_n h_n \in \mathfrak{N}.$$

Тогда

$$|(Tf^*)(s) - (Tf_n)(s)| \leqslant n \cdot \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\gamma_k - c_k| \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |(Th_i)(s)| \leqslant$$
$$\leqslant n \cdot \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\gamma_k - c_k| \cdot P(s)$$

и, значит, при надлежащем выборе чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ мы будем иметь неравенство

$$|(Tf^*)(s) - (Tf_n)(s)| \leqslant \varepsilon P(s) \qquad (s \bar{\in} e).$$

Отсюда следует, что

$$|(Tf^*)(s)| \leqslant |(Tf_n)(s)| + \varepsilon P(s) \leqslant P(s)\,\|f_n\| + \varepsilon P(s) \leqslant$$
$$\leqslant P(s)\,\|f^*\| + 2\varepsilon P(s),$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то наше утверждение доказано, т. е. неравенство (1) выполнено при $s \bar{\in} e$ для любого элемента $f \in \mathfrak{M}$. Но в таком случае $(Tf)(s)$ является при любом $s \bar{\in} e$ линейным функционалом в $\mathfrak{M} \subset \mathrm{L}^2$ с нормой $\leqslant P(s)$. Этот линейный функционал можно расширить на все пространство L^2 без увеличения нормы. Значит, существует функция $K_s(t) \equiv K(s, t)$, измеримая по t при каждом $s \bar{\in} e$ и такая, что для любого $f \in \mathfrak{M}$ и $s \bar{\in} e$

$$(Tf)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt, \tag{2}$$

причем

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 dt\right\}^{1/2} \leqslant P(s). \tag{3}$$

Из (3) следует, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s, t)\, h(t)\, dt \qquad (s \bar{\in} e)$$

существует при любой функции $h(t) \in \mathrm{L}^2$. А так как всякая функция $h(t) \in \mathrm{L}^2$ является пределом последовательности функций $f(t) \in \mathfrak{M}$, для которых рассматриваемый интеграл есть измеримая функция от s, то этот интеграл является измеримой функцией от s при любой функции $h(t) \in \mathrm{L}^2$. Отсюда на основании леммы 2 n° 25 следует, что функцию $K(s, t)$ можно считать измеримой в плоскости s, t.

Докажем, что T есть интегральный оператор с ядром $K(s, t)$. Пусть $f \in \mathfrak{M}$, $g \in [\mathrm{L}^2]_P$. В силу (2)

$$(f, T^*g) = (Tf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt. \tag{4}$$

С другой стороны, для любого элемента $f \in \mathrm{L}^2$ при $g \in [\mathrm{L}^2]_P$ в силу (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|\, ds \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)| \cdot |f(t)|\, dt \leqslant \|f\| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} P(s)\, |g(s)|\, ds < \infty,$$

а значит, по теореме Фубини,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t)\, \overline{g(s)}\, ds. \tag{5}$$

Если $f \in \mathfrak{M}$, то в силу (4) левая, а потому и правая части (5) равны (f, T^*g). Отсюда благодаря плотности $\mathfrak{M}$ в L^2 заключаем, что почти всюду

$$(T^*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(s, t)}\, g(s)\, ds \quad (g \in [L^2]_P).$$

Поэтому правая часть (5) равна (f, T^*g) для любого $f \in L^2$, а следовательно, равенство (4) и вместе с ним представление (2) справедливы для любого $f \in D_T$. Таким образом, доказано, что T есть интегральный оператор с ядром $K(s, t)$.

Остается доказать, что почти всюду в плоскости s, t

$$K(s, t) = \overline{K(t, s)}. \tag{6}$$

Для этого воспользуемся условием 3° теоремы и равенствами (4) и (5) для произвольных элементов $f, g \in [L^2]_P$. Мы получим соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(s, t)\, \overline{g(s)}\, f(t)\, ds\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt =$$

$$= (f, T^*g) = (T^*f, g) = \overline{(g, T^*f)} =$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s)\, g(s)\, ds} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(t, s)}\, \overline{g(s)}\, f(t)\, ds \cdot dt,$$

из которого и следует равенство (6) почти всюду в плоскости s, t.

Теорема доказана.

Замечание.* Условия 1°—3° доказанной теоремы вместе с требованием

$$4^\circ. \qquad |(T^*f, g)| \leqslant \|f\|_P \cdot \|g\|_P \qquad (f, g \in [L^2]_P)$$

необходимы и достаточны для того, чтобы оператор T был интегральным оператором с ядром Карлемана $K(s, t)$, удовлетворяющим почти всюду в плоскости s, t неравенству

$$|K(s, t)| \leqslant P(s) P(t).$$

Примером таких операторов являются операторы F_λ $(\lambda \neq 0)$, введенные в п° 118 для произвольного оператора Карлемана.

122. Теорема Неймана. Естественно возникает вопрос о том, насколько широк класс самосопряженных операторов в L^2, которые являются интегральными операторами Карлемана или уни-

---

* См. последнюю из работ, указанных в подстрочном примечании на с. 124.

тарно эквивалентны им. Ответ на этот вопрос дан Нейманом*. Его теорема гласит:

Самосопряженный оператор B в L^2 унитарно эквивалентен интегральному оператору с ядром Карлемана в том и только том случае, когда непрерывный спектр оператора B содержит точку $\lambda = 0$.

Доказательство. Начнем с доказательства достаточности условия. При этом мы можем предположить, что спектр оператора B чисто точечный. Действительно, такой спектр (согласно теореме n° 94) будет во всяком случае у оператора $C = B + R$ при надлежащем выборе самосопряженного оператора R с конечной (даже сколь угодно малой) абсолютной нормой, а оператор R этого рода, равно, как и всякий ему унитарно эквивалентный оператор, является интегральным оператором Гильберта — Шмидта.

Таким образом, мы можем принять, что оператор B имеет чисто точечный спектр. Пусть $\{\lambda_i\}_1^\infty$ есть последовательность всех его собственных значений. Положим, что точка $\lambda = 0$ является предельной точкой спектра, так что существует бесконечная последовательность индексов m_q ($\pm q = 1, 2, 3, \ldots$), для которой

$$|\lambda_{m_q}| \leqslant \frac{1}{1 + |q|} \qquad (\pm q = 1, 2, 3, \ldots).$$

Множество остальных индексов пусть будет $\{n_p\}_{p=-\infty}^{\infty}$. Представим совокупность всех натуральных чисел в виде счетного множества последовательностей

$$\{l_{pk}\}_{p=-\infty}^{\infty} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$l_{p1} = n_p, \; l_{pk} = m_{2^{k-2}(2p-1)} \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{l_{pk}}| \leqslant |\lambda_{n_p}| + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-2}\,|2p-1|} = |\lambda_{n_p}| + \frac{2}{|2p-1|} = \mathscr{E}_p < \infty.$$

Возьмем какую-нибудь полную ортонормированную систему функций $\{\psi_k(s)\}_1^\infty$ в $L^2(0,1)$, удовлетворяющую требованию равномерной ограниченности:

$$|\psi_k(s)| \leqslant \mathscr{M} \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1, \; k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Например, можно взять $\psi_k(s) = \sqrt{2}\sin(k\pi s)$. Далее положим

$$\varphi_{p,k}(s) = \begin{cases} \psi_k(s-p), & s \in [p, p+1), \\ 0, & s \,\overline{\in}\, [p, p+1). \end{cases}$$

---

* J. von Neumann. Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators (Act. sc. et ind.), Paris, 1935.

Ясно, что $\{\varphi_{p,k}(s)\}$ есть полная ортонормированная система в $L^2(-\infty, \infty)$. Ряд

$$K(s, t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{l_{pk}} \varphi_{p,k}(s) \varphi_{p,k}(t)$$

сходится всюду и притом абсолютно. Действительно, если, например,

$$i \leqslant s < i+1, \ j \leqslant t < j+1,$$

то при $i \neq j$ все члены равны нулю, а при $i = j$

$$K(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{l_{ik}} \psi_k(s-i) \psi_k(t-i),$$

откуда

$$|K(s, t)| \leqslant \mathcal{M}^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{l_{ik}}| \leqslant \mathcal{M}^2 \mathcal{E}_i \qquad \left(i \leqslant {}^s_t < i+1\right).$$

Мы замечаем также, что

$$K^2(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 dt \leqslant \mathcal{M}^4 \mathcal{E}_i^2 \qquad (i \leqslant s < i+1).$$

Поэтому эта величина конечна при любом s. Таким образом, мы пришли к интегральному оператору

$$(Af)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s) f(s) ds$$

с ядром Карлемана, и наше построение показывает, что

$$(A\varphi_{p,k})(t) = \lambda_{l_{pk}} \varphi_{p,k}(t).$$

Так как $\{\varphi_{p,k}(t)\}$ есть полная ортонормированная последовательность, то спектр построенного интегрального оператора чисто точечный и последовательность точек $\lambda_{l_{pk}}$, где $\pm p = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, образует полную систему его собственных значений.

Доказательство достаточности закончено.

Чтобы доказать необходимость, положим, что нам дан самосопряженный интегральный оператор

$$(Af)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s) f(s) ds$$

с ядром Карлемана.

Требуется доказать, что точка 0 принадлежит его непрерывному спектру. Для этого достаточно построить (см. п° 93) ортонормированную систему функций $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty \subset L^2(-\infty, \infty)$ (не обязательно полную), для которой

$$\lim_{k\to\infty} \| A\varphi_k \| = 0.$$

Возможность этого построения, а вместе с тем и необходимость условия в теореме Неймана вытекают непосредственно из следующего вспомогательного предложения, к доказательству которого, таким образом, сводится наша задача.

Лемма. *Какова бы ни была конечная система функций $\{\varphi_k(t)\}_1^m \subset L^2(-\infty, \infty)$ и каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует функция $\psi(t) \in L^2$, удовлетворяющая условиям*

$$\|\psi\| = 1, \ \|A\psi\| < \varepsilon, \ (\varphi_k, \psi) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

где A — интегральный оператор с ядром Карлемана (не обязательно самосопряженный).

Доказательство леммы. По свойству ядра Карлемана можно указать некоторое число $N > 0$ и множество $E \subset [0, 1]$ положительной лебеговой меры таким образом, чтобы это ядро $K(s, t)$ удовлетворяло неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 dt \leqslant N \qquad (s \in E).$$

Положим

$$w_s(t) = \begin{cases} \overline{K(s, t)} & (s \in E), \\ 0 & (s \,\overline{\in}\, E), \end{cases}$$

так что

$$\begin{aligned} \|w_s\|^2 &\leqslant N & (s \in E), \\ \|w_s\| &= 0 & (s \,\overline{\in}\, E) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|w_s\|^2 ds = \int_E \|w_s\|^2 ds \leqslant N.$$

Введем теперь новую меру, равную

$$\int_e \|w_s\|^2 \, ds$$

для множества e, и назовем ее для краткости *w-мерой*.

Следующий шаг построений состоит в выборе какого-нибудь ортонормированного базиса $\{g_k(t)\}_1^\infty \subset L^2$. С помощью этого базиса построим бесконечную последовательность функций $\Phi_k(s) = (w_s, g_k)$ $(k = 1, 2 \ldots)$; все они отличны от нуля лишь при $s \in E$. По теореме Лузина из E можно удалить некоторое множество сколь угодно малой w-меры $\leqslant \eta$ $\left(\text{мы примем } \eta < \frac{1}{4}\varepsilon^2\right)$ так, чтобы на оставшемся множестве функция $\Phi_0(s) = \| w_s \|^2$ была непрерывна. Из этого последнего множества удалим подмножество w-меры $\leqslant \frac{1}{2}\eta$ так, чтобы на новом множестве была непрерывна также функция $\Phi_1(s)$. Продолжая неограниченно этот процесс, мы придем к множеству $F \subset E$, дополнение которого до E имеет w-меру $\leqslant 2\eta$. Множество F можно, очевидно, считать замкнутым, так как замкнутость всегда может быть достигнута удалением еще одного открытого множества сколь угодно малой w-меры. На множестве F все функции $\Phi_k(s)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ непрерывны. Поэтому, если $s \in F$, $s_0 \in F$ и $s \to s_0$, то

$$\| w_s \| \to \| w_{s0} \|, \quad (w_s, g_k) \to (w_{s0}, g_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Из этих соотношений следует, что

$$\lim_{s \to s_0} \| w_s - w_{s0} \| = 0.$$

Более того, в силу ограниченности и замкнутости множества F, здесь имеет место равномерность, а именно: при любом $\theta > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $|s'' - s'| < \delta$, $s'' \in F$, $s' \in F$ выполняется неравенство

$$\| w_{s''} - w_{s'} \|^2 < \theta.$$

Поэтому при любом $\theta > 0$ $\left(\text{мы примем } \theta < \frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2\right)$ можно найти точки $s_1, s_2, \ldots, s_p \in F$, где $p = p(\theta)$, таким образом, чтобы для любой точки $s \in F$ при каком-нибудь j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ имело место неравенство

$$\| w_s - w_{s_j} \|^2 < \theta.$$

Теперь возьмем произвольную функцию $\psi(t) \in L^2$, $\| \psi \| = 1$, ортогональную к функциям $w_{s_k}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$, и покажем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(w_s, \psi)|^2 ds < \varepsilon^2.$$

В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(w_s, \psi)|^2 ds = \int_E |(w_s, \psi)|^2 ds =$$
$$= \int_F |(w_s, \psi)|^2 ds + \int_{E-F} |(w_s, \psi)|^2 ds =$$
$$= \int_F |(w_s - w_{sl}, \psi)|^2 ds + \int_{E-F} |(w_s, \psi)|^2 ds \leqslant \theta + 2\eta < \varepsilon^2.$$

Примем дополнительно, что $\psi(s) = 0$ при $s \bar{\in} E$. Тогда

$$\|A\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t)\,\psi(t)\,dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left| \int_E \overline{K(s, t)}\;\overline{\psi(t)}\,dt \right|^2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} ds \left| \int_E w_s(t)\,\overline{\psi(t)}\,dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |(w_s, \psi)|^2 ds < \varepsilon^2.$$

Мы видим, что если бы функция $\psi(t)$ еще была ортогональна каждой из функций $\varphi_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, то она удовлетворяла бы всем условиям леммы, и эта лемма была бы доказана. Итак, остается показать, как такую функцию построить. С этой целью возьмем $m + p + 1$ линейно независимых функций $\psi_k(t) \in L^2$, равных нулю вне E. Такие функции существуют*, так как мера E положительна. После того как функции $\psi_k(t)$ выбраны, можно положить

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{m+p+1} \gamma_k \psi_k(t),$$

требуя, чтобы

$$\|\psi\| = 1, \quad (\varphi_r, \psi) = 0 \;\; (r = 1, 2, \ldots, m), \; (w_{s_k}\psi) = 0 \;\; (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Эта система уравнений разрешима относительно γ_k (причем с помощью этих уравнений коэффициенты γ_k определяются в существенном однозначно, т. е. с точностью до постоянного множителя, равного 1 по модулю).

Таким образом, лемма доказана и тем самым доказательство теоремы Неймана закончено.

---

* Например, можно в E выбрать $m + p + 1$ непересекающихся подмножеств положительной меры и взять в качестве функций $\psi_k(t)$ характеристические функции этих подмножеств.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

123. Самосопряженные дифференциальные операции. Настоящее добавление содержит основные сведения по теории обыкновенных дифференциальных операторов. Изложение ряда специальных вопросов, а также другие подходы к теории читатель найдет в монографиях Э. Ч. Титчмарша, Б. М. Левитана, М. А. Наймарка*.

Начнем с изложения некоторых фактов относительно вещественных дифференциальных выражений (или, как мы условимся их называть, *дифференциальных операций*), самосопряженных в смысле Лагранжа.

В курсах анализа устанавливается, что самосопряженная дифференциальная операция второго порядка

$$c_0D^2 + c_1D + c_2D^0 \qquad \left(c_k = c_k(t),\ D^k = \frac{d^k}{dt^k}\right)$$

в предположении k-кратной дифференцируемости коэффициента $c_k(t)$ может быть приведена к виду

$$-Dp_0D + D^0p_1D^0.$$

Здесь $p_0(t)$ есть дифференцируемая функция. Однако можно рассматривать подобную операцию без предположения о дифференцируемости функции $p_0(t)$. При этом полученную операцию придется применять лишь к таким дифференцируемым функциям $\varphi(t)$, для которых произведение $p_0\varphi'$ абсолютно непрерывно.

Обратимся теперь к самосопряженным дифференциальным операциям порядка $2n$. Мы примем здесь в качестве канонической формы такой операции выражение

$$l = p_nD^0 - D\{p_{n-1}D - D[p_{n-2}D^2 - \ldots - D(p_1D^{n-1} - Dp_0D^n)]\}. \quad (1)$$

Если коэффициент $p_{n-k}(t)$ дифференцируем k раз ($k = 0, 1, \ldots, n$), то мы получим обычную дифференциальную операцию, самосопряженность которой проверяется непосредственно. Мы,

---

* Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, ИЛ, т. I, 1960; т. II, 1961; Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям. Гостехиздат, 1950; Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Изд. второе. М., «Наука», 1969. 526 с. См. также Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). М., «Наука», 1970. 671 с.

однако, не будем предполагать дифференцируемость коэффициентов $p_{n-k}(t)$, сохраняя при этом за операцией (1) название дифференциальной. Обозначая через (a, b) тот незамкнутый конечный или бесконечный интервал, в котором дифференциальная операция (1) рассматривается, мы будем предполагать, что коэффициенты $p_k(t)$ в этом интервале измеримы и в каждой замкнутой части $[\alpha, \beta]$ этого интервала (a, b) удовлетворяют условиям

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{|p_0(t)|} < \infty, \int_{\alpha}^{\beta} |p_k(t)|\, dt < \infty \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Если интервал (a, b) конечен и если условия (2) выполняются при $\alpha = a$, $\beta = b$, то операцию (1) называют *регулярной*. Если же интервал (a, b) бесконечен или если он конечен, но условия (2) не выполняются при $\alpha = a$ или $\beta = b$, то операцию (1) называют *сингулярной*. При этом левый конец a называется *сингулярным*, если $a = -\infty$ или $a > -\infty$, но в (2) нельзя положить $\alpha = a$. Аналогично определяется сингулярность правого конца b. Если конец не является сингулярным, то его называют *регулярным*. Сингулярные операции с одним сингулярным концом мы будем рассматривать, не нарушая общности, на полуоси $(0, \infty)$, а с двумя — на всей оси $(+\infty, \infty)$. При этом для удобства введем вместо производных $D^k\varphi = \varphi^{(k)}$ так называемые квазипроизводные $D^{[k]}\varphi = \varphi^{[k]}$, которые определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} &D^{[k]} = D^k && (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \\ &D^{[n]} = p_0 D^n, && \\ &D^{[n+k]} = p_k D^{n-k} - D D^{[n+k-1]} && (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Теперь операция (1) может быть записана в форме

$$l = D^{[2n]}.$$

Пусть D^* означает класс всех тех функций $\varphi(t) \in \mathrm{L}^2(a, b)$, для которых квазипроизводные $\varphi^{[k]}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$ абсолютно непрерывны, а квазипроизводная $\varphi^{[2n]}(t)$ принадлежит $\mathrm{L}^2(a, b)$. Очевидно, D^* есть наибольшее линейное многообразие в $\mathrm{L}^2(a, b)$, на котором операция l имеет естественный смысл и может рассматриваться как оператор в $\mathrm{L}^2(a, b)$. Мы обозначим этот оператор L^*, так что $\mathrm{D}^* = \mathrm{D}_{L^*}$. Ниже мы обнаружим целесообразность этого обозначения.

Из представления (1) легко получить для любых двух функций $\varphi, \psi \in \mathrm{D}^*$ так называемое *тождество Лагранжа*

$$l[\varphi]\bar{\psi} - \varphi l[\bar{\psi}] = \frac{d}{dt}[\varphi, \psi]_t,$$

где $[\varphi, \psi]_t$ — следующая билинейная форма:

$$[\varphi, \psi]_t = \sum_{k=1}^{n} \{\varphi^{[k-1]}(t)\overline{\psi^{[2n-k]}(t)} - \varphi^{[2n-k]}(t)\overline{\psi^{[k-1]}(t)}\}.$$

Мы будем пользоваться тождеством Лагранжа в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta} l[\varphi(t)]\overline{\psi(t)}\,dt - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, l[\overline{\psi(t)}]\,dt = [\varphi, \psi]_{\alpha}^{\beta},$$

где $[\alpha, \beta]$ — любая замкнутая часть интервала (a, b) и

$$[\varphi, \psi]_{\alpha}^{\beta} = [\varphi, \psi]_{\beta} - [\varphi, \psi]_{\alpha}.$$

Так как каждый из интегралов

$$\int_{a}^{\beta} l[\varphi(t)]\overline{\psi(t)}\,dt, \quad \int_{a}^{\beta} \varphi(t)\, l[\overline{\psi(t)}]\,dt$$

существует при $\alpha = a$, $\beta = b$, то *билинейная форма* $[\varphi, \psi]_t$ *имеет конечное значение и на концах интервала* (a, b), *независимо от того, являются ли эти концы регулярными или сингулярными.* При этом под значением билинейной формы на сингулярном конце мы понимаем предел $]\varphi, \psi]_t$ при приближении t к этому концу.

Пусть l — дифференциальная операция, регулярная или сингулярная на интервале (a, b), а $g(t)$ — комплексная функция, измеримая и локально суммируемая в этом интервале. *Решением* уравнения

$$l[y] - \lambda y = g(t) \tag{3}$$

при некотором комплексном значении параметра λ естественно называть всякую функцию $\varphi(t)$, которая абсолютно непрерывна вместе со своими квазипроизводными до $(2n-1)$-го порядка и которая обращает это уравнение в тождество почти всюду в (a, b),

Для уравнения (3) имеет место следующая теорема существования, доказательство которой нетрудно получить, пользуясь методом последовательных приближений Пикара.

Теорема. *Уравнение* (3) *имеет решение* $\varphi(t)$, *и притом только одно, удовлетворяющее условиям типа Коши*:

$$\varphi^{[k]}(t_0) = \alpha_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1),$$

где t_0 — *произвольная внутренняя точка интервала* (a, b) *или его регулярный конец.*

Заметим, что если операция l регулярна на интервале (a, b), и $g(t) \in L^2(a, b)$, то в силу самого уравнения (3) это решение будет принадлежать D^*.

Из теоремы существования следует, в частности, что линейнсе многообразие решений однородного уравнения

$$l[u]-\lambda u=0 \tag{4}$$

имеет размерность $2n$. Необходимым и достаточным условием линейной независимости решений $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ уравнения (4) является неравенство нулю определителя типа Вронского

$$W[u_1, u_2, \ldots, u_{2n}] = \det\left(u_i^{[k-1]}(t)\right)_{i,k=1}^{2n}.$$

Любая система $2n$ линейно независимых решений уравнения (4) называется *фундаментальной.*

Если функции

$$u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_{2n}(t) \tag{5}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (4), то любое решение неоднородного уравнения (3) можно представить в виде

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{2n} u_k(t)\int_{t_0}^{t} v_k(s)\,g(s)\,ds+\sum_{k=1}^{2n} c_k u_k(t),$$

что легко установить, модифицируя надлежащим образом классический метод вариации произвольных постоянных. При этом, как и в классическом случае, устанавливается, что функции

$$v_1(t),\ v_2(t),\ \ldots,\ v_{2n}(t) \tag{6}$$

также образуют фундаментальную систему решений уравнения (4), так называемую *сопряженную* по отношению к (5) систему.

Для дальнейшего нам еще понадобится следующая простая

Лемма. *Если операция l регулярна на интервале (a, b), то для разрешимости уравнения* (3) *при граничных условиях*

$$y^{[k]}(a)=y^{[k]}(b)=0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1)$$

необходимо и достаточно, чтобы правая часть $g(t)$ была ортогональна к $2n$-мерному многообразию решений однородного уравнения

$$l[u]-\bar{\lambda}u=0. \tag{4'}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям

$$\varphi^{[k]}(b)=0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1).$$

Применяя тождество Лагранжа к функции $\varphi(t)$ и некоторой функции $u_i(t)$ из фундаментальной системы решений уравнения (4′), получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\{u_i^{[k-1]}(a)\overline{\varphi^{[2n-k]}(a)}-u_i^{[2n-k]}(a)\overline{\varphi^{[k-1]}(a)}\}=$$
$$=\int_a^b u_i(s)\overline{g(s)}\,ds. \qquad (7)$$

Подчиняя фундаментальную систему начальным условиям

$$u_i^{[k-1]}(a)=\begin{cases}0 & (i\neq k),\\ 1 & (i=k),\end{cases}$$

получим

$$\overline{\varphi^{[r]}(a)}=\begin{cases}-\int_a^b u_{2n-r}(s)\overline{g(s)}\,ds & (r=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),\\ \int_a^b u_{2n-r}(s)\overline{g(s)}\,ds & (r=n,\ n+1,\ \ldots,\ 2n-1),\end{cases} \qquad (8)$$

откуда следует справедливость леммы.

До сих пор в этом п° мы рассматривали самосопряженные дифференциальные операции *с вещественными* коэффициентами. Такие операции обязательно имеют четный порядок (речь идет о скалярных операциях, а не о системах дифференциальных уравнений). В общем случае самосопряженные операции с комплексными коэффициентами могут иметь произвольный четный ($2n$) или нечетный ($2n+1$) порядок $r\geqslant 1$. При достаточной гладкости коэффициентов они могут быть записаны в виде

$$l=\sum_{k=0}^{r} i^k l_k,$$

где

$$l_{2j}=D^j p_{n-j} D^j,$$
$$l_{2j+1}=\frac{1}{2}D^j\{Dq_{n-j}+\bar{q}_{n-j}D\}D^j,$$

причем $n=\left[\frac{r}{2}\right]$, а функции $p_k(t)$ вещественны. Выражение l можно представить в форме, аналогичной (1) и для него тоже могут быть введены квазипроизводные*, что позволяет, как и выше, отказаться от требований гладкости коэффициентов, за исключением требования локальной непрерывности $q_0(t)$ в случае операции нечетного порядка.

---

* См. по этому поводу Ф. С. Рофе-Бекетов. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций, ДАН СССР, 1969, 184, № 5. Для дифференциальных операций четного порядка с комплексными коэффициентами выражения для квазипроизводных имеются в книге Ф. Хартмана. Обыкновенные дифференциальные уравнения, глава XI, § 11. М., «Мир», 1970 (пер. с англ.).

Заметим, что всюду в основном тексте этой главы коэффициенты дифференциальных операций предполагаются вещественными.

124. Регулярные дифференциальные операторы. Пусть l — какая-нибудь самосопряженная регулярная дифференциальная операция, заданная на интервале (a, b). Если φ, ψ — произвольно взятые функции из D^*, то разность

$$(L^*\varphi, \psi) - (\varphi, L^*\psi) = [\varphi, \psi]_a^b,$$

вообще говоря, не равна нулю и, следовательно, L^* не является симметрическим оператором. Чтобы правая часть написанного соотношения равнялась нулю, необходимо наложить какие-то дополнительные условия на функции φ, ψ и тем самым перейти от области D^* к некоторой ее части. Во всяком случае достаточно потребовать, чтобы каждая из функций φ, ψ удовлетворяла соотношениям

$$y^{[k]}(a) = y^{[k]}(b) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1). \tag{1}$$

Обозначим через D совокупность всех тех функций из D^*, которые удовлетворяют $4n$ условиям (1). Естественно ожидать, что оператор L, областью определения которого является $D_L = D$ и который в этой области совпадает с L^*, уже будет симметрическим оператором. Так как для любых функций $\varphi, \psi \in D$

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, L\psi),$$

то необходимо лишь установить плотность в $L^2(a, b)$ многообразия D. Это последнее очевидно в том случае, когда операция l является дифференциальной в обычном смысле, так как в этом случае многообразие D содержит, например, все многочлены, удовлетворяющие условиям (1). Для доказательства плотности D в $L^2(a, b)$ в общем случае заметим, что на основании леммы n° 123 имеет место разложение в ортогональную сумму

$$L^2(a, b) = \Delta_L + \mathfrak{N}_0, \tag{2}$$

где $\mathfrak{N}_0$ есть $2n$-мерное многообразие решений однородного уравнения

$$l(u) = 0.$$

Примем теперь, что $(h, \varphi) = 0$ для некоторого $h \in L^2(a, b)$ при всех $\varphi \in D$. Мы должны доказать, что $h = 0$. С этой целью обозначим через ψ какое-нибудь решение уравнения

$$l[\psi] = h.$$

На основании тождества Лагранжа

$$(\psi, l[\varphi]) = (l[\psi], \varphi) = (h, \varphi) = 0.$$

Так как $l[\varphi] = L^*\varphi = L\varphi \in \Delta_L$, то в силу (2) $\psi \in \mathfrak{N}_0$, т. е.

$$l[\psi] = 0,$$

и, значит, $h = 0$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что оператор L^* является сопряженным для оператора L и тем самым оправдывает свое обозначение. Обозначим на минутку оператор, сопряженный с L, через M. Пусть $\psi \in \mathrm{D}_M$ и пусть

$$M\psi = \chi.$$

Обозначим через ψ_0 какое-нибудь решение уравнения

$$l[y] = \chi.$$

Тогда в силу тождества Лагранжа при любом $\varphi \in \mathrm{D}$

$$(\varphi, \chi) = (\varphi, l[\psi_0]) = (l[\varphi], \psi_0) = (L\varphi, \psi_0).$$

А с другой стороны, по определению сопряженного оператора,

$$(\varphi, \chi) = (\varphi, M\psi) = (L\varphi, \psi).$$

Таким образом,

$$(L\varphi, \psi - \psi_0) = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности $\varphi \in \mathrm{D}_L$ и разложения (2), следует, что

$$\psi = \psi_0 \in \mathfrak{N}_0.$$

Это включение показывает, что $\psi \in \mathrm{D}^*$ и что, следовательно,

$$M\psi = \chi = l[\psi_0] = l[\psi].$$

Итак, мы показали, что

$$M \subseteq L^*.$$

Но, с другой стороны, при любом $\varphi \in \mathrm{D}$ и любом $\psi \in \mathrm{D}^*$

$$(L\varphi, \psi) - (\varphi, L^*\psi) = [\varphi, \psi]_a^b = 0.$$

Следовательно,

$$L^* \subseteq M.$$

Значит,

$$M = L^*,$$

и наше утверждение доказано.

Читатель легко проверит, что L^{**} совпадает с L, откуда следует замкнутость оператора L.

Как уже отмечалось в n° 123, область $D_L{}^*$ является наиболее широким линейным многообразием, на котором операция l порождает оператор в $L^2(a, b)$. Любой замкнутый симметрический оператор, порожденный операцией l, для которого область определения сопряженного оператора входит в $D_L{}^*$, является расширением оператора L. Поэтому мы будем называть оператор L регулярным дифференциальным оператором с *минимальной областью определения* или, короче, *минимальным* дифференциальным оператором (порожденным операцией l).

Так как уравнение $L^*\psi - \lambda\psi = 0$ имеет (при любом λ) $2n$ линейно независимых решений, то индекс дефекта оператора L есть $(2n, 2n)$. Для описания всех самосопряженных расширений оператора L достаточно указать все области определения этих расширений*. Мы покажем, что область определения любого самосопряженного расширения оператора L может быть задана с помощью некоторых граничных условий, и дадим характеристику всех таких условий.

Прежде всего заметим, что из тождества Лагранжа и леммы, приведенной в конце n° 46, вытекает следующий

Критерий самосопряженности. *Если оператор $\tilde{L}$ есть расширение оператора L, то для самосопряженности оператора $\tilde{L}$ необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

1) $\tilde{L} \subset L^*$;

2) *включение $\varphi \in D_{\tilde{L}}$ эквивалентно справедливости равенства*

$$[\varphi, \psi]_a^b = 0 \tag{3}$$

при всех $\psi \in D_{\tilde{L}}$.

Ближайшей нашей задачей будет преобразование этого критерия к более удобной форме.

Мы посвятим ему следующий n°, который написан на основе одной статьи Рофе-Бекетова**.

125. Самосопряженные расширения регулярного дифференциального оператора. Если каждой функции $\varphi \in DL^*$ сопоставить

---

* Здесь и далее, говоря о самосопряженных расширениях, мы имеем в виду самосопряженные расширения первого рода.

Относительно общего вида граничных условий, характеризующих самосопряженные расширения дифференциальных операторов, см. Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, II.— «Мат. сб.», 1947, т. 63, а также Графф А. А. К теории линейных дифференциальных систем в области одного измерения.—«Мат. сб.», 1946, т. 60 и 1947, т. 63.

** Рофе—Бекетов Ф. С. О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций. — «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Харьков, 1969, 8, с. 3-24.

упорядоченную пару $\{\hat{\varphi}, \hat{\varphi}'\}$ векторов $2n$-мерного комплексного евклидова пространства (см. п° 5) $\mathrm{E}_{2n} = \mathrm{E}$ по правилу

$$\hat{\varphi} = \{\varphi(a), \varphi'(a), \ldots, \varphi^{(n-1)}(a), \varphi(b), \varphi'(b), \ldots, \varphi^{(n-1)}(b)\} \quad (1)$$

$$\hat{\varphi}' = \{\varphi^{[2n-1]}(a), \ldots, \varphi^{[n]}(a), -\varphi^{[2n-1]}(b), \ldots, -\varphi^{[n]}(b)\}, \quad (1')$$

то при любых $\varphi, \psi \in \mathrm{D}_{L^*}$

$$[\varphi, \psi]_a^b = (\hat{\varphi}', \hat{\psi})_{\mathrm{E}} - (\hat{\varphi}, \hat{\psi}')_{\mathrm{E}},$$

где символом $(.,.)_{\mathrm{E}}$ обозначено скалярное произведение в Е.

В силу этого замечания условия 1), 2) в критерии предыдущего п° можно заменить следующими:

1) $\tilde{L} \subset L^*$;

2) *включение* $\varphi \in \mathrm{D}_{\tilde{L}}$ *эквивалентно справедливости равенства*

$$(\hat{\varphi}', \hat{\psi})_{\mathrm{E}} = (\hat{\varphi}, \hat{\psi}')_{\mathrm{E}} \quad (2)$$

при всех $\psi \in \mathrm{D}_{\tilde{L}}$.

Этот результат удобно сформулировать с помощью понятия о бинарных отношениях. Поясним это понятие в его общей форме Пусть дано некоторое множество $\mathfrak{M}$ и дан закон, по которому в $\mathfrak{M}$ выбираются упорядоченные пары элементов x, y. *Бинарным отношением* в $\mathfrak{M}$ называется этот закон, или, что то же самое, получаемое в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ подмножество* пар $\{x, y\}$. Это подмножество и упомянутый закон обозначим одной буквой, скажем $\mathfrak{k}$, и наряду с $\{x, y\} \in \mathfrak{k}$ будем также пользоваться записью $x\mathfrak{k}y$.

В интересующем нас вопросе формулы (1), (1′) определяют отношение в E, элементами которого являются пары $\{\hat{\varphi}, \hat{\psi}'\}$, обладающие свойством (2).

Определение. *Заданное в* Е *бинарное отношение* $\mathfrak{f}$ *называется эрмитовым отношением, если*

1° из $x\mathfrak{k}x'$, $y\mathfrak{k}y'$ *всегда следует равенство*

$$(x', y)_{\mathrm{E}} = (x, y')_{\mathrm{E}}; \quad (3)$$

2° *из выполнения равенства* (3) *для некоторых элементов* $x, x' \in \mathrm{E}$ *при всех* $\{y, y'\} \in \mathfrak{k}$ *следует, что* $\{x, x'\} \in \mathfrak{k}$.

Нетрудно показать, что эрмитово отношение линейно, то есть из $x\mathfrak{k}x'$, $y\mathfrak{k}y'$ следует, что

$$(\alpha x + \beta y)\,\mathfrak{k}\,(\alpha x' + \beta y')$$

при любых (комплексных) α, β.

---

* См., например, Маклейн С. Гомология, М., «Мир», 1966. В этой книге $\mathfrak{M}$ есть векторное пространство, а отношение предполагается по определению линейным многообразием в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$.

Теперь дадим компактную формулировку приведенного в начале этого п° критерия.

Теорема 1. *Линейное многообразие* $\tilde{\mathrm{D}} \subset \mathrm{D}_{L^*}$ *является тогда и только тогда областью определения* $\mathrm{D}_{\tilde{L}}$ *некоторого самосопряженного расширения* $\tilde{L}$ *оператора* L, *когда существует такое эрмитово отношение* $\mathfrak{k}$ *в* $2n$-*мерном евклидовом пространстве* E, *что*

$$\varphi \in \tilde{\mathrm{D}} \leftrightarrow \hat{\varphi}\mathfrak{k}\hat{\varphi}'. \tag{4}$$

При этом $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}' \in \mathrm{E}$ *связаны с* $\varphi \in \mathrm{D}_L{}^*$ *формулами* (1), (1')*.

Заметим, что если $v\mathfrak{k}v'$ и $v' = iv$, то $v = 0$. Действительно, в силу определения эрмитова отношения

$$(v,\ v')_{\mathrm{E}} = (v',\ v)_{\mathrm{E}},$$

но в рассматриваемом случае левая часть есть $-i\,(v,\ v)_{\mathrm{E}}$, а правая $i\,(v,\ v)_{\mathrm{E}}$.

Из этого замечания вытекают следующие утверждения:

A. Пара $\{x,\ x'\} \in \mathfrak{k}$ однозначно определяется каждым из векторов

$$x^+ = x + ix',\ \ x^- = x - ix'.$$

B. Когда $x\mathfrak{k}x'$ пробегает все отношение $\mathfrak{k}$, каждый из векторов x^+, x^- пробегает все пространство E.

C. Оператор $U = U_{\mathfrak{k}}$, определяемый формулой

$$U\,(x + ix') = x - ix',$$

где $x\mathfrak{k}x'$, унитарен.

Очевидно, достаточно доказать лишь изометричность оператора U. Вот это доказательство:

$$\| x \pm ix' \|_{\mathrm{E}}^2 = \| x \|_{\mathrm{E}}^2 + \| x' \|_{\mathrm{E}}^2 \pm [(x,\ ix')_{\mathrm{E}} + (ix',\ x)_{\mathrm{E}}] =$$
$$= \| x \|_{\mathrm{E}}^2 + \| x' \|_{\mathrm{E}}^2,$$

так как из соотношения (3) при $\{x,\ x'\} = \{y,\ y'\} \in \mathfrak{k}$ следует, что

$$(x',\ x)_{\mathrm{E}} - (x,\ x')_{\mathrm{E}} = 0.$$

Оператор U естественно назвать преобразованием Кэли эрмитова отношения $\mathfrak{k}$.

---

* Очевидно, что не только каждому $\varphi \in \mathrm{D}_{L^*}$ отвечает $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}'$, но и при любых $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}' \in \mathrm{E}$ найдется (и, конечно, не единственная) функция $\varphi \in \mathrm{D}_{L^*}$, для которой выполнены (1), (1').

Теорема 2. *Каковы бы ни были самосопряженный* оператор A *и унитарный оператор* U *в пространстве* E, *отношение, определяемое любым из уравнений*

$$(\cos A)\,x - (\sin A)\,x' = 0, \tag{5}$$

$$(U - I)\,x + i\,(U + I)\,x' = 0, \tag{6}$$

является эрмитовым отношением, и обратно, всякое эрмитово отношение $\mathfrak{k}$ *представимо в формах* (5), (6). *При этом операторы* $-e^{2iA}$ *и* U *в соотношениях* (5), (6) *определяются отношением* $\mathfrak{k}$ *однозначно и являются его преобразованием Кэли.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что отношение $\mathfrak{k}$, заданное уравнением (5), можно записать в виде

$$x = (\sin A)\,v,\quad x' = (\cos A)\,v. \tag{5'}$$

При этом элемент $v \in E$ по паре $x\mathfrak{k}x'$ определяется однозначно так как из (5') следует, что

$$v = (\sin A)\,x + (\cos A)\,x'.$$

И обратно, все элементы $x\mathfrak{k}x'$, определяемые уравнением (5), могут быть получены с помощью параметрического представления (5'), когда v пробегает E.

Сказанное позволяет проверить, что отношение $\mathfrak{k}$, заданное уравнением (5), есть эрмитово отношение. Действительно, если x, x' и y, y' удовлетворяют (5), то кроме представления (5') мы будем иметь еще представление

$$y = (\sin A)\,w,\quad y' = (\cos A)\,w, \tag{5''}$$

где w — какой-то элемент E. Но тогда

$$(x,\ y')_E = ((\sin A)\,v,\ (\cos A)\,w)_E = (v,\ (\sin A\cos A)\,w)_E,$$
$$(x',\ y)_E = ((\cos A)\,v,\ (\sin A)\,w)_E = (v,\ (\cos A\sin A)\,w)_E =$$
$$= (v,\ \sin A\cos A)\,w)_E,$$

т. е. $(x,\ y')_E = (x',\ y)_E$ и, значит, проверено условие 1° определения эрмитова отношения. Чтобы проверить условие 2°, возьмем два элемента x, $x' \in$ E и примем, что для любой пары $y\mathfrak{k}y'$

$$(x,\ y')_E = (x',\ y)_E.$$

Это значит, что при любом $w \in$ E

$$(x,\ (\cos A)\,w)_E = (x',\ (\sin A)\,w)_E$$

или

$$((\cos A)\,x - (\sin A)\,x',\ w)_E = 0,$$

откуда и вытекает, что

$$(\cos A)\,x - (\sin A)\,x' = 0,$$

т. е. $x\mathfrak{k}x'$.

Отношение $\mathfrak{k}$, задаваемое уравнением (6), сводится к рассмотренному, если положить $U = -e^{2iA}$.

Поэтому одна часть теоремы 2 доказана.

Что касается второй части, то ее достаточно доказать применительно к уравнению (6). Если $\mathfrak{k}$ — заданное эрмитово отношение, то из установленного выше утверждения C следует, что уравнение (6) имеет место во всяком случае при $U = U_{\mathfrak{k}}$, где $U_{\mathfrak{k}}$ — преобразование Кэли эрмитова отношения $\mathfrak{k}$. Но в силу утверждений A и B это уравнение будет иметь место только при $U = U_{\mathfrak{k}}$.

Из теоремы 1 и 2 вытекает основная

Теорема 3. *Всякое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ минимального оператора L определяется краевыми условиями любого из видов*

$$(\cos A)\,\hat{\varphi} - (\sin A)\,\hat{\varphi}' = 0 \tag{7}$$

или

$$(U - I)\,\hat{\varphi} + i\,(U + I)\,\hat{\varphi}' = 0, \tag{8}$$

где A, U — эрмитова, соответственно, унитарная $2n \times 2n$ матрицы, а векторы $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}'$ определяются по $\varphi(t) \in \mathrm{D}_{L^*}$ формулам (1), (1′). *Обратно, любым из краевых условий вида* (7), (8) *порождается некоторое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ оператора L.*

Граничные условия, порождающие самосопряженное расширение дифференциального оператора, называются *самосопряженными.*

Примеры. 1) Распадающиеся самосопряженные краевые условия для оператора порядка $2n$ приводятся к виду

$$(\cos A_a)\,\hat{\varphi}_a - (\sin A_a)\,\hat{\varphi}_a' = 0,$$
$$(\cos A_b)\,\hat{\varphi}_b + (\sin A_b)\,\hat{\varphi}_b' = 0,$$

где A_a, A_b — произвольные эрмитовы $n \times n$ матрицы, а векторы $\hat{\varphi}_t$, $\hat{\varphi}_t'$ $(t = a, b)$ определены формулами

$$\hat{\varphi}_t = \{\varphi(t),\ \varphi'(t),\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(t)\},$$
$$\hat{\varphi}_t' = \{\varphi^{[2n-1]}(t),\ \varphi^{[2n-2]}(t),\ \ldots,\ \varphi^{[n]}(t)\}.$$

Эти условия получаются из (7), если в качестве A взять блочно-диагональную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_b \end{pmatrix}.$$

В частности, если A — диагональная матрица, то мы получим самосопряженные условия вида

$$\begin{aligned} \sin\alpha_k\varphi^{[2n-k]}(a) - \cos\alpha_k\varphi^{(k-1)}(a) &= 0 \\ \sin\beta_k\varphi^{[2n-k]}(b) + \cos\beta_k\varphi^{(k-1)}(b) &= 0 \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где α_k, β_k — произвольные вещественные параметры.

2) Обобщенные периодические условия

$$\begin{aligned} e^{i\alpha_k}\varphi^{[2n-k]}(b) &= \varphi^{[2n-k]}(a) \\ & \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \\ e^{i\alpha_k}\varphi^{(k-1)}(b) &= \varphi^{(k-1)}(a). \end{aligned}$$

Эти условия получаются из (8), (I), (I′) при

$$U = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} e^{i\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\alpha_n} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} e^{-i\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-i\alpha_n} \end{matrix} & 0 \end{array}\right).$$

Найденные краевые условия перейдут в эквивалентные им условия, если равенства (7) или (8) умножить слева на произвольную невырожденную $2n\times 2n$ матрицу. Поэтому возникает вопрос, в каком случае будет самосопряженным условие вида

$$B\hat{\varphi} - C\hat{\varphi}' = 0, \tag{9}$$

где B, C — некоторые $2n\times 2n$ матрицы.

Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 4. *Граничное условие* (9) *тогда и только тогда порождает самосопряженное расширение оператора* L, *когда*

$$\det(BB^* + CC^*) \neq 0 \tag{10}$$

и

$$BC^* = CB^*. \tag{11}$$

Уравнение (9) с одним лишь условием (10) определит квазисамосопряженное расширение оператора L в смысле п° 114.

Доказательство этой теоремы, а также другие интересные факты читатель найдет в цитированной на с. 165 работе Ф. С. Рофе-Бекетова.

Повторяя известные выкладки, легко построить функцию Грина $\tilde{G}(t, s)$ любого такого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ оператора L, для которого $\lambda = 0$ не является собственным числом. Функция $\tilde{G}(t, s)$ есть ядро Гильберта — Шмидта, а интегральный оператор $\tilde{K}$, определяемый этим ядром, связан с оператором $\tilde{L}$ формулой

$$\tilde{K} = \tilde{L}^{-1}.$$

Отсюда следует, что *спектр оператора $\tilde{L}$ состоит лишь из собственных значений, которые имеют единственную предельную точку и притом на бесконечности.*

Таким будет спектр $\tilde{L}$ и в том случае, когда $\lambda = 0$ оказывается собственным числом. Действительно, меняя параметры в краевых условиях, всегда можно найти такое самосопряженное расширение $\tilde{L}_1$ оператора L, для которого 0 не является собственным числом, и потому спектр $\tilde{L}_1$ будет обладать доказанными свойствами. Но тогда эти же свойства сохраняются для спектра любого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ оператора L (так как расширение конечномерно).

126. Сингулярные дифференциальные операторы*. Мы начнем со случая, когда интервалом является $(0, \infty)$, т. е. правый конец интервала сингулярен. Левый конец интервала предположим регулярным.

Введем оператор $\overset{\circ}{L}$ равенством

$$\overset{\circ}{L}\varphi = l[\varphi]$$

на многообразии $D_{\overset{\circ}{L}}$, представляющем совокупность всех финитных функций из D^*, которые удовлетворяют условиям

$$\varphi(0) = \varphi^{[1]}(0) = \cdots = \varphi^{[2n-1]}(0) = 0. \qquad (1)$$

Так как оператор L°, очевидно, симметрический, то он допускает замыкание, которое мы обозначим через L и будем называть (см. n° 124) сингулярным дифференциальным оператором с *минимальной областью определения* (короче: *минимальным* дифференциальным оператором).

Теорема 1. *Оператор L^* является сопряженным для оператора L.*

Доказательство. Как и в n° 124, обозначим через M оператор, сопряженный с L. Так как включение

$$D_{L^*} \subseteq D_M$$

и равенство

$$M\psi = l[\psi]$$

при $\psi \in D_{L^*}$ очевидны, то нам надлежит лишь доказать, что

$$D_M \subseteq D_{L^*}.$$

---

* n° n° 126, 127 и 128 представляют извлечение из статьи: Глазман И. М. К теории сингулярных квазидифференциальных операторов. — УМН, 1950, 5, вып. 6, с. 102—135.

С этой целью, как и в n° 124, возьмем какую-нибудь функцию $\psi \in D_M$ и положим

$$M\psi = \chi.$$

Далее обозначим через ψ_0 какое-нибудь решение уравнения

$$l[y] = \chi.$$

Теперь нам остается доказать, что

$$\psi(t) = \psi_0(t) + u(t),$$

где $u(t)$ есть некоторое решение уравнения

$$l[y] = 0. \tag{2}$$

С этой целью возьмем функцию $g(t) \in L^2(0, \infty)$, равную нулю при $t \geqslant a$ и ортогональную к $2n$-мерному многообразию решений уравнения (2) в интервале $0 \leqslant t \leqslant a$. Тогда согласно n° 123 найдется функция $\varphi(t)$, равная нулю при $t \geqslant a$ и удовлетворяющая уравнению

$$l[\varphi] = g,$$

а также условию (1). Очевидно, $\varphi \in D_{\tilde{L}} \subset D_L$ и, следовательно,

$$(g, \psi) = (L\varphi, \psi) = (\varphi, M\psi) = (\varphi, \chi).$$

Но, с другой стороны*,

$$(g, \psi_0) = (l[\varphi], \psi_0) = (\varphi, l[\psi_0]) = (\varphi, \chi).$$

Поэтому

$$(g, \psi - \psi_0) = 0.$$

Отсюда, учитывая степень произвола в выборе функции $g(t)$, мы получим, что

$$\psi(t) - \psi_0(t) = u(t),$$

где $u(t)$ — решение уравнения (2).

Примечание. Отметим, что все функции из D_L удовлетворяют условию (1). Действительно, пусть $\psi(t)$ есть произвольная функция из D_{L^*}, равная нулю при $t \geqslant a$. Тогда при $\varphi \in D_L$ из равенств

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, L^*\psi),$$

$$(l[\varphi], \psi) = [\varphi, \psi]_0^a + (\varphi, l[\psi])$$

следует, что

$$[\varphi, \psi]_0^a = 0,$$

* Хотя $\psi_0 \overline{\in} L^2(0, \infty)$, запись (g, ψ_0) допустима, так как g — финитна.

откуда

$$[\varphi, \psi]_0 = 0,$$

а в силу произвольности значений $\psi^{[k-1]}(0)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ это означает, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (1).

Переходим к вопросу о дефектных числах оператора L, которые одинаковы в силу вещественности коэффициентов операции l.

Теорема 2. *Дефектное число m дифференциального оператора $2n$-го порядка на интервале с одним сингулярным концом удовлетворяет неравенству*

$$n \leqslant m \leqslant 2n. \tag{3}$$

Доказательство. Правая часть неравенства непосредственно следует из теоремы 1.

Для доказательства левой части неравенства воспользуемся первой формулой Неймана (n° 102)

$$\mathrm{D}_{L^*} = \mathrm{D}_L \oplus \mathfrak{N}_\lambda \oplus \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}.$$

Вследствие равенства размерностей подпространств $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ достаточно установить, что

$$\dim \mathrm{D}_{L^*} \geqslant 2n \quad (\operatorname{mod} \mathrm{D}_L).$$

С этой целью докажем существование $2n$ линейно независимых функций, принадлежащих D_{L^*}, никакая нетривиальная линейная комбинация которых не принадлежит D_L. Нетрудно видеть, что в качестве таких функций можно взять любые линейно независимые функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_{2n}(t)$ из D_{L^*}, удовлетворяющие условию

$$\det \left(\psi_i^{[k-1]}(0)\right)_{i,k=1}^{2n} \neq 0,$$

ибо тогда из предположения

$$\psi = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \psi_i \in \mathrm{D}_L$$

следуют (см. примечание к теореме 1) равенства

$$\psi(0) = \psi^{[1]}(0) = \ldots = \psi^{[2n-1]}(0) = 0,$$

откуда вытекает, что все $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 2n)$.

Из теорем 1 и 2 следует, что число решений уравнения

$$l[u] - \lambda u = 0 \quad (\Im\lambda \neq 0),$$

принадлежащих $L^2(0, \infty)$, не менее половины порядка операции l (и не зависит от λ).

Число m в неравенстве (3) может принимать любые значения между n и $2n$. Любопытно отметить, что при $l_1 = -i(1+t)D(1+t)$, $l_2 = D^2 - 1$

оператор $2n$-го порядка с минимальной областью определения, порожденный операцией

$$l = l_1^{m-n} l_2^{2n-m} l_1^{m-n} \quad (n \leqslant m \leqslant 2n)$$

на интервале $(0, \infty)$, имеет индекс дефекта (m, m). Проверка этого факта предоставляется читателю*.

Рассмотрения, относящиеся к случаю интервала $(-\infty, \infty)$ с двумя сингулярными концами, аналогичны приведенным выше. Оператор L с минимальной областью определения и в этом случае определяется как замыкание оператора $\mathring{L}$, но условие (1) следует опустить. Теорема 1, характеризующая оператор L^*, сохраняется. Теорему 2 заменяет следующая

Теорема 3. *Пусть $L^{(-)}$ и $L^{(+)}$ — сингулярные дифференциальные операторы с минимальными областями определения, порожденные операцией l в интервалах* $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ *соответственно. При этих условиях дефектное число m оператора L определяется формулой*

$$m = m^{(-)} + m^{(+)} - 2n,$$

где $m^{(-)}$ и $m^{(+)}$ — дефектные числа операторов $L^{(-)}$ и $L^{(+)}$ соответственно.

Доказательство. Сузим область определения оператора $\mathring{L}$, подчинив функцию φ из $D_{\mathring{L}}$ дополнительному требованию

$$\varphi(0) = \varphi^{[1]}(0) = \cdots = \varphi^{[2n-1]}(0) = 0,$$

и обозначим полученное таким образом линейное многообразие через D_0, а оператор, совпадающий с оператором $\mathring{L}$ на D_0 и определенный лишь на D_0, обозначим через $\mathring{L}_0$. Пусть L_0 есть замыкание $\mathring{L}_0$. Очевидно,

$$\dim D_L = 2n \quad (\operatorname{mod} D_{L_0}).$$

Но в силу замечания n° 102 (с. 46) $\dim D_L$ $(\operatorname{mod} D_{L_0})$ равняется избытку дефектного числа оператора L_0 над дефектным числом оператора L. Следовательно, дефектное число оператора L_0 равно

$$m_0 = m + 2n.$$

С другой стороны, оператор L_0 приводится подпространствами $L^2(-\infty, 0)$ и $L^2(0, \infty)$ и при этом

$$L_0 = L^{(-)} \oplus L^{(+)},$$

* В связи с этим см. Глазман И. М. Об индексе дефекта дифференциальных операторов. — ДАН СССР, 1949, т. LXIV, № 2.

так что

$$m_0 = m^{(-)} + m^{(+)}.$$

Таким образом,

$$m = m^{(-)} + m^{(+)} - 2n,$$

что и требовалось доказать.

В отличие от симметрических дифференциальных операторов с вещественными коэффициентами, дефектные числа сингулярного симметрического дифференциального оператора с комплексными коэффициентами могут и не быть равными между собой, простейшим примером чего является оператор $P = i\frac{d}{dt}$ на полуоси $[0, \infty)$ (см. п° 101). Различными могут оказаться и дефектные числа оператора четного порядка.

Теорема 4*. *Дефектные числа (m, s) минимального симметричного дифференциального оператора L произвольного порядка $r = 2n$ или $r = 2n + 1$ с комплексными коэффициентами на полуоси $[0, \infty)$ удовлетворяют неравенствам*

$$\left[\frac{r}{2}\right] \leqslant m, \; s \leqslant r; \; m + s \geqslant r.$$

(Последнее неравенство показывает, что если одно из дефектных чисел оператора порядка $r = 2n + 1$ есть n, то второе не меньше, чем $n + 1$).

Теорема 5.** *Если одно из дефектных чисел (m, s) симметричного дифференциального оператора L порядка $r > 1$ равно r, то и второе тоже равно r, то есть $m = s = r$.* (При $r = 1$ *теорема неверна, как показывает пример оператора $i\frac{d}{dt}$ на полуоси*).

Можно показать***, что для симметрических операторов с комплексными коэффициентами реализуются любые значения дефектных чисел m, s, совместимые с теоремами **4** и **5** и удовлетворяющие дополнительному ограничению $|m - s| \leqslant 1$.

---

* Everitt W. N. Integrable-square solutions of ordinary differential equations.—„J. Quart. Math. Oxtord“, 1959, 1 (2), 10, p. 145—155.

** Для операторов с вещественными коэффициентами эта теорема тривиальна. Для операторов четного порядка с комплексными коэффициентами ее установил W. N. Everitt Singular differential equations; I, the even order case.— „Math. Ann.“, 1964, Vol. 156, p. 9—24. Для операторов нечетного порядка V. I. Kogan, F. S. Rofe-Beketov. On square — integrable solutions of symmetric systems of differ. equations of arbitrary Order.— „Proc. Roy. Soc. Einburgh“, 1975, p. 5—40.

*** V. I. Kogan, F. S. Rofe — Beketov. On the question of deficiency indices of different. operators with complex coeffic.— „Proc. Roy. Soc. Edinburgh“, 1974, p. 281—298.

127. Самосопряженные расширения сингулярного дифференциального оператора. Самосопряженные расширения сингулярного оператора, подобно самосопряженным расширениям регулярного оператора, можно характеризовать с помощью системы граничных условий, имеющих, однако, более сложную структуру, чем соответствующие условия п° 125. Займемся случаем, когда всего один конец интервала сингулярен. Из общей теории расширений (см. п° 101) следует

Теорема 1. *Пусть индекс дефекта оператора* (L) *есть* (m, m) $(n \leqslant m \leqslant 2n)$ *и пусть функции*

$$u_k(t;\ \lambda) \in L^2(0,\ \infty)\ (k = 1,\ 2, \ldots,\ m)$$

образуют ортонормированную систему уравнений

$$l[u] - \lambda u = 0$$

при некотором фиксированном невещественном значении λ.

Пусть, далее, Γ_ϑ *есть линейная оболочка функций*

$$w_i^{(\vartheta)}(t,\ \lambda) = u_i(t;\ \lambda) + \sum_{k=1}^{m} \vartheta_{ik} \overline{u_k(t;\ \lambda)},$$

где $\vartheta = (\vartheta_{ik})$ — *унитарная матрица* m*-го порядка.*

В таком случае формула

$$\mathrm{D}_{L_\vartheta} = \mathrm{D}_L \oplus \Gamma_\vartheta \tag{1}$$

определяет взаимно однозначное соответствие между классом всех самосопряженных расширений L_ϑ *оператора* L *и классом всех унитарных* $m \times m$ *матриц* ϑ.

Доказательство. Достаточно заметить, что функции $\overline{u_k(t;\ \lambda)}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ образуют ортонормированную систему решений уравнения

$$L^* q - \bar{\lambda} q = 0.$$

Займемся выяснением тех граничных условий, которые характеризуют функции из D_{L_ϑ}.

Теорема 2. *Пусть* L_ϑ — *самосопряженное расширение оператора* L *с индексом дефекта* $(m,\ m)$, *определяемое в смысле теоремы 1 унитарной матрицей* ϑ. *Пусть, далее, функции* $w_i^{(\vartheta)}(t;\ \lambda)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме 1.*

В таком случае область определения D_{L_ϑ} *оператора* L_ϑ *состоит из всех функций* $\varphi(t) \in \mathrm{D}_{L^*}$, *которые удовлетворяют* m *условиям*

$$[\varphi,\ w_i^{(\vartheta)}]_0^\infty = 0 \quad (i = 1, 2,\ \ldots,\ m). \tag{2}$$

Доказательство. Заметим сначала, что на основании формулы Лагранжа для принадлежности функции $\varphi(t) \in D_{L^*}$ к D_{L_ϑ} необходимо и достаточно выполнение условия

$$[\varphi, \Psi]_0^\infty = 0 \tag{3}$$

для всех $\psi(t)$ из D_{L_ϑ}. Теперь остается показать, что система условий (3), содержащая «произвольную» функцию $\psi(t)$, сводится (при $\varphi(t) \in D_{L^*}$) к системе m условий (2).

Согласно формуле (1) функция $\psi(t)$ допускает представление

$$\psi(t) = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^{m} c_i w_i^{(\vartheta)}(t;\ \lambda) \quad (\varphi_0(t) \in D_L),$$

откуда

$$[\varphi, \psi]_0^\infty = [\varphi, \varphi_0]_0^\infty + \sum_{l=1}^{m} c_i [\varphi, w_i^{(\vartheta)}]_0^\infty.$$

Так как $\varphi_0(t) \in D_L$, то

$$[\varphi, \varphi_0]_0^\infty = 0$$

при $\varphi(t) \in D_{L^*}$, и в силу произвольности постоянных c_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ эквивалентность условий (3) и (2) установлена.

Мы сохраняем за равенствами (2), содержащими предельный переход, название граничных условий. Нижеследующая теорема указывает случай, когда граничные условия не содержат предельного перехода.

Теорема 3. *Если индекс дефекта оператора L есть (n, n), то системы граничных условий, определяющие самосопряженные расширения L_ϑ оператора L, имеют вид*

$$[\varphi, w_i^{(\vartheta)}]_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно установить, что при условии теоремы любые две функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из D_{L^*} удовлетворяют соотношению

$$[\varphi, \psi]_\infty = 0.$$

С этой целью выберем в D_{L^*} функции

$$\psi_i(t)\ (i = 1, 2, \ldots, 2n),\ \psi_i(t) = 0 \text{ при } t > a > 0,$$

так, чтобы

$$\det\left(\overset{[k-1]}{\psi_i}(0)\right)_{i,\,k=1}^{2n} \neq 0.$$

При таком выборе функций $\psi_i(t)$ их линейная оболочка не имеет с D_L общих элементов, отличных от нуля. С другой стороны, в силу предположения об индексе дефекта оператора L,

$$\dim D_{L^*} = 2n \quad (\operatorname{mod} D_L)$$

и, следовательно, для любой функции $\varphi(t) \in D_{L^*}$ существуют такие константы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$, что

$$\varphi(t) - \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \psi_i(t) = \varphi_0(t) \in D_L,$$

откуда, используя равенство функций $\psi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ нулю при $t > a$ и равенства $\varphi_0^{[k-1]}(0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$, получаем

$$[\varphi, \psi]_\infty = \left[\varphi_0 + \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \psi_i, \psi\right]_\infty = [\varphi_0, \psi]_\infty = 0.$$

Следует отметить, что в общем случае граничные условия (2) существенно зависят от функций

$$w_i^{(\vartheta)} \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

и, следовательно, не могут быть записаны, пока не задан оператор L. Однако если индекс дефекта оператора L есть (n, n), то граничные условия (4) могут быть по методу n° 125 освобождены от присутствия функций $w_i^{(\vartheta)}(t; \lambda)$ и, стало быть, не зависят от L.

В случае индекса дефекта $(2n, 2n)$ число граничных условий, определяющих самосопряженное расширение сингулярного оператора, равно $2n$, как и в случае регулярного оператора. В силу этого обстоятельства и некоторых других соображений (см. теорему 2 следующего n°) мы будем называть сингулярный оператор с индексом дефекта $(2n, 2n)$ *квазирегулярным*.

Для дифференциального оператора второго порядка возможны лишь случаи $m = 2$ или $m = 1$, что впервые было отмечено Г. Вейлем, назвавшим случай $m = 2$ случаем *предельного круга*, а случай $m = 1$ случаем *предельной точки*. Смысл этой терминологии мы поясним в n° 129.

Построение граничных условий для случая интервала с двумя сингулярными концами проводится без труда использованными в настоящем пункте приемами, и мы можем его опустить.

В заключение остановимся кратко на вопросе о самосопряженных расширениях L_ϑ, вещественных по отношению к оператору комплексного сопряжения в $L^2(0, \infty)$ (см. n° 50).

Так как оператор L^* вследствие вещественности коэффициентов порождающей дифференциальной операции является вещественным по отношению к оператору комплексного сопряжения, то для вещественности L_ϑ необходимо и достаточно, чтобы многообразие D_{L_ϑ} вместе с функцией $\varphi(t)$ содержало всегда функцию $\overline{\varphi(t)}$.

Используя это обстоятельство и формулу (1), легко установить, что *для вещественности оператора* L_ϑ *необходимо и достаточно*, *чтобы унитарная матрица $\vartheta = (\vartheta_{ik})$ была симметричной относительно транспонирования, т. е. чтобы было*

$$\vartheta_{ik} = \vartheta_{ki} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)^*.$$

Впрочем, в n° 128 нам придется использовать лишь существование хотя бы одного вещественного расширения, а этот факт непосредственно вытекает из формулы (1), если в качестве ϑ взять единичную матрицу.

128. Резольвенты самосопряженных расширений. В настоящем n° мы покажем, что резольвенты самосопряженных расширений дифференциального оператора L являются интегральными операторами, и укажем классы, которым принадлежат ядра этих интегральных операторов при различных индексах дефекта оператора L. Начнем с двух вспомогательных предложений.

Лемма 1. Пусть резольвента некоторого самосопряженного оператора, действующего в $\mathrm{L}^2(0,\ \infty)$ *и вещественного по отношению к операции комплексного сопряжения, имеет на всех финитных функциях* $g(t) \in \mathrm{L}^2(0,\ \infty)$ вид

$$R_\lambda g = \int\limits_0^\infty K(t,\ s;\ \lambda)\, g(s)\, ds,$$

где ядро $K(t,\ s;\ \lambda)$ *непрерывно по* s *и по* t *при*

$$t > 0,\ s > 0\ (t \neq s).$$

В таком случае

$$K(t,\ s;\ \lambda) = K(s,\ t;\ \lambda).$$

Доказательство непосредственно следует из соотношения $R_\lambda^* = JR_\lambda J$ (см. n° 50) и произвольности в выборе функции $g(t)$.

Лемма 2. Всякий однородный и аддитивный (но, вообще говоря, неограниченный) функционал $\mathbf{L}$, *определенный на всех финитных функциях* $g(t)$ *из* $\mathrm{L}^2(0,\ \infty)$ *и ограниченный в* $\mathrm{L}^2(0,\ a)$ *при каждом конечном* $a > 0$, *допускает представление*

$$\mathbf{L}(g) = \int\limits_0^\infty g(s)\, \overline{h(s)}\, ds, \tag{1}$$

где $h(t)$ — *функция, однозначно определяемая функционалом* $\mathbf{L}$ *и принадлежащая* $\mathrm{L}^2(0,\ a)$ *при любом конечном* $a > 0$.

* Отсюда, между прочим, следует, что в случае индекса дефекта (1, 1) всякое самосопряженное расширение будет вещественным.

Доказательство следует из теоремы Рисса об общем виде линейного функционала (см. n° 19), согласно которой на функциях $g(t)$ из $L^2(0, a)$ имеет место представление

$$\mathbf{L}(g) = \int_0^a g(s)\,\overline{h_a(s)}\,ds \quad (h_a(s) \in L^2(0, a)). \tag{2}$$

Входящая в это представление функция $h_a(t)$ при возрастании a «продолжается» в том смысле, что неравенство $a_1 < a_2$ влечет равенство

$$h_{a_1}(t) = h_{a_2}(t)$$

при всех $t < a_1$ (за возможным исключением множества меры нуль), ибо для любой функции $g(t)$ из $L^2(0, a_1)$ одновременно имеют место два представления:

$$\mathbf{L}(g) = \int_0^{a_1} g(s)\,\overline{h_{a_1}(s)}\,ds, \quad \mathbf{L}(g) = \int_0^{a_2} g(s)\,\overline{h_{a_2}(s)}\,ds = \int_0^{a_1} g(s)\,\overline{h_{a_1}(s)}\,ds,$$

откуда

$$\int_0^{a_1} [h_{a_2}(s) - h_{a_1}(s)]\,\overline{g(s)}\,ds = 0.$$

Доказанное обстоятельство позволяет записать формулу (2) в виде (1).

Теорема 1. *Резольвента $\widetilde{R}_\lambda$ любого самосопряженного расширения $\widetilde{L}$ дифференциального оператора L с индексом дефекта (m, m) в регулярных точках λ является интегральным оператором.*

Доказательство. Мы проведем сначала доказательство для какого-нибудь вещественного самосопряженного расширения, а затем покажем, что если теорема верна для одного из самосопряженных расширений, то она верна для всех самосопряженных расширений.

Пусть $\widetilde{L}_0$ — вещественное самосопряженное расширение оператора L и $\widetilde{R}^0_\lambda$ — соответствующая резольвента (λ — фиксированная регулярная точка оператора $\widetilde{L}$).

Прежде всего заметим, что элемент $\widetilde{R}^0_\lambda g$ $(g(t) \in L^2(0, \infty))$ следует искать в многообразии решений неоднородного уравнения

$$l[y] - \lambda y = g. \tag{3}$$

Выберем фундаментальную систему решений $u_i(t; \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ соответствующего однородного уравнения

$$l[u] - \lambda u = 0 \tag{4}$$

так, чтобы решения $u_1(t;\ \lambda)$, $u_2(t;\ \lambda)$, ..., $u_m(t;\ \lambda)$ принадлежали $L^2(0, \infty)$ (тогда решения $u_{m+1}(t;\ \lambda)$, ..., $u_{2n}(t;\ \lambda)$ вместе с их нетривиальными линейными комбинациями будут находиться вне $L^2(0, \infty)$; при этом мы не предполагаем, как в предыдущем n°, что решения $u_i(t;\ \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ортонормированы).

Согласно n° 123 общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{2n} u_k(t;\ \lambda) \int_0^t v_k(s;\ \lambda)\, g(s)\, ds + \sum_{k=1}^{2n} c_k u_k(t;\ \lambda), \tag{5}$$

где $v_k(t;\ \lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ — сопряженная по отношению к $u_k(t;\ \lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ фундаментальная система решений уравнения (4). В формуле (5) постоянные c_k $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ однозначно определятся, если только потребовать, чтобы $\varphi(t) = \tilde{R}_\lambda^0 g$. Займемся определением значений постоянных, при которых выполняется это условие в предположении, что $g(t)$ финитна.

Прежде всего нужно обеспечить принадлежность $\varphi(t)$ к $L^2(0, \infty)$. Но если $g(t) = 0$ при $t \geqslant a$, то при достаточно больших t

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{2n} u_k(t;\ \lambda) \int_0^a v_k(s;\ \lambda)\, g(s)\, ds + \sum_{k=1}^{2n} c_k u_k(t;\ \lambda),$$

и для принадлежности $\varphi(t)$ к $L^2(0, \infty)$ необходимо и достаточно выбрать $2n - m$ постоянных c_k $(k = m+1, m+2, \ldots, 2n)$ по формулам

$$c_k = -\int_0^a v_k(s,\ \lambda)\, g(s)\, ds = -\int_0^\infty v_k(s;\ \lambda)\, g(s)\, ds$$
$$(k = m+1, m+2, \ldots, 2n).$$

Выбирая таким образом эти постоянные, мы получаем для $\tilde{R}_\lambda^0$ представление

$$\tilde{R}_\lambda^0 g = \sum_{k=1}^{2n} u_k(t;\ \lambda) \int_0^t v_k(s;\ \lambda)\, g(s)\, ds +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} c_k u_k(t;\ \lambda) - \sum_{k=m+1}^{2n} u_k(t;\ \lambda) \int_0^\infty v_k(s;\ \lambda)\, g(s)\, ds =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} u_k(t;\ \lambda) \int_0^t v_k(s;\ \lambda)\, g(s)\, ds -$$
$$- \sum_{k=m+1}^{2n} u_k(t;\ \lambda) \int_t^\infty v_k(s;\ \lambda)\, g(s)\, ds + \sum_{k=1}^{m} c_k u_k(t;\ \lambda),$$

или

$$\widetilde{R}_\lambda^0 g = \int_0^\infty K(t, s; \lambda) g(s) ds + \sum_{k=1}^m c_k u_k(t; \lambda), \tag{6}$$

где

$$K(t, s; \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^m u_k(t; \lambda) v_k(s; \lambda) & (s \leqslant t), \\ -\sum\limits_{k=m+1}^{2n} u_k(t; \lambda) v_k(s; \lambda) & (s > t). \end{cases}$$

В представлении (6) $g(t)$ — любая равная нулю вне некоторого конечного интервала функция из $L^2(0, \infty)$ и c_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — соответствующие ей постоянные. Из этого представления непосредственно следует, что постоянные c_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ являются однородными и аддитивными функционалами, определенными на всех таких функциях из $L^2(0, \infty)$. Покажем, что эти функционалы $c_k = c_k(g)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяют условиям леммы 2, т. е. являются ограниченными в $L^2(0, a)$ при каждом $a < \infty$. Применяя с этой целью к обеим частям равенства (6) оператор P_a проектирования на подпространство $L^2(0, a)$ и умножая их скалярно на $u_i(t; \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, получим

$$(P_a \widetilde{R}_\lambda^0 g, u_i) = (K_a g, u_i) + \sum_{k=1}^m c_k (P_a u_k, u_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{7}$$

где

$$K_a g = P_a \int_0^a K(t, s; \lambda) g(s) ds.$$

В системе m уравнений (7) с m неизвестными c_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ норма оператора $P_a \widetilde{R}_\lambda^0$ ограничена при всех положительных $a < \infty$ (числом, не зависящим от a), а норма интегрального оператора K_a в $L^2(0, a)$ с ядром Гильберта — Шмидта ограничена при каждом $a < \infty$ (числом, зависящим от a) и, наконец, определитель Грама

$$\det\left((P_a u_k, u_i)\right)_{i, k=1}^m$$

отличен от нуля в силу линейной независимости решений $u_k(t; \lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Отсюда вытекает, что постоянные c_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ являются ограниченными в $L^2(0, a)$ при каждом $a < \infty$ функционалами и, следовательно, по лемме 2 они представимы в виде

$$c_k(g) = \int_0^\infty g(s)\,\psi_k(s;\ \lambda)\,ds \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где функции $\psi_k(s;\ \lambda)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ принадлежат $L^2(0,\ a)$ при любом $a < \infty$. Теперь представление (6) приобретает вид

$$\tilde{R}_\lambda^0 g = \int_0^\infty K(t,\ s;\ \lambda)\,g(s)\,ds + \sum_{k=1}^m u_k(t;\ \lambda)\int_0^\infty g(s)\,\psi_k(s;\ \lambda)\,ds,$$

или

$$\tilde{R}_\lambda^0 g = \int_0^\infty K_0(t,\ s,\ \lambda)\,g(s)\,ds, \tag{8}$$

где

$$K_0(t,\ s;\ \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^m u_k(t;\ \lambda)\,[v_k(s;\ \lambda) + \psi_k(s;\ \lambda)] & (s \leqslant t), \\ \sum\limits_{k=1}^m u_k(t;\ \lambda)\,\psi_k(s;\ \lambda) - \sum\limits_{k=m+1}^{2n} u_k(t;\ \lambda)\,v_k(s,\ \lambda) & (s > t). \end{cases} \tag{9}$$

Формулой (8) установлено, что резольвента $\tilde{R}_\lambda^0$ является интегральным оператором на всех финитных функциях $g(t)$ из $L^2(0, \infty)$.

Из одного этого обстоятельства еще не следует, что $\tilde{R}_\lambda^0$ есть оператор интегральный. В силу ограниченности оператора $\tilde{R}_\lambda^0$, из формулы (8) следует лишь, что для любой функции из $L^2(0, \infty)$

$$\tilde{R}_\lambda^0 g = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_0^n K_0(t,\ s;\ \lambda)\,g(s)\,ds. \tag{10}$$

Чтобы получить из этого представления подлежащее доказательству представление резольвенты в виде

$$\tilde{R}_\lambda^0 g = \int_0^\infty K_0(t,\ s;\ \lambda)\,g(s)\,ds \quad (g(t) \in L^2(0,\ \infty)), \tag{11}$$

достаточно убедиться в существовании интеграла

$$\int_0^\infty K_0(t,\ s;\ \lambda)\,g(s)\,ds$$

при любой функции $g(t) \in L^2(0, \infty)$, а для этого в свою очередь достаточно существования интеграла

$$\int_0^\infty |K_0(t, s; \lambda)|^2 ds \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{12}$$

т. е. принадлежность ядра $K_0(t, s; \lambda)$ к $L^2(0, \infty)$ как функции от s при каждом t.

Обращаясь к формулам (9), мы замечаем, что ядро $K_0(t, s; \lambda)$ принадлежит $L^2(0, \infty)$ как функция от t при каждом s (ибо $u_k(t; \lambda) \in L^2(0, \infty)$ при $k = 1, 2, \ldots, m$), но так как согласно лемме 1 функция $K_0(t, s; \lambda)$, соответствующая резольвенте вещественного самосопряженного расширения, симметрична относительно аргументов t и s, то существование интеграла (12) установлено и представление (11) доказано.

Аналогичным образом теорема доказывается для резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ любого самосопряженного (не обязательно вещественного) расширения $\widetilde{L}$ при любом вещественном регулярном значении λ, если вместо равенства $K_0(s, t; \lambda) = K_0(t, s; \lambda)$ воспользоваться соотношением $\widetilde{K}(s, t; \lambda) = \overline{\widetilde{K}(t, s; \lambda)}$, где $\widetilde{K}(s, t; \lambda)$ — ядро резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ *.

Для завершения доказательства теоремы остается получить представление для $\widetilde{R}_\lambda$ при $\mathfrak{J}\lambda \neq 0$.

Так как элемент $\widetilde{R}_\lambda g$ $(g(t) \in L^2(0, \infty))$ принадлежит многообразию решений уравнения (3), то он представим в виде

$$\widetilde{R}_\lambda g = \widetilde{R}_\lambda^0 g + \sum_{k=1}^{2n} c_k u_k, \tag{13}$$

где $\widetilde{R}_\lambda^0$ — резольвента какого-нибудь вещественного самосопряженного расширения. Из этого представления, в соответствии с выбором фундаментальной системы $u_k(t; \lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$, следует, что постоянные c_k при $k > m$ равны нулю, а при $k \leqslant m$ являются линейными (т. е. однородными, аддитивными и ограниченными) функционалами в $L^2(0, \infty)$ и, следовательно, допускают представление

$$c_k = c_k(g) = \int_0^\infty g(s) \chi_k(s; \lambda) ds \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{14}$$

где функции $\chi_k(s; \lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ принадлежат $L^2(0, \infty)$.

* Существенным в приведенных выше рассуждениях является то обстоятельство, что переход от (10) к (11) произведен на основании симметрии функции $K_0(t, s; \lambda)$, благодаря чему удалось обойти вопрос о поведении функций $v_k(s; \lambda)$ $(k = m + 1, m + 2, \ldots, 2n)$ и $\psi_k(s; \lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ при $s = \infty$. Более того, симметрия ядра $K_0(t, s; \lambda)$ позволяет установить некоторые свойства этих функций на бесконечности (см. ниже теорему 3).

Вставляя (14) в (13) и вводя ядро $\widetilde{K}(t, s, \lambda)$ равенством

$$\widetilde{K}(t, s; \lambda) = K_0(t, s; \lambda) + \sum_{k=1}^{m} u_k(t; \lambda)\chi_k(s; \lambda), \tag{15}$$

получим, наконец, интегральное представление резольвенты в виде

$$\widetilde{R}_\lambda g = \int_0^\infty \widetilde{K}(t, s, \lambda)\, g(s)\, ds \quad (g(t) \in \mathrm{L}^2(0, \infty)).$$

Таким образом, теорема 1 полностью доказана *.

Теорема 2. *Ядро $\widetilde{K}(t, s; \lambda)$ резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ любого самосопряженного расширения $\widetilde{L}$ оператора L с индексом дефекта (m, m) в регулярных точках удовлетворяет условиям*

$$\int_0^\infty |\widetilde{K}(t, s; \lambda)|^2 ds < \infty, \quad \int_0^\infty |\widetilde{K}(t, s; \lambda)|^2 dt < \infty, \tag{16}$$

а в случае квазирегулярного оператора $(m = 2n)$ — условию

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\widetilde{K}(t, s; \lambda)|^2 ds\, dt < \infty. \tag{17}$$

Доказательство. Свойство (16) непосредственно следует из принадлежности к $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ функции $K_0(t, s; \lambda)$ (по каждой из переменных) и функций $\chi_k(s; \lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, а также формулы (15).

Переходя к доказательству свойства (17), установим сначала, что при любом индексе дефекта (m, m) $(n \leqslant m \leqslant 2n)$ оператора L функции $\psi_k(t; \lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ и $v_k(t; \lambda)$ $(k = m + 1, \ldots \ldots, 2n)$, фигурирующие в формуле (9) для $K_0(t, s; \lambda)$, принадлежат пространству $\mathrm{L}^2(0, \infty)$. С этой целью снова воспользуемся свойством симметричности функции $K_0(t, s; \lambda)$. Это свойство означает, что при $s \leqslant t$

$$\sum_{k=1}^{m} u_k(s; \lambda)\psi_k(t; \lambda) - \sum_{k=m+1}^{2n} u_k(s; \lambda) v_k(t; \lambda) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} [v_k(s; \lambda) + \psi_k(s; \lambda)]\, u_k(t; \lambda). \tag{18}$$

Выберем числа $s_1, s_2, \ldots, s_{2n}$ так, чтобы

$$\det (u_k(s_i; \lambda))_{i, k=1}^{2n} \neq 0$$

* Обобщение этой теоремы на случай неортогональных резольвент было получено А. В. Штраусом в статье: Формула обобщенных резольвент дифференциального оператора четного порядка. — «ДАН СССР», 1956, 111, № 4.

(это возможно в силу линейной независимости функций $u_k(s;\lambda)$), и положим в равенстве (18) $s=s_i$ $(i=1, 2, \ldots, 2n)$.

Разрешая полученную систему $2n$ уравнений относительно $2n$ функций $\psi_k(t;\lambda)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ и $v_k(t;\lambda)$ $(k=m+1, \ldots \ldots, 2n)$, получим, что каждая из этих функций является некоторой линейной комбинацией функций $u_1(t;\lambda), \ldots, u_m(t;\lambda)$ и, следовательно, принадлежит пространству $L^2(0, \infty)$.

Перейдем к доказательству свойства (17). В случае квазирегулярного оператора $(m=2n)$ все слагаемые в правой части формулы (9) принадлежат пространству L^2 функций двух переменных в квадранте $t>0$, $s>0$ и, следовательно,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |K_0(t, s; \lambda)|^2 ds\, dt < \infty. \tag{19}$$

Свойство (17) вытекает из (19) на основании (15).

Из доказанной теоремы следует, что в случае квазирегулярного оператора резольвента любого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ оператора L определяется ядром Гильберта — Шмидта и является поэтому вполне непрерывным оператором.

Из теоремы 2 следует, что ядра вещественной и мнимой части резольвенты любого самосопряженного расширения оператора являются в регулярных точках λ ядрами Карлемана.

Заметим еще, что из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 2, следует

Теорема 3. *Пусть m означает максимальное число линейно независимых решений уравнения (4), принадлежащих $L^2(0, \infty)$. Если первые m функций фундаментальной системы решений уравнения (4) принадлежат $L^2(0. \infty)$, то по крайней мере последние $2n-m$ решений сопряженной фундаментальной системы этого уравнения также принадлежат $L^2(0, \infty)$.*

Следующая теорема посвящена случаю, когда об индексах дефекта оператора L можно судить по числу решений уравнения (4), принадлежащих $L^2(0, \infty)$ при произвольном и, в частности, при вещественном λ.

Теорема 4. *Для того чтобы оператор L порядка $2n$ имел индекс дефекта $(2n, 2n)$, необходимо, чтобы уравнение*

$$l[u]-\lambda u=0$$

при любом значении λ имело $2n$ решений из $L^2(0, \infty)$, и достаточно, чтобы это уравнение имело $2n$ решений из $L^2(0, \infty)$ хотя бы при одном значении λ.

Доказательство. Для доказательства необходимости сформулированного в теореме условия вспомним, что в случае квазирегулярного оператора резольвента его самосопряженного расширения $\tilde{L}$ является вполне непрерывным оператором и, следовательно, спектр оператора $\tilde{L}$ состоит лишь из собственных значений λ_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ с единственной предельной точкой $\lambda = \infty$. Отсюда следует, что для оператора L все точки плоскости, за возможным исключением точек λ_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$, суть точки регулярного типа. На самом деле точка λ_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ также является точкой регулярного типа, ибо в противном случае λ_r было бы собственным значением оператора L, а уравнение

$$L\varphi - \lambda_r\varphi = 0,$$

эквивалентное уравнению

$$l[\varphi] - \lambda_r\varphi = 0$$

при условиях

$$\varphi(0) = \varphi^{[1]}(0) = \cdots = \varphi^{[2n-1]}(0) = 0,$$

в силу теоремы существования и единственности n° 123 имеет лишь решение $\varphi(t) \equiv 0$.

Таким образом, в случае индекса дефекта $(2n, 2n)$ вся λ-плоскость является полем регулярности оператора L, и по теореме об инвариантности индекса дефекта (n° 100) все решения уравнения (4) при любом значении λ (невещественном или вещественном) принадлежат $L^2(0, \infty)$.

Достаточность сформулированного в теореме условия непосредственно следует из теоремы 4 n° 105.

Нетрудно перенести результаты, полученные в настоящем n°, на случай интервала с двумя сингулярными концами. Наметим доказательство основной теоремы 1 для этого случая. При этом, как и в случае одного сингулярного конца, достаточно рассмотреть резольвенту какого-нибудь вещественного самосопряженного расширения. Пусть (см. доказательство теоремы 3 n° 126) дефектные числа операторов L, $L^{(-)}$, $L^{(+)}$ суть m, $m^{(-)}$, $m^{(+)}$ соответственно. На основании теоремы 3 n° 126

$$\begin{aligned} m^{(-)} &= n + p, \\ m^{(+)} &= n + m - p \end{aligned} \qquad (0 \leqslant p \leqslant n).$$

Выберем фундаментальную систему решений уравнения (4) так, чтобы первые m решений $u_k(t; \lambda)$ принадлежали $L^2(-\infty, \infty)$. В $(2n - m)$-мерной линейной оболочке остальных решений этой системы существует $n + p - m$ линейно независимых решений из $L^2(-\infty, 0)$ (обозначим их $u_{m+1}(t; \lambda), \ldots, u_{n+p}(t; \lambda)$) и $n - p$ линейно независимых решений из $L^2(0, \infty)$ (обозначим их $u_{n+p+1}(t; \lambda), \ldots, u_{2n}(t; \lambda)$). Заметим, что функции

$$u_{m+1}(t; \lambda), \ \ldots, \ u_{n+p}(t; \lambda), \ u_{n+p+1}(t; \lambda), \ \ldots, \ u_{2n}(t; \lambda)$$

линейно независимы, ибо в противном случае некоторая их линейная комбинация принадлежала бы $L^2(-\infty, \infty)$, откуда следовало бы, что, вопреки предположению, дефектное число оператора L больше m. С помощью выбранной фундаментальной системы $u_k(t;\ \lambda)$ $(k=1, 2, \ldots, 2n)$ любое решение уравнения

$$l[y]-\lambda y=g,$$

где $g(t)$ — финитная функция, представимо в виде

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{2n} u_k(t;\ \lambda)\int_{-\infty}^{t} v_k(s;\ \lambda)\, g(s)\, ds+\sum_{k=1}^{2n} c_k u_k(t;\ \lambda),$$

и при надлежащем выборе постоянных c_k эта функция совпадает с $\tilde{R}_\lambda^0 g$.

Проводя, далее, рассуждения, аналогичные приведенным для случая одного сингулярного конца, получим полное доказательство теорем 1 и 2 для случая двух сингулярных концов.

Приведем теперь одно простое предложение, которое иногда дает возможность определить индекс дефекта оператора, порожденного выражением

$$-y''+q(x)\,y. \tag{20}$$

Теорема 5. *Если* $q(x)\geqslant q_0>-\infty$, *то индекс дефекта минимального оператора с одним сингулярным концом, порожденного выражением* (20) *в* $L^2(0, \infty)$, *есть* (1,1), *а минимальный оператор, порожденный тем же выражением в* $L^2(-\infty, \infty)$, *имеет индекс дефекта* (0, 0), *т. е. оказывается самосопряженным.*

Доказательство. Будем считать $q(x)\geqslant 0$. Тогда применение метода последовательных приближений к уравнению

$$u''=q(t)\,u \qquad (0\leqslant t<\infty)$$

показывает, что решение $u(t)$, для которого $u(0)=1$, $u'(0)=0$, удовлетворяет при всех $t\geqslant 0$ неравенству $u(t)\geqslant 1$ и, следовательно, не принадлежит $L^2(0, \infty)$.

Таким образом, уравнение

$$-u''+q(t)\,u-\lambda u=0$$

при $\lambda=0$ имеет решение, не принадлежащее $L^2(0, \infty)$, и, согласно теореме 4 настоящего пункта, оператор с минимальной областью определения, порожденный операцией (20) на полуоси $(0, \infty)$, имеет индексы дефекта (1,1). Такой же индекс дефекта имеет, очевидно, оператор с минимальной областью определения, порожденный операцией (20) на отрицательной полуоси. Применяя теорему 3 n° 126, мы получаем, что индексы дефекта оператора с минимальной областью определения, порожденного операцией (20) на всей оси, есть (0, 0).

Очевидно, мы пришли бы к этому же результату, если бы заменили требование неотрицательности функции $q(t)$ требованием ее полуограниченности снизу.

129. Формулы обращения, связанные с дифференциальными операторами второго порядка. В n° 83 было показано, что каждый самосопряженный оператор A с простым спектром порождает изометрическое отображение V пространства H на некоторое пространство L^2_σ. При этом отображении оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную.

Если E_λ — разложение единицы, а g — какой-нибудь порождающий элемент оператора A, то $\sigma(\lambda) = (E_\lambda g, g)$, и указанное изометрическое соответствие определяется формулами

$$\Phi(\lambda) = Vf, \tag{1}$$

$$f = V^{-1}\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, dE_\lambda g, \tag{2}$$

где элемент f и функция $\Phi(\lambda)$ пробегают пространства H и L^2_σ соответственно. Если при этом $f \in D_A$, то вместе с формулой (2) имеет место равенство

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\Phi(\lambda)\, dE_\lambda g.$$

Формулы (1) и (2) мы будем называть *формулами обращения*, связанными с самосопряженным оператором A.

В пункте C n° 89 мы получили в качестве формул обращения, связанных с оператором дифференцирования на оси, взаимно обратные преобразования Фурье — Планшереля пространства $L^2(-\infty, \infty)$ на себя:

$$\Phi(\lambda) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

$$f(t) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \Phi(\lambda)\, e^{-i\lambda t}\, d\lambda.$$

При этом в качестве порождающего был взят некоторый несобственный элемент.

Операторы с кратным спектром также порождают формулы обращения, аналогичные формулам (1) и (2).

Задачу настоящего и следующего пунктов составляет получение формул обращения, связанных с сингулярными дифференциальными операторами на полуоси. Эта задача для операторов второго порядка была решена впервые Г. Вейлем *. Мы также начнем с рассмотрения операторов второго порядка, но будем пользоваться методом направляющих функционалов М. Г. Крей-

* Weyl H. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten. . . . Math. Annalen, 68, 1910, с. 220—269. Другим методом результаты Вейля получил Б. М. Левитан; см. его книгу «Разложение по собственным функциям». Гостехиздат, 1950.

на *. Этот метод позволяет, в частности, получить формулы обращения для дифференциальных операторов любого порядка (см. n° 130).

Итак, пусть L есть дифференциальный оператор с минимальной областью определения, порожденный операцией

$$l = -\frac{d}{dt} p \frac{d}{dt} + q$$

на интервале $(0, \infty)$ с одним сингулярным концом.

Мы будем предполагать, что индекс дефекта оператора L есть (1, 1). Мы увидим, что в этом случае спектр каждого из самосопряженных расширений этого оператора прост **.

Пусть $\tilde{L}$ есть самосопряженное расширение оператора L, определенное граничным условием ***

$$p(t)\varphi'(t)|_{t=0} = \theta\varphi(0) \quad (\Im\theta = 0),$$

а $u_1(t;\ \lambda)$ и $u_2(t;\ \lambda)$ — решения уравнения

$$l[u] - \lambda u = 0 \quad (\Im\lambda = 0),$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{aligned} u_1(0;\ \lambda) = 1, \quad & p(t)u_1'(t;\ \lambda)|_{t=0} = 0, \\ u_2(0;\ \lambda) = 0, \quad & p(t)u_2'(t;\ \lambda)|_{t=0} = 1. \end{aligned}$$

---

* См. Крейн М. Г. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения. ДАН, 1946, т. LIII, № 1 и Крейн М. Г. Про ермітові оператори з напрямними функціоналами. Збірник праць Інституту математики АН УРСР, № 10. По этому поводу см. также Лившиц М. С. Об одном применении теории эрмитовых операторов к обобщенной проблеме моментов. ДАН, т. XLIV, № 1 (1944) и Повзнер А. Я. О методе направляющих функционалов М. Г. Крейна. Зап. научно-исследовательского ин-та мат. и мех. и Харьк. мат. о-ва, сер. 4, 1950, т. XX.

О методе направляющих функционалов применительно к операторам с бесконечнократным спектром см. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка. Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, 5, с. 203—268, а также Рофе-Бекетов Ф. С. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений. Тр. V Всесоюз. конф. по функц. анал. и его применению, Баку, 1961, с. 230—237.

** Если индекс дефекта оператора L есть (2, 2), то всякое самосопряженное расширение этого оператора имеет дискретный спектр. В этом случае вопрос о структуре формул обращения не возникает, так как роль формулы (2) будет играть разложение функции в ортогональный ряд по собственным функциям, а роль формулы (1) — выражение для коэффициентов Фурье разлагаемой функции.

*** Таким образом, остается в стороне лишь одно расширение, а именно определяемое условием $\varphi(0) = 0$, которое отвечает $\theta = \infty$. Устанавливаемые ниже формулы обращения переносятся и на этот случай с помощью предельного перехода.

Обозначим множество всех финитных функций $f(t)$ из $L^2(0, \infty)$ через $\mathfrak{D}$ и определим в $\mathfrak{D}$ однородный и аддитивный функционал

$$\Phi(f;\ \lambda) = \int_0^\infty f(t)\, u(t;\ \lambda)\, dt,$$

где

$$u(t;\ \lambda) = u_1(t;\ \lambda) + \theta u_2(t;\ \lambda).$$

Следуя М. Г. Крейну, будем называть функционал $\Phi(f;\ \lambda)$ *направляющим функционалом.*

Направляющий функционал $\Phi(f;\ \lambda)$ обладает следующими тремя свойствами, которые существенны для дальнейшего.

1°. $\Phi(f;\ \lambda)$ есть аналитическая функция от λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ при любой функции $f \in \mathfrak{D}$.

2°. Если для некоторой функции $f \in \mathfrak{D}$ и некоторого вещественного значения λ имеет место равенство

$$\Phi(f;\ \lambda) = 0,$$

то уравнение

$$(\tilde{L} - \lambda I)\varphi = f$$

имеет решение в классе финитных функций.

3°. Если f — финитная функция из $D_{\tilde{L}}$, то при любом вещественном λ

$$\Phi(\tilde{L}f;\ \lambda) = \lambda\Phi(f;\ \lambda).$$

Подлежат доказательству лишь свойства 2° и 3°.

Установим сначала свойство 2°. Пусть $f(t) = 0$ при $t > a$ и

$$\Phi(f;\ \lambda_0) = 0. \tag{3}$$

Обозначим через $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ решение уравнения

$$l[\varphi] - \lambda_0\varphi = f,$$

удовлетворяющее условию

$$\varphi(a) = p(a)\,\varphi'(a) = 0$$

(при этом в силу теоремы единственности $\varphi(t) = 0$ для $t \geqslant a$).

Пользуясь тождеством Лагранжа, получаем

$$\Phi(f;\ \lambda_0) = \int_0^\infty \{l[\varphi] - \lambda_0\varphi\}\, u(t;\ \lambda_0)\, dt = [\varphi,\ \bar{u}]_0^\infty = -[\varphi,\ \bar{u}]_0 =$$

$$= \left[p\left(u\frac{d\varphi}{dt} - \varphi\frac{du}{dt}\right)\right]_{t=0} = [p(t)\,\varphi'(t) - \theta\varphi(t)]_{t=0},$$

что в сочетании с (3) дает
$$p(t)\,\varphi'(t)\,|_{t=0}=\theta\varphi(0),$$
так что $\varphi(t)\in D_{\tilde{L}}$, и свойство 2° установлено.

Справедливость утверждения 3° следует из равенств
$$\Phi(\tilde{L}f;\ \lambda)=\int_0^\infty l[f]\,u(t;\ \lambda)\,dt=[f,\ \bar{u}]_0^\infty+\lambda\int_0^\infty f(t)\,u(t;\ \lambda)\,dt=\lambda\Phi(f;\ \lambda).$$

Направляющий функционал $\Phi(f;\ \lambda)$ порождает отображение линейного многообразия $\mathfrak{D}$ функций $f(t)$ на некоторое линейное многообразие $\mathfrak{D}'$ функций $\Phi(\lambda)=\Phi(f;\ \lambda)$. Если при этом функция $f(t)$ принадлежит $D_{\tilde{L}}$, то, согласно свойству 3°, функции $\tilde{L}f$ в указанном отображении соответствует функция $\lambda\Phi(\lambda)$. Это обстоятельство позволяет предположить, что спектр оператора $\tilde{L}$ прост и что при надлежащем выборе порождающей функции $g=g(t)$ отображение, осуществляемое оператором V формулы (1), является расширением отображения, осуществляемого функционалом $\Phi(f;\ \lambda)$. Это предположение означает, что при надлежащем выборе порождающей функции первая из формул обращения, связанных с оператором $\tilde{L}$, будет (при $f(t)\in\mathfrak{D}$) иметь вид
$$\Phi(\lambda)=\int_0^\infty f(t)\,u(t;\ \lambda)\,dt.$$

Эта формула аналогична формуле Фурье — Планшереля.

Оставим теперь в стороне наводящие соображения и приступим к решению поставленной задачи. При этом нам будут необходимы два предложения М. Г. Крейна *.

Лемма. *Для любого конечного интервала Δ_0 оси λ существует функция $\psi(t)\in\mathfrak{D}$ такая, что функция $\Phi(\lambda)=\Phi(\psi;\ \lambda)$ не обращается в нуль в интервале Δ_0.*

Доказательство. Пусть λ_0 — фиксированная точка интервала Δ_0 и $\chi_0(t)$ — такая функция из $\mathfrak{D}$, что
$$\Phi(\chi_0;\ \lambda_0)\neq 0.$$

Если во всем интервале $\Phi(\chi_0;\ \lambda)\neq 0$, то для доказательства леммы достаточно принять $\psi=\chi_0$. Если же в некоторой точке $\lambda_1\in\Delta_0$,
$$\Phi(\chi_0;\ \lambda_1)=0,$$
то, на основании свойства 2°, существует финитная функция $\chi_1\in D_{\tilde{L}}$ такая, что
$$\tilde{L}\chi_1-\lambda_1\chi_1=\chi_0.$$

*) См. вторую из работ М. Г. Крейна, цитированных на с. 500.

Применяя к обеим частям этого равенства направляющий функционал и пользуясь свойством 3°, получаем

$$\lambda\Phi(\chi_1;\ \lambda) - \lambda_1\Phi(\chi_1;\ \lambda) = \Phi(\chi_0;\ \lambda),$$

откуда

$$\Phi(\chi_1;\ \lambda) = \frac{\Phi(\chi_0;\ \lambda)}{\lambda - \lambda_1}.$$

Таким образом, заменяя функцию χ_0 функцией χ_1, мы видим, что функция $\Phi(\chi_1;\ \lambda)$ не обращается в нуль при $\lambda = \lambda_0$, а при $\lambda = \lambda_1$ имеет корень кратности на единицу меньшей, чем функцию $\Phi(\chi_0;\ \lambda)$. Так как аналитическая функция $\Phi(\chi_0;\ \lambda)$ в конечном интервале Δ_0 имеет лишь конечное число нулей, каждый — конечной кратности, то, продолжая в случае надобности указанный процесс, придем к функции $\psi \in \mathfrak{D}$, для которой функционал $\Phi(\psi;\ \lambda)$ не обращается в нуль при $\lambda \in \Delta_0$.

Теорема 1. *Пусть Δ_0 — конечный замкнутый интервал и $\psi \in \mathfrak{D}$ — такая функция, что*

$$\Phi(\psi;\ \lambda) \neq 0$$

при $\lambda \in \Delta_0$. Пусть, далее, E_λ — разложение единицы оператора $\tilde{L}$ и

$$g(t) = \int_{\Delta_0} \frac{1}{\Phi(\psi;\ \lambda)}\, dE_\lambda\psi.$$

При этих условиях для любой функции $f \in \mathfrak{D}$ и любого интервала $\Delta \subseteq \Delta_0$ справедлива формула

$$E(\Delta) f = \int_{\Delta} \Phi(f;\ \lambda)\, dE_\lambda g. \tag{4}$$

Доказательство. Если ввести вместо направляющего функционала $\Phi(f;\ \lambda)$ функционал $F(f;\ \lambda)$ соотношением

$$F(f;\ \lambda) = \frac{\Phi(f;\ \lambda)}{\Phi(\psi;\ \lambda)},$$

то подлежащая доказательству формула эквивалентна равенству

$$E(\Delta) f = \int_{\Delta} F(f;\ \lambda)\ dE_\lambda\psi. \tag{5}$$

Приступим к доказательству этого равенства. Предположим, что левые концы интервалов Δ_0 и Δ совпадают, и пусть точка α есть общий левый конец этих интервалов. Будем рассматривать элемент $w_\mu = w_\mu(t)$ пространства $L^2(0,\ \infty)$, определенный равенством

$$w_\mu = \int_\alpha^\mu dE_\lambda f - \int_\alpha^\mu F(f;\ \lambda)\ dE_\lambda\psi,$$

как функцию параметра μ в интервале Δ_0.

Для доказательства равенства (5) следует установить, что $w_\mu = 0$ при $\mu \in \Delta_0$, а для этого достаточно, очевидно, показать, что в интервале Δ_0 элемент w_μ есть непрерывная функция от μ и затем, что

$$\frac{d}{d\mu} w_\mu = 0 \tag{6}$$

всюду в Δ_0. Последнее равенство следует понимать в смысле сильной сходимости в $L^2(0, \infty)$, т. е. в том смысле, что

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta^2} \| w_{\mu+\delta} - w_\mu \|^2 = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty | w_{\mu+\delta}(t) - w_\mu(t) |^2 dt = 0.$$

В силу непрерывности E_λ слева, вектор-функция w_μ тоже непрерывна слева. Для доказательства непрерывности функции w_μ справа воспользуемся вытекающим из определения функционала $F(f;\ \mu)$ тождеством

$$\Phi(f - F(f;\ \mu)\psi;\ \mu) = \Phi(f;\ \mu) - F(f;\ \mu)\Phi(\psi;\ \mu) = 0.$$

Отсюда согласно 2° следует возможность представления элемента $f - F(f;\ \mu)\psi$ в виде

$$f - F(f;\ \mu)\psi = \tilde{L}\varphi - \mu\varphi. \tag{7}$$

Введем теперь проектирующий оператор

$$E(\Delta_{\mu,\delta}) = E_{\mu+\delta} - E_\mu \quad (\delta \geqslant 0).$$

Величина $E(\Delta_{\mu,0})\varphi$ есть либо 0, либо собственный вектор оператора $\tilde{L}$, соответствующий собственному значению μ. В обоих случаях

$$E(\Delta_{\mu,0})(\tilde{L}\varphi - \mu\varphi) = \tilde{L}E(\Delta_{\mu,0})\varphi - \mu E(\Delta_{\mu,0})\varphi = 0$$

и, следовательно,

$$E(\Delta_{\mu,0})f - F(f;\ \mu)E(\Delta_{\mu,0})\psi = 0.$$

Из полученного равенства следует непрерывность w_μ в интервале Δ_0.

Для доказательства равенства (6) оценим $\| w_{\mu+\delta} - w_\mu \|$. Пусть, например, $\delta > 0$. (Случай $\delta < 0$ рассматривается аналогично. В силу доказанной непрерывности w_μ имеем $w_{\mu+0} = w_\mu$. Поэтому

$$\| w_{\mu+\delta} - w_\mu \| = \| w_{\mu+\delta} - w_{\mu+0} \| = \| E(\Delta_{\mu+0,\delta})f - \int_{\mu+0}^{\mu+\delta} F(f;\ \lambda)\,dE_\lambda\psi \| \leqslant$$
$$\leqslant \| E(\Delta_{\mu+0,\delta})[f - F(f;\ \mu)\psi] \| +$$
$$+ \| E(\Delta_{\mu+0,\delta})F(f;\ \mu)\psi - \int_{\mu+0}^{\mu+\delta} F(f;\ \lambda)\,dE_\lambda\psi \|. \tag{8}$$

Рассмотрим отдельно сначала первое, а затем второе слагаемое в правой части этого неравенства. Для первого слагаемого следует из (7) оценка:

$$\| E(\Delta_{\mu+0,\delta})[f - F(f;\ \mu)\psi] \|^2 = \| E(\Delta_{\mu+0,\delta})[\tilde{L}\varphi - \mu\varphi] \|^2 = \\ = \int\limits_{\mu+0}^{\mu+\delta} |\lambda - \mu|^2 d(E_\lambda\varphi,\ \varphi) \leqslant \delta^2 \| E(\Delta_{\mu+0,\delta})\varphi \|^2.$$

Поэтому

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \| E(\Delta_{\mu+0,\delta})[f - F(f;\ \mu)\psi] \| = 0. \tag{9}$$

Обращаясь теперь ко второму слагаемому правой части неравенства (8), получаем

$$\| E(\Delta_{\mu+0,\delta}) F(f;\ \mu)\psi - \int\limits_{\mu+0}^{\mu+\delta} F(f;\ \lambda)\, dE_\lambda\psi \|^2 = \\ = \left\| \int\limits_{\mu+0}^{\mu+\delta} [F(f;\ \mu) - F(f;\ \lambda)]\, dE_\lambda\psi \right\|^2 \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\mu+0}^{\mu+\delta} |F(f;\ \mu) - F(f;\ \lambda)|^2 d(E_\lambda\psi,\ \psi) \leqslant M^2\delta^2 (E(\Delta_{\mu+0,\delta})\psi,\ \psi), \tag{10}$$

где M означает максимум модуля производной $\frac{\partial F(f;\ \lambda)}{\partial\lambda}$ в интервале Δ_0.

Из неравенства (10) следует, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \left\| E(\Delta_{\mu+0,\delta}) F(f;\ \mu)\psi - \int\limits_{\mu+0}^{\mu+\delta} F(f;\ \lambda)\, dE_\lambda\psi \right\| = 0. \tag{11}$$

Из (9) и (11) на основании (8) заключаем о справедливости равенства (6). Значит, $\omega_\mu = 0$, а отсюда следует равенство (5), что и требовалось доказать.

Теперь можно перейти к основной теореме настоящего пункта.

Теорема 2. *Если L, $\tilde{L}$ и $u(t;\ \lambda)$ имеют указанный в начале настоящего пункта смысл, то формулы обращения, связанные с оператором $\tilde{L}$, имеют вид*

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(t)\, u(t;\ \lambda)\, dt, \tag{12}$$

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, u(t;\ \lambda)\, d\sigma(\lambda). \tag{13}$$

Здесь $\sigma(\lambda)$ — некоторая неубывающая функция, определяемая оператором L (и называемая *спектральной функцией* этого оператора), *а* $\Phi(\lambda)$ *и* $f(t)$ *пробегают пространства* $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ *и соответственно* $\tilde{L}^2(0, \infty)$. *При этом если одна из функций* $\Phi(\lambda)$, $f(t)$ *равна нулю вне конечного интервала, то интеграл в правой части соответствующей формулы следует понимать в обычном смысле, а в случае произвольных функций* $\Phi(\lambda)$, $f(t)$ *интегралы следует понимать как пределы в метрике* L^2_σ *и соответственно* $L^2(0, \infty)$ *собственных интегралов*

$$\int_0^C f(t)\, u(t;\ \lambda)\, dt,$$

$$\int_A^B \Phi(\lambda)\, u(t;\ \lambda)\, d\sigma(\lambda).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в формуле (4) вместо элемента g, очевидно, можно взять* элемент $g_0 = E(\Delta_0)\, g$.

Разобьем теперь λ-ось на конечные интервалы Δ_k ($\pm k = 0, 1, 2, \ldots$) и выберем для каждого интервала Δ_k элемент g_k, так же, как мы выбрали для интервала Δ_0 элемент g_0.

Положим

$$g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k$$

и в случае расходимости ортогонального ряда в правой части будем под g понимать несобственный элемент ** (см. n° 89), удовлетворяющий при любом конечном интервале Δ условию

$$E(\Delta)\, g = \sum_k E(\Delta)\, g_k,$$

где ряд справа содержит уже конечное число слагаемых.

Если f — произвольная функция из $\mathfrak{D}$, а Δ — произвольный конечный интервал λ-оси, то

$$\Delta = \Delta_m^* + \sum_{k=m+1}^{n-1} \Delta_k + \Delta_n^* \quad (\Delta_m^* \subseteq \Delta_m;\ \Delta_n^* \subseteq \Delta_n)$$

и

$$E(\Delta) f = E(\Delta_m^*) f + \sum_{k=m+1}^{n-1} E(\Delta_k) f + E(\Delta_n^*) f.$$

* В данном случае они даже совпадают.

** В действительности элемент g всегда оказывается несобственным и ведет себя как δ-функция Дирака в том смысле, что $(E(\Delta) h, g) = (E(\Delta) h)(0)$ при любом $h \in L^2(0, \infty)$ и любом конечном интервале Δ. (Это замечание принадлежит Ф. С. Рофе-Бекетову).

Поэтому для любого конечного интервала Δ λ-оси имеет место формула

$$E(\Delta) f = \int_{\Delta} \Phi(f;\ \lambda)\, dE_\lambda g,$$

откуда при $\Delta \to (-\infty,\ \infty)$ получаем равенство

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f;\ \lambda)\, dE_\lambda g. \tag{14}$$

Так как многообразие $\mathfrak{D}$ плотно в $L^2(0,\ \infty)$, то из этой формулы следует, что оператор $\tilde{L}$ имеет простой спектр и функция $g = g(t)$ есть порождающий элемент.

Из теоремы n° 83 о каноническом представлении самосопряженного оператора с простым спектром следует, что существует изометрическое отображение

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, dE_\lambda g$$

пространства L^2_σ, где $\sigma(\lambda) = (E_\lambda g,\ g)$ на пространство $L^2(0,\ \infty)$. При этом изометрическом соответствии функциям $f(t)$ из $\mathfrak{D}$ отвечают направляющие функционалы $\Phi(f;\ \lambda) = \Phi(\lambda)$. Оператор $\tilde{L}$, таким образом, изоморфен оператору умножения на λ в пространстве L^2_σ, так что при $f(t) \in D_{\tilde{L}}$

$$\tilde{L} f = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \Phi(\lambda)\, dE_\lambda g.$$

Займемся теперь выводом формул (12) и (13). Если $f(t)$ — произвольная функция из $L^2(0,\ \infty)$ и

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) & (t < n), \\ 0 & (t \geqslant n), \end{cases}$$

то согласно (14)

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f_n;\ \lambda)\, dE_\lambda g. \tag{15}$$

Положим

$$\Phi_n(\lambda) = \Phi(f_n;\ \lambda) = \int_0^n f(t)\, u(t;\ \lambda)\, dt. \tag{16}$$

Так как последовательность функций $\{f_n(t)\}$ сходится в метрике $L^2(0,\ \infty)$ к функции $f(t)$, то в силу изометрического соответствия между пространствами $L^2(0, \infty)$ и L^2_σ последовательность $\Phi_n(\lambda)$ сходится в метрике L^2_σ к некоторой функции $\Phi(\lambda)$. Перейдя к пределу по указанным метрикам в равенствах (15) и (16), получаем формулы

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, dE_\lambda g, \tag{17}$$

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t)\, u(t;\ \lambda)\, dt.$$

Вторая из этих формул совпадает с (12), и поэтому остается доказать формулу (13).

Очевидно, достаточно доказать, что формула (13) является обращением формулы (12), если $\Phi(\lambda)$ пробегает многообразие $\mathfrak{M}$ финитных функций из L^2_σ.

Итак, пусть функция $\Phi(\lambda)$ принадлежит $\mathfrak{M}$, а $f(t)$ есть соответствующая ей функция из $L^2(0, \infty)$, определяемая формулой (17). Введем функцию

$$\eta_t(s) = \begin{cases} 1 & (s \leqslant t), \\ 0 & (s > t). \end{cases}$$

Тогда в силу изометричности соответствия между $L^2(0, \infty)$ и L^2_σ имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} f(s)\, \eta_t(s)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda)\, \Phi(\eta_t;\ \lambda)\, d\sigma(\lambda),$$

или

$$\int_0^{t} f(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) \left\{ \int_0^{t} u(s;\ \lambda)\, ds \right\} d\sigma(\lambda).$$

Левая часть имеет почти всюду производную $f(t)$, а справа интеграл по λ берется в конечных пределах, так как $\Phi(\lambda) \in \mathfrak{M}$. Поэтому производная по t от правой части равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, u(t;\ \lambda)\, d\sigma(\lambda),$$

и доказательство закончено.

Покажем теперь, как фактически находится спектральная функция $\sigma(\lambda)$. С этой целью обозначим через $u(t;\ \lambda)$ то решение уравнения

$$l[y] - \lambda y = 0,$$

котороe при $t=0$ удовлетворяет граничному условию, характеризующему рассматриваемое расширение $\tilde{L}$ оператора L. Как было указано выше, это условие имеет вид

$$p(t)\,\varphi'(t)\,|_{t=0} = \theta\varphi(0).$$

Вещественный параметр θ будем считать конечным, так что $u(0;\ \lambda)\neq 0$, мы можем, следовательно, принять, что

$$u(0;\ \lambda)=1.$$

Далее обозначим через $v(t;\ \lambda)$ второе решение однородного уравнения, которое нормировано с помощью равенств

$$v(0;\ \lambda)=0,\quad p(t)\,v'(t;\ \lambda)\,|_{t=0}=-1.$$

При этом ядро $K(t,\ s;\ \lambda)$ интегрального оператора, являющегося резольвентой оператора $\tilde{L}$, т. е. функция Грина, будет иметь вид

$$K(t,\ s;\ z)=\begin{cases} u(s;\ z)\,[v(t;\ z)+m(z)\,u(t;\ z)] & (s\leqslant t),\\ u(t;\ z)\,[v(s;\ z)+m(z)\,u(s;\ z)] & (s>t),\end{cases}\quad (\Im z>0), \qquad (18)$$

где функция $m(z)$ однозначно определяется тем, что

$$v(t;\ z)+m(z)\,u(t;\ z)\in \mathrm{L}^2(0,\ \infty).$$

Заставим теперь функцию $\varphi(t)$ пробегать множество всех финитных функций из $\mathrm{D}_{\tilde{L}}$ и положим

$$(\tilde{L}-zI)\,\varphi=f,$$

причем $z\ (\Im z>0)$ фиксировано. Множество $\mathfrak{N}$, пробегаемое функцией $f(t)$, плотно в $\mathrm{L}^2(0,\ \infty)$, так как индекс дефекта минимального оператора L, по условию, есть $(1,\ 1)$. Если $g(t)$ — произвольная функция из $\mathfrak{D}$, то

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,\overline{g(t)}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\varphi;\ \lambda)\,\overline{\Phi(g;\ \lambda)}\,d\sigma(\lambda).$$

А так как

$$\varphi(t)=\int_0^\infty K(t,\ s;\ z)\,f(s)\,ds$$

и, по свойству 3° направляющих функционалов,

$$\Phi(\varphi;\ \lambda)=\frac{\Phi(f;\ \lambda)}{\lambda-z},$$

то

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(t,\ s;\ z)\,f(s)\,\overline{g(t)}\,ds\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(f;\ \lambda)\,\overline{\Phi(g;\ \lambda)}}{\lambda-z}\,d\sigma(\lambda).$$

Это равенство справедливо при произвольных $f,\ g \in \mathfrak{D}$, так как $\mathfrak{R}$ плотно в $L^2(0, \infty)$. Положим

$$f(t) = g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \delta, \\ 0 \text{ при } t > \delta. \end{cases}$$

Тогда наше равенство запишется в виде

$$\frac{1}{\delta^2} \int_0^\delta \int_0^\delta K(t,\ s;\ z)\, dt\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\delta(\lambda) \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}, \tag{19}$$

где

$$\omega_\delta(\lambda) = \left[\frac{1}{\delta} \int_0^\delta u(t;\ \lambda)\, dt\right]^2.$$

Левая часть (19) имеет при $\delta \to 0$ предел

$$K(0,\ 0;\ z) = m(z).$$

Поэтому

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\delta(\lambda) \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} = m(z),$$

и, значит,

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\delta(\lambda) \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + 1} = \mathfrak{Im}\, m(i).$$

Отсюда легко заключить, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + 1}$$

существует и равен $\mathfrak{Im}\, m(i)$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{1}{\lambda - i}\right) d\sigma(\lambda) = m(z) - m(i),$$

откуда

$$m(z) = \mathfrak{R}m(i) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \lambda z}{\lambda - z} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + 1}. \tag{20}$$

Применяя формулу обращения Стилтьеса — Перрона (см. n° 69), получаем

$$\frac{\sigma(\lambda - 0) + \sigma(\lambda + 0)}{2} = \text{const} + \lim_{y \to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \mathfrak{Im}\, m(x + iy)\, dx.$$

Можно показать, что эта формула справедлива и в том случае, когда граничное условие имеет вид $\varphi(0)=0$.

Сделаем теперь ряд замечаний, относящихся к случаю, когда индекс дефекта оператора L есть (2, 2). Речь будет идти об одном классе самосопряженных расширений такого оператора, впервые изученном Г. Вейлем в статье, цитированной на с. 189.

Пусть L_θ означает расширение оператора L (с индексом дефекта (1, 1) или (2, 2)), определенное граничным условием

$$p(t)\varphi'(t)|_{t=0}=\theta\varphi(0), \tag{21}$$

так что D_{L_θ} состоит из всех тех функций $\varphi(t)\in D_{L^*}$, которые удовлетворяют условию (21). Очевидно, L_θ есть симметрическое расширение оператора L. Если индекс дефекта оператора L есть (1, 1), то оператор L_θ окажется самосопряженным и, меняя θ в пределах от $-\infty$ до ∞, мы получим все самосопряженные расширения оператора L. Если же индекс дефекта оператора L есть (2, 2), то индекс дефекта оператора L_θ будет (1, 1). Любое самосопряженное расширение $\tilde{L}_\theta$ оператора L_θ является некоторым расширением оператора L. Меняя θ в интервале $(-\infty,\infty)$ и беря при каждом значении θ всевозможные расширения $\tilde{L}_\theta$, мы получим некоторый класс самосопряженных расширений оператора L. Этот класс характеризуется тем, что одно из двух граничных условий (2) п° 127, определяющих самосопряженное расширение, имеет вид (21); при этом, очевидно, второе из этих условий будет относиться лишь к сингулярному концу $t=\infty$. Таким образом, полученный класс самосопряженных расширений характеризуется *распадающимися условиями.*

Принятое вначале настоящего пункта предположение о том, что индекс дефекта оператора L есть (1, 1), было использовано лишь один раз, а именно при доказательстве свойства 2° направляющего функционала. Однако легко видеть, что это свойство 2° сохраняется и в случае индекса дефекта (2, 2), если только в качестве самосопряженных расширений $\tilde{L}$ брать расширения, характеризующиеся распадающимися условиями. Расширения такого рода будем обозначать через $\tilde{L}_\theta$.

Таким образом, все установленные выше предложения остаются справедливыми для расширений $\tilde{L}_\theta$ оператора L с индексом дефекта (2, 2). В частности, из теоремы 2 следует, что самосопряженные расширения $\tilde{L}_0$ имеют простой спектр.

Нетрудно видеть, что, как и в случае индекса дефекта (1, 1), ядро резольвенты $\tilde{R}_z$ оператора $\tilde{L}_\theta$ (при $\theta\neq\infty$) определяется формулами (18), где функция $m(z)$ однозначно определяется выбором самосопряженного расширения $\tilde{L}_\theta$ оператора L_θ. В частности, $K(0, 0; z)=m(z)$. Рассуждая, далее, как в случае индекса дефекта (1, 1), придем к формуле (20). Так как оператор $\tilde{L}_\theta$ согласно теореме 2 n° 128, имеет чисто точечный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности, то функция $\sigma(\lambda)$ является кусочно-постоянной, и формула (20) показывает, что $m(z)$ есть мероморфная функция от z.

В соответствии с результатами n° 113 скалярное произведение $(\tilde{R}_z f, f)$ при фиксированных

$$f(t) \in L^2(0, \infty) \text{ и } z(\Im z > 0)$$

пробегает некоторую окружность $C(f; z)$, когда $\tilde{R}_z$ пробегает совокупность всех ортогональных резольвент оператора L_θ. Но из формул (18) следует, что скалярное произведение $(\tilde{R}_z f, f)$ имеет вид $\alpha + \beta m(z)$, где постоянные α, β не зависят от выбора резольвенты. Поэтому, если точка $(\tilde{R}_z f, f)$ пробегает окружность $C(f; z)$, точка $w = m(z)$ также пробегает некоторую окружность, которая называется *предельной окружностью Вейля*. В случае индекса дефекта (1, 1) (и только в этом случае) предельная окружность Вейля вырождается в точку. Теперь становится ясным смысл терминов *«предельный круг»* и *«предельная точка»* упомянутых в конце n° 127. На изложении метода, с помощью которого Г. Вейль пришел к предельной окружности, мы здесь не остановимся.

Заметим, что хотя окружность $C(f; z)$ зависит от выбора f и z, соответствующая предельная окружность C зависит лишь от z, но не зависит от f, так как не зависит от f функция $m(z)$. Найдем уравнение предельной окружности. С этой целью, следуя М. Г. Крейну, используем функциональное соотношение Гильберта для резольвенты оператора $\tilde{L}_\theta$, из которого без труда получаем:

$$K(t, s, z) - K(t, s; \bar{z}) = (z - \bar{z}) \int_0^\infty K(t; \xi; z) K(\xi; s; \bar{z})\, d\xi.$$

Полагая здесь $t = s = 0$ и пользуясь формулой (18), получим

$$m(z) - \overline{m(z)} = (z - \bar{z}) \int_0^\infty |v(\xi; z) + m(z) u(\xi; z)|^2 d\xi,$$

так что уравнение предельной окружности в комплексной w-плоскости имеет вид

$$\int_0^\infty |v(\xi; z) + wu(\xi; z)|^2 d\xi = \frac{w - \bar{w}}{z - \bar{z}}.$$

В случае $\theta = \infty$ некоторая модификация приведенных рассуждений приводит к аналогичному результату, на чем мы не остановимся.

В заключение коснемся так называемой обратной задачи спектрального анализа.

Как установлено теоремой 2, каждому самосопряженному оператору, порожденному выражением

$$-y'' + q(x)\,y$$

в $L^2(0, \infty)$, отвечает спектральная функция $\sigma(\lambda)$, порождающая формулы обращения и равенство Парсеваля. Весьма замечательным оказывается тот факт, что, и обратно, дифференциальная операция вида $-y'' + q(x)\,y$ вместе с граничным условием однозначно восстанавливаются по своей спектральной функции $\sigma(\lambda)$.

Проблема восстановления дифференциального оператора по его спектральной функции и связанные с нею вопросы получили название обратной задачи спектрального анализа.

Обратная задача спектрального анализа дифференциальных операторов *второго порядка** может рассматриваться как континуальный аналог построения ортогональных многочленов. Поясним это.

Пусть задана спектральная функция $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, удовлетворяющая требованиям (нам их нет надобности здесь перечислять), при которых ей однозначно сопоставляется уравнение

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda y \quad (x > 0) \tag{22}$$

вместе с краевым условием

$$y'(0) + hy(0) = 0. \tag{23}$$

Решение этого уравнения $\varphi(x; \lambda)$, $\varphi(0; \lambda) = 1$, есть целая функция от λ при каждом $x \geqslant 0$. Из уравнения (22) и краевого условия (23) вытекает, что

$$\varphi(x; \lambda) = \cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) - h\frac{\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin(x-\xi)\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\, q(\xi)\,\varphi(\xi; \lambda)\, d\xi.$$

Отсюда, полагая $\lambda = s^2$, $t = \Im s$, нетрудно получить известным приемом оценку

$$\left|\varphi(x; \lambda) - \cos\left(x\sqrt{\lambda}\right)\right| \leqslant \frac{e^{|t|x}}{|s|}\,\frac{Q(x) + |h|}{1 - \frac{Q(x)}{|s|}},$$

* Полное решение этой задачи, а также различные ее обобщения были даны в работах И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана, М. Г. Крейна, В. А. Марченко. Изложение решения обратной задачи, принадлежащего названным авторам, вместе с подробными литературными указаниями читатель найдет в обзорной статье Левитана Б. М., Гасымова М. Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам.— УМН, 1964, 19, № 2, с. 3—63.

верную при $|s| > Q(x)$, где $Q(x) = \int\limits_0^x |q(\xi)|\, d\xi$. Эта оценка показывает, что $\varphi(x; \lambda)$, как и $\cos(x\sqrt{\lambda})$ есть четная целая функция от s экспоненциального типа x, а разность $\varphi(x; \lambda) - \cos(x\sqrt{\lambda})$ принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$ на вещественной оси s. Поэтому к этой разности применима известная теорема Пэйли-Винера*, в силу которой существует такая функция $K(x, \xi)$, что

$$\varphi(x; \lambda) = \cos(x\sqrt{\lambda}) + \int\limits_0^x K(x, \xi) \cos(\xi\sqrt{\lambda})\, d\xi \tag{24}$$

$$\text{и} \quad \int\limits_0^x |K(x, \xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

Треугольное ядро $K(x, \xi)$ $(0 < \xi < x)$, позволяющее преобразовать семейство функций $\{\cos(x\sqrt{\lambda})\}$ в семейство $\{\varphi(x; \lambda)\}$ (где $x \geqslant 0$ — параметр), аналогично треугольной матрице, с помощью которой последовательность $\{\lambda^k\}_0^\infty$ преобразуется в семейство многочленов, ортогональных относительно заданного веса, а соотношение ортогональности в континуальном случае выражается равенством Парсеваля. На основании этой аналогии естественно назвать $K(x, \xi)$ *ортогонализирующим ядром*. Правая часть соотношения (24), переводящая семейство $\{\cos(x\sqrt{\lambda})\}$ в семейство $\{\varphi(x; \lambda)\}$, является частным случаем так называемого *оператора преобразования*. Общая теория этих операторов построена в работе В. А. Марченко**.

Функцию $q(x)$ в уравнении (22) часто называют *потенциалом*, а само уравнение (22) называют уравнением Шредингера. Основанием явилась терминология квантовой механики. В связи с некоторыми задачами физики Баргман исследовал вырожденные ортогонализирующие ядра

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, \beta_i(\xi).$$

Потенциалы, открытые на этом пути Баргманом, носят его имя. Они применяются*** в квантовой теории рассеяния.

---

* См. Paley—Wiener. Fourier Transf. in the complex Domain, 1934.

** Марченко В. А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка.— «Тр. Моск. мат. о—ва», 1, 1952, с. 327—420; 2, 1953, с. 3—82.

*** См. Newton R. C. Scattering Theory of Waves and Particles, гл. IV, § 7.

130. Обобщение на дифференциальные операторы любого порядка. В n° 86 мы видели, что каждый самосопряженный оператор A со спектром кратности $r < \infty$ порождает изометрические отображения H на пространства вектор-функций L_S^2. При этих отображениях оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную. Напомним, что матричная функция распределения $S(\lambda)$ определяется разложением единицы E_λ оператора A, если выбрать какой-нибудь порождающий базис $g_1, g_2, \ldots, g_p$ $(r \leqslant p < \infty)$ этого оператора и положить

$$S(\lambda) = ((E_\lambda g_j, g_k))_{j,k=1}^p.$$

При этом указанное изометрическое отображение определяется формулами

$$\vec{\Phi}(\lambda) = Vf, \tag{1}$$

$$f = V^{-1}\vec{\Phi}(\lambda) = \text{l.i.m.} \int_{-M}^{N} \sum_{k=1}^{p} \Phi_k(\lambda)\, dE_\lambda g_k, \tag{2}$$

где элемент f и вектор-функция $\vec{\Phi}(\lambda)\,\{\Phi_1(\lambda), \ldots, \Phi_p(\lambda)\}$ пробегают пространства H и L_S^2 соответственно.

Формулы (1) и (2) мы будем называть *формулами обращения*, связанными с самосопряженным оператором A.

Заметим, что это определение шире данного в n° 129 определения для случая операторов с простым спектром, так как оно не требует, чтобы базис, порождающий функцию распределения $S(\lambda)$, был минимальным. В частности, в силу определения настоящего пункта, с операторами, обладающими простым спектром, связываются формулы обращения, осуществляющие изометрическое соответствие между H и L_S^2, где порядок матрицы $S(\lambda)$ больше единицы.

Наметим теперь вывод формул обращения, связанных с дифференциальными операторами любого порядка.

Пусть L — дифференциальный оператор с минимальной областью определения, порожденный операцией $2n$-го порядка l на интервале $(0, \infty)$ с одним сингулярным концом, а $\tilde{L}$ — произвольное самосопряженное расширение оператора L.

Мы не будем теперь делать какого-либо предположения об индексе дефекта оператора L.

Введем на многообразии $\mathfrak{D}$ финитных функций пространства $L^2(0, \infty)$ $2n$ направляющих функционалов

$$\Phi_j(f; \lambda) = \int_0^\infty f(t)\, u_j(t; \lambda)\, dt \quad (j = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{3}$$

где $\{u_j(t; \lambda)\}_{j=1}^{2n}$ — фундаментальная система решений уравнения

$$l[u] - \lambda u = 0,$$

удовлетворяющая начальным условиям

$$u_j^{[k-1]}(0;\lambda)=\begin{cases}1 & (j=k),\\ 0 & (j\neq k)\end{cases}\qquad (j,k=1,2,\ldots,2n).$$

Легко проверить, что каждый из функционалов $\Phi_j(f;\lambda)$ обладает свойствами 1°, 3° n° 129. Что же касается свойства 2°, то оно теперь формулируется следующим образом:

2°. Если для некоторой функции $f\in\mathfrak{D}$ и некоторого вещественного значения λ имеют место $2n$ равенств

$$\Phi_j(f;\lambda)=0\quad (j=1,2,\ldots,2n),$$

то уравнение

$$(\tilde{L}-\lambda I)\varphi=f$$

имеет решение в классе финитных функций.

Лемма. 1*. *Для любого конечного интервала Δ_0 оси λ существует такая система функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ..., $\psi_{2n}(t)$ из $\mathfrak{D}$, что определитель*

$$D(\lambda)=\det(\Phi_j(\psi_k;\lambda))_{j,k=1}^{2n}$$

не обращается в нуль в интервале Δ_0.

Доказательство этой леммы легко провести по образцу доказательства соответствующей леммы n° 129, опираясь на аналитичность определителя $D(\lambda)$.

Теорема 1. *Пусть Δ_0 — конечный интервал, и система функций $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{2n}$* из $\mathfrak{D}$ такова, что

$$\det(\Phi_j(\psi_k;\lambda))_{j,k=1}^{2n}\neq 0\quad (\lambda\in\Delta_0).$$

Пусть, далее, E_λ — разложение единицы оператора $\tilde{L}$ и $g_1, g_2, \ldots$ ..., g_{2n} — система функций, определенная равенствами

$$g_i(t)=\int_{\Delta_0}\sum_{k=1}^{2n}\Omega_{ik}(\lambda)\,dE_\lambda\psi_k,$$

где $\Omega_{ik}(\lambda)$ — элементы матрицы, обратной по отношению к

$$(\Phi_j(\psi_k;\lambda))_{j,k=1}^{2n}.$$

При этих условиях для любой функции $f\in\mathfrak{D}$ и любого интервала $\Delta\subseteq\Delta_0$ справедлива формула

$$E(\Delta)f=\int_{\Delta}\sum_{j=1}^{2n}\Phi_j(f;\lambda)\,dE_\lambda g_j. \tag{4}$$

* Это и следующее предложения принадлежат М. Г. Крейну (см. работу, цитированную в начале n° 129).

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 1 n° 129. Так же, как и там, мы заменяем подлежащее доказательству равенство (4) равенством

$$E(\Delta) f = \int_{\Delta} \sum_{j=1}^{2n} F_j(f; \lambda)\, dE_\lambda \psi_j,$$

где

$$F_j(f; \lambda) = \sum_{k=1}^{2n} \Omega_{kj}(\lambda)\, \Phi_k(f; \lambda),$$

и вводим элемент

$$w_\mu = \int_{\alpha}^{\mu} dE_\lambda f - \int_{\alpha}^{\mu} \sum_{j=1}^{2n} F_j(f; \lambda)\, dE_\lambda \psi_j,$$

который оказывается непрерывно зависящим от μ. Неравенство (8) n° 129 будет теперь иметь вид (при $\delta \geqslant 0$):

$$\| w_{\mu+\delta} - w_\mu \| \leqslant \Big\| E(\Delta_{\mu+0,\,\delta}) \Big[f - \sum_{j=1}^{2n} F_j(f; \mu)\, \psi_j \Big] \Big\| +$$
$$+ \Big\| E(\Delta_{\mu+0,\,\delta}) \sum_{j=1}^{2n} F_j(f; \mu)\, \psi_j - \int_{\mu+0}^{\mu+\delta} \sum_{j=1}^{2n} F_j(f; \lambda)\, dE_\lambda \psi_j \Big\|.$$

Слагаемые в правой части этого неравенства оцениваются так же, как и в n° 129, откуда и следует справедливость теоремы.

Теорема 2. *Если L, $\tilde{L}$ и $u_j(t; \lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$ имеют указанный в начале настоящего пункта смысл, то существует матричная функция распределения* $S(\lambda) = (\sigma_{ik}(\lambda))_{i,\,k=1}^{n}$ (называемая *спектральной матрицей*), *при которой формулы*

$$\Phi_j(\lambda) = \mathrm{l.\,i.\,m.} \int_{-M}^{N} f(t)\, u_j(t; \lambda)\, dt \quad (j = 1, 2, \ldots, 2n),$$

$$f(t) = \mathrm{l.\,i.\,m.} \int_{-M}^{N} \sum_{k=1}^{2n} \Phi_i(\lambda)\, u_k(t; \lambda)\, d\sigma_{ik}(\lambda)$$

устанавливают изометрическое отображение пространства $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ *на пространство вектор-функций* L^2_S.

Доказательство. Положим в формуле (4) $\Delta = \Delta_0$ и заменим систему элементов $\{g_j\}_{j=1}^{2n}$ системой $g_j^{(0)} = E(\Delta_0)\, g_j$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$, а затем разобьем λ-ось на конечные интервалы Δ_k $(\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$ и выберем для каждого из них систему элементов $\{g_j^{(k)}\}_{j=1}^{2n}$ так же, как была выбрана для интервала Δ_0 система $\{g_j^{(0)}\}_{j=1}^{2n}$.

Полагая

$$g_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

получим, как и в n° 129, систему элементов (несобственных) $g_1, g_2, \ldots, g_{2n}$, удовлетворяющих при любом конечном интервале Δ условию

$$E(\Delta) g_i = \sum_k E(\Delta) g_i^{(k)}$$

(где ряд справа содержит лишь конечное число слагаемых).

Далее для любого конечного интервала Δ λ-оси получаем формулу

$$E(\Delta) f = \int_\Delta \sum_{j=1}^{2n} \Phi_j(f; \lambda)\, dE_\lambda g_j$$

и при $\Delta = (-\infty, \infty)$

$$f = \text{l. i. m.} \int_{-M}^{N} \sum_{j=1}^{2n} \Phi_j(f; \lambda)\, dE_\lambda g_j.$$

Так как многообразие $\mathfrak{D}$ плотно в $L^2(0, \infty)$, то из последней формулы следует, что кратность спектра оператора $\widetilde{L}$ не превосходит $2n$ и что $g_1, g_2, \ldots, g_{2n}$ есть порождающий базис.

Уравнение замкнутости имеет при $f \in \mathfrak{D}$ вид

$$\int_0^\infty |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,k=1}^{2n} \Phi_i(f; \lambda)\, \overline{\Phi_k(f; \lambda)}\, d\sigma_{ik}(\lambda).$$

Все дальнейшие выкладки, приведенные в конце n° 129, без труда переносятся на рассматриваемый теперь случай, чем и устанавливается справедливость теоремы 2.

Заметим, что в случае распадающихся граничных условий (в частности, при индексе дефекта минимального оператора (n, n) всегда, так как в этом случае все граничные условия сосредоточены в нуле) можно построить формулы обращения с помощью спектральной матрицы порядка n (а не $2n$). Для этого следует вместо $2n$ функций $u_j(t, \lambda)$ взять n их линейных комбинаций $\widetilde{u}_k(t, \lambda)$, линейно независимых между собою и удовлетворяющих n краевым условиям в нуле, и рассмотреть систему из n направляющих функционалов

$$\widetilde{\Phi}_k(f; \lambda) = \int_0^\infty f(t)\, \widetilde{u}_k(t, \lambda)\, dt, \quad (k = 1, \ldots, n).$$

131. Исследование характера спектра дифференциальных операторов методом расщепления. В тех случаях, когда удается эффективно построить формулы обращения, установленные в n° 129 и 130, спектр дифференциального оператора $\tilde{L}$ находится, как множество точек роста спектральной функции $\sigma(\lambda)$ из n° 129 (или матричной спектральной функции $S(\lambda)$ из n° 130). Однако подобные случаи (примеры которых будут приведены в n° 132) встречаются редко. Поэтому представляет интерес исследование различных свойств спектра $\mathcal{S}(\tilde{L})$, основанное на заданной информации о поведении коэффициентов дифференциальной операции l, но не требующее знания спектральной функции и формул обращения. Относящийся сюда круг вопросов составляет предмет так называемого качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.

В настоящем пункте, пользуясь методом расщепления*, мы рассмотрим некоторые примеры задач качественного спектрального анализа. При этом мы для краткости ограничимся простейшей дифференциальной операцией (Шредингера)

$$l[y] = -y'' + q(x)y \tag{1}$$

на полуоси $x > 0$ с одним сингулярным концом $x = \infty$.

Спектры различных самосопряженных расширений $\tilde{L}$ оператора L с минимальной областью определения, порождаемого операцией (1), различны, но те их свойства, которые мы будем здесь рассматривать, не зависят от выбора расширения. К таким свойствам относятся:

1°) принадлежность данной точки λ к $\mathscr{C}(\tilde{L})$,

2°) существование бесконечного множества точек спектра в сколь угодно малой односторонней окрестности точки λ и

3°) сгущение спектра $\mathcal{S}(\tilde{L})$ к точке $\lambda = -\infty$.

Независимость перечисленных свойств от выбора расширения следует из теорем 1 n° 105, 1 n° 82 и 2 n° 107. Указанные свойства спектра $\mathcal{S}(\tilde{L})$ будем называть *сингулярными*, поскольку ими заведомо не может обладать спектр регулярного дифференциального оператора.

Переходя к описанию метода расщепления, обозначим через L_0 оператор, определяемый равенством

$$L_0\varphi = \tilde{L}\varphi$$

* Краткое сообщение об этом методе дано в статье И. М. Глазмана, цитированной на с. 171. Систематическому исследованию характера спектра одномерных и многомерных дифференциальных операторов с помощью метода расщепления посвящена монография, указанная в подстрочном примечании на с. 8. Теоремы, приводимые здесь без доказательства, излагаются подробно в этой монографии.

на всех тех функциях $\varphi \in D_{\tilde{L}}$, которые в заданной точке $\gamma > 0$ (называемой *точкой расщепления*) удовлетворяют условию

$$\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma) = 0.$$

Очевидно, оператор L_0 распадается в ортогональную сумму

$$L_0 = L_r \oplus L_\gamma$$

операторов L_r и L_γ, порожденных той же операцией (1) в $L^2(0, \gamma)$ и $L^2(\gamma, \infty)$ соответственно. Расширяя эти операторы до самосопряженных $\tilde{L}_r$ и $\tilde{L}_\gamma$, построим оператор

$$M = \tilde{L}_r \oplus \tilde{L}_\gamma.$$

Теперь данный оператор $\tilde{L}$ и построенный оператор M оказываются различными самосопряженными расширениями одного и того же «расщепленного» оператора L_0. Так как очевидно, что оператор L_0 в $L^2(0, \infty)$ имеет конечные дефектные числа, а оператор $\tilde{L}_r$ регулярен, то в силу теоремы 1 n° 105

$$\mathscr{C}(\tilde{L}) = \mathscr{C}(M) = \mathscr{C}(\tilde{L}_r) \cup \mathscr{C}(\tilde{L}_\gamma) = \mathscr{C}(\tilde{L}_\gamma).$$

Естественно ожидать, что и остальные сингулярные свойства спектров операторов $\tilde{L}$ и $\tilde{L}_\gamma$ одинаковы. Это действительно имеет место и может быть доказано с помощью следующей леммы, в условии которой $n(\alpha, \beta; A)$ означает число точек спектра в интервале (α, β) самосопряженного оператора A.

Лемма. *При любых α и β $(-\infty \leqslant \alpha < \beta < \infty)$ величины $n(\alpha, \beta; \tilde{L})$ и $n(\alpha, \beta, \tilde{L}_\gamma)$ одновременно конечны или бесконечны.*

Доказательство. Если $n(\alpha, \beta; \tilde{L}) < \infty$ (или $= \infty$), то по теореме 1 n° 82 будет $n(\alpha, \beta; M) < \infty$ или, соответственно, $= \infty$ (если $\alpha = -\infty$, то вместо теоремы 1 n° 82 следует использовать теорему 2 n° 82). Далее имеем

$$\mathscr{S}(M) = \mathscr{S}(\tilde{L}_r) \cup \mathscr{S}(\tilde{L}_\gamma),$$

где число точек множества $\mathscr{S}(\tilde{L}_r)$, лежащих в интервале (α, β), всегда конечно, так как спектр регулярного оператора дискретен (см. n° 125) и ограничен снизу*. Поэтому если $n(\alpha, \beta; M) < \infty$

* Последнее достаточно проверить в случае граничных условий $y(0) = y(\gamma) = 0$. Пусть $Q(x) = \int_0^x q(t)\,dt$ и $|Q(x)| \leqslant \mathscr{M}$. Тогда

$$(\tilde{L}_r y, y) = \int_0^\gamma (|y'|^2 + q(x)|y|^2)\,dx =$$

$$= \|y'\|^2 - \int_0^\gamma Q(x)\frac{d}{dx}|y|^2\,dx \geqslant \|y'\|^2 - 2\mathscr{M}\|y'\| \cdot \|y\| \geqslant -\mathscr{M}^2\|y\|^2,$$

а это и означает полуограниченность снизу оператора $\tilde{L}_r$.

(либо $=\infty$), то и $n(\alpha, \beta; \tilde{L}_\gamma) < \infty$ (соответственно, $=\infty$). Лемма доказана.

Теорема 1. *Сингулярные свойства спектров* $\mathcal{S}(\tilde{L})$ *и* $\mathcal{S}(\tilde{L}_\gamma)$ *одинаковы.*

Доказательство. Свойство $\mathcal{C}(\tilde{L}) = \mathcal{C}(\tilde{L}_\gamma)$ уже доказано выше. Сингулярные свойства 2°) и 3°) вытекают из леммы, если положить соответственно $\alpha = \lambda - \varepsilon$, $\beta = \lambda$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ и $\alpha = -\infty$, $\beta < 0$ $(|\beta| \to \infty)$.

Метод расщепления опирается на доказанную теорему 1, а также на теоремы 1 и 2 n° 82, теорему 4 n° 93 и лемму 2 n° 94. При использовании теорем из n° 82 линейное многообразие G образуется как линейная оболочка последовательности финитных функций с непересекающимися носителями*.

Если $\lambda \in \mathcal{C}(\tilde{L})$, то либо точка λ является двусторонней предельной точкой множества $\mathcal{S}(\tilde{L})$, либо односторонней левой (правой) предельной точкой этого множества. В зависимости от того, какой случай имеет место, условимся относить точку $\lambda \in \mathcal{C}(\tilde{L})$ к одному из трех возможных *типов*.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее предложение, которое без труда обобщается на любую операцию вида (1) n° 123.

Теорема 2. *Непрерывная часть спектра* $\mathcal{C}(\tilde{L})$, *тип каждой точки из* $\mathcal{C}(\tilde{L})$, *а также ограниченность (или неограниченность) спектра* $\mathcal{S}(L)$ *снизу не зависят от поведения потенциала* $q(x)$ *на конечном расстоянии.*

Таким образом, все сингулярные свойства спектра оператора $\tilde{L}$ определяются поведением потенциала $q(x)$ в бесконечности. В терминах возмущений теорема 2 означает, что любое финитное возмущение $\eta(x)$ потенциала $q(x)$ не меняет сингулярных свойств спектра**. Если возмущение $\eta(x)$ не финитно, но $\eta(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то тип точек из $\mathcal{C}(\tilde{L})$ может меняться (см. далее теорему 5), но, как легко видеть, свойство 3° сохраняется. Следующая теорема показывает, что и свойство 1° сохраняется.

Теорема 3. *Если* $\tilde{L}'$ *есть самосопряженный дифференциальный оператор, порождаемый в* $L^2(0, \infty)$ *операцией*

$$-y'' + q(x)\,y + \eta(x)\,y,$$

и

$$\lim_{x\to\infty} \eta(x) = 0, \tag{2}$$

---

* *Носителем* функции называется замыкание множества точек, где функция $\neq 0$.

** Возмущение $\eta(x)$ здесь и далее предполагается абсолютно интегрируемым на любом конечном интервале, как и потенциал $q(x)$.

то

$$\mathscr{C}(\tilde{L}') = \mathscr{C}(\tilde{L}). \tag{3}$$

Доказательство. Расщепляя операторы L' и $\tilde{L}$ в некоторой точке γ, получаем

$$\mathscr{C}(\tilde{L}) = \mathscr{C}(\tilde{L}_\gamma) \text{ и } \mathscr{C}(\tilde{L}') = \mathscr{C}(\tilde{L}'_\gamma). \tag{4}$$

Выбирая γ так, чтобы при $x > \gamma$ было $|\eta(x)| < \delta$ и пользуясь леммой 2 n° 94, заключаем, что в δ-окрестности каждой точки $\lambda \in \mathscr{C}(\tilde{L}_\gamma)$ содержатся точки из $\mathscr{C}(\tilde{L}'_\gamma)$ и обратно, в δ-окрестности каждой точки $\lambda \in \mathscr{C}(\tilde{L}'_\gamma)$ содержатся точки из $\mathscr{C}(\tilde{L}_\gamma)$. Так как число $\delta > 0$ может быть выбрано произвольно малым, то из (4) следует (3).

В случае $q(x) \geqslant q_0 > 0$ теорема 3 обобщается на относительно малые возмущения, когда вместо (2) требуется лишь $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\eta(x)}{q(x)} = 0$. Этот результат принадлежит М. Ш. Бирману.

Как частный случай, при $q(x) = 0$ из теоремы 3 и результатов n° 89, следует

Теорема 4. *Если* $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = 0$, *то* $\mathscr{C}(\tilde{L}) = [0, \infty)$.

Из более общих признаков, обеспечивающих соотношение $\mathscr{C}(\tilde{L}) = [0, \infty)$, отметим условие

$$\lim_{x\to\infty} \int\limits_x^{x+\omega} |q(t)|\,dt = 0$$

при некотором (а следовательно, и при любом) $\omega > 0$. Это условие выполняется, в частности, для потенциалов $q(x) \in L^1(0, \infty)$.

Займемся теперь исследованием типа точки $\lambda = 0$ в условиях теоремы 4. Если $q(x) \geqslant 0$ при больших x, то из леммы этого пункта следует, что отрицательная часть спектра $\mathscr{S}(\tilde{L})$ исчерпывается конечным числом собственных значений, а значит, точка $\lambda = 0$ не является правой предельной точкой спектра $\mathscr{S}(\tilde{L})$. С другой стороны, если бы при больших x потенциал был постоянным: $q(x) \equiv -\varepsilon$, то было бы $\mathscr{C}(\tilde{L}) = [-\varepsilon, \infty)$ и, следовательно, при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ точка $\lambda = 0$ была бы правой предельной для $\mathscr{S}(\tilde{L})$. Поэтому естественно ожидать, что в условиях теоремы 4 тип точки $\lambda = 0$ зависит от «степени отрицательности» потенциала $q(x)$ при $x \to \infty$. «Граница» между потенциалами, определяющими два различных типа точки $\lambda = 0$, устанавливается следующей теоремой. В условии этой теоремы существование $\lim\limits_{x\to\infty} q(x)$ не предполагается.

Теорема 5. *Если при больших* x

$$q(x) \geqslant -\frac{1}{4x^2}, \tag{5}$$

то отрицательная часть $\mathcal{S}(\tilde{L})$ *исчерпывается конечным числом собственных значений. Если же для некоторого* $\delta > 0$ *при больших* x

$$q(x) < -\frac{1+\delta}{4x^2}, \tag{6}$$

то отрицательная полуось содержит бесконечное количество точек спектра $\mathcal{S}(\tilde{L})$.

Доказательство. Если (5) имеет место при $x \geqslant \gamma$, то для любой финитной функции $y \in D_{\tilde{L}}$, носитель которой расположен правее точки γ, будет

$$(\tilde{L}y, y) = \int_{\gamma}^{\infty} (|y'|^2 + q(x)|y|^2)\,dx \geqslant \int_{\gamma}^{\infty} \left(|y'|^2 - \frac{1}{4x^2}|y|^2\right) dx =$$

$$= \int_{\gamma}^{\infty} \left|y' - \frac{1}{2x}y\right|^2 dx \geqslant 0.$$

Расщепляя оператор $\tilde{L}$ в точке γ и пользуясь теоремой 1 n° 107, легко получаем доказательство первой части теоремы.

Для доказательства второй части теоремы при условии (6) построим бесконечную последовательность финитных функций $y \in D_{\tilde{L}}$ с непересекающимися носителями, для которых будет $(\tilde{L}y, y) < 0$. Так как это же неравенство будет, очевидно, выполняться и для любого элемента из бесконечномерного подпространства G, натянутого на построенную последовательность, то отсюда на основании теоремы 2 n° 82 будет следовать, что отрицательная полуось содержит бесконечное количество точек спектра $\mathcal{S}(\tilde{L})$, что и требуется.

Итак, пусть условие (6) выполняется при $x \geqslant \gamma$ и пусть $y \in D_{\tilde{L}}$ — произвольная финитная функция с носителем, расположенным правее точки γ. Полагая

$$x = e^s, \quad \frac{y(x)}{\sqrt{x}} = z(s) \quad \text{и} \quad \alpha = \ln\gamma,$$

имеем

$$(\tilde{L}y, y) \leqslant \int_{\gamma}^{\infty} \left\{\left|y' - \frac{1}{2x}y\right|^2 - \frac{\delta}{4x^2}|y|^2\right\} dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\infty} \left(|z'|^2 - \frac{1}{4}\delta|z|^2\right) ds. \tag{7}$$

Отсюда видно, что если положить

$$z(s) = \varphi_N(s-a),$$

где

$$\varphi_N(s) = \begin{cases} \sin^2 s & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } \frac{\pi}{2} \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2} + N, \\ \sin^2(s-N) & \text{при } \frac{\pi}{2} + N \leqslant s \leqslant \pi + N, \\ 0 & \text{при } s < 0 \text{ или } s > \pi + N \end{cases}$$

и $a > \alpha$ — любое, то для соответствующей функции $y(x)$ при достаточно большом N (не зависящем от a) будет $(\tilde{L}y, y) < 0$. Выбрав такое N и придавая a последовательно значения

$$a_k = \alpha + (N + 2\pi)k, \ k = 1, 2, \ldots,$$

получим последовательность функций

$$z_k(s) = \varphi_N(s - a_k),$$

которым отвечает искомая последовательность $y_k(x)$. Теорема доказана.

Неравенства (5) и (6) совпадают с классическими условиями Кнезера неосцилляционности и осцилляционности решений дифференциального уравнения

$$y'' - q(x)y = 0. \tag{8}$$

Мы будем называть операцию (1) *осцилляторной*, если решение уравнения (8) имеет бесконечное число нулей на полуоси $x > 0$ и *неосцилляторной* — в противном случае. Напомним, что нули любых двух линейно независимых решений уравнения (8) перемежаются и поэтому, если одно из решений имеет бесконечное число нулей, то и любое другое решение также имеет бесконечное число нулей.

Следующее общее предложение устанавливает связь между отрицательной частью спектра $\mathcal{S}(\tilde{L})$ и осцилляторностью операции (1).

Теорема 6. *Для того чтобы операция* (1) *была осцилляторной, необходимо и достаточно, чтобы отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}$ была бесконечным множеством.*

Доказательство. Пусть решение $y(x)$ уравнения (8) имеет бесконечное число нулей $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots$, так что

$$y(\alpha_k) = y(\beta_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

В интервале (α_k, β_k) функцию $y(x)$ можно рассматривать как собственную функцию задачи $l[y] = \lambda y$ с краевым условием (9), отвечающую собственному значению $\lambda = 0$. Из вариационных принципов следует, что задача $l[y] = \lambda y$ с краевым условием

$$y(\alpha_k) = y(\beta'_k) = 0,$$

где $\beta'_k > \beta_k$, должна иметь отрицательное собственное значение λ_k. Соответствующую собственную функцию обозначим через $\varphi_k(x)$, так что

$$\int_{\alpha_k}^{\beta'_k} l[\varphi_k]\overline{\varphi}_k\,dx = \lambda_k \int_{\alpha_k}^{\beta'_k} |\varphi_k|^2\,dx < 0,$$

т. е.

$$\int_{\alpha_k}^{\beta'_k} (|\varphi'_k|^2 + q(x)\,|\varphi_k|^2)\,dx < 0. \tag{10}$$

Продолжим теперь $\varphi_k(x)$ на всю полуось $x > 0$ тождественным нулем и сгладим ее в окрестности концов α_k и β'_k так, чтобы полученная функция $\tilde{\varphi}_k(x)$ вошла в $D_{\tilde{L}}$. Это сглаживание легко провести с сохранением интервала $[\alpha_k, \beta'_k]$ в качестве носителя финитной функции $\tilde{\varphi}_k(x)$ и с сохранением неравенства (10), которое теперь можно представить в виде

$$(\tilde{L}\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k) < 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Так как носители построенных функций не пересекаются, то для любой функции $\varphi(x)$ из бесконечномерной линейной оболочки G функций $\tilde{\varphi}_k(k = 1, 2, \ldots)$ также будет $(\tilde{L}\varphi, \varphi) < 0$, откуда в силу теоремы 2 n° 82 следует бесконечность множества точек отрицательной части спектра оператора $\tilde{L}$.

Пусть, обратно, множество $\mathcal{S}(\tilde{L}) \cap (-\infty, 0)$ бесконечно и пусть $y(x)$ есть некоторое решение уравнения (8), а N — произвольно заданное положительное число. Требуется доказать, что функция $y(x)$ имеет корень, больший N.

Из бесконечности множества $\mathcal{S}(\tilde{L}) \cap (-\infty, 0)$ по лемме заключаем о бесконечности множества $\mathcal{S}(\tilde{L}_\gamma) \cap (-\infty, 0)$ при любом γ.

По теореме 2 n° 82 существует бесконечномерное многообразие функций $\varphi(x)$ из $D_{\tilde{L}_\gamma}$, для которых $(\tilde{L}_\gamma\varphi, \varphi) < 0$. Так как $\tilde{L}_\gamma$ есть конечномерное расширение дифференциального оператора L_γ с минимальной областью определения, то и многообразие функций $\varphi \in D_{L_\gamma}$, для которых $(L_\gamma\varphi, \varphi) < 0$, тоже бесконечномерно (для нас важно лишь, что оно непусто ни при каком $\gamma > 0$).

Пусть $\varphi(x)$ — одна из таких функций. Так как оператор L_γ есть замыкание оператора $\overset{\circ}{L}_\gamma$, совпадающего с L_γ на финитных функциях из D_{L_γ}, то найдется финитная функция $\overset{\circ}{\varphi}(x) \in D_{L_\gamma}$, для которой также будет

$$(L_\gamma\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\varphi}) < 0. \tag{11}$$

Пусть финитная функция $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ равна нулю вне интервала (a, b). Тогда из неравенства (11) вытекает, что регулярный дифференциальный оператор, порождаемый операцией (1) с краевыми условиями $y(a) = y(b) = 0$, имеет по крайней мере одно отрицательное собственное значение λ. При непрерывном убывании b это собственное значение $\lambda = \lambda(b)$, изменяясь непрерывно, при $b \to a$ неограниченно возрастает. Поэтому существует такое значение b^* $(a < b^* < b)$, при котором $\lambda(b^*) = 0$. Соответствующая собственная функция $\varphi^*(x)$ удовлетворяет неравенству (11) и условиям

$$\varphi^*(a) = \varphi^*(b^*) = 0.$$

Но тогда любое решение $y(x)$ должно иметь корень в интервале $[a, b]$. Так как можно взять $\gamma > N$, а $a \geqslant \gamma$, то теорема доказана.

Из других признаков неосцилляторности и осцилляторности отметим следующую теорему, в условии которой потенциал $q(x)$ при больших x предполагается неположительным.

Если

$$\lim_{x\to\infty} \sup x \int_x^\infty |q(t)|\,dt < \frac{1}{4},$$

то операция (1) неосцилляторна, а если

$$\lim_{x\to\infty} \sup x \int_x^\infty |q(t)|\,dt > 1,$$

то она осцилляторна.

Остановимся теперь на признаках полуограниченности и дискретности всего спектра $\mathcal{S}(\tilde{L})$.

Теорема 7. *Если* $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = +\infty$, *то спектр оператора* $\tilde{L}$ *ограничен снизу и дискретен.*

Доказательство. Ограниченность снизу оператора $\tilde{L}$, а следовательно, и его спектра, очевидна. Для доказательства дискретности $\mathcal{S}(\tilde{L})$ по заданному $N > 0$ выберем точку расщепления γ так, чтобы при $x \geqslant \gamma$ было $q(x) > N$. Тогда для любой финитной функции $y \in D_{\tilde{L}_\gamma}$

$$(\tilde{L}_\gamma y, y) = \int_\gamma^\infty (|y'|^2 + q(x)|y|^2)\,dx > N \int_\gamma^\infty |y|^2\,dx,$$

так что $\mathscr{C}(\tilde{L}_\gamma) \cap (-\infty, N)$ пусто и, следовательно, пусто $\mathscr{C}(\tilde{L}) \cap \cap (-\infty, N)$. Отсюда в силу произвольности N следует, что $\mathscr{C}(\tilde{L})$ пусто.

Более общий признак, принадлежащий А. М. Молчанову, состоит в следующем. Если потенциал $q(x)$ ограничен снизу, то для дискретности спектра оператора L необходимо и достаточно, чтобы стремилось к бесконечности среднее значение потенциала по любому конечному интервалу, т. е. предельное соотношение

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+\omega} q(t)\,dt = +\infty$$

при любом $\omega > 0$.

Согласно теореме 3, в тех случаях, когда существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = q_\infty$, т. е. равно нулю колебание потенциала на бесконечности

$$\omega = \limsup_{x\to\infty} q(x) - \liminf_{x\to\infty} q(x),$$

непрерывный спектр оператора $\tilde{L}$ совпадает с полуосью $[q_\infty, \infty)$. В связи с этим возникает вопрос о том, как будет сказываться на непрерывном спектре влияние конечного предельного колебания $\omega \neq 0$ потенциала. Естественно ожидать, что это влияние как-то должно регламентироваться величиной ω. Действительно, имеет место следующее предложение.

Теорема 8. *Длина лакун в непрерывной части спектра оператора $\tilde{L}$ не превосходит величины ω.*

Доказательство. Положим

$$\sigma = \liminf_{x\to\infty} q(x), \quad \rho = \limsup_{x\to\infty} q(x)$$

и введем операцию

$$l[y] = -y'' + Q(x)\,y \tag{12}$$

с потенциалом

$$Q(x) = q(x) - \frac{1}{2}(\sigma + \rho).$$

Тогда

$$\limsup_{x\to\infty} |Q(x)| = \mathscr{M},$$

где $\mathscr{M} = \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}(\rho - \sigma)$, и достаточно установить, что длина лакун в непрерывной части спектра оператора $\tilde{L}$, порождаемого операцией (12), не превосходит $2\mathscr{M}$.

Очевидно, левее точки $-\mathcal{M}$ не существует точек непрерывной части спектра оператора $\tilde{L}$. Пусть теперь $\lambda_0>0$ и $\delta>\mathcal{M}$, но интервал $(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)$ не содержит точек из $\mathscr{C}(\tilde{L})$. Покажем, что это предположение приводит к противоречию.

Так как $\mathscr{C}(\tilde{L})=\mathscr{C}(\tilde{L}_\gamma)$, то в силу сделанного предположения при любом γ множество $\mathscr{C}(\tilde{L}_\gamma)\cap(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)$ должно быть пустым. Если теперь выбрать точку расщепления γ так, чтобы при $x>\gamma$ было $|Q(x)|\leqslant\delta_0<\delta$, то, пользуясь леммой 2 п° 94, заключаем, что точка λ_0 не принадлежит непрерывной части спектра оператора дифференцирования второго порядка $\mathscr{P}^2$ в $L^2(\gamma, \infty)$, что абсурдно, так как последняя покрывает сплошь полуось $\lambda\geqslant 0$.

При некоторых дополнительных ограничениях теорема 8 допускает существенное развитие. Так, например, если функция $q(x)$ ограничена и равномерно непрерывна на полуоси $x>0$, то длина лакун в $\mathscr{C}(L)$, расположенных правее точки λ, по теореме Хартмана — Патнама стремится к нулю. Это же имеет место для любых локально суммируемых периодических потенциалов.

Если потенциал $q(x)$ обладает конечным колебанием в бесконечности, то его возмущение слагаемым $\eta(x)$, стремящимся к нулю при $x\to\infty$, не изменяет $\mathscr{C}(\tilde{L})$, но может внести дискретный спектр в лакуны спектра $\mathscr{C}(\tilde{L})$. Число точек дискретного спектра, вносимого таким образом в лакуну, может быть конечным или бесконечным. Вопрос о том, какой из этих двух случаев имеет место, напоминает задачу об условиях неосцилляторности. Однако в действительности этот вопрос существенно сложнее и до сих пор остается неисследованным, за исключением оператора Шредингера с периодическим потенциалом, называемого также *оператором Хилла*.

Приведем относящиеся сюда результаты.

Теорема 9*. *Если* $\int\limits_0^\infty x\,|\eta(x)|\,dx<\infty$ *(соответственно,* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x\eta(x)|\,dx<\infty$*), то дискретный спектр, вносимый возмущением* $\eta(x)$ *в каждую лакуну спектра* $\mathscr{C}(\tilde{L})$ *оператора Хилла, рассматриваемого на полуоси (соответственно, на оси), конечен, и при этом достаточно далекие лакуны содержат не более одного (соответственно, двух) собственных значений каждая.*

---

* Рофе-Бекетов Ф. С. Признак конечности числа дискретных уровней, вносимых в лакуны непрерывного спектра возмущениями периодического потенциала.— ДАН СССР, 1964, № 3.

Теорема 10*. *Если кроме условий предыдущей теоремы выполнено еще условие*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x)\,dx \neq 0,$$

то каждая достаточно далекая лакуна содержит в точности одно собственное значение возмущенного оператора Хилла на оси.

132. Примеры. I. Поставим задачу найти потенциал $q(x)$ таким образом, чтобы уравнение

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda y \tag{1}$$

имело в качестве одного из своих решений функцию

$$\varphi(x, \lambda) = \cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) + T(x)\,\frac{\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)}{\sqrt{\lambda}},$$

где $T(x)$ от λ не зависит**. Подставляя $\varphi(x, \lambda)$ в уравнение (1), приходим к двум соотношениям

$$2T'(x) = q(x), \quad T''(x) = q(x)\,T(x),$$

из которых вытекает, что

$$T(x) = -A \operatorname{th}(Ax + B), \quad q(x) = -\frac{2A^2}{\operatorname{ch}^2(Ax + B)},$$

где A и B — произвольные вещественные постоянные. Так как изменение знака A равносильно изменению знака B, то примем, что $A \geqslant 0$.

Функция $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет в точке $x = 0$ граничному условию

$$y'(0) = T(0)\,y(0), \quad \varphi(0, \lambda) = 1.$$

Нетрудно проверить, что вторым решением уравнения с найденным потенциалом является функция

$$\Theta(x, \lambda) = \sqrt{\lambda}\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right) - T(x)\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right),$$

которая в точке $x = 0$ удовлетворяет условиям

$$\Theta(0, \lambda) = -T(0), \quad \Theta'(0, \lambda) = \lambda - T'(0).$$

---

* Rofe-Beketov F. S. Deficiency indices and properties of spectrum of some classes of differential operators.— Lecture notes in Math "Spectral theory and Differential equations.", 1974, p. 275—295. Менее полный вариант этой теоремы был получен В. А. Желудевым (1967, 1970).

** Таким образом (см. конец n° 129) мы ищем потенциал $q(x)$ из условия, чтобы ортогонализирующее ядро было вырожденным и имело вид $K(x, \xi) = T(x)$.

Вместо функции $\Theta(x, \lambda)$ возьмем в качестве второго решения рассматриваемого уравнения функцию

$$\psi(x, \lambda) = \frac{1}{A^2+\lambda}\{T(0)\varphi(x, \lambda) + \Theta(x, \lambda)\},$$

для которой

$$\psi(0, \lambda) = 0, \quad \psi'(0, \lambda) = 1.$$

Теперь займемся применением изложенной выше теории к дифференциальной операции

$$l = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad (0 \leqslant x < \infty).$$

Индексом дефекта оператора L является $(1, 1)$. Пусть граничное условие, характеризующее самосопряженное расширение оператора, имеет вид

$$y'(0) = hy(0). \tag{2}$$

Нам будет удобно положить $h = T(0) + \gamma$. Отдельно придется рассмотреть граничное условие

$$y(0) = 0. \tag{2'}$$

Граничному условию (2) отвечает фундаментальная система решений

$$u(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \gamma\psi(x, \lambda) = \frac{A^2+\lambda+\gamma[T(0)-T(x)]}{A^2+\lambda} \times$$
$$\times \cos(x\sqrt{\lambda}) + \frac{(A^2+\lambda)T(x) + \gamma T(0)T(x) + \gamma\lambda}{A^2+\lambda}\frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}},$$
$$v(x, \lambda) = -\psi(x, \lambda) = \frac{T(x)-T(0)}{A^2+\lambda}\cos(x\sqrt{\lambda}) -$$
$$-\frac{T(0)T(x)+\lambda}{A^2+\lambda}\frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}.$$

Для определения функции $m(\zeta)$ $(\Im\zeta > 0)$ составим сумму

$$v(x, \zeta) + m(\zeta)u(x, \zeta) = e^{ix\sqrt{\zeta}}\{\cdots\} +$$
$$+ e^{-ix\sqrt{\zeta}}\left\{\frac{T(x)-T(0)}{2(A^2+\zeta)} - \frac{i}{2}\frac{\zeta+T(0)T(x)}{(A^2+\zeta)\sqrt{\zeta}} +\right.$$
$$+ m(\zeta)\left[\frac{A^2+\zeta+\gamma(T(0-T(x))}{2(A^2+\zeta)} +\right.$$
$$\left.\left.+\frac{i}{2}\frac{(A^2+\zeta)T(x)+\gamma T(0)T(x)+\gamma\zeta}{(A^2+\zeta)\sqrt{\zeta}}\right]\right\},$$

которая должна принадлежать $L^2(0, \infty)$. Поэтому коэффициент при $e^{-ix\sqrt{\zeta}}$ должен стремиться к 0, когда $x \to \infty$. Мы приходим к формуле (причем использовано, что $T(\infty) = -A$):

$$m(\zeta) = \frac{\gamma[\zeta + T^2(0)] + T(0)(\zeta + A^2) + i\sqrt{\zeta}(\zeta + A^2)}{[\zeta + A^2 + \gamma T(0)]^2 + \gamma^2\zeta}.$$

Заметим теперь, что знаменатель в написанном выражении на положительной вещественной полуоси всегда положителен. Поэтому, если мы будем считать λ вещественным, то для $\sigma(\lambda)$ из формулы

$$\sigma(\lambda) = \text{const} + \lim_{\eta \to +0} \Im \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda m(\zeta)\, d\xi \quad (\zeta = \xi + i\eta)$$

найдем, что при $\lambda \geqslant 0$:

$$\sigma'(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\lambda}(\lambda + A^2)}{[\lambda + A^2 + \gamma T(0)]^2 + \gamma^2\lambda}.$$

На полуоси $\lambda < 0$ функция $\sigma(\lambda)$ может иметь не более двух скачков, то есть оператор может иметь не более двух собственных значений (которые отрицательны). Если $\lambda_0 < 0$ — собственное значение, то величина скачка $\sigma(\lambda)$ в точке λ_0 определяется с помощью формулы

$$\sigma(\lambda_0 + \varepsilon) - \sigma(\lambda_0 - \varepsilon) =$$
$$= \lim_{\eta \to +0} \Im \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_0 - \varepsilon}^{\lambda_0 + \varepsilon} \frac{\gamma[\zeta + T^2(0)] + [T(0) + i\sqrt{\zeta}](\zeta + A^2)}{[\zeta + A^2 + \gamma T(0)]^2 + \gamma^2\zeta}\, d\xi.$$

В общем случае, как собственные значения, так и скачки функции $\sigma(\lambda)$ будут зависеть от параметра B. Однако существует единственное значение γ, а именно, $\gamma = 0$, при котором от B зависит только скачок, а само собственное значение (оно при этом единственно) от B не зависит.

Выполним все вычисления, относящиеся к случаю $\gamma = 0$. Во-первых,

$$\sigma'(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + A^2} \quad (\lambda \geqslant 0); \tag{3_1}$$

во-вторых, $\lambda_0 = -A^2$ и

$$\sigma(\lambda_0 + 0) - \sigma(\lambda_0 - 0) = A(1 + \operatorname{th} B), \tag{3_2}$$

так как

$$\sigma(\lambda_0+\varepsilon)-\sigma(\lambda_0-\varepsilon)=\lim_{\eta\to+0}\Im\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon}\frac{T(0)+i\sqrt{\zeta}}{\zeta+A^2}d\xi=$$

$$=\lim_{\eta\to+0}\Im\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A^2-\varepsilon}^{-A^2+\varepsilon}\frac{T(0)-\sqrt{-\xi-i\eta}}{\xi+(A^2+i\eta)}d\xi=-[T(0)-A]=A(1+\operatorname{th}B).$$

Соответствующая собственная функция имеет вид

$$\varphi_0(x)=\operatorname{ch}Ax-\operatorname{th}(Ax+B)\operatorname{sh}Ax=\frac{\operatorname{ch}B}{\operatorname{ch}(Ax+B)}. \tag{3_3}$$

Краевое условие (2) в случае $\gamma=0$ есть

$$y'(0)+A\operatorname{th}By(0)=0. \tag{3_4}$$

Таким образом, при этом краевом условии спектр уравнения

$$-y''-\frac{2A^2}{\operatorname{ch}^2(Ax+B)}y=\lambda y \tag{1}$$

от параметра B не зависит*. Но, конечно, спектральная функция зависит от B, а именно, от B зависит величина ее скачка в одной точке, как показывает формула (3_2).

Второй простой случай получится при

$$\gamma T(0)+A^2=0,$$

т. е. при

$$\gamma=A\operatorname{cth}B.$$

В этом случае σ непрерывна и

$$\sigma'(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\lambda+A^2}{\sqrt{\lambda}(\lambda+\gamma^2)} & (\lambda>0)\\ 0 & (\lambda<0),\end{cases}$$

---

* Заметим, что если положить $A^2=c$, $B=-c\sqrt{c}t$, где $c>0$, то потенциал $q(x)$ в уравнении (1) примет вид

$$w(x,\ t)=-\frac{2c}{\operatorname{ch}^2\sqrt{c}(x-ct)}.$$

Если здесь t интерпретировать как время, то эта функция будет так называемой *уединенной волной* или *солитоном;* она представляет решение типа бегущей волны некоторого нелинейного уравнения, которое у нас имеет вид $w_t=\frac{3}{2}ww_x-\frac{1}{4}w_{xxx}$ и отличается лишь нормировкой и выбором единиц длины и времени от классического уравнения Кортвега-де Фриса $w_t+ww_x+w_{xxx}=0$. По этому вопросу см. Lax P. D. Jntegrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Comm. on Pure and Appl. Mathem., 1968, vol. 21, p. 467—490.

а краевое условие имеет вид

$$y'(0) = \frac{A}{\operatorname{sh} B \operatorname{ch} B} y(0).$$

Нам осталось рассмотреть случай граничного условия (2′). Решение $\psi(x, \lambda)$ (уравнения (1) при этом граничном условии играет некоторую роль (в качестве простого примера) в теории рассеяния*. А именно, в физических рассмотрениях представляет интерес асимптотическое выражение функции $\psi(x, \lambda)$ при $x \to \infty$. В случае уравнения (1) это асимптотическое выражение легко находим из полученных выше формул, оно имеет вид

$$\psi(x, \lambda) \sim N(s) \frac{\sin(sx + \eta(s))}{s},$$

где

$$s = \sqrt{\lambda} > 0, \quad N(s) = \left| \frac{s - iA \operatorname{th} B}{s - iA} \right| = \sqrt{\frac{s^2 + A^2 \operatorname{th}^2 B}{s^2 + A^2}},$$

$$\eta(s) = \arg \frac{s - iA \operatorname{th} B}{s - iA} = \operatorname{arctg} \frac{Ase^{-B}}{s^2 \operatorname{ch} B + A^2 \operatorname{sh} B}.$$

$N(s)$ и $\eta(s)$ называются соответственно *предельной амплитудой и предельным фазовым сдвигом*. Процедура нахождения спектральной функции $\tau(\lambda)$, отвечающей условию (2′), аналогична примененной выше для условия (2). Окончательная формула имеет вид

$$\tau'(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sqrt{\lambda}(A^2 + \lambda)}{\lambda + A^2 \operatorname{th}^2 B} & (\lambda \geqslant 0) \\ 0 & (\lambda < 0). \end{cases}$$

II. Классический интеграл Фурье на полуоси и его обобщение получаются из предыдущего примера с помощью предельного перехода $B \to \pm\infty$. Поэтому мы можем ограничиться формулировкой результата.

Итак, пусть рассматривается операция

$$l = -\frac{d^2}{dt^2} \quad (0 \leqslant t < \infty).$$

Решением уравнения $l[y] = \lambda y$ при граничном условии**

$$y'(0) = \mp Ay(0) \tag{4}$$

---

* См. книгу Р. Ньютона, цитированную в конце n° 129 (гл. 14, § 7, n° 2), где рассматривается частный случай потенциала Эккарта). Наши обозначения отличаются от принятых в теории рассеяния.

** Здесь и далее, когда мы пишем два знака, то верхний относится к случаю $B = \infty$, а нижний — к случаю $B = -\infty$, в соответствующих формулах предыдущего примера (при этом всегда $A \geqslant 0$).

является функция

$$\varphi(t, \lambda) = \cos(t\sqrt{\lambda}) \mp A\frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}.$$

При граничном условии (4) формулы обращения имеют вид а) в случае верхнего знака и $A > 0$:

$$\begin{cases} \Phi(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(t)\left[\cos(t\sqrt{\lambda}) - A\frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\right]dt, \ (\lambda \geqslant 0) \\ \Phi(-A^2) = \int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-At}dt, \end{cases}$$

$$f(t) = 2A\Phi(-A^2)\,e^{-At} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \Phi(\lambda)\left[\cos(t\sqrt{\lambda}) - A\frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\right]\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{A^2+\lambda};$$

в) в случае нижнего и $A \geqslant 0$:

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(t)\left[\cos(t\sqrt{\lambda}) + A\frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\right]dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \Phi(\lambda)\left[\cos(t\sqrt{\lambda}) + A\frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\right]\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{A^2+\lambda}.$$

При граничном условии

$$y(0) = 0 \tag{4'}$$

решением является $\psi(t, \lambda) = \frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}$, а формулы обращения имеют вид

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(t)\frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\,dt, \quad f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \Phi(\lambda)\frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}\,d\lambda.$$

III. Функции Лежандра. Дифференциальная операция Лежандра имеет вид

$$l = -\frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{d}{dt}.$$

При рассмотрении уравнения Лежандра $(l-\lambda I)u=0$ удобно параметр λ представить в виде $\lambda=\mu(\mu+1)$. Если сделать замену переменной $x=\frac{1-t}{2}$, то уравнение Лежандра примет вид

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+(1-2x)\frac{du}{dx}+\mu(\mu+1)u=0.$$

Это частный случай гипергеометрического уравнения

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+\{c-(a+b+1)x\}\frac{du}{dx}-abu=0.$$

Поэтому одним из решений уравнения Лежандра является гипергеометрическая функция

$$P_\mu(t)=F\left(\mu+1,\ -\mu;\ 1;\ \frac{1-t}{2}\right)=1+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+k)(-\mu)(-\mu+1)\ldots(-\mu+k-1)}{(k!)^2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^k.$$

Для дальнейшего полезно заметить, что

$$P'_\mu(t)=\frac{\mu(\mu+1)}{2}F\left(\mu+2,\ -\mu+1;\ 2;\ \frac{1-t}{2}\right).$$

Ряд, представляющий $P_\mu(t)$, обрывается и, значит, представляет многочлен (так называемый полином Лежандра) в том и только том случае, когда число μ целое. Вообще же $P_\mu(t)$ называется *функцией Лежандра первого рода порядка* μ. Областью сходимости написанного ряда является круг $|t-1|<2$. Решением уравнения Лежандра является также функция $P_\mu(-t)$. В круге $|t|<1$ обе функции $P_\mu(t)$, $P_\mu(-t)$ регулярны.

На основании общих формул*

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{F(a,\ b;\ a+b;\ x)}{\ln\frac{1}{1-x}}=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)};$$

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{a+b-c}F(a,b;\ c;\ x)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)};$$

$$\Re(a+b-c)>0$$

* Немногие факты, которые нам понадобятся из теории гипергеометрической функции содержатся в книге Уиттекер Э. и Ватсон Дж. Курс современного анализа, т. II. М., Физматгиз, 1963, а также в справочнике Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. I, М., «Наука», 1969.

для функции Лежандра имеют место соотношения

$$\lim_{t\to-1+0}\frac{P_\mu(t)}{\ln\frac{1-t}{1+t}}=-\frac{\sin\pi\mu}{\pi};$$

$$\lim_{t\to-1+0}P_\mu^{[1]}(t)=\lim_{t\to-1+0}(1-t^2)P_\mu'(t)=\frac{2\sin\pi\mu}{\pi}.$$

Благодаря первому из этих соотношений и равенству $P_\mu(1)=1$ мы заключаем, что при нецелом μ функции $P_\mu(t)$, $P_\mu(-t)$ линейно независимы. Примем, что число μ — нецелое (вещественное или невещественное).

Мы будем рассматривать дифференциальную операцию l, вначале на интервале $(-1, 1)$, а потом на полуоси $(1, \infty)$.

а) Случай интервала $(-1, 1)$. В этом случае обе функции $P_\mu(t)$, $P_\mu(-t)$ принадлежат $L^2(-1, 1)$. Кроме того, квазипроизводные $P_\mu^{[1]}(t)$, $P_\mu^{[1]}(-t)$ абсолютно непрерывны, а квазипроизводные второго порядка принадлежат $L^2(-1, 1)$ в силу дифференциального уравнения Лежандра. Следовательно, уравнение

$$(L^*-\lambda I)\,u=0\quad(-1<t<1)\tag{5}$$

при нецелом μ имеет два линейно независимых решения, а значит, индекс дефекта оператора L есть $(2, 2)$. Предлагаем также проверить, что ортонормированная система решений уравнения (5) имеет вид

$$u_1(t;\ \lambda)=A_\mu\{P_\mu(t)+P_\mu(-t)\},$$
$$u_2(t;\ \lambda)=B_\mu\{P_\mu(t)-P_\mu(-t)\},$$

где A_μ, B_μ — константы, аргументы которых произвольны, поэтому примем, что $A_\mu>0$, $B_\mu>0$.

Теперь положим

$$\omega^*(t)=\omega(t)-\frac{1}{2}\omega^{[1]}(t)\ln\frac{1+t}{1-t},$$

где квазипроизводная $\omega^{[1]}(t)$ равна $(1-t^2)\,\omega'(t)$, и перепишем билинейную форму Лагранжа в виде

$$[\varphi, \psi]_t=\varphi^*(t)\overline{\psi^{[1]}(t)}-\varphi^{[1]}(t)\overline{\psi^*(t)}.$$

Нетрудно доказать, что

1) для всякой функции $\varphi\in D_{L^*}$ существуют и конечны

$$\lim_{t\to\pm1}\varphi^{[1]}(t),\quad \lim_{t\to\pm1}\varphi^*(t);$$

2) многообразие D_L есть совокупность всех тех $\varphi\in D_{L^*}$, для которых эти четыре предела равны нулю.

Доказательство следует из того, что при любой функции $f \in L^2(-1, 1)$ общий интеграл уравнения $l[y] = f(t)$ имеет вид

$$y(t) = \left\{C_1 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{t} f(s)\ln\frac{1+s}{1-s}\,ds\right\} + \left\{C_2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{t} f(s)\,ds\right\}\ln\frac{1+t}{1-t},$$

где C_1, C_2 — константы, а в силу этого представления

$$y^{[1]}(t) = 2\left\{C_2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{t} f(s)\,ds\right\}, \quad y^*(t) = C_1 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{t} f(s)\ln\frac{1+s}{1-s}\,ds.$$

Чтобы получить самосопряженное расширение оператора L, нужно, согласно общей теории, зафиксировать какое-нибудь λ из верхней полуплоскости (мы возьмем $\lambda = \mu(\mu+1)$, где μ — число чисто мнимое, и, выбрав унитарную матрицу $(\vartheta_{ik})_{i,k=1}^{2}$, положить

$$w_1(t) = w_1(t;\ \lambda) = u_1(t;\ \lambda) + \vartheta_{11}\overline{u_1(t;\ \lambda)} + \vartheta_{12}\overline{u_2(t;\ \lambda)},$$
$$w_2(t) = w_2(t;\ \lambda) = u_2(t;\ \lambda) + \vartheta_{21}\overline{u_1(t;\ \lambda)} + \vartheta_{22}\overline{u_2(t;\ \lambda)}.$$

Далее следует найти значения

$$w_k^{[1]}(\pm 1),\ w_k^*(\pm 1) \quad (k = 1,\ 2)$$

и с их помощью составить краевые условия $[\varphi, w_k]_{-1}^{1} = 0$ $(k = 1,\ 2)$, выделяющие из области D_{L^*} область D_{L_ϑ}.

Используя приведенные формулы, нетрудно составить следующую таблицу:

$$w_1^{[1]}(\pm 1) = \frac{2\sin\pi\mu}{\pi}\{\mp A_\mu(1-\vartheta_{11}) - B_\mu\vartheta_{12}\},$$
$$w_2^{[1]}(\pm 1) = \frac{2\sin\pi\mu}{\pi}\{\pm A_\mu\vartheta_{21} + B_\mu(1-\vartheta_{22})\},$$
$$w_1^*(\pm 1) = A_\mu\{[1+\gamma(\mu)] + \vartheta_{11}[1+\overline{\gamma(\mu)}]\} \pm \vartheta_{12}B_\mu[1-\overline{\gamma(\mu)}],$$
$$w_2^*(\pm 1) = \vartheta_{21}A_\mu[1+\gamma(\mu)] \pm B_\mu\{[1-\gamma(\mu)] + \vartheta_{22}[1-\gamma(\mu)]\}.$$

На вычислении величины $\gamma(\mu)$ мы не остановимся, но из дальнейшего будет ясно, что $\gamma(\mu) \neq \pm 1$.

Простейшее и наиболее важное самосопряженное расширение мы получим, полагая

$$\vartheta_{11} = \vartheta_{22} = 1,\ \vartheta_{12} = \vartheta_{21} = 0.$$

В этом случае

$$w_1^{[1]}(\pm 1) = 0,\ w_2^{[1]}(\pm 1) = 0$$

и

$$w_1^*(\pm 1) = A_\mu[2 + \gamma(\mu) + \overline{\gamma(\mu)}],$$
$$w_2^*(\pm 1) = \pm B_\mu[2 - \gamma(\mu) - \overline{\gamma(\mu)}].$$

Так как ни $w_1(t)$, ни $w_2(t)$ не принадлежат D_L, то последние выражения отличны от нуля, и, значит, $\gamma(\mu) \neq \pm 1$.

Краевые условия, характеризующие рассматриваемое расширение, имеют вид

$$\varphi^{[1]}(1) = \varphi^{[1]}(-1) = 0. \tag{A}$$

Им можно придать и другую форму. Во-первых, они эквивалентны условию

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\varphi^{[1]}(t) \in L^2(-1,1). \tag{B}$$

Во-вторых, они эквивалентны следующему требованию:

$\varphi(t)$ стремится к конечным пределам при $t \to \pm 1$. (C)

Докажем эквивалентность этих условий. При этом достаточно рассмотреть случай вещественных функций $\varphi(t)$.

Напишем тождество

$$-\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,[(1-t^2)\,\varphi'(t)]'\,dt =$$

$$= -(1-t^2)\,\varphi'(t)\,\varphi(t)\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta (1-t^2)\,\varphi'^2(t)\,dt \tag{6}$$

$$(-1 < \alpha < \beta < 1),$$

левая часть которого имеет конечный предел при $\alpha \to -1$, $\beta \to 1$, какова бы ни была функция $\varphi(t) \in D_{L^*}$. С другой стороны,

$$\varphi^{[1]}(t) = \varphi^{[1]}(-1) - \int_{-1}^t l[\varphi(s)]\,ds = \varphi^{[1]}(1) + \int_t^1 l[\varphi(s)]\,ds.$$

Поэтому, если выполнено условие (A), $|\varphi^{[1]}(t)| \leqslant \sqrt{1 \pm t}\,\|L^*_\varphi\|$ и, значит,

$$\lim_{t\to\pm 1} \varphi^{[1]}(t) \ln\frac{1+t}{1-t} = 0.$$

Так как $\varphi^*(t)$ стремится к конечным пределам при $t \to \pm 1$, то к тем же пределам стремится $\varphi(t)$, т. е. выполняется условие (*C*). Итак, $(A) \Rightarrow (C)$.

Допустим теперь, что выполнено условие (*C*). Так как в силу утверждения 1 (с. 226) $\varphi^{[1]}(t)$ имеет конечные пределы при $t \to \pm 1$, то первый член правой части (6) имеет конечный предел при $\alpha \to -1$, $\beta \to 1$ и тем же свойством обладает левая часть тождества (6). Следовательно, и второй член правой части при $\alpha \to -1$, $\beta \to 1$ имеет конечный предел*:

$$J[\varphi] = \int_{-1}^1 (1-t^2)\,\varphi'^2(t)\,dt < \infty. \tag{7}$$

Иначе говоря, выполнено условие (*B*), т. е. $(C) \Rightarrow (B)$.

---

* Заметим, что уравнение $l[\varphi] = 0$ совпадает с уравнением Эйлера — Лагранжа для интеграла $J(\varphi)$. В связи с этим см. Friedrichs. Über die ausgezeichnete Randbedingungen. — «Math. Ann.», Bd. 112, 1935. S. 1 — 23.

Допустим, наконец, что выполнено условие (B), т. е. соотношение (7). Тогда $\varphi^{[1]}(1)$ не может быть отличным от 0, так как в противном случае из конечности $\varphi^*(1)$ следовало бы, что $\varphi(t)$ имеет бесконечный предел при $t \to 1$, а это приводит к противоречию в силу (6). Аналогично доказывается, что $\varphi^{[1]}(-1)=0$. Итак, $(B) \Rightarrow (A)$.

Наше утверждение доказано.

Самосопряженное расширение, характеризуемое одним из условий (A), (B), (C), приводит к классическим разложениям по многочленам Лежандра. Так как граничные условия (A) распадаются, то спектр расширения прост. При этом спектр является чисто точечным, без конечных точек сгущения, а обратный оператор вполне непрерывен. Многочлены Лежандра

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n} \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$-\frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{du}{dt} - n(n+1)u = 0,$$

и, кроме того, удовлетворяют условию (C). А так как совокупность многочленов $P_n(t)$ образует полную ортогональную систему в $L^2(-1, 1)$, то спектр рассматриваемого расширения состоит из точек $n(n+1)$ $(n=0,\ 1,\ 2, \ldots)$ и соответствующие этому случаю формулы обращения следуют из разложения в ряд по многочленам Лежандра.

в) Случай полуоси $(1, \infty)$. Теперь будем рассматривать уравнение

$$-\frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{du}{dt} - \mu(\mu+1)u = 0$$

на полуоси $t > 1$. Для гипергеометрической функции имеется ряд соотношений, позволяющих ее аналитически продолжать из единичного круга на другие области комплексной плоскости. Благодаря этим соотношениям при $t > 1$ справедливо следующее представление функции Лежандра первого рода*

$$P_\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2^{\mu+1}}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\mu\right)}{\Gamma(-\mu)}\frac{1}{t^{\mu+1}}F\left(1+\frac{\mu}{2},\ \frac{1+\mu}{2};\ \frac{3}{2}+\mu;\ \frac{1}{t^2}\right) +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{\mu}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)}{\Gamma(1+\mu)}t^{\mu}F\left(\frac{1-\mu}{2},\ -\frac{\mu}{2};\ \frac{1}{2}-\mu;\ \frac{1}{t^2}\right). \tag{8}$$

---

* См. цитированную выше книгу Bateman глава III, 3. 2.

В качестве второго решения уравнения Лежандра на полуоси $t > 1$ возьмем так называемую *функцию Лежандра второго рода**

$$Q_\mu(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu+1}} \frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\mu\right)} \frac{1}{t^{\mu+1}} F\left(1+\frac{\mu}{2}, \frac{1+\mu}{2}; \frac{3}{2}+\mu; \frac{1}{t^2}\right). \tag{9}$$

При этом мы положим $\mu(\mu+1) = -\frac{1}{4} - \lambda$, где λ — новый параметр. Таким образом, $\mu = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\lambda}$, а уравнение Лежандра можно переписать в виде

$$-\frac{d}{dt}(t^2-1)\frac{du}{dt} - \frac{1}{4}u = \lambda u.$$

В наших формулах обращения параметр λ будет $\geqslant 0$.

Написанный здесь ряд для $P_\mu(t)$ сходится вне единичного круга t-плоскости, а ранее рассмотренное разложение сходилось в круге $|t-1| < 2$. Поэтому точка $t = 1$, для функции $P_\mu(t)$ регулярна и, пользуясь разложением в круге $|t-1| < 2$, мы можем сразу написать, что

$$P_\mu(1) = 1, \quad (t^2-1)P'_\mu(t)|_{t=1} = 0.$$

Заметим также, что функция $P_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}(t)$ при $t > 1$ и $\lambda \geqslant 0$ вещественна. Вместе с $Q_\mu(t)$ решением рассматриваемого уравнения будет функция $Q_{-1-\mu}(t)$, которая, конечно, линейно выражается через $P_\mu(t)$ и $Q_\mu(t)$. В качестве второго решения уравнения Лежандра мы присоединим к $P_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}(t)$ функцию

$$\psi(t;\lambda) = \frac{1}{2}\{Q_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}(t) + Q_{-\frac{1}{2}-i\sqrt{\lambda}}(t)\},$$

которая при $\lambda \geqslant 0$ на полуоси $t > 1$, очевидно, вещественна. С помощью указанных выше общих свойств гипергеометрической функции мы получаем для $\psi(t, \lambda)$ следующие соотношения**:

$$\lim_{t\to 1+0} \frac{\psi(t,\lambda)}{\ln\left(1-\frac{1}{t^2}\right)} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{t\to 1+0}(t^2-1)\psi'(t,\lambda) = -1.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$(t^2-1)\begin{vmatrix} P_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}(t) & P'_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}(t) \\ \psi(t;\lambda) & \psi'(t;\lambda) \end{vmatrix} = -1.$$

* См. цитированную книгу Bateman, глава III, 3.2.

** Здесь использована формула $\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$.

Найдем индекс дефекта оператора L. Если $1 < c < a$, то в интервале $(1, c)$ с одним сингулярным концом индекс дефекта есть (2, 2), так как оба решения принадлежат $L^2(1, c)$; далее, в интервале $[c, \infty$ индекс дефекта оператора L есть (1, 1) и, следовательно, по теореме 3 п° 127 индекс дефекта в $(1, \infty)$ есть (1, 1).

Мы построим формулы обращения для расширения оператора L, определяемого граничным условием $(t^2 - 1)\, u'(t)|_{t=1+0} = 0$. Функцией $\varphi(t;\lambda)$, равной 1 при $t = 1$, будет $P_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}(t)$. Для получения формул обращения в этом случае можно воспользоваться методом направляющих функционалов п° 129, если заметить, что при построении функции Грина не обязательно существование решения $v(t;\lambda)$, равного 0 на левом конце (здесь при $t = 1$). В нашем случае роль функции $v(t, \lambda)$ будет играть $\psi(t;\lambda)$, которая на левом конце имеет логарифмическую особенность, но все рассмотрения п° 129, включая окончательную формулу для спектральной функции $\sigma(\lambda)$, здесь проходят. На простом доказательстве этого утверждения мы не остановимся, а перейдем к построению, поступая так же, как и в случае, когда левый конец регулярен. Таким образом, предполагая, что $0 < \arg\zeta < \pi$, будем искать функцию $m(\zeta)$ ($\Im\zeta > 0$) из условия, чтобы линейная комбинация

$$\psi(t, \zeta) + m(\zeta)\, P_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\zeta}}(t) \tag{10}$$

принадлежала $L^2(1, \infty)$. Из вида разложений (8), (9) легко усмотреть, что $m(\zeta)$ однозначно определяется. Действительно, при $t \to \infty$ гипергеометрическая функция стремится к значению 1, а из двух множителей $t^{-1-\mu}$, t^{μ} (при $\mu = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\zeta}$ и $\Im\sqrt{\zeta} > 0$) первый не принадлежит $L^2(1, \infty)$. Таким образом, мы получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu+1}}\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\mu\right)} + m(\zeta)\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{2^{\mu+1}}\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\mu\right)}{\Gamma(-\mu)} = 0.$$

Решая его, находим, что

$$m(\zeta) = -\frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(1+\mu)\,\Gamma(-\mu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\mu\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\mu\right)} = \frac{\pi i}{2}\,\mathrm{th}(\pi\sqrt{\zeta}).$$

Мы видим, что принадлежащая $L^2(1, \infty)$ функция вида (10) равна*

$$\frac{1}{2}\{Q_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\zeta}}(t)+\pi i \operatorname{th}(\pi\sqrt{\zeta})P_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\zeta}}(t)\}. \tag{10'}$$

Теперь уже легко написать формулы обращения:

$$g(\lambda)=\int_1^\infty f(t)P_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}(t)\,dt,$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\int_0^\infty g(\lambda)P_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}(t)\operatorname{th}(\pi\sqrt{\lambda})\,d\lambda$$

и равенство Парсеваля

$$\int_1^\infty |f(t)|^2\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty |g(\lambda)|^2\operatorname{th}(\pi\sqrt{\lambda})\,d\lambda.$$

Эти формулы известны под названием *формул Мелера-Фока.*

IV. Функции Чебышева—Эрмита связаны с дифференциальной операцией

$$l=-\frac{d^2}{dt^2}+t^2\ (-\infty<t<\infty), \tag{11}$$

которая, в частности, имеет большое значение в теории так называемого линейного осциллятора в квантовой механике.

Оператор L, порожденный операцией (11), является самосопряженным оператором в силу теоремы 5 п° 128. Легко проверить, что уравнению

$$-u''+(t^2-\lambda)u=0$$

при $\lambda=2n+1$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют последовательные функции Чебышева—Эрмита (см. п° 12) образующие полную систему в $L^2(-\infty, \infty)$. Поэтому оператор L имеет чисто дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. Таким образом, формулы обращения, связанные с оператором L, сводятся к разложению по функциям Чебышева—Эрмита.

Рассмотренный пример является в некотором отношении поучительным. Он показывает, что свойство резольвенты — быть вполне непрерывным оператором, которое, согласно теореме 2 п° 128, всегда имеет место в квазирегулярном случае, может иметь

---

* Здесь уместно отметить, что в теории функций Лежандра доказывается соотношение (о чем было упомянуто выше)

$$Q_{-\frac{1}{2}-i\sqrt{\xi}}(t)-Q_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\xi}}(t)=\pi i \operatorname{th}(\pi\sqrt{\xi})P_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\xi}}(t),$$

пользуясь которым можно сразу усмотреть, что (10′) при $\mathfrak{I}(\sqrt{\xi})>0$ принадлежит $L^2(1, \infty)$.

место и в других случаях (и даже в случае минимальных дефектных чисел, как в приведенном примере).

V. Функции Бесселя. Среди различных дифференциальных операций, приводящих к функциям Бесселя, важнейшая имеет вид

$$l = -\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2}; \tag{12}$$

эту операцию мы и рассмотрим при параметре $\nu \geqslant 0$. Что касается интервала, то естественно изучить три случая:

α) $0 < t \leqslant 1$ — один сингулярный конец;

β) $1 \leqslant t < \infty$ — один сингулярный конец;

γ) $0 < t < \infty$ — два сингулярных конца.

Общий интеграл уравнения

$$l[u] - \lambda u = 0 \tag{13}$$

при $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$y(t;\ \lambda) = At^{\frac{1}{2}} J_\nu(t\sqrt{\lambda}) + Bt^{\frac{1}{2}} Y_\nu(t\sqrt{\lambda}), \tag{14}$$

где A, B — произвольные константы, а $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — цилиндрические функции 1-го и, соответственно, 2-го рода, которые определяются формулами

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)},$$

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}.$$

Мы будем предполагать, что $\Im\lambda > 0$ и $t > 0$; таким образом, величина $z = t\sqrt{\lambda}$ будет удовлетворять неравенству $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$. Но при $|\arg z| < \pi - \varepsilon$ и $|z| \to \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$J_\nu(z) + iY_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$J_\nu(z) - iY_\nu(z) = H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

С помощью формулы (14) найдем, что уравнение (13) не имеет двух линейно независимых решений, принадлежащих $L^2(1, \infty)$.

Но одно такое решение существует обязательно. Этим решением является функция

$$u_1(t;\ \lambda) = At^{\frac{1}{2}} H_\nu^{(1)}(t\sqrt{\lambda}).$$

Индекс дефекта оператора L в случае β) есть, таким образом, (1.1).

Найдем индекс дефекта оператора L в случае α). Так как при $z \to 0$

$$z^{\frac{1}{2}} J_\nu(z) \sim \frac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)},$$

а с другой стороны, $z^{\frac{1}{2}} Y_\nu(z)$ не принадлежит $L^2(0, 1)$, если $\nu \geqslant 1$, и принадлежит $L^2(0, 1)$, если $0 \leqslant \nu < 1$, то в случае α) индекс дефекта оператора L есть

$$\begin{aligned} &(2,2) \text{ при } 0 \leqslant \nu < 1, \\ &(1,1) \text{ при } \nu \geqslant 1. \end{aligned}$$

Поэтому в случае γ) индекс дефекта оператора L есть

$$\begin{aligned} &(1,1) \text{ при } 0 \leqslant \nu < 1, \\ &(0,0) \text{ при } \nu \geqslant 1. \end{aligned}$$

В каждом из перечисленных случаев дифференциальная операция (12) порождает некоторые формулы обращения.

Единственную пару формул мы получим для интервала $(0, \infty)$ при $\nu \geqslant 1$. Эта пара формул имеет вид

$$g(\lambda) = \int_0^\infty \sqrt{\lambda t}\, J_\nu(\lambda t) f(t)\, dt,$$

$$f(t) = \int_0^\infty \sqrt{\lambda t}\, J_\nu(\lambda t) g(\lambda)\, d\lambda. \tag{15}$$

Мы здесь имеем не только унитарный, но и самосопряженный оператор в $L^2(0, \infty)$, который носит название *преобразования Ганкеля*. При $0 \leqslant \nu < 1$ формулы (15) также справедливы, но уже не являются единственными* формулами обращения на полуоси, порожденными операцией (12).

Убедиться в справедливости формул обращения (15) лучше всего непосредственно (это будет сделано в следующем разделе этого п°), применяя один из указанных нами приемов для получения формул обращения Фурье-Планшереля. При этом мы увидим,

* Построение всех относящихся к случаю $0 \leqslant \nu < 1$ разложений читатель сможет найти в цитированной книге Тичмарша, т. 1, п° 4.11.

что формулы (15) справедливы даже при $\nu > -1$ (и, следовательно, для $\nu \geqslant -1$, так как $J_{-1}(z) = -J_1(z)$).

Рассмотрим случай интервала $(0, 1]$ при $\nu \geqslant 1$ и примем, что краевое условие на регулярном конце имеет вид $u(1) = 0$. Следовательно, мы можем положить

$$u(t;\ \lambda) = \frac{\pi}{2}\sqrt{t}\,\{J_\nu(t\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(\sqrt{\lambda}) - Y_\nu \times (t\sqrt{\lambda})\,J_\nu(\sqrt{\lambda})\};$$

пусть, далее,

$$v(t;\ \lambda) = \frac{\pi}{2}\sqrt{t\lambda}\,\{J_\nu(t\sqrt{\lambda})\,Y_\nu'(\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(t\sqrt{\lambda})\,J_\nu'(\sqrt{\lambda})\},$$

так что*

$$u(1;\ \lambda) = 0,\ u'(1;\ \lambda) = -1,$$
$$v(1;\ \lambda) = 1,\ v'(1,\ \lambda) = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$K(t,\ s;\ \zeta) = \begin{cases} u(t;\ \zeta)\,[v(s;\ \zeta) + m(\zeta)\,u(s;\ \zeta)] & (t \geqslant s), \\ u(s;\ \zeta)\,[v(t;\ \zeta) + m(\zeta)\,u(t;\ \zeta)] & (t < s), \end{cases}$$

где $m(\zeta)$ определяется из условия принадлежности функции от t

$$v(t;\ \zeta) + m(\zeta)\,u(t;\ \zeta)$$

пространству $L^2(0, 1)$. Это значит, что функция

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\,J_\nu(t\sqrt{\zeta})\,[\sqrt{\zeta}Y'(\sqrt{\zeta}) + m(\zeta)\,Y_\nu(\sqrt{\zeta})] -$$
$$-\frac{\pi}{2}\sqrt{t}Y_\nu(t\sqrt{\zeta})\,[\sqrt{\zeta}J_\nu'(\sqrt{\zeta}) + m(\zeta)\,J_\nu(\sqrt{\zeta})]$$

должна сводиться к первому члену. Итак,

$$m(\zeta) = -\sqrt{\zeta}\,\frac{J_\nu'(\sqrt{\zeta})}{J_\nu(\sqrt{\zeta})}.$$

Эта функция представима в виде

$$m(\zeta) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta}{\lambda_n - \zeta} - \nu,$$

где λ_n — отличные от нуля корни функции $J_\nu(\sqrt{\zeta})$, откуда следует, что $\sigma(\lambda)$ есть кусочно-постоянная функция и последователь-

* Здесь использовано тождество $J_\nu(z)\,Y_\nu'(z) - Y_\nu(z)\,J_\nu'(z) = \dfrac{2}{\pi z}$.

ность $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ образует спектр, а скачки равны $\sigma(\lambda_n + 0) - \sigma_n(\lambda_n - 0) = 2\lambda_n$. Собственные функции имеют вид

$$u_n(t) = u_n(t;\ \lambda_n) = -\frac{\sqrt{t}\, J_\nu(t\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}\, J'_\nu(\sqrt{\lambda_n})},$$

а формулы обращения сводятся к формуле разложения

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda_n u_n(t;\ \lambda_n) \int_0^1 f(s)\, u_n(s;\ \lambda_n)\, ds,$$

известной под названием *формулы Фурье—Бесселя.*

Если бы на регулярном конце было взято общее условие

$$u'(1) = -\theta u(1),$$

то мы пришли бы к так называемым *рядам Фурье—Дини.*

На случае интервала $(0, 1]$ при $0 \leqslant \nu < 1$ мы не остановимся. Заметим лишь, что на этот случай переносится прием, которым мы воспользовались при рассмотрении операции Лежандра.

Равным образом мы можем предоставить читателю рассмотрение случая β), когда интервалом является $[1, \infty)$ (а индекс дефекта есть $(1,1)$). Если принять на регулярном конце условие

$$u(1) = 0,$$

то, применив неоднократно использованный прием, найдем

$$m(\zeta) = -\sqrt{\zeta}\, \frac{J'_\nu(\sqrt{\zeta}) + iY'_\nu(\sqrt{\zeta})}{J_\nu(\sqrt{\zeta}) + iY_\nu(\sqrt{\zeta})} \quad (\Im\zeta > 0)$$

и получим *формулы обращения Вебера—Титчмарша:*

$$\Phi(\lambda) = \int_1^\infty \sqrt{t}\, \{J_\nu(t\sqrt{\lambda})\, Y_\nu(\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(t\sqrt{\lambda})\, J_\nu(\sqrt{\lambda})\}\, f(t)\, dt,$$

$$f(t) = \int_0^\infty \sqrt{t}\, \frac{J_\nu(t\sqrt{\lambda})\, Y_\nu(\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(t\sqrt{\lambda})\, J_\nu(\sqrt{\lambda})}{2\{J_\nu^2(\sqrt{\lambda}) + Y_\nu^2(\sqrt{\lambda})\}}\, \Phi(\lambda)\, d\lambda.$$

VI. Преобразование Ганкеля и полиномы Лагерра—Сонина. Будем рассматривать функцию Бесселя $J_\nu(t)$ $(t > 0)$ при $\nu > -1$. Ее мажорантой является так называемая модифицированная функция Бесселя (порядка ν)

$$I_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)},$$

для которой имеет место следующая (грубая) оценка*

$$I_\nu(t) \leqslant \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^\nu + \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2} \operatorname{ch} t.$$

Нам понадобится тождество

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r^{\nu+\frac{1}{2}} \sqrt{rt} J_\nu(rt)\, dr = e^{-\frac{t^2}{2}} t^{\nu+\frac{1}{2}},$$

которое получается (после замены функции $J_\nu(tr)$ ее разложением в ряд) с помощью почленного интегрирования, что допустимо благодаря указанной оценке. Написанное тождество показывает, что $e^{-\frac{t^2}{2}} t^{\nu+\frac{1}{2}}$ является для оператора Ганкеля H,

$$(Hf)(t) = \int\limits_0^\infty f(r) \sqrt{rt} J_\nu(rt)\, dr,$$

собственной функцией, принадлежащей собственному значению 1. В написанном тождестве положим $r = \alpha y$, $t = \beta x$, где $\alpha > 0$, $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Тогда оно примет вид

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2 y^2}{2}} \alpha^{\nu+1} y^{\nu+\frac{1}{2}} \sqrt{xy} J_\nu(xy)\, dy = e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}} \beta^{\nu+1} x^{\nu+\frac{1}{2}}.$$

Замечая, что

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} = -\beta \frac{\partial}{\partial \beta},$$

применим к левой части оператор $\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^n$, а к правой — оператор $(-1)^n \left(\beta \frac{\partial}{\partial \beta}\right)^n$ и заменим в результате α и β на 1. Тогда мы получим следующее, более общее, тождество:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} y^{\nu+\frac{1}{2}} T_n^{(\nu)}(y^2) \sqrt{xy} J_\nu(xy)\, dy =$$
$$= (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\nu+\frac{1}{2}} T_n^{(\nu)}(x^2), \tag{16}$$

где $T_n^{(\nu)}(z)$ — некоторый многочлен от z степени n.

---

* Чтобы получить эту оценку, достаточно воспользоваться простым неравенством $k!\Gamma(\nu+k+1) > k!(k-1)! \geqslant \frac{(2k-2)!}{2^{2k-2}}$ $(\nu > -1,\ k = 1, 2, 3, \ldots)$.

В частности,

$$T_0^{(\nu)}(z) = 1,\ T_1^{(\nu)}(z) = -z + (\nu + 1),\ T_2^{(\nu)}(z) = \\ = z^2 - 2(\nu + 2)z + (\nu + 1)^2.$$

Мы видим, что

$$e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\nu+\frac{1}{2}} T_n^{(\nu)}(x^2) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

является для оператора Ганкеля собственной функцией, принадлежащей собственному значению $(-1)^n$.

Так как оператор Ганкеля симметричен, то многочлены $T_n^{(\nu)}(t)$, $T_m^{(\nu)}(t)$, степени которых имеют разную четность, удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2\nu+1} T_n^{(\nu)}(y^2)\, T_m^{(\nu)}(y^2)\, dy = 0,$$

иначе говоря, многочлены $T_n^{(\nu)}(t)$, $T_m^{(\nu)}(t)$ ортогональны относительно веса $e^{-t}t^\nu$ $(t > 0)$: $\int\limits_0^\infty e^{-t} t^\nu T_n^{(\nu)}(t)\, T_m^{(\nu)}(t)\, dt = 0.$

Так обстоит дело с многочленами, степени которых имеют разную четность. Ортогонализируя относительно рассматриваемого веса каждую из двух систем $\{T_{2k}^{(\nu)}(t)\}_{k=0}^\infty$, $\{T_{2k+1}^{(\nu)}(t)\}_{k=0}^\infty$, мы получим после их объединения единую систему многочленов $L_n^{(\nu)}(t) = (-1)^n \frac{1}{n!} t^n + \ldots$, для которых $\int\limits_0^\infty e^{-t} t^\nu L_n^{(\nu)}(t)\, L_m^{(\nu)}(t)\, dt = 0 \quad (m \neq n)$.

Это соотношение ортогональности, очевидно, эквивалентно следующему:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^\nu L_n^{(\nu)}(t)\, t^k dt = 0 \quad (n > 0,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{17}$$

Обозначение связано с тем, что впервые при $\nu = 0$ рассматриваемая система была построена Лагерром* (а позже при любом $\nu > -1$ Н. Сониным. Так как соотношение (17) определяет ортогональные многочлены с точностью до постоянного множителя,

---

* Эта система функций у нас уже встретилась в n° 12, но с другой нормировкой, а именно: $L_n(t) = n! L_n^{(0)}(t)$.

то, учитывая, что старший коэффициент многочлена $L_n^{(\nu)}(t)$ уже выбран, мы можем легко показать, что

$$L_n^{(\nu)}(t) = \frac{1}{n!} e^t t^{-\nu} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t} t^{n+\nu}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Действительно, соотношения ортогональности (17) при таком выборе $L_n^{(\nu)}(t)$ легко проверяются интегрированием по частям. Приведенное явное выражение для $L_n^{(\nu)}(t)$ позволяет также найти *нормировочный коэффициент:*

$$a_n^2 = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu [L_n^{(\nu)}(t)]^2 dt = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu L_n^{(\nu)}(t) \frac{(-1)^n}{n!} t^n dt =$$

$$= \frac{1}{(n!)^2} (-1)^n \int_0^\infty t^n \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t} t^{n+\nu})\, dt = \frac{n!}{(n!)^2} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{n+\nu} dt = \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

Докажем, что в пространстве L^2 с весом $e^{-t} t^\nu$ $(0 < t < \infty)$ ортогональная последовательность $\{L_n^{(\nu)}(t)\}_{n=0}^\infty$ полна. Допуская противное, примем, что существует измеримая функция $\Phi(t)$ $(0 < t < \infty)$, для которой $\int_0^\infty e^{-t} t^\nu |\Phi(t)|^2 dt \neq 0$ и, несмотря на это,

$$\int_0^\infty e^{-t} t^\nu \Phi(t) L_n^{(\nu)}(t)\, dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

или, что то же,

$$\int_0^\infty e^{-t} t^\nu \Phi(t)\, t^n dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим функцию*

$$g(\zeta) = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu \Phi(t)\, e^{-it\zeta} dt \quad (\zeta = \xi + i\eta),$$

которая, очевидно, регулярна в полуплоскости $\eta < \frac{1}{4}$ и для которой в силу нашего предположения

$$g^{(n)}(0) = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu \Phi(t)\, (-it)^n dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

* Мы повторяем здесь, в сущности, рассмотрения, которыми уже воспользовались в конце п°12.

Но в таком случае $g(\zeta) \equiv 0$ и, следовательно,

$$g(\xi) = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu \Phi(t) e^{-it\xi} dt = 0 \quad (-\infty < \xi < \infty),$$

т. е. равно тождественно 0 преобразование Фурье функции, которая при $t < 0$ есть 0, а при $t > 0$ есть $e^{-t} t^\nu \Phi(t) \in L^1(0, \infty)$. Поэтому $\Phi(t) \equiv 0$ и противоречие получено.

Теперь докажем формулы обращения Ганкеля. Оператор Ганкеля имеет на $f(x)$ непосредственный смысл, если

$$\int_0^\infty |f(x)|\, dx < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^1 |f(x)|\, x^{\nu+\frac{1}{2}} dx < \infty.$$

Второе условие, наверное, выполнено, если $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$.

Однако мы должны предположить лишь, что $f \in L^2(0, \infty)$. Но в таком случае мы можем разложить f в ряд по собственным функциям оператора H, сходящийся в метрике $L^2(0, \infty)$:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^\infty c_k e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\nu+\frac{1}{2}} L_k^{(\nu)}(x^2).$$

На отрезках этого ряда

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\nu+\frac{1}{2}} L_k^{(\nu)}(x^2)$$

оператор Ганкеля допускает непосредственное определение:

$$g_n(x) = (Hf_n)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\nu+\frac{1}{2}} L_k^{(\nu)}(x^2).$$

Но последовательность $\{g_n(x)\}_0^\infty$ фундаментальна и, следовательно, сходится в $L^2(0, \infty)$ к некоторой функции $g(x)$, которая имеет разложение

$$g(x) \sim \sum_{k=0}^\infty (-1)^k c_k e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\nu+\frac{1}{2}} L_k^{(\nu)}(x^2).$$

Оператор H унитарен и самосопряжен. Его можно также определить формулой

$$(Hf)(x) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^A f(y) \sqrt{xy}\, J_\nu(xy)\, dy.$$

Полиномы Чебышева—Эрмита включаются как частный случай в систему полиномов Лагерра-Сонина, а именно:

$$H_{2m}(t) = (-1)^m 2^{2m} m! L_m^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(t^2),$$

$$H_{2m+1}(t) = (-1)^m 2^{2m+1} m! t L_m^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t^2).$$

Далее отметим, что полиномы Лагерра-Сонина связаны с некоторыми дифференциальными операциями второго порядка, на чем основана роль этих полиномов во многих вопросах теоретической физики. Важнейшая из этих дифференциальных операций $\left(\text{мы, естественно, можем принять, что } \nu^2 \neq \frac{1}{4}\right)$ имеет вид

$$l = -\frac{d^2}{dt^2} + \left(t^2 + \frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)}{t^2}\right) \quad (0 < t < \infty).$$

Операторы L^+ и L^-, порождаемые этой операцией на интервалах $[1, \infty)$ и $(0, 1]$, имеют (ср. теорему 5 п°128) индекс дефекта $(1,1)$. Поэтому индекс дефекта оператора L на интервале $(0, \infty)$ есть $(0, 0)$, то есть L — оператор самосопряженный. Так как уравнению $(l - \lambda I) u = 0$ удовлетворяет при $\lambda = 4n + 2(\nu + 1)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ последовательность функций Лагерра-Сонина

$$\varphi_n^{(\nu)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} t^{\nu + \frac{1}{2}} L_n^{(\nu)}(t^2) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

образующая полную систему в $L^2(0, \infty)$, то оператор L имеет здесь так же, как и в случае Чебышева—Эрмита (см. разд. IV настоящего п°), чисто дискретный спектр, а формулы обращения, связанные с оператором l, сводятся к разложениям по функциям $\varphi_n^{(\nu)}(t)$.

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА, СВЯЗАННЫЕ С ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ

1. В общем виде задача*, которою мы будем здесь заниматься, формулируется следующим образом.

Дана вещественная неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, а ищется дифференциальная операция

$$l = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad (x \geqslant 0)$$

с непрерывным (вещественным) потенциалом $q(x)$ и краевое условие c_h:

$$y'(0) + hy(0) = 0,$$

т. е. константа (вещественная) h, таким образом, чтобы $\sigma(\lambda)$ была спектральной функцией дифференциального оператора L_h, порождаемого операцией l и краевым условием c_h.

Если решение задачи существует и если носитель функции σ ограничен снизу, то в силу одного результата Гельфанда — Левитана** $\sigma(\lambda)$ является в существенном единственной и поэтому ортогональной спектральной функцией оператора L_h. Главные проблемы, к которым сводится эта задача, можно перечислить сразу. Это, во-первых, проблема единственности для оператора L_h. Затем проблема существования и, наконец, проблема нахождения оператора L_h. Все они оказались достаточно трудными. Первая из этих проблем была решена В. А. Марченко***) в 1950 году. Вот его

Теорема 1. *Пусть две дифференциальные операции*

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \; -\frac{d^2}{dx^2} + q_1(x) \quad (0 \leqslant x < \infty)$$

с непрерывными потенциалами $q(x)$, $q_1(x)$ при краевых условиях

$$y(0)\sin\alpha + y'(0)\cos\alpha = 0,$$

соответственно,

$$y(0)\sin\alpha_1 + y'(0)\cos\alpha_1 = 0$$

---

* Ср. конец п°129.

** См. Гельфанд И. М. и Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции (Изв. АН СССР, сер. мат. 15, 1951, с. 309—360), с. 350.

*** См. ДАН СССР, 1972, № 3, с. 457—460.

порождают дифференциальные операторы со спектральными функциями $\sigma(\lambda)$, *соответственно*, $\sigma_1(\lambda)$. *В таком случае, из тождества (во всех точках непрерывности)*

$$\sigma(\lambda) = C\sigma_1(\lambda),$$

где C — *константа, следует, что* $q(x) = q_1(x)$ и $\alpha \equiv \alpha_1 \pmod{\pi}$.

Что касается второй проблемы, то ее решение дает следующая основная

Теорема 2. *Для того чтобы неубывающая функция* $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *была спектральной функцией оператора* L_h, *порождаемого дифференциальной операцией* l *и краевым условием* c_h, *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) если $f(x)$ — *финитная функция из* $L^2(0, \infty)$ *и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) = 0,$$

где

$$g(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\cos(x\sqrt{\lambda})\,dx,$$

то $f(x) \equiv 0$;

в) если $N \to \infty$, *то при любом вещественном* x *интеграл*

$$\int_{-\infty}^{N} \frac{1-\cos(x\sqrt{\lambda})}{\lambda}\,d\sigma(\lambda)$$

сходится к непрерывной функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x\sqrt{\lambda})}{\lambda}\,d\sigma(\lambda) = \Phi(x),$$

которая имеет в каждом конечном интервале полуоси $0 < x < \infty$ *абсолютно непрерывную производную второго порядка; при этом производные* $\Phi'(x)$, $\Phi''(x)$ $(x > 0)$ *непрерывны вплоть до точки* $x = 0$ *и*

$$\Phi(0) = 0,\ \Phi'(+0) = 1,\ \Phi''(+0) = h,$$

где h — *константа из краевого условия* c_h.

Чтобы сверх того потенциал $q(x)$ *имел суммируемую в каждом конечном интервале полуоси* $0 \leqslant x < \infty$) *производную порядка* m, *необходимо и достаточно наличие у* $\Phi(x)$ $(x > 0)$ *производной порядка* $m+2$, *абсолютно непрерывной в каждом конечном интервале полуоси* $0 < x < \infty$ *и такой, что все производные* $\Phi^{(k)}(x)$ *до порядка* $k = m+2$ *включительно имеют конечные пределы при* $x \to +0$.

Доказательство этой важной теоремы выходит за рамки настоящей книги*. Мы рассмотрим пока лишь один простой пример, который иллюстрирует теорему 2.

Пример. Пусть $\sigma(\lambda)$ имеет единственный скачок:

$$\sigma(\lambda_0+0)-\sigma(\lambda_0-0)=A(1+\operatorname{th}B),$$

где $\lambda_0^2=-A^2$ ($A>0$, B — произвольное вещественное число), а в остальном абсолютно непрерывна и

$$\sigma'(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+A^2} & (\lambda\geqslant 0)\\ 0 & (\lambda<0)\end{cases}$$

(см. пример 1 в п°132). В этом случае

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(x\sqrt{\lambda})}{\lambda}\,d\sigma(\lambda)=(1+\operatorname{th}B)\frac{\operatorname{ch}Ax-1}{A}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}(\lambda+A^2)}\,d\lambda$$

и после простых вычислений находим, что

$$\Phi(x)=(1+\operatorname{th}B)\frac{\operatorname{ch}Ax-1}{A}+\frac{1}{A}\left(1-e^{-A|x|}\right).$$

Если рассматривать $\Phi(x)$ на всей оси, то в точке $x=0$ она производной не имеет, но непрерывность сохраняет. Мы видим также, что функция $\Phi(x)$ для $x>0$ имеет производные всех порядков, при этом

$$\Phi(0)=0,\quad \Phi'(+0)=1,\quad \Phi''(+0)=A\operatorname{th}B.$$

Таким образом, краевое условие должно иметь вид

$$y'(0)+A\operatorname{th}B\,y(0)=0.$$

---

* Читатель может познакомиться с доказательством теоремы 2 по цитированной в конце п°129 работе Гасымова и Левитана. В этой работе читатель найдет также некоторые сведения о том, как теорема 2 возникла в результате нескольких улучшений и усилений первоначального варианта вплоть до статьи М. Г. Крейна (ДАН СССР, 88, № 3, 1953), где впервые был устранен разрыв между необходимыми и достаточными условиями, который существовал до того (после основоположной работы Гельфанда и Левитана, см. с. 242). К этому добавим, что функция,

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(x\sqrt{\lambda})}{\lambda}\,d\sigma(\lambda),\qquad (*)$$

которую М. Г. Крейн в цитированной только что статье назвал переходной функцией, была им введена и изучена еще в 1945 году в связи с методом направляющих функционалов. По поводу класса функций $\Phi(x)$, допускающих представление (*), см. также Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., 1961, с. 269—270.

Само уравнение Штурма—Лиувилля мы также знаем (оно было рассмотрено в примере 1 п°132):

$$-y''-\frac{2A^2}{\operatorname{ch}^2(Ax+B)}y=\lambda y;$$

как и следует из теоремы 2, потенциал имеет производные любого порядка.

Теперь вернемся к теореме 2 в ее общей формулировке. Доказательство этой теоремы носит конструктивный характер и приводит к некоторой процедуре для нахождения $q(x)$. Эта процедура*, по Гельфанду и Левитану, состоит в следующем: по переходной функции $\Phi(x)$ строится ядро $F(s, t)$ интегрального уравнения Фредгольма, которое однозначно разрешимо при каждом фиксированном $x>0$ и служит для нахождения ортогонализирующего ядра $K(x, t)$ рассматриваемой задачи. Это интегральное уравнение имеет вид

$$K(x, t)+\int_0^x K(x, s)F(s, t)\,ds+F(x, t)=0.$$

Когда ортогонализирующее ядро найдено, потенциал $q(x)$ определяется по формуле

$$q(x)=2\frac{d}{dx}K(x, x).$$

В задачах, которыми мы будем заниматься в дальнейшем**, спектр будет заполнять полуось, за исключением конечного числа ее интервалов, обычно называемых *лакунами*. Само по себе это обстоятельство не может привести к каким-либо заслуживающим внимания результатам. Однако такие результаты появляются, если при наличии заданных лакун надлежащим образом выбраны спектральные функции.

II. В этом разделе будем предполагать, что спектральная функция $\sigma(\lambda)$, кроме условий теоремы 2, удовлетворяет лишь одному условию: $\sigma(\lambda)=0$ $(\lambda\leqslant 0)$. Будем рассматривать отвечающие ей дифференциальное уравнение

$$-y''+q(x)y=\lambda y\quad(x\geqslant 0)\tag{1}$$

и краевое условие c_h и обозначим $\varphi(x;\lambda)$ соответствующее решение, удовлетворяющее нормировке $y(0)=1$, так что $\varphi(0;\lambda)=1$, $\varphi'(0;\lambda)=-h$.

---

* Другой путь принадлежит Крейну и основан на созданной им теории продолжения эрмитово-позитивных функций. См. статьи М. Г. Крейна в ДАН СССР: 76 (1951), 82 (1952), 87 (1952), 88 (1953).

** Нижеследующие рассмотрения основаны на нескольких работах автора: 1) Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах (ДАН СССР, 134, 1960); 2) Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов (ДАН СССР, 1961, 141); 3) Об одном уравнении Штурма — Лиувилля на полуоси («Зап. Харьк. мат. о-ва», 1963, т. 29); 4) Об уравнении Лямэ («Зап. Харьк. мат. о-ва», 1964, т. 30).

Второе решение уравнения (1) обозначим $\psi(x;\ \lambda)$:

$$\psi(0;\ \lambda)=0,\ \psi'(0;\ \lambda)=1.$$

Эти обозначения сохраним во всем дальнейшем.

Как и в конце п° 129, положим $\lambda=s^2$, $\Im s=t$ и заметим, что $\varphi(x;\ \lambda)$ и $\psi(x;\ \lambda)$ являются относительно s четными целыми функциями экспоненциального типа x.

Как было указано в конце п° 129, при любом $x\geqslant 0$ и $|s|>Q(x)$

$$\left|\varphi(x;\ \lambda)-\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right)\right|\leqslant\frac{e^{|t|x}}{|s|}\,\frac{Q(x)+|h|}{1-\frac{Q(x)}{|s|}}. \tag{2_1}$$

Аналогичная оценка справедлива для $\psi(x;\ \lambda)$:

$$\left|\psi(x;\ \lambda)-\frac{\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)}{\sqrt{\lambda}}\right|\leqslant\frac{e^{|t|x}}{|s|^2}\,\frac{Q(x)}{1-\frac{Q(x)}{|s|}}. \tag{2_2}$$

В обоих неравенствах $Q(x)=\int\limits_0^x|q(\xi)|\,d\xi$ и является монотонно возрастающей функцией.

Один из способов получения спектральной функции* проблемы $\{(1),\ c_h\}$ связан с введением мероморфной функции от λ (с параметром $x\geqslant 0$)

$$f_x(\lambda)=\frac{\psi(x;\ \lambda)}{\varphi(x;\ \lambda)},\quad f_0(\lambda)=0.$$

Эта функция в области $\Im\lambda>0$ регулярна и имеет (при $x>0$) положительную мнимую часть**. Опираясь на формулы (2_1), (2_2)

* Здесь, таким образом, дано, что спектр оператора L_h положителен (можно было бы считать его ограниченным снизу). Именно этот случай нам в дальнейшем будет нужен.

** В самом деле, если w не зависит от ξ, то из тождества

$$-\frac{d^2}{d\xi^2}[w\varphi(\xi;\ \lambda)-\psi(\xi;\ \lambda)]+q(x)[w\varphi(\xi;\ \lambda)-\psi(\xi;\ \lambda)]=\lambda[w\varphi(\xi;\ \lambda)-\psi(\xi;\ \lambda)]$$

при $\Im\lambda\neq 0$ вытекает, что

$$\begin{aligned}(\lambda-\bar\lambda)\int\limits_0^x|w\varphi(\xi;\ \lambda)-\psi(\xi;\ \lambda)|^2\,d\xi-(w-\bar w)=\\=[w\varphi(x;\lambda)-\psi(x;\ \lambda)]\,\overline{[w\varphi'(x;\ \lambda)-\psi'(x;\lambda)]}-\\-\overline{[w\varphi(x;\ \lambda)-\psi(x;\ \lambda)]}\,[w\varphi'(x;\ \lambda)-\psi'(x;\ \lambda)].\end{aligned} \tag{$*$}$$

Теперь остается принять $w=\dfrac{\psi(x;\ \lambda)}{\varphi(x;\ \lambda)}$.

Заметим попутно, что аналогично получается тождество

$$\int\limits_0^x\varphi(\xi;\ \lambda)\,\varphi(\xi;\ \mu)\,d\xi=\frac{\varphi(x;\ \lambda)\,\varphi'(x;\ \mu)-\varphi'(x;\ \lambda)\,\varphi(x;\ \mu)}{\lambda-\mu}, \tag{$**$}$$

которым мы ниже воспользуемся.

можно получить некоторую информацию о ее разложении в ряд Миттаг—Лефлера, который удобно записать в виде интеграла Стилтьеса:

$$f_x(\lambda) = \int \frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu - \lambda}.$$

Здесь $\sigma_x(\mu)$ есть неубывающая функция, единственными точками роста которой являются корни $\lambda_k = \lambda_k(x)$ целой функции $\varphi(x; \lambda)$. В написанном здесь интеграле в качестве нижнего предела можно взять число 0, так как $\varphi(x; \lambda)$ не имеет отрицательных корней*. Итак,

$$f_x(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu - \lambda}.$$

Заметим еще, что при любом $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma_x(\mu)}{1 + \mu^\alpha} < \infty.$$

Этот факт устанавливается в процессе разложения функции $f_x(\lambda)$ (при $x > 0$) в ряд Миттаг—Лефлера. Действительно, из формулы (2_1) при $t = 0$ нетрудно получить асимптотическую формулу

$$\lambda_k \sim \frac{\pi^2}{x^2}\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (k \to \infty).$$

---

* Действительно, спектр проблемы $\{(1), c_h\}$ по условию положителен. Поэтому для любой дважды непрерывно дифференцируемой финитной функции $y(x)$, удовлетворяющей условию c_h, справедливо неравенство

$$J(g) \equiv \int_0^\infty \{y'^2 + q(x)\,y^2\}\,dx - h\,[y(0)]^2 \geqslant 0. \qquad (*)$$

Если допустить, что при некотором $a > 0$ функция $\varphi(a; \lambda)$ имеет корень $\mu < 0$, то на функции

$$z(x) = \begin{cases} \varphi(x; \mu) & (0 \leqslant x \leqslant a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

функционал J будет иметь значение

$$J[z] = \mu \int_0^a [\varphi(x; \mu)]^2\,dx < 0$$

(и знак функционала сохранится после применения к $z(x)$ достаточно аккуратного округления угла), что противоречит $(*)$.

А с другой стороны, находя вычеты функции $f_x(\lambda)$, определим скачки

$$\sigma_x(\lambda_k+0)-\sigma_x(\lambda_k-0)=-\left.\frac{\psi(x;\lambda)}{\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x;\lambda)}\right|_{\lambda=\lambda_k}=\left.\frac{1}{\varphi'(x;\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x;\lambda)}\right|_{\lambda=\lambda_k}.$$

Последнее выражение преобразуем с помощью тождества (**) подстрочного примечания на с. 246, полагая в этом тождестве $\mu=\lambda_k$ и затем делая предельный переход $\lambda\to\lambda_k$. Окончательный результат будет иметь вид

$$\sigma_x(\lambda_x+0)-\sigma_x(\lambda_k-0)=\frac{1}{\int\limits_0^x[\varphi(\xi;\lambda_k)]^2\,d\xi},$$

а если воспользоваться формулой (2_1) и найденной асимптотикой для λ_k, то мы получим, что при $k\to\infty$

$$\sigma_x(\lambda_k+0)-\sigma_x(\lambda_k-0)\to\frac{2}{x}.$$

Пусть $\mu\geqslant 0$. Тогда при $t=\mathfrak{I}\sqrt{\lambda}>0$ справедливо тождество

$$\frac{1}{\mu-\lambda}=-i\sqrt{\lambda}\int\limits_0^\infty e^{i\sqrt{\lambda}u}\frac{1-\cos(u\sqrt{\mu})}{\mu}\,du,$$

с помощью которого функцию $f_x(\lambda)$ можно представить в виде

$$f_x(\lambda)=-i\sqrt{\lambda}\int\limits_0^\infty e^{i\sqrt{\lambda}u}\Phi_x(u)\,du\quad(t>0),\tag{3}$$

где

$$\Phi_x(u)=\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos(u\sqrt{\mu})}{\mu}\,d\sigma_x(\mu).\tag{3'}$$

В дальнейших оценках будут встречаться положительные величины, зависящие от переменных $x>0$ и $\eta>0$ и обладающие следующим свойством: для каждой такой величины можно указать $A_\eta\geqslant 0$ $(0<\eta<\infty)$ так, что

1) рассматриваемая величина ограничена в каждом конечном интервале полуоси $x>A_\eta$ и

2) $\lim\limits_{\eta\to\infty}A_\eta=0$. Мы будем обозначать эти величины буквой B без каких-либо индексов, так как зависимости между ними нас не будут интересовать.

Так, для $\varphi(x;\ \lambda)$, $\psi(x;\ \lambda)$, как функций от λ в полуплоскости $t \geqslant \eta > 0$, имеют место неравенства

$$\frac{1}{|\varphi(x;\ \lambda)|} < Be^{-tx}, \quad |\sqrt{\lambda}\,\psi(x;\ \lambda)| < Be^{tx}, \tag{4_1}$$

из которых следует, что в той же полуплоскости

$$|f_x(\lambda)| < \frac{B}{|\sqrt{\lambda}|},$$

а значит, и

$$|f_x(\lambda)| < B. \tag{4_2}$$

Докажем первое из неравенств (4_1). С этой целью возьмем какое-нибудь $\eta > 0$, положим $A_\eta = \frac{1}{\eta}\ln 2$ и зададим конечный интервал $[a,\ b]$ для x, подчиненный единственному условию $a > A_\eta$.

Получим сначала оценку для $\varphi(x;\ \lambda)$ в области $t \geqslant \eta$, $|s| \geqslant 5Q(b) + 4|h| + 1$. Для этого воспользуемся неравенством (2_1), из которого следует, что при $a \leqslant x \leqslant b$

$$|\varphi(x;\ \lambda)| > \frac{1}{2}(e^{tx} - e^{-tx}) - e^{tx}\frac{Q(x) + |h|}{5Q(b) - Q(x) + 4|h| + 1} >$$

$$> \frac{1}{4}(1 - 2e^{-2tx})\,e^{tx} > \frac{1}{8}e^{tx}. \tag{α}$$

Если $\eta < 5Q(b) + 4|h| + 1$, нужно еще рассмотреть область G, в которой $t \geqslant \eta$, $|s| \leqslant 5Q(b) + 4|h| + 1$. В этой области при каждом $x \in [a,\ b]$ функция $\frac{1}{\varphi(x,\ \lambda)}$ голоморфна. На криволинейной границе области G в силу оценки (α):

$$\frac{1}{|\varphi(x;\ \lambda)|} < 8e^{-tx} < 8e^{-\eta A_\eta} = 4.$$

На прямолинейной границе области G положим $s = r + i\eta$, так что $|\varphi(x;\ \lambda)|$ будет функцией $F(x,\ r)$ в прямоугольнике $[a,\ b] \times [-r',\ r']$, где $|r' + i\eta| = 5Q(b) + 4|h| + 1$. Функция $F(x,\ r)$, очевидно, непрерывна и положительна. Поэтому она имеет в прямоугольнике положительный минимум* $m(a,\ b)$. Используя принцип максимума модуля, находим, что при любом $x \in [a;\ b]$ в области G справедлива оценка

$$\frac{1}{|\varphi(x;\ \lambda)|} < 3 + \frac{1}{m(a,\ b)} = M(a,\ b) = M(a,\ b)\,e^{tx}e^{-tx} \leqslant$$

$$\leqslant M(a,\ b)\,e^{b[5Q(b)+4|h|+1]}e^{-tx}.$$

В соединении с полученной выше оценкой при $|s| \geqslant 5Q(b) + 4|h| + 1$, $t \geqslant \eta$ это означает, что первое из неравенств (4_1) доказано. Второе доказывается даже проще.

Пользуясь неравенством (4_2), мы найдем в силу (3) и равенства Парсеваля, что $\int\limits_0^\infty e^{-2\eta u}|\Phi_x(u)|^2\,du = B$.

* Зависимость от η не отмечена, так как η зафиксировано.

Теперь обратимся к формуле (3'). Из нее следует, что $\Phi_x(u)$ на оси $-\infty < u < \infty$ непрерывна, удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant \Phi_x(u) \leqslant \frac{u^2}{2} \int_0^1 d\sigma_x(\mu) + 2 \int_1^\infty \frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu} \tag{5_1}$$

и обращается в нуль при $u = 0$. Отметим еще, что из того же представления вытекает неравенство

$$\int_0^1 d\sigma_x(\mu) + \int_1^\infty \frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu} \leqslant \frac{1}{2}\Phi_x(\pi) + \int_0^2 \Phi_x(u)\,du. \tag{5_2}$$

Лемма. *При* $0 < a < b < \infty$

$$\Phi_b(u) = \Phi_a(u) \quad (0 \leqslant u \leqslant 2a). \tag{6}$$

Эта лемма принадлежит Крейну и вытекает из его общих построений, относящихся к произвольной струне*. Проведем здесь доказательство леммы, не выходя за рамки наших рассмотрений. С этой целью заметим, что

$$\frac{d}{dx} f_x(\lambda) = \frac{\varphi(x;\lambda)\psi'(x;\lambda) - \varphi'(x;\lambda)\psi(x;\lambda)}{[\varphi(x;\lambda)]^2} = \frac{1}{[\varphi(x;\lambda)]^2}.$$

В силу первого из неравенства (4_1) находим, что

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-2ix\sqrt{\lambda}} \frac{d}{dx} f_x(\lambda) \right| < \frac{B}{|s|} \quad (t \geqslant \eta).$$

Отсюда следует, что функция

$$g(s) = g_x(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-2ix\sqrt{\lambda}} \frac{d}{dx} f_x(\lambda),$$

регулярная при $t > 0$, обладает следующим свойством:

$$\sup_{t>\eta} \int_{it-\infty}^{it+\infty} |g(s)|^2\,ds < \infty.$$

На основании одной теоремы Винеры—Пэйли** (которую часто называют *теоремой* P-W *о функциях в полуплоскости*) справедливо следующее представление при $t > \eta$:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-2ix\sqrt{\lambda}} \frac{d}{dx} f_x(\lambda) = \frac{1}{i} \int_0^\infty e^{i\sqrt{\lambda}u} G_x(u)\,du,$$

где $\int_0^\infty e^{-2\eta u} |G_x(u)|^2\,du = B.$

* См. третью из статей М. Г. Крейна, упомянутых в подстрочном примечании на с. 245.

** См. книгу, цитированную в конце п° 129, с. 20.

Поэтому

$$\frac{d}{dx} f_x(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{i} \int_{2x}^{\infty} e^{i\sqrt{\lambda}u} H_x(u)\, du, \tag{α}$$

где $\int\limits_{2x}^{\infty} e^{-2\eta u} | H_x(u) |^2 du = B.$

Интегрируя равенство (α) от $x = a > 0$ до $x = b > a$, находим, что

$$f_b(\lambda) - f_a(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{i} \int_{2a}^{\infty} e^{i\sqrt{\lambda}u} H_{a,b}(u)\, du. \tag{β}$$

С другой стороны, благодаря (3)

$$f_b(\lambda) - f_a(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{i} \int_{0}^{\infty} e^{i\sqrt{\lambda}u} \{\Phi_b(u) - \Phi_a(u)\}\, du. \tag{γ}$$

Сравнение (β) с (γ) приводит к равенству (6), однако при дополнительном условии, что $a > A_\eta$. Остается принять во внимание, что $\lim\limits_{\eta\to\infty} A_\eta = 0$.

Лемма позволяет определить функцию $\Phi(u)$, которая при любом $x > 0$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi(u) = \Phi_x(u) \quad (0 \leqslant u \leqslant 2x). \tag{7}$$

Кроме того, из леммы вытекает необходимое для дальнейшего

Следствие. *При любом $\delta > 0$ можно найти также $N = N_\delta$, что для всех $x \geqslant 1$*

$$\int_N^{\infty} \frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu} < \delta.$$

Доказательство. Найдем $\alpha \in (0, 2)$ так, чтобы

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \Phi_1(u)\, du < \frac{\delta}{2}.$$

Это возможно в силу того, что $\Phi_1(u)$ непрерывна и $\Phi_1(0) = 0$. В таком случае на основании леммы при любом $x \geqslant 1$ будет

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \Phi_x(u)(du) < \frac{\delta}{2}.$$

Затем возьмем $N=4/\alpha^2$. Тогда можно будет написать следующее неравенство:

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \Phi_x(u)\,du \geqslant \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha du\int_N^\infty \frac{1-\cos(u\sqrt{\mu})}{\mu}\,d\sigma_x(\mu) =$$

$$=\int_N^\infty\left[1-\frac{\sin(\alpha\sqrt{\mu})}{\alpha\sqrt{\mu}}\right]\frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu} > \int_N^\infty\left(1-\frac{1}{\alpha\sqrt{N}}\right)\frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu} = \frac{1}{2}\int_N^\infty\frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu},$$

и наше утверждение доказано:

Теперь будем применять теоремы Хелли. Благодаря неравенству (5_2), которое при $x\geqslant 1$ можно переписать в виде

$$\int_0^1 d\sigma_x(\mu)+\int_1^\infty\frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu}\leqslant\frac{1}{2}\Phi_1(\pi)+\int_0^2\Phi_1(u)\,du,$$

найдется последовательность $\{\sigma_{x_n}(\mu)\}_{n=1}^\infty$, где $x_n\to\infty$, и некоторая неубывающая функция $\sigma(\mu)$, во всех точках непрерывности которой

$$\lim_{x_n\to\infty}\sigma_{x_n}(\mu)=\tilde{\sigma}(\mu),$$

причем

$$\int_0^\infty\frac{d\tilde{\sigma}(\mu)}{1+\mu}\leqslant\frac{1}{2}\Phi_1(\pi)+\int_0^2\Phi_1(u)\,du.$$

Далее, благодаря следствию леммы и второй теореме Хелли мы получим, что

$$\Phi(u)=\int_0^\infty\frac{1-\cos(u\sqrt{\mu})}{\mu}\,d\tilde{\sigma}(\mu).$$

Если $F(\xi)$, $G(\xi)$ — две гладкие функции в интервале $[0, x)$, равные 0 при $a\leqslant\xi<x$ и $\widehat{F}(\lambda)=\int_0^a F(\xi)\,\varphi(\xi;\lambda)\,d\xi$, $\widehat{G}(\lambda)=\int_0^a G(\xi)\times$ $\times\,\varphi(\xi;\lambda)\,d\xi$, то снова в силу второй теоремы Хелли

$$\lim_{x_n\to\infty}\int_0^\infty\widehat{F}(\lambda)\overline{\widehat{G}(\lambda)}\,d\sigma_{x_n}(\lambda)=\int_0^\infty\widehat{F}(\lambda)\overline{\widehat{G}(\lambda)}\,d\tilde{\sigma}(\lambda). \qquad (\alpha)$$

Рассмотрим уравнение Штурма—Лиувилля

$$-\frac{d^2y}{d\xi^2}+q(\xi)\,y=\lambda y$$

в интервале $[0, x]$ при условиях $y'(0)+hy(0)=0$, $y(x)=0$. Собственными функциями будут $\varphi(\xi; \lambda_k)$, а собственными значениями $\lambda_k=\lambda_k(x)$ (корни уравнения $\varphi(x; \lambda)=0$). Как легко видеть, равенство Парсеваля будет иметь вид (при $x=x_n$):

$$\int_0^\infty \widehat{F}(\mu)\overline{\widehat{G}(\mu)}\,d\sigma_{x_n}(\mu)=\int_0^a F(\xi)\overline{G(\xi)}\,d\xi. \tag{β}$$

Из (α) и (β) следует, что

$$\int_0^a F(\xi)\overline{G(\xi)}\,d\xi=\int_0^\infty \widehat{F}(\mu)\overline{\widehat{G}(\mu)}\,d\tilde{\sigma}(\mu),$$

а отсюда вытекает, что $\tilde{\sigma}(\mu)$ является спектральной функцией оператора L_h. Поэтому во всех точках непрерывности

$$\tilde{\sigma}(\mu)=\sigma(\mu)$$

и

$$\Phi(u)=\int_0^\infty \frac{1-\cos(u\sqrt{\mu})}{\mu}\,d\sigma(\mu). \tag{8}$$

Наши построения представляют получение спектральной функции проблемы $\{(1), c_h\}$ с помощью рассмотрения функции $f_x(\lambda)$. Для нас существенны некоторые следствия, выводимые из этих построений.

Предложение 1. При $t \geqslant \eta > 0$

$$\left| f_x(\lambda)-\int_0^\infty \frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\lambda}\right| \leqslant B\left|\sqrt{\lambda}\right| e^{-2xt}. \tag{9}$$

Доказательство. Из формулы (8) вытекает, что при $t>0$

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\lambda}=-i\sqrt{\lambda}\int_0^\infty e^{iu\sqrt{\lambda}}\Phi(u)\,du. \tag{8'}$$

Следовательно, на основании равенств (3) и (7)

$$f_x(\lambda)-\int_0^\infty \frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\lambda}=i\sqrt{\lambda}\int_{2x}^\infty e^{i\sqrt{\lambda}u}\{\Phi(u)-\Phi_x(u)\}\,du.$$

Отсюда с помощью (5_1) и получается требуемое неравенство (9).

Предложение 2. *Имеет место соотношение**

$$\psi(x; \zeta)=-\int_0^\infty \frac{\varphi(x; \lambda)-\varphi(x; \zeta)}{\lambda-\zeta}\,d\sigma(\lambda).$$

* Это соотношение встречается у Б. М. Левитана и М. Г. Крейна.

Доказательство. Возьмем выражение

$$s\frac{\varphi(x;\, s^2)-\varphi(x;\, \zeta)}{s^2-\zeta},$$

представляющее нечетную целую функцию экспоненциального типа x от s, принадлежащую $L^2(-\infty, \infty)$. По теореме Винера—Пэйли

$$s\frac{\varphi(x;\, s^2)-\varphi(x;\, \zeta)}{s^2-\zeta}=\int_0^x N_\zeta(x,\, u)\sin(su)\,du,$$

где $\int_0^x |N_\zeta(x,\, u)|^2\,du<\infty$. Следовательно,

$$\frac{\varphi(x;\, \lambda)-\varphi(x;\, \zeta)}{\lambda-\zeta}=\int_0^x N_\zeta(x,\, u)\frac{\sin(u\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\,du,$$

и поэтому при любом $a>0$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x;\, \lambda)-\varphi(x;\, \zeta)}{\lambda-\zeta}\,\frac{\sin(a\sqrt{\lambda})}{a\sqrt{\lambda}}\,d\sigma(\lambda)=$$

$$=\int_0^x N_\zeta(x,\, u)\frac{du}{a}\int_0^\infty \frac{\sin(u\sqrt{\lambda})\sin(a\sqrt{\lambda})}{\lambda}\,d\sigma(\lambda)=$$

$$=\int_0^x N_\zeta(x,\, u)\{\Phi(u+a)-\Phi(u-a)\}\frac{du}{2a}.$$

Принимая $a\leqslant x$, найдем, что под знаком последнего интеграла

$$\Phi(u+a)-\Phi(u-a)=\Phi_x(u+a)-\Phi_x(u-a).$$

Следовательно, при $0\leqslant a\leqslant x$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x;\, \lambda)-\varphi(x;\, \zeta)}{\lambda-\zeta}\,\frac{\sin(a\sqrt{\lambda})}{a\sqrt{\lambda}}\,d\sigma(\lambda)=$$

$$=\int_0^\infty \frac{\varphi(x;\, \lambda)-\varphi(x;\, \zeta)}{\lambda-\zeta}\,\frac{\sin(a\sqrt{\lambda})}{a\sqrt{\lambda}}\,d\sigma_x(\lambda).$$

Устремляя a к 0 и используя тот факт, что в точках роста функции $\sigma_x(\lambda)$ функция $\varphi(x;\ \lambda)$ равна 0, приходим к равенству

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x;\ \lambda)-\varphi(x;\ \zeta)}{\lambda-\zeta}\,d\sigma(\lambda) = -\int_0^\infty \frac{\varphi(x;\ \zeta)}{\lambda-\zeta}\,d\sigma_x(\lambda) = -\psi(x;\ \zeta),$$

что и требовалось доказать.

III. Теперь мы можем ввести специальные спектральные функции, о которых упомянули выше, в конце раздела I. Обозначим через E точечное множество, образованное интервалами

$$(E)\colon\ (0,\ \alpha_1),\ (\beta_1,\ \alpha_2),\ (\beta_2,\ \alpha_3),\ \ldots,\ (\beta_\rho,\ \infty)$$
$$(0<\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\cdots<\beta_\rho<\infty).$$

Замыкание множества E будет спектром, а дополнительные интервалы $(\alpha_1,\ \beta_1),\ (\alpha_2,\ \beta_2),\ \ldots,\ (\alpha_\rho,\ \beta_\rho)$ лакунами. Обозначим через $\mathfrak{G}$ плоскость переменного ζ, разрезанную вдоль интервалов (E), и определим функцию $R_\beta^\alpha(\zeta) = \sqrt{\frac{1}{\zeta}\prod_{k=1}^{\rho}\frac{\zeta-\alpha_k}{\zeta-\beta_k}}$ так, чтобы она была >0 в какой-нибудь точке, лежащей на верхнем берегу разреза $(\beta_\rho,\ \infty)$. Тогда эта функция при ее непрерывном продолжении в $\mathfrak{G}$ будет >0 на верхних берегах всех разрезов. Пусть

$$v(\lambda) = \begin{cases} R_\beta^\alpha(\lambda+i0)\left(\dfrac{\lambda-\beta_1}{\lambda-\alpha_1}\right)^{\varepsilon_1}\cdots\left(\dfrac{\lambda-\beta_\rho}{\lambda-\alpha_\rho}\right)^{\varepsilon_\rho} \geqslant 0\ (\lambda\in E), \\ 0 \qquad (\lambda \,\overline{\in}\, E), \end{cases}$$

где каждое из (выбранных и зафиксированных) ε_k равно 0 или 1. По функции $v(\lambda)$ мы построим спектральную функцию $\sigma(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda} v(\mu)\,d\mu$. У нас встретится также спектральная функция $\tau(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda} w(\mu)\,d\mu$, где $w(\mu) = \begin{cases}\frac{1}{v(\mu)} & (\mu\in E)\\ 0 & (\mu\,\overline{\in}\, E).\end{cases}$ Простые варианты весов $v(\mu)$, $w(\mu)$ встречаются в теории ортогональных многочленов, в первую очередь у П. Л. Чебышева. Далее, если рассматривать на полуоси уравнение Шредингера с четным периодическим потенциалом и потребовать, чтобы спектр состоял из конечного числа зон, то спектральная функция $\sigma(\lambda)$ будет иметь в точности указанный вид. Наконец, приведенные и даже более общие веса встречаются в давно известных формулах обращения сингулярных интегралов. Один пример такой пары формул обращения (он нам понадобится в дальнейшем) дает следующая

Теорема 3*. *Какова бы ни была функция* $G \in \mathrm{L}^2_\tau$, *уравнение*

$$G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{F(\mu)}{\lambda - \mu}\, d\sigma(\mu) \quad (\lambda \in E)$$

имеет (почти всюду в E) в существенном одно решение F, это решение принадлежит L^2_σ *и дается формулой*

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{G(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\tau(\mu) \quad (\lambda \in E).$$

При этом $\|F\|_{\mathrm{L}^2_\sigma} = \|G\|_{\mathrm{L}^2_\tau}$.

Напомним, что штрих у знака интеграла означает главное значение в смысле Коши.

Функция $v(\lambda)$ при $\lambda \in E$ имеет вид

$$v(\lambda) = \sqrt{\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}},$$

где $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ — многочлены степени ρ, с равными 1 старшими коэффициентами, причем корнями многочленов $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ являются концы лакун.

Теперь заметим, что при любом $\lambda \in \mathfrak{G}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\pi}\int_E \sqrt{\frac{P(\mu)}{\mu Q(\mu)}}\, \frac{d\mu}{\mu - \lambda} = \sqrt{-\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}}, \tag{10}$$

где правая часть положительна на отрицательной половине** вещественной оси λ-плоскости. Введем переходную функцию и воспользуемся формулой (8′), в силу которой

$$\sqrt{-\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}} = -i\sqrt{\lambda}\int_0^{\infty} e^{iu\sqrt{\lambda}}\,\Phi(u)\,du.$$

Это можно переписать в виде

$$\frac{1}{s^2}\sqrt{\frac{P(s^2)}{Q(s^2)}} = -\int_0^{\infty} e^{isu}\Phi(u)\,du, \tag{a}$$

---

* См. Н. И. Ахиезер. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов. — «Изв. АН СССР, мат. серия», 9, 1945.

** В рассматриваемом нами случае нижним пределом интеграла в левой части (10) фактически является 0.

где левая часть отрицательна при $\mathfrak{R}s = 0$, $\mathfrak{J}s = t > 0$. Мы будем пользоваться этим равенством при $t \geqslant \eta > 0$. Однако левая часть голоморфна и допускает разложение следующего вида при $|s| > \sqrt{\beta_\rho}$:

$$\frac{1}{s^2}\sqrt{\frac{P(s^2)}{Q(s^2)}} = \frac{1}{s^2}\left\{1 + \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^4} + \cdots\right\}. \qquad (\beta)$$

Здесь коэффициенты c_j просто выражаются через числа α_k, β_k, ε_k. Например,

$$c_1 = \sum_{k=1}^{\rho}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_k\right)(\beta_k - \alpha_k).$$

Так как при $t > 0$

$$\int_0^\infty e^{isu}u^{2q-1}\,du = (-1)^q\frac{(2q-1)!}{s^{2q}},$$

то из (α) вытекает, что

$$\frac{1}{s^2}\left\{\sqrt{\frac{P(s^2)}{Q(s^2)}} - 1 - \sum_{q=1}^{N}\frac{c_q}{s^{2q}}\right\} =$$

$$= -\int_0^\infty e^{isu}\left[\Phi(u) - u + \sum_{q=1}^{N}(-1)^{q+1}c_q\frac{u^{2q+1}}{(2q+1)!}\right]du.$$

В полуплоскости $t \geqslant \eta > 0$ левая часть даже после умножения ее на $|s|^{2N+2}$ равномерно стремится к 0 при $|s| \to \infty$ как $\frac{1}{|s|}$. Поэтому функция $\Phi(u)$ допускает дифференцирование $2N+1$ раз, а так как N произвольно, то $\Phi(u)$ бесконечно дифференцируема. В (α), следовательно, применимо интегрирование по частям, и мы получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{s^2}\sqrt{\frac{P(s^2)}{Q(s^2)}} = \Phi(0)\frac{1}{is} + \Phi'(+0)\frac{1}{s^2} -$$
$$- \Phi''(+0)\frac{1}{is^3} - \Phi'''(+0)\frac{1}{s^4} + \cdots$$

Сравнивая с разложением (β), приходим к формулам $\Phi(0) = 0$,

$$\Phi'(+0) = 1,\ \Phi''(+0) = 0,\ \Phi'''(+0) = \sum_{k=1}^{\rho}\left(\varepsilon_k - \frac{1}{2}\right)(\beta_k - \alpha_k).$$

Мы видим, что условия теоремы 2 выполнены, что потенциал $q(x)$ имеет в $[0, \infty)$ производные любого порядка и что число h

в краевом условии равно 0. Поэтому решение $\varphi(x;\ \lambda)$ удовлетворяет условиям (типа косинуса) $\varphi(0;\ \lambda) = 1$, $\varphi'(0;\ \lambda) = 0$. Функция $\psi(x;\ \lambda)$, которую мы выше ввели, удовлетворяет условиям (типа синуса) $\psi(0;\ \lambda) = 0$, $\psi'(0;\ \lambda) = 1$.

Теорема 4. *При любом* $x \geqslant 0$ *имеет место соотношение*

$$P(\lambda)[\varphi(x;\ \lambda)]^2 + \lambda Q(\lambda)[\psi(x;\ \lambda)]^2 = S(\lambda),$$

где $S(\lambda) = S_x(\lambda)$ — *многочлен степени* ρ *от* λ, *старший коэффициент которого равен* 1, *а остальные зависят от* x; *корни многочлена* $S(\lambda)$ *лежат по одному в интервалах* $[\alpha_j,\ \beta_j]$.

Доказательство. При $x = 0$ утверждение теоремы тривиально и $S(\lambda) = P(\lambda)$. Возьмем какое-нибудь $x > 0$ и зафиксируем его. Чтобы пользоваться полученными выше оценками, выберем и зафиксируем такое $\eta > 0$, что $x > A_\eta$. В рассматриваемом нами случае, когда имеет место тождество (10), неравенство (9) примет вид

$$\left| \frac{\psi(x;\ \lambda)}{\varphi(x;\ \lambda)} - \sqrt{-\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}} \right| \leqslant B \left| \sqrt{\lambda} \right| e^{-2xt} \quad (t \geqslant \eta).$$

С другой стороны, в силу оценки (4_1)

$$\left| \frac{\psi(x;\ \lambda)}{\varphi(x;\ \lambda)} + \sqrt{-\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}} \right| \leqslant B \frac{1}{\left| \sqrt{\lambda} \right|} \quad (t \geqslant \eta).$$

Перемножая эти неравенства и пользуясь оценкой

$$|\varphi(x;\ \lambda)| \leqslant Be^{xt} \quad (t \geqslant \eta),$$

получим

$$|P(\lambda)[\varphi(x;\ \lambda)]^2 + \lambda Q(\lambda)[\psi(x;\ \lambda)]^2| \leqslant B\,|\lambda Q(\lambda)| \quad (t \geqslant \eta). \qquad (\gamma)$$

Из вещественности функций $\varphi(x;\ \lambda)$, $\psi(x;\ \lambda)$ на вещественной оси и того, как расположены корни многочленов $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, вытекает следующее заключение:

если целая функция $P(\lambda)[\varphi(x;\ \lambda)]^2 + \lambda Q(\lambda)[\psi(x;\ \lambda)]^2$ не обращается в нуль на одном из концов лакуны $[\alpha_j,\ \beta_j]$ $(j = 1, 2, \ldots, \rho)$, то она имеет, по крайней мере, один корень внутри лакуны и, следовательно, делится на некоторый многочлен $S(\lambda)$ степени ρ, старший коэффициент которого пусть равен 1. Поэтому обе функции

$$\frac{P(\lambda)[\varphi(x;\ \lambda)]^2 + \lambda Q(\lambda)[\psi(x;\ \lambda)]^2}{S(\lambda)} = g(s),\ \ \Omega(s) = \frac{g(s) - g(0)}{s^2}$$

являются четными целыми функциями от s экспоненциального типа. После деления неравенства (γ) на $|S(\lambda)|$ мы получим неравенства

$$|g(s)| \leqslant B|s|^2, \quad |\Omega(s)| \leqslant B,$$

каждое из которых справедливо как при $t \geqslant \eta$, так и при $t \leqslant -\eta$, то есть всюду в плоскости s вне полосы $|t| < \eta$. Теперь мы докажем, что это неравенство с тем же B верно и в полосе $|t| < \eta$. С этой целью применим классический прием Фрагмена—Линделефа. Возьмем $\delta > 0$ и рассмотрим функцию $e^{-\delta(s^2+\eta^2)}\Omega(s) = \Omega_\delta(s)$ в прямоугольнике G_T, ограниченном прямыми $t = \pm\eta$, $\Re s = \pm T$, где T столь велико, что на вертикальных сторонах прямоугольника G_T:

$$|\Omega_\delta(s)| = e^{-\delta[T^2+(\eta^2-t^2)]}|\Omega(s)| < B$$

(выбор такого T возможен, так как Ω — целая функция экспоненциального типа). На горизонтальных сторонах также $|\Omega_\delta(s)| < B$, так как на них по доказанному $|\Omega(s)| \leqslant B$; следовательно, по принципу максимума модуля неравенство $|\Omega_\delta(s)| < B$, а значит, и неравенство $|\Omega(s)| < Be^{\delta T^2}$ верно всюду в G_T. Но $\delta > 0$ произвольно. Поэтому $|\Omega(s)| \leqslant B$ всюду в G_T. А так как всякая точка полосы $|t| < \eta$ попадает в прямоугольник G_T при достаточно большом T, то наше утверждение доказано. Теперь мы можем применить теорему Лиувилля и приходим к выводу, что $\Omega(s)$ есть константа. Следовательно, $g(s) = g(0) + K_1 s^2$, т. е.

$$\frac{P(\lambda)[\varphi(x;\lambda)]^2 + \lambda Q(\lambda)[\psi(x;\lambda)]^2}{S(\lambda)} = K_1\lambda + K_2.$$

Остается доказать, что $K_1 = 0$, $K_2 = 1$.

С этой целью достаточно воспользоваться формулами (2_1), (2_2), в силу которых при $t = 0$, $s \to \infty$,

$$\frac{P(\lambda)[\varphi(x;\lambda)]^2 + \lambda Q(\lambda)[\psi(x;\lambda)]^2}{S(\lambda)} = \cos^2(sx) + \sin^2(sx) + O\left(\frac{1}{s}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Мы обозначим корни многочлена $S(\lambda)$ через $\gamma_k = \gamma_k(x)$, причем $\gamma_k \in [\alpha_k, \beta_k]$, так что $S(\lambda) = \prod_{k=1}^{\rho}(\lambda - \gamma_k)$.

В следующем разделе мы покажем, к какой задаче анализа сводится нахождение ρ функций $\gamma_k(x)$.

Здесь же приведем одно следствие теоремы 4.

Предложение 3*. *При любом $x \geqslant 0$ имеет место равенство*

$$q(x) = -2\sum_{k=1}^{\rho}\gamma_k(x) + \sum_{k=1}^{\rho}(\alpha_k + \beta_k). \tag{11}$$

* Это предложение принадлежит Б. А. Дубровину и содержится в его статье «Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов» («Функцион. анализ», 1975, 9, 1, с. 65—66); см. также его статью «Периодическая задача для уравнения Кортевега де Фриза в классе конечнозонных потенциалов» («Функцион. анализ», 1975, 9, 3, с. 41—51).

Доказательство. Введем функции

$$R(\lambda) = \lambda Q(\lambda) P(\lambda), \quad \mathscr{E}(x;\ \lambda) = \varphi(x,\ \lambda) + i\frac{\sqrt{R(\lambda)}}{P(\lambda)}\psi(x;\ \lambda).$$

Имеем при $x > 0$ и $\lambda > \beta_\rho$

$$\frac{d}{dx}\ln\mathscr{E}(x;\ \lambda) = \frac{\mathscr{E}'(x;\ \lambda)}{\mathscr{E}(x;\ \lambda)} = A(x;\ \lambda) + iB(x;\ \lambda),$$

где

$$A(x;\ \lambda) = \frac{P(\lambda)\varphi(x;\ \lambda)\varphi'(x;\ \lambda) + \lambda Q(\lambda)\psi(x;\ \lambda)\psi'(x;\ \lambda)}{P(\lambda)[\varphi(x;\ \lambda)]^2 + \lambda Q(\lambda)[\psi(x;\ \lambda)]^2};$$

$$B(x;\ \lambda) = \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{P(\lambda)[\varphi(x;\ \lambda)]^2 + \lambda Q(\lambda)[\psi(x;\ \lambda)]^2},$$

откуда, между прочим, следует, что

$$\frac{B'(x;\ \lambda)}{B(x;\ \lambda)} = -2A(x;\ \lambda)$$

и

$$A'(x;\ \lambda) = \Re\left\{\frac{\mathscr{E}''(x;\ \lambda)}{\mathscr{E}(x;\ \lambda)} - \left[\frac{\mathscr{E}'(x;\ \lambda)}{\mathscr{E}(x;\ \lambda)}\right]^2\right\} = q(x) - \lambda - \\ - [A(x;\ \lambda)]^2 + [B(x;\ \lambda)]^2,$$

а значит,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{B'(x;\ \lambda)}{B(x;\ \lambda)} = q(x) - \lambda - \frac{1}{4}\left[\frac{B'(x;\ \lambda)}{B(x;\ \lambda)}\right]^2 + [B(x;\ \lambda)]^2. \qquad (\alpha)$$

Так как в силу теоремы 4 $B(x;\ \lambda) = \dfrac{\sqrt{R(\lambda)}}{S(\lambda)}$, то при $\lambda \to \infty$

$$\frac{B'(x;\ \lambda)}{B(x;\ \lambda)} = \sum_{R=1}^{\rho}\frac{\gamma_k'(x)}{\lambda - \gamma_k(x)} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \frac{d}{dx}\frac{B'(x;\ \lambda)}{B(x;\ \lambda)} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

и

$$[B(x;\ \lambda)]^2 = \frac{R(\lambda)}{[S(\lambda)]^2} = \lambda\prod_{k=1}^{\rho}\frac{(\lambda - \alpha_k)(\lambda - \beta_k)}{(\lambda - \gamma_k)^2} = \lambda + \\ + \sum_{k=1}^{\rho}(2\gamma_k - \alpha_k - \beta_k) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

а поэтому из (α) следует подлежащее доказательству соотношение (11), если $x > 0$. Оно, очевидно, справедливо и при $x = 0$.

IV. Теперь остановимся на вопросе, о том, к какой задаче анализа сводится нахождение функций $\gamma_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, \rho)$ и, тем самым, как выразить функции $\varphi(x;\ \lambda)$, $\psi(x;\ \lambda)$ непосредственно через параметры α_k, β_k и $\gamma_k = \gamma_k(x)$. Для этого рассмотрим более подробно функцию от λ:

$$\mathcal{E}(x;\ \lambda) = \varphi(x;\ \lambda) + i\frac{\sqrt{R(\lambda)}}{P(\lambda)}\psi(x;\ \lambda)$$

при $x > 0$. Чтобы иметь дело с однозначной функцией точки, введем риманову поверхность $\mathfrak{F}$, сшивая с листом $\mathfrak{S}$ второй подобный лист таким образом, чтобы линиями перехода поверхности $\mathfrak{F}$ были отрезки системы (E). Если ζ — точка одного из листов поверхности $\mathfrak{F}$, то соответствующую точку другого листа назовем ζ'. Поэтому

$$\mathcal{E}(x;\ \lambda') = \varphi(x;\ \lambda) - i\frac{\sqrt{R(\lambda)}}{P(\lambda)}\psi(x;\ \lambda).$$

Так как по теореме 4

$$\mathcal{E}(x;\ \lambda)\,\mathcal{E}(x;\ \lambda') = \frac{S(\lambda)}{P(\lambda)}, \tag{α}$$

то точки $\gamma_k = \gamma_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, \rho)$ являются простыми корнями функции $\mathcal{E}(x;\ \lambda)$ и каждый из них лежит в интервале $[\alpha_k, \beta_k]$ на одном и только одном из листов поверхности $\mathfrak{F}$; один из концов каждого интервала $[\alpha_k, \beta_k]$, являясь корнем многочлена $P(\lambda)$, будет простым полюсом функции $\mathcal{E}(x;\ \lambda)$.

Докажем, что каждая ветвь функции $\ln\mathcal{E}(x;\ \lambda)$ однозначна на $\mathfrak{F}$ в окрестности точки $\lambda = \infty$. Для этого заметим, что в силу (α)

$$\ln\mathcal{E}(x;\ \lambda) + \ln(\mathcal{E}(x;\ \lambda') = \ln\frac{S(\lambda)}{P(\lambda)}.$$

Здесь правая часть регулярна в окрестности точки ∞ плоскости λ. Если же в этой плоскости точка совершит обход по окружности достаточно большого радиуса с центром $\lambda = 0$, отправляясь, например, от левого берега разреза (β_ρ, ∞) в соответствующую точку правого берега, то $\ln\mathcal{E}(x;\ \lambda)$ перейдет в $\ln\mathcal{E}(x;\ \lambda') + 2m\pi i$, а следовательно, $\ln\mathcal{E}(x;\ \lambda')$ перейдет в $\ln\mathcal{E}(x;\ \lambda) - 2m\pi i$. Поэтому после полного обхода вокруг точки ∞ на $\mathfrak{F}$ функция $\ln\mathcal{E}(x;\ \lambda)$ остается без изменения, откуда уже следует наше утверждение.

Рассмотрим при $|s| > \sqrt{\beta_\rho}$, $\lambda = s^2$, функцию $H(s) = \ln\mathcal{E}(x;\lambda) - ixs$ и заметим сразу же, что $H(-s) = \ln\mathcal{E}(x;\ \lambda') + ixs$. Так как в области $t = \Im s \leqslant 0$, $|s| > Q(x) + \sqrt{\beta_\rho}$ в силу (2_1), (2_2) имеет место неравенство

$$\left|\frac{\mathcal{E}(x;\ \lambda)}{e^{ix\sqrt{\lambda}}} - 1\right| \leqslant \frac{A(x)}{|s|},$$

то для главной ветви $H(s)$ справедливо соотношение $\lim\limits_{|s|\to\infty} H(s) = 0$, равномерное при $t \leqslant 0$.

Это же соотношение справедливо и при $t \geqslant 0$, так как в силу (α)

$$H(s) + H(-s) = \ln \frac{S(\lambda)}{P(\lambda)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Из доказанного вытекает, что

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \left\{ \frac{\ln \mathscr{E}(x;\ \lambda)}{\sqrt{\lambda}} - ix \right\} = 0$$

и, следовательно, $\ln \mathscr{E}(x;\ \lambda)$ имеет в точке $\lambda = \infty$ на $\mathfrak{F}$ полюс первого порядка с главной частью $ix\sqrt{\lambda}$.

Далее нам понадобятся некоторые факты из теории гиперэллиптических интегралов. Мы приведем вначале краткую сводку самых необходимых понятий.

Прежде всего о нормальных интегралах первого рода:

$$\omega_k(\lambda) = \int_{\beta_\rho}^{\lambda} \frac{m_k(z)}{\sqrt{R(z)}}\, dz, \quad m_k(z) = C_k z^{\rho-1} + \cdots$$

Мы примем следующую нормировку:

$$\int_{\beta_{j-1}}^{\alpha_j} d\omega_k(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi i & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases} \quad (\beta_0 = 0;\ j,\ k = 1,\ 2, \ldots, \rho).$$

Из интегралов второго рода нам понадобится лишь

$$\omega(\lambda) = \int_{\beta_\rho}^{\lambda} \frac{M(z)}{2\sqrt{R(z)}}\, dz,$$

где многочлен $M(z) = z^\rho + \cdots$ определяется условиями

$$\int_{\beta_{j-1}}^{\alpha_j} d\omega(z) = 0 \quad (j = 1,\ 2, \ldots, \rho);$$

$\omega(\lambda)$ имеет на $\mathfrak{F}$ простой полюс в точке $\lambda = \infty$, главная часть в окрестности полюса есть $\sqrt{\lambda}$.

Наконец, у нас встретятся так называемые элементарные интегралы третьего рода, зависящие от пары точек на $\mathfrak{F}$, в которых эти интегралы имеют логарифмические особенности. Одной из этих точек будет у нас всегда конец (левый или правый) какой-либо лакуны, мы его обозначим ξ. Вторая точка может, вообще говоря, иметь произвольное положение, но в важном для наших целей случае она будет принадлежать той же лакуне, что и ξ (на верхнем или нижнем листе $\mathfrak{F}$). Эту точку мы обозначим δ и той же буквой обозначим соответствующую точку на следовой плоскости.

Нормальной формой такого интеграла будет

$$\omega(\lambda;\ \delta;\ \xi) = \int_{\infty}^{\lambda} \left[\frac{\sqrt{R(z)} + \sqrt{R(\delta)}}{z-\delta} - \frac{\sqrt{R(z)}}{z-\xi} + N(z) \right] \frac{dz}{2\sqrt{R(z)}},$$

где $N(z)$ — многочлен степени $\rho - 1$, определенный из условия однозначности функции $\exp\omega(\lambda;\ \delta,\ \xi)$ на $\mathfrak{S}$. В окрестности точек δ (если $R(\delta) \neq 0$) и ξ функция $\omega(\lambda;\ \delta,\ \xi)$ имеет вид

$$\omega(\lambda;\ \delta,\ \xi) = \ln(\lambda - \delta) + \cdots; \quad \omega(\lambda;\ \delta,\ \xi) = -\frac{1}{2}\ln(\lambda - \xi) + \cdots$$

Возьмем набор различных точек ξ_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho)$, каждая из которых есть одно из чисел α_k, β_k, и рассмотрим функцию

$$\mathcal{E}^*(x;\ \lambda) = \exp\left\{ix\omega(\lambda) + \sum_{k=1}^{\rho} \omega(\lambda;\ \delta_k(x),\ \xi_k)\right.$$

Покажем, что точки δ_k на $\mathfrak{F}$ единственным образом определяются как непрерывные функции от $x \geqslant 0$ из требования однозначности на $\mathfrak{F}$ функции $\mathcal{E}^*(x;\ \lambda)$ и начальных условий $\delta_k(0) = \xi_k$.

Чтобы записать аналитически требование однозначности, найдем модули периодичности абелева интеграла $\ln\mathcal{E}^*(x;\ \lambda)$. Для этого проведем на $\mathfrak{F}$ канонические сечения a_j, b_j $(j = 1, 2, \ldots, \rho)$. В качестве b_j возьмем замкнутый контур, охватывающий на первом листе разрез $[\beta_{j-1},\ \alpha_j]$. Интегралы, взятые вдоль контуров b_j, будут модулями периодичности A_j. Из вида функции $\mathcal{E}^*(x;\ \lambda)$ и из выбора нормировки абелевых интегралов 2-го и 3-го рода следует, что для $\ln\mathcal{E}^*(x;\ \lambda)$ все модули периодичности A_j равны нулю. В качестве сечения a_j возьмем замкнутый контур, который начинается на верхнем берегу разреза $(\beta_{j-1},\ \alpha_j)$, идет по первому листу до разреза $(\beta_\rho,\ \infty)$, переходит во второй лист и заканчивается на разрезе $(\beta_{j-1},\ \alpha_j)$ в своей начальной точке (при этом сечения a_j не должны пересекаться). Интеграл, взятый по a_j, будет модулем периодичности B_j. Для $\omega(\lambda)$ этот модуль известен, он равен

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_\rho} \frac{M(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}} = 2i\mu_j \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho).$$

Соответствующий модуль периодичности для $\omega(\lambda;\ \delta_k(x),\ \xi_k)$ по известной теореме теории абелевых интегралов равен

$$2\int_{\xi_k}^{\delta_k(x)} d\omega_j(\lambda).$$

Поэтому наше требование однозначности на $\mathfrak{F}$ функции $\mathscr{E}^*(x;\lambda)$ принимает вид следующей системы уравнений:

$$-2x\mu_j+\sum_{k=1}^{\rho}2\int_{\xi_k}^{\delta_k(x)} d\omega_j(\lambda)=2n_j\pi i \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ \rho),$$

где n_j — целые числа. Благодаря начальным условиям все они должны равняться 0.

Задача, к которой мы пришли, есть не что иное, как якобиева проблема обращения гиперэллиптических интегралов. Эта задача имеет решение и притом единственное*.

Таким образом, функции $\delta_k(x)$ находятся однозначно, если набор точек ξ_k задан.

Теперь снова обратимся к функции $\mathscr{E}(x;\lambda)$, корнями которой являются функции $\gamma_k(x)$, и построим функцию $\mathscr{E}^*(x;\lambda)$, беря $\xi_k=\gamma_k(0)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ \rho)$. Обе функции $\mathscr{E}(x;\lambda)$, $\mathscr{E}^*(x;\lambda)$ на $\mathfrak{F}$ однозначны. Их логарифмы имеют в точке ∞ простые полюсы с одной и той же главной частью $ix\sqrt{\lambda}$, для $\mathscr{E}(x;\lambda)$ это было доказано, а для $\mathscr{E}^*(x;\lambda)$ вытекает из построения этой функции. Отношение

$$\mathscr{Q}(\lambda)=\mathscr{Q}_x(\lambda)=\frac{\mathscr{E}(x;\lambda)}{\mathscr{E}^*(x;\lambda)} \qquad (a)$$

является поэтому однозначной функцией на $\mathfrak{F}$, регулярной в точке ∞. При этом $\mathscr{Q}(\lambda)$ имеет точно ρ простых корней $\{\gamma_k(x)\}_1^{\rho}$ и точно ρ простых полюсов $\{\delta_k(x)\}_1^{\rho}$. Таким образом, $\mathscr{Q}(\lambda)$ есть функция на $\mathfrak{F}$ порядка ρ, где ρ есть род поверхности $\mathfrak{F}$. Однако очень просто доказывается, что если в гиперэллиптическом случае порядок функции меньше или равен роду, то функция есть отношение двух многочленов** от λ.

---

* Относительно проблемы обращения Якоби, ее исследования и решения см., например, Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций, М., 1948, с. 296—322 или Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., ИЛ, 1960.

** Сформулированный факт является следствием теоремы Римана—Роха, но может быть доказан и непосредственно, так как всякая однозначная алгебраическая, т. е. рациональная функция на $\mathfrak{F}$ может быть представлена в виде

$$\frac{d(\lambda)+b(\lambda)\sqrt{R(\lambda)}}{c(\lambda)},$$

где $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ — многочлены. Анализ этого выражения показывает, что только при $b(\lambda)\equiv 0$ порядок этой функции может быть менее $\rho+1$.

Итак, $\mathfrak{G}(\lambda)$ есть отношение двух многочленов от λ. Но если $\mathfrak{G}(\lambda)$ имеет хотя бы один корень, то правая часть (α) должна обращаться в 0 в двух точках поверхности $\mathfrak{F}$, имеющих общий след. Так как это невозможно в силу сказанного выше о корнях правой части (α), то $\mathfrak{G}(\lambda)$ есть константа. Но в таком случае $\delta_k(x) = \gamma_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, \rho)$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 5. *Для нахождения величин $\gamma_k(x)$ необходимо решить якобиеву проблему обращения гиперэллиптических интегралов:*

$$\int_{\gamma_1(0)}^{\gamma_1(x)} d\omega_j(\lambda) + \int_{\gamma_2(0)}^{\gamma_2(x)} d\omega_j(\lambda) + \cdots + \int_{\gamma_\rho(0)}^{\gamma_\rho(x)} d\omega_j(\lambda) = \mu_j x \quad (j = 1, 2, \ldots, \rho),$$

где каждый интеграл берется по отрезку вещественной оси на том листе поверхности $\mathfrak{F}$, где лежит точка $\gamma_k(x)$. (Напомним, что нижние пределы интегралов известны наперед).

Система уравнений

$$\int_{a_1}^{t_1} d\omega_j(\lambda) + \int_{a_2}^{t_2} d\omega_j(\lambda) + \cdots + \int_{a_\rho}^{t_\rho} d\omega_j(\lambda) = v_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \rho)$$

для определения вектора $t = \{t_1, t_2, \ldots, t_\rho\}$ как функции от вектора v при начальном условии* $t|_{v=0} = a$ обладает следующим свойством: изменение знака v равносильно изменению знака радикала, представляющего знаменатель каждого подынтегрального выражения в левых частях, то есть равносильно переходу в каждом интеграле с одного листа поверхности $\mathfrak{F}$ на другой лист без изменения области интегрирования на следовой плоскости. Но это означает, что вектор t является четной функцией от вектора v. В нашей задаче нужна сумма компонент вектора t как функция от $v_1, v_2, \ldots, v_\rho$. Известно**, что всякая симметрическая функция от $t_1, t_2, \ldots, t_\rho$ является однозначной аналитической функцией от $v_1, v_2, \ldots, v_\rho$ — это так называемые *абелевы функции*. Для доказательства этого факта и построения абелевых функций используются тэта-функции Римана. Здесь мы можем дать лишь самое общее представление о том, как это делается. Выше мы приняли нормировку интегралов первого рода, при которой период A_j интеграла $\omega_k(\lambda)$ равен $\pi i \delta_{kj}$. Обозначим теперь период B_j того же интеграла через c_{jk}. Эти величины обладают следующими свойствами: во-первых, $c_{jk} = c_{kj}$ и, во-вторых, у квадратичной формы $(Q\xi, \xi) = \sum_{j,k=1}^{\rho} c_{jk}\xi_j\xi_k$ вещественная часть отрицательна. При этих обозначениях основная тэта-функция Римана имеет вид

$$\vartheta(v) = \vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_\rho) = \sum_m e^{(Qm, m)+2(m, v)},$$

---

* В нашем случае компонентами вектора a являются точки ветвления поверхности $\mathfrak{F}$ по одной от каждой линии перехода.

** См. Чеботарев Н. Г., loc. cit.

где m пробегает совокупность всех целочисленных векторов $\{m_1, m_2, \ldots, m_\rho\}$, а $(m, v) = \sum_1^\rho m_k v_k$ есть скалярное произведение вектора m и вектора v. Прежде всего очевидно, что $\vartheta(v)$ имеет по каждой компоненте v_k период πi, иначе говоря, тэта-функция имеет ρ периодов $\pi i\ \{\delta_{kj}\}_{k=1}^\rho$ $(j = 1, 2, \ldots, \rho)$. С другой стороны, легко проверить, что $\vartheta(v)$ имеет ρ квазипериодов $c_j = \{c_{kj}\}_{k=1}^\rho$ $(j = 1, 2, \ldots, \rho)$ в том смысле, что

$$\vartheta(v_1 + c_{1j}, v_2 + c_{2j}, \ldots, v_\rho + c_{\rho j}) = \vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_\rho)\, e^{-c_{jj}-2v_j}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, \rho).$$

С помощью прибавления половин периодов и половин квазипериодов из основной тэта-функции получаются так называемые *тэта-функции с характеристиками*, всего вместе с основной функцией мы получаем $2^{2\rho}$ тэта-функций первого порядка. Затем с помощью перемножений строятся тэта-функции высших порядков. Наконец, с помощью сложения произведений, имеющих одинаковый порядок и одинаковую сумму характеристик, строятся выражения, отношения которых будут обладать 2ρ системами периодов по системе переменных $v_1, v_2, \ldots, v_\rho$. Этим путем и получаются абелевы функции.

Нам необходима лишь одна абелева функция, а именно: $t_1 + t_2 + \cdots + t_\rho$ при $v_j = \mu_j x$ $(j = 1, 2, \ldots, \rho)$; она представляет сумму $\gamma_1(x) + \gamma_2(x) + \cdots + \gamma_\rho(x)$, через которую выражается потенциал $q(x)$. Так как функция

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_\rho = \varphi(v_1, v_2, \cdots, v_\rho)$$

имеет период πi по каждой из переменных v_j, то функция

$$\gamma_1(x) + \gamma_2(x) + \cdots + \gamma_\rho(x) = \varphi(\mu_1 x, \mu_2 x, \ldots, \mu_\rho x)$$

по x, входящему в k-й аргумент, будет иметь период $\dfrac{\pi i}{\mu_k}$. Таким образом, если числа μ_k соизмеримы, то $q(x)$ имеет период (чисто мнимый). Если же это условие не выполнено, то $q(x)$ будет (на мнимой оси) лишь почти периодической функцией*. Так как для чисел μ_k мы имеем точные выражения в виде интегралов, которые зависят только от поверхности $\mathfrak{F}$, то формально получен некоторый критерий наличия периода (чисто мнимого) у потенциала $q(x)$. Однако для каких-либо применений этот критерий, очевидно, бессилен.

V. В случае одной лакуны наши общие построения сильно упрощаются и допускают интересное завершение благодаря возможности с самого начала использовать эллиптические функции. Если $\rho = 1$, то мы можем, не нарушая общности, положить $\alpha_1 = k^2$ $(0 < k^2 < 1)$ и $\beta_1 = 1$. Двухлистную риманову поверхность $\mathfrak{F}$ отобразим конформно на прямоугольник периодов. Если при-

* Класс почти-периодических функций, которому будет принадлежать $q(x)$, впервые изучал П. Боль.

менять якобиевы функции*, то обратное отображение дается формулой

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}, \tag{12}$$

откуда

$$\frac{du}{d\lambda} = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda(\lambda - k^2)(\lambda - 1)}}. \tag{12'}$$

Таким образом, мы будем применять функции Якоби. Это отображение переводит один из полулистов римановой поверхности в прямоугольник полупериодов с вершинами $u = 0,\ iK',\ iK' - K,\ -K,\ 0$, которым соответствуют точки $\lambda = -\infty,\ 0,\ k^2,\ 1,\ +\infty$.

Нетрудно видеть, что u как функция от λ является интегралом 1-го рода (в данном случае единственным), и если в соответствии с принятым выше общим обозначением

$$\omega_1(\lambda) = \int\limits_1^\lambda \frac{C_1\,dt}{\sqrt{t(t - k^2)(t - 1)}},$$

где C_1 определена из условия, что

$$\int\limits_0^{k^2} d\omega_1(\lambda) = \frac{\pi i}{2},$$

то связь между $\omega_1(\lambda)$ и u имеет вид

$$\omega_1(\lambda) = -\frac{\pi i}{2K}(u + K).$$

Все остальные интегралы можно выразить через u с помощью тэта-функций Якоби. Во-первых, интеграл 2-го рода с единственным полюсом первого порядка на ∞ и указанной асимптотикой, а также нормировкой, равен

$$\omega(\lambda) = \frac{H'(u)}{H(u)}.$$

Действительно, единственным полюсом в параллелограмме периодов является точка $u = 0$ — прообраз точки $\lambda = \infty$. Далее, наличие периода $2K$ по переменной u означает, что модуль периодичности A интеграла $\omega(\lambda)$ равен нулю. Нетрудно проверить также и асимптотику при $\lambda \to \infty$, она имеет вид

$$\frac{H'(u)}{H(u)} \sim \sqrt{\lambda} \quad (u \to 0).$$

* Немногие сведения об эллиптических функциях, которые понадобятся в дальнейшем, читатель найдет, например, в книге Н. И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций. М., «Наука», 1970.

Заметим, что с помощью некоторых преобразований можно из формул (12), (12') вывести соотношение

$$\frac{H'(u)}{H(u)} = \int_1^{\lambda} \frac{\left(t - \frac{K-E}{K}\right) dt}{2\sqrt{t(t-k^2)(t-1)}}.$$

Остается найти интеграл 3-го рода $\omega(\lambda; \gamma(x), \gamma(0))$, где $\gamma(0) = k^2$ или 1, а $\gamma(x)$ подлежит нахождению. В сущности, нам нужна функция $\exp\omega(\lambda; \gamma(x), \gamma(0))$. Эта функция обращается в ∞ в точке $\lambda = \gamma(0)$ и в 0 в точке $\lambda = \gamma(x)$. Если мы вместо этих величин введем их образы в плоскости u, а именно: $v(0)$ и $v(x)$, так что

$$\gamma(x) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2(v(x); k)}, \quad \gamma(0) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2(v(0); k)},$$

то мы получим следующее представление:

$$\exp\omega(\lambda; \gamma(x), \gamma(0)) = C(x)\, e^{C_1(x)u} \frac{H(u - v(x))}{H(u - v(0))}.$$

Однозначность этой функции в области $\mathfrak{S}$ равносильна наличию периода $2K$. Так как функция $H(u)$ этим свойством обладает, то $C_1(x) = 0$. Теперь мы можем написать выражение для $\mathscr{E}(x; \lambda)$:

$$\mathscr{E}(x; \lambda) = C(x) \frac{H(u - v(x))}{H(u - v(0))} e^{ix\frac{H'(u)}{H(u)}}.$$

Для определения $v(x)$ мы должны потребовать однозначность $\mathscr{E}(x; \lambda)$ на $\mathfrak{F}$. Это сводится к тому, что правая часть должна иметь также период $2iK'$. Используя формулы приведения тэта-функций, находим, что

$$\frac{H(u + 2iK' - v(x))}{H(u + 2iK' - v(0))} e^{ix\frac{H'(u+2iK')}{H(u+2iK')}} =$$
$$= \frac{H(u - v(x))}{H(u - v(0))} e^{ix\frac{H'(u)}{H(u)}} e^{\frac{\pi i}{K}[v(x) - v(0) - ix]}.$$

Поэтому должно иметь место равенство $v(x) = v(0) + ix$. Итак,

$$\mathscr{E}(x; \lambda) = C(x) \frac{H(u - ix - v(0))}{H(u - v(0))} e^{ix\frac{H'(u)}{H(u)}}.$$

Остается требование $\mathscr{E}(x; \lambda) \sim e^{ix\sqrt{\lambda}}$ (при $|\lambda| \to \infty$, $\Im\sqrt{\lambda} \geqslant 0$). Это требование приводит к соотношению

$$C(x) \frac{H(ix + v(0))}{H(v(0))} = 1.$$

Таким образом,

$$\mathscr{E}(x;\ \lambda) = \frac{H(v(0))\,H(u - ix - v(0))}{H(ix + v(0))\,H(u - v(0))}\, e^{ix\frac{H'(u)}{H(u)}}.$$

Теперь мы можем выписать окончательные формулы для обоих возможных случаев:

1) $\gamma(0) = k^2$, $P(\lambda) = \lambda - k^2$.

Так как значению $\lambda = k^2$ соответствует $u = -K + iK'$, то $v(0) = -K + iK'$. Поэтому

$$\gamma(x) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2(ix - K + iK';\ k)} = k^2 \frac{\operatorname{cn}^2(ix;\ k)}{\operatorname{dn}^2(ix;\ k)} = \frac{k^2}{\operatorname{dn}^2(x;\ k')}$$

и в силу предложения 3 в этом случае

$$q(x) = -\frac{2k^2}{\operatorname{dn}^2(x;\ k')} + 1 + k^2; \tag{13_1}$$

2) $\gamma(0) = 1$, $P(\lambda) = \lambda - 1$.

Значению $\lambda = 1$ соответствует $u = -K$, поэтому $v(0) = -K$, а значит,

$$\gamma(x) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2(ix - K;\ k)} = \frac{\operatorname{dn}^2(ix;\ k)}{\operatorname{cn}^2(ix;\ k)} = \operatorname{dn}^2(x;\ k')$$

и в силу предложения 3

$$q(x) = -2\operatorname{dn}^2(x;\ k') + 1 + k^2. \tag{13_2}$$

Заметим, что в обоих случаях потенциал является четной функцией с периодом $2K'$.

Далее отметим связь с классическим уравнением Лямэ, которое в функциях Якоби имеет вид

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + n(n+1)\,k^2 \operatorname{sn}^2(x;\ k)\,y = \mu y, \tag{14}$$

где n (обычно натуральное число) и μ — параметры. Эта связь почти очевидна, если взять потенциал (13_2), так как его можно переписать в виде

$$q(x) = 2k'^2 \operatorname{sn}^2(x;\ k') - k'^2.$$

Соответствующее уравнение Штурма — Лиувилля

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + [2k'^2 \operatorname{sn}^2(x;\ k') - k'^2]\,y = \lambda y \tag{14_2}$$

является уравнением Лямэ (14) при $n = 1$ и $\mu = \lambda + k^2$, если заменить модуль k на дополнительный модуль k'. Что касается потенциала (13_1), то соответствующее ему уравнение Штурма — Лиувилля можно переписать в виде

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + [2k'^2 \operatorname{sn}^2(x + K';\ k') - k'^2]\,y = \lambda y. \tag{14_1}$$

Остановимся на уравнении Лямэ в общем случае, когда не предполагается, что $n=1$.

Возьмем это уравнение в форме Вейерштрасса:

$$-\frac{d^2y}{dv^2}+n(n+1)\wp(v)\,y=\lambda y. \tag{15}$$

Мы примем, что параметры функции $\wp$ удовлетворяют неравенству $e_3<e_2<e_1$ и напомним, что в этом случае один период функции $\wp$ веществен, а другой — чисто мнимый (обозначим их соответственно $2\omega=\omega_1$ и $2\omega'=2\omega_3$).

Лямэ пришел в своему уравнению, решая задачу Дирихле для эллипсоида. Известная роль сферических функций в задаче Дирихле для шара побудила Лямэ искать специального вида решения своего уравнения. Применительно к форме (15) эти решения должны быть многочленами от $\wp(v)$, возможно, умноженными на один, два или все три радикала $\sqrt{\wp(v)-e_k}$ $(k=1,\ 2,\ 3)$. Оказалось, что такие решения получаются лишь при $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ (целые отрицательные n, очевидно, можно не рассматривать) и при каждом таком n имеется точно $2n+1$ значений для параметра λ. Назовем их *собственными значениями Лямэ*, а соответствующие решения — *полиномами Лямэ*. Знание всей совокупности полиномов Лямэ позволяет решать задачу Дирихле для эллипсоида, и аналогия со сферическими функциями является полной.

Только случай натурального n будет рассматриваться нами в дальнейшем. Оказывается, что в этом случае (15) представляет пример (возможно, простейший) уравнения Шредингера с периодическим потенциалом, для которого спектр заполняет полуось с точно n лакунами. Этот факт, а также явное выражение спектральной функции можно вывести из результатов*, полученных в конце прошлого века, и основных предложений, относящихся к уравнению Хилла **. Мы изложим здесь процедуру построения спектральной функции, не останавливаясь на подробных доказательствах***.

---

* См. Hermite, Comptes Rendus, LXXXV, 1877; F. Klein, Mathematische Annalen, Bd. 40, 1892; А. А. Марков. Сообщ. Харьк. мат. о-ва, 2 сер., т. V, 1896, а также Halphen. Fonction Elliptiques, II, Paris, 1888. В трактате Альфана, с. 457—531, теория уравнения Лямэ изложена с исчерпывающей полнотой.

Из позднейших работ отметим Ince. Further Investig. into the Periodic Lame Fonctions, Proc. S. Edinb., LX, 1940, с. 83—99. В этой работе решения уравнения Лямэ строятся и изучаются с помощью рядов Фурье. Из результатов этой статьи также вытекает n-зонность потенциала. Построением спектральной функции Айнс не занимался.

** См. Титчмарш. Разложения по собственным функциям, том II, n° 21,6, М., ИЛ, 1961.

*** Более подробное изложение см. в сб. «Истор.-мат. исследования», вып. XXIII, 1978.

Для уравнения (15) можно ставить также две задачи Штурма—Лиувилля: периодическую, $y(v+2\omega)=y(v)$, и полупериодическую, $y(v+2\omega)=-y(v)$. Решения этих задач носят название функций Лямэ, их собственные значения вещественны. Полиномы Лямэ являются частными случаями функций Лямэ. Характерное свойство полиномов Лямэ в классе всех функций Лямэ состоит в том, что собственные числа Лямэ являются простыми собственными значениями, а все прочие двухкратны. Для доказательства второго утверждения можно использовать найденную Эрмитом общую формулу, представляющую решение уравнения Лямэ при любом λ. Из этой формулы, между прочим, следует, что при любом λ можно найти два решения (возможно, линейно зависимые), произведением которых является некоторый многочлен F от $\wp(v)$. Этот многочлен играет в исследованиях Эрмита существенную роль. По почину А. А. Маркова назовем F функцией Эрмита. Для нахождения функции Эрмита удобно в уравнении (15) сделать замену переменной $\wp(v)=x$, в результате чего получится алгебраическая форма уравнения Лямэ:

$$2\varphi(x)\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi'(x)\frac{dy}{dx}-2\{n(n+1)x-\lambda\}y=0,$$

где $\varphi(x)=4x^3-g_2x-g_3=4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$. Если $F(x)=y_1(x)y_2(x)$ есть функция Эрмита, то

$$2\varphi(x)F'''+3\varphi'(x)F''+\varphi''(x)F'-8\{n(n+1)x-\lambda\}F'-$$
$$-4n(n+1)F=0.$$

Отсюда $F(x)=F(x,\ \lambda)=x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n$ легко находится, причем оказывается, что A_j есть многочлен от λ точно степени j. Далее очень просто проверяется, что функция Эрмита удовлетворяет также нелинейному уравнению второго порядка

$$\varphi(x)(F'^2-2FF'')-\varphi'(x)FF'+4\{n(n+1)x-\lambda\}F^2+C(\lambda)=0. \tag{16}$$

Из этого уравнения определяется $C(\lambda)$, как многочлен от λ степени $2n+1$:

$$C(\lambda)=4\lambda A_n^2-g_2A_{n-1}A_n+g_3(A_{n-1}^2-4A_{n-2}A_n),$$

старший коэффициент которого >0. Заметим также, что уравнение (16) можно переписать в виде

$$\varphi(x)[y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)]^2+C(\lambda)=0.$$

В силу приведенных здесь соотношений справедливо следующее утверждение: если $\tilde\lambda$ — корень $C(\lambda)$, то

$$F(x,\ \tilde\lambda)=(x-e_1)^{\varepsilon_1}(x-e_2)^{\varepsilon_2}(x-e_3)^{\varepsilon_3}[f(x)]^2,$$

где f — многочлен некоторой степени k, имеющий лишь простые корни, а каждое из чисел ε_1, ε_2, ε_3 равно 1 или 0, так что $n = 2k + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ и, следовательно,

$$y(v) = (x - e_1)^{\frac{\varepsilon_1}{2}} (x - e_2)^{\frac{\varepsilon_2}{2}} (x - e_3)^{\frac{\varepsilon_3}{2}} f(x), \quad x = \wp(v)$$

есть полином Лямэ, а $\tilde{\lambda}$ — собственное значение* Лямэ.

Вместо (15) возьмем теперь уравнение

$$-\frac{d^2y}{du^2} + n(n+1)\wp(u + \omega')\, y = \lambda y \quad (-\infty < u < \infty), \tag{17}$$

иначе говоря, будем рассматривать уравнение (15) на прямой $v = u + \omega'$. Это не требует никаких изменений во всем предшествующем анализе. Потенциал в уравнении (17) $q(u) = n(n+1) \times \wp(u + \omega')$ имеет прежние периоды и является, как и прежний, четной функцией; при этом он непрерывен на всей оси u.

Пусть $\varphi(u; \lambda)$ и $\psi(u; \lambda)$ — решения уравнения (17) типа косинуса и, соответственно, типа синуса.

Будем обозначать через a_m собственные значения четных функций Лямэ, а через b_m — нечетных. Соответствующие функции Лямэ будут $\varphi(u; a_m)$, $\psi(u; b_m)$; при этом m означает число корней собственной функции в интервале $(-\omega, \omega]$. В таком случае

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots, \quad b_1 < b_2 < \ldots \quad (a_m = a_m^{(n)}, \; b_m = b_m^{(n)})$$

и легко видеть, что четным m соответствуют периодические собственные функции, а нечетным — полупериодические. Собственные значения Лямэ, то есть корни многочлена $C(\lambda)$,

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{2n} \quad (\lambda_k = \lambda_k^{(n)})$$

содержатся в последовательностях $\{a_m\} \cup \{b_m\}$. Для построения спектральной функции необходимо знать, какие места они в этих последовательностях занимают. Этот вопрос можно решить с помощью графиков Ф. Клейна или таблицы А. А. Маркова. Результат** имеет вид

$$\begin{gathered}\lambda_0 = a_0, \; \lambda_1 = a_1, \; \lambda_2 = b_1, \; \lambda_3 = b_2, \\ \lambda_4 = a_2, \; \lambda_5 = a_3, \; \lambda_6 = b_3, \; \lambda_7 = b_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered}$$

---

* Если применить известный из анализа прием, то легко непосредственно усмотреть, что второе решение не будет ни периодической, ни полупериодической функцией.

** См. статью автора, цитированную в подстрочном примечании на с. 256.

Таким образом, собственные значения Лямэ занимают первые места в последовательностях $\{a_m\}$, $\{b_m\}$, и если мы положим $\mu_n = \max(a_n, b_n)$, то в силу сказанного выше

$$\mu_n < a_{n+1} = b_{n+1} < a_{n+2} = b_{n+2} < \ldots$$

Умножая многочлены $C(\lambda)$, $F(e_k, \lambda)$ $(k = 2, 3)$ на надлежащие константы, сделаем их старшие коэффициенты равными 1. Тогда с помощью таблицы А. А. Маркова мы найдем, что

$$F(e_3, \lambda) = (\lambda - b_1)(\lambda - b_2) \ldots (\lambda - b_n) = B_1(\lambda) B_2(\lambda),$$
$$F(e_2, \lambda) = A_1(\lambda) B_2(\lambda),$$
$$C(\lambda) = A_1(\lambda) A_2(\lambda) B_1(\lambda) B_2(\lambda),$$

где

$$A_1(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_3) \ldots, \quad A_2(\lambda) = (\lambda - a_0)(\lambda - a_2)(\lambda - a_4) \ldots$$
$$B_1(\lambda) = (\lambda - b_1)(\lambda - b_3) \ldots, \quad B_2(\lambda) = (\lambda - b_2)(\lambda - b_4) \ldots$$

Теперь обозначим через I точечное множество, образованное при четном n интервалами (a_1, b_1), (b_2, a_2), (a_3, b_3), $\ldots$, (b_n, a_n) и при нечетном n интервалами (a_1, b_1), (b_2, a_2), $\ldots$, (b_{n-1}, a_{n-1}), (a_n, b_n). Эти интервалы представляют лакуны в спектре, а спектром является множество $E = [a_0, \infty) \setminus I$.

Основной результат гласит: если положить

$$\varpi(\lambda) = \sqrt{\frac{[F(e_3, \lambda)]^2}{C(\lambda)}} \geqslant 0 \quad (\lambda \in E)$$

и

$$\sigma'(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \varpi(\lambda) & (\lambda \in E) \\ 0 & (\lambda \in I) \end{cases}, \quad \tau'(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\varpi(\lambda)} & (\lambda \in E), \\ 0 & (\lambda \in I), \end{cases}$$

то имеют место равенства Парсеваля

$$\int_0^\infty |f(u)|^2 du = \int_{-\infty}^\infty |g(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda), \quad \int_0^\infty |f(u)|^2 du = \int_{-\infty}^\infty |h(\lambda)|^2 d\tau(\lambda),$$

где f — произвольная функция из $L^2(0, \infty)$, а g, h — ее четное и нечетное преобразования Лямэ:

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(u) \varphi(u; \lambda) du, \quad h(\lambda) = \int_0^\infty f(u) \psi(u; \lambda) du.$$

Поясним сказанное на простом примере. Пусть $n = 3$. В этом случае функция Эрмита равна

$$F(x, \lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 x + 15\lambda(3x^2 - g_2) + \frac{9{,}25}{4}(4x^3 - g_2 x - g_3)$$

и, значит,

$$F(e_k, \lambda) = \lambda \gamma(e_k, \lambda), \quad (k = 1, 2, 3).$$

где $\gamma(e_k, \lambda) = \lambda^2 + 6e_k\lambda + 15(3e_k^2 - g_2)$. Так как

$$\lambda\gamma(e_3, \lambda) = B_1(\lambda) B_2(\lambda), \quad \lambda\gamma(e_2, \lambda) = A_1(\lambda) B_2(\lambda),$$

то

$$\begin{aligned} B_2(\lambda) &= \lambda - b_2 = \lambda - \lambda_3 = \lambda, \\ B_1(\lambda) &= (\lambda - b_1)(\lambda - b_3) = (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_6) = \gamma(e_3, \lambda), \\ A_1(\lambda) &= (\lambda - a_1)(\lambda - a_3) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_5) = \gamma(e_2, \lambda) \end{aligned}$$

и

$$A_2(\lambda) = (\lambda - a_0)(\lambda - a_2) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_4) = \gamma(e_1, \lambda).$$

Отсюда следует, что

$$\sigma'(\lambda) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda\gamma(e_3, \lambda)}{\gamma(e_1, \lambda)\gamma(e_2, \lambda)}} \quad (\lambda \in E),$$

причем нахождение концов лакун сводится к решению трех квадратных уравнений.

VI. Снова займемся общими рассмотрениями, относящимися к случаю, когда спектр содержит произвольное число $\rho \geqslant 1$ лакун. Если $\zeta \in \mathfrak{G}$, то в силу предложения 2 и формулы (10) мы можем написать следующее равенство:

$$\psi(x; \zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_E \sqrt{\frac{P(\mu)}{\mu Q(\mu)}}\,\frac{\varphi(x; \mu)}{\mu - \zeta}\,d\mu + \sqrt{-\frac{P(\zeta)}{\zeta Q(\zeta)}}\,\varphi(x; \zeta). \tag{18}$$

Отсюда, делая предельный переход, найдем, что для почти всех $\lambda \in E$

$$\psi(x; \lambda) = \psi(x; \lambda + 0i) = \frac{1}{\pi}\int_E{}' \sqrt{\frac{P(\mu)}{\mu Q(\mu)}}\,\frac{\varphi(x; \mu)}{\lambda - \mu}\,d\mu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\varphi(x; \mu)}{\lambda - \mu}\,d\sigma(\mu).$$

Теперь воспользуемся теоремой 2 и докажем с ее помощью следующее

Предложение 4. *Абсолютно непрерывной в каждом конечном интервале спектральной функции $\tau(\lambda)$, для которой*

$$\tau'(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{\lambda Q(\lambda)}{P(\lambda)}} & (\lambda \in E) \\ 0 & (\lambda \bar{\in} E), \end{cases}$$

отвечает то же уравнение Штурма — Лиувилля, что и спектральной функции $\sigma(\lambda)$, *где*

$$\sigma'(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}} & (\lambda \in E) \\ 0 & (\lambda \bar{\in} E), \end{cases}$$

но при краевом условии $y(0) = 0, \ y'(0) = 1$.

Для этого доказательства достаточно проверить равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_E \sqrt{\frac{\mu Q(\mu)}{P(\mu)}}\,|G(\mu)|^2\,d\mu = \int_0^\infty |h(x)|^2\,dx,$$

где $G(\mu) = \int_0^\infty h(x)\,\psi(x;\ \mu)\,dx$, а $h(x)$ — произвольная непрерывная финитная функция. Чтобы проверить указанное равенство, введем функцию $F(\lambda) = \int_0^\infty h(x)\,\varphi(x;\ \lambda)\,dx$ и напишем для нее равенство Парсеваля со спектральной функцией $\sigma(\lambda)$: $\frac{1}{\pi}\int_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}}\,|F(\lambda)|^2\,d\lambda = \int_0^\infty |h(x)|^2\,dx$. Затем по функции $F(\lambda)$ построим функцию

$$G_1(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_E' \sqrt{\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}}\,\frac{F(\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\lambda.$$

Тогда благодаря изометричности оператора, переводящего F в G_1 (теорема 3):

$$\frac{1}{\pi}\int_E \sqrt{\frac{\mu Q(\mu)}{P(\mu)}}\,|G_1(\mu)|^2\,d\mu = \frac{1}{\pi}\int_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}}\,|F(\lambda)|^2\,d\lambda = \int_0^\infty |h(x)|^2\,dx.$$

Теперь остается доказать, что почти всюду в E имеет место равенство $G(\mu) = G_1(\mu)$. С этой целью положим вначале, что $\zeta \bar{\in} E$. Тогда в силу (18) и определения $F(\lambda)$

$$\frac{1}{\pi}\int_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}}\,\frac{F(\lambda)}{\zeta-\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty h(x)\,dx\int_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}}\,\frac{\varphi(x;\lambda)}{\zeta-\lambda}\,d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty h(x)\,\psi(x;\ \zeta)\,dx - \sqrt{-\frac{P(\zeta)}{\zeta Q(\zeta)}}\int_0^\infty h(x)\,\varphi(x;\ \zeta)\,dx.$$

Отсюда, делая предельный переход, получим почти всюду в E

$$\frac{1}{\pi}\int_E' \sqrt{\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}}\frac{F(\lambda)}{\mu-\lambda}d\lambda - i\sqrt{\frac{P(\mu)}{\mu Q(\mu)}}F(\mu) =$$

$$= \int_0^\infty h(x)\psi(x;\ \mu)\,dx - \sqrt{-\frac{P(\mu)}{\mu Q(\mu)}}\int_0^\infty h(x)\varphi(x;\ \mu)\,dx$$

или

$$\frac{1}{\pi}\int_E' \sqrt{\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}}\frac{F(\lambda)}{\mu-\lambda}d\lambda = \int_0^\infty h(x)\psi(x;\ \mu)\,dx$$

(почти всюду в E), а это и есть равенство $G(\mu) = G_1(\mu)$.

Условимся называть две функции $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ $(\lambda \in E)$ *сопряженными на* E, если они связаны соотношением

$$G(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_E' \sqrt{\frac{P(\mu)}{\mu Q(\mu)}}\frac{F(\mu)}{\lambda-\mu}d\mu.$$

Из наших рассмотрений вытекает следующее

Предложение 5. *Если $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ — сопряженные функции на E и если*

$$\int_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)}}|F(\lambda)|^2 d\lambda < \infty,$$

то $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ допускают параметрическое представление

$$F(\lambda) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int_0^A h(x)\varphi(x;\ \lambda)\,dx \quad (\text{в } L^2_\sigma),$$

$$G(\lambda) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int_0^A h(x)\psi(x;\ \lambda)\,dx \quad (\text{в } L^2_\tau),$$

где роль параметра играет функция $h(x) \in L^2(0, \infty)$.

VII. Займемся теперь доказательством теоремы 3. Вначале сведем эту теорему к более удобному для рассмотрения случаю, а именно: сделаем дробно-линейное преобразование

$$\xi = \frac{\lambda-1}{\lambda+1},$$

которое систему интервалов

$$(0,\ \alpha_1),\ (\beta_1,\ \alpha_2),\ \ldots,\ (\beta_\rho,\ \infty)$$

λ — оси переводит в множество оси ξ

$$E\colon\ (b_0,\ a_1),\ (b_1,\ a_2),\ \ldots,\ (b_\rho,\ a_{\rho+1}),$$

где $-1 = b_0 < a_1 < b_1 < \cdots < b_\rho < a_{\rho+1} = 1$.

При этом теорема 3, как легко проверить, сводится к следующему предложению, которое мы и будем доказывать.

Теорема 3'. *Пусть*

$$R_b^a(\xi) = R_b^a(\xi + 0i) = \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}\prod_{k=1}^{\rho}\frac{\xi - a_k}{\xi - b_k}} \geqslant 0 \quad (\xi \in E),$$

$$v(\xi) = \begin{cases} R_b^a(\xi)\prod\limits_{k=1}^{\rho}\left(\dfrac{\xi - b_k}{\xi - a_k}\right)^{\varepsilon_k} & (\xi \in E) \\ 0 & (\xi \,\bar{\in}\, E), \end{cases}$$

причем каждое ε_k *равно* 0 *или* 1, *пусть*

$$w(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{v(\xi)} & (\xi \in E), \\ 0 & (\xi \,\bar{\in}\, E), \end{cases}$$

и пусть

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\xi} v(\eta)\,d\eta, \quad \tau(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\xi} w(\eta)\,d\eta.$$

В таком случае, какова бы ни была функция $g \in L_\tau^2$, *уравнение*

$$g(\xi) = \int_{-1}^{1}{}' f(\eta)\frac{d\sigma(\eta)}{\xi - \eta}$$

имеет (почти всюду в E) *решение* f. *Оно принадлежит* L_σ^2 *и дается формулой*

$$f(\xi) = \int_{-1}^{1}{}' g(\eta)\frac{d\tau(\eta)}{\eta - \xi};$$

при этом

$$\int_{-1}^{1} |f(\xi)|^2\,d\sigma(\xi) = \int_{-1}^{1} |g(\xi)|^2\,d\tau(\xi).$$

Доказательство. Благодаря ограниченности множества E мы можем ввести ортонормированные системы многочленов $\{P_k(\xi)\}_0^\infty$, $\{Q_k(\xi)\}_0^\infty$ в L_σ^2, соответственно L_τ^2:

$$\int_{-1}^{1} P_m(\xi)\,P_n(\xi)\,d\sigma(\xi) = \delta_{mn}, \quad \int_{-1}^{1} Q_m(\xi)\,Q_n(\xi)\,d\tau(\xi) = \delta_{mn}.$$

Эти многочлены определяются однозначно, если потребовать, чтобы их старшие коэффициенты были положительны. Нужны еще многочлены второго рода

$$P_n^*(\xi)=\int_{-1}^{1}\frac{P_n(\xi)-P_n(\eta)}{\xi-\eta}\,d\sigma(\eta),\quad Q_n^*(\xi)=\int_{-1}^{1}\frac{Q_n(\xi)-Q_n(\eta)}{\xi-\eta}\,d\tau(\eta).$$

Явный вид многочленов $P_n(\xi)$, $P_n^*(\xi)$ можно получить через моменты s_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, которые находятся из разложения

$$F(z)\equiv\int_{-1}^{1}\frac{d\sigma(\eta)}{z-\eta}=\frac{s_0}{z}+\frac{s_1}{z^2}+\frac{s_2}{z^3}+\cdots\quad(|z|>1),$$

и подобным образом многочлены $Q_n(\xi)$, $Q_n^*(\xi)$ явно выражаются через моменты t_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, определяемые из разложения

$$G(z)\equiv\int_{-1}^{1}\frac{d\tau(\eta)}{z-\eta}=\frac{t_0}{z}+\frac{t_1}{z^2}+\frac{t_2}{z^3}+\cdots\quad(|z|>1).$$

Например, легко проверяется, что

$$P_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{s_0}},\quad P_1(\xi)=\frac{\sqrt{s_0}}{\sqrt{s_0s_2-s_1^2}}\left(\xi-\frac{s_1}{s_0}\right),$$

$$P_0^*(\xi)=0,\quad P_1^*(\xi)=\frac{s_0\sqrt{s_0}}{\sqrt{s_0s_2-s_1^2}}\tag{α}$$

и, соответственно,

$$Q_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{t_0}},\quad Q_1(\xi)=\frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t_0t_2-t_1^2}}\left(\xi-\frac{t_1}{t_0}\right),\tag{β}$$

$$Q_0^*(\xi)=0,\quad Q_1^*(\xi)=\frac{t_0\sqrt{t_0}}{\sqrt{t_0t_2-t_1^2}}.$$

С помощью контурного интегрирования находим, что в z-плоскости, разрезанной вдоль интервалов системы E,

$$\omega(z)\equiv\sqrt{\frac{z-1}{z+1}\prod_{k=1}^{p}\frac{z-a_k}{z-b_k}\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{\varepsilon_k}}=$$

$$=1-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v(\eta)}{z-\eta}\,d\eta=1-F(z)\tag{19_1}$$

и

$$\frac{1}{\omega(z)}=1+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w(\eta)}{z-\eta}\,d\eta=1+G(z),$$

откуда следует, что

$$\{1 - F(z)\}\{1 + G(z)\} = \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{z^{k+1}}\right)\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_k}{z^{k+1}}\right) = 1. \qquad (19_2)$$

Из этого равенства вытекают соотношения

$$t = s_0, \quad t_1 = t_0 s_0 + s_1, \quad t_2 = t_1 s_0 + t_0 s_1 + s_2,$$

в силу которых

$$s_0 = t_0, \quad \frac{s_1}{s_0} = \frac{t_1}{t_0} - t_0, \quad s_0 s_2 - s_1^2 = t_0 t_2 - t_1^2.$$

Поэтому из формул (α), (β) следует, что

$$Q_0(\xi) = P_0(\xi), \quad Q_1^*(\xi) = P_1^*(\xi), \quad Q_1(\xi) = P_1(\xi) - P_1^*(\xi). \qquad (\gamma)$$

С другой стороны, из интегрального представления функций $F(z)$ и $G(z)$ без труда получается, что при любом $n \geqslant 0$ и $|z| \to \infty$

$$F(z) = \frac{P_n^*(z)}{P_n(z)} + O\left(\frac{1}{|z|^{2n+1}}\right), \quad G(z) = \frac{Q_n^*(z)}{Q_n(z)} + O\left(\frac{1}{|z|^{2n+1}}\right);$$

а так как в силу (19_2)

$$G(z) = \frac{F(z)}{1 - F(z)},$$

то

$$\frac{Q_n^*(z)}{Q_n(z)} = \frac{P_n^*(z)}{P_n(z) - P_n^*(z)} + O\left(\frac{1}{|z|^{2n+1}}\right)$$

и, значит*, при любом $n \geqslant 1$

$$Q_n(z) = L_n\{P_n(z) - P_n^*(z)\}, \quad Q_n^*(z) = L_n P_n^*(z), \qquad (\delta)$$

где L_n от z не зависит. Но из (γ) и равенства $Q_0^*(z) = P_0^*(z) = 0$ следует, что соотношения (δ) верны также при $n = 0$ и, кроме того, $L_1 = L_0 = 1$. Теперь докажем, что $L_n = 1$ и для $n \geqslant 2$. С этой целью воспользуемся конечно-разностным уравнением, которому удовлетворяют ортогональные многочлены и многочлены второго рода. Это уравнение, скажем для $P_n(z)$ и $P_n^*(z)$, имеет вид**

$$b_n y_{n+1} + a_n y_n + b_{n-1} y_{n-1} = z y_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (\varepsilon)$$

---

* В силу несократимости дробей $\dfrac{P_n^*(z)}{P_n(z)}$, $\dfrac{Q_n^*(z)}{Q_n(z)}$.

** См., например, книгу автора, цитированную на с. 244, с. 4—8.

где $b_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Написав это соотношение для $y_n = P_n(z) - P_n^*(z)$ и воспользовавшись равенствами (δ), получим при $n \geqslant 2$

$$\frac{b_n L_n}{L_{n+1}} Q_{n+1}(z) + a_n Q_n(z) + \frac{b_{n-1} L_n}{L_{n-1}} Q_{n-1}(z) = z Q_n(z).$$

Так как это должно быть такого же вида, что и (ε), то

$$\frac{b_{n-1} L_n}{L_{n-1}} = \frac{b_{n-1} L_{n-1}}{L_n} \quad (n \geqslant 2),$$

откуда $L_n = L_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$, а значит, $L_n = 1$ $(n \geqslant 0)$.

Таким образом, благодаря специальному виду весов $\frac{1}{\pi} v(\xi)$, $\frac{1}{\pi} w(\xi)$ принадлежащие им ортонормированные многочлены $P_n(\xi)$, $Q_n(\xi)$ обладают следующим свойством.

1°. *При любом* $n \geqslant 0$

$$Q_n(\xi) = P_n(\xi) - P_n^*(\xi), \quad P_n(\xi) = Q_n(\xi) + Q_n^*(\xi). \tag{20}$$

Чтобы доказать теорему 3′, нам понадобится еще одно свойство.

2°. *При любом* $n \geqslant 2$ *справедливы* (почти всюду в E) *равенства*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1}{}' \frac{P_n(\eta)}{\xi - \eta} v(\eta)\, d\eta = Q_n(\xi), \tag{21}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1}{}' \frac{Q_n(\eta)}{\eta - \xi} w(\eta)\, d\eta = P_n(\xi).$$

Достаточно проверить первое равенство. Для этого возьмем формулу (19_1), положим в ней $z = \xi + i\varepsilon$ $(\xi \in E,\ \varepsilon > 0)$ и сделаем предельный переход $\varepsilon \to 0$. Мы получим формулу

$$\omega(\xi + i0) = 1 + iv(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1}{}' \frac{v(\eta)}{\xi - \eta} d\eta,$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1}{}' \frac{v(\eta)}{\xi - \eta} dn = 1 \quad (\xi \in E),$$

но это есть равенство (21) при $n=0$. Если $n>0$, то

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}{}' \frac{P_n(\eta)}{\xi-\eta} v(\eta)\, d\eta = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(\eta)-P_n(\xi)}{\xi-\eta} v(\eta)\, d\eta +$$

$$+ P_n(\xi)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}{}' \frac{v(\eta)}{\xi-\eta} d\eta = P_n(\xi) - P_n^*(\xi) = Q_n(\xi)$$

и, следовательно, (21) верно при любом целом $n \geqslant 0$.

Теперь уже легко доказать теорему 3′. Возьмем какое-нибудь r, $1<r<2$, и заметим, что каждая из функций $v(\eta)$, $w(\eta)$ принадлежит $L^r(-\infty, \infty)$. Поэтому, если $g \in L_\tau^2$, то по неравенству Гельдера

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w(\eta) g(\eta)|^{\frac{2r}{r+1}} d\eta = \int_{-1}^{1} [w(\eta)]^{\frac{r}{r+1}} |\sqrt{w(\eta)}\, g(\eta)|^{\frac{2r}{r+1}} d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_{-1}^{1} [w(\eta)]^r d\eta\right\}^{\frac{1}{r+1}} \left\{\int_{-1}^{1} |g(\eta)|^2 w(\eta)\, d\eta\right\}^{\frac{r}{r+1}} < \infty.$$

Иначе говоря, если положить $p=\frac{2r}{r+1}$, так что $1<p<\frac{4}{3}$, то $w(\eta)g(\eta) \in L^p(-\infty, \infty)$. Но в таком случае по классической теореме М. Рисса* почти всюду на оси ξ существует

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}{}' w(\eta)\frac{g(\eta)}{\eta-\xi} d\eta$$

и имеет место неравенство

$$\|f\|_{L^p(-\infty,\infty)} \leqslant A_p \|wg\|_{L^p(-\infty,\infty)},$$

где A_p — некоторая константа**. Из этого неравенства и вытекает, что

$$\|f\|_{L^p(E)} \leqslant A_p \left\{\int_{-1}^{1} [w(\eta)]^r d\eta\right\}^{\frac{1}{2r}} \left\{\int_{-1}^{1} |g(\eta)|^2 w(\eta)\, d\eta\right\}^{\frac{1}{2}} = B_p \|g\|_{L_\tau^2}.$$

---

* См., например, Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье М., 1948, с. 176.

** Недавно доказано, что наименьшее значение константы A_p в теореме М. Рисса равно $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p}$ при $1<p\leqslant 2$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2p}$ при $2\leqslant p<\infty$. Этот результат принадлежит Pichorides S. K. On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov, Stud. Math., t. XLIV, 1972, p. 165—179.

Таким образом, мы пока доказали, что

$$(T_\tau g)(\xi) = \int_{-1}^{1}{}' g(\eta)\frac{d\tau(\eta)}{\eta-\xi}$$

есть ограниченный оператор из L_τ^2 в L_E^p при каждом $p \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$. Аналогичным свойством обладает оператор

$$(T_\sigma f)(\xi) = \int_{-1}^{1}{}' f(\eta)\frac{d\sigma(\eta)}{\xi-\eta}$$

из L_σ^2 в $L^p(E)$.

Теперь рассмотрим ряд по многочленам $Q_n(\xi)$ произвольно выбранной в L_τ^2 функции g:

$$g(\xi) \sim \sum_{m=0}^{\infty} c_m Q_m(\xi),$$

и положим

$$g_n(\xi) = \sum_{m=0}^{n} c_m Q_m(\xi).$$

В силу установленного выше свойства многочленов $P_n(\xi)$, $Q_n(\xi)$ мы можем ввести функцию

$$f_n(\xi) = \sum_{m=0}^{n} c_m P_m(\xi) = \int_{-1}^{1}{}' \frac{g_n(\eta)}{\eta-\xi}\, d\tau(\eta) \quad (\xi \in B),$$

и так как $\sum\limits_{m=0}^{\infty} |c_m|^2 < \infty$, то в существенном однозначно на E определяется функция $f \in L_\sigma^2$, для которой

$$f(\xi) \sim \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(\xi)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} |f(\xi) - f_n(\xi)|^2\, d\sigma(\xi) = 0.$$

Нужно лишь доказать, что почти всюду в E

$$f(\xi)=(T_\tau g)(\xi)\overset{\text{det}\sim}{=}g(\xi).$$

Но по доказанному выше

$$\left\{\int_E|\tilde{g}(\xi)-f_n(\xi)|^p d\xi\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant B_p\left\{\int_{-1}^{1}|g(\eta)-g_n(\eta)|^2 d\tau(\eta)\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=B_p\left\{\sum_{m=n+1}^{\infty}|c_m|^2\right\}^{\frac{1}{2}}=B_p\left\{\int_{-1}^{1}|f(\xi)-f_n(\xi)|^2 d\sigma(\xi)\right.$$

и, значит, найдется подпоследовательность $\{f_{n_i}(\xi)\}_{i=1}^{\infty}$, которая при $i\to\infty$ почти всюду в E стремится к $f(\xi)$, а также и к $\tilde{g}(\xi)$. Доказательство закончено.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ К ОБОИМ ТОМАМ
(перед номерами страниц второго тома стоит цифра 0)

ОГЛАВЛЕНИЕ

*Глава VII**

СПЕКТР И ВОЗМУЩЕНИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Глава VIII

ТЕОРИЯ РАСШИРЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Глава IX

ОБОБЩЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

* Главы I—VI(п° 1—92) составляют вышедший в 1977 г. первый том настоящей монографии.

Наум Ильич Ахиезер
Израиль Маркович Глазман

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Том II

Редактор *Л. Ф. Кизилова*
Обложка художника *А. Ш. Грубман*
Художественный редактор *А. С. Романова*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректоры *Л. П. Пипенко, М. Ф. Христенко*

Информ. бланк № 3508

Сдано в набор 31.10 1977 г. Подписано в печать 30.01 1978 г. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская № 3. 18 усл. печ. л. 19 уч.-изд. л. Тираж 3000. БЦ 09044. Изд. № 602. Заказ 7-507 Цена 3 р.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа»
310003. Харьков, 3 Университетская, 16

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР
310057, Харьков, 57, Донец-Захаржевского, 6/8.

3 руб.