

Порядок в хаосе

П.Берже, И.Помо, К.Видаль



П.Берже, И.Помо, К.Видаль

Порядок в хаосе

О детерминистском подходе
к турбулентности



Издательство «Мир»

ПОРЯДОК В ХАОСЕ

PIERRE BERGÉ

C. E. A. SACLAY, Service de physique du solide
et de résonance magnétique

YVES POMEAU

C. E. A. SACLAY, Service de physique théorique

CHRISTIAN VIDAL

C. N. R. S., Centre de recherches Paul Pascal

L'ORDRE DANS LE CHAOS
Vers une approche déterministe
de la turbulence

Préface de David Ruelle

Institut des Hautes Études Scientifiques

Hermann, Éditeurs des sciences et des arts

П.Берже, И.Помо, К.Видадь

Порядок в хаосе

О детерминистском подходе
к турбулентности

Перевод с французского
Ю. А. Данилова



Москва «Мир» 1991

ББК 22.317
Б48
УДК 53.072.11

Берже П., Помо И., Видаль К.

Б48 Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности: Пер. с франц. — М.: Мир, 1991. — 368 с., ил.
ISBN 5-03-001804-2

Книга французских авторов представляет собой введение в область исследований, называемую синергетикой. Авторам удалось в живой, непринужденной, вполне доступной форме дать ясное представление о современных познаниях в области физики турбулентности и кооперативных процессов, которыми интенсивно занимаются специалисты по проблемам аэро- и газодинамики, физики плазмы, оптики, химической кинетики, биологии и т. д. Может служить пособием для студентов вузов и читателей с высшим образованием, желающих иметь доступное введение в проблемы синергетики.

Б $\frac{1604030000-113}{041(01)-91}$ 31-91

ББК 22.317

Редакция литературы по физике и астрономии

ISBN 5-03-001804-2 (русск.) © 1988, Hermann, 293 rue Lecourbe, 75015 Paris, Nouvelle édition corrigée
ISBN 2-7056-5980-3 (франц.) © перевод на русский язык, Данилов Ю. А., 1991

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Эта книга задумана как введение в теорию диссипативных динамических систем. Она написана на сравнительно элементарном (насколько это возможно) уровне и предназначена в первую очередь для студентов и во вторую — для аудитории, имеющей научную подготовку, но не специализирующейся в данной области.

Под *динамической системой* мы понимаем любую систему, какой бы ни была ее природа (физическую, химическую, электромагнитную, биологическую, экономическую и т. д.), которая может принимать различные математические формы: обыкновенных дифференциальных уравнений (автономных и неавтономных), дифференциальных уравнений в частных производных, отображений (обратимых или необратимых) прямой или плоскости. Таким образом, область исследования здесь необычайно обширна, поскольку охватывает анализ всех зависящих от времени явлений. Рассматривая большинство типов режимов или эволюции безотносительно к конкретным особенностям систем, в которых они проявляются, теория диссипативных динамических систем обладает высокой степенью общности и универсальности и в этом отношении напоминает такую мощную и выстроенную по определенному плану физическую теорию, как, например, термодинамика. Несомненно, что именно отсюда происходит в основном интерес к этой теории.

С самого начала необходимо проводить четкое различие между системами с трением и системами без трения, поскольку системы этих двух типов не приводят к одному и тому же классу задач. Наличие внутреннего трения (в самом широком смысле) влечет за собой существование *аттрактора*, т. е. асимптотического предела (при $t \rightarrow \infty$) решений, предела, на который не оказывает прямого влияния начальное условие — исходная точка. В механике, где трение приводит к постоянному убыванию энергии, соответствующие системы по этой причине принято называть *диссипативными*. Этим прилагательным мы будем пользоваться впредь применительно и к немеханическим системам.

Системы без трения, называемые *консервативными* или *гамилтоновыми*, представляют интерес и находят приложения в механике. В частности, к теории подобных систем относятся такие вопросы, имеющие неоспоримое практическое значение, как, например, эволюция солнечной системы и поведение плазмы в ускорителе. Исследование систем без трения требует своих специфических методов главным образом потому, что в отсутствие аттрактора начальное условие обретает решающее значение.

Среди больших нерешенных проблем классической физики турбулентность, несомненно, является старейшей. Как ни удивительно, но еще двадцать лет назад о турбулентности было известно немногим больше, чем в начале XIX века, когда Навье вывел уравнения, описывающие течение жидкости. Такое положение нельзя не признать совершенно необычным, если принять во внимание гигантский прогресс, достигнутый с тех пор в понимании структуры материи и Вселенной, тем более что гидродинамика была и остается областью науки, легко доступной для эксперимента: установки в гидродинамических лабораториях по своей сложности или стоимости не идут ни в какое сравнение с ускорителями, используемыми для исследования субатомных частиц! Несмотря на свою банальность, это замечание поднимает вопрос, который рано или поздно привлечет внимание историков науки, а именно вопрос о глубинных причинах (вызванных стечением обстоятельств или эпистемологического характера) относительного застоя в научной дисциплине, никогда не страдавшей от недостатка практической и экономической мотивации.

Как бы то ни было, но в 60-х годах нашего столетия ситуация начала существенно изменяться. Мы еще далеки, даже очень далеки от решения проблемы турбулентности, т. е. от того, чтобы дать точное объяснение турбулентности и механизмов ее возникновения. Тем не менее были развиты новые методы, позволившие осуществить анализ явлений, упорно не поддававшихся прежде научному описанию из-за кажущегося полного отсутствия в них какой-либо закономерности. Первым и наиболее важным было открытие *странных аттракторов*. Странный аттрактор был обнаружен численно в 1963 г. Э. Лоренцом, но математически понятие было сформулировано в 1971 г. Д. Рюэлем и Ф. Такенсом как ключевой элемент в понимании иррегулярного поведения, описываемого детерминистскими уравнениями главным образом в понимании турбулентности. Тем самым было положено начало исследованиям того, что теперь нередко называют *детерминированным хаосом*, первому этапу в анализе явлений, обладающих еще более сложной зависимостью от пространства и времени. Достигнутый прогресс ока-

зал благотворное влияние на многие области науки помимо гидромеханики.

Теперь, по прошествии примерно одного десятилетия после того, что можно было бы назвать существенным обновлением, настал подходящий момент для осмысления и выделения тех идей и методов, которые отныне должны стать неотделимой целью нашей научно-образовательной программы. Именно эту цель мы ставили перед собой, работая над этой книгой, отражающей, разумеется, наши педагогические вкусы и пристрастия. В силу этого наш выбор в ряде случаев произволен и поэтому уязвим для критики. Во-первых, спорен избранный нами метод изложения: мы неизменно стремились быть конкретными, иллюстрируя свои соображения при каждом удобном случае примерами, заимствованными из эксперимента. Кроме того, мы часто заменяли строгие математические доказательства, необходимость, а иногда и красота которых неоспорима, упрощенными вычислениями «на пальцах». Учитывая это, отсутствие формулировок теорем и лемм не следует относить за счет отсутствия строгости теории. Во-вторых, спорен наш выбор вопросов, подлежащих обсуждению: не претендуя на исчерпывающее изложение, мы ограничились рассмотрением диссипативных систем, наиболее широко распространенных в природе. Кроме того, мы не пытались систематически исследовать все вопросы, представляющие интерес, предпочитая нарисовать для читателя широкую панораму, которая была бы самосогласованной и доступной пониманию, несмотря на неполноту. Наконец, на уровне организации наша книга состоит из двух частей. Изложение основных понятий (гл. I—IV), аналитические методы (гл. III и IV), три экспериментальные ситуации (магнит, помещенный в магнитное поле, тепловая конвекция в слое жидкости, химическая реакция в открытой среде), приведенные в качестве иллюстраций (гл. V), включены в первую часть. Она называется «От порядка...» и посвящена в основном рассмотрению регулярных, в частности периодических, режимов. Описав средства исследования, мы используем их затем во второй части, само название которой «...К хаосу» говорит о ее содержании. Понятие странного аттрактора вводится самым прагматическим образом в гл. VI. Затем обсуждаются различные способы перехода от периодического режима к хаотическому: квазипериодичность (гл. VII), субгармонический каскад (гл. VIII), перемежаемость (гл. IX). Новые вопросы более специального или технического характера отнесены в приложения, чтобы избежать длинных экскурсов, прерывающих последовательный ход рассуждений. Краткий предметный указатель и избранная библиография завершают нашу книгу.

Любая книга, написанная с образовательными целями (а наша книга принадлежит к числу именно таких книг), не претендует на полный обзор литературы. В любом случае составление такого обзора было бы нелегкой задачей, поскольку излагаемый нами предмет уже насчитывает сотни статей и этот поток, далекий от исчерпания, с каждым днем становится все обильнее. Учитывая это, мы просто приводим несколько наиболее важных ссылок в дополнение к тем статьям, из которых нами были заимствованы результаты численных или натуральных экспериментов. Аналогично мы, как правило, не упоминали в тексте имена авторов, предпочитая сосредоточить основное внимание на научном содержании их работ. Мы даже не пытались проследить первоисточники различных основополагающих результатов. Мы лишь констатируем, что в целом 1) исследование динамических систем проводится совместными усилиями огромного числа выдающихся ученых, особенно математиков и физиков, усилий, предпринимаемых во всем мире; 2) французские ученые своими теоретическими и экспериментальными работами вносят достойный вклад в развитие этой области науки.

Если не считать нескольких изданий, рассчитанных на специалистов, не существует пока книги, посвященной элементарному изложению теории динамических систем, которая была бы доступна студентам. Наша книга, сколь бы далека она ни была от совершенства (впрочем, чего еще можно ожидать от книги, посвященной столь новой и бурно развивающейся области науки?), все же обладает, по нашему мнению, одним достоинством, поскольку представляет собой первую попытку восполнить указанный выше пробел в научной литературе. Наша цель будет достигнута, если, несмотря на все недостатки, предлагаемая вниманию читателя книга будет способствовать распространению идей и методов, развитых за последние годы для исследования детерминированного хаоса.

Мы выражаем глубокую благодарность Шанталь Помо, взявшей на себя труд по перепечатке рукописи, Жаку Муано, Бернару Озенде, Жослин Дюсотуар и Мадлен Порнеф, оказавшим различную помощь при подготовке рукописи.

Мы от души благодарим Анну-Мари Берже, Моник Дюбуа и Поля Манневия, которые своими замечаниями, критикой и предложениями позволили в ряде пунктов улучшить первоначальный текст; их вклад был весьма ценным для нас.

Давид Рюэль согласился написать предисловие, чтобы читатель мог рассматривать нашу книгу в должной перспективе. Мы признательны Д. Рюэлю за этот знак дружбы и уважения.

Бордо — Париж,
февраль 1984 г.

Пьер Берже, Ив Помо, Кристиан Видаль

ПРЕДИСЛОВИЕ ДАВИДА РЮЭЛЯ

В последние годы возникла новая область физики, которую называют по-разному: нелинейной физикой, теорией турбулентности или хаоса. Предмет ее необычайно широк и разнообразен и включает в себя гидродинамическую кинетику и исследование электронных цепей. Возникает вопрос: может ли существовать общий подход к столь, казалось бы, разнородным и сложным проблемам? Как показал тщательный анализ, временная эволюция таких систем имеет много общего, что и делает возможным единый подход к их исследованию. Мы имеем в виду не статистический или стохастический подход и не внешнее сходство явлений на описательном уровне. Внутренняя аналогия между сложными режимами в гидродинамике, химической кинетике, механике и электронике проявляется в экспериментально установленных деталях, которые стали известными лишь недавно. В основе замеченного сходства лежит глубокая математическая теория: современная теория нелинейных систем или, точнее, качественная теория дифференцируемых динамических систем.

Новая нелинейная физика занимается изучением интереснейших явлений: турбулентности и колебаний в физико-химических и биологических системах. Хаотические и причудливые, почти непредсказуемые внешние эффекты ныне уступают место неожиданной концептуальной унификации на основе таких понятий, как бифуркации, странные аттракторы, показатели Ляпунова и т. д. До сих пор удалось приподнять лишь краешек завесы и многие явления все еще остаются непонятными и необъяснимыми, хотя мы, по-видимому, уже вступили на путь, предсказанный в «Фейнмановских лекциях по физике»:

«Следующая эра пробуждения человеческого интеллекта вполне может породить метод понимания *качественного* содержания уравнений. Сегодня мы не в состоянии увидеть, что уравнения гидродинамики содержат такие вещи, как вихревая структура турбулентности, наблюдаемая между вращающимися цилиндрами. Сегодня мы не знаем, содержит ли уравнение Шрёдингера лягушек, сочинителей музыки и мораль или не

содержит. Мы не можем сказать, есть ли необходимость в чем-нибудь, помимо уравнения Шрёдингера, вроде Бога или такой необходимости нет. Пока каждый из нас может придерживаться как одной, так и другой точки зрения».

О нелинейных динамических системах можно было бы написать книгу с математическим уклоном. В книге, предлагаемой вниманию читателя — первой в своем роде — основное внимание уделяется физике и химии. Она написана теоретиком И. Помо и двумя экспериментаторами П. Берже и К. Видалем, принимающими активное участие в разработке новых идей. Они конкретно описывают важные динамические явления и то, как те или иные эффекты появляются в экспериментальной реальности, не вдаваясь в излишние математические детали. По прочтении этой книги физик, химик и физиолог смогут самостоятельно применять приобретенные знания при интерпретации явлений, встречающихся в изучаемой ими области. Они смогут также продолжить свое математическое образование, опираясь на заложенную прочную основу.

Давид Рюэль

ЧАСТЬ I

ОТ ПОРЯДКА ...

ВВЕДЕНИЕ. НЕМОНОТОННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ

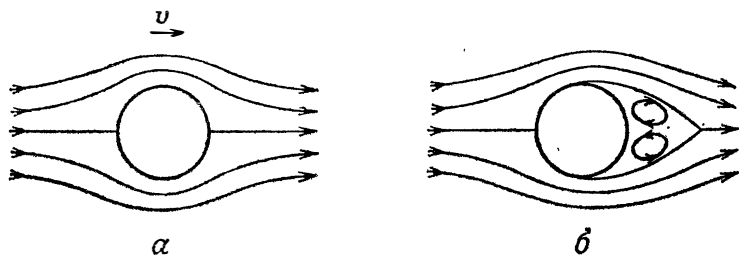
I. ОСЦИЛЛЯЦИИ, КОЛЕБАНИЯ, НЕМОНОТОННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ

Понятия осцилляций, или колебаний, играют важную роль при изучении динамики немонотонной эволюции, характеризующейся движением туда и обратно, регулярным или нерегулярным. Для этого имеются две причины. Прежде всего периодические явления необычайно широко распространены как в неорганическом мире, так и в живых организмах, что само по себе придает значимость исследованию периодических явлений. Кроме того, временную эволюцию любой величины с помощью преобразования Фурье можно представить в виде суммы периодических членов. Эти два обстоятельства, взятые вместе, делают периодическое движение краеугольным камнем любой теории, созданной для описания эволюции во времени. Отсюда непосредственно ясна та важная роль, которую играет осциллятор как архетип зависящего от времени режима. Не вдаваясь в детали, мы хотим лишь подчеркнуть во введении распространенность периодических явлений в окружающем нас мире. Несколько примеров, заимствованных из различных областей, послужат иллюстрациями, подкрепляющими правильность этого утверждения.

II. ПРИМЕРЫ — ОТ НЕОРГАНИЧЕСКОГО МИРА...

Напомним, что помимо простого маятника (к которому мы еще вернемся в гл. I) в различных областях физики существует несколько реализаций осциллятора. Приведем несколько известных примеров: груз, подвешенный на упругой пружине, традиционный колебательный контур и акустический резонатор Гельмгольца принадлежат к числу классических моделей, эволюция которых описывается дифференциальными уравнениями с периодическими решениями. Было бы неверно рассматривать эти элементарные осцилляторы как простые физические задачи, не имеющие реальной пользы или значения. Наоборот, осцилляторы находят многочисленные приложения в механике, электронике, электронике и акустике — перечень, как нетрудно видеть, достаточно внушительный. В промышленную эпоху осциллятор стал одной из основных компонент многих созданных человеком машин.

Упомянем также о колебательных, или осцилляторных, явлениях, которые возникают спонтанно. Анализ их проводится теми же методами, а важную роль, которую они играют в повседневной жизни, вряд ли можно преувеличить. Так, любое вращающееся устройство, будь то колесо, двигатель, винт, турбина и т. д., порождает колебания, которые могут нарушить его работу и даже привести к разрушению устройства; поэтому необходима тщательная балансировка двигателя или колес автомашины. Колебания валов и балок, обычно используемых в конструкциях (крыльев самолетов, мостов и т. д.), могут приводить



$$Re = \frac{v\phi}{\nu},$$

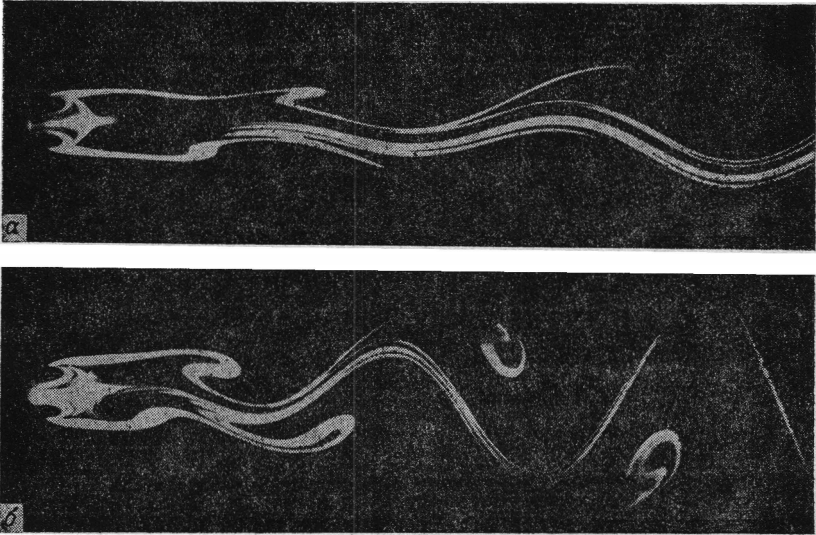
где ϕ — диаметр цилиндра, ν — кинематическая вязкость.

а — скорость очень мала: $Re \approx 10^{-2}$; б — скорость не очень мала и не очень велика: $Re \approx 20$.

к неприятным, а иногда и к катастрофическим последствиям. Так, после несчастного случая, происшедшего в 1831 г. близ Манчестера, ни одному воинскому подразделению не разрешается переходить через мост, маршируя в ногу, чтобы не возбуждать колебаний, которые могут разрушить мост. Наконец, упомянем колебания, возникающие в жидкой и газообразной среде, главным образом в воде и воздухе, которые могут вызывать потери энергии.

Прежде чем продолжать, опишем кратко одно колебательное явление в жидкостях. На рис. 1 схематически показаны линии тока вокруг помещенного в жидкость твердого тела в зависимости от относительной скорости v . Мы рассматриваем здесь просто стационарный цилиндр, ось которого перпендикулярна скорости v движущейся жидкости. При очень малых (рис. 1, а) и средних скоростях (рис. 1, б) линии тока стационарны, т. е.

остаются неизменными с течением времени. Но после того, как скорость превысит некоторый порог, рециркуляционные вихри в следе за цилиндром (рис. 1, б) становятся неустойчивыми. Стационарный режим исчезает, уступая место цепочке вихрей, вращающихся попеременно то в одну, то в другую сторону и



Снимок 1. След Бенара — Кармана. Цилиндр помещен в воздушный поток. Дым поступает в поток из двух щелей, параллельных образующим цилиндра. Визуализация движения частиц дыма в плоскости осуществляется плоским лазерным лучом, направленным вдоль оси потока (перпендикулярно оси цилиндра). а — $Re = Re_c = 2,4$; б — $Re = Re_c = 13,6$. Здесь Re — число Рейнольдса, отвечающее диаметру цилиндра (1 см), Re_c — критическое число Рейнольдса, при котором возникает неустойчивый след (экспериментальное значение $Re_c \approx 70$).

Взято из работы: *Mathis C. Propriétés des composantes de vitesse transverses dans l'écoulement de Bénard — von Karman aux faibles nombres de Reynolds.*

увлекаемых движущейся жидкостью. На снимке 1 показана мгновенная фотография такой конфигурации в следе за цилиндром, известной под названием вихревой дорожки Бенара — Кармана. Подчеркнем универсальный характер описываемых периодических явлений: о чем бы ни шла речь, будь то вихри за фермами моста, структура облаков, создаваемая ветром над островом Мадера, или вихри за Большим красным пятном на Юпитере, мы всегда обнаруживаем описанную выше дорожку Бенара — Кармана. Одно из следствий такого явления — звучание

так называемой «эоловой арфы», воспринимаемое непосредственно на слух. Когда из-за ветра вихри, образующиеся позади твердого тела, начинают периодически отрываться, на тело действует переменная сила, заставляющая его колебаться с частотой отрыва вихрей. При этом тело издает характерный звук, частота которого возрастает с увеличением скорости ветра. На рис. 2 показана запись такого ветрового шума. В зависимости

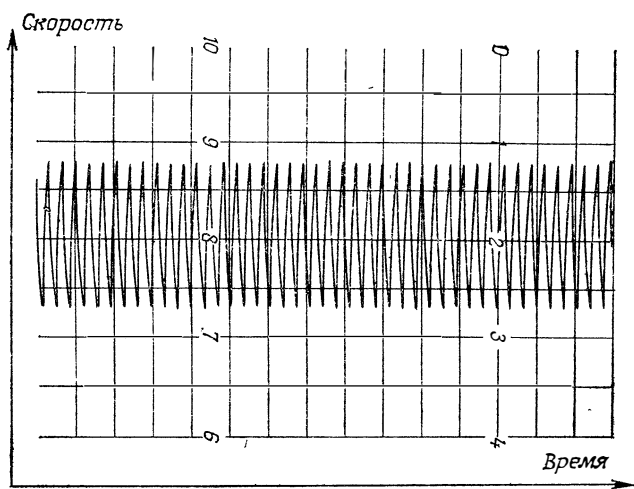


Рис. 2. «Шум» воздушного потока: изменение скорости течения воздуха во времени. Описание эксперимента см. в подписи к снимку 1, число Рейнольдса $Re = 72,9$ ($\phi_{\text{цил}} = 0,7$ см, $Re_c = 59,4$).

от обстоятельств звучание «эоловой арфы» может быть приятным (музыкальным) или, наоборот, резким и раздражающим (шум)¹⁾.

Помимо колебательных физических процессов менее известные осцилляторы встречаются в химии. Восстановительные реакции в кислой среде и горение в газовой фазе способны осциллировать во времени. То, что принято называть химическими осцилляторами, было впервые открыто случайно, однако это отнюдь не умаляет их концептуального значения²⁾. Их важ-

¹⁾ Поиск альтернативных источников энергии привел к проекту создания мощных ветряных двигателей — своего рода современных ветряных мельниц. Но, поскольку по самой своей природе ветровые установки — устройства весьма шумные и при работе слышны издали, возможность их сооружения довольно ограничена.

²⁾ Поведение колебательных химических систем удовлетворительно описывается дифференциальными уравнениями, выводимыми в термодинамике и других областях физики. Колебательные химические системы можно исследо-

ность подтверждается еще и тем, что, как будет показано в следующем разделе, существуют также биохимические и биологические осцилляторы, действие которых может быть лучше понято, если воспользоваться в качестве экспериментальных моделей химическими осцилляторами. Все это объясняет, почему с конца 60-х годов нашего столетия колебательные реакции в жидкой среде стали предметом весьма активного исследования. Их принято классифицировать по окислителю: иодату, бромату или хлориту. Восстановитель (чаще всего органическое соединение) и возможный катализатор могут варьировать в широких пределах, что открывает возможность для многочисленных комбинаций¹⁾.

III. ... ДО ЖИВОТНОГО МИРА

Химия приводит нас к биологическим системам, в периодическом поведении которых так много общего с периодическим поведением неживой материи. В биологических системах наблюдение и анализ периодических явлений находятся в центре внимания многих исследований. К числу таких явлений относятся биологические ритмы. Некоторые из них известны со времен античности: дыхание, сокращение сердечной мышцы, чередование бодрствования и сна, циклическое размножение у растений и т. д. Некоторые из биоритмов, получивших название экзогенных, возникают под воздействием циклических вариаций среды, в которой живет организм: времен года, лунных фаз, смены дня и ночи. Мы говорим о циркадных (с периодом около 24 часов) и цирканнуальных (с периодом около 365 дней) ритмах. Источник других ритмов находится на клеточном или метаболическом уровне. Такие ритмы получили название эндогенных. Их периоды заключены в диапазоне от нескольких долей секунды до 20—30 минут. Например, у млекопитающих наблюдаются колебания 1) некоторых гладких (желудок, кишечник, матка и т. д.) или полосатых (жестких) мышц, а также мышечных клеток в культуре; 2) центральной нервной системы (ЭЭГ), а также потенциала действия нейронов, ответственного за распространение нервных импульсов.

вать математически, в частности с точки зрения теории динамических систем, как это намечалось сделать мы. Кроме того, такие системы легко исследовать экспериментально в лабораторных условиях. Термодинамика необратимых процессов показывает, что второе начало не запрещает существование таких немонотонных режимов, как колебания, если рассматриваемая система достаточно далека от равновесия.

¹⁾ Выбрав химический осциллятор для иллюстрации некоторых аспектов, затрагиваемых в нашей книге, мы отсылаем читателя к разд. V. 4, где изложены дополнительные подробности на эту тему, все еще весьма мало известные вне узкого круга специалистов.

У животных и растений, а также у бактерий синтез белков и метаболическая активность, например гликолиз и фотосинтез,

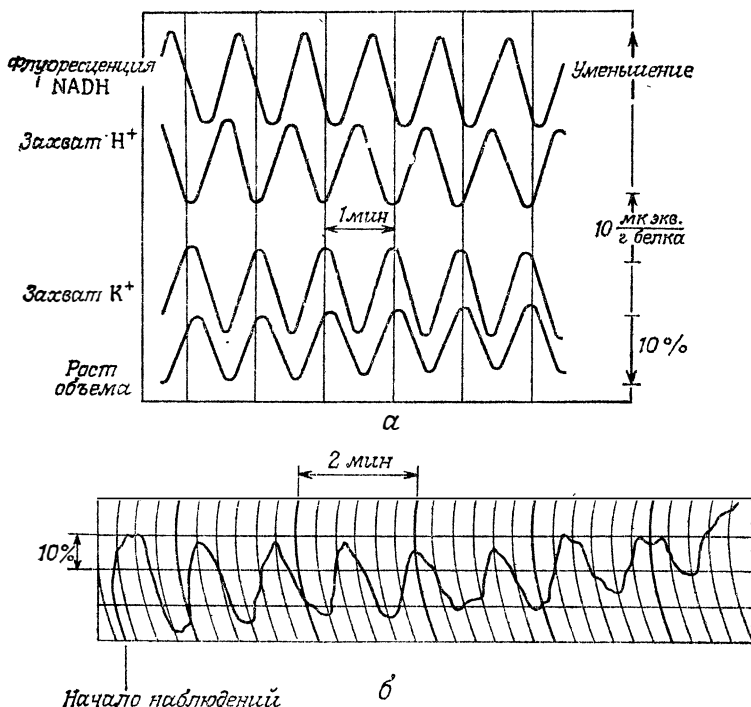


Рис. 3. Колебания в реакциях гликолиза. *а* — одновременная запись флуоресценции NADH (одной из компонент гликолитической цепи), захвата ионов H⁺ и K⁺ и увеличения объема популяции митохондрий, обнаруживающая вызванные гликолизом колебания.

Из работы: *Voiteux A., Hess B.* Oscillations in glycolysis, cellular respiration and communication. Faraday Symposium of the Chemical Society, 1975, в. 9, р. 202.

б — запись флуоресценции NADH *in vivo* от интактной клетки *Saccharomyces carlbergensis* через 2 мин после введения глюкозы.

Из работы: *Chance B., Williamson G., Lee Mela I. Y., De Vault D., Ghosh A., Pye E. K.* Synchronization phenomena in oscillations of yeast cells and isolated mitochondria. — In: Biological and Biochemical Oscillators. — Eds. *B. Chance, E. K. Pye, A. Ghosh, B. Hess.* — N. Y.: Academic Press, 1973, р. 285. Колебания в реакциях гликолиза наблюдаются *in vitro* (*а*) и *in vivo* (*б*) с периодом порядка 1 мин.

могут происходить в периодическом режиме. Пока из всех этих колебательных биохимических и биологических реакций наиболее известен и изучен гликолиз. Интерес к гликолизу понятен,

если учесть ту роль, которую эта последовательность ферментативных реакций играет в клеточном метаболизме¹⁾. Открытые в 1957 г. гликолитические колебания с тех пор неоднократно наблюдались *in vitro* и *in vivo*, что подтверждается, например, рис. 3. На этом рисунке показаны записи вариаций во времени некоторых свойств, главным образом флуоресценции одной из компонент гликолитической последовательности NADH:

в популяции митохондрий — клеточных органелл, образующих АТФ (рис. 3, а),

в изолированной интактной клетке *Saccharomyces carlsbergensis* (рис. 3, б).

Заметим, что период гликолитических колебаний в обоих случаях составляет величину порядка минуты.

Периодическими являются также развитие и рост многочисленных клеток и одноклеточных организмов. На другом уровне организации мы наблюдаем периодическое поведение некоторых популяций:

1) движение слизевиков, или миксомицетов (таких, как *Distyostelium discoideum*), собирающихся в спорангий, когда в среде, в которой они обитают, истощается запас питательных веществ и они не могут выжить порознь;

2) испускание света группами светляков;

3) развитие в противофазе многих пар хищник — жертва.

Из этого краткого обзора видно, что периодические режимы действительно распространены необычайно широко как на индивидуальном уровне — от клетки до целого организма, так и на уровне популяций.

IV. КЛЮЧ К АНАЛИЗУ: ОСЦИЛЛЯТОР

Поскольку колебательные явления встречаются столь часто, внутринаучный интерес к осциллятору вполне естествен. Но в действительности интерес к осциллятору простирается гораздо дальше, если в приведенный выше обзор мы включим всю немонотонную эволюцию, в которой колебания играют роль и притока, и неотъемлемой составной части. Мы уже упоминали о том, что преобразование Фурье²⁾ приводит к описанию произвольной эволюции (временной зависимости) как к алгебраической сумме периодических членов. Именно поэтому прежде, чем

¹⁾ Напомним, что гликолиз является важным путем распада глюкозы, на котором происходит восстановление молекул АТФ (можно сказать, «горючего» клеточного «мотора») из молекул АДФ. Таким образом, гликолиз составляет существенную часть процесса превращения энергии в клетке.

²⁾ См. гл. III.

мы сумеем построить любую теорию зависящих от времени явлений, нам необходимо понять, как происходят колебания. Это объясняет, почему наиболее ценные аналитические идеи естественно приводят к рассмотрению такого элементарного осциллятора, как маятник, изучению которого посвящена первая глава нашей книги. Мы видим, что выбор такой исходной точки не является произвольным и не продиктован чисто педагогическими соображениями. Его настоятельно требует природа рассматриваемой проблемы — немонотонное поведение во времени, или немонотонная эволюция.

**СВОБОДНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР, ОСЦИЛЛЯТОР
С ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛОЙ**

I. 1. СВОБОДНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

I. 1.1. Уравнение простого маятника без трения

Простой маятник, пожалуй, самый известный пример свободного осциллятора. Это масса m в гравитационном поле ускорения g , подвешенная в точке O на жесткой проволоке длиной l (рис. I. 1). Эта масса колеблется в вертикальной плоскости. Две точки на вертикальной прямой, проходящей через точку подвеса O , являются точками равновесия, из них R устойчивая, а R' неустойчивая. Если $\theta(t)$ — угол в момент времени t между проволокой и вертикалью OR , то основной закон механики приводит к уравнению

$$F = ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta,$$

т. е.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (1)$$

Следует иметь в виду, что уравнение (1) предполагает идеализацию описанного выше устройства. В частности, неявно предполагается, что масса имеет точечные размеры, отсутствует трение, а различные характеристики маятника постоянны¹⁾.

При малых углах θ , при которых $\sin \theta \approx \theta$ (линейная аппроксимация), уравнение (1) легко интегрируется при заданных начальных условиях, и мы получаем классический результат:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \cos(\omega t + \phi), \\ \omega &= \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \end{aligned}$$

где ω — угловая частота, T — период, ϕ — фаза.

Такое движение точно периодическое: это изохронные малые колебания, используемые в часовых механизмах.

¹⁾ Существует естественная связь между геометрией и механикой: первая отражает абстрактные, а вторая — конкретные аспекты многочисленных общих понятий, таких, как движение, кривая, траектория и т. д. Мы предполагаем, что читателю известно это глубокое эпистемологическое различие, восходящее к Декарту.

Рассмотрим проблему с более общей точки зрения, а именно попытаемся определить, какая информация необходима для полного описания мгновенного состояния маятника. Ясно, что для этого необходимо и достаточно знание двух величин: положения

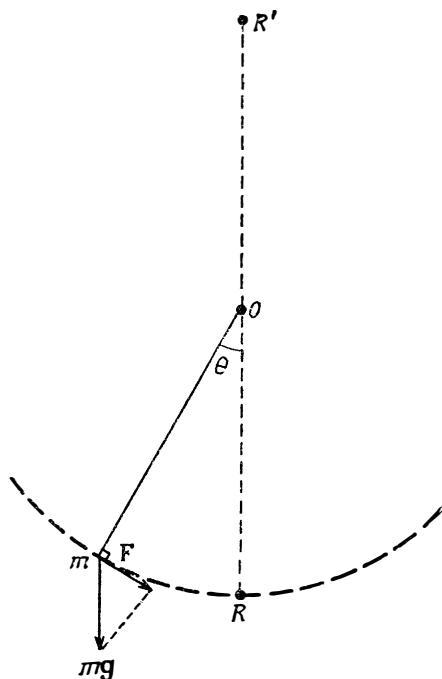


Рис. I. 1. Простой маятник. Масса m подвешена в гравитационном поле g на одном конце жесткой проволоки, другой конец которой закреплен в точке O . Движение происходит по окружности, на которой имеются две точки равновесия R и R' . Одна из точек равновесия (R') расположена над точкой O , другая (R) — под точкой O . В отличие от состояния покоя R точка R' соответствует неустойчивому состоянию равновесия. Обычно состояние маятника описывают с помощью таких переменных, как угол θ и мгновенное значение его производной $\dot{\theta} = d\theta/dt$.

$\theta(t)$ и скорости $d\theta/dt = \dot{\theta}$. Следовательно, вместо интегрирования уравнения (1) можно просто представить решение на плоскости с прямоугольной системой координат $(\theta, \dot{\theta})$. В рассматриваемом нами идеальном случае решением является замкнутая кривая, т. е. орбита, на плоскости. На практике такого рода представление играет существенную роль во всех исследованиях динамики по следующей простой причине: такое представление служит альтернативой в тех случаях, когда аналитическое ин-

тегрирование дифференциальных уравнений оказывается невозможным. Именно поэтому мы будем часто использовать такое представление.

В общем случае мы можем определить *фазовое пространство* — пространство, в котором осями координат служат положение и скорость ¹⁾, и *фазовую траекторию* — кривую в фазовом пространстве, описывающую эволюцию системы. Совокупность фазовых траекторий образует *фазовый портрет*. Другим важным понятием является *степень свободы*, по-разному определяемая. Под степенью свободы по определениям понимается либо каждая пара координат положение — скорость, связанная с перемещением, либо только один из двух элементов — положение или скорость.

Таким образом, система N тел, способных свободно двигаться по трем пространственным направлениям, обладает либо $3N$, либо $6N$ степенями свободы в зависимости от принятого определения. Число степеней свободы соответствует числу начальных условий, которые могут быть выбраны независимо, и поэтому действительно близко к этимологии выражение «степень свободы». В рассматриваемом нами примере осциллятора начальное положение и скорость являются двумя величинами, которые могут быть заданы произвольно, поэтому мы говорим, что маятник — это система с двумя степенями свободы, фазовое пространство которой двумерно.

1.1.2. Описание движения в фазовом пространстве

Применим приведенные выше определения и понятия к исследованию нелинейного уравнения (1). В каждой точке на фазовой плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ это уравнение определяет ориентацию касательной к траектории. Следовательно, фазовую траекторию, по крайней мере в принципе, можно построить методом последовательных приближений ²⁾. В рассматриваемом нами примере важное упрощение происходит от того, что величина $E(\theta, \dot{\theta})$, определяемая соотношением

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos \theta),$$

есть интеграл движения. Действительно,

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta \right) \dot{\theta} \equiv 0.$$

¹⁾ Точнее, импульс (см. разд. 1.2.1).

²⁾ Мы будем использовать метод последовательных приближений в большинстве случаев, в частности всякий раз, когда не будем знать, как интегрировать уравнение движения.

Заметим, что с точностью до множителя размерности ml эта величина есть не что иное, как энергия маятника, которую принято считать равной нулю в состоянии покоя (в точке R на рис. I. 1):

$$E(0, 0) = 0.$$

Следовательно, траектории, удовлетворяющие уравнению (1), являются кривыми постоянной энергии, или контурами энергии E , на фазовой плоскости. Так как энергия E — периодическая

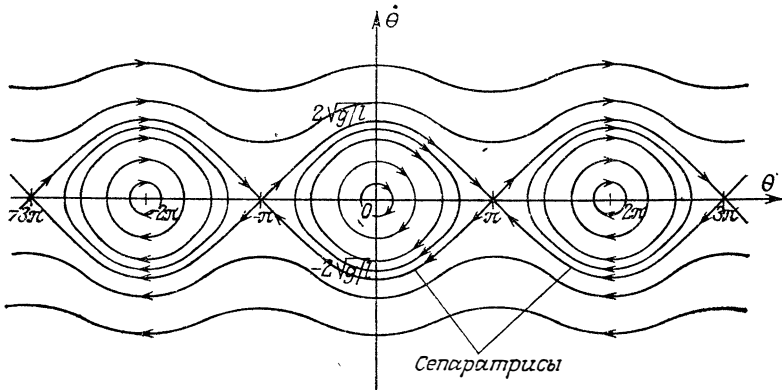


Рис. I. 2. Фазовый портрет простого маятника. Кривые на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ — линии постоянной энергии маятника. Картина периодична по оси θ ($\text{per} \text{iod } 2\pi$). В области применимости линейного приближения (1) линии постоянной энергии принимают форму окружностей с центрами в точках $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \pm 2n\pi$, где n — целое число. Такие кривые соответствуют колебаниям, период которых не зависит от амплитуды (изохронизм малых колебаний). При больших значениях энергии окружности переходят в овалы и период начинает зависеть от амплитуды. Когда энергия становится больше $2g/l$, колебания сменяются непрерывным вращением вокруг точки O . Каждая из двух кривых, отделяющих область колебаний от области вращений, называется сепаратрисой. Стрелки указывают направление движения по времени.

функция угла θ (с периодом 2π), траектории достаточно построить в области

$$\theta \in [-\pi, +\pi], \quad \dot{\theta} \in (-\infty, +\infty).$$

Чтобы подчеркнуть это свойство, на рис. I. 2 траектории показаны в более широкой области значений θ . Здесь уместно сделать несколько замечаний относительно рис. I. 2. Окружность с центром в точке $\theta = 0$ (или при более общем подходе в точке $\theta \pm 2n\pi$, где n — целое число) соответствует изохронным колебаниям, период которых, как было показано в предыдущем разделе (в линейном приближении), не зависит от амплитуды и

массы. Такие колебания отвечают наименьшим значениям энергии. В отличие от этого в нелинейной области период колебаний возрастает с увеличением амплитуды (и соответственно энергии). Соотношение между периодом T и энергией E имеет вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\frac{lE}{g}\right).$$

Функция $F(lE/g)$ есть эллиптический интеграл, который расходится, когда мы приближаемся к *сепаратрисе*, т. е. контуру энергии, проходящему через неустойчивые точки равновесия маятника с координатами $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \pm(2n + 1)\pi$ (верхнее положение маятника — точка R' на рис. 1.1). На этой сепаратрисе энергия равна $2g/l$, а период бесконечен. Априори это второе свойство может показаться несколько курьезным и даже парадоксальным, хотя в действительности лишь отражает тот факт, что маятнику требуется бесконечно много времени для достижения неустойчивого состояния равновесия, когда имеющаяся энергия в точности равна энергии, необходимой для достижения точки R' .

При любом значении E , превышающем $2g/l$, существуют две возможные траектории, симметричные относительно оси θ . Они соответствуют вращению маятника вокруг точки O либо в одном, либо в другом направлении.

1.1.3. Каноническая форма уравнений движения

Уравнение (1) нетрудно преобразовать в два дифференциальных уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \\ \frac{dp_\theta}{dt} &= \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (2)$$

где p_θ — угловой момент:

$$p_\theta = l\dot{\theta},$$

а H — гамильтониан, или функция Гамильтона, маятника. Нетрудно видеть, что

$$E(\dot{\theta}, \theta) = H(p_\theta, \theta) = \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{l^2} + \frac{q}{l} (1 - \cos \theta).$$

Переменные θ и p_θ канонически сопряжены в смысле Гамильтона — Якоби. Так как

$$\frac{d}{dt} H(p_\theta, \theta) = \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p}_\theta + \frac{\partial H}{\partial \theta} \dot{\theta} = 0,$$

энергия остается постоянной при движении. (К такому заключению мы пришли в предыдущем разделе.) Это свойство позволяет отнести маятник к классу *консервативных* (или *гамильтоновых*) систем, для которых характерна инвариантность энергии.

1.2. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

1.2.1. Закон сохранения энергии

Вывод, к которому мы пришли относительно простого маятника, имеет гораздо более широкое применение. Классическая механика показывает, что теоретически возможно описать поведение любой системы без диссипации с помощью функции Гамильтона H , которая зависит от обобщенных пространственных координат (обозначааемых через q_i), обобщенных канонически сопряженных импульсных координат (обозначааемых через p) и, возможно, времени¹⁾:

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t).$$

С помощью принципа наименьшего действия мы устанавливаем, что эта функция удовлетворяет системе $2n$ дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, n;$$

частным случаем является система уравнений (2). Нетрудно убедиться, что, когда H не зависит явно от времени,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0,$$

откуда $H(q, p) = E = \text{const}$.

Таким образом, все системы, описываемые не зависящим от времени гамильтонианом, например простой маятник [уравнение (1)], консервативны.

1.2.2. Сохранение площадей в фазовом пространстве

Из сохранения энергии следует одно очень важное свойство: сохранение площадей в фазовом пространстве. Исходя из уравнений (3), можно доказать, что площадь элемента поверхности

¹⁾ Ниже мы приводим без доказательств краткий обзор наиболее существенных понятий и результатов механики, которые читатель найдет в любом учебнике.

$\delta q_i \delta p_i$ фазовой плоскости сохраняется при движении, если H не зависит явно от времени¹⁾. Что следует из такого результата? Рассмотрим сначала случай, когда имеется только одна пара канонических сопряженных переменных (q, p) . Предположим, что имеется множество точек, заполняющих поверхность $\sigma(0)$ в окрестности начальной точки. В любой последующий момент времени эти точки заполняют поверхность $\sigma(t)$, такую, что $\sigma(t) \equiv \sigma(0)$ (в соответствии с упомянутым выше свойством).

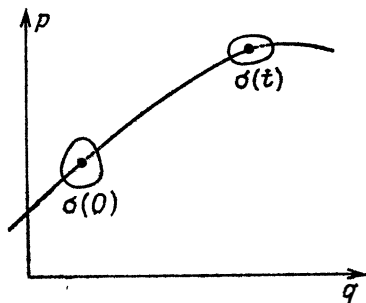


Рис. 1.3. Сохранение площади в фазовом пространстве (p, q) . Элемент площади $\sigma(0)$, который можно рассматривать как множество начальных условий, вследствие движения преобразуется в другой элемент, площадь которого равна $\sigma(t)$. Если система консервативна, то элемент $\sigma(t)$ при любых значениях t имеет такую же площадь (но не обязательно такую же форму), как и исходный элемент $\sigma(0)$.

Для того чтобы это равенство выполнялось, расстояние между соседними траекториями должно оставаться почти постоянным (рис. 1.3). Но это не требуется при более высоких размерностях. Коль скоро существуют по крайней мере две пары канонически сопряженных переменных $(q_1, p_1; q_2, p_2)$, движение происходит по энергетической поверхности²⁾

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E = \text{const.}$$

¹⁾ За доказательством этого свойства, достаточно простым, но сравнительно длинным, мы отсылаем читателя к курсам механики. Понятие «площадь» подлежит обычному обобщению и замене понятием меры двумерной поверхности. Две канонически сопряженные переменные q_i и p_i изменяются на плоскости, а элемент площади $\delta p_i \delta q_i$ сохраняется в силу уравнений (3). Множество начальных условий, занимающее поверхность меры σ на плоскости (q_i, p_i) , будет занимать поверхность такой же меры в процессе эволюции. Это свойство гамильтоновых систем гораздо более ограничительно, чем просто сохранение энергии или обратимость уравнений движения. Оно влечет за собой сохранение объема в фазовом пространстве, так как элемент объема равен произведению элементов площади каждой пары сопряженных переменных. Фазовое пространство имеет в этом случае четную размерность.

²⁾ Эта поверхность эквивалентна линиям уровня простого маятника. Следовательно, она (по крайней мере локально) может быть отображена на обычное пространство \mathbb{R}^3 .

Так как площадь множества данных начальных условий $\delta q_i \delta p_i$ сохраняется во времени, расстояние между начальными точками не может убывать, поскольку в противном случае площадь убывала бы со временем. Но сохранение площади может быть гарантировано одним из двух способов:

1) либо, как прежде, элемент поверхности переносится вдоль траектории по существу без деформации, 2) либо он экспоненциально удлиняется со временем, т. е. как $e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$, в одном направлении и экспоненциально сжимается, как $e^{-\lambda t}$, в перпендикулярном направлении. Так как $e^{\lambda t} e^{-\lambda t} \equiv 1$, площадь во втором случае также сохраняется.

Если при первой гипотезе две траектории, близкие первоначально, остаются близкими при любом t , то при второй гипотезе они стремятся разойтись экспоненциально. Подчеркнем, что с динамической точки зрения различие существенно: в первом случае траектории *устойчивы*, в то время как во втором случае они *неустойчивы*, так как малое начальное расхождение очень быстро усиливается со временем.

1.2.3. Инвариантность уравнений относительно обращения времени

Еще одно важное свойство уравнения (1) и более общих уравнений (3) состоит в том, что на них никак не сказывается изменение знака времени (замена $+t$ на $-t$). В нашем конкретном примере это означает, что кинофильм о движении маятника можно прокручивать как в одну, так и в другую сторону без сколько-нибудь заметного различия. Именно поэтому говорят, что динамика консервативных систем *обратима*.

Чтобы понять особую природу обращения времени, следует иметь в виду одно обстоятельство: оно не является свойством большей части наблюдаемой нами эволюции во времени. Если мы пускаем в правильную или в обратную сторону кино- или телефильм, то зритель через несколько секунд замечает различие: волны движутся от берега, дым втягивается в сигареты и т. д. Следовательно, инвариантность относительно обращения времени отнюдь не является общим свойством. Она характерна для консервативных систем и отражает тот факт, что фундаментальные физические законы, заключенные в уравнениях (3)—инерция, гравитация,—одного и того же рода. Как мы увидим в дальнейшем, необратимость возникает, если энергия рассеивается вместо того, чтобы сохраняться.

С точки зрения фазового пространства ясно, что сохранение площадей остается в силе при обращении времени. Аналогично устойчивые траектории остаются устойчивыми: независимо от

того, в каком направлении течет время, они не расходятся. В отличие от этого если площадь сохраняется за счет удлинения в одном направлении и сокращения в перпендикулярном направлении, то обращение времени приводит к тому, что эти два направления обмениваются характером устойчивости: первоначально устойчивое направление (сжатия) становится неустойчивым (направлением растяжения), и наоборот.

1.3. ОСЦИЛЛЯТОР С ЗАТУХАНИЕМ

1.3.1. Диссипация энергии при трении

Как мы видели в разд. I. 1, описание свободного осциллятора было получено путем идеализации простого маятника. В частности, мы пренебрегли всеми видами трения — трением проволоки и массы о воздух, а также трением в точке подвеса O . На практике движение реального маятника всегда ¹⁾ прекращается из-за трения: амплитуда колебаний со временем неумолимо убывает. Это весьма общее явление рассеяния, или диссипации, энергии необходимо учесть в математическом описании. Если говорить более конкретно, то уравнение (1) необходимо модифицировать. Простое замечание поможет понять, в каком направлении следует действовать. Мы подчеркивали, что уравнение (1) инвариантно относительно обращения времени. Но механизм затухания нарушает это свойство, так как приводит в конце концов к прекращению колебаний. Следовательно, необходимо нарушить инвариантность относительно обращения времени.

1.3.2. Уравнение для осциллятора с затуханием

Проще всего это сделать, добавив к уравнению (1) член, пропорциональный производной какого-нибудь нечетного порядка, например первую производную, от угла θ . Тогда в линейном приближении получаем

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0, \quad (4)$$

где γ — коэффициент затухания, $\omega^2 = g/l$ — квадрат угловой частоты.

В результате мы приходим к линеаризованному уравнению маятника с затуханием. Как показывает опыт, это уравнение

¹⁾ Говоря так, мы исключаем случайное движение маятника под действием тепловых флуктуаций. В наших масштабах это вполне оправданно в силу того, что постоянная Больцмана очень мала.

дает удовлетворительное описание в случае трения типа «трение в жидкости»¹⁾). Рассмотрим более подробно эволюцию энергии в этом случае:

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2),$$

так как (по предположению, необходимому для линеаризации) $1 - \cos \theta \approx (\theta^2/2)$.

Используя уравнение (4), мы видим, что

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma\dot{\theta}^2.$$

Таким образом, энергия сохраняется, если $\gamma = 0$ (трение отсутствует), и убывает, если $\gamma > 0$. Так как по определению $E \geq 0$, энергия стремится к нулю. Следовательно, состояние с нулевой энергией (состояние покоя) устойчиво, поскольку маятник с необходимостью эволюционирует к этому состоянию.

Забудем теперь, как мы вывели уравнение (4), и сосредоточим внимание на его внутренних свойствах. Заметим, что если $\gamma < 0$, то энергия E априори неограниченно возрастает, разумеется, за исключением того случая, когда исходным является состояние покоя (в этом случае из $\theta = \dot{\theta} = 0$ следует, что $dE/dt = 0$). Но состояние покоя неустойчиво, так как малейшее смещение маятника из состояния покоя со временем только усиливается.

I. 3.3. Фазовый портрет

Решениями уравнений (4) являются траектории, касающиеся в каждой точке вектора локальной скорости, две компоненты которого ($x = \theta$, $y = \dot{\theta}$) по определению удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{\theta} = y, \\ \frac{dy}{dt} &= \ddot{\theta} = -\gamma\dot{\theta} - \omega^2\theta = -\gamma y - \omega^2 x. \end{aligned}$$

Пользуясь математической терминологией, можно сказать, что траектории являются силовыми линиями такого векторного

¹⁾ Сила такого трения пропорциональна скорости. Примеры:

1) маятник с плотностью груза, во много раз превышающей плотность жидкости, в которую он погружен (таков, в частности, обычный маятник в воздухе);

2) электрический колебательный контур, демпфируемый сопротивлением цепи.

Существует также другая разновидность трения — «трение твердых тел». Включить его в уравнения гораздо труднее, в основном из-за эффектов гистерезиса.

поля. Существенно, что через каждую точку, кроме особых точек, в которых векторное поле не определено, проходит только одна силовая линия. Начало координат ($\theta = \dot{\theta} = 0$) — единственная особая точка на плоскости (только в ней обе компоненты скорости равны нулю).

Мы уже видели (рис. 1.2), что при $\gamma = 0$ траектории образуют непрерывное семейство замкнутых кривых, охватывающих точку равновесия $\theta = \dot{\theta} = 0$. Если $\gamma \neq 0$, то такое семейство кривых трансформируется в множество траекторий, которые либо сходятся к началу координат, либо расходятся из него в зависимости от знака: $\gamma > 0$ или $\gamma < 0$. Покажем, что при слабом затухании, т. е. когда $|\gamma| \ll \omega$, эти траектории имеют форму спиралей. Действительно, при малом коэффициенте затухания γ временная эволюция угла θ не может сильно отличаться от эволюции при $\gamma = 0$. Следовательно, в качестве первого приближения мы можем положить

$$\theta \approx \rho(t) \cos(\omega t + \phi),$$

где $\rho(t)$ — функция времени, медленно изменяющаяся по сравнению с периодом $T = 2\pi/\omega$. Используя это приближенное выражение, вычислим среднее изменение энергии за один период двумя способами. Во-первых, проинтегрируем мгновенное изменение энергии:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\frac{dE}{dt} \right) dt = -\gamma \bar{\theta}^2.$$

Пренебрегая малым изменением функции ρ за один период, получаем

$$\bar{\theta}^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \rho^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) dt = \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2,$$

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = -\frac{1}{2} \gamma \rho^2 \omega^2.$$

Во-вторых, воспользуемся тем, что в том же приближении энергия имеет значение

$$E = \frac{1}{2} [\rho^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \rho^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2,$$

а ее среднее изменение за период определяется выражением

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \overline{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho^2 \omega^2 \right)} = \frac{1}{2} \omega^2 \overline{\frac{d\rho^2}{dt}}.$$

Комбинируя эти два результата, мы видим, что за период

$$\frac{d\rho^2}{dt} = -\gamma\rho^2.$$

Если коэффициент затухания γ очень мал по сравнению с ω , то, интегрируя это соотношение по времени, получаем

$$\rho^2(t) = \rho^2(0) \exp(-\gamma t).$$

Таким образом мы вывели параметрическое уравнение траекторий на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$:

$$\theta \approx \rho(0) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \cos(\omega t + \phi),$$

$$\dot{\theta} \approx -\rho(0) \omega \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \sin(\omega t + \phi).$$

Это уравнение описывает спирали, закручивающиеся ($\gamma > 0$) или раскручивающиеся ($\gamma < 0$), и окружности ($\gamma = 0$). Напомним, что мы используем здесь линейное приближение [уравнение (4)].

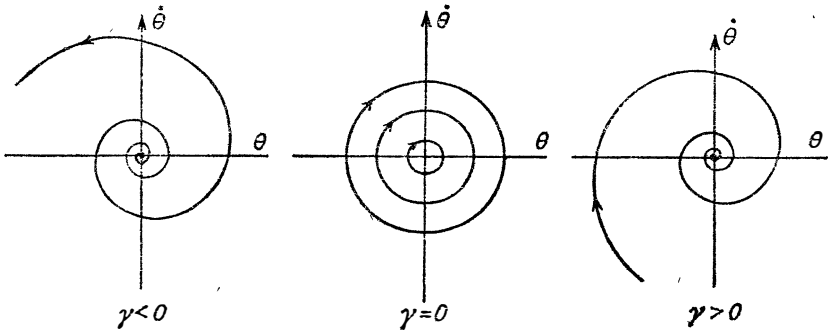


Рис. 1.4. Фазовый портрет уравнения (4) вблизи начала координат. При $\gamma = 0$ ситуация такая же, как в случае простого маятника в линейном приближении, поэтому мы получаем семейство окружностей с центром в начале координат. Если же $\gamma \neq 0$, то траектории имеют форму спиралей, раскручивающихся из начала координат ($\gamma < 0$, усиление) или сходящихся к началу ($\gamma > 0$, затухание). Чтобы не загромождать чертеж, для каждого из этих двух случаев изображена только одна спираль.

На рис. 1.4 схематически показаны фазовые портреты которые получаются в каждом из этих трех случаев.

Заметим, что при любом значении γ начало координат является особой точкой, соответствующей стационарному решению уравнения движения. Это стационарное решение устойчиво при $\gamma > 0$ и неустойчиво при $\gamma < 0$, так как в первом случае все траектории сходятся к нему, а во втором расходятся от него. При $\gamma = 0$ говорят, что начало координат обладает *нейтральной*

устойчивостью, поскольку смещения не усиливаются, и не затухают со временем.

При $\gamma > 0$ все траектории на фазовой плоскости заканчиваются в начале координат, которое поэтому называется притягивающей точкой или *аттрактором*. Это фундаментальное понятие, допускающее немедленное обобщение на случай многообразий более высоких размерностей (кривых, поверхностей и т. д.). Мы неоднократно будем использовать понятие аттрактора.

1.4. ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

1.4.1. Существенные свойства

Осциллятор с затуханием служит типичным примером диссипативной системы. Динамические свойства диссипативных систем во многих отношениях противоположны свойствам консервативных систем. Мы можем вернуться к соображениям, рассмотренным в разд. 1.2. Для диссипативных систем, вообще говоря, не существуют гамильтонианы, не зависящие от времени¹⁾; следовательно, энергия не сохраняется. С другой стороны, в определенных случаях существует функция динамических переменных, называемая *функцией Ляпунова*, которая положительна и монотонно убывает со временем (обуславливая тем самым необратимость). Такая функция Ляпунова существует не всегда. Диссипативные системы могут обладать гораздо более сложным эволюционным режимом, чем просто затухание, в особенности если динамика включает в себя и эффекты затухания, и механизмы, поддерживающие движение. Во всяком случае если существует диссипация, то уравнения движения изменяются при обращении времени; эволюция диссипативных систем не является обратимой. Наконец, нельзя не упомянуть еще об одном важном обстоятельстве: площади в фазовом пространстве диссипативных систем не сохраняются.

1.4.2. Сжатие площадей в фазовом пространстве

В свете того, что нам уже известно, это свойство является почти очевидным. Обратимся, например, снова к рис. 1.4 и рассмотрим «настоящее» трение ($\gamma > 0$). Ясно, что при таком движении не может сохраняться элемент поверхности $\delta\theta \cdot \delta\dot{\theta}$, так как все траектории, которые проходят через него, заканчиваются в начале координат. Мы встречаемся здесь со свойством,

¹⁾ Увеличивая число степеней свободы, диссипативную систему всегда можно погрузить в «объемлющую» гамильтонову систему. Но этот искусственный прием не приносит сколько-нибудь существенной пользы при исследовании диссипативных систем.

характерным для диссипативных систем: площадь любого множества начальных условий в среднем уменьшается во времени. Это свойство часто выражают, утверждая, что поток в фазовом пространстве сжимает площади.

Приводимые далее в нашей книге несколько примеров показывают, что такое сжатие происходит по-разному. Однако было бы неверно думать (и этой ошибки следует избегать), будто сокращение площадей непременно означает сокращение длин.

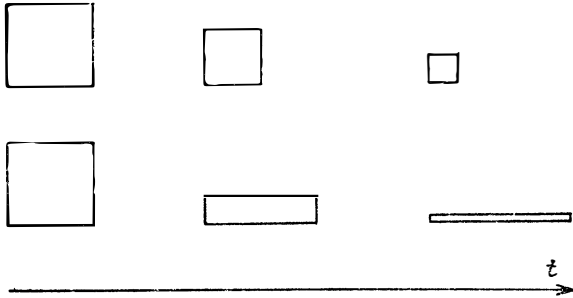


Рис. I. 5. Два разных случая сжатия площадей. В первом ряду (по горизонтали) длина и ширина уменьшаются одновременно и одинаково. Во втором ряду ширина возрастает, но высота убывает быстрее. И в первом, и во втором случае площадь убывает в одном и том же темпе. Таким образом, уменьшение площади в фазовом пространстве отнюдь не обязательно означает, что все размеры области уменьшаются.

В действительности все обстоит совсем не так. Результат здесь полностью аналогичен результату, упомянутому в разд. I. 2.2: площади могут сохраняться и в том случае, если расхождение траекторий в одном направлении компенсируется их сближением в другом направлении. Аналогично в рассматриваемом случае сокращение площадей может быть достигнуто не только за счет сокращения *всех* длин, но и за счет уменьшения одних длин, сопровождаемого менее быстрым увеличением других длин.

Простая схема на рис. I. 5 иллюстрирует обе указанные возможности (причем в качестве начального элемента поверхности выбран квадрат).

Это замечание очень важно для понимания того, что расхождение траекторий по некоторым направлениям остается возможным даже в случае диссипативной системы. Разумеется, знание того, как именно происходит сжатие площадей, и его скорости существенно для завершения динамического описания. В этом одна из причин важности и полезности якобиана¹⁾.

¹⁾ См. приложение Д.

ОСЦИЛЛЯТОР С ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛОЙ, ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

II.1. ОСЦИЛЛЯТОР ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛЫ

II.1.1. Уравнение Ван дер Поля

Каким должно быть подходящее описание поведения осциллятора с вынуждающей силой? Во введении мы упоминали о том, что в природе существуют многочисленные примеры осцилляторов с вынуждающей силой. Ясно, что уравнение (4) не подходит для этой цели и не только из-за затухания. У этого уравнения имеются два других недостатка. Один из них состоит в том, что в случае $\gamma < 0$ энергия маятника неограниченно возрастает, а это не имеет физического смысла. Другим недостатком уравнения (4) является то, что если $\theta(t)$ — решение, то любое произведение $\alpha\theta(t)$ также есть решение при любом вещественном α , поскольку уравнение (4) линейно по θ . Ясно, что такая инвариантность относительно растяжения несовместима с существованием колебаний, обладающих заданной амплитудой. Следовательно, для случая осциллятора с вынуждающей силой уравнение (4) надлежит изменить так, чтобы:

- 1) нарушить инвариантность относительно растяжения,
- 2) ограничить рост энергии при $\gamma < 0$,
- 3) ввести непрерывный источник энергии¹⁾, компенсирующий потери на вязкое затухание при $\gamma > 0$.

Приняв это за отправной пункт, Ван дер Полю заметил, что математически простое изменение состоит во введении коэффициента трения γ , зависящего от амплитуды θ колебаний.

¹⁾ Практическая реализация стационарного движения маятника имела большое историческое значение, так как была необходима для усовершенствования механических часов и, следовательно, для точного измерения времени. Физику Гюйгенсу мы обязаны изобретением храпового колеса — устройства, регулирующего ход маятника. Восемнадцатый век стал свидетелем развития крутильного маятника — спирали, регулирующей ход механических наручных часов, в которых колебания поддерживаются пружинным механизмом. В наше время появление электроники привело к созданию автоколебательных цепей с частотой, стабилизируемой колебаниями пьезоэлектрического кварца. Такие же цепи настраиваются на колебания с частотами, связанными с разностями между энергетическими уровнями атомов соотношением Планка ($\Delta E = h\nu$). Это позволяет создавать атомные часы с необычно высокой точностью хода ($\approx 10^{-13}$ с). В качестве конкретной иллюстрации приведем такой пример: чтобы показания двух атомных часов разошлись всего лишь на секунду, нам потребовалось бы ждать около 300 000 лет.

Сделав так, чтобы параметр γ был отрицательным при малых амплитудах и положительным при больших, мы достигнем желаемой цели. Так как существенна только абсолютная величина, а не знак амплитуды, естественно выбрать зависимость $\gamma(\theta)$ от θ^2 . Простейшее возможное выражение, удовлетворяющее всем условиям, имеет вид

$$\gamma(\theta) = -\gamma_0 \left[1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right],$$

где $\gamma_0 > 0$, θ_0 — исходная амплитуда. Тогда

$$\gamma < 0 \quad \text{при} \quad \theta^2 < \theta_0^2,$$

$$\gamma > 0 \quad \text{при} \quad \theta^2 > \theta_0^2.$$

Подставляя наше выражение в уравнение (4), получаем так называемое уравнение Ван дер Поля¹⁾

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \gamma_0 \left[1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right] \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0.$$

Оно описывает поведение осциллятора с вынуждающей силой, в котором колебания с малой амплитудой усиливаются, а колебания с большой амплитудой затухают. Полезно привести это уравнение к безразмерному виду, выбирая $\theta_0 \sqrt{\omega/\gamma_0}$ за единицу амплитуды и $1/\omega$ — за единицу времени. Исходное уравнение Ван дер Поля переходит в уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - (\varepsilon - \theta^2) \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0, \quad (5)$$

содержащее только безразмерный параметр $\varepsilon = \gamma_0/\omega$.

II. 1.2. Фазовый портрет

Если параметр ε положителен, то траектории в окрестности начала координат расходятся, как спирали. Действительно, в этой окрестности угол θ всегда мал и членом θ^2 можно пренебречь. Таким образом, мы находимся точно в той ситуации, которая представлена на рис. 1.4 с $\gamma < 0$. Наоборот, вдали от начала координат траектории стремятся к началу координат, так как коэффициент затухания $\gamma(\theta)$ на достаточно большом расстоянии от начала координат положителен. Исходя из интуитивных соображений можно предположить, что между этими

¹⁾ Ван дер Полю предложил это уравнение в 1922 г. для объяснения работы триодного генератора.

двумя крайностями должна существовать замкнутая траектория. Более тщательное исследование уравнения Ван дер Поля позволяет установить существование, единственность и устойчивость такой замкнутой траектории, которую Пуанкаре назвал *предельным циклом*. Все фазовые траектории, расположенные как внутри, так и вне предельного цикла, асимптотически стремятся к нему. Таким образом, перед нами новый пример аттрактора (рис. II. 1).

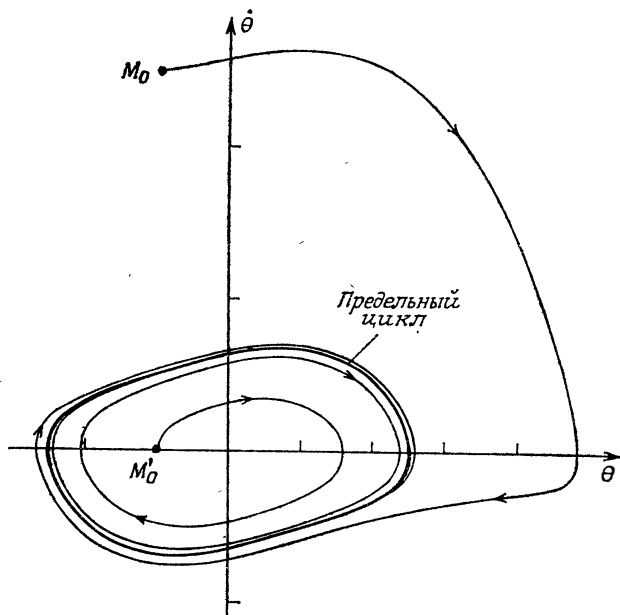


Рис. II. 1. Фазовый портрет уравнения Ван дер Поля. Одно из решений этого уравнения представлено на фазовой плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ замкнутой кривой — предельным циклом, к которому сходятся все траектории. Мы выбрали две начальные точки: одну (M_0) вне, а другую (M'_0) внутри предельного цикла при $\epsilon = 0,4$.

Форма предельного цикла и колебаний, как видно из рис. II, 2, сильно зависит от значения положительного параметра ϵ . Здесь мы изобразили решения уравнения (5), исходящие из заданной начальной точки (начального условия) в системах координат $(\dot{\theta}, \theta)$ и (θ, t) . Рассмотрены два значения ϵ : одно очень малое (рис. II. 2, а), другое гораздо больше (рис. II. 2, б). В первом случае предельный цикл имеет форму окружности и колебания квазисинусоидальны. Во втором случае эволюция происходит в двух различных масштабах; вслед за

медленным дрейфом происходит резкая вариация амплитуды. Такая характерная временная зависимость получила название *релаксационных колебаний*.

Режим предельного цикла описывается периодической функцией $\theta(t)$, которая может быть разложена в ряд Фурье. Это

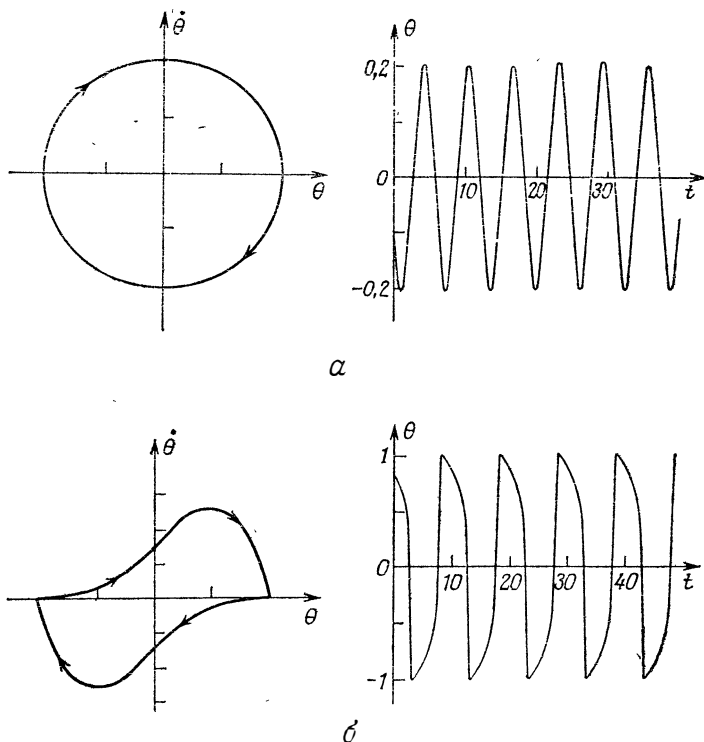


Рис. II. 2. Влияние параметра ϵ . а — при малых значениях этого параметра ($\epsilon = 0,01$) временные колебания квазисинусоидальны и предельный цикл по форме мало отличается от окружности; б — при гораздо больших значениях параметра ϵ ($\epsilon = 4,0$) предельный цикл имеет почти прямоугольную форму, что приводит к появлению двух разных масштабов времени. Пилообразные изменения амплитуды θ называются релаксационными колебаниями.

очень общее свойство всех динамических систем с режимами такого типа. Следовательно, как только мы оказываемся в режиме предельного цикла, временная зависимость любой наблюдаемой $X(t)$ имеет вид

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \sin(n\omega t + \phi_n).$$

II. 1.3. Амплитуда колебаний при $\varepsilon = 0$

В выбранных единицах энергия определяется выражением

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \theta^2).$$

Закон ее изменения во времени может быть выведен из уравнения (5)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}(2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2\theta\dot{\theta}) = (\varepsilon - \theta^2)\dot{\theta}^2.$$

Средняя энергия определяется выражением

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dE}{dt}} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \frac{dE}{dt} dt, \\ \overline{\frac{dE}{dt}} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} [E(t_0 + \tau) - E(t_0)] = 0. \end{aligned}$$

Из приведенного выше выражения dE/dt получаем

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \varepsilon \overline{\dot{\theta}^2} - \overline{\theta^2 \dot{\theta}^2} = 0.$$

Таким образом, выделяемая энергия $\overline{\varepsilon \dot{\theta}^2}$ в среднем точно компенсируется диссипацией $\overline{\theta^2 \dot{\theta}^2}$ из-за нелинейности. Вычислим теперь приближенно амплитуду предельного цикла при $\varepsilon = 0_+$. В этом случае мы можем предположить, что

$$\theta(t) \approx \rho \sin t$$

(см. рис. II. 2, а). Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} \overline{\dot{\theta}^2} &\approx \frac{1}{2} \rho^2, \\ \overline{\theta^2 \dot{\theta}^2} &\approx \frac{1}{8} \rho^4. \end{aligned}$$

Приведенный выше баланс средней энергии показывает, что в этой области

$$\rho \approx 2 \sqrt{\varepsilon}.$$

Таким образом, размер ρ предельного цикла (почти окружности) изменяется как квадратный корень из параметра ε . Мы установили этот результат в частном случае — для уравнения Ван дер Поля, — но область его применимости гораздо шире. Действительно, член с θ^2 можно рассматривать как представляющий любую нелинейность при малых θ . Это — стандартная форма

первого нелинейного члена разложения в ряд Тейлора произвольной функции¹⁾.

Заметим, что зависимость размеров предельного цикла от $\sqrt{\varepsilon}$ и от амплитуды соответствующих колебаний формально может быть исключена. Принимая за единицу амплитуды θ_0 (вместо $\theta_0/\sqrt{\varepsilon}$), мы получаем вместо уравнения (5) новое уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \varepsilon(1 - \theta^2)\frac{d\theta}{dt} + \theta = 0.$$

Разумеется, по форме оно в точности эквивалентно уравнению (5) при заданном значении ε . Однако повторяя приведенные выше вычисления, мы приходим к выводу о том, что размер предельного цикла на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ теперь не зависит от ε . Определенная выше зависимость от $\sqrt{\varepsilon}$ полностью маскируется выбором единицы измерения угла θ .

II. 2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

II. 2.1. Уравнение движения

Вернемся к примеру простого маятника без трения в гравитационном поле и представим себе, что точка подвеса O (рис. I. 1) колеблется в вертикальном направлении. Это другой способ поддержания движения. Тем самым мы определяем параметрический маятник, т. е. маятник, один из параметров которого изменяется со временем²⁾. Можно было бы поступить иначе и (что эквивалентно) поместить простой маятник в гравитационное поле, зависящее от времени:

$$g(t) = g_0 + \beta(t).$$

¹⁾ Если рассмотреть разложение в ряд Тейлора коэффициента затухания $\gamma(\theta)$, то можно было бы считать, что оно начинается с линейного члена (в то время как мы начали с квадратичного члена):

$$\gamma(\theta) = -\gamma_0 [1 + \alpha\theta - (\theta^2/\theta_0^2)].$$

Этот линейный член не оказывает (по крайней мере вблизи $\varepsilon = 0$) прямого влияния на эволюцию энергии. Действительно, его вклад в среднее dE/dt имеет вид $\alpha\theta\dot{\theta}^2$ и обращается в нуль при $\theta = \rho \sin t$. Это объясняет, почему мы не удерживали линейный член $\alpha\theta$ в выражении для $\gamma(\theta)$, а также, почему соотношение $\rho \approx \sqrt{\varepsilon}$ имеет совершенно общий характер.

²⁾ Возможны также многочисленные другие реализации, например емкостный колебательный контур с сопротивлением, зависящим от времени. Эта ситуация на первый взгляд могла бы показаться весьма необычной, хотя в действительности она соответствует общей проблеме — поведению любого осциллятора с зависящим от времени параметром.

В описанном выше случае $\beta(t)$ характеризует вертикальное ускорение точки O . В линейном приближении уравнение движения, выведенное из уравнения (1), имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g(t)}{l}\theta = 0. \quad (6)$$

Несмотря на формальное сходство с уравнением (1), уравнение (6) существенно отличается от него: при произвольной функции $g(t)$ уравнение (6) *неинтегрируемо*. Это означает, что мы не знаем, как решать это обыкновенное дифференциальное уравнение в квадратурах, т. е. выразить решение $\theta(t)$ этого уравнения как явную функцию времени через интегралы (или квадратуры) от обычных элементарных или трансцендентных функций, таких, как рациональные дроби, экспоненты, эллиптические функции и т. д. Что же касается уравнения (1), то оно, наоборот, *интегрируемо*, так как член с $(g/l)\sin\theta$ не зависит явно от времени¹⁾.

Несмотря на это различие, состояние покоя $\theta = \dot{\theta} = 0$ по-прежнему остается тривиальным решением приведенного выше уравнения. Однако в том случае, когда g зависит от времени, устойчивость тривиального решения отнюдь не гарантируется и подлежит определению с помощью детального анализа. Хотя априори любая форма функции $g(t)$ заслуживает изучения, мы рассмотрим только $g(t)$, периодическую по времени: уравнение движения называется в этом случае уравнением Хилла. Упрощая задачу еще больше и предполагая, что $\beta(t)$ — тригонометрическая функция, мы приходим к частному случаю уравнения Хилла, известному под названием *уравнения Матье*. Выбирая

$$g(t) = g_0 + g_1 \cos(2\omega t),$$

получаем²⁾

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega t)] \theta = 0, \quad (7)$$

¹⁾ Понятие интегрируемости и неинтегрируемости может быть сразу же обобщено на любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что решение уравнения или системы уравнений в квадратурах принадлежит к числу математических проблем, рассматриваемых теорией Галуа алгебраических (и дифференциальных) уравнений.

²⁾ Такой выбор функции $g(t)$ помимо удобства вычислений обусловлен более глубокой причиной, ибо позволяет нам упомянуть об общей проблеме связанных осцилляторов. Введем переменную $\alpha = h \cos(2\omega t)$ и рассмотрим вместо уравнения (6) систему двух уравнений

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 (1 + \alpha) \theta = 0,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 4\omega^2\alpha = 0,$$

где

$$h = g_1/g_0, \quad \omega_0^2 = g_0/l.$$

Возбуждение, представленное членом $h \cos(2\omega t)$, имеет период $T = \pi/\omega$. Не умаляя общности, мы можем предположить, что $h \geq 0$. Заметим, что ω_0 — угловая частота маятника в отсутствие внешнего возбуждения ($h = 0$). Так как уравнение (7) линейно и второго порядка по θ , начальное условие $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$ через каждый период $(\pi/\omega, 2(\pi/\omega), 3(\pi/\omega), \dots)$ претерпевает линейное преобразование, эквивалентное умножению координат на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ на матрицу M (см. приложение Д). На основе этого замечания в теории Флоке линейных уравнений с периодическими коэффициентами показано, что решения уравнения Матье имеют вид

$$\theta(t) = e^{\mu t} P(t).$$

Здесь μ — собственное значение матрицы M , называемое иногда *характеристическим показателем*, а $P(t)$ — функция с периодом $T = \pi/\omega$, т. е. такая, что

$$P(t) = P\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right).$$

Поиск решений уравнения (7) мы разделили на две части. Первая часть сводится к нахождению функции $P(t)$, которая, как уже упоминалось, не может быть выражена через обычные функции: необходимо ввести новый класс трансцендентных функций, называемых *функциями Матье* (мы не будем останавливаться здесь на их описании). Вторая часть состоит в вычислении характеристического показателя μ . Знак вещественной части μ определяет, возрастает ли решение $\theta(t)$ или убывает. Если вещественная часть μ положительна, то $\theta(t)$ неограниченно возрастает со временем. В этом случае состояние *покоя*, а в действительности любое решение уравнения (7), неустойчиво, так как любое малое возмущение формы $\theta(t)$ неограниченно возрастает. Именно вопросом устойчивости мы займемся сейчас более подробно.

описывающих поведение двух осцилляторов с амплитудами θ и α . Уравнения связаны перекрестным членом $\omega_0^2 \alpha \theta$. Такая модель почти очевидна, так как периодические изменения функции $g(t)$ означают, что ею управляет внешний осциллятор с амплитудой, пропорциональной α . Этот внешний осциллятор должен быть нечувствительным к движению параметрического маятника, чем и объясняется отсутствие члена, зависящего от θ , во втором уравнении. Такова специфическая форма связи, при которой второй осциллятор действует на первый как вынуждающая сила.

II. 2.2. Устойчивость решений

При малых значениях возбуждения (при h , близких к нулю) показатель μ может быть вычислен по теории возмущений¹⁾. Известно, что при $h = 0$ общее решение уравнения (7) имеет вид

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi).$$

По непрерывности при h , близких, но не равных нулю, решение $e^{\mu t} P(t)$ должно мало отличаться от приведенного выше. Мы заключаем поэтому, что выражение

$$\theta(t) \approx e^{\mu t} \cos(\omega t + \phi)$$

дает удовлетворительно приближение при малых μ и частоте ω , близкой к ω_0 . Подставляя это приближение в уравнение Матье, получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2(1 + h \cos(2\omega t)) \right] e^{\mu t} \cos(\omega t + \phi) = \\ = \left[(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2) \cos(\omega t + \phi) - 2\omega\mu \sin(\omega t + \phi) + \right. \\ \left. + \frac{h}{2} \omega_0^2 \cos(\omega t - \phi) + \frac{h}{2} \omega_0^2 \cos(3\omega t + \phi) \right] e^{\mu t}. \end{aligned}$$

Отбрасывая член с $\cos(3\omega t + \phi)$, который, как показывают более подробные вычисления, пренебрежимо мал, попытаемся найти условия, при которых правая часть равна нулю при всех t . Чтобы это произошло, коэффициенты при $e^{\mu t} \cos(\omega t)$ и $e^{\mu t} \sin(\omega t)$ должны быть равны нулю:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2 + \frac{h}{2} \omega_0^2) \cos \phi - 2\omega\mu \sin \phi = 0, \\ 2\omega\mu \cos \phi + (\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2 - \frac{h}{2} \omega_0^2) \sin \phi = 0. \end{aligned}$$

Эта система двух линейных неоднородных уравнений относительно $\cos \phi$ и $\sin \phi$ имеет решение только в том случае, если детерминант системы равен нулю, т. е.

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2)^2 - \frac{h^2}{4} \omega_0^4 + 4\omega^2 \mu^2 = 0,$$

или

$$\mu^4 + 2(\omega_0^2 + \omega^2) \mu^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{h^2}{4} \omega_0^4 = 0.$$

¹⁾ В частном случае уравнения Матье известно, как проводить вычисления и в пределе при $h \rightarrow \infty$, но используемые при этом математические методы характерны именно для уравнения Матье. Именно поэтому мы излагаем здесь метод вычислений, пригодный при h , близких к нулю, но применимый зато в самом общем случае.

Перед нами квадратное уравнение относительно μ^2 , сумма корней которого всегда отрицательна, а дискриминант всегда положителен. Существуют два вещественных корня, по крайней мере один из которых отрицателен. Так как отрицательному значению μ^2 соответствует чисто мнимый характеристический показатель μ , оно не может быть источником неустойчивости. Наоборот, решение неустойчиво, если существует вещественное поло-

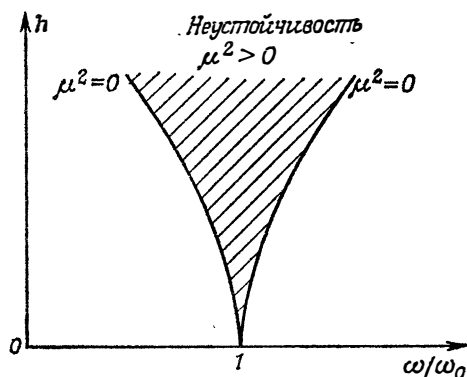


Рис. II.3. Диаграмма устойчивости уравнения Матье на плоскости (h, ω) . Внутри заштрихованной зоны существует положительное значение $\sqrt{\mu^2}$ и уравнение не имеет устойчивого периодического решения. В окрестности точного резонанса ($\omega = \omega_0$) это утверждение верно даже при самой малой амплитуде возбуждения h вплоть до предельного значения 0. Существуют и другие области субгармонической неустойчивости, не изображенные на этом рисунке. Их вершины имеют координаты

$$h = 0; \quad \omega/\omega_0 = 1/n, \quad n - \text{положительное целое число.}$$

жительное значение μ^2 и, следовательно, μ . Для этого необходимо, чтобы произведение корней было отрицательно, т. е.

$$h > 2 \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|.$$

На плоскости параметров возбуждения (h, ω) с прямоугольной системой координат это условие задает сектор с вершиной в точке $h = 0, \omega/\omega_0 = 1$ (рис. II.3).

Внутри сектора (заштрихованная зона) μ^2 имеет положительный корень и у уравнения (7) нет устойчивого решения. Под этим мы подразумеваем следующее: существуют начальные условия, очень близкие к состоянию покоя и такие, что выходящие из начальных точек траектории расходятся экспоненциально. Состояние покоя неустойчиво относительно возбуждения с амплитудой, стремящейся к нулю ($h \rightarrow 0$), если выполняется условие $\omega = \omega_0$ (в этом случае мы говорим, что имеет

место *точный резонанс*). Такого рода неустойчивость часто называют *субгармонической*, так как она приводит к колебаниям маятника с частотой $\omega/2\pi$, равной половине частоты $2\omega/2\pi$ внешнего возбуждения.

Вне области неустойчивости оба возможных значения μ^2 отрицательны. При частоте ω , близкой к ω_0 , и малых h , как нетрудно проверить, одно из мнимых значений μ близко к нулю, а другое приближенно равно $2i\omega_0$. Эффект, производимый при этом на колебания, состоит в следующем:

1) основная частота слегка изменяется из-за наличия характеристического показателя, близкого к $2i\omega_0$;

2) малое отрицательное значение μ^2 приводит к низкочастотной модуляции колебаний. Следовательно, режим, вообще говоря, оказывается квазипериодическим (точное определение см. в разд. III.3.2);

3) амплитуда этой модуляции произвольна, так как уравнение (7) линейно по θ .

Когда параметры возбуждения на плоскости (h, ω) приближаются к области неустойчивости, низкочастотная модуляция уменьшается. Она стремится к нулю, как соответствующее значение μ^2 на границе области. На самой границе множитель $e^{\mu t}$ теории Флоке заменяется членом, полиномиальным по времени. Затем внутри сектора неустойчивости показатель становится вещественным. Резюмируя, можно сказать, что при движении в пространстве параметров мы видим, как одна частота уменьшается и затем обращается в нуль, причем одновременно возникает неустойчивость. Режим, который появляется в области неустойчивости, определяется нелинейными эффектами, которые не охватываются приведенным выше анализом.

Прежде чем завершить этот раздел, упомянем о том, что на плоскости (h, ω) существуют и другие области неустойчивости. Они соответствуют секторам шириной h^n , не показанным на рис. II.3, вершины которых расположены в точках $h = 0$ и $\omega/\omega_0 = 1/n$ (n — положительное целое число)¹⁾.

¹⁾ Проницательный читатель, возможно, заметил, что с точностью до различий в обозначениях (t вместо x , постоянная \hbar включена в определение γ) уравнение Матье—Хилла совпадает со стационарным уравнением Шрёдингера для одного пространственного измерения. Между развитой нами теорией параметрического резонанса и теорией электронов (без взаимодействия) в периодическом потенциале одномерного кристалла существует полная параллель. По историческим причинам аналог теории Флоке называют в последнем случае теорией Блоха—Ваннье, несмотря на то что работа Флоке включает в себя значительную часть теории электронов в металле. В случае электронов существуют области, аналогичные зонам параметрической неустойчивости, которые называются запрещенными энергетическими зонами.

II. 2.3. Эффект затухания

Так как во всех физических системах имеется трение, естественно спросить, как изменятся приведенные выше результаты при наличии затухания. При слабом трении типа трения в жид-

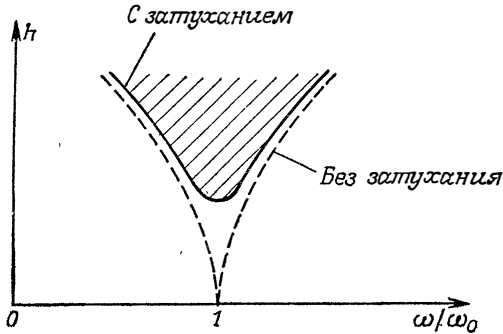


Рис. II. 4. Влияние затухания. Если имеется затухание, то область субгармонической неустойчивости сужается и оказывается внутри зоны неустойчивости в отсутствие затухания. Обращаем особое внимание читателя на то, что даже при точном резонансе для дестабилизации параметрического осциллятора необходимо превысить некоторый, отличный от нуля, порог возбуждения.

кости, т. е. при $0 < \gamma \ll \omega_0$, мы можем повторить все предыдущие вычисления, начиная с уравнения

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2(1 + h \cos(2\omega t))\theta = 0.$$

Если величина h мала, то из существования решения в форме, постулируемой теорией Флоке, следует, что

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2 + \gamma\mu)^2 - \frac{h^2}{4} \omega_0^2 + (2\omega\mu + \omega\gamma)^2 = 0.$$

Нейтральная устойчивость, соответствующая $\mu = 0$, достигается при

$$\frac{h^2}{4} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^4} \gamma^2.$$

Таким образом, при точном резонансе ($\omega = \omega_0$) состояние покоя является параметрически неустойчивым, если

$$h > \frac{2\gamma}{\omega_0}.$$

Для дестабилизации этого состояния необходим некоторый минимальный уровень возбуждения. Это не удивительно и легко объясняется необходимостью компенсировать затухание осцил-

лятора. На этот раз главная область субгармонической неустойчивости на плоскости (h, ω) ограничена непрерывной кривой, которая лежит внутри сектора, вычисленного в отсутствие затухания (рис. II.4).

II. 2.4. Механизм параметрического усиления

Попытаемся установить физическую причину субгармонической неустойчивости. Вместо синусоидального возбуждения рассмотрим функцию $g(t)$ с периодом $T = \pi/\omega$, состоящую из коротких импульсов длиной τ , где $\tau \ll T$ (рис. II.5).

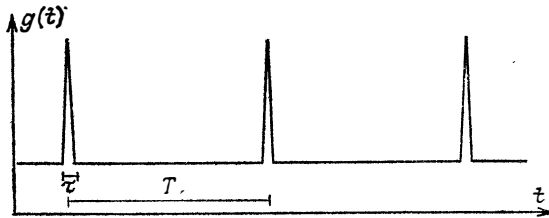


Рис. II.5. Схематическое представление функции $g(t)$. Предполагается, что длительность τ каждого импульса пренебрежимо мала по сравнению с периодом T .

Проинтегрируем уравнение (6) по интервалу τ (продолжительности импульса) в предположении, что амплитуда импульса, хотя и велика, не может вызывать существенных изменений угла θ за это время. При таких условиях для любой функции $f(\theta)$ справедливо соотношение

$$\int_{(\tau)} f(\theta) dt = \tau \cdot (\text{среднее значение } f(\theta)).$$

Но потребуем также, чтобы в нашем приближении выполнялось равенство

$$\int_{(\tau)} \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) dt = \left[\frac{d\theta}{dt} \right],$$

где $[d\theta/dt]$ — среднее изменение скорости, вызванное импульсом. Тогда из уравнения (6) получаем

$$\left[\frac{d\theta}{dt} \right] + G\theta(t) = 0,$$

где

$$G = \frac{1}{l} \int_{(\tau)} g(t) dt,$$

$\theta(t)$ — среднее положение маятника за импульс.

В момент, когда маятник достигает своего максимального отклонения, его скорость и кинетическая энергия равны нулю, а его потенциальная энергия пропорциональна $(1/2)\theta_{\text{макс}}^2$. Предположим, что именно в этот момент мы прикладываем к маятнику импульс. Потенциальная энергия при этом не изменяется, так как положение маятника остается прежним. Но скорость получает приращение $[d\theta/dt] = -G\theta_{\text{макс}}$, и поэтому кинетическая энергия после импульса равна $(1/2)G^2\theta_{\text{макс}}^2$. В результате импульс увеличивает энергию осциллятора в $(1 + G^2)$ раз, причем этот множитель больше единицы. Если следующий импульс поступает в тот самый момент, когда отклонение снова максимально, то маятник дестабилизируется. Для наступления потери устойчивости необходимо, чтобы последовательные импульсы были разделены интервалом времени, равным целому кратному полупериодов невозмущенного движения маятника. Априори кратное может быть любым, не обязательно целым, но ясно, что такой процесс параметрического усиления особенно эффективен, когда импульс поступает каждый полупериод, как это было выше. Сказанное объясняет, почему на диаграмме устойчивости уравнения Матье мы имеем на плоскости (h, ω) последовательность областей неустойчивости, исходящих из точек с абсциссами $1/n$. В соответствии с нашей интерпретацией это соответствует импульсному воздействию через полупериод, период, полтора периода и т. д.

II. 3. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ БИФУРКАЦИЯ

II. 3.1. Понятие бифуркации¹⁾

Описание осцилляторов с вынужденной силой и параметрических осцилляторов позволяет нам рассмотреть другое понятие, имеющее фундаментальное значение для исследования динамических систем — понятие бифуркации. Мы уже отмечали выше на примере, что при движении в плоскости (h, ω) параметрического маятника наблюдается полное изменение характера колебаний при пересечении границ, разделяющих устойчивые решения от неустойчивых. Когда решение любого уравнения или системы уравнений претерпевает качественное изменение при фиксированном значении параметра, называемом *критическим значением*, это называется *бифуркацией*. Точка в параметрическом пространстве, в котором происходит такое изменение, называется *точкой бифуркации*. Из точки бифуркации исходят

¹⁾ Более подробное изложение локальных бифуркаций коразмерности 1 см. в приложении А.

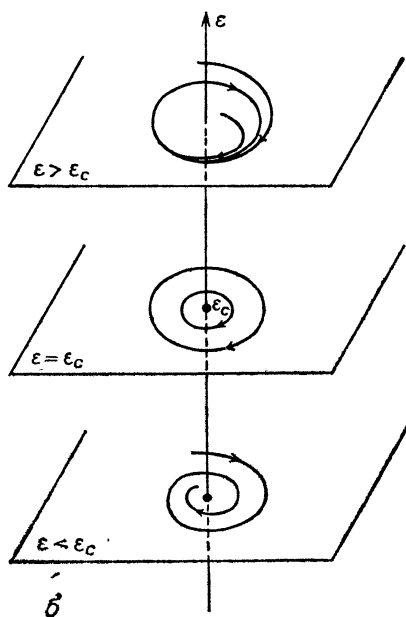


Рис. II.6. Бифуркационная диаграмма для уравнения (5). а — при $\epsilon_c = 0$ устойчивое решение претерпевает качественные изменения: вместо притягивающей неподвижной точки появляется предельный цикл, начальная амплитуда которого равна нулю; б — справа схематически изображены некоторые фазовые траектории в трех случаях: $\epsilon < \epsilon_c$, $\epsilon = \epsilon_c$ и $\epsilon > \epsilon_c$. Для удобства ось ϵ выбрана вертикальной.

несколько (две или более) ветвей решения, устойчивых или неустойчивых. Представление любого характеристического свойства решений как функции *бифуркационного параметра* образует *бифуркационную диаграмму*.

Чтобы пояснить эти понятия, продемонстрируем их на примере осциллятора с вынуждающей силой или, точнее, уравнения (5), которое мы будем рассматривать независимо от физического смысла параметра ε . При всех значениях (положительных и отрицательных) бифуркационного параметра ε начало координат $\theta = \dot{\theta} = 0$ всегда является особой точкой. При $\varepsilon < 0$ начало координат устойчиво (и, следовательно, является аттрактором), но становится неустойчивым при $\varepsilon > 0$ и переходит в другой аттрактор — предельный цикл. Таким образом, при критическом значении параметра $\varepsilon_c = 0$ происходит изменение характера устойчивого решения. Построив график какого-нибудь типичного свойства решения, например максимального отклонения, как функцию параметра ε , получим диаграмму, изображенную на рис. II.6, а. Чтобы подчеркнуть значение этой бифуркационной диаграммы, мы показали также на фазовой плоскости форму траекторий (рис. II.6, б).

Напомним, что при $\varepsilon = \varepsilon_c = 0$ осциллятор находится в состоянии нейтральной устойчивости: в фазовой плоскости больше нет аттрактора и всякое начальное условие порождает свою собственную траекторию.

II. 3.2. Бифуркация Хопфа

Когда (как в предыдущем примере) при достижении критического значения параметра из точки рождается предельный цикл, мы имеем дело с вполне определенным явлением, известным под названием *бифуркации Хопфа*. Это понятие имеет гораздо более широкую область применения, чем приводимый ниже ограниченный перечень примеров. Бифуркации Хопфа встречаются в векторных полях и диффеоморфизмах. Их механизм не зависит ни от числа степеней свободы, ни от конкретной формы уравнений, ни от приложений. Для наших целей достаточно упомянуть два главных свойства предельного цикла в окрестности точки бифуркации Хопфа. Одно из этих свойств было доказано в разд. II.1.3, исходя из уравнения (5): амплитуда предельного цикла пропорциональна $|\varepsilon - \varepsilon_c|^{1/2}$, т. е. амплитуда растет как квадратный корень из расстояния от этой точки бифуркации¹⁾. С другой стороны, можно показать, что период

¹⁾ В частном случае уравнения (5) $\varepsilon_c = 0$, что объясняет зависимость от $\varepsilon^{1/2}$, которая была выведена нами.

колебаний не зависит от $\varepsilon - \varepsilon_c$ по крайней мере в первом приближении (в действительности до второго приближения включительно). Эти две типичные особенности представляют большой практический интерес, так как их можно использовать для идентификации бифуркации Хопфа.

II. 3.3. Субкритическая и суперкритическая бифуркация

Бифуркация, порождаемая уравнением (5) при $\varepsilon = \varepsilon_c = 0$, называется *суперкритической* (надкритической) или *нормальной*. Предельный цикл рождается с нулевой амплитудой, и в точке бифуркации система находится в состоянии нейтральной устойчивости. Обусловлена она наличием диссипативного члена $\theta^2\dot{\theta}$, противодействующего неустойчивости. Соответственно этому решение не претерпевает резкого преобразования в точке бифуркации, но изменяется постепенно. В общем случае так происходит всякий раз, когда нелинейные члены низшего порядка в точности компенсируют неустойчивость (см. приложение А).

Нетрудно представить себе диаметрально противоположную ситуацию, когда нелинейные члены стремятся усилить неустойчивость (достаточно, например, изменить знак члена $\theta^2\dot{\theta}$ в уравнении (5) и добавить какие-нибудь члены старшего порядка, скажем $\theta^4\dot{\theta}$, чтобы погасить колебания большой амплитуды). То же происходит и с другими уравнениями и приводит к *субкритической* бифуркации, изображенной схематически на рис. II. 7. В этом случае из-за усиления неустойчивости нелинейностью устойчивое решение всегда находится на конечном расстоянии от решения, которое становится неустойчивым в точке бифуркации. Проходя ось ε справа налево, мы видим, что ε_c — неустойчивая неподвижная точка — порождает устойчивую неподвижную точку и неустойчивый предельный цикл. Эта бифуркация обратна нормальной бифуркации на рис. II. 6, и она действительно называется *обратной* или *субкритической* бифуркацией. В интервале $[\varepsilon'_c, \varepsilon_c]$ сосуществуют два устойчивых решения: одно стационарное (притягивающая неподвижная точка), другое колебательное (предельный цикл).

С практической точки зрения необходимо подчеркнуть следующее:

- 1) эти два решения не наблюдаются одновременно в одной и той же системе, и только начальное решение определяет, какое из них реализуется;
- 2) устойчивый предельный цикл с самого начала возникает как цикл конечной амплитуды и исчезает, также имея конечную амплитуду.

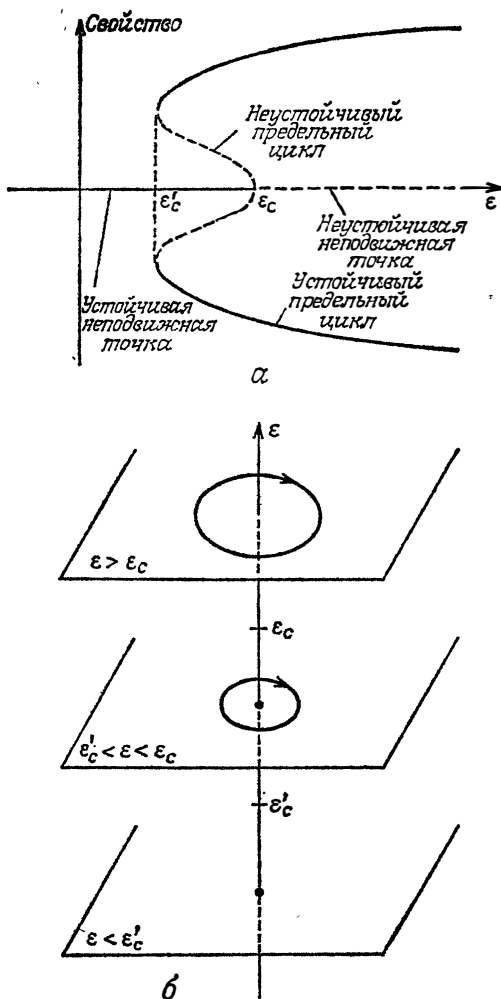


Рис. II. 7. Пример обратной, или субкритической, бифуркации. а — график такого же типа, как на рис. II. 6. В интервале $[\varepsilon'_c, \varepsilon_c]$ устойчивы два решения; одно из них стационарное, другое — периодическое; б — чтобы не загромождать чертеж, на фазовой плоскости при разных значениях параметра ε изображены только аттракторы (неподвижная точка и предельный цикл).

Представим себе, что параметр ε сначала изменяется в одну, а затем в другую сторону. В этом случае мы увидим явление гистерезиса, схематически изображенное на рис. II. 8. При увеличении бифуркационного параметра переход от неподвижной точки к предельному циклу происходит при $\varepsilon = \varepsilon_c$. Обратный

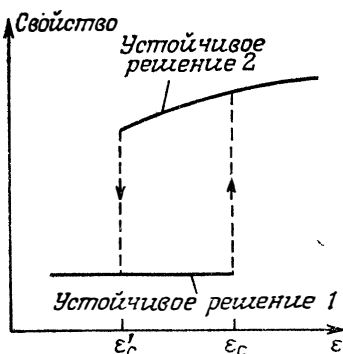


Рис. II. 8. Явление гистерезиса, связанное с субкритической бифуркацией. Так как два устойчивых решения сосуществуют на ненулевом интервале значений бифуркационного параметра, переход от одного решения к другому (при пересечении параметром границ интервала) происходит при различных значениях параметра в зависимости от направления, в котором текущее значение параметра пересекает границу: при $\varepsilon = \varepsilon_c$, когда параметр пересекает границу, возрастая, и при $\varepsilon = \varepsilon'_c$, когда параметр пересекает границу, убывая (направления, в которых изменяется параметр ε , указаны стрелками).

переход при уменьшении ε происходит при $\varepsilon = \varepsilon'_c$. Таким образом, мы видим, что в отсутствие нейтральной устойчивости колебания с ненулевой амплитудой в точке перехода и гистерезис являются свойствами субкритической бифуркации, качественно отличными от свойств нормальной (суперкритической) бифуркации Хопфа.

ГЛАВА III

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

III.1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ И УСТАНОВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМИЧЕСКОГО РЕЖИМА

Когда в результате эксперимента или численного моделирования мы получаем зависящий от времени сигнал $x(t)$ (называемый временным рядом), одна из наиболее важных задач состоит в определении того, какого рода временной эволюцией порожден этот сигнал. Ответить на этот вопрос мы сумеем, если нам удастся сжать информацию так, чтобы подчеркнуть наиболее значительные динамические характеристики. Имеем ли мы дело с колебаниями более или менее сложной формы, но обладающими совершенно определенным периодом? Имеем ли мы дело с более или менее линейной суперпозицией нескольких различных колебаний? Может быть, перед нами нечто совсем иное?

Ответ на эти вопросы отнюдь не тривиален, за исключением весьма простых случаев типа тех, которые были рассмотрены в предыдущей главе. В этих случаях нам удалось удостовериться в существовании периодических решений уравнения движения осциллятора с вынуждающей силой. Описание таких решений включает в себя период (или, что эквивалентно, частоту) и амплитуду: по существу амплитуду предельного цикла¹⁾ и время, за которое фазовая точка его описывает. Эти две характеристики получаются почти автоматически, если уравнения движения известны. Важно подчеркнуть, что эти характеристики остаются в силе и продолжают играть столь же существенную роль для любого периодического явления, механизм возникновения и поддержания которого неизвестен, или периодического явления, описываемого аналитически неразрешимыми уравнениями, как это чаще всего бывает на практике.

Некоторые динамические режимы представляют собой суперпозиции колебаний с различными амплитудами, периодами, от-

¹⁾ Существование предельного цикла (или аттрактора любого рода) с необходимостью влечет за собой вывод о диссипативности системы. Именно это мы и будем предполагать впредь. Консервативная система не может иметь аттрактор, так как ее эволюция не сопровождается сокращением площадей в фазовом пространстве.

ношениями гармоник и т. д. С одним из примеров таких режимов мы познакомились при рассмотрении уравнения Матье, с другими примерами встретимся дальше. Аттрактором, соответствующим суперпозициям колебаний, является не предельный цикл, а *тор*. Такого рода режимы называются квазипериодическими.

Труднее понять природу других режимов. Внешне они кажутся совершенно беспорядочными и поэтому получили название «хаотических»¹⁾. Если динамика носит детерминированный характер (т. е. представима конечным числом связанных между собой нелинейных дифференциальных уравнений или каким-нибудь эквивалентным способом), то траектории в фазовом пространстве сходятся к *странному аттрактору*, топологические свойства которого резко отличаются от топологических свойств тора.

Чтобы ответить на вопросы, заданные в начале этой главы, мы должны использовать какие-то «объективные» методы анализа, а не просто полагаться на суждение наблюдателя о регулярности временного ряда. Существует несколько способов, позволяющих идентифицировать динамический режим и устанавливать его характеристики. Мы изложим два часто используемых метода: в этой главе — метод Фурье²⁾ и сечение Пуанкаре — в гл. IV. В гл. VI мы познакомимся с развитым недавно методом, позволяющим исследовать непосредственно аттрактор.

III.2. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

III.2.1. Дискретизация сигнала

Быстрое развитие вычислительных методов привело к тому, что сигнал $x(t)$ — непрерывную функцию времени — очень часто измеряют, производя выборку и дискретизацию. При таком подходе эксперимент обычно дает некоторую дискретную последо-

¹⁾ Такие режимы называются также турбулентными, аperiodическими или непериодическими. Все эти прилагательные являются более или менее синонимическими, так как терминология до сих пор не установилась. Отличительная особенность хаотических режимов состоит в том, что в соответствующем временном ряде $x(t)$ невозможно обнаружить никакой долговременной регулярности.

²⁾ Преобразование Фурье было разработано в XIX в. математиком Жаном Батистом Фурье в ходе его исследований уравнения теплопроводности. Аналогичными свойствами обладают и другие преобразования, в частности преобразования Радемахера и Адамара. Мы не приводим здесь описания этих преобразований и многочисленных математических результатов относительно преобразования Фурье, а ограничиваемся изложением только тех практических результатов, которые наиболее существенны для наших целей.

вательность¹⁾ вещественных чисел $x_j (j \in \mathbb{Z})$, расположенных через регулярные интервалы времени Δt (рис. III. 1).

На практике такая последовательность чисел с необходимостью конечна и содержит n значений при общей продолжительности эксперимента $t_{\text{макс}} = n\Delta t$. Выбор двух величин n и Δt определяется практическими соображениями, такими, как приемлемая продолжительность эксперимента, емкость памяти,

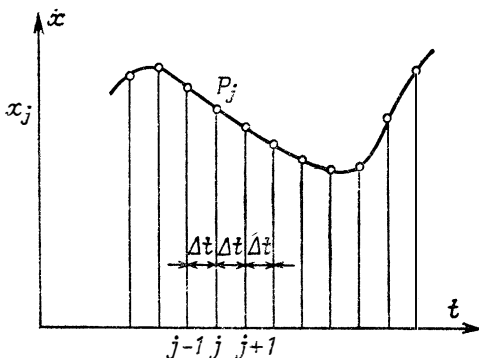


Рис. III. 1. Дискретизация непрерывной функции. Кривая непрерывной функции (например, экспериментальная кривая) представлена сплошной жирной линией. Дискретные значения x_j выбираются в равноотстоящие моменты времени $\dots, j-1, j, j+1, \dots$ (с интервалом Δt между двумя последовательными моментами), после чего непрерывная функция заменяется последовательностью точек P_j .

в которой хранятся результаты эксперимента, и пропускная способность устройств, обрабатывающих измерения. Преобразование Фурье применимо как к непрерывным функциям (с интегралами вместо суммирования), так и к дискретным последовательностям. Однако мы ограничимся рассмотрением дискретных последовательностей, подразумевая, что сигнал $x(t)$ математически является интегрируемой и квадратично интегрируемой функцией.

III. 2.2. Определение дискретного преобразования Фурье

Определим преобразование Фурье дискретного временного ряда x_j как операцию, порождающую соответствующий ему ди-

¹⁾ Говоря о недостатках дискретизации, не следует упускать из виду ее значительное преимущество, состоящее в том, что она позволяет обрабатывать сигнал численно от начала и до конца. Современная электронная техника позволяет производить выборку значений с интервалом времени Δt , меньшим 10^{-6} с, и преобразовывать сигнал в цифровую форму в реальном времени.

скретный ряд \hat{x}_k , такой, что

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n x_j \exp\left(-i \frac{2\pi jk}{n}\right), \quad (8)$$

$$k = 1, \dots, n,$$

$$i = \sqrt{-1} - \text{мнимая единица.}$$

Выберем для удобства Δt за единицу времени так, что увеличение j на единицу соответствует эволюции на интервале времени Δt . Преобразование (8) можно рассматривать как своего рода вращение, отображающее вектор $(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ в вектор $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k, \dots, \hat{x}_n)$. Это не вращение в обычном смысле, так как евклидова длина $\sum_j x_j^2$ не сохраняется. Величина, остающаяся инвариантной относительно преобразования (8), называется эрмитовой длиной¹⁾. Сохранение эрмитовой длины выражается равенством Парсеваля — Планшереля:

$$\sum_{j=1}^n |x_j|^2 = \sum_{k=1}^n |\hat{x}_k|^2.$$

Заметим, что \hat{x} — функция переменной, сопряженной с временем, т. е. частоты f . Частота также изменяется дискретными приращениями Δf :

$$\hat{x}_k = \hat{x}(k\Delta f), \quad \Delta f = \frac{1}{t_{\text{макс}}}.$$

Если ряд x_j вещественнозначный (как мы предполагаем), то знание комплексных компонент \hat{x}_k означает, что известны $2n$ вещественных величин (вещественной и мнимой частей каждой \hat{x}_k). Ясно, что имеется избыточность этих данных, выражаемая соотношением

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{n-k}^*,$$

которое легко выводится.

С помощью обратного преобразования мы можем вернуться от вектора \hat{x} к начальному вектору

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \hat{x}_k \exp\left(i \frac{2\pi k j}{n}\right). \quad (8')$$

¹⁾ Эрмитовой длиной называется величина $\sum x x^* = \sum |x|^2$; где x^* — величина, комплексно-сопряженная с числом x .

Заметим, что это соотношение может быть использовано для определения компонент x_j не только при $j \in [1, n]$, но и при всех целых значениях j . Эта функция x периодична по n (в действительности по $n\Delta t$), так как

$$x_{j+n} = x_j.$$

Это объясняет, почему любой сигнал $x(t)$ может быть представлен в виде суммы периодических функций, как в формуле (8').

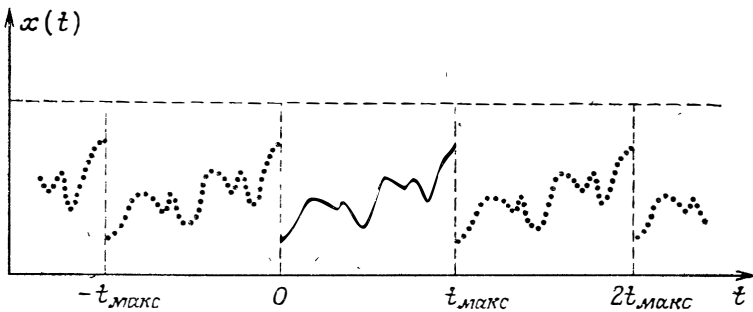


Рис. III. 2. Выборка значений, принимаемых функцией $x(t)$ на конечном временном интервале. Измеренный интервал $[0, t_{\text{макс}}]$ эквивалентен одному периоду функции, определенной при всех значениях $t \in (-\infty, +\infty)$ и имеющей период $t_{\text{макс}}$.

Конечный интервал $[0, t_{\text{макс}}]$ можно рассматривать просто как один период функции, которая, если ее определить при всех t , периодична по $t_{\text{макс}}$, как показано на рис. III. 2.

III. 2.3. Теорема Винера — Хинчина

Определим автокорреляционную функцию сигнала x_j как

$$\psi_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j x_{j+m}.$$

Единица времени по-прежнему равна Δt , поэтому

$$\psi_m = \psi(m\Delta t).$$

Физически эта функция есть среднее произведения значений сигнала в данный момент времени и в более поздний момент времени $m\Delta t$. Следовательно, зная ψ_m , мы можем установить наличие или отсутствие зависимости текущего значения сигнала от его предыдущих значений, отсюда и название функции. Иначе

говоря, корреляционная функции служит мерой степени сходства сигнала с самим собой в прошлом¹⁾.

Так как ряд x_j периодичен по n , автокорреляционная функция также обладает периодичностью:

$$\psi_m = \psi_{m+n}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\psi_m = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k, k'=1}^n \hat{x}_k \hat{x}_{k'} \exp \left[i \frac{2\pi}{n} (jk + (j+m)k') \right].$$

Используя свойство $\hat{x}_{k'}^* = \hat{x}_{n-k'}$ и суммируя по индексам j и k' , мы устанавливаем, что

$$\psi_m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\hat{x}_k|^2 \cos \left(\frac{2\pi mk}{n} \right).$$

Это означает, что с точностью до коэффициента пропорциональности автокорреляционная функция просто совпадает с преобразованием Фурье величины $|\hat{x}|^2$.

Выведем теперь обратное соотношение между $|\hat{x}_k|^2$ и ψ_m . Пусть S_k — функция, определяемая формулой

$$S_k = \sum_{m=1}^n \psi_m \cos \left(\frac{2\pi mk}{n} \right).$$

Подставляя в это определение вычисленное выражение для ψ_m , получаем

$$S_k = \sum_{l=1}^n |\hat{x}_l|^2 \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \cos \left(\frac{2\pi ml}{n} \right) \cos \left(\frac{2\pi ml}{n} \right).$$

Используя равенство

$$\cos \left(\frac{2\pi mp}{n} \right) = \frac{1}{2} \left[\exp \left(i \frac{2\pi mp}{n} \right) + \exp \left(-i \frac{2\pi mp}{n} \right) \right],$$

¹⁾ Если автокорреляционная функция заметно отлична от нуля, то это означает, что сигнал остается относительно предсказуемым: знание сигнала на достаточно большом интервале времени позволяет с достаточной уверенностью вычислять его значение в более поздний момент времени путем экстраполяции. С другой стороны, если ψ_m стремится к нулю, то временное подобие сигнала исчезает и предсказание его эволюции становится невозможным.

преобразуем сумму по m в отрезок геометрической прогрессии длиной в n членов. Суммируя прогрессию, приходим к формуле

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \cos\left(\frac{2\pi mk}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi ml}{n}\right) = \frac{1}{4} [\delta_{k+l}^{(n)} + \delta_{k-l}^{(n)} + \delta_{-k-l}^{(n)} + \delta_{-k+l}^{(n)}],$$

где величина $\delta_j^{(n)}$ равна 1, если $j = 0$, и 0 в противном случае. Комбинируя этот результат с соотношением симметрии $|\hat{x}_{n-l}|^2 = |\hat{x}_l|^2$, получаем

$$S_k = |\hat{x}_k|^2 = \sum_{m=1}^n \psi_m \cos\left(\frac{2\pi mk}{n}\right).$$

Это и есть обратное соотношение, которое требовалось найти. Полученное соотношение есть одна из форм теоремы Винера — Хинчина¹⁾, утверждающей, что функция $|\hat{x}_k|^2$ пропорциональна преобразованию Фурье автокорреляционной функции ψ_m сигнала. График величины $|\hat{x}_k|^2$ как функции частоты f ($f = k\Delta f$) называется *спектром мощности*.

Спектр мощности вещественной функции обладает свойством

$$|\hat{x}_k|^2 = |\hat{x}_{n-k}|^2,$$

которое следует из равенства $\hat{x}_k = \hat{x}_{n-k}^*$. Оно выражает тот очевидный факт, что информация о фазе компонента \hat{x}_k теряется²⁾, когда мы рассматриваем $|\hat{x}_k|^2$.

¹⁾ Эта теорема была доказана Н. Винером после работы Дж. Тейлора, который аналогичным образом измерял величину, аналогичную $|\hat{x}_k|^2$, по турбулентному сигналу (изменению сопротивления анемометра с нагреваемой проволокой).

²⁾ Заметим попутно, что потеря информации о фазе наблюдается в физике довольно часто, например при дифракции электронов и при столкновении элементарных частиц высокой энергии. Информация, содержащаяся в фазе, связана со средней обратимостью сигнала. В таких функциях, как $|\hat{x}_k|^2$ и ψ_m , не изменяющихся при обращении порядка индексов переменной x_j (они имеют одни и те же значения, когда временной ряд рассматривается в порядке 1, 2, ..., n и когда он рассматривается в обратном порядке $n, \dots, 2, 1$), эта информация не может сохраняться. С другой стороны, это неверно для корреляционной функции ϕ_m , определяемой соотношением

$$\phi_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j^2 x_{j+m} - x_{j+m}^2 x_j)$$

и изменяющей знак при рассмотрении временного ряда в обратном порядке.

III. 2.4. Спектр мощности

Рассмотрим более подробно характеристики спектра мощности и выясним, какая информация о сигнале $x(t)$ содержится в нем. Начнем с временного ряда, состоящего из n эквидистант-

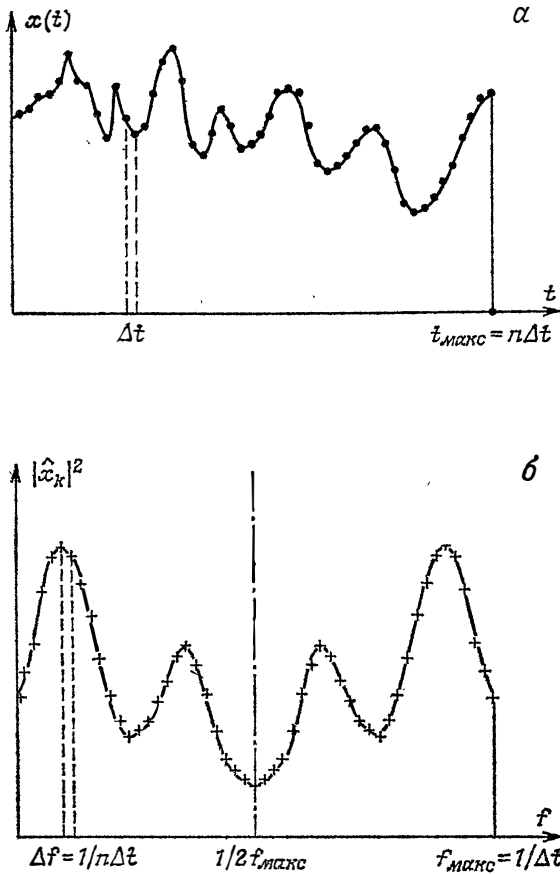


Рис. III. 3. Сигнал и его спектр мощности. *a* — график сигнала, измеряемого выборочно через равные интервалы времени Δt ; *б* — дискретный спектр мощности сигнала *a*. Обратите внимание на то, что спектр $|\hat{x}_k|^2$ симметричен относительно вертикальной оси с абсциссой $(1/2)f_{\text{max}}$.

ных точек, разделенных интервалом Δt (рис. III.3, *a*). Применяя соотношение (8), мы вычисляем сначала x_k , затем $|\hat{x}_k|^2$, что порождает новую функцию на n дискретных точках с абсциссой $(k/n)\Delta t$ ($k = 1, \dots, n$). Абсцисса имеет размерность

обратного времени, т. е. частоты, отчего и происходит название «спектр», закрепившееся за графиком $|\dot{x}_k|^2$. Интерпретация оси ординат зависит от природы измеряемого сигнала.

Традиционное название «спектр мощности» установилось по аналогии с случаем, когда ордината означает мощность, т. е. количество энергии в единицу времени. Рассмотрим сигнал $x(t)$, возникающий при приеме волн (электромагнитных, звуковых и т. д.) антенной. Если детектор линеен и не вносит искажений в рассматриваемой полосе частот, то измеряемая им величина пропорциональна изменениям электрического поля или давления вблизи антенны. Из теории волн известно, что мощность, переносимая волной, пропорциональна квадрату амплитуд волны (так же, как энергия гармонического осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний), усредненной по времени. Формула Парсевала — Планшереля позволяет заменить среднее по времени средним по частоте. Это оправдывает название «спектр мощности», которое мы для удобства сохраняем во всех случаях¹⁾.

Спектр мощности на рис. III. 3, б соответствует сигналу на рис. III. 3, а. Величина шага $f = 1/(n\Delta t)$ по оси абсцисс соответствует спектральному разрешению. Чтобы повысить разрешение, следует увеличить произведение $n\Delta t$. Наибольшая частота спектра равна $f_{\max} = 1/\Delta t$. Чтобы расширить исследуемый диапазон частот, следует уменьшить Δt . В силу соотношения

$$|\dot{x}_k|^2 = |\dot{x}_{n-k}|^2$$

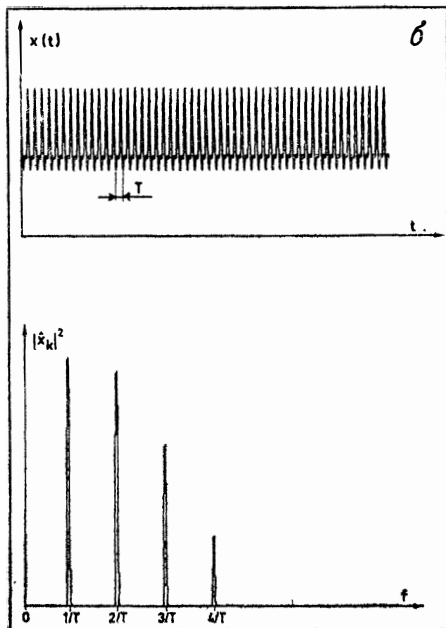
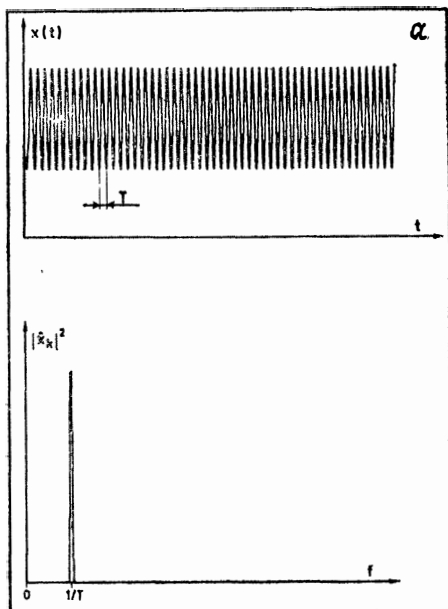
спектр всегда симметричен²⁾ относительно вертикальной прямой $f = (1/2)f_{\max}$. Таким образом, эффективно полезный диапазон частот (содержащий неизбыточную информацию) простирается только от 0 до $1/(2\Delta t)$.

Для полной строгости заметим, что спектр состоит из последовательности «шагов» шириной Δf (рис. III. 4). На практике часто просто проводят отрезки вертикальных линий высотой $|\dot{x}_k|^2$ через точки с абсциссами $f = k\Delta f$. Но обычно соседние точки ($k\Delta f$, $|\dot{x}_k|^2$) соединяют отрезками прямых (рис. III. 3, б). Нередко амплитуда $|\dot{x}_k|^2$ изменяется на несколько порядков, и в таких случаях удобно откладывать ординаты в логарифми-

¹⁾ В действительности соотношение между мощностью (в смысле энергии, принимаемой в единицу времени) и амплитудой спектра выходного сигнала усилителей или вообще приемно-регистрирующей системы может быть очень сложным. Это замечание еще более верно, если детекторы производят нелинейное преобразование сигнала.

²⁾ Напомним, что это свойство является следствием предположения о вещественности ряда x_f .

Рис. III. 4. Периодические функции и их спектры Фурье. *a* — чисто синусоидальная функция; *б* — периодическая функция, содержащая различные гармоники. Показаны только первые четыре гармоники. (Здесь и далее спектры мощности и спектры Фурье, если нет специальных указаний, приводятся в логарифмическом масштабе.)



ческом масштабе. За единицу измерения вдоль оси ординат выбирают *децибел*, равный десятикратному десятичному логарифму. Разность в α децибел соответствует отношению амплитуд $10^{0,1\alpha}$.

III.3. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ СПЕКТРОВ ФУРЬЕ

III.3.1. Периодический сигнал

Вид спектра мощности, как нетрудно понять, зависит от того, как именно сигнал $x(t)$ изменяется со временем. Спектр Фурье интересен тем, что позволяет выявить такие свойства эволюции во времени, которые в противном случае остались бы скрытыми.

Рассмотрим сначала простой случай, когда $x(t)$ — периодический сигнал с периодом T , т. е.

$$x(t) = x(t + T) = x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right).$$

Такой сигнал порождает генератор Ван дер Поля в режиме предельного цикла.

В предельном случае период в точности равен продолжительности измерения

$$T = t_{\text{макс}} = n\Delta t.$$

Тогда, как следует из формулы (8), компоненты Фурье сосредоточены на частотах

$$\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \dots, \frac{n}{T}.$$

В простейшем случае, когда $x(t)$ — круговая тригонометрическая функция (синус или косинус), спектр состоит только из одной ненулевой компоненты с абсциссой $1/T$ (или $k=1$, рис. III.4, а). Для сигнала другой формы, например в случае релаксационных колебаний, амплитуда гармоник с частотой $2/T$, $3/T$, ... уже не равна нулю. Именно поэтому наличие гармоник в спектре указывает на несинусоидальный характер сигнала (рис. III.4, б).

Изложенные выше соображения легко могут быть обобщены на случай, когда продолжительность измерений $t_{\text{макс}}$ есть целое кратное периода сигнала T :

$$t_{\text{макс}} = pT, \quad p — \text{положительное целое число} > 1.$$

В этом случае ненулевые компоненты спектра по-прежнему сосредоточены на частотах $1/T$, $2/T$, ..., но разрешение по ча-

стоте в p раз лучше. Следовательно, все компоненты $|\hat{x}_k|^2$ с индексом k , отличным от целого кратного p , равны нулю.

В действительности описанная нами ситуация носит весьма абстрактный характер, так как на практике период сигнала либо неизвестен, либо известен неточно. Это означает, что отношение t_{\max}/T , вообще говоря, не является целым числом. Как это сказывается на форме спектра? Чтобы ответить на этот вопрос, вычислим преобразование Фурье в простом случае круговой тригонометрической функции

$$x(t) = \exp\left(i \frac{2\pi t}{T}\right),$$

$$x_j = \exp\left(i \frac{2\pi j \Delta t}{T}\right),$$

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \exp\left(i \frac{2\pi j \Delta t}{T}\right) \exp\left(-i \frac{2\pi j k}{n}\right).$$

Полагая $\phi_k = \Delta t/T - k/n$, получаем

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \exp(i2\pi\phi_k j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp(i2\pi\phi_k) \frac{\exp(i2n\pi\phi_k) - 1}{\exp(i2\pi\phi_k) - 1},$$

$$|\hat{x}_k \hat{x}_k^*| = |\hat{x}_k|^2 = \frac{1}{n} \frac{\sin^2(n\pi\phi_k)}{\sin^2(\pi\phi_k)}.$$

Принимая дополнительную гипотезу больших n (и, следовательно, малых $\pi\phi_k$), получаем асимптотически

$$|\hat{x}_k|^2 \approx n \frac{\sin^2(n\pi\phi_k)}{(n\pi\phi_k)^2}.$$

Следовательно, $|\hat{x}_k|^2$ ведет себя, как функция $\sin^2 z/z^2$, график которой вы видите на рис. III. 5. Эта функция имеет максимальную амплитуду, равную единице при $z=0$, и серию вторичных максимумов в точках $\pm(l+1/2)\pi$ (l — положительное целое число), амплитуды которых убывают как $1/z^2$. Таким образом, $|\hat{x}_k|^2$ достигает максимума при k , равном k_0 — ближайшему к $n\Delta t/T$ целому числу; дискретная переменная ϕ_k в этой точке близка нулю. Кроме того, так как целые значения k , близкие k_0 , соответствуют боковым дугам функции $\sin^2 z/z^2$, амплитуда $|\hat{x}_k|^2$ при $k = k_0 \pm l$ не равна нулю, хотя и быстро убывает с увеличением l . Окончательный результат состоит в том, что помимо одного пика, возникающего в том случае, когда между периодом сигнала и продолжительностью измерений имеется резонанс, существуют также вторичные пики, называемые

побочными, которые расположены симметрично относительно частоты $1/T$. Ширина линии — порядка нескольких единиц частоты Δf и максимальна, когда отношение $n\Delta t/T$ полуцелое. На рис. III. 6 показано, как эта ситуация отличается от резонанса.

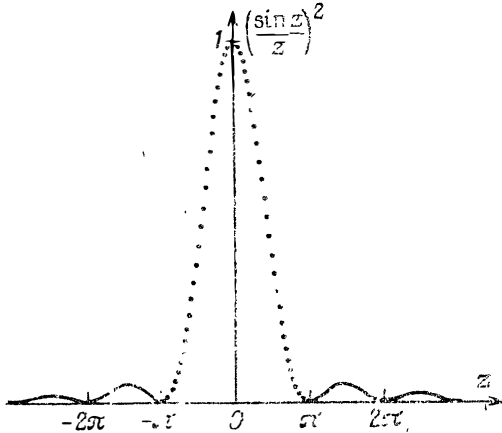


Рис. III. 5. График функции $\sin^2 z/z^2$.

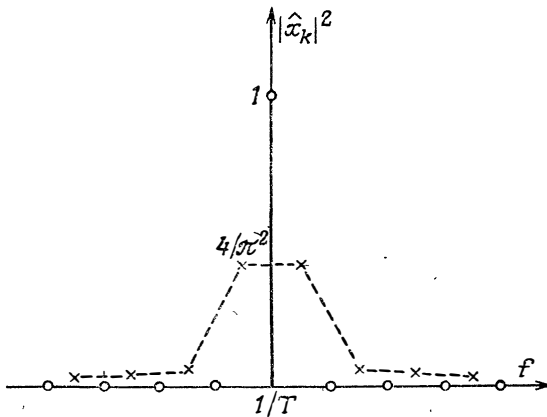


Рис. III. 6. Форма одной спектральной компоненты при двух различных условиях получения выборочных значений: сплошная линия (кружки) удовлетворяет условию резонанса: $n\Delta t/T$ — целое число; штриховая линия (крестики) удовлетворяет другому условию: $n\Delta t/T$ — полуцелое число.

Резюмируя, можно сказать, что спектр периодического сигнала с периодом T состоит из пика на частоте $1/T$, побочных пиков и, возможно, несколько других пиков (и их побочных пиков) — гармоник основной частоты.

III. 3.2. Квазипериодический сигнал

Функция y , зависящая от r независимых переменных t_1, t_2, \dots, t_r , называется периодической с периодом 2π по каждому из своих аргументов, если значение ее не изменяется при увеличении любой из своих переменных на 2π :

$$y(t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_r) = y(t_1, t_2, \dots, t_j + 2\pi, \dots, t_r), \quad j = 1, \dots, r.$$

Такая функция называется *квазипериодической* по времени, если все ее r переменных пропорциональны времени t :

$$t_j = \omega_j t, \quad j = 1, \dots, r.$$

Квазипериодическая функция имеет r основных частот

$$f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}, \quad j = 1, \dots, r,$$

и, следовательно, r периодов $T_j = 1/f_j = 2\pi/\omega_j$.

Прежде чем мы перейдем к форме спектра Фурье такой функции, напомним, что приведенное выше ее формальное определение относится к любому явлению кратной периодичности. Приведем один пример этого явления из многих: астрономическое положение точки на поверхности Земли описывается квазипериодическим законом, так как обусловлено вращением Земли вокруг своей оси ($T_1 = 24$ ч), вращением Земли вокруг Солнца ($T_2 \approx 365,242$ дней) и, наконец, прецессией земной оси ($T_3 \approx 25\,800$ лет; период T_3 иногда называют платоническим годом)¹⁾. Мы уже упоминали о том, что фазовая траектория, соответствующая квазипериодической функции, определена на *торе*²⁾ размерности r , который принято обозначать символом T^r .

Как нетрудно догадаться, спектр Фурье функции, квазипериодической по времени, в общем случае имеет сравнительно сложный вид. Однако существует одно исключение — когда квазипериодический сигнал $x(\omega_1 t, \dots, \omega_r t)$ есть сумма периодических функций:

$$x(\omega_1 t, \dots, \omega_r t) = \sum_{i=1}^r x_i(\omega_i t).$$

¹⁾ Очень малыми возмущениями этих основных движений мы пренебрегаем. Если учесть различие в порядке величин временных масштабов движений, то взаимодействие между ними пренебрежимо мало.

²⁾ В простейшем случае $r = 2$ можно показать при совершенно общих условиях, что траектория, описываемая параметрически тремя функциями времени $x(\omega_1 t, \omega_2 t)$, $(d/dt)x(\omega_1 t, \omega_2 t)$ и $(d^2/dt^2)x(\omega_1 t, \omega_2 t)$, действительно лежит на торе в \mathbb{R}^3 , т. е. на торе в обычном смысле.

В этом случае, используя линейность соотношения (8), можно показать, что спектр мощности есть сумма r спектров каждой из функций $x_i(\omega_i t)$. Следовательно, он состоит из множества пиков на частотах f_1, f_2, \dots, f_r и их гармониках:

$$m_1 f_1, m_2 f_2, \dots, m_r f_r$$

(m_1, m_2, \dots, m_r — положительные целые числа). Но, вообще говоря, ниоткуда не следует, что квазипериодический сигнал должен быть суммой r периодических слагаемых. Если квазипериодическая функция содержит член типа произведения круговых тригонометрических функций, например $\sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t)$, то ее спектр Фурье содержит основные частоты $|f_i - f_j|$ и $|f_i + f_j|$, а также их гармоники, поскольку

$$\sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t) = \frac{1}{2} \cos(|f_i - f_j| 2\pi t) - \frac{1}{2} \cos(|f_i + f_j| 2\pi t).$$

Обобщая этот результат, мы можем утверждать, что спектр Фурье квазипериодической функции $x(t)$, нелинейно зависящей от периодических функций переменных $\omega_i t$, содержит компоненты со всеми частотами вида

$$|m_1 f_1 + m_2 f_2 + \dots + m_r f_r|,$$

где m_i — произвольные целые числа.

В дальнейшем мы ограничимся пока двумя периодами ($r=2$) и оставим в стороне то обстоятельство, что разрешение Δf спектра мощности конечно. Каждая ненулевая компонента спектра сигнала $x(\omega_1 t, \omega_2 t)$ есть пик с абсциссой $|m_1 f_1 + m_2 f_2|$, который мы обозначим для краткости через (m_1, m_2) . Отношение f_1/f_2 может быть либо рациональным, либо иррациональным числом. В последнем случае из теории чисел известно, что суммы вида $|m_1 f_1 + m_2 f_2|$ образуют на положительной вещественной полуоси всюду плотное множество. Иначе говоря, любое вещественное положительное число сколь угодно близко к одной из таких сумм. Следовательно, спектр сигнала с двумя периодами также всюду плотен. Но это не означает, что его можно представить с помощью непрерывной функции. Действительно, два пика, близких друг к другу на оси частот, априори отнюдь не обязательно должны иметь близкие амплитуды. Следовательно, в большинстве случаев мы будем наблюдать весьма ограниченное число частот, соответствующих линиям с большой амплитудой, поскольку линии более высоких порядков (т. е. соответствующие значениям m_1 и m_2 , превышающим несколько единиц) имеют слишком малые амплитуды, чтобы их можно было

обнаружить¹⁾. На практике квазипериодический спектр идентифицируют, пытаясь найти две основные частоты f_1 и f_2 , которые позволили бы представить частоты линий с большой амплитудой

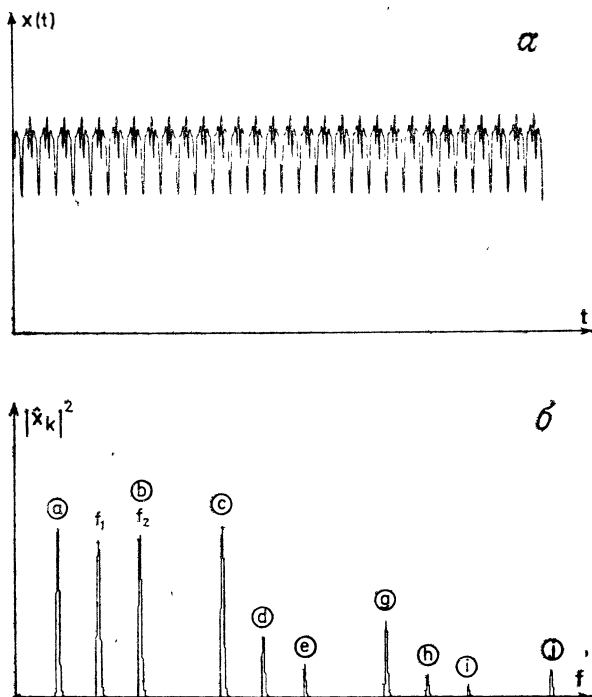


Рис. III. 7. Квазипериодическая функция с двумя частотами f_1 и f_2 (отношение f_1/f_2 иррационально). a — сигнал; b — его спектр Фурье, содержащий помимо основных частот f_1 и f_2 главные пики с комбинационными частотами $f_p = m_1 f_1 + m_2 f_2$:

$$\begin{aligned}
 a &\rightarrow f_2 - f_1, & e &\rightarrow 5f_1 - f_2, & j &\rightarrow 5f_1 + f_2, \\
 b &\rightarrow 3f_1 - f_2, & g &\rightarrow 3f_1 + f_2, \\
 c &\rightarrow f_1 + f_2, & h &\rightarrow 5f_1, \\
 d &\rightarrow 3f_1, & i &\rightarrow 7f_1 - f_2.
 \end{aligned}$$

в виде простых комбинаций $|m_1 f_1 + m_2 f_2|$ с небольшими m_1 и m_2 : $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (рис. III. 7).

¹⁾ Очень часто (хотя с чисто математической точки зрения не всегда) амплитуды пиков высокого порядка убывают как $\exp(-a_1 |m_1| - a_2 |m_2|)$, где a_1 и a_2 — положительные числа. При больших $|m_1|$ и $|m_2|$ эти амплитуды становятся пренебрежимо малыми. Обнаружить их практически невозможно, если индексы m_1 и m_2 по абсолютной величине существенно превышают a_1^{-1} и a_2^{-1} .

Если отношение f_1/f_2 рационально, то спектр Фурье не всюду плотен. Это означает, что он заведомо не соответствует непрерывной функции. Так как

$$f_1/f_2 = n_1/n_2 \quad (n_1, n_2 - \text{целые числа}),$$

квазипериодический сигнал в этом случае в действительности яв-

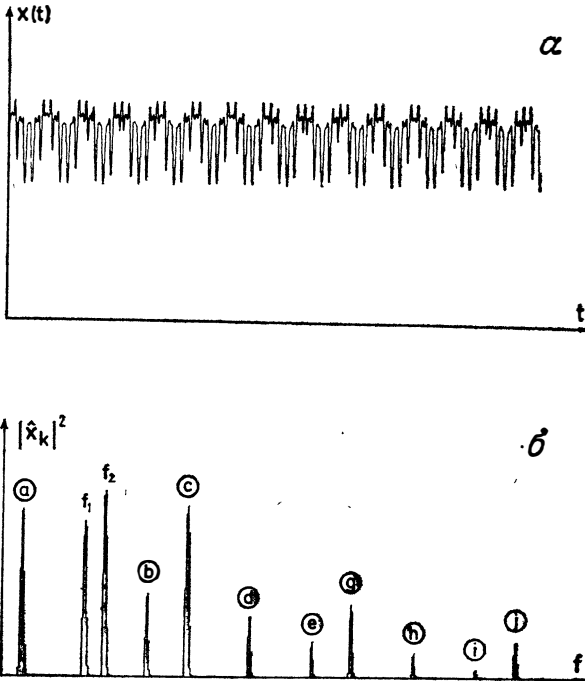


Рис. III. 8. Квазипериодическая функция (отношение f_1/f_2 рационально). **a** — сигнал; **б** — соответствующий спектр Фурье. Сигнал почти совпадает с функцией, изображенной на рис. III. 7, но частота f_1 изменена так, что $f_1/f_2 = 2/3$. Обратите внимание на то, что при этих условиях все пики соответствуют гармоникам с частотой, кратной частоте $f = f_2 - f_1 = (1/3)f_2$:

$$\begin{aligned} a &\rightarrow f_2 - f_1, & d &\rightarrow 6f, & h &\rightarrow 10f, \\ b &\rightarrow 3f (= f_2), & e &\rightarrow 7f, & i &\rightarrow 11f, \\ c &\rightarrow 5f, & g &\rightarrow 9f, & j &\rightarrow 12f. \end{aligned}$$

ляется периодическим с периодом $T = n_1T_1 = n_2T_2$. Действительно, по определению получаем

$$\begin{aligned} x(\omega_1 t, \omega_2 t) &= x(\omega_1 t + 2\pi n_1, \omega_2 t + 2\pi n_2), \\ x(\omega_1 t, \omega_2 t) &= x\left(\omega_1 \left(t + \frac{n_1}{f_1}\right), \omega_2 \left(t + \frac{n_2}{f_2}\right)\right). \end{aligned}$$

Говорят, что происходит *синхронизация* частот f_1 и f_2 (или *затягивание частоты*). Все линии спектра Фурье являются гармониками низшей частоты

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_2}.$$

Эта ситуация изображена на рис. III. 8. Соседние линии спектра всегда разделены одинаковым расстоянием $1/T$.

III. 3.3. Аперриодический сигнал

Если сигнал $x(t)$ не является ни периодическим, ни квазипериодическим, то его называют *аперриодическим* (или иногда *непериодическим*). Позднее в этой книге нам встретятся несколько примеров такой ситуации, и мы увидим, что спектр Фурье аперриодического сигнала непрерывен¹⁾. Реальная трудность состоит в том, что спектр Фурье, кажущийся непрерывным, не может быть автоматически приписан аперриодическому сигналу, так как такой спектр может соответствовать квазипериодическому сигналу с очень большим (в пределе — бесконечным) числом частот.

Если предположить, что сигнал действительно аперриодический, то все равно нам придется решать (по чисто методическим соображениям), мало ли число степеней свободы (например, меньше, чем 10) или, наоборот, очень велико. В первом случае перед нами открывается возможность дать полностью детерминированное описание системы. В отличие от этого во втором случае при современном состоянии знаний мы можем развить только вероятностный подход. Он состоит в том, что вводят понятие случайности, не ставя под сомнение (скрытую) детерминированность явлений. Хотя второй случай выходит за рамки книги, все же уместно остановиться несколько подробнее на том, что мы имеем в виду, когда проводим различие между «детерминированным» и «случайным».

Предельный случай случайного сигнала известен под названием белого шума. Этот термин вызывает ассоциации с шумом

¹⁾ Спектр аперриодического сигнала стремится к непрерывной функции только в среднем. Действительно, если вычислить дискретный спектр сигнала продолжительностью t_{\max} с помощью описанного выше метода выборочных значений, то окажется, что амплитуды соседних $|\hat{x}_k|^2$ очень сильно изменяются независимо от того, сколь большим мы выбрали t_{\max} . Разность между $|\hat{x}_k|^2$ и $|\hat{x}_{k\pm 1}|^2$ обычно сравнима с самими этими величинами. Следовательно, чтобы получить непрерывный спектр (или по крайней мере разумное приближение к нему) исходя из последовательности $|\hat{x}_k|^2$, необходимо либо произвести усреднение по многим спектрам, взяв каждый из них во временном окне шириной t_{\max}/N (N — большое число), либо, что эквивалентно, усреднить $|\hat{x}_k|^2$ локально по некоторому числу последовательных значений k .

(звуком, лишенным какой бы то ни было гармоничности) и со светом без окраски. Таким образом, белый шум можно видеть как белый свет или слышать, например, как шум водопада. Белый шум порождает множество независимых источников: атомы раскаленной нити в лампе, испускающей белый свет, или брызги водопада, низвергающегося на скалистое основание.

Порождаемый белым шумом сигнал $x(t)$ в каждый момент времени можно считать «новым»¹⁾ по крайней мере в первом приближении. Покажем, что соответствующий спектр мощности «плоский», т. е. амплитуда не зависит от частоты, так что его наиболее существенная характеристика в том, что он лишен какой бы то ни было гармоничности.

Пусть $x(t)$ — сигнал с нулевым средним и дисперсией $\overline{x^2}$. Отсутствие корреляции между значениями сигнала в различные моменты времени выражается условием²⁾

$$\langle x_j x_{j+m} \rangle = \overline{x^2} \delta_m = \langle \psi_m \rangle,$$

где δ_m — дельта-функция Кронекера ($\delta_0 = 1$, $\delta_m = 0$ при $m \neq 0$). Из теоремы Винера — Хинчина получаем

$$\langle |\hat{x}_k|^2 \rangle = \sum_{m=1}^n \langle \psi_m \rangle \cos\left(\frac{2\pi mk}{n}\right) = \overline{x^2}.$$

Это показывает, что средняя амплитуда спектра мощности сигнала не зависит от k . Иначе говоря, средняя амплитуда белого шума не зависит от частоты.

Описанная выше ситуация весьма широко встречается на практике: высокочастотная компонента многих природных шумов есть такой белый шум. Действительно, шум, обусловленный молекулярным возбуждением, включает в себя действие почти бесконечно многих независимых агентов: молекул, электронов

¹⁾ Чтобы быть вполне строгими, заметим следующее. Шум является белым, если отдельные источники не только независимы, но и порождают сигналы, представляющие собой импульсы бесконечно малой продолжительности. Если же спектр каждого такого элементарного сигнала наделен какой-нибудь структурой, то свет или звук становится *окрашенным*.

²⁾ В приводимом выражении под средними понимаются *средние по ансамблю*. Мы неявно рассматриваем автокорреляционные функции ψ_m и фурье-образы $|\hat{x}_k|^2$, получаемые из ряда, содержащего n значений x — индивидуальной реализации этих величин. Затем мы берем их среднее арифметическое $\langle \rangle$. Заметим, что в данной реализации среднеквадратичное расстояние между величиной $|\hat{x}_k|^2$ и ее средним значением есть величина такого же порядка, как и среднее. Как мы уже упоминали, это объясняет, почему спектры турбулентных сигналов, чтобы получить непрерывные функции частот, следует либо сглаживать, либо усреднять по ансамблю реализаций.

проводимости, упругих колебаний атомов кристаллической решетки и т. д.

Теория термодинамического шума принадлежит к числу наиболее выдающихся достижений физики первой половины XX в. В качестве конкретного примера рассмотрим классический пример шума Найквиста, названного так в честь физика, предложившего объяснение этого явления. Пусть RC -цепь (R — сопротивление, C — емкость) находится в тепловом равновесии (в отсутствие приложенного извне напряжения). Чувствительный вольтметр измеряет флуктуации напряжения $V(t)$ на конденсаторе или резисторе. Энергия, запасенная в конденсаторе емкостью C , выраженная через напряжение на его обкладках, равна $CV^2/2$. Эта энергия обусловлена тепловыми флуктуациями, и по теореме Эренфеста о равномерном распределении энергии ее среднее значение равно $kT/2$, где k — постоянная Больцмана ($k = R/N$, R — джоулевская постоянная, N — число Авогадро), T — абсолютная температура системы. Таким образом, имеем

$$\langle V^2 \rangle = \frac{kT}{C},$$

где среднее берется либо по времени, либо по термодинамическому ансамблю. Но эта величина есть среднее мгновенных значений, а мы хотели бы знать частотную структуру такого шума. Определить ее можно следующим образом. Если $V(t)$ — напряжение на конденсаторе в момент времени t , то напряжение в последующий момент времени $t + \tau$ обусловлено двумя факторами. С одной стороны, конденсатор разряжается через резистор R , создавая напряжение $V(t)e^{-\tau/RC}$, где (RC) — постоянная времени цепи. С другой стороны, на обкладках конденсатора тепловые флуктуации создают новый электрический заряд. Эти флуктуации не коррелированы с начальным зарядом конденсатора и тем самым с $V(t)$. Так как RC -цепь линейна, мы получаем

$$\langle V(t)V(t+\tau) \rangle = \langle V(t)^2 \rangle \exp(-|\tau|/RC),$$

где в случае отрицательного значения τ следует взять его абсолютную величину $|\tau|$. Спектр шума определяется теоремой Винера — Хинчина для непрерывных переменных

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\tau \langle V(t)V(t+\tau) \rangle \cos(\omega\tau),$$

$$S(\omega) = \frac{2RkT}{\pi(1 + \omega^2 R^2 C^2)}.$$

В этом формализме соотношение Парсеваля — Планшереля имеет вид

$$\int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = \langle V^2(t) \rangle = \frac{kT}{C}.$$

Эта формула дает спектральное распределение флуктуаций напряжения на емкости в RC -цепи. В пределе нулевой емкости

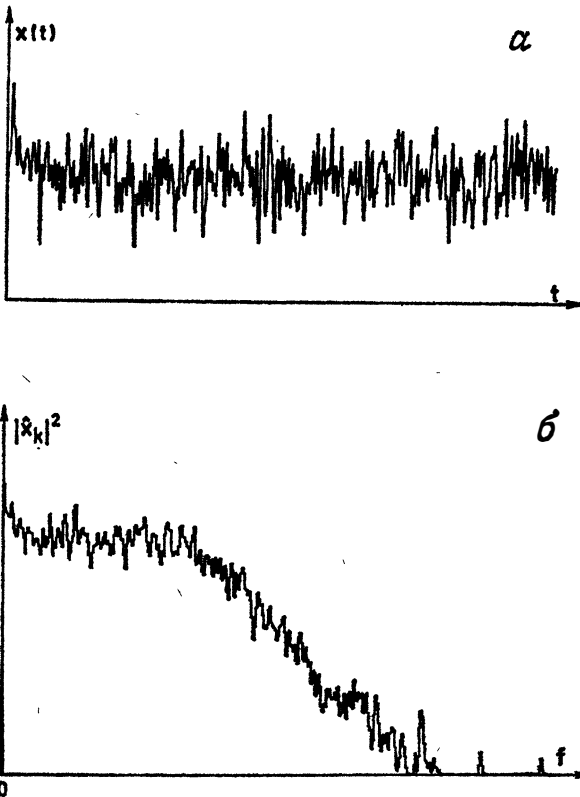


Рис. III. 9. Аperiodическая функция. a — сигнал; b — его спектр Фурье. Спектр непрерывный в отличие от линейчатых спектров рис. III. 7 и III. 8.

достаточно положить $C = 0$ в выражении для $S(\omega)$, и мы получаем классическое выражение для шума Найквиста:

$$S(\omega) = \frac{2RkT}{\pi}.$$

Следовательно, тепловой шум на резисторе есть *белый шум*, так как $S(\omega)$ не зависит от ω . Амплитуда такого шума пропорциональна абсолютной температуре и сопротивлению. Заметим, что

в рассматриваемом пределе ($C = 0$) среднее величины V^2 расходится, так как $\langle V^2 \rangle = kT/C$. На практике $\overline{V^2}$ не обращается в бесконечность, так как при очень высоких частотах в цепи всегда имеется паразитная емкость, и поэтому C никогда не бывает в точности равной нулю.

Шум, производимый простым резистором, есть белый шум, спектр мощности которого не зависит от частоты. Наоборот, тепловые флуктуации напряжения RC -цепи образуют *окрашенный шум*: спектр его также является непрерывной функцией частоты, но отличен от константы.

Завершив это отступление о случайных сигналах, возвратимся к нашей главной цели, т. е. к исследованию сигналов, возникающих в детерминистской динамике. Как мы уже отмечали, апериодический сигнал имеет спектр мощности, который кажется непрерывным, как в примере на рис. III.9. Следовательно, выбранный нами метод анализа не позволяет провести различие между апериодическим и случайным сигналами. Это ограничивает применимость преобразования Фурье и вынуждает нас обратиться к другим методам, главным образом к методу сечений Пуанкаре.

III. 4. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (БПФ)

Мы видели, что существует тесная взаимосвязь между периодическим, квазипериодическим или апериодическим характером сигнала $x(t)$ и формой его спектра мощности. Чтобы определить характер динамического режима, остается явно вычислить $|\hat{x}_k|^2$. Теоретически это нетрудно сделать, используя формулу (8). Но на практике объем вычислений становится устрашающим, как только n принимает достаточно большие значения. Тем не менее удобно выбирать n большим, а Δt малым, чтобы воспроизвести сигнал $x(t)$ как можно точнее. При $n=10^3$ (т. е. еще при сравнительно малом значении n) нам пришлось бы вычислить 1000 сумм, каждая из которых содержит 1000 членов! Вообще вычисление n компонент спектра требует выполнения числа операций (сложения и умножения) порядка n^2 . Столь быстрое возрастание числа операций долгое время было ограничивающим фактором, сдерживавшим применение преобразования Фурье. Даже появление первых компьютеров не слишком исправило ситуацию.

Но в тех случаях, когда n есть степень двойки, алгоритм, известный под названием БПФ¹⁾, позволяет вычислять спектр за

¹⁾ БПФ означает *быстрое преобразование Фурье*. Этот алгоритм был предложен в 1965 г. Кули и Тьюки. Впоследствии авторы обнаружили, что тот же алгоритм был разработан еще в 1942 г. другими исследователями, работа которых в то время не привлекла к себе должного внимания.

существенно меньшее число операций порядка $n \log_2 n$. При $n = 2^{10} = 1024$ спектр вычисляется в 100 раз быстрее, а при $n = 10^{18}$ — в 7000 раз быстрее, чем традиционным методом. Это приводит к ощутимой разнице в стоимости вычислений. Именно благодаря столь фантастической экономии времени анализ Фурье стал стандартной процедурой в научно-исследовательских лабораториях и помимо исследования динамических систем позволил достичь большого прогресса во многих других областях¹⁾.

Упомянем среди прочих областей различные виды спектроскопии: инфракрасную, комбинационного рассеяния, рентгеновскую, на основе магнитного резонанса, фотонных биений и т. д. На рынке появились цифровые анализаторы Фурье, которые, комбинируя БПФ с другими трюками, позволяют получать спектр мощности сигнала, содержащего тысячи точек, всего лишь за несколько секунд.

¹⁾ Методы обработки сигналов (главным образом фильтрования и повышения отношения сигнал/шум) претерпели существенные технические усовершенствования, в которых немалую роль сыграло БПФ.

ГЛАВА IV

СЕЧЕНИЯ ПУАНКАРЕ

IV. 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКА

Примем теперь весьма общую точку зрения и начнем с того, что, как было показано в трех предыдущих главах, эволюция многочисленных систем может быть описана системой n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = F(\mathbf{X}, t), \quad (9)$$

где \mathbf{X} — вектор из \mathbb{R}^n (фазового пространства), а F — векторное поле над этим пространством. Как мы уже знаем, именно такой вид¹⁾ имеют законы, управляющие поведением различных осцилляторов.

Система дифференциальных уравнений типа системы (9) называется *поток*ом в \mathbb{R}^n . Если F не зависит явно от времени, а зависит только от \mathbf{X} :

$$F = F(\mathbf{X}(t)),$$

то поток называется *автономным*. Уравнение (5) может служить типичным примером автономного потока. С другой стороны, если F зависит явно от времени, то поток называется *неавтономным*. Примером такого потока может служить уравнение Матье (7).

Найти аналитическое выражение для решений уравнений (9) удастся лишь в отдельных частных случаях, когда поток интегрируем. В большинстве случаев поток неинтегрируем, и нам приходится исследовать каждое решение, рассматривая соответствующую ему траекторию в фазовом пространстве. Поскольку часто и это бывает очень трудно, мы упростим задачи, используя для этого один метод, развитый Анри Пуанкаре.

¹⁾ Это согласуется с тем, что с помощью подходящей замены переменных мы всегда можем преобразовать одно дифференциальное уравнение n -го порядка в систему n дифференциальных уравнений первого порядка. Этим свойством мы уже воспользовались при построении фазового портрета для генератора Ван дер Поля.

IV. 2. СЕЧЕНИЯ ПУАНКАРЕ

IV. 2.1. Построение и свойства

Теоретически не существует никаких ограничений на размерность n фазового пространства. Однако в этой главе по соображениям дидактического и практического порядка мы рассмотрим только трехмерный случай¹⁾. Кроме того, нас будет интересовать только асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$. Исследование переходных состояний, обладающих значительно меньшей общностью, мы оставим в стороне.

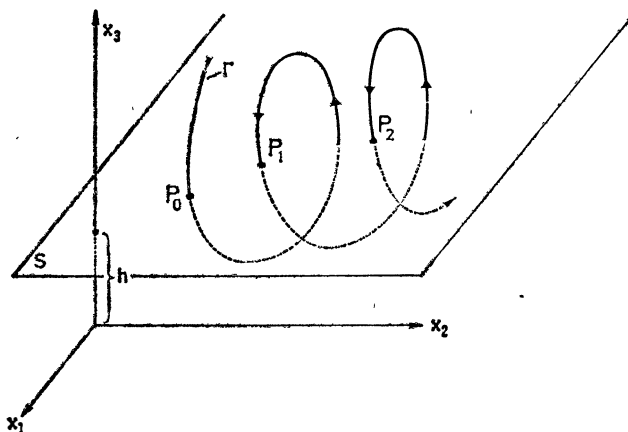


Рис. IV.1. Схематическое изображение сечения Пуанкаре. Фазовая траектория Γ последовательно пересекает плоскость S (с $\dot{x}_3 < 0$) в точках P_0, P_1, P_2, \dots . Эти точки принадлежат сечению Пуанкаре траектории Γ плоскостью S .

Вместо прямого изучения решения системы уравнений (9) в \mathbb{R}^3 может оказаться полезным рассмотреть точки пересечения траектории с плоскостью. Схематически эта процедура изображена на рис. IV. 1. Для иллюстративных целей мы выбрали плоскость S , заданную уравнением $x_3 = \text{const}$, и отметили точки пересечения, соответствующие заданному направлению эволюции ($\dot{x}_3 < 0$). Высота плоскости выбрана с таким расчетом, что траектория Γ пересекает S в точках P_0, P_1, P_2, \dots . Динамика в этих точках такова, что x_3 непрерывно переходит с одной стороны плоскости S на другую. В действительности S может быть любой плоскостью, но подходящий выбор ее приводит к сечениям, более легко поддающимся анализу. Итак, исходя из на-

¹⁾ В этой главе либо $n = 3$, либо мы рассматриваем проекцию фазовых траекторий на трехмерное подпространство.

чальной точки, мы получаем множество точек, образующих сечение Пуанкаре, т. е. некоторый граф в двух измерениях.

Преобразование, переводящее точку в следующую, является непрерывным отображением плоскости S на себя, называемым *отображением Пуанкаре*:

$$P_{k+1} = T(P_k) = T(T(P_{k-1})) = T^2(P_{k-1}) = \dots \quad (10)$$

Так как решение системы (9) единственно, точка P_0 однозначно определяет точку P_1 , которая в свою очередь определяет P_2 и т. д. Если, наоборот, P_1 однозначно определяет точку P_0 при изменении знака t в уравнениях (9), то T — *обратимое отображение* плоскости S на себя.

Заметим, что сечение Пуанкаре заменяет эволюцию с непрерывным временем, описываемую уравнениями (9), отображением (10) с дискретным временем. Если не считать особых (но тем не менее интересных) случаев, то интервал времени между последовательными точками непостоянен.

Наконец, подчеркнем, что по построению сечение Пуанкаре и отображение Пуанкаре обладают топологическими свойствами того же рода, что и породивший их поток. Например, если поток (9) диссипативен и объемы в фазовом пространстве сжимаются, то отображение T сокращает площади на плоскости S . Наоборот, отображение T сохраняет площади, если поток (9) консервативен, или гамильтонов. Аналогично если у потока имеется аттрактор, то его структурные характеристики могут быть найдены в сечении Пуанкаре.

IV. 2.2. Практический интерес

Метод сечений Пуанкаре упрощает исследование непрерывных потоков по трем причинам. Во-первых, мы переходим от потока в \mathbb{R}^3 к отображению на плоскости, понижая тем самым число координат на единицу¹⁾. Во-вторых, время дискретизуется и дифференциальные уравнения заменяются разностными уравнениями, определяющими отображение Пуанкаре $P \rightarrow T(P)$. Эти алгебраические уравнения значительно легче поддаются решению. Наконец, в-третьих, резко сокращается число данных, подлежащих обработке, так как почти всеми точками на траектории можно пренебречь. Покажем теперь, какие преимущества проистекают из этих упрощений.

Первое преимущество — на уровне математического моделирования. Итерация отображения

$$x_i(k+1) = T(x_i(k)), \quad i = 1, 2,$$

¹⁾ В более общем случае непрерывный поток в \mathbb{R}^n сводится к дискретному отображению \mathbb{R}^{n-1} на себя.

осуществляется несравненно легче, чем интегрирование такого потока, как (9), если говорить о времени вычислений и необходимой производительности ЭВМ¹⁾. Следовательно, итерированные отображения позволяют апробировать адекватность модели ценой меньших затрат. В гл. VI мы познакомимся с примером того, как метод сечений Пуанкаре позволяет открыть фундаментальные свойства. Хотя априори область сечения Пуанкаре трехмерного потока есть поверхность, задача может быть нередко сведена далее к (необратимому) отображению прямой \mathbb{R}^1 на себя.

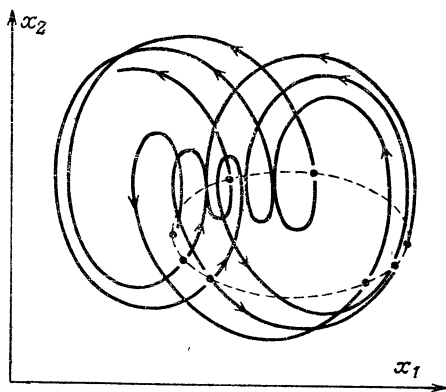


Рис. IV. 2. Сечение Пуанкаре для квазипериодического режима. Показаны часть траектории в трехмерном пространстве, спроектированной на плоскость (x_1, x_2) , и (штриховой линией) соответствующее сечение Пуанкаре.

Метод Пуанкаре имеет и другие преимущества помимо упрощения математического моделирования. В трехмерном пространстве мы можем изображать траектории только либо в перспективе, либо в проекции. И в том и в другом случае трудно получить представление об их расположении в пространстве. Сечение Пуанкаре траекторий быстро дает хорошую картину. Подтверждением этому может служить рис. IV. 2. На нем изображена проекция трехмерной траектории на плоскость. Многооборотная кривая с самопересечениями не много говорит о динамике системы (за исключением того, что динамика сложная). Но стоит лишь провести сечение Пуанкаре, как тотчас же становится ясно, что эта траектория, по-видимому, лежит на торе T^2 , который, как мы знаем, является аттрактором режима

¹⁾ В случае отображения плоскости на себя вычисления могут быть практически выполнены с помощью карманного калькулятора. Именно так Энон открыл аттрактор, носящий ныне его имя, определяемый итерацией отображения $(x, y) \rightarrow (\beta y, 1 - \alpha x^2 + y)$, где $\alpha = 1,4$; $\beta = 0,3$ (см. гл. VI).

с двумя периодами. Сечение Пуанкаре может характеризовать трехмерный поток и по-другому (хотя и в том же духе). Точки сечения Пуанкаре могут быть расположены более или менее сложным образом на кривой или распределены по поверхности, как на рис. IV. 3. Во втором случае мы заключаем с полной уверенностью, что поток апериодический. Если же сечение Пуан-

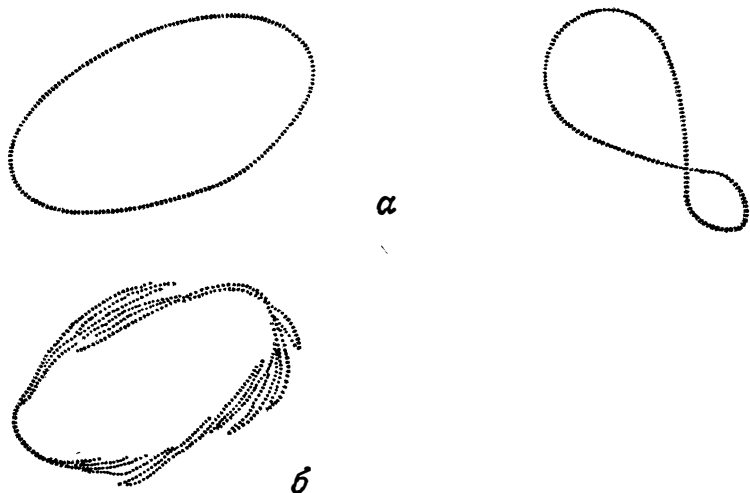


Рис. IV. 3. Примеры сечений Пуанкаре. *a* — квазипериодический режим; *б* — хаотический режим.

каре выглядит как кривая, то мы имеем дело с динамическим режимом, который либо квазипериодический, либо апериодический с сильным сжатием. Действительно, если сокращение площадей в фазовом пространстве происходит очень быстро, то протяженность в «боковом» направлении (т. е. в направлении сжатия) сечения Пуанкаре становится пренебрежимо малой¹⁾. Для того чтобы определить истинный характер потока, необходим более подробный анализ.

IV. 3. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ СЕЧЕНИЯ ПУАНКАРЕ

IV. 3.1. Периодическое решение

Следуя процедуре, изложенной в разд. III. 3, исследуем соответствие между видом сечения Пуанкаре аттрактора и динамическими свойствами решения. Если решение периодическое, то, как мы уже упоминали, фазовая траектория представляет

¹⁾ В качестве примера см. поток Лоренца в приложении Г.

собой замкнутую орбиту — предельный цикл. Соответствующее сечение Пуанкаре устроено очень просто: это либо одна точка P_0 (рис. IV. 4), либо несколько точек, если предельный цикл очень извилист. Точка P_0 является неподвижной точкой отображения T , так как

$$P_0 = T(P_0) = T^2(P_0) = \dots$$

Это свойство позволяет сделать еще один шаг и исследовать устойчивости периодического решения. Поскольку этот вопрос

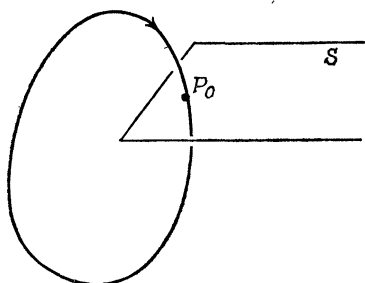


Рис. IV. 4. Сечение Пуанкаре предельного цикла. В этом очень простом случае сечение Пуанкаре представляет собой одну точку P_0 .

важен для последующего, рассмотрим проблему устойчивости несколько подробнее.

Итак, нас интересует устойчивость замкнутой траектории относительно бесконечно малых возмущений. В этом случае достаточен линейный анализ устойчивости, ограниченный членами первого порядка по возмущению. Отображение Пуанкаре (в первом порядке теории возмущений) описывается матрицей M , определенной в окрестности точки P_0 как

$$M = \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \right]_{x_i^0}, \quad i = 1, 2.$$

Эта матрица, называемая матрицей Флоке, обладает тем свойством, что после одной петли (одного периода) образ точки $P_0 + \delta$, выбранной очень близко к точке P_0 , находится на расстоянии ¹⁾

$$T(P_0 + \delta) - P_0 \approx M\delta, \quad \|\delta\| \rightarrow 0.$$

Устойчивость траектории определяется собственными значениями матрицы M . В самом деле, через m периодов мы имеем

$$T^m(P_0 + \delta) - P_0 \approx M^m\delta,$$

¹⁾ Для простоты мы не приводим вычислений координат точек пересечения с плоскостью сечения Пуанкаре. Хотя приводимая далее процедура по существу описывает то, что происходит вдоль собственного вектора матрицы Флоке, она равным образом применима и к смещениям в общем направлении.

т. е. начальное отклонение увеличивается в M^m раз. В результате смещение экспоненциально убывает со временем, если все собственные значения матрицы M по абсолютной величине меньше единицы, т. е. если все собственные значения лежат внутри единичной окружности на комплексной плоскости. В этом случае периодическая траектория линейно устойчива, так как любое смещение из неподвижной точки стремится к уменьшению. В противоположном случае, когда по крайней мере одно собственное значение матрицы M по абсолютной величине больше единицы, смещение растет со временем по экспоненте, т. е. предельный цикл неустойчив. Разумеется, экспоненциальный рост продолжается не бесконечно, но ограничивается нелинейными эффектами, которые не принимаются во внимание в линейном анализе. Таким образом, потеря устойчивости предельным циклом соответствует пересечению одним или несколькими собственными значениями матрицы Флоке. Во второй части этой книги мы еще вернемся к вопросу о потере устойчивости.

IV. 3.2. Квазипериодическое решение

В случае двоякопериодического решения с двумя основными частотами f_1 и f_2 известно, что аттрактором является тор T^2 , который может быть проведен в \mathbb{R}^3 . Любую траекторию на поверхности тора можно рассматривать как суперпозицию двух движений¹⁾: вращения по большей окружности (параллелям) и вращения вокруг «цилиндра», образующего тор (рис. IV. 5). Каждая из основных частот f_1 и f_2 соответствует этим вращательным движениям. Точки пересечения траектории с плоскостью сечения S возникают через регулярные интервалы времени, равные периоду первого движения (в нашем примере $T_1 = 1/f_1$). Точки пересечения расположены на замкнутой кривой C , форма которого может быть:

1) либо простой, т. е. без точек самопересечения (окружность, эллипс и т. д.);

2) либо более сложной (восьмерка, циклоида и т. д.) при наличии гармоник с частотами f_1 и f_2 .

¹⁾ Если (x, y, z) — координаты в фазовом пространстве \mathbb{R}^3 , то одно из возможных параметрических представлений траектории имеет вид

$$\begin{aligned}x &= a_1 \sin(2\pi f_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(2\pi f_2 t + \alpha_2), \\y &= b_1 \sin(2\pi f_1 t + \beta_1) + b_2 \sin(2\pi f_2 t + \beta_2), \\z &= c_1 \sin(2\pi f_1 t + \gamma_1) + c_2 \sin(2\pi f_2 t + \gamma_2),\end{aligned}$$

где $a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i$ и γ_i — вещественные константы, f_1 и f_2 — две частоты движения. В этом частном случае движение представляет собой просто сумму двух периодических движений. В общем случае суперпозиция двух частот имеет более сложный вид.

Точная форма сечения Пуанкаре зависит от отношения f_1/f_2 . Если оно иррационально, то траектория не замыкается и всюду плотно покрывает поверхность тора. В этом случае говорят, что частоты f_1 и f_2 *несоизмеримы*. Замкнутая кривая C непрерывна.

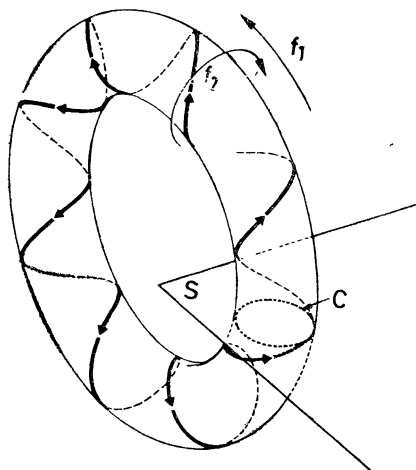


Рис. IV. 5. Тор T^2 и его сечение Пуанкаре плоскостью S . Через f_1 и f_2 обозначены две частоты, определяющие перемещение по поверхности тора. Если отношение f_1/f_2 иррационально, то сечение Пуанкаре есть замкнутая кривая C .

Так как каждая из ее точек есть образ некоторой другой точки кривой C под действием преобразования T , кривая C инвариантна относительно отображения T :

$$T(C) = C.$$

Хотя кривая C непрерывна, последовательные точки пересечения траектории с плоскостью S не покрывают ее сплошь. На-

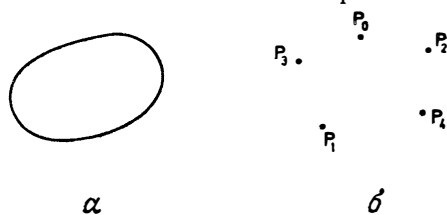


Рис. IV. 6. Сечение Пуанкаре для квазипериодического режима с двумя частотами f_1 и f_2 . a — отношение f_1/f_2 иррационально; b — отношение f_1/f_2 рационально (в нашем примере $f_1/f_2 = 3/5$). Индекс указывает, в каком порядке траектория проходит точки P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 .

оборот, отображение T соответствует сдвигу вдоль C на конечный интервал.

Если отношение f_1/f_2 рационально, то сечение Пуанкаре состоит из конечного множества точек, распределенных по C . Однако на этот раз C — уже не непрерывная кривая, так как тра-

ектория уже не образует всюду плотного покрытия на торе. Между f_1 и f_2 возникает затягивание частоты: отношение f_1/f_2 равно отношению двух целых чисел n_1 и n_2 . Завершив n_1 оборотов по «параллелям» и n_2 оборотов по «меридианам», траектория замыкается. Следовательно, мы имеем в действительности дело с периодическим решением [с периодом $T = (n_1/f_1) = (n_2/f_2)$]. Сечение Пуанкаре содержит только n_1 точек, таких, что

$$P_i = T^{n_1}(P_i).$$

Обе указанные возможности представлены на рис. IV. 6.

IV. 3.3. Аперiodическое решение

Чтобы понять, как выглядит сечение Пуанкаре аперiodического решения трехмерного потока, очень важно разобраться в слоистой структуре странных аттракторов. Мы отложим рассмотрение этого вопроса до гл. VI, которая посвящена описанию этих сложных аттракторов. Напомним, что, когда поток сильно диссипативен и приводит к быстрому сокращению площадей, его сечение Пуанкаре *практически* можно рассматривать как множество точек, распределенных вдоль некоторой кривой (отрезка прямой, дуги кривой и т. д.). В этом случае мы можем определить координату x для каждой точки на кривой и исследовать, как изменится x со временем. Отображение Пуанкаре на таком одномерном графике называется *отображением первого возвращения*. Следовательно, естественным обобщением исследования сечения Пуанкаре является анализ отображения первого возвращения, т. е. итерации

$$x_{k+1} = f(x_k),$$

выражающей зависимость между координатами текущей и предшествующей точек.

IV. 4. ОТОБРАЖЕНИЕ ПЕРВОГО ВОЗВРАЩЕНИЯ

Во второй части книги нам часто придется исследовать одномерные нелинейные отображения вида

$$x_{k+1} = f(x_k).$$

В частности, мы покажем, что такое отображение может порождать хаотическое поведение. В гл. IX мы убедимся в том, что отображения первого возвращения имеют самое непосредственное отношение к явлениям перемежаемости. Но прежде, чем мы

займемся выяснением этого вопроса, уместно обсудить, как используются отображения первого возвращения в более простых ситуациях.

IV.4.1. Итерация одномерного отображения

Классическими средствами исследования одномерного отображения являются графики на плоскости (x_k, x_{k+1}) функции $f: x_{k+1} = f(x_k)$ и тождественного отображения $x_{k+1} = x_k$. Чтобы

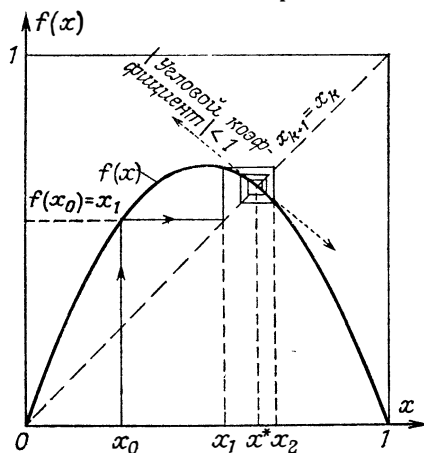


Рис. IV. 7. Отображение $f(x)$ при $\mu = 0,7$. Неподвижными точками отображения являются точки пересечения графика функции $f(x)$ с диагональю, т. е. с графиком функции x , задающей тождественное отображение (геометрический метод построения последовательных итераций отображения f см. в тексте). Существует устойчивая неподвижная точка x^* , к которой сходятся итерации всех начальных условий в интервале $(0, 1)$. Начало координат — неустойчивая неподвижная точка. В этом представлении устойчивость неподвижной точки можно определить по угловому коэффициенту касательной к кривой, задающей отображение, в неподвижной точке: если абсолютная величина углового коэффициента меньше единицы, то неподвижная точка устойчива (как точка x^*). В противном случае неподвижная точка неустойчива (как точка 0).

продемонстрировать этот метод, выберем в качестве примера нелинейное отображение¹⁾

$$x_{k+1} = 4\mu x_k(1 - x_k), \quad x_k \in [0, 1].$$

График функции $f(x) = 4\mu x(1 - x)$ при заданном значении μ , заключенном между 0,25 и 0,75 (на рис. IV. 7 $\mu = 0,7$), имеет два нуля (при $x = 0$ и $x = 1$) и максимум, равный μ , в точке

¹⁾ Как будет показано в гл. VIII, это отображение (квадратичная итерация на единичном интервале) обладает необычайно богатыми и разнообразными динамическими режимами.

$x = 0,5$. Пользуясь этим графиком, исследуем заданную выше итерацию с начального условия x_0 . Первая итерация $x_1 = f(x_0)$ есть точка пересечений вертикали с абсциссой x_0 и графика функции f (см. рис. IV.7). Аналогично вторая итерация $x_2 = f(x_1)$ расположена на пересечении вертикали с абсциссой x_1 и графика функции f и т. д. Простой и эффективный метод построения последовательных итераций состоит в использовании тождественного отображения, или диагонали, $x_{k+1} = x_k$. Действительно, горизонталь $x_{k+1} = x_k$ пересекает диагональ $x_{k+1} = x_k$ в точке $x_k = x_k$. Следовательно, достаточно провести вертикаль через эту точку, не обращаясь к оси абсцисс.

Таким образом, повторяя последовательность операций

1) проведение вертикали от диагонали до пересечения с графиком функции $f(x)$;

2) проведение горизонтали из полученной точки до пересечения с диагональю,

мы получаем последовательные итерации отображения. Из рис. IV.7 видно, что итерации сходятся к точке с абсциссой x^* — пересечению диагонали с графиком функции f . Читатель может легко убедиться в том, что при любом начальном условии x_0 , кроме концевых точек интервала 0 и 1, итерации функции f сходятся к x^* . Ясно, что любая точка пересечения графика функции $f(x)$ с диагональю (графиком тождественного отображения) является итерацией самой себя; это *неподвижная точка* отображения f . Именно с такой ситуацией мы встречаемся при рассмотрении начала координат: выбирая $x_0 = 0$, получаем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и т. д. Но при значении x_0 , сколь угодно близком, не равном нулю, итерации сходятся к x^* . Это означает, что любое смещение из начала координат, каким бы малым оно ни было, увеличивается при итерациях. Точка, находящаяся на малом расстоянии от начала координат, движется от этой неподвижной точки, которая поэтому называется неустойчивой. В отличие от нее неподвижная особая точка x^* , к которой сходятся итерации при любом начальном условии из $(0, 1)$, является устойчивой неподвижной точкой.

Существует критерий, позволяющий определять устойчивость или неустойчивость неподвижной точки без громоздких вычислений. Графическое построение показывает, что если тангенс угла наклона касательной к кривой $f(x)$ по абсолютной величине больше единицы, то неподвижная точка неустойчива: именно так обстоит дело с началом координат на рис. IV.7. С другой стороны, если тангенс угла наклона касательной к кривой f по абсолютной величине меньше единицы, то итерации сходятся к неподвижной точке: так обстоит дело с неподвижной точкой x^* .

Результаты относительно существования и устойчивости неподвижной точки одномерного отображения справедливы не только для квадратичной функции, выбранной в качестве иллюстрации, но и для более общих отображений.

IV. 4.2. Предельный цикл генератора Ван дер Поля

Теперь мы уже в состоянии легко установить результат, сформулированный в разд. II. 1.2, без доказательства, а именно существование устойчивого периодического решения уравнения (5) при $\epsilon > 0$. Это уравнение определяет поток на плоскости с прямоугольными координатами $(\theta, \dot{\theta})$. Мы уже упоминали о том, что фазовые траектории имеют форму спиралей, раскручивающихся из начала координат и сходящихся вдали от него.

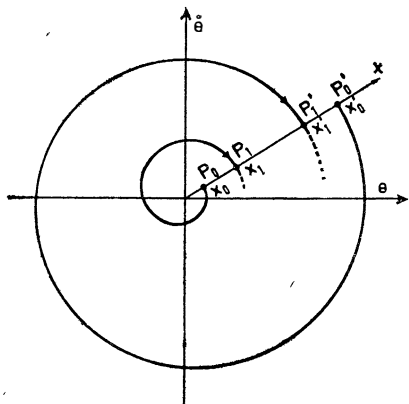


Рис. IV. 8. Две траектории для уравнения Ван дер Поля. Образом точки P_0 служит точка P_1 , образом точки P'_0 — точка P'_1 .

Рассмотрим на фазовой плоскости луч, исходящий из начала координат, и его пересечения с траекториями, начинающимися в точках P_0 и P'_0 (рис. IV. 8). Поступая таким образом, мы в действительности строим сечение Пуанкаре в \mathbb{R}^2 ; в данном случае «плоскость» сечения вырождается в полупрямую, или луч.

Каждой точке на луче мы можем поставить в соответствие координату x , измеряющую расстояние от этой точки до начала координат (т. е. радиус окружности, проходящей через эту точку на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$). Зададим функцию $x \rightarrow f(x)$, сопоставляющую каждой точке на луче другую точку, именно точку первого пересечения луча с траекторией, выходящей из точки x . Такая функция f обладает некоторыми легко проверяемыми, но важными свойствами:

1) f однозначно определена, т. е. f отображает каждую точку луча в другую (одну и только одну) точку луча;

2) f непрерывна;

3) в окрестности начала координат тангенс угла наклона касательной к кривой f больше единицы (в противном случае мы имели бы в этой области неравенство $f(x) < x$, поэтому последовательность итераций

$$x_1 = f(x_0) < x_0,$$

$$x_2 = f(x_1) < x_1 < x_0,$$

.....

сходилась бы к началу координат, а это противоречит утверждению о том, что траектории расходятся);

4) при больших x тангенс угла наклона касательной к кривой f меньше единицы (сходящиеся спирали);

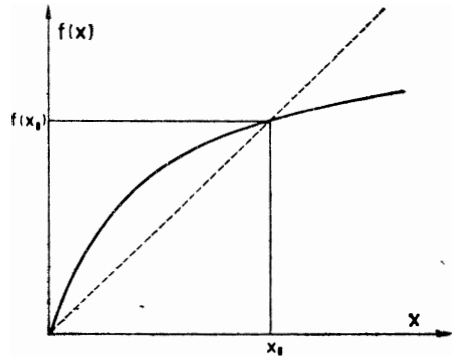


Рис. IV.9. График отображения $x \rightarrow f(x)$, имеющего устойчивую неподвижную точку x_0 .

5) f — обратимая функция, а тангенс угла наклона касательной к ее графику всюду имеет один и тот же знак (положителен). Действительно, мы можем единственным образом вернуться «вспять» вдоль траектории [уравнение (51)]. Следовательно, каждому значению $f(x)$ соответствует одно и только одно значение x .

Если учесть все эти свойства, то простейшая форма графика функции f такая, как на рис. IV.9. Так как f — непрерывная функция, существует по крайней мере одно¹⁾ положительное значение x_0 , при котором график функции f пересекается с графиком тождественного отображения:

$$f(x_0) = x_0.$$

Следовательно, отображение первого возвращения в сечении Пуанкаре имеет неподвижную точку. Это означает, что поток,

¹⁾ Как показывают вычисления, для уравнения Ван дер Поля существует только одна неподвижная точка.

из которого возникает сечение Пуанкаре, должен иметь предельный цикл. В силу условия $|df/dx|_{x_0} < 1$ неподвижная точка x_0 является аттрактором. Следовательно, периодическое решение устойчиво.

IV.4.3. Редукция трехмерного потока

Некоторые (но отнюдь не все) трехмерные потоки могут быть сведены к отображениям меньшей размерности. В качестве иллюстративного примера рассмотрим следующий поток, предложенный Рёсслером:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + xz - cz, \end{aligned} \quad (11)$$

где x , y и z — переменные, a , b и c — параметры, значения которых требуется выбрать. При некоторых значениях параметров (например, при $a=b=0,2$; $c=5,7$) решения уравнений (11) обнаруживают аперiodическое или хаотическое поведение. На рис. IV.11 эволюция переменных $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ кажется совершенно некогерентной, хотя сами уравнения очень просты. На рис. IV.12,а мы видим проекцию фазовой траектории на плоскость (x, y) . Среди многих возможных сечений Пуанкаре существует одно, которое особенно просто реализуемо на практике, а именно сечение, соответствующее плоскости, определяемой уравнением

$$y + z = 0.$$

Первое из уравнений (11) показывает, что переменная достигает в этом сечении максимума, так как $\dot{x} = 0$. Численно интегрируя уравнения (11), мы можем получать значение x каждый раз, когда эта переменная достигает экстремума определенного типа, например максимума. Пусть x_k — последовательность таких значений. Априори не существует причины, по которой между двумя последовательными значениями не могло бы существовать какое-нибудь соотношение. Но если мы построим график зависимости x_{k+1} от предыдущего значения x_k , то получим поразительный результат, изображенный на рис. IV.10: вместо того чтобы рассеяться по всей плоскости, точки укладываются на кривую с «горбом». В этой связи можно сделать два замечания. Во-первых, не вызывает сомнений тесная связь между потоком (11) и кривой на рис. IV.10. Следовательно, исследуя только отображение первого возвращения и не анализируя полностью поток, мы можем прийти к некоторым выводам

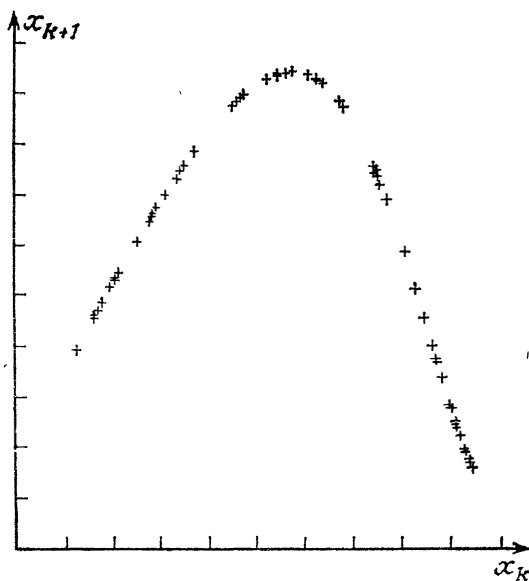


Рис. IV.10. Зависимость последовательных максимумов аperiodического решения x потока (11) от значения предыдущего максимума. Обратите внимание на регулярный характер полученной кривой и на существование у нее одного максимума.

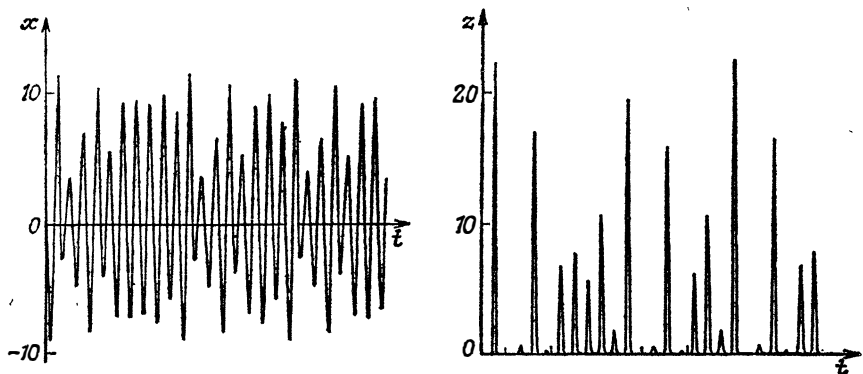


Рис. IV.11. Аperiodическое решение потока (11), полученное с помощью численного интегрирования. Несмотря на простоту дифференциальных уравнений, описываемая ими эволюция далеко не регулярна, как видно на примере функций $x(t)$ и $z(t)$. Такой вывод подтверждается сечением Пуанкаре, а также анализом Фурье.

о потоке. Сведение трехмерного потока к отображению на интервале позволяет достичь существенного упрощения. Во-вторых, что еще более важно, мы можем повторить замечание, высказанное в предыдущем разделе: сравнительно простое детерминистское описание [уравнение (11)] может породить поведение, не обладающее никакой видимой регулярностью. Изменение во времени переменных $x(t)$, $y(t)$, $r(t)$ представляется совершенно некоррелированным (рис. IV.11), тогда как закон, определяющий это изменение [поток (11)] совершенно регулярен (рис. IV.11)). Здесь мы затрагиваем существенный вопрос, которому посвящена вторая часть нашей книги — вопрос о существовании детерминистского хаоса.

IV.5. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Изложенные выше соображения относительно метода Пуанкаре предполагают знание фазового пространства исследуемой динамической системы. Однако на практике мы никогда, по крайней мере в экспериментальных исследованиях реальных систем, не располагаем подобной информацией. Чаще всего нам приходится ограничиваться измерением изменений лишь одного свойства, связанного более или менее сложной зависимостью с одной из независимых переменных соответствующей задачи (а иногда и с несколькими переменными). Может создаться впечатление, что любая попытка практически реализовать изложенный выше анализ обречена на провал.

Должны ли мы сделать вывод о том, что метод Пуанкаре применим только для численного моделирования потоков типа (11) и не может быть использован для исследования поведения реальных систем? Безусловно, не следует, по крайней мере если число степеней свободы остается малым, как в случае тех систем, которые рассматриваются в нашей книге. Мы надеемся, что каждая из переменных достаточно хорошо отражает общее поведение, и это обстоятельство позволяет нам проводить полный анализ. Отсюда напрашивается гипотеза: по-видимому, возможно восстановить топологию аттрактора, исходя из наблюдений только сигнала $X(t)$ и выбирая в качестве фазового пространства либо $X(t)$, $X(t+\tau)$, $X(t+2\tau)$, ..., либо $X(t)$, $\dot{X}(t)$, $\ddot{X}(t)$, Иначе говоря, мы можем считать, что сигнал $X(t)$ не зависит от значений, принимаемых им же в более поздний момент времени $X(t+\tau)$, где τ — произвольная постоянная, называемая запаздыванием. Можно поступить по-другому и рассматривать сигнал $X(t)$ и его производную по времени $\dot{X}(t)$ как независимые сигналы. Сказанное отнюдь не означает, будто аттрактор, получаемый в новом пространстве, тождествен аттрактору в ис-

ходном фазовом пространстве. Мы утверждаем лишь, что новое представление аттрактора сохраняет основные топологические свойства первого и этого может оказаться достаточно для исследования существенных характеристик исходного аттрактора.

В случае простого аттрактора (неподвижной точки или предельного цикла) топологическая эквивалентность почти очевидна, однако она отнюдь не очевидна для более сложного аттрактора — тора или странного аттрактора, а именно такие аттракторы мы намереваемся исследовать. Поскольку точных границ области топологической эквивалентности двух представлений не существует, полезно обратиться к примеру. Для потока (11) численное интегрирование позволяет получить все переменные

$$x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), \ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t).$$

С этого момента и впредь мы можем сравнивать характеристики аттрактора в фазовом пространстве (x, y, z) с его характеристиками в любом другом представлении. На рис. IV. 12 сравнивается проекция фазовых траекторий на плоскость (x, y) с проекцией на плоскость (x, \dot{x}) траекторий в пространстве (x, \dot{x}, \ddot{x}) ¹⁾. Сходство топологий этих двух кривых очевидно. Кроме того, наибольшие показатели Ляпунова²⁾ также дают великолепное количественное согласие: значения, вычисленные в двух представлениях, различаются менее чем на 1 %!

Остается практически осуществить процедуру. Один из методов состоит в численной обработке сигнала $X(t)$ для определения $X(t + \tau)$ или $\dot{X}(t)$. Если сигнал хранится в памяти компьютера, то такая обработка проводится без труда. Возможны и другие методы, более физические, чем вычислительные. Например, с помощью аналогового электронного устройства можно

¹⁾ Для уравнений Рёсслера соотношения, позволяющие совершить переход от координат (x, \dot{x}, \ddot{x}) к координатам (x, y, z) исходного фазового пространства, таковы:

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= -\frac{\ddot{x} + (c - 2a - x)\dot{x} + x + b}{c - a - x}, \\ z &= \frac{\ddot{x} - a\dot{x} + x + b}{c - a - x}. \end{aligned}$$

Формально замена переменных $(x, y, z) \rightarrow (x, \dot{x}, \ddot{x})$ есть криволинейное преобразование координат в фазовом пространстве. При естественных предположениях о непрерывности подобного рода преобразование сохраняет топологию таких объектов, как аттракторы потоков.

²⁾ Показатель Ляпунова служит мерой средней скорости расхождения двух траекторий (см. приложение Б).

в каждый момент времени определять величину $X(t)$ и ее производную $\dot{X}(t)$. Иногда эксперимент планируют с таким расчетом, чтобы измерение сигнала в двух различных специально выбранных точках системы соответствовало временной задержке между двумя однотипными сигналами. Все трудности суще-

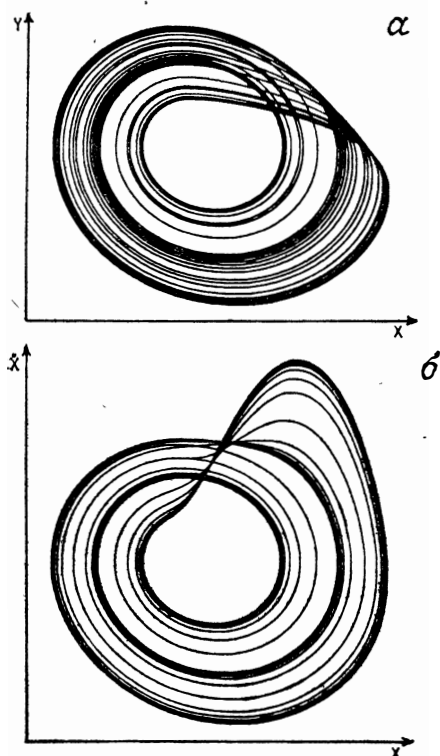


Рис. IV. 12. Проекция траекторий потока Ресслера а — проекция на «истинную» фазовую плоскость (x, y) ; б — проекция на «воображаемую» плоскость (x, \dot{x}) . Из работы: Packard N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D., Shaw R. S. Geometry from a time series. Phys. Rev. Letters, 1980, v. 45, p. 712.

ственно уменьшаются в тех случаях, когда две независимые величины удастся измерить одновременно. Таким образом, мы видим, что у экспериментатора имеется достаточно широкий выбор методов.

Наконец, заметим, что для сигнала с периодичностью T (периодического и в особенности квазипериодического) простой способ построения сечения Пуанкаре состоит в измерении значений сигнала в моменты времени $T, 2T, \dots, nT$. Так как T — в точности временной интервал, необходимый для завершения одного цикла на аттракторе (предельном цикле или торе), мы по существу стробоскопируем сигнал. Поскольку эта задача

легко выполняема, стробоскопические¹⁾ методы часто используются для идентификации и исследования квазипериодических решений.

Завершив обзор различных методов измерения характеристик, зависящих от времени режимов динамических систем, мы проиллюстрируем теперь эти методы на конкретных случаях. Мы избрали несколько архетипов, которые проливают свет и на методы анализа, и на получаемые с их помощью результаты. В следующей главе подробно описаны три экспериментальные ситуации.

¹⁾ Метод стробоскопирования равным образом применим и к анализу систем с периодической вынуждающей силой. В этом случае частота вынуждающего воздействия задает естественный интервал для стробоскопической выборки значений сигнала.

ГЛАВА V

ТРИ ПРИМЕРА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

V. 1. ВВЕДЕНИЕ

Чтобы проиллюстрировать на конкретных примерах теоретические идеи, которые будут развиты в оставшейся части книги, мы решили сосредоточить внимание на трех различных экспериментальных ситуациях. В своем выборе мы исходили из богатства их динамического поведения и обилия известных результатов.

Наш первый пример — электромеханическое устройство с тремя степенями свободы, а именно магнит, помещенный в магнитное поле. Мы будем называть это устройство вращающимся магнитом. Наш второй пример заимствован из гидродинамики — это движение горизонтального слоя жидкости, подогреваемого снизу. Ключевое явление в этом случае называется неустойчивостью Рэлея — Бенара. Именно она вызывает спонтанное движение жидкости. Говоря об этом явлении, мы будем использовать сокращенное обозначение РБ (Рэлей — Бенар). Наконец, свой третий пример мы взяли из химии. Это наиболее известная и хорошо изученная из колебательных химических реакций — реакция Белоусова — Жаботинского (сокращенно БЖ).

В этой главе мы намереваемся изложить то, что известно о дифференциальных уравнениях, описывающих каждый из трех осцилляторов, и в общих чертах охарактеризовать методы и экспериментальное оборудование, используемые для исследования выбранных нами систем.

V. 2. ВРАЩАЮЩИЙСЯ МАГНИТ

V. 2.1. Описание

Вращающийся магнит, о котором идет речь, — не более чем искусная реализация параметрического маятника, позволяющая удобно производить точные наблюдения поведения системы с тремя степенями свободы. Как и другие аналогичные устройства, установка была создана отчасти с демонстрационными целями. Один из наиболее привлекательных аспектов этого устройства состоит в том, что оно позволяет в широких пределах

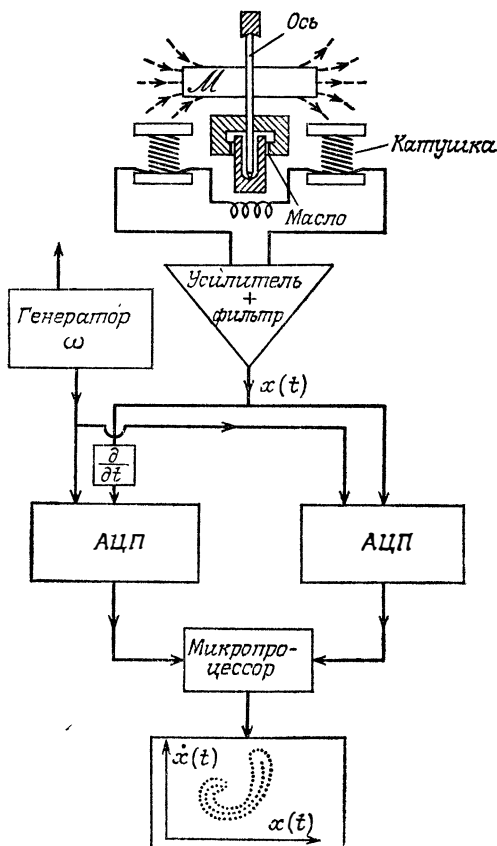


Рис. V. 1. Схема установки для исследования динамического поведения вращающегося магнита. На магнит, который может вращаться на оси, действуют стационарное и вращающееся магнитные поля (см. также рис. V. 2). Диссипация контролируется изменением вязкости масла в подшипнике, температура которого регулируется с высокой точностью. Положение магнита определяется по ЭДС, наводимой при его движении в катушках-датчиках. Эта ЭДС $x(t)$ пропорциональна мгновенной угловой скорости вращения магнита. Аналоговая схема дает производную $\dot{x}(t)$ этой ЭДС по времени. Частота вращающегося магнитного поля служит тактовой частотой для включения двух аналого-цифровых преобразователей, благодаря чему за каждый оборот поля в ЗУ компьютера вводится пара значений $x(t)$ и $\dot{x}(t)$. Таким образом за достаточно большое время эксперимента регистрируется сечение Пуанкаре траекторий.

изменять уровень трения. В свою очередь это открывает возможность наблюдения и анализа влияния диссипации энергии при переходе от консервативной или квазиконсервативной ситуации (с нулевым или пренебрежимо слабым трением) к ситуации все более и более диссипативной.

Блок-схема установки изображена на рис. V.1. Магнит, который может вращаться вокруг вертикальной оси, помещен между двумя парами катушек Гельмгольца с горизонтальными осями, расположенными под прямым углом друг к другу. К каждой паре катушек подается переменный (синусоидальный) ток с угловой частотой ω и переменной интенсивностью. Так как токи сдвинуты по фазе на $\pi/2$, эти пары катушек создают стационарное магнитное поле и магнитное поле, вращающееся вокруг оси магнита с угловой частотой ω тока. Вращающееся магнитное поле стремится привести магнит в движение. Приемные катушки, перпендикулярные катушкам Гельмгольца, расположены вблизи магнита и детектируют его движение по индуцируемой электродвижущей силе. Наведенный в катушках сигнал $X(t)$ зависит от мгновенной угловой скорости магнита. После усиления и фильтрации сигнал поступает на анализатор Фурье, который вычисляет спектр мощности.

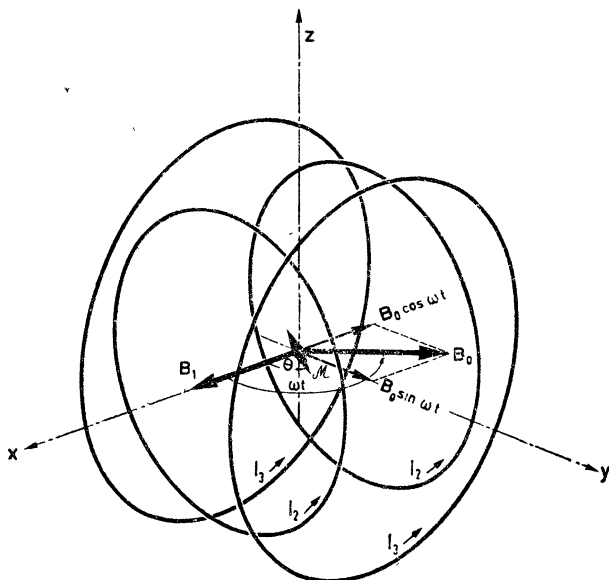
Построение сечения Пуанкаре фазовых траекторий проводится прямо, поскольку магнит представляет собой осциллятор с вынуждающей силой. Действительно, период вращения наложенного магнитного поля служит естественным интервалом времени для стробоскопии. Достаточно измерять сигнал x каждый раз, как вращающееся поле совершает поворот на 2π . Иначе говоря, период переменного тока, текущего по обмотке катушек Гельмгольца, используется как интервал, через который производится выборка значений сигнала. Что касается двумерного представления, то две величины записываются в цифровой форме одновременно: сам сигнал X и получаемая аналогично его производная \dot{X} .

Подшипники оси магнита изготовлены из рубина, чтобы свети до минимума трение между твердыми телами. Погружая нижнюю опору оси в масла с различной вязкостью, можно варьировать уровень трения в жидкости и связанной с вязкостью диссипацией энергии. Одно и то же устройство может быть и диссипативным, и почти консервативным.

V. 2.2. Уравнение эволюции

Рассмотрим случай, когда трение пренебрежимо мало. Движение магнита определяется приложенными к нему силами. Магнит с моментом инерции I и магнитным моментом M поме-

щен в суперпозицию двух магнитных полей: одного стационарного с индукцией B_1 и другого с индукцией B_0 , вращающегося с угловой скоростью ω (рис. V. 2). Изменения угла θ между магнитом и выбранным фиксированным направлением в горизон-



$$l_2 = l_1 + l_0 \cos \omega t$$

$$l_3 = l_0 \sin \omega t$$

Рис. V. 2. Схема расположения магнита M относительно катушек, создающих поле. Вращающееся магнитное поле B_0 создается двумя парами катушек Гельмгольца с взаимно перпендикулярными осями. К обмоткам катушек подведен ток $I_0 \sin \omega t$ и $I_0 \cos \omega t$. Стационарное магнитное поле B_1 создается постоянным электрическим током I_1 , пропускаемым через одну из пар катушек.

Из работы В. Крокетта.

тальной плоскости определяются дифференциальным уравнением

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \mathcal{M} B_1 \sin \theta - \mathcal{M} B_0 \sin (\theta - \omega t).$$

Приведем это уравнение к безразмерному виду, полагая

$$M = \mathcal{M} B_1 / J \omega^2, \quad P = \mathcal{M} B_0 / J \omega^2$$

и выбирая $1/\omega$ за единицу времени. Получаем

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = - M \sin \theta - P \sin (\theta - t).$$

Чтобы прийти к выражению, стоящему в правой части, необходимо принять допущение (вполне обоснованное для данной экспериментальной установки) о том, что магнитные поля не зависят от положения магнита.

Трение в жидкости, как известно, приводит к замедлению движения силой, пропорциональной скорости. Следовательно, когда трение перестает быть пренебрежимо малым, мы должны ввести в предыдущее уравнение член, пропорциональный $\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} = -M \sin \theta - P \sin(\theta - t). \quad (12)$$

Это неавтономное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, эквивалентное потоку в \mathbb{R}^3 , который мы запишем с помощью трех переменных y, θ, ϕ :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\alpha y - M \sin \theta - P \sin(\theta - \phi), \\ \dot{\theta} &= y, \\ \dot{\phi} &= 1. \end{aligned}$$

Итак, мы имеем нелинейную систему с тремя степенями свободы¹⁾. Физически переменная ϕ (связанная с ωt) представляет собой угол между вращающимся магнитным полем и фиксированным направлением плоскости. Именно поэтому решение потока всегда периодически (с периодом 2π в единицах $1/\omega$) по компоненте ϕ . Заметим, что в отсутствие вращающегося поля, т. е. при $P=0$, уравнение (12) переходит в уравнение для простого маятника с затуханием²⁾, линейная аппроксимация которого была рассмотрена в разд. 1.3.2.

После того как магнит выбран и тем самым выбраны значения I и \mathcal{M} и фиксирована угловая частота ω синусоидального тока, управляющими параметрами остаются индукции B_1 и B_0 стационарного и вращающегося магнитных полей. Их можно регулировать, изменяя интенсивность электрического тока, пропускаемого через обмотку катушек Гельмгольца. Таким обра-

¹⁾ В более общем случае неавтономный поток можно представить в виде автономного потока в фазовом пространстве более высокой размерности с помощью подходящей замены переменных.

²⁾ Заметим, что к аналогичному результату мы приходим, когда стационарное поле обращается в нуль ($M=0$), если за движением наблюдать в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью ω . Действие двух полей симметрично: вращающееся поле становится стационарным в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью поля, и наоборот. Кроме того, в отсутствие трения и при наличии только одного магнитного поля намагниченный стержень совершает регулярные колебания относительного поля. При малых амплитудах колебания имеют угловую частоту \sqrt{M} в случае стационарного поля и \sqrt{P} , если поле вращается.

зом, экспериментатор может по своему желанию варьировать параметры M и P , чтобы наблюдать различные возможные динамические режимы, а также переходы и бифуркации между ними.

В.3. КОНВЕКЦИЯ РЭЛЕЯ — БЕНАРА

В.3.1. Неустойчивость Рэлея — Бенара

В жидкости с достаточно большим коэффициентом теплового расширения любая разность температур порождает разность плотностей. Если такую жидкость поместить в гравитационное поле, то поле в свою очередь создает силы, которые приводят к движению жидкости, называемому тепловой конвекцией. Для количественного исследования этого явления необходимо контролировать разность температур, приложенную к жидкости, так как именно разность температур приводит жидкость

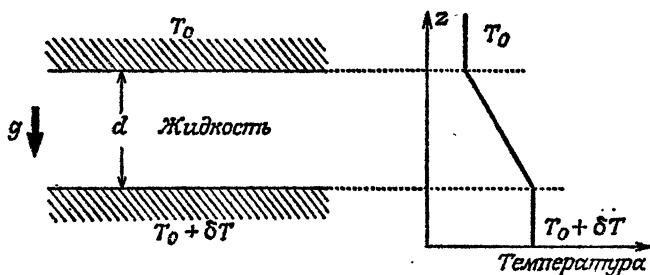


Рис. В.3. Схема опыта Рэлея — Бенара. В жидкости, заключенной между двумя теплопроводящими пластинами, существует (в отсутствие конвекции) постоянный градиент температуры (как показано на графике справа). Температура изменяется от $T_0 + \delta T$ на нижней границе слоя жидкости до T_0 на его верхней границе.

в движение. На рис. В.3 изображена принципиальная схема типичного устройства, используемого для этого. Слой жидкости толщиной d ограничен двумя твердыми горизонтальными пластинами с высокой теплопроводностью. Верхняя пластина поддерживается при фиксированной температуре T_0 , а нижняя — при температуре $T_0 + \delta T$ ($\delta T > 0$). Слой ограничен также вертикальными стенками (не показанными на рис. В.3), теплопроводность которых, как правило, близка к теплопроводности жидкости. С экспериментальной точки зрения существенно, чтобы теплообмен между жидкостью и пластинами был очень хорошим; тогда линейный вертикальный градиент температуры устанавливается в слое без разрыва на границах. По сравнению с другими более или менее естественными типами конвекции

такая геометрия характеризуется отсутствием горизонтального градиента температуры до наступления конвекции.

Любая жидкость с достаточно большим коэффициентом теплового расширения, помещенная между двумя пластинами, подвержена двум противоборствующим тенденциям. Холодная жидкость, более плотная и расположенная в верхней части слоя, стремится опуститься, в то время как нижняя часть слоя, более теплая и менее плотная, стремится подняться. Но коль скоро разность температур δT остается малой, конвективное движение

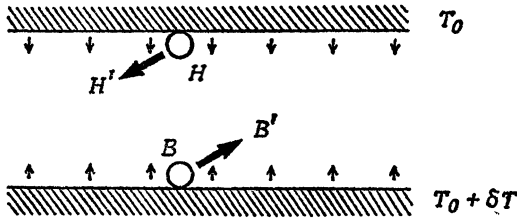


Рис. V. 4. Возникновение движения в жидкости. Два элемента жидкости H и B перемещаются в новые положения H' и B' . В зависимости от величины δT возникающее движение затухает или не затухает.

не возникает из-за стабилизирующих эффектов трения¹⁾. Возникновение неустойчивости можно объяснить следующим образом. Если элементы жидкости перемещаются по траекториям HH' и BB' на рис. V. 4, то крутящий момент усиливает возникающее перемещение. После того как два элемента жидкости переместятся соответственно на HH' и BB' , разность температур между ними уменьшится из-за теплопроводности (с коэффи-

¹⁾ Иначе обстоит дело, если градиент температуры не вертикален, а горизонтален. В этом случае жидкость стремится подниматься вдоль более теплой границы и опускаться вдоль более холодной. Силы не уравниваются друг друга, а создают крутящий момент. Независимо от того, насколько мала



разность температур (даже если она бесконечно мала), этот момент приводит жидкость в движение. Следовательно, если мы хотим наблюдать четко выраженный порог конвекции, то в эксперименте РБ горизонтальных градиентов температуры следует избегать.

циентом теплопроводности D_T), причем характерное время составляет величину порядка

$$\tau_{\text{тепл}} \sim \frac{d^2}{D_T}.$$

Характерное время перемещения $HH' - BB'$ зависит от сил, действующих на жидкость, т. е. от архимедовой силы (плавучести), обусловленной разностью температур, и силы вязкости трения. Это характерное время τ_m определяется соотношением:

$$\tau_m \sim \frac{\eta}{\rho_0 g \alpha d \delta T},$$

где η — динамическая вязкость, α — коэффициент теплового расширения, ρ_0 — средняя плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести. Условие наступления незатухающего движения состоит в том, что время $\tau_{\text{тепл}}$ (время жизни причины) должно быть больше, чем τ_m (времени внешнего проявления эффекта). Следовательно, условие для затухающей конвекции имеет вид неравенства

$$\frac{\rho_0 g \alpha d^3}{\eta D_T} \delta T \geq \text{const.}$$

Величина, стоящая в левой части, называется числом Рэлея Ra и является безразмерной мерой разности температур δT . Неравенство означает, что существует критическое число Рэлея Ra_c (или, что эквивалентно, критическая разность температур δT_c), выше которого состояние покоя теряет устойчивость и начинается конвекция. Конвективные неустойчивости впервые отчетливо наблюдались в экспериментах Бенара (1900) и получили теоретическое объяснение в работе Рэлея (1916). Именно поэтому с этим явлением связаны эти два имени.

За порогом конвекции движение жидкости отнюдь не становится беспорядочным. Наоборот, в жидкости образуется регулярная структура валов с параллельными горизонтальными осями¹⁾ (рис. V.5). В срединной плоскости мы наблюдаем последовательность чередующихся восходящих и нисходящих потоков. Потоки расположены эквидистантно, расстояние между

¹⁾ В оригинальном варианте эксперимента Бенара использовался тонкий слой китового спермацетового масла со свободной верхней границей. В этих условиях из-за эффектов поверхностного натяжения на границе раздела масло — воздух возникали не валы, а шестиугольные ячейки с вертикальными осями. Такого рода неустойчивость, называемая теперь эффектом Марангони, обусловлена температурной зависимостью поверхностного натяжения

соседними потоками составляет величину порядка d . Два соседних вала вращаются в противоположные стороны. Но если взять всю систему валов, то нетрудно заметить, что направление вращения каждого вала можно изменить на противоположное, не

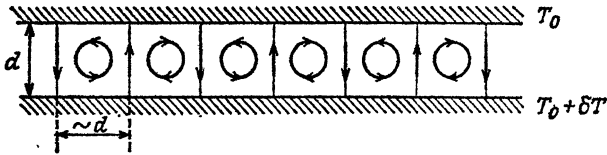


Рис. V.5. Схема организации движения жидкости в конвективных валах (изображено поперечное сечение валов). Соседние валы вращаются навстречу друг другу, как шестерни в зацеплении. Обратите внимание на то, что расстояние между двумя соседними вертикальными токами (которое можно принять за диаметр конвективного вала) по порядку величины сравнимо с d — расстоянием между двумя жесткими горизонтальными пластинами, ограничивающими слой жидкости снизу и сверху.

внося при этом глобальных изменений в геометрические и динамические свойства движущейся жидкости. Именно поэтому в идеальном эксперименте Рэлея — Бенара оба направления вращения валов строго равновероятны. То же утверждение можно

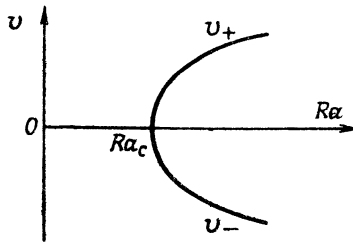


Рис. V.6. Бифуркационная диаграмма вблизи порога Ra_c неустойчивости тепловой конвекции. В идеальном эксперименте конвективные валы, возникающие при Ra_c , с равной вероятностью вращаются как в одну, так и в другую сторону. Это отражается в существовании двух ветвей, обозначенных символами v_+ и v_- .

сформулировать и в другой эквивалентной форме: в любой точке жидкости скорость может быть направлена как в одну, так и в противоположную сторону. Это свойство отражено на бифуркационной диаграмме (рис. V.6). На ней построен график зависимости скорости v в некоторой точке слоя как функция числа Рэлея Ra . При $Ra < Ra_c$ единственное возможное состояние есть состояние покоя ($v = 0$). На пороге неустойчивости Ra_c происходит бифуркация; выше порога при любом заданном зна-

чении Ra экспериментально реализуемы¹⁾ два конвективных состояния с равными, но противоположно направленными скоростями. При $Ra > Ra_c$ конвективные валы имеют стационарную конфигурацию: скорость и температура описываются функциями, не зависящими от времени. С точки зрения теории динамических систем переход при $Ra = Ra_c$ является бифуркацией между двумя стационарными состояниями: состоянием покоя и конвективным состоянием. Разумеется, пространственная структура этих состояний весьма различна.

Нельзя не упомянуть здесь о главном преимуществе конвекции РБ перед другими гидродинамическими ситуациями: отсутствие какого бы то ни было механического движения, поддерживаемого извне. Это замечательное свойство делает конвекцию РБ особенно удобной системой для изучения возникновения турбулентности.

V. 3.2. Конвективные структуры

Если слой достаточно широк, то конвективные валы могут образовывать многочисленные конфигурации, или «конвективные структуры», в горизонтальной плоскости. Процесс отбора структур представляет собой сложную проблему, которая сейчас находится в стадии изучения. В случае прямоугольных кювет²⁾ структура может состоять главным образом из прямолинейных эквидистантных валов, оси которых параллельны более коротким сторонам прямоугольника. Мы видим в такой структуре аналогию с одномерным кристаллом (снимок V. 1).

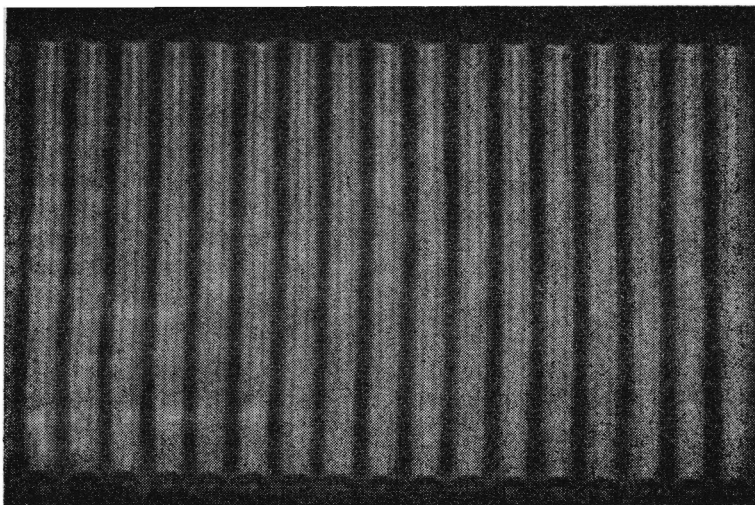
При дальнейшем увеличении разности температур δT структура сначала становится более сложной, но сохраняет определенную регулярность. Однако при еще большем увеличении δT структура полностью разрушается, как бы «расплавляется». На смену упорядоченной стационарной структуре приходит непрерывно изменяющаяся неупорядоченная конфигурация: движение жидкости становится турбулентным. Ясно, что это сложное непредсказуемое поведение обусловлено множеством возможных пространственных структур, каждая из которых эволюционирует по-своему. Их взаимодействие порождает турбулентный режим,

¹⁾ При более высоких значениях Ra возникают и другие неустойчивости, которые в значительной мере зависят от условий эксперимента. Разнообразие их столь велико, что для описания всех неустойчивостей вряд ли хватило бы книги. Несколько примеров таких неустойчивостей мы приводим во второй части книги в качестве иллюстраций к теории динамических систем.

²⁾ В действительности для того чтобы возникла конвективная структура, изображенная на снимке V. 1, ее необходимо предварительно индуцировать.

который называют хаотическим, с большим числом степеней свободы¹⁾).

Как можно сохранить первую конвективную структуру и предотвратить возникновение хаоса указанного типа? Достаточно резко снизить число возможных конфигураций, совместимых



Фотография V.1. Конвективная структура из упорядоченных валов. Конвекция создается в слое силиконового масла толщиной 2,5 мм с горизонтальными размерами 98×60 мм. Если верхняя пластина прозрачна, а в качестве нижней взята полированная медь с оптически гладкой поверхностью, то конвективные валы можно визуализировать, используя преломление света, проходящего сквозь слой жидкости. Вокруг более холодных нисходящих токов жидкости горизонтальные градиенты температуры создают градиенты показателя преломления, фокусирующие свет в определенных направлениях. В результате этого широкий пучок света, проходящий вертикально сквозь слой силиконового масла, претерпевает периодическую фокусировку и наблюдатель видит нисходящие токи как светлые полосы на темном фоне. Небольшие градиенты температуры вдоль двух меньших боковых границ созданы для стабилизации фазы боковых валов и обеспечения правильной периодической структуры.

с наложенными связями. Естественно поместить жидкость в ячейку с горизонтальными размерами L_x , L_y того же масштаба, что и высота. Аспектное отношение, определяемое как $\Gamma = L/d$, такой ячейки мало и число конвективных валов ограни-

¹⁾ Используемое здесь определение степени свободы отличается от данного в гл. I.

чено. Например, в ячейке формата $\Gamma = 2$ уместятся только два вала (рис. V.7). Как показывает эксперимент, в ячейках такого типа пространственный порядок действительно сохраняется в очень широком диапазоне чисел Рэлея Ra . Это не означает, что динамическое поведение не зависит от Ra . Действительно, при увеличении Ra возникает то, что называется вторичными неустойчивостями, которые влияют на временное поведение конвективных структур. Например, одна бифуркация приводит

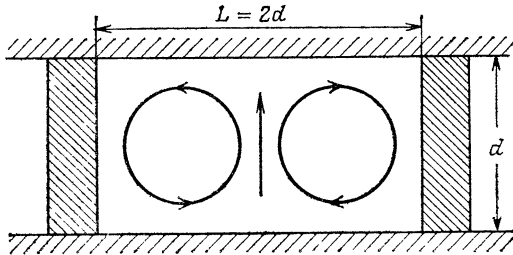


Рис. V.7. Схема ячейки с небольшим удлинением ($\Gamma = L/d = 2$). Наличие боковых границ из плексигласа, расстояние между которыми лишь вдвое превышает толщину слоя, стабилизирует конвективную структуру и уменьшает число валов (по крайней мере при средних значениях Ra) до двух. Следует подчеркнуть, что в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, расстояние L' между границами из плексигласа еще меньше: для описанных в тексте экспериментов с силиконовым маслом $L' = 1,2d$.

к строго периодическим колебаниям скорости в точке. О такой системе говорят, что она обладает малым числом степеней свободы (сравнимым с числом пространственных мод, вовлеченных в конвективную структуру) в отличие от ситуации, с которой мы сталкиваемся в ячейках с большим аспектным отношением.

V.3.3. Уравнения эволюции

Уравнения, описывающие конвективные явления, связывают скорость v элемента жидкости с возмущением температуры θ ¹⁾. Установленные в XIX в. эти уравнения были выведены путем рассмотрения локального баланса импульса (уравнения Навье — Стокса), массы (уравнения непрерывности) и тепла. Немногочисленные приближения, вполне приемлемые для описания

¹⁾ Возмущение θ есть разность между температурой в конвективном режиме и температурой, которую имела бы жидкость в отсутствие конвекции. Следовательно, в состоянии покоя разность температур θ всюду тождественно равна нулю.

тепловой конвекции в обычных экспериментальных условиях, приводят к следующим безразмерным уравнениям ¹⁾:

1) уравнение Навье — Стокса

$$\text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \theta \boldsymbol{\lambda} + \nabla^2 \mathbf{v}; \quad (13a)$$

2) несжимаемость жидкости (если все скорости малы по сравнению со скоростью звука)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (13б)$$

3) распространение тепла

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \text{Ra} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v} + \nabla^2 \theta, \quad (13в)$$

где p — гидростатическое давление, $\boldsymbol{\lambda}$ — единичный вектор, направленный вдоль вертикальной оси (направления силы тяжести), а Pr — отношение кинематической вязкости ν жидкости к ее температуропроводности:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{D_T}.$$

Эта безразмерная величина, называемая числом Прандтля, зависит от природы жидкости и (в меньшей степени) от температуры жидкости.

В уравнениях эволюции существуют два нелинейных члена: $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ (в уравнении (13а)) и $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta$ [в уравнении (13в)]. Их относительная значимость зависит от значения Pr . Если число Прандтля Pr мало (как, например, для жидкого гелия, где $\text{Pr} < 1$), то доминирует член $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$. Таким образом, следует ожидать, что вторичные неустойчивости, которые развиваются в жидкости, находящейся в режиме стационарной конвекции, по существу имеют гидродинамическое происхождение. Они обусловлены неоднородностью поля скоростей и возникают вследствие естественной тенденции поля гидродинамических скоростей к однородности. С другой стороны, в жидкостях с большими числами Прандтля, таких, как некоторые силиконовые масла ($\text{Pr} > 100$), член $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta$ становится доминирующим нелинейным членом и вторичные неустойчивости имеют главным образом тепловое происхождение. Между этими двумя

¹⁾ ∇ означает оператор дифференцирования по пространственным координатам в прямоугольной системе координат:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

а точкой обозначено скалярное, или внутреннее, произведение.

крайностями существуют такие жидкости, как вода ($Pr = 5-10$ в зависимости от температуры), в которых гидродинамические и тепловые эффекты, конкурируя, порождают более сложные режимы¹⁾.

V. 3.4. Эксперимент

Для данной жидкости при выбранном аспектном отношении единственным управляющим параметром остается число Рэлея Ra . Поскольку оно пропорционально δT , изменяя разность температур, экспериментатор может либо вызывать переход от одного динамического режима к другому, либо изменять относительную значимость нелинейных эффектов в рамках данного режима. Выбор экспериментальной установки диктуется жидкостью, которая также определяет временной масштаб конвективных явлений. Существует огромная разница между исследованием поведения жидкого гелия при температурах порядка нескольких градусов Кельвина и исследованием воды, ртути или силиконовых масел при комнатной температуре, т. е. при 300 К. Мы не будем вдаваться в подробности относительно устройства ячеек и способов контроля температуры. В табл. V.1 сведены

Таблица V.1

Жидкость	Γ	Условия	Pr	d , см	$T_{ср}$, К	δT_c , К	$(Ra/Ra_c)_{макс}$	$\delta T_{макс}$, К
Ртуть	2	Магнитное поле	0,031	0,8	273	0,91	6	~ 6
Ртуть	4		0,031	0,7	273	$\sim 1,3$	4	$\sim 5,5$
Гелий	3	$P = 0,3$ МПа $P = 0,1-0,5$ МПа	0,5	0,125	3,5	$2,5 \cdot 10^{-3}$	43	$\sim 0,1$
Гелий	2-3		0,4-0,8	0,125	[2,5; 4]	$\sim 10^{-3}$	80	$\sim 0,2$
Силиконовое масло	2	$\nu = 3 \cdot 10^{-6}$ м ² /с	38	1,25	~ 300	$\sim 3 \cdot 10^{-2}$	450	~ 13
Силиконовое масло	2	$\nu = 1 \cdot 10^{-5}$ м ² /с	130	2	~ 300	$\sim 2 \cdot 10^{-2}$	600	~ 12

условия экспериментов, при которых получены результаты, приводимые во второй части нашей книги.

¹⁾ Из педагогических соображений наблюдения, упоминаемые в нашей книге, были выбраны из выполненных на ячейках с малыми аспектными отношениями при очень малых или очень больших числах Прандтля.

Переменные, подлежащие измерению — скорость v и θ или по крайней мере тесно связанные с ними свойства¹⁾. В оптически прозрачной среде лучшим методом определения локальной скорости v в точке жидкости является лазерная доплеровская анемометрия. Так как этот метод позволяет непосредственно измерить одну из динамических переменных, его используют всюду, где только возможно. Однако к измерениям такого типа примешивается экспериментальный шум, уровень которого для некоторых целей может оказаться чрезмерно высоким. Часто применяется и другой оптический метод с большим отношением сигнал/шум. В основе его лежит тот факт, что градиент температуры в жидкости создает градиент показателя преломления. Измерению подлежит угол отклонения луча света из-за неоднородности показателя преломления. Такое измерение технически легко осуществимо и позволяет получать сигнал, соответствующий среднему градиенту температуры, пройденному лучом света на всем пути в жидкости. Таким образом, результат измерения имеет лишь полулокальный характер и связан с переменной θ довольно сложным образом, но тем не менее в некоторых случаях оказывается весьма полезным. Использование измерений отклонения света ограничено прозрачными средами с достаточно большой вязкостью, поскольку только в таких жидкостях могут существовать значительные градиенты температуры и, следовательно, показателя преломления.

В непрозрачных жидкостях (ртути, жидком калии и т. д.) оба предыдущих метода становятся неприменимыми. От идеи оптического измерения локальной скорости v приходится отказаться. С другой стороны, невозможно ввести датчик температуры (термометр, термистор, термопару и т. д.), не возмущая движения жидкости. Невозмущающий датчик температуры можно поместить только на границу слоя жидкости — на пластины. Но теоретически возмущение температуры θ на границе всегда равно нулю. Экспериментаторы решили эту дилемму, поместив болометры на поверхности пластин²⁾. Такого рода детектор измеряет тепловой поток, а не возмущение температуры θ . Тем не менее получаемая информация представляет большую ценность и может служить основой анализа динамического поведения жидкости в зависимости от числа Рэлея.

¹⁾ Производимые измерения должны быть невозмущающими, т. е. не должны оказывать воздействие на наблюдаемые явления. Этому очевидному требованию трудно удовлетворить, особенно вблизи порога неустойчивости.

²⁾ Болометр — это измерительное устройство, электрическое сопротивление которого сильно зависит от температуры. Включая болометр в мостик Уитстона, можно с высокой точностью измерять изменения температуры.

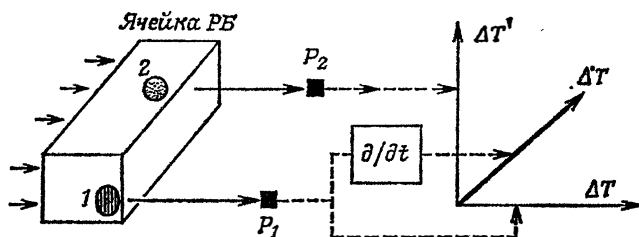


Рис. V. 8а. Экспериментальное определение сечений Пуанкаре при конвекции Рэлея — Бенара; схема установки. Конвективный режим считается дважды периодическим; осцилляторы тепловой конвекции обозначены цифрами 1 и 2. Сквозь жидкость проходят два пучка света — по одному пучку вблизи каждого осциллятора. На осях пучков находятся два фотодиода P_1 и P_2 . Нестационарный градиент температуры, создаваемый осцилляторами тепловой конвекции, приводит к отклонению пучков света, модулируя фототок в фотодиодах P_1 и P_2 . Пусть ΔT и $\Delta T'$ — сигналы, измеряемые фотодиодами P_1 и P_2 , а f_1 и f_2 — характерные частоты осцилляторов 1 и 2. Тогда модуляции величины ΔT с частотой f_1 сильнее, чем с частотой f_2 , а модуляции величины $\Delta T'$ с частотой f_2 сильнее, чем с частотой f_1 .

Из работы М. Дюбуа.

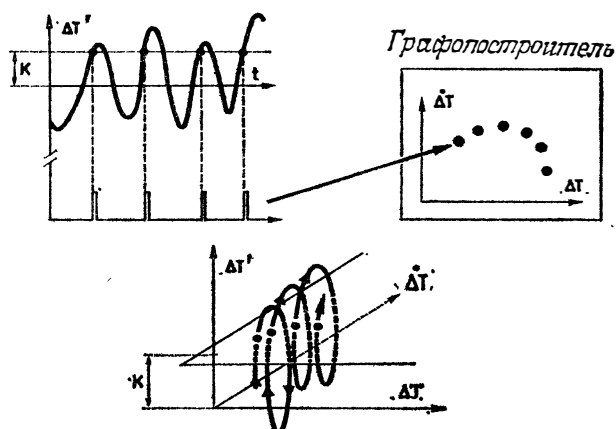


Рис. V. 8б. Экспериментальное определение сечений Пуанкаре при конвекции Рэлея — Бенара. Суть метода. В трехмерном фазовом пространстве можно ввести координаты ΔT , Δ^*T и $\Delta T'$, где Δ^*T производная величины ΔT по времени, получаемая при помощи аналоговой схемы. Проекция траекторий на это пространство мы получаем, подавая сигналы ΔT и Δ^*T на вход двухкоординатного самописца.

При построении сечений Пуанкаре сигнал $\Delta T'$ служит опорным: когда он достигает заданного значения K , опускается перо самописца и регистрируется точка с координатами $(\Delta T, \Delta^*T)$. В тех особенно благоприятных случаях, когда оказывается возможным зарегистрировать сигнал $\Delta T'$, определяющийся в основном вторым осциллятором, используется тот же стробоскопический метод, что и в эксперименте с вращающимся магнитом: за каждый период изменения $\Delta T'$ регистрируется одна точка с координатами $(\Delta T, \Delta^*T)$.

Из работы М. Дюбуа.

Независимо от метода измерения сигнал затем анализируется методами, описанными в гл. III и IV: с помощью преобразования Фурье, исследования топологии аттрактора. Обработка сигналов осуществляется с помощью либо цифровых, либо аналоговых вычислительных средств (см. рис. V. 8а и 8б).

V. 4. РЕАКЦИЯ БЕЛОУСОВА — ЖАБОТИНСКОГО

V. 4.1. Краткая история химических осцилляторов

При изучении окисления лимонной кислоты броматом калия, катализируемого окислительно-восстановительной парой $\text{Ce}^{3+}/\text{Ce}^{4+}$, русский биохимик Б. П. Белоусов случайно¹⁾ заметил концентрационные колебания, проявившиеся в регулярном изменении окраски реакционной смеси от бледно-желтого до бесцветного. Однако, когда Белоусов опубликовал свою работу в 1958 г. (через восемь лет после открытия), реакции такого рода отнюдь не были неизвестными. В 1921 г. Брей сообщил о том, что разложение перекиси водорода в присутствии ионов IO_3^- происходит в колебательном режиме. И в этом случае наблюдение носило случайный характер и было датировано 1917 г. Несмотря на необычность обеих реакций (большинство химических реакций протекают монотонно²⁾), оба открытия колебательных гомогенных реакций в жидкостях не привлекли к себе должного внимания. В начале 60-х годов молодой советский химик А. М. Жаботинский посвятил свою диссертацию исследованию механизма и свойств реакции, открытой Белоусовым. Но лишь после достижений в термодинамике необратимых процессов и открытия колебаний на клеточном и метаболическом уровнях в биологии важность открытия Белоусова была оценена по достоинству. С тех пор исследования этой реакции ведутся во все возрастающих масштабах как в химии, так и в биохимии.

Реакционная среда БЖ бесспорно является наиболее изученной из колебательных химических реакций. Поведение реакций БЖ весьма необычно и во времени, и в пространстве. В однородной смеси реагентов БЖ пространственная структура возникает за несколько минут либо в виде цилиндрических колец

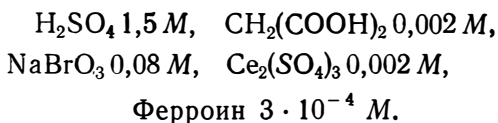
¹⁾ Более подробные сведения об открытии Б. П. Белоусова и его статью читатель сможет найти в сборнике «Колебания и бегущие волны в химических системах». — М: Мир, 1988. — *Прим. перев.*

²⁾ Линейная термодинамика необратимых процессов показывает, что колебания не могут происходить относительно равновесного состояния. Но в нелинейной области из второго начала термодинамики не обязательно следует монотонная эволюция. Поэтому вдали от равновесия ничто не запрещает реакции быть колебательной из-за диссипации имеющейся химической энергии.

в пробирке, либо в виде концентрических круговых волн в тонком слое. Из дальнейшего нам станет ясно, почему эта необычная реакция вызвала столь большой интерес в научном мире.

В. 4.2. Схема экспериментальной установки

Реагенты БЖ — серная кислота H_2SO_4 , малоновая кислота $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$ или другие органические восстановители, бромат натрия NaBrO_3 , сульфат церия $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$ или другие катализаторы окислительно-восстановительных реакций — легко доступны коммерчески. Достаточно приготовить их водный раствор и смешать в надлежащих концентрациях, чтобы возникли знаменитые колебания. Добавление окрашенного индикатора окислительно-восстановительных процессов позволяет визуально наблюдать регулярные изменения окраски. Например, если в качестве катализатора выбран ферроин, то окраска раствора изменяется от красной до синей. Приводим состав смеси [в молях на литр (M)], позволяющей наблюдать колебания при комнатной температуре:



Количественные измерения налагают дополнительные требования. Прежде всего чтобы получить характеристики динамического режима, его требуется поддерживать в течение достаточно долгого времени. С точки зрения практической реализации это означает, что необходимо использовать открытый реактор с непрерывным подводом реагентов и отводом продуктов реакции. Для того чтобы концентрации реагентов были постоянны и равномерно распределены по реакционному объему, смесь необходимо быстро и интенсивно перемешивать. Наконец, так как скорость химических реакций чувствительна к температуре, необходима терморегуляция реактора. За протеканием реакции экспериментаторы следят, измеряя какое-нибудь свойство среды.

На рис. V. 9 показана принципиальная схема установки для эксперимента БЖ. Реагенты БЖ поступают из резервуаров в реактор по трем трубам. Мгновенное состояние среды измеряется с помощью потенциометрии или спектрофотометрии. Сигнал от детекторов (электродов или спектрофотометра) усиливается и после дискретизации через регулярные интервалы времени преобразуется в цифровую форму. Компьютер осуществляет управление экспериментом и хранит в памяти результаты последовательных измерений. Файл данных может вмещать сотни тысяч

значений $X(t)$ для последующего анализа данных с помощью различных методов: преобразования Фурье, фазового портрета, сечения Пуанкаре и т. д.

Динамическими переменными в этой системе являются мгновенные концентрации некоторых веществ, измеряемые с по-

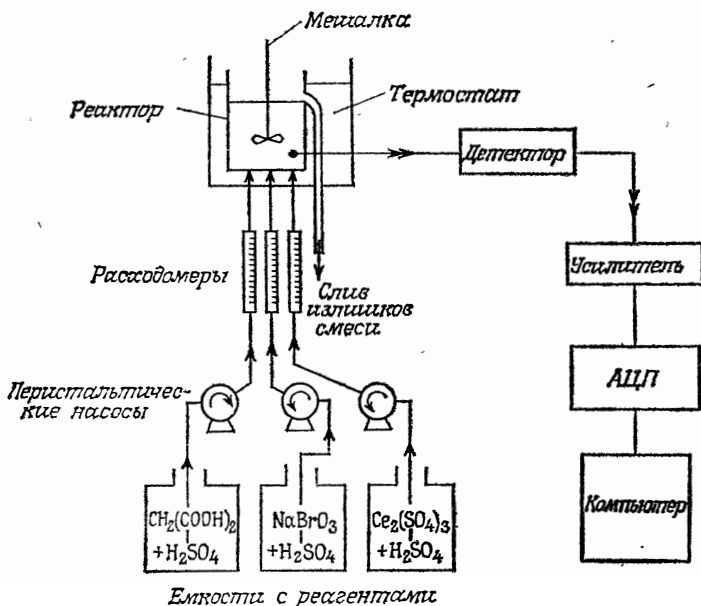


Рис. V. 9. Схема экспериментальной установки для исследования динамического поведения химической реакции. Динамический режим (стационарный, периодический или аperiodической) поддерживается в течение нужного времени в открытом реакторе с помощью системы питания, создающей на входе в реактор постоянный поток с надлежащим соотношением реагентов. Наблюдение за протеканием реакции ведется спектрофотометрическим или потенциометрическим методом. Контроль за параметрами эксперимента осуществляется с помощью компьютера, который помимо этого производит выборку сигнала в реальном времени и записывает ее в память для последующей численной обработки (например, для вычисления преобразований Фурье, сечений Пуанкаре и т. д.). Реагенты указаны для реакции Белоусова — Жаботинского.

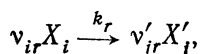
Из работы К. Видаля, С. Башляра и А. Росси.

мощью потенциометрии или спектрофотометрии. В области применимости уравнения Нернста разность потенциалов между эталонным и измерительным электродами пропорциональна логарифму концентрации, а по закону Бэра — Ламберта оптическая плотность пропорциональна самой концентрации. Во избежание «смешанной» информации, отражающей вариацию concentra-

ций нескольких реагентов, часто используют электроды, обладающие специфической чувствительностью к определенному веществу и измеряющие только его концентрацию (например, концентрацию иона Br^-). Аналогично производят измерение оптической плотности на 340 нм — длине волны, на которой в реакционной среде БЖ заметное поглощение наблюдается только у Ce^{4+} .

V. 4.3. Уравнения эволюции

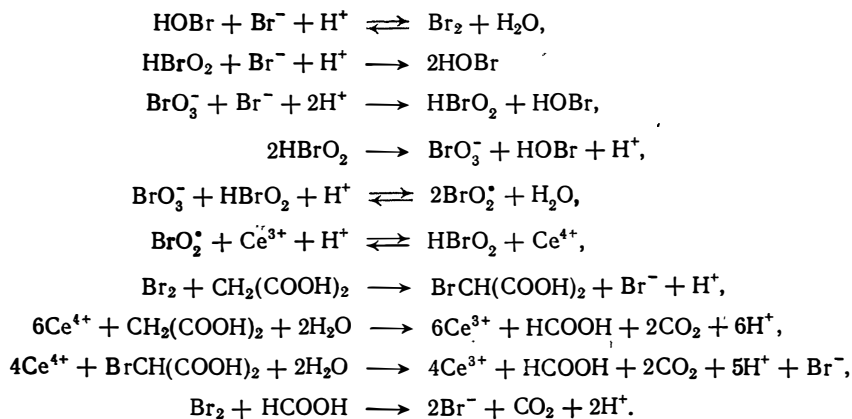
Химическую реакцию можно рассматривать как последовательность элементарных стадий, которые символически можно представить в виде



где $i, j = 1, \dots, L$ — индекс L реагентов; $r = 1, \dots, R$ — индекс R элементарных стадий; X_i — реагенты, X'_j — продукты; ν_{ir} — стехиометрический коэффициент i -го вещества в r -й стадии; k_r — константа скорости r -й стадии.

Это точное описание содержания табл. V.2, в которой собраны сведения о механизме реакции БЖ.

Таблица V.2. Механизм Филда — Керёша — Нойеса реакции Белоусова — Жаботинского



В гомогенной среде при постоянном объеме вариации молярных концентраций $[X_i]$ реагентов, возникающие вследствие

реакции, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d[X_l]}{dt} = \sum_{r=1}^R (v'_{lr} - v_{lr}) k_r \prod_i [X_i]^{v_{ir}} \quad l = 1, \dots, L.$$

Если реакция происходит в открытом реакторе объемом V , питаемом потоком с объемным расходом J , то каждый реагент попадает в реактор с концентрацией $[X]_0$ и покидает реакционную зону через отводную трубу с мгновенной концентрацией $[X]$. Поэтому в предыдущее уравнение мы должны ввести аддитивный член, учитывающий проточность реактора:

$$\dot{[X_l]} = \sum_{r=1}^R (v'_{lr} - v_{lr}) k_r \prod_i [X_i]^{v_{ir}} + \frac{J}{V} ([X_l]_0 - [X_l]), \quad l = 1, \dots, L. \quad (14)$$

Эта система дифференциальных уравнений обладает некоторым сходством с уравнением неустойчивости РБ. Уравнения (14) нелинейные, первого порядка по времени. Нелинейность обусловлена взаимодействием реагентов ($\prod_i [X_i]^{v_{ir}}$). Управляющих параметров можно использовать несколько, один из них, а именно температура, от которой зависят константы скоростей k_r , явно не входит в уравнения (14). Остальные легко изменяемые параметры — это концентрации любого из реагентов на входе $[X_i]_0$. Наконец, что наиболее важно, отношение $\mu = (J/V)$ также можно варьировать, изменяя объемный расход J с помощью регулируемых насосов. Физический смысл параметра μ ясен: это величина, обратная времени наполнения реакционной зоны реактора, или среднего времени пребывания реагента в реакторе. Математически μ входит в каждое из L уравнений как коэффициент при линейном члене, описывающем проточность реактора. Изменяя μ , мы можем по своему произволу изменять относительную значимость линейных (транспортных) и нелинейных (химических) эффектов. Именно поэтому μ часто выбирают в качестве управляющего параметра при поиске бифуркаций между различными динамическими режимами. Если параметр μ достаточно велик и член, описывающий взаимодействие реагентов, доминирует над членом, описывающим проточность реактора, то поток (14) становится практически линейным и допускает тривиальное стационарное решение

$$[X_l] \approx [X_l]_0, \quad l = 1, \dots, L,$$

практическое значение которого очевидно: при больших расходах реагенты остаются в реакторе слишком мало и не успевают

прореагировать с другими реагентами. Нестационарные режимы могут наблюдаться и при умеренных значениях J .

Мы могли бы пойти дальше и выписать в явном виде уравнения (14) для реакции БЖ. Но это вряд ли полезно, поскольку с динамической точки зрения знания структуры уравнений вполне достаточно. Кроме того, механизм любой реакции является следствием предположений, значительное число которых не допускает прямой проверки. Механизм реакции БЖ, предложенный в 1972 г. Филдом, Кёрешом, Нойесом и включающий в себя тринадцать реакций, в которых участвуют четырнадцать реагентов, не является исключением (см. табл. V. 2). Для изучения различных динамических режимов, периодических и хаотических, с помощью численного моделирования на основе соответствующих дифференциальных уравнений можно воспользоваться упрощенным вариантом модели ФКН, состоящим из пяти стадий и включающим в себя только четыре реагента.

ЛИТЕРАТУРА

- Bergé P.*, Experiments on hydrodynamics instabilities and the transition to turbulence. — In: Lectures Notes in Physics, 104, p. 189 (1979).
- Bergé P., Dubois M.*, Study of Rayleigh — Bénard convection properties through optical measurements. — In: Scattering Techniques Applied to Supramolecular and Nonequilibrium Systems, eds. S. H. Chen, B. Chu, R. Nossal, Plenum Publishing Corporation, p. 493 (1981).
- Croquette V.*, Déterminism et chaos, Pour la science, 62, p. 62 (1982).
- Croquette V., Poitou C.*, Cascades de dédoublements de période et stochasticté à grande échelle des mouvements d'une boussole, Compt. Rend. de l'Académie des Science de Paris, C292, p. 1353 (1981).
- Dubois M.*, Experimental study of transition to turbulence in convective systems, cours de l'Institut von Karman de dynamique des fluides, série 1982—07 (Bruxelles).
- Dubois M., Bergé P.*, Experimental evidence for the oscillators in a convective biperiodic regime, Physics Letters, 76A, p. 53 (1980).
- Vidal C., Roux J.-C.*, Comment naît la turbulence, Pour la Science, 39, p. 50 (1981).
- Vidal C., Bachelart S., Rossi A.*, Bifurcations en cascade conduisant à la turbulence dans la réaction de Belousov — Zhabotitsky, Journal de Physique, 43, p. 7 (1982).

ЧАСТЬ 2

... К ХАОСУ

ВВЕДЕНИЕ. ВРЕМЕННЫЙ ХАОС В ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

I. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Большинство понятий и идей, необходимых для описания и понимания нестационарного поведения динамических систем, было введено нами в первых пяти главах. Сформулируем наиболее существенные моменты. Мы намереваемся анализировать эволюцию произвольных диссипативных систем. Эти системы по предположению детерминированные, так как их описание достигается с помощью либо непрерывного автономного потока

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = F(\mathbf{X}(t))$$

либо отображения с дискретным временем

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k),$$

где \mathbf{X} — вектор из \mathbb{R}^m ($m \geq 0$). Функция F содержит один или несколько управляющих параметров μ , выражающих связи, налагаемые внешним миром на исследуемую систему. Связью может быть, например, интенсивность магнитного поля, число Гэля или среднее время пребывания в реакторе. Варьируя управляющий параметр, мы получаем возможность изменять поведение системы. В ходе измерения управляющий параметр поддерживается (или предполагается) постоянным.

Нас главным образом интересует долговременное поведение диссипативных систем. Мы предполагаем, что выполнены некоторые «технические» условия (в действительности удовлетворить им весьма трудно даже в такой простой модели, как уравнение Ван дер Поля), при которых траектории остаются в ограниченном объеме фазового пространства.

Если поток диссипативный, то в этом конечном объеме траектории сходятся к аттрактору — компактному множеству в фазовом пространстве, инвариантному относительно потока или отображения. Сам аттрактор имеет нулевой объем, но его область притяжения имеет конечный (или даже бесконечный) объем. Область притяжения мы определяем как множество начальных условий, таких, что выходящие из него траектории сходятся к аттрактору. Поток может иметь несколько различных

аттракторов, у каждого из которых имеется своя область притяжения. Были даже построены отображения, имеющие бесконечное (счетное) множество аттракторов. Мы ограничимся рассмотрением случая одного аттрактора.

Исследование аттрактора означает существенное упрощение, так как мы можем пренебречь переходными эффектами и сосредоточить внимание на асимптотическом режиме. Разумеется, такая процедура неприменима к анализу гамильтоновых систем, лишенных по определению трения: понятие аттрактора чуждо им¹⁾. Таким образом, соображения, развитые во второй части нашей книги, относятся исключительно к диссипативным системам. Об этом не следует забывать.

Наш анализ будет состоять из двух частей:

- 1) определения простейших типов аттракторов;
- 2) каталогизации способов перехода между аттракторами.

Цель, которую мы ставим перед собой, состоит в том, чтобы понять, как возникают и какими свойствами характеризуются все типы временной эволюции, какие только встречаются, в том числе и режимы, кажущиеся на первый взгляд совершенно беспорядочными.

II. ПРОСТЕЙШИЕ АТТРАКТОРЫ

Напомним кратко три типа аттракторов, уже описанных в первой части, и основные свойства соответствующих динамических режимов.

Аттрактор-точка представляет собой решение, не зависящее от времени, т. е. стационарное состояние. В этой ситуации нет никаких неясностей, так как система не эволюционирует.

Решение, периодическое по времени, соответствует предельному циклу, характеризуемому своей амплитудой и периодом. Спектр Фурье такого решения содержит одну основную частоту и, возможно, некоторое число гармоник (в зависимости от формы колебаний). Решение для потока всегда представимо в виде ряда Фурье: если состояние системы в данный момент времени известно, то ее состояние в любой последующий момент времени предсказуемо.

¹⁾ Вряд ли нужно говорить о том, что сказанное отношь не означает, будто гамильтоновы системы не представляют интереса. Мы утверждаем лишь, что гамильтоновы системы не имеют аттракторов. Аналогичное замечание можно было бы сделать и относительно притяжения: в отсутствие затухания малая флуктуация никогда не обращается в нуль. Это верно, например, для устойчивости недиссипативных (невязких) течений жидкости: линейная устойчивость таких течений не позволяет сделать сколько-нибудь далеко идущие выводы относительно их устойчивости на больших интервалах времени относительно флуктуаций конечной амплитуды, даже малых. Этот важный факт часто упускают из виду.

Третьим типом аттрактора, также относительно простым, является тор T^r ($r \geq 2$), соответствующий квазипериодическому режиму с r независимыми основными частотами¹⁾. В этом случае спектр Фурье также состоит из множества линий, частоты которых являются линейными комбинациями основных частот. Хотя решение для потока, вообще говоря, не представимо в виде обычного ряда Фурье, мы можем тем не менее, исходя из начального состояния, вычислить состояние системы в любой последующий момент времени.

III. ПСЕВДООПРЕДЕЛЕНИЕ ХАОСА

Поскольку строго научного определения терминов «хаос» и «хаотический» не существует, мы будем считать их синонимами некоторых типичных свойств²⁾. Условимся называть динамический режим хаотическим, если его спектр мощности содержит непрерывную часть (широкую полосу) независимо от возможного наличия пиков. Мы можем также воспользоваться критерием: автокорреляционная функция временного сигнала должна иметь конечный носитель, т. е. обращаться в нуль вне конечного интервала времени. И в том и в другом случае в основе лежит одно и то же понятие: потеря сигналом памяти о самом себе. Это означает, что знание состояния системы в течение сколь угодно продолжительного интервала времени не позволяет предсказывать дальнейшую эволюцию системы. Тем самым мы признаем непредсказуемость³⁾ тем качеством, которое определяет хаос. Такое определение хаоса чисто прагматическое; ему недостает строгости, и оно неизбежно таит в себе неоднозначность. Между предсказуемостью и непредсказуемостью не

¹⁾ Торы T^r с $r > 3$ теоретически несомненно могут существовать, однако относительно их структурной устойчивости, без которой их невозможно наблюдать экспериментально, имеются сомнения. Мы называем свойство структурно устойчивым, если оно способно «устоять» против малых вариаций параметров потока (обычная устойчивость означает способность «сопротивляться» малым вариациям начальных условий). Тем не менее взаимосвязь между наблюдаемостью и структурной устойчивостью свойства не является абсолютной. Свойство «структурной неустойчивости» (как и свойство отсутствия затягивания частот в режиме с двумя периодами) может быть наблюдаемым, если существует отличная от нуля вероятность возникновения этого свойства при произвольном выборе параметров (см. приложение В).

²⁾ То же самое в полной мере относится и к терминам «турбулентность» и «турбулентный». Мы отдаем предпочтение термину «хаос», поскольку пространство не входит в интересующие нас здесь проблемы, а термин «турбулентность» неизбежно рождает ассоциации с пространственно-временным поведением нерегулярных гидродинамических течений.

³⁾ Более точно термин «непредсказуемость» употребляется в том смысле, что точное знание эволюции системы в прошлом в течение сколько угодно продолжительного интервала времени не помогает предсказывать ее последующую эволюцию за пределами некоторого ограниченного интервала времени.

существует разделяющей их четкой границы, поэтому остаются открытыми такие вопросы:

1) В каком масштабе времени должен быть предсказуемым поток?

2) Насколько точным должно быть предсказание?

3) Допустимо ли статическое предсказание?

Различие между теоретической и практической невозможностью предсказания также проблематично. Но при нынешнем состоянии знаний было бы преждевременным пытаться вносить какие-либо уточнения.

IV. СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ

Какого рода аттрактор связан с режимом, спектр Фурье которого содержит широкую полосу? Советский физик Л. Д. Ландау впервые попытался ответить на этот вопрос в 1944 г. Стремясь объяснить, каким образом в жидкости происходит переход от ламинарного течения к турбулентному при увеличении числа Рейнольдса Re (управляющего параметра μ), Ландау выдвинул следующие идеи, ныне известные как теория турбулентности Ландау. Выше первого порога неустойчивости скорость жидкости, бывшая ниже порога постоянной по времени (ламинарное течение), становится периодической: скорость модулируется с определенной частотой f_1 . При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса Re периодический режим в свою очередь теряет устойчивость. Появляется вторая частота f_2 , несоразмерная с f_1 и устанавливается квазипериодический режим. Продолжая этот ход рассуждений, мы ожидаем последовательного появления других частот f_3, f_4, \dots, f_r путем дестабилизации все большего числа колебательных мод. В результате при достаточно больших r получается турбулентный поток¹⁾. А поскольку различие между спектром Фурье, состоящим

1) Рассматривая произвольную фазу, входящую в описание жидкости вместе с каждой хаарактеристической частотой, как одну степень свободы и используя колмогоровскую теорию турбулентности при подсчете числа степеней свободы турбулентного течения. Ландау показал, что в пределе при $r \rightarrow \infty$ непрерывный спектр соответствует пределу бесконечно большого числа Рейнольдса Re (т. е. нулевой диссипации). Хотя теперь теория турбулентности Ландау не считается точной, определение числа степеней свободы турбулентного течения (при больших Re) остается нерешенной проблемой. При таком подходе «число степеней свободы» имеет следующий конкретный смысл. Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 + \lambda_3 \geq \dots$ будет убывающая (не по абсолютной величине, а по алгебраическим значениям) последовательность показателей Ляпунова (см. приложение Б) рассматриваемой динамической системы. Тогда ее числом степеней свободы называется максимальное число n показателей, таких, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0.$$

из многих близких пиков, и непрерывным спектром носит чисто теоретический характер, аттрактор турбулентного потока должен быть тором T^r достаточно большой размерности r .

Следствием из этого сообразительно простого предположения является то, что хаотическое поведение может наблюдаться только у систем с большим числом степеней свободы, поскольку размерность фазового пространства должна быть больше размерности аттрактора. Но, как мы знаем сегодня (главным образом из численного моделирования трехмерных течений), такой вывод неверен: *трех степеней свободы* (в указанном выше смысле) *достаточно для возникновения хаотического режима*.

Прогрессом в этом круге проблем мы обязаны Рюэлю и Такенсу, которые в 1971 г. ввели аттракторы, топологически отличные от тора и названные странными аттракторами¹⁾, и показали, что такие аттракторы играют важную роль в физических проблемах, в том числе и в гидродинамической турбулентности. Термин «странный аттрактор» указывает на необычные свойства таких аттракторов, из которых наиболее важным является чувствительная зависимость от начальных условий (ЧЗНУ). Вследствие ЧЗНУ любые две первоначально близкие траектории на аттракторе в конце концов расходятся. Более того, расхождение траекторий (усредненное по коротким интервалам времени) возрастает со временем экспоненциально.

На рис. 1 схематически иллюстрируется свойство ЧЗНУ. Мы видим, что две траектории, первоначально почти неразличимые, со временем не имеют ничего общего между собой. Обращение в нуль автокорреляционной функции, широкополосный спектр Фурье и внутренняя непредсказуемость системы — все это следствия ЧЗНУ. В частности, ясно, что малейшая ошибка или неточность в задании начального условия не позволяет нам решить, по какой траектории пойдет эволюция системы, и вы-

¹⁾ В действительности работы, описывающие по крайней мере два таких аттрактора, были опубликованы Рикитакэ (1958) и Лоренцом (1963) еще до появления статьи Рюэля и Такенса, но не привлекли к себе должного внимания. Приложение Г посвящено подробному описанию модели Лоренца. Рикитакэ и Аллен предложили модель для объяснения геофизического динамо — опрокидывания земного магнитного дипольного момента за геологические масштабы времени. Их простая модель показала, что внешне случайное опрокидывание магнитного диполя может быть результатом детерминированного процесса. Она поставила под сомнение другие объяснения, связывавшие опрокидывание магнитного диполя с такими внешними по отношению к динамике геомагнитного поля, явлениями, как катаклизмы, аномальная солнечная активность, хаотические конвективные потоки в недрах Земли и т. д. Ныне причина, обуславливающая опрокидывание магнитного диполя, по-прежнему остается загадкой, хотя общепризнаны удивительные регулярности в траектории магнитных полюсов.

нуждает ограничиться статистическим предсказанием долговременного будущего системы. Таким образом, мы приходим к результату, в высшей степени нетривиальному: выводу о непред-

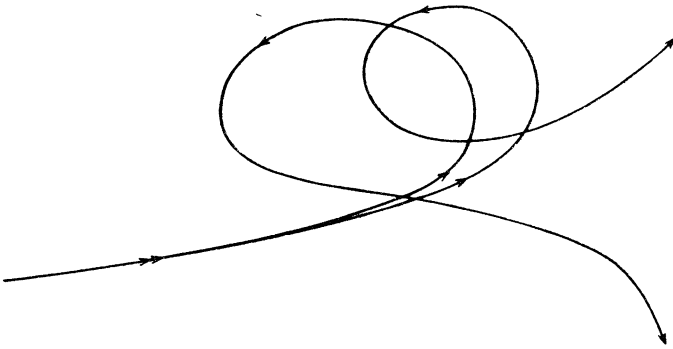


Рис. 1. Чувствительность к начальным условиям. На странном аттракторе две соседние траектории всегда расходятся независимо от того, как близки они были первоначально. Поэтому траектория, по которой реально происходит эволюция системы, очень сильно зависит от начальной точки.

сказуемости поведения некоторых детерминированных потоков всего лишь с тремя степенями свободы!

V. ПУТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ХАОСА

Введение странных аттракторов оживило и революционизировало исследование хаоса и турбулентности. Убедительное тому свидетельство — появившиеся после 1971 г. бесчисленные статьи, книги и конференции по странным аттракторам. Но само по себе понятие странного аттрактора не решает проблемы, поскольку немедленно возникает другой вопрос: как возникает странный аттрактор или, если угодно, как устанавливается хаотический режим? Какими маршрутами переходит динамическая система от регулярного режима к хаотическому? Чтобы ответить на этот вопрос, нам необходимо перечислить различные возможные переходы между аттракторами — задача столь же необходимая, как и идентификация аттракторов.

В первой части мы подчеркивали тенденцию многих динамических систем к переходу в периодический режим независимо от других характеристик этих систем. Сама по себе такая тенденция отнюдь не очевидна¹⁾. Хотя периодичность далеко не

¹⁾ Для объяснения такой относительной «универсальности» периодического режима привлекается двойной аргумент устойчивости. Во-первых, теория Флоке (см. ниже) показывает, что устойчивость периодической траектории относительно малых изменений начальных условий определяется

исчерпывает всех возможностей, первый шаг к ответу на поставленный выше вопрос состоит в выяснении условий, при которых периодический режим теряет устойчивость. Мы рассмотрим два метода: во-первых, теорию Флоке линейной устойчивости периодических решений и, во-вторых, анализ нелинейных эффектов, которые могут ограничить рост неустойчивости.

VI. ТЕОРИЯ ФЛОКЕ

В этом разделе мы напомним суть теории Флоке, кратко изложенной в разд. IV.3.1. Рассмотрим нелинейный автономный поток в n -мерном фазовом пространстве, допускающий периодическое решение с периодом T :

$$\mathbf{X}(t + \tau) = \mathbf{X}(t).$$

Чтобы определить, устойчиво или неустойчиво решение, достаточно выяснить, как будет развиваться со временем малое начальное возмущение $\delta\mathbf{X}$ решения. Линеаризуя поток относительно периодической траектории, мы обнаруживаем, что начальное условие $\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}$ ($\delta\mathbf{X}$ — бесконечно малое возмущение) отображается в конце периода T в вектор $\mathbf{X}_0 + M\delta\mathbf{X}$, где M — матрица $n \times n$, называемая матрицей Флоке.

Тем самым проблема линейной устойчивости периодического решения сводится к исследованию собственных значений матрицы M . Прежде всего заметим, что эта матрица всегда имеет одно собственное значение, равное единице; оно соответствует смещению $\delta\mathbf{X}$ вдоль траектории. Это просто означает, что, оставаясь на предельном цикле, в конце периода мы в точности возвращаемся в исходную точку — тривиальное заключение о периодическом решении, из которого мы ничего не узнаем об устойчивости этого решения. Что действительно требуется, так это выяснить, как ведут себя возмущения в направлениях, перпендикулярных траектории, как на рис. 2. Интуитивно ясно, что если собственные значения матрицы M зависят от вида пре-

некоторыми неравенствами и не требует какой-либо исключительной ситуации. Во-вторых, эта устойчивость в обычном смысле подразумевает к тому же и структурную устойчивость: если некий поток имеет линейно устойчивую периодическую траекторию (предельный цикл), то всякий близкий к нему поток (получаемый практически изменением управляющих параметров) тоже имеет устойчивый предельный цикл. Поэтому велика вероятность того, что заданная диссипативная динамическая система обнаружит такое периодическое поведение. Конечно, остается открытым вопрос о том, что происходит, когда периодическая траектория теряет свою устойчивость (в обычном смысле слова). Далее мы увидим, что ответ на этот вопрос отнюдь не однозначен. Он частично зависит от нелинейных эффектов в амплитуде флуктуаций, стремящихся удалить траекторию от ставшего неустойчивым предельного цикла, когда последний еще существует.

дельного цикла, то они не зависят от выбранной на предельном цикле начальной точки X_0 . Так как через период вектор $X_0 + \delta X$ отображается в $X_0 + M\delta X$, решение линейно устойчиво, если все собственные значения матрицы M расположены внутри единичной окружности D на комплексной плоскости. В этом случае все компоненты вектора δX , перпендикулярного предельному циклу, с каждым периодом уменьшаются. С другой стороны, если (по крайней мере) одно из собственных значений матрицы M лежит вне D , то δX непрерывно растет по крайней

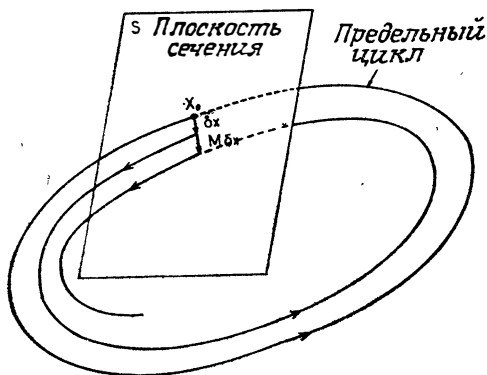


Рис. 2. Основы теории Флоке. Чтобы определить устойчивость периодического решения (предельного цикла), необходимо проследить, как изменяется за один период малое начальное смещение траектории δX . В зависимости от того, убывает ли начальное смещение по всем направлениям или возрастает хотя бы в одном направлении, предельный цикл устойчив или, как показано на рисунке, неустойчив. В данном примере начальное смещение δX выбрано вдоль одного из собственных направлений в плоскости сечения S .

мере в одном направлении: траектория все дальше и дальше отклоняется от предельного цикла, который поэтому неустойчив.

При непрерывном изменении параметра μ периодическое решение постепенно изменяется; то же справедливо и относительно матрицы M и ее собственных значений. Каждому из собственных значений на комплексной плоскости соответствует кривая, параметризованная величиной μ . Потеря устойчивости периодическим решением, сопровождаемая бифуркацией, происходит тогда, когда одна из этих кривых при изменении параметра μ выходит из единичной окружности. Существуют три ¹⁾ генерических

¹⁾ В случае потока в R^2 собственное значение может выйти из единичной окружности через точку $+1$, так как траектория не может самопересекаться. Два других варианта пересечения единичной окружности возможны только при $m \geq 3$ (см. гл. VI).

типа ¹⁾ пересечения единичной окружности (рис. 3): в точке $+1$, в точке -1 и в двух комплексно-сопряженных собственных значениях $\alpha \pm i\beta$. Помимо потери устойчивости каждый из трех типов пересечения по-своему сказывается на последующем поведе-

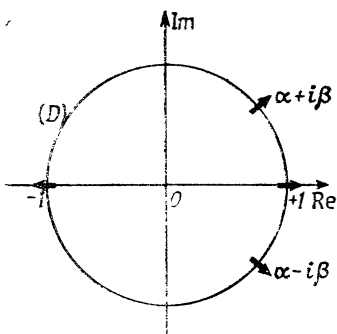


Рис. 3. Три возможных случая пересечения единичной окружности D собственными значениями матрицы Флоке.

нии системы в зависимости от нелинейности и в тесной связи с типом соответствующих бифуркаций.

VII. ПЕРЕХОДЫ ПРИ ПОТЕРЕ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

При пересечении единичной окружности в точке $+1$ возникает бифуркация седло — узел (см. приложение А). Периодическое решение не только становится неустойчивым, но полностью исчезает. В области параметра чуть выше порога бифуркации система переходит в режим, который называется перемежаемостью I типа. Он характеризуется фазами регулярного, почти периодического поведения (ламинарные фазы), время от времени прерываемого фазами беспорядочного, «анархического» поведения (турбулентные всплески).

Если собственное значение выходит из единичной окружности в точке -1 , то бифуркация называется субгармонической и может быть либо суперкритической, либо обратной. В случае суперкритической субгармонической бифуркации (см. гл. VIII) новое устойчивое периодическое решение с удвоенным периодом заменяет старое решение, которое становится неустойчивым. Удвоение периода повторяется всякий раз, когда возникает новое периодическое решение, что приводит к бесконечной последовательности бифуркаций, называемой субгармоническим каскадом, заканчивающейся хаосом. С другой стороны, субкрити-

¹⁾ «Генерический тип» здесь означает, что при малом изменении решения (например, при изменении второго управляющего параметра μ') характер пересечения не изменяется.

ческая бифуркация приводит к перемежаемости III типа, которая качественно напоминает перемежаемость I типа: длинные фазы почти периодического поведения, время от времени прерываемые хаотическими всплесками. Однако тип III характеризуется монотонным увеличением амплитуды субгармоники на протяжении почти периодической фазы из-за того, что нелинейные эффекты усиливают субгармоническую неустойчивость предельного цикла. Амплитуда возрастает с каждым колебанием. Когда она превышает некоторое критическое значение, ламинарная фаза прерывается.

Наконец, неустойчивость третьего типа возникает, когда два комплексно-сопряженных собственных значения $\alpha \pm i\beta$ одновременно пересекают единичную окружность: это называется бифуркацией Хопфа¹⁾. Если бифуркация Хопфа суперкритическая, то она приводит к устойчивому аттрактору вблизи предельного цикла, который становится неустойчивым (но все еще существует). Этот аттрактор — тор T^2 , на поверхности которого лежит новое решение, соответствующее квазипериодическому режиму. Вторая суперкритическая бифуркация Хопфа может порождать переход $T^2 \rightarrow T^3$, а в результате третьей (иногда после второй) бифуркации возникает странный аттрактор. Если бифуркация Хопфа субкритическая, то может встретиться другое явление, называемое перемежаемостью II типа. Глобальные качественные особенности у перемежаемости II типа такие же, как у I и III типов, за исключением того, что неустойчивости,

Точка пересечения с единичной окружностью	Бифуркация	Явление	Глава
+1	Седло — узел	Перемежаемость I типа	IX
-1	Субгармоническая: Нормальная	Субгармонический каскад	УП
	Обратная	Перемежаемость III типа	IX
$\alpha \pm i\beta$	Хопфа: Нормальная	Квазипериодичность	УП
	Обратная	Перемежаемость II типа	IX

¹⁾ Арнольд называет ее бифуркацией Пуанкаре — Андронова. Мы будем придерживаться термина «бифуркация Хопфа», более распространенного в западной литературе.

развивающиеся в ламинарных фазах, имеют частоту, не связанную с основной частотой исходного цикла. Новая частота связана с отношением α/β для $(\alpha \pm i\beta)$ — собственных значений, пересекающих единичную окружность при бифуркации. Динамический процесс, дающий начало новой ламинарной фазе после турбулентного всплеска, слишком сложен, чтобы описывать его здесь, поскольку речь идет о потоке в шестимерном фазовом пространстве, а это соответствует сечению Пуанкаре в \mathbb{R}^5 .

В следующей таблице сведены различные ситуации, описанные выше, и указаны главы, в которых проводится их анализ.

VIII. СОВРЕМЕННЫЕ ПРЕДЕЛЫ ТЕОРИИ

Исследование переходов с потерей периодическим решением линейной устойчивости является удобным способом классификации ряда процессов, приводящих к установлению хаотического режима. Однако следует соблюдать осторожность, и в этой связи мы сделаем два замечания.

Во-первых, как мы уже указывали, периодическая эволюция является не необходимым условием возникновения хаоса, а всего лишь благоприятным обстоятельством. Необязательность периодического режима убедительно подтверждается на примере модели Лоренца.

Во-вторых, необходимо ясно сознавать ограниченность данной теории в ее современном состоянии. Мы перечислили и проанализировали три явления, ведущие к хаосу: квазипериодичность, субгармонический каскад и перемежаемость. Но не были указаны никакие необходимые или достаточные условия, при которых возникают эти явления, на основе характерных особенностей потока. В этом отношении симфония динамических систем остается незавершенной.

ГЛАВА VI

СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ

VI.1. ДИССИПАЦИЯ И АТТРАКТОРЫ

VI.1.1. Явление притяжения

Диссипативные динамические системы (а мы рассматриваем только такие системы) характеризуются притяжением всех траекторий, проходящих через некоторую область фазового пространства, к геометрическому объекту, называемому аттрактором. Проиллюстрируем это на простом примере: маятник под действием вынуждающей силы. Энергия, подводимая к маятнику извне, компенсирует затраты энергии и, таким образом, диссипируется системой. Когда колебания маятника достигают амплитуды, при которой энергия, подводимая за один цикл, в точности равна энергии, диссипируемой за один цикл, устанавливается стационарное состояние. Режим периодический: амплитуда колебаний постоянна, а траектория в фазовом пространстве есть предельный цикл C (рис. VI.1). В притягивающем характере цикла мы убедимся, слегка сместив систему с предельного цикла. Например, возмутим маятник толчком, придав ему амплитуду θ_1 и скорость $\dot{\theta}_1$, значительно превышающие максимальные значения θ_m и $\dot{\theta}_m$ для предельного цикла. По прошествии некоторого времени диссипация вынудит траекторию быстро приблизиться к предельному циклу C , на котором диссипация компенсируется подводимой энергией. Аналогично временное торможение маятника, находящегося под действием вынуждающей силы, уменьшит амплитуду его колебаний и скорость до θ_2 и $\dot{\theta}_2$ (рис. VI.1), но затем траектория снова приближается к C ¹⁾.

Сказанное о предельном цикле можно обобщить следующим образом. В фазовом пространстве решения системы n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = F(\mathbf{X}(t)), \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n,$$

¹⁾ Последнее утверждение нуждается в уточнении: «наматывается» на C любая траектория, исходящая из окрестности предельного цикла C , образующей его область притяжения (см. ниже).

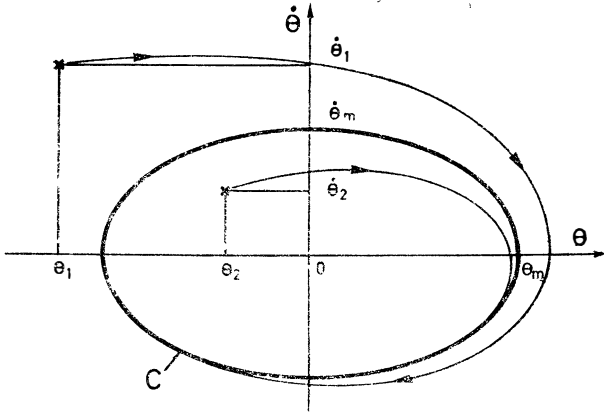


Рис. VI. 1. Притяжение к предельному циклу C . Фазовое пространство определяется углом θ между маятником и вертикалью и угловой скоростью $\dot{\theta} = d\theta/dt$. На рисунке показаны две траектории (выходящие из начальных точек, не лежащих на предельном цикле), быстро сходящиеся к предельному циклу.

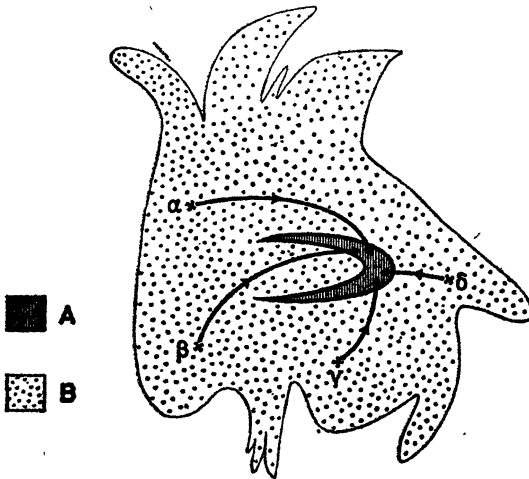


Рис. VI. 2. Схематическое изображение аттрактора. A — аттрактор, B — его область притяжения. Траектории, выходящие из начальных точек α , β , γ и δ , переносятся к аттрактору A потоком ϕ .

образуют поток ϕ , который для диссипативной системы имеет аттрактор. По определению аттрактором A называется компактное множество в фазовом пространстве, обладающее следующими свойствами:

1) A инвариантен относительно действия потока, т. е. $\phi A \equiv A$;

2) A имеет нулевой объем в n -мерном фазовом пространстве (см. следующий разд.);

3) A содержится в области B ненулевого объема, которая является *областью притяжения аттрактора*. По определению областью притяжения называется множество точек, таких, что выходящие из них траектории при $t \rightarrow \infty$ стремятся к A (рис. VI. 2).

Мы видим, что аттрактор A есть асимптотический предел решений, начальные точки которых принадлежат его области притяжения B . Заметим, что даже если A — простой геометрический объект, то B может иметь очень сложную форму.

VI. 1.2. Два следствия из сокращения площадей

Обратимся снова к примеру с предельным циклом, чтобы исследовать две очень важные характеристики притяжения: потерю памяти о начальных условиях и то, что из этого проистекает для размерности аттракторов.

Рассмотрим множество начальных условий на фазовой плоскости $(\theta, \dot{\theta})$, занимающее область размером Γ (рис. VI. 3). Вследствие диссипации поток приводит к сокращению площадей. Следовательно, поверхность Γ под действием потока вырождается до линейного отрезка на аттракторе C . Стало быть, происходит потеря информации относительно взаимного расположения точек, первоначально принадлежавших поверхности Γ ; по достижении аттрактора информация утрачивается необратимо. Этот вывод опирается исключительно на сокращение площадей и на одновременное существование аттрактора. Следовательно, вывод остается в силе независимо от типа аттрактора. Именно поэтому информация о начальных условиях теряется и в двоякопериодическом режиме, траектории которого эволюционируют в фазовом пространстве размерности не меньше трех и стремятся к тору T^2 . Аналогичный вывод справедлив и для аперiodических режимов, и для связанных с ними аттракторов.

Потеря памяти о точных начальных условиях мы продемонстрируем на примере с маятником. Сначала (т. е. вдали от предельного цикла) для задания состояния динамической системы необходимы две координаты θ_0 и $\dot{\theta}_0$, а поэтому для описания

системы требуется двумерное фазовое пространство, или поверхность. После затухания промежуточных режимов и выхода на асимптотический режим остается только одна траектория: кривая C . Для задания точки достаточно одной криволинейной координаты вдоль C . Это иллюстрирует общий принцип: размерность d аттрактора меньше размерности n фазового про-

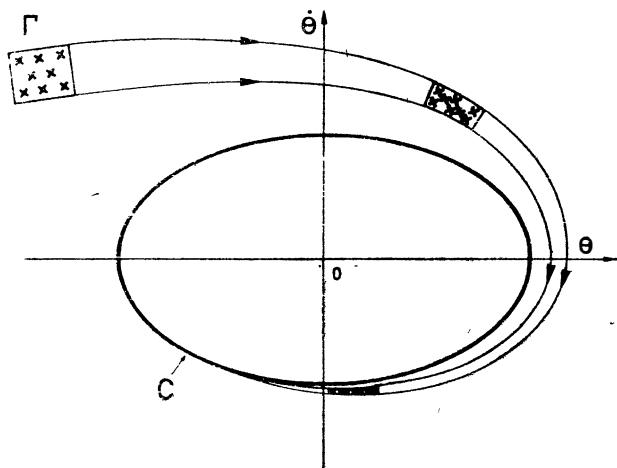


Рис. VI. 3. Сокращение площадей, связанное с притяжением. Площадка Γ , ограничивающая некоторое множество начальных условий, при достижении аттрактора C вырождается в отрезок прямой.

странства, т. е. меньше числа степеней свободы динамической системы¹⁾:

$$d < n.$$

Вычислим теперь, к каким количественным следствиям приводит сокращение площадей или, в более общем случае, объемов. Относительная скорость изменения объема V в фазовом пространстве под действием потока, т. е. $(1/V)(dV/dt)$, определяется производной Ли:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_i},$$

где X_i — i -я компонента вектора \mathbf{X} ($\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$). В диссипативных системах эта величина, усредненная по времени, отрицательна

¹⁾ В дальнейшем мы увидим, что разность между d и n не обязательно равна единице и даже целому числу.

и служит мерой скорости сокращения¹⁾. Из отрицательности производной Ли следует, что при $t \rightarrow \infty$, после того как траектории достигают аттрактора, любое множество начальных условий объемом V отображается в множество нулевого объема: объем самого аттрактора равен нулю.

В трехмерном пространстве термин «объем» имеет свое обычное значение (элемент пространства \mathbb{R}^3). Следовательно, чтобы удовлетворять сформулированному выше условию $d < n$, любой аттрактор должен иметь размерность меньше трех.

VI. 1.3. Непересечение фазовых траекторий

Траектории динамической системы в фазовом пространстве не могут пересекаться²⁾ (нигде, кроме особых точек, в которых они «сливаются»). Это — неизбежное следствие детерминистского характера описания. В противном случае одно начальное условие (точка пересечения) порождало бы различные траектории или система по прохождении точки пересечения могла бы вести себя различным образом, т. е. поведение ее было бы неопределенным. Такая неопределенность противоречила бы гипотезе детерминистского описания системы конечной совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений.

На первый взгляд такое замечание может показаться довольно бессодержательным, но в действительности оно приводит к весьма глубоким следствиям, в чем мы еще неоднократно будем иметь случай убедиться, а пока выясним, что следует из него для двоякопериодического режима. В этом случае аттрактор имеет вид тора T^2 , который мы для удобства «развернем» на плоскость. Такая операция топологически осуществима, поскольку поверхность тора двумерна.

Разворачивание тора состоит из трех этапов, которые изображены на рис. VI. 4. На первом этапе мы разрезаем тор по малой окружности (SC), разделяющей области S и C' , и, разгибая, превращаем его в цилиндр. Проводя второй разрез вдоль образующей AA' цилиндра и разворачивая еще раз цилиндрическую поверхность, получаем прямоугольник $AA'B'B$. Сторона AB (или $A'B'$) соответствует малой окружности («меридиану»)

¹⁾ Как мы уже упоминали, для консервативных, или гамильтоновых, систем объем сохраняется:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_i} = 0.$$

²⁾ Для случая векторных полей об этом уже упоминалось в разд. I. 3.3.

PC на торе, а сторона AA' (или BB') — большой окружности («параллели») GC . Пусть ω_1 и ω_2 — угловые частоты вращений траекторий соответственно по большим и малым окружностям. Полному обороту по большой окружности на прямоугольной развертке соответствует отрезок, параллельный большей стороне AA' прямоугольника (при переходе из B в B' фаза изменяется от 0 до 2π). Аналогично отрезок, параллельный меньшей ста-

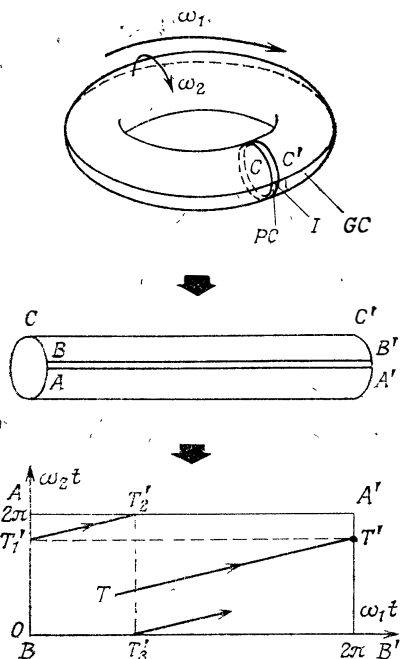


Рис. VI. 4. Развертка поверхности тора T^2 . Развертывание поверхности тора производится в два этапа. Сначала мы разрезаем тор по малой окружности (меридиану) C и распрямляем его. В результате получаем трубку, ограниченную окружностями C и C' (первоначально на торе эти две окружности совпадали). Затем разрезаем трубку по линии AA' (BB') и, развернув, получаем прямоугольник $AA'B'B$ (первоначально на торе точки A, A', B' и B совпадали с одной точкой I). О том, как изображается фазовая траектория T на таком прямоугольнике, рассказано в тексте.

роне BA прямоугольника, соответствует вращению по малой окружности тора. Вообще любая фазовая траектория на торе представляет собой некоторую комбинацию двух движений, и на прямоугольнике ей соответствует некоторый прямолинейный отрезок, например отрезок TT' . Так как линии AB и $A'B'$ на торе совпадают, продолжая траекторию¹⁾ за точку T' , мы должны «перепрыгнуть» в точку T'_1 и из нее провести прямую, параллельную TT' . Аналогично, дойдя до точки T'_2 , мы должны перепрыгнуть в точку T'_3 и т. д. Вся траектория в таком представлении состоит из множества параллельных прямолинейных

¹⁾ Естественно, что при монотонно возрастающем t движение по траектории происходит только в одну сторону.

отрезков. На рис. VI.5 показан пример траектории, возникающей в случае, когда отношение частот ω_1/ω_2 равно четырем. Детерминированность запрещает разбегание траекторий: если две траектории расходятся, то они непременно должны пересечься, как на рис. VI.6, и число точек пересечения со временем

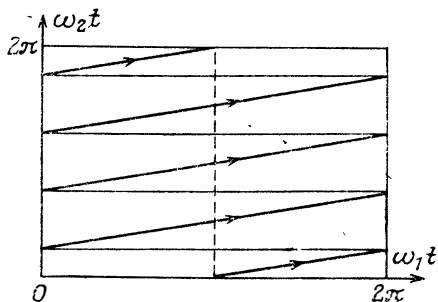


Рис. VI.5. Представление траектории на развертке тора T^2 . В этом примере $\omega_1/\omega_2 = 4$. Из-за периодичности стороны прямоугольника нормированы к отрезку $[0, 2\pi]$.

возрастает. Следовательно, фазовый портрет такого типа, как на рис. VI.6, исключается.

Резюмируя, мы можем утверждать, что на притягивающем торе T^2 существуют только две возможности. Если отношение

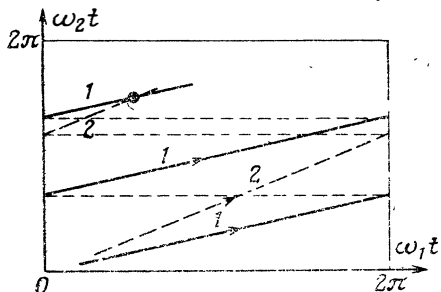


Рис. VI.6. Невозможность расхождения траекторий на T^2 . Две расходящиеся траектории должны были бы пересекаться, что невозможно.

ω_1/ω_2 иррационально, то прямолинейные отрезки всюду плотно покрывают прямоугольник (т. е. развертку тора): это двоякопериодический, или квазипериодический, режим. Если же отношение ω_1/ω_2 рационально, то траектория состоит из конечного числа параллельных прямолинейных отрезков, поэтому, следовательно, проходимых с течением времени, как на рис. VI.5: режим периодический. Единственный тип структурной

неустойчивости, которой подвержен двоякопериодический режим, — затягивание частоты, или синхронизация¹⁾, означающее, что отношение частот из иррационального становится рациональным. Следовательно, тор T^2 не может быть аттрактором апериодического режима.

VI. 2. АПЕРИОДИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ

VI. 2.1. Характеристики хаотического режима

Резюмируем то, что было сказано в гл. III о хаотических режимах, с тем, чтобы вывести свойства аттракторов, связанных с такими режимами.

В хаотическом режиме спектр мощности одной из переменных X динамической системы содержит непрерывную часть, что соответствует неупорядоченной и хаотической эволюции этой переменной (рис. VI.7, а). Чтобы оценить интенсивность хаоса,

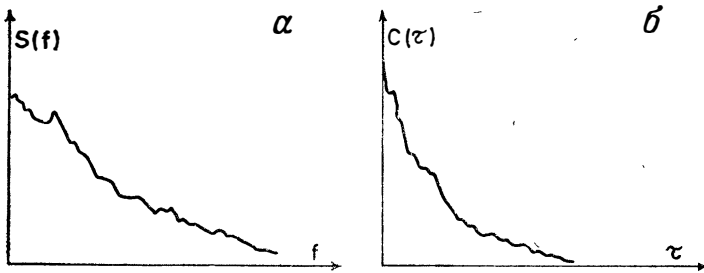


Рис. VI. 7. Апериодический режим. а — спектр мощности $S(f)$; б — автокорреляционная функция $C(\tau)$.

полезно ввести функцию, служащую мерой сходства значения сигнала X в момент времени t с значением того же сигнала в более поздний момент времени $t + \tau$. Величина $C(\tau)$, о которой идет речь, получается путем усреднения большого числа произведений $X(t)X(t + \tau)$:

$$C(\tau) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} X(t)X(t + \tau) dt,$$

или, в более сжатых обозначениях,

$$C(\tau) = \langle X(t)X(t + \tau) \rangle.$$

Изменяя интервал τ , мы строим величину $C(\tau)$, которая называется временной автокорреляционной функцией. В гл. III было

¹⁾ Подробнее об этом явлении см. в приложении В.

показано, что по теореме Винера — Хинчина $S(\tau)$ есть преобразование Фурье спектра мощности. Если $X(t)$ — константа, периодический или квазипериодический режим, то спектр мощности состоит из отдельных пиков. Следовательно, $S(\tau)$ остается отличной от нуля при $\tau \rightarrow \infty$.

Периодический (или квазипериодический) сигнал обладает сходством с самим собой в более поздние моменты времени. Это означает, что поведение системы предсказуемо, так как, зная его поведение на достаточно большом интервале времени, мы можем с помощью простого сравнения построить точный прогноз на все последующие времена. С другой стороны, в хаотическом режиме, в котором спектр мощности обязательно содержит непрерывную часть, автокорреляционная функция $S(\tau)$

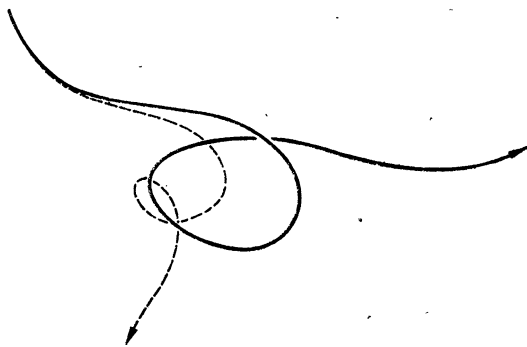


Рис. VI. 8. Пример расхождения первоначально близких фазовых траекторий.

стремится к нулю при возрастающем τ (см. рис. VI. 7, б). Автокорреляционная функция имеет конечную протяженность: сходство сигнала с самим собой со временем ослабевает, а по истечении достаточно продолжительного большого времени исчезает совсем. Следовательно, наблюдение сигнала $X(t)$ на любом конечном интервале времени недостаточно для предсказания поведения сигнала в будущем. Хаотический режим принципиально непредсказуем в силу все возрастающей потери самоподобия. В разд. VI. 1.1 мы уже встречались с потерей памяти о начальных условиях. В действительности это отражает только *нечувствительность* к начальным условиям и обеднение информации, так как многие начальные состояния *вне аттрактора*, эволюционируя, «оседают» на аттракторе. Но когда речь идет о забывании начальных условий в хаотическом режиме, мы понимаем под этим нечто другое: множество незначительно различающихся начальных состояний *на аттракторе* порождает непредсказуемым образом многие конечные состояния. Таким образом,

информация в этом случае не теряется, а в определенном смысле приобретается¹⁾. Это приводит к решающим последствиям для динамики: две траектории, первоначально близкие, расходятся, что приводит к полной потере всякого сходства за конечное время (рис. VI. 8). Наоборот, если режим представлен аттрактором, на котором соседние траектории расходятся, то такой режим хаотический. Это очень важное свойство — усиление (в действительности экспоненциальное усиление) ошибок или неопределенности в начальных данных — хаотического режима называется *чувствительностью к заданию начальных условий* (ЧЗНУ).

VI. 2.2. Свойства аperiodических аттракторов

Идея Ландау состояла в том, чтобы объяснить существование непрерывного спектра Фурье наличием бесконечно большого числа независимых частот²⁾. Но для описания хаоса вовсе не требуется тор T^r очень большой размерности r : из сказанного выше ясно, что любой аттрактор даже малой размерности, обладающий ЧЗНУ, соответствует хаотическому режиму.

Представление об аттракторе с ЧЗНУ содержит двойной парадокс и весьма противоречит нашей интуиции. Этим, по-видимому, объясняется позднее открытие хаоса с малым числом степеней свободы — детерминированного хаоса. Первый парадокс кроется в кажущемся противоречии между притяжением, которое обуславливает схождение траекторий, и ЧЗНУ, которая приводит к расхождению траекторий. В действительности же расхожимость траекторий только устанавливает нижнюю границу размерности аттрактора. Как было показано в разд. VI. 1.3, по топологическим причинам ЧЗНУ для двумерного аттрактора невозможна: фазовые траектории должны эволюционировать в пространстве, размерность которого не меньше трех. Для простоты мы будем рассматривать только трехмерное фазовое пространство. На рис. VI. 9 схематически изображена одна из новых ситуаций³⁾, коренным образом отличающихся от тех, которые могут встретиться на торе T^2 , и открывающих путь к аттрактору нового типа. Траектории расходятся на плоскости как раскручивающиеся спирали, затем выходят из плоскости и воз-

¹⁾ В отличие от *временной* потери информации из-за притяжения к аттрактору на самом аттракторе происходит *непрестанный* процесс производства информации.

²⁾ Во введении к второй части мы определили такую ситуацию, как хаос с бесконечно большим числом степеней свободы.

³⁾ Это не единственная возможная ситуация; мы выбрали ее лишь в качестве примера.

вращаются, попадая в центр спирали. Такой процесс повторяется до бесконечности. Для этого необходимы две операции: *растяжение* вследствие ЧЗНУ и складывание, без которого траектории не могли бы оставаться в ограниченной части пространства.

Чтобы понять, как возникает такой поток, представим себе трехмерный поток, расходящийся в направлении xx' и сходя-

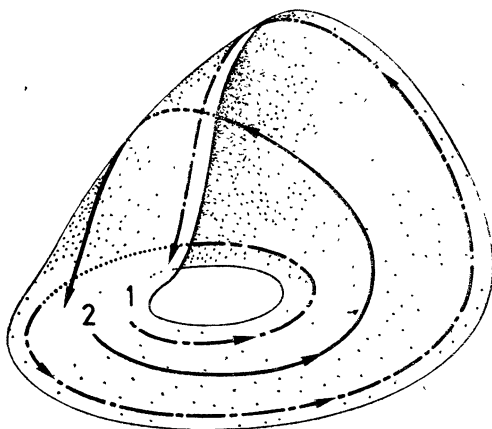


Рис. VI. 9. Схематическое изображение расхождения двух траекторий в трехмерном фазовом пространстве. Соседние траектории 1 и 2 выходят из горизонтальной плоскости, «перекрещиваются», не пересекаясь, и возвращаются к спирали. Траектории проведены на упрощенном изображении аттрактора Рёсслера.

Из работы Абрахама и Шоу.

щийся в перпендикулярном направлении yy' (рис. VI. 10, а). Некоторое множество начальных условий порождает квазидвумерный лист $ABEC$, на котором траектории расходятся, как это требуется для ЧЗНУ (рис. VI. 10, б). После первой операции — растяжения — необходимо убедиться в том, что поток остается в ограниченной части трехмерного пространства, т. е. в том, что происходит складывание¹⁾. После того как ширина листа удвоится ($CE = 2AB$), сторона CE складывается вдвое вдоль CDE (рис. VI. 10, в). В результате мы получаем трехмерный поток, обладающий ЧЗНУ в конечной части пространства²⁾.

¹⁾ Позднее мы увидим, что именно повторное складывание потока порождает характерную слоистую структуру странных аттракторов.

²⁾ Построенный нами с помощью операций растяжения и складывания объект обладает по существу такой же топологией, как аттрактор Рёсслера, изображенный на рис. VI. 9.

Мы видим, что в трехмерном фазовом пространстве противоречивые требования притяжения и ЧЗНУ удается примирить с помощью понятия *гиперболичности*: притяжение происходит в одном направлении, а расхождение траекторий в другом. На

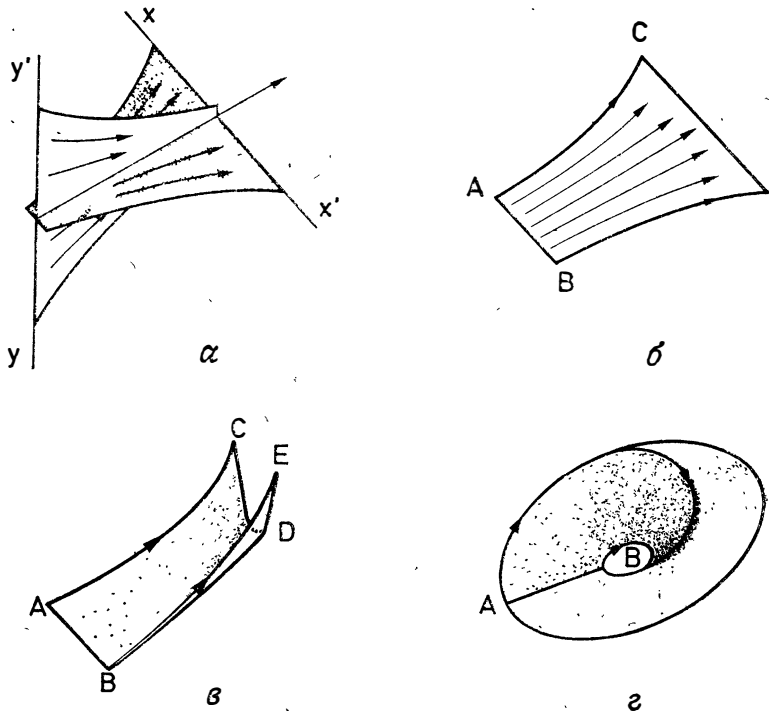


Рис. VI. 10. Этапы построения странного аттрактора. *a* — сокращение (притяжение) по направлению yy' и растяжение (расхождение) по направлению xx' ; *б* — лист, на котором динамика обладает высокой чувствительностью к начальным условиям (в данном случае $\overline{CE} = 2\overline{AB}$); *в* — первое складывание листа (длина стороны CE , сложенной вдоль CDE , становится сравнимой с длиной стороны AB); *г* — второе складывание, в результате которого «выход» (CDE) совмещается с «входом» (AB).

В результате всех проделанных операций мы получаем объект такого же типа, как на рис. VI. 9.

Из работы Р. Шоу.

рис. VI. 11 изображена плоскость, перпендикулярная среднему направлению потока. По аналогии с аналитической геометрией точка O называется гиперболической. Вдоль листа, т. е. в направлении xx' , траектории расходятся от точки O , а в перпендикулярном направлении yy' траектории сходятся к точке O . Вне этих двух осей точки движутся по кривым, проекции которых

на плоскость рис. VI. 11 напоминают гиперболы ¹⁾. Таким образом, притяжение, уничтожающее информацию, уравнивается расхождением траекторий, рождающим информацию.

Здесь кроется второй парадокс: придя к заключению о том, что ЧЗНУ требует размерности аттрактора d , удовлетворяющей

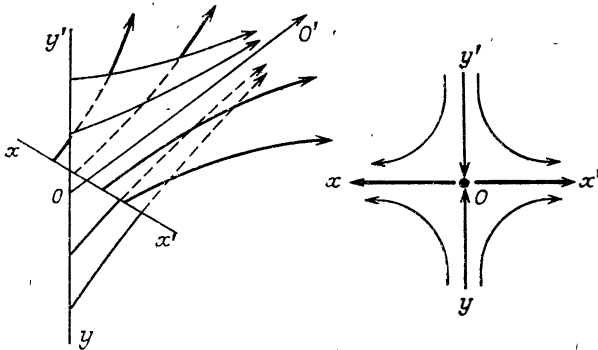


Рис. VI. 11. К понятию гиперболичности. Жирными линиями на рисунке слева сверху изображены расходящиеся траектории, а тонкими линиями сходящиеся траектории. Стрелка OO' указывает направление среднего потока, xx' — направление, в котором происходит растяжение, yy' — направление, в котором происходит сжатие. На рисунке справа внизу показана проекция потока на плоскость, перпендикулярную направлению OO' . Поверхность, на которой лежат сходящиеся траектории (в нашем случае плоскость $YY'OO'$), называется устойчивым многообразием. Поверхность, на которой лежат расходящиеся траектории (в нашем случае плоскость $XX'OO'$), называется неустойчивым многообразием.

неравенству $d > 2$, мы можем спросить, может ли трехмерный поток обладать ЧЗНУ. Этот вопрос возникает потому, что в случае диссипативной системы (т. е. системы, обладающей

¹⁾ Описанное выше построение позволяет определить две различные линии, «параллельные» одной и той же «прямой» (точнее, геодезической). Один из способов построения прямой, параллельной данной прямой D и проходящей через точку P , не лежащую на D , основан на использовании точки M , движущейся по D . Прямая, параллельная прямой D и проходящая через точку P , есть предельное положение прямой MP , когда точка M уходит по D в бесконечность. Пятый постулат Евклида эквивалентен утверждению о том, что предельная прямая не зависит от того, в какую сторону движется по D точка M . Но на гиперболической плоскости (для которой пятый постулат не выполняется) это не так: в зависимости от того, в какую сторону движется по D точка M , существуют две различные параллельные. Это замечание лежит в основе неевклидовой геометрии Гаусса — Бóльшая — Лобачевского. Некоторые идеи, используемые при изучении хаотических систем в конечном фазовом пространстве, берут начало в гиперболических геометриях. Например, числа Ляпунова, о которых пойдет речь в дальнейшем (см. приложение Б), связаны с понятием внутренней кривизны гиперболической плоскости.

аттрактором) объемы в фазовом пространстве со временем сокращаются (см. гл. I). Следовательно, объем аттрактора должен быть равен нулю, что в трехмерном фазовом пространстве приводит к неравенству $d < 3$. Аттрактор¹⁾, который может представлять хаотический режим (и тем самым обладать ЧЗНУ), должен быть таким, чтобы выполнялось неравенство $2 < d < 3$. Казалось бы, такое условие должно исключать существование аттракторов, поскольку евклидова размерность должна быть целым числом. Однако аттракторы, удовлетворяющие неравенству $2 < d < 3$, все же существуют. Помимо многих других необычных свойств они обладают нецелой размерностью, которая называется фрактальной размерностью²⁾ (см. разд. VI. 4.2). Из-за своих необычных свойств такие аттракторы получили название странных аттракторов.

Резюмируя, можно утверждать, что диссипативная динамическая система может стать хаотической, если размерность фазового пространства больше или равна трем. Такой хаос (с малым числом степеней свободы) обусловлен ЧЗНУ траекторий на странном аттракторе. Наиболее важные свойства странного аттрактора состоят в следующем:

- 1) фазовые траектории (по крайней мере те, которые исходят из точек, расположенных достаточно близко к аттрактору) стремятся к аттрактору;
- 2) близкие траектории расходятся на аттракторе (ЧЗНУ);
- 3) аттрактор имеет фрактальную размерность d .

VI. 3. ПРИМЕРЫ АТТРАКТОРОВ

VI. 3.1. Аттрактор Лоренца

Изложение этой модели турбулентности и ее основных свойств читатель найдет в приложении Г. Если принять некоторые сильно упрощающие предположения, то динамическое поведение жидкости в условиях конвекции может быть описано

¹⁾ Напоминаем, что мы рассматриваем трехмерное фазовое пространство.

²⁾ В отличие от евклидовой размерности фрактальная размерность определяется несколькими формально неэквивалентными способами, которые в конкретных примерах приводят к различным численным значениям. Сильно упрощая, можно сказать, что одни определения фрактальной размерности более чувствительны к внутренней связности объекта, другие — к способу погружения объекта в объемлющее пространство. Эти свойства, ныне тщательно изучаемые, входят в описание таких явлений, как перколяция (протекание), турбулентность и физика полимеров. Позднее мы рассмотрим размерность Хаусдорфа, называемую также размерностью Хаусдорфа — Безиковича (которая будет определена в разд. VI. 4), — одну из возможных фрактальных размерностей.

тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями¹⁾, определяющими поток в трехмерном фазовом пространстве с переменными X , Y и Z :

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= Pr - Y - X, \\ \frac{dY}{dt} &= -XZ + rX - Y, \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ.\end{aligned}$$

Значения Pr и b обычно фиксированы (часто выбирают значения $Pr = 10$ и $b = 8/3$; этих же значений придерживаемся и мы), а параметр r остается управляющим. Эта система связанных между собой нелинейных уравнений кажется простой, но, вообще говоря, она (аналитически) неинтегрируема. Тем не менее, задавая начальные значения ($X(0)$, $Y(0)$, $Z(0)$) и используя калькулятор, мы можем шаг за шагом численно решить систему Лоренца и найти поток $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$.

При малых значениях r устойчивые решения стационарны²⁾ (см. приложение Г). Когда параметр r превышает 24, 74 (например, при $r = 28$), проекции траекторий на плоскость (Y, Z) становятся нерегулярными орбитами вокруг точек C и C' (рис. VI. 12) — неустойчивых неподвижных точек потока. На рис. VI. 13-мы видим, что временная эволюция, например $X(t)$, обладает всеми внешними признаками хаотического поведения.

Если начальные значения ($X(0)$, $Y(0)$, $Z(0)$) выбраны случайным образом, то соответствующие траектории быстро устремляются к области A , состоящей из множества траекторий, описывающих петли вокруг точек C и C' (рис. VI. 14). Аттрактор A (которому соответствует хаотический режим) является странным аттрактором. Более того, это первый странный аттрактор³⁾, который был открыт и исследован. Мы можем вычислить сокращение объемов под действием потока, если воспользуемся производной Ли:

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(Pr + b + 1) = -\frac{41}{3}.$$

¹⁾ Обыкновенным дифференциальным уравнениям в отличие от дифференциальных уравнений с частными производными удовлетворяют функции только одной переменной, в данном случае времени.

²⁾ Напомним, что в этом разделе $Pr = 10$ и $b = 8/3$.

³⁾ Когда Лоренц занимался исследованием своей модели, термин «странный аттрактор» еще не существовал и не были известны необычные свойства странных аттракторов. В более ранней работе Рикитакэ и Аллена были получены результаты, которые ныне принято связывать со свойствами странных аттракторов.

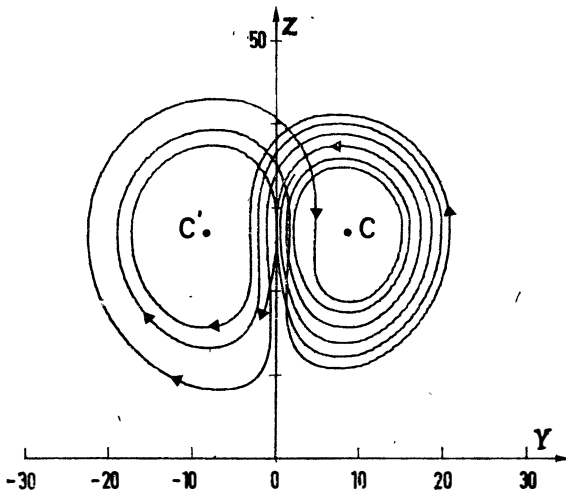


Рис. VI.12. Аттрактор Лоренца. Проекция части траектории на плоскость (Y, Z) фазового пространства при $r = 28$; C и C' — неустойчивые неподвижные точки.

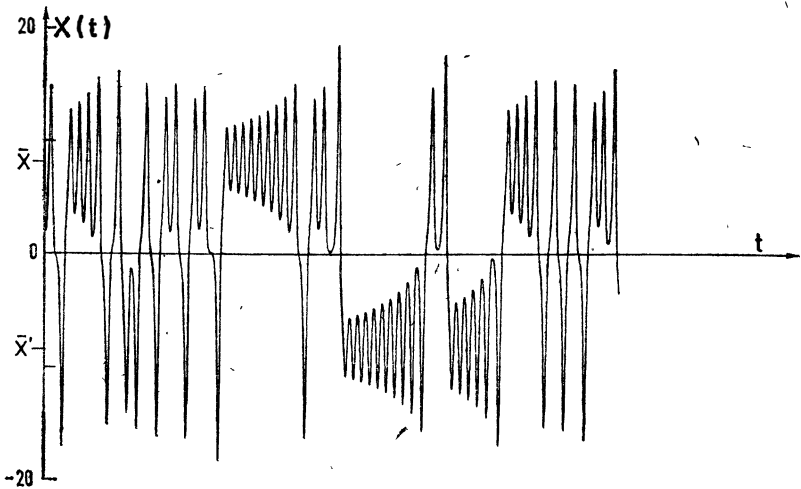


Рис. VI.13. График зависимости $X(t)$ при $r = 28$. Обратите внимание на неупорядоченную эволюцию, происходящую то в окрестности среднего значения \bar{X} , то в окрестности другого значения \bar{X}' (\bar{X} и \bar{X}' — координаты неустойчивых неподвижных точек C и C').

За единицу времени (которая в данном случае примерно равна периоду одного оборота вокруг C или C') объем уменьшается в $e^{-41/3} \approx 10^{-6}$ раз. Это означает, что модель Лоренца сильно диссипативна.

Сечение Пуанкаре траекторий плоскостью¹⁾ $Z = r - 1$, содержащей точки C и C' , показано на рис. VI.15. На первый взгляд кажется, что это сечение состоит из двух сегментов,

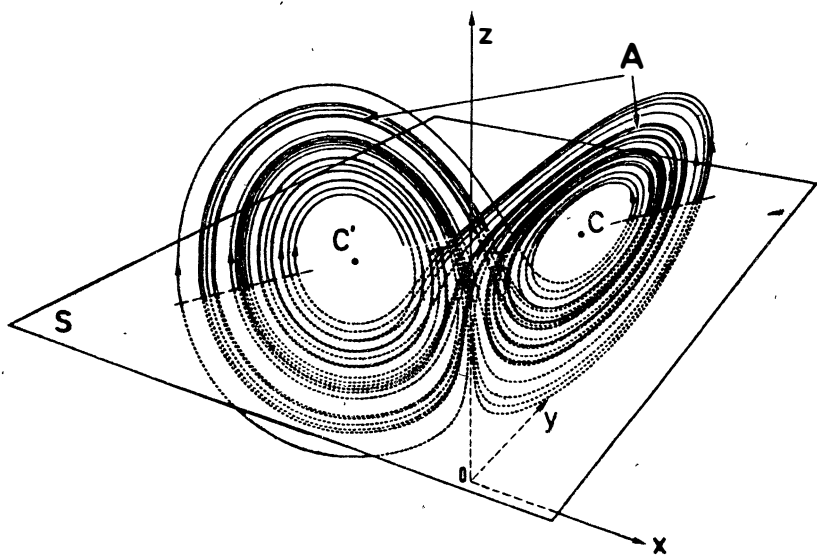


Рис. VI.14. Аттрактор Лоренца при $r = 28$. Кажущаяся асимметрия аттрактора обусловлена только перспективой изображения. Двумя штриховыми отрезками показаны пересечения траекторий с плоскостью сечения S (задаваемой уравнением $Z = r - 1 = 27$) при условии $Z > 0$, т. е. сечение Пуанкаре аттрактора этой поверхностью.

Из работы О. Ланфорда.

каждый из которых соответствует вращению вокруг одной из неустойчивых неподвижных точек C и C' в данном направлении. Отсюда следует, что траектории почти ложатся на поверхность и что аттрактор имеет размерность, равную двум. Действительно, «проткнув» кажущийся двумерным лист, мы обнаружим сложную структуру, состоящую из большого числа плотно упакованных листов. Таким образом, аттрактор Лоренца является не поверхностью, но вместе с тем не имеет объема: листы не имеют «толщины» (протяженности в поперечном направлении)

¹⁾ Плоскость $Z = r - 1$ содержит неустойчивые неподвижные точки C и C' .

и разделены пустым пространством. Действительно, вычисляя размерность Хаусдорфа — Безиковича (которая будет определена в разд. VI.4.2) аттрактора Лоренца, мы получаем число, очень близкое к двум, но все же большее двух:

$$d = 2,06$$

Этот результат подтверждает, что аттрактор Лоренца — не простая поверхность. То, что его фрактальная размерность очень

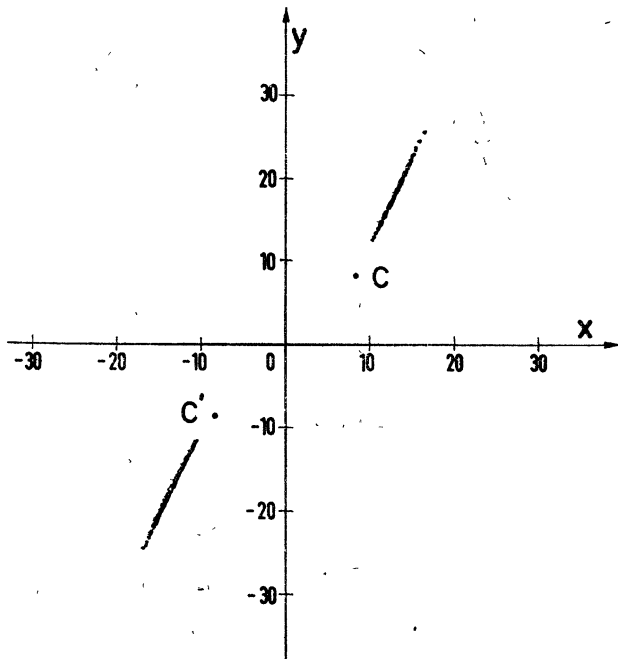


Рис. VI.15. Сечение Пуанкаре аттрактора Лоренца. Плоскость сечения совпадает с плоскостью S на рис. VI.14. В плоскости сечения лежат неустойчивые неподвижные точки C и C' . Сечение Пуанкаре состоит из двух почти прямых отрезков.

близка к двум, обусловлено сильным сжатием объемов, о котором мы упоминали выше. Сильным сжатием объемов объясняется и то, что отображение Пуанкаре может быть описано одномерным отображением первого возвращения $x_{k+1} = f(x_k)$ (см. разд. IV.4). Сам Лоренц получил это отображение, построив график зависимости последовательных максимальных значений Z , т. е. Z_{k+1} , от предыдущих максимумов Z_k . Эти значения Z_{\max} являются координатами Z точек в сечении Пуан-

каре поверхности $XY - bZ = 0$ (т. е. $dZ/dt = 0$ в силу третьего уравнения модели Лоренца). На рис. VI.16 видно, что в хорошем приближении¹⁾ отображение Пуанкаре, порождаемое аттрактором Лоренца, может быть сведено к отображению первого возвращения $x \rightarrow f(x)$ (см. рис. IV.4). Существенные динамические свойства модели легко могут быть найдены с по-

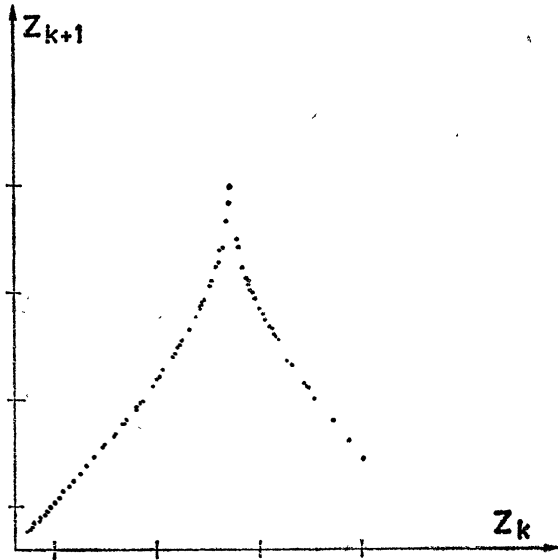


Рис. VI.16. Отображение первого возвращения для модели Лоренца. График зависимости $Z_{k+1} = f(Z_k)$, где Z_i — последовательные максимумы величины Z при $r = 28$.

Из работы Э. Н. Лоренца.

мощью отображения первого возвращения. Достаточно аналитически аппроксимировать кривую, представленную на рис. VI.16, а затем выполнить итерации $x_{k+1} = f(x_k)$ с помощью процедуры, описанной в разд. VI.4.1.

На этом примере мы можем продемонстрировать одно из преимуществ редукции потока к одномерному отображению. Из гл. IV нам известно, что если тангенс угла наклона касательной к кривой $x_{k+1} = f(x_k)$ всюду больше единицы (на интервале отображения), то при любом начальном значении x_0 существует незатухающий хаотический режим. Например, при $r = 28$ (значение, выбранное в многочисленных исследованиях аттрактора

¹⁾ Это то приближение, в котором сечение Пуанкаре аттрактора отождествляется с двумя линейными сегментами.

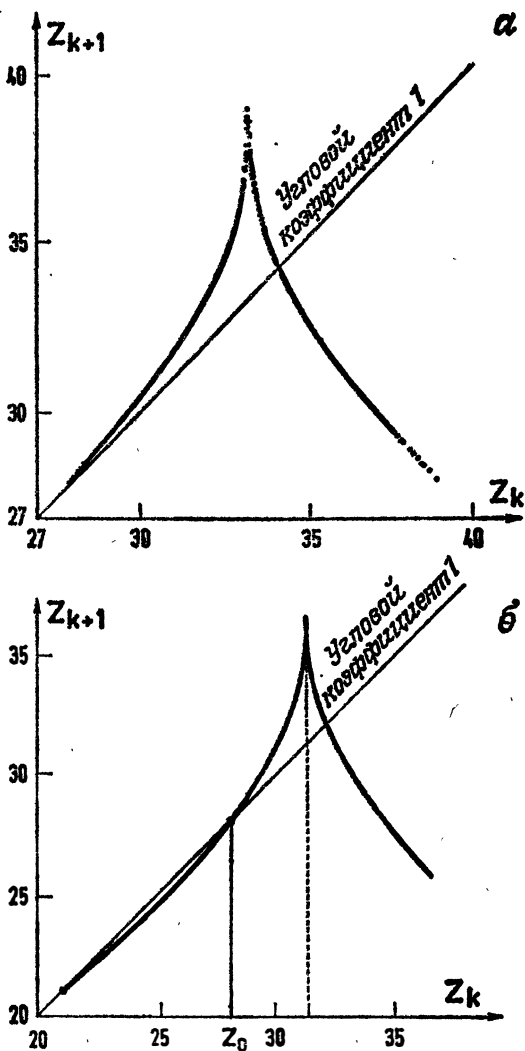


Рис. VI.17. Отображение первого возвращения для модели Лоренца. *а* — при $r = 24,06$; *б* — при $r < 24,06$.

На рисунке *а* показан предельный случай, когда угловой коэффициент касательной к кривой по абсолютной величине всюду больше единицы.

Из работы Дж. А. и Э. Д. Йорк.

Лоренца) тангенс угла наклона к кривой $Z_{k+1} = f(Z_k)$, действительно, в рассматриваемом интервале всюду больше единицы. Следовательно, независимо от начального значения Z_0 режим будет хаотическим. При уменьшении параметра r ситуация изменяется. В частности, очень интересный случай возникает, если

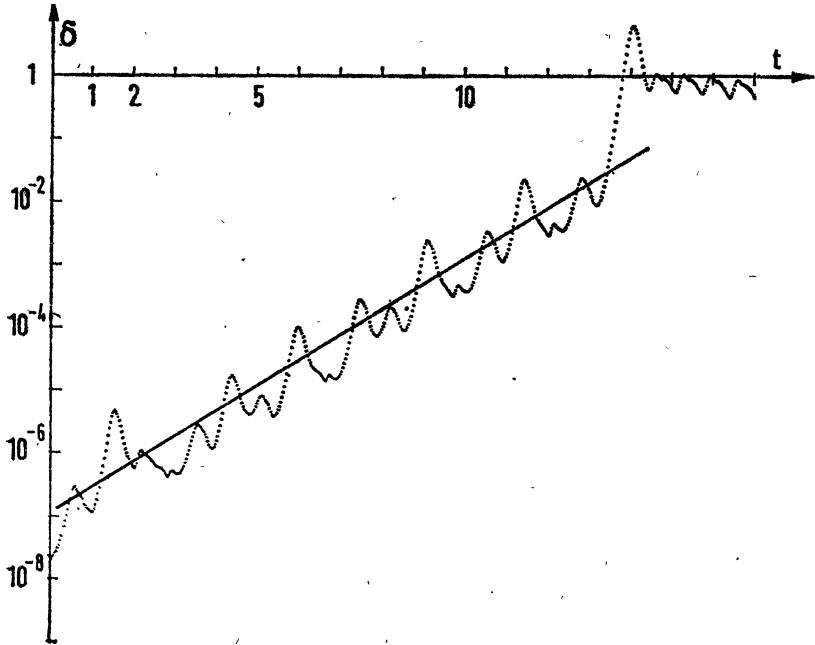


Рис. VI. 18. Временная эволюция расстояния δ между траекториями, задаваемыми уравнениями Лоренца. Траектории исходят из двух точек, выбранных вблизи аттрактора на расстоянии всего лишь $\delta_0 = 10^{-8}$ друг от друга. В среднем расстояние δ между двумя траекториями возрастает со временем t как $\delta = \delta_0 \exp(\lambda_1 t)$, где λ_1 — наибольший показатель Ляпунова. В логарифмическом масштабе оценка показателя Ляпунова λ_1 определяется средним наклоном кривой $\delta = \delta_0 \exp(\lambda_1 t)$. В рассматриваемом случае $\lambda_1 \approx 0,9$, что дает разумное согласие с результатами более подробных численных расчетов. Разумеется, максимальное расстояние δ ограничено размерами аттрактора, чем и объясняется насыщение, наблюдаемое при больших t .

мы выберем значение r чуть меньше 24,06, чтобы неподвижные точки S и S' были устойчивы. При таких значениях r отображение первого возвращения выглядит, как на рис. VI. 17, б: тангенс угла касательной к одной части кривой меньше единицы ($Z < Z_0$), из чего следует вывод о существовании неустойчивой неподвижной точки Z_0 (пересечения графиков отображения первого возвращения и тождественного отображения). Траектории,

выходящие из начальных точек с $Z < Z_0$, устремляются прямо к устойчивой неподвижной точке ниже Z_0 . С другой стороны, траектории, выходящие из точки с $Z > Z_0$, ведут себя хаотически, затем попадают в область с $Z < Z_0$, где быстро сходятся к устойчивой неподвижной точке. Такого рода хаос, называемый метастабильным, обладает интересными свойствами, которые могут быть выведены из формы отображения первого возвращения.

В заключение продемонстрируем ЧЗНУ аттрактора Лоренца при значении $r = 28$. Для этого вычислим поток, выходящий из двух очень близких начальных точек, и посмотрим, как быстро расстояние, разделяющее эти две точки, эволюционирует во времени. Из рис. VI.18 видно, что в среднем расстояние δ между траекториями возрастает экспоненциально, как и предсказывает общая теория.

VI. 3.2. Аттрактор Энона

Разумеется, весьма заманчиво продвинуться дальше и выйти за рамки предпринятого Лоренцом моделирования тепловой конвекции. Дополнительное упрощение, которое можно внести в модель, состоит в преобразовании уравнений с непрерывным временем в итерации с дискретным временем. Это позволяет заменить систему трех дифференциальных уравнений, аналогичных уравнениям модели Лоренца, двумерным отображением¹⁾. В этом случае последовательные точки, получаемые в \mathbb{R}^2 , следует рассматривать как принадлежащие сечению Пуанкаре потока, порождаемого тремя дифференциальными уравнениями.

Исходя из этой идеи, Энон предложил следующее отображение плоскости на себя:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= Y_k + 1 - \alpha X_k^2, \\ Y_{k+1} &= \beta X_k, \end{aligned}$$

где коэффициент α управляет нелинейностью итерации, а коэффициент β учитывает диссипацию. Обычно используются следующие значения α и β : $\alpha = 1,4$ и $\beta = 0,3$. Именно эти значения приняты в этом разделе. Исходя из точки плоскости с координатами (X_0, Y_0) можно вычислить координаты (X_1, Y_1) следующей точки и т. д. Следует заметить, что преобразование, о котором идет речь, обратимо: зная любую точку P_k , мы можем найти предшествующие точки P_{k-1} , P_{k-2} и т. д. Иначе говоря, итерации можно производить как по возрастающим k

¹⁾ Это позволяет понизить на один порядок мощность компьютера, необходимого для построения аттрактора.

(аналогу времени), так и по убывающим k (вспять во времени)¹⁾.

Если начальные точки лежат внутри области притяжения (имеющей очень сложную структуру), то последовательные итерации чрезвычайно быстро сходятся к аттрактору, изображенному на рис. VI.19. Мы видим, что последовательные точки

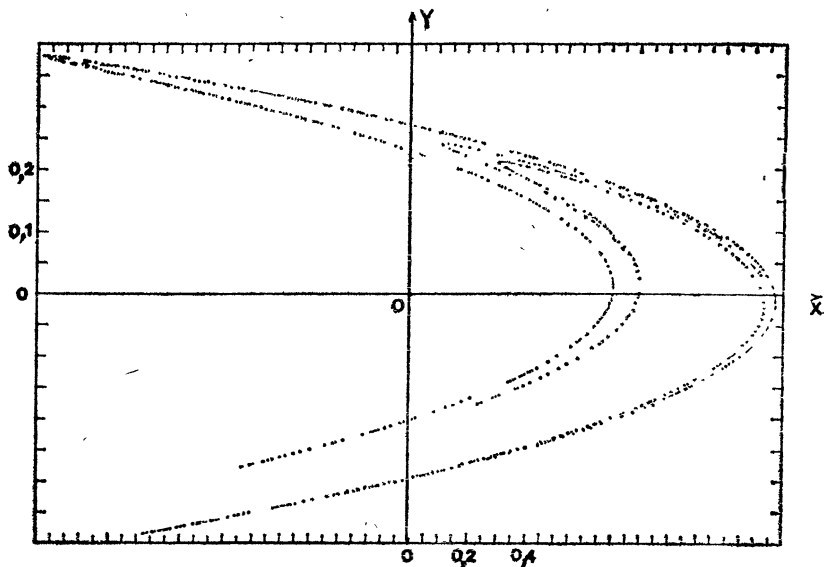


Рис. VI.19. Аттрактор Энона ($\alpha = 1,4$; $\beta = 0,3$). Обратите внимание на различие в масштабах по осям абсцисс и ординат.

располагаются иррегулярно, непредсказуемо и случайно. В этом отношении динамика на аттракторе Энона обладает ярко выраженным хаотическим характером.

Исследование расстояния между траекториями (первоначально очень малого) как функции последовательных итераций подтверждает прогноз о хаотическом характере отображения, поскольку становится очевидной ЧЗНУ. На рис. VI.20 показано, что расстояние между соседними траекториями возрастает в среднем экспоненциально. В основу рисунка положены результаты численных расчетов, поэтому можно заключить, что аттрактор Энона (при $\alpha = 1,4$ и $\beta = 0,3$) является странным аттрактором²⁾.

¹⁾ Этим отображение Энона отличается от квадратичных отображений. Отрезка на себя (см. гл. VIII).

²⁾ Ввиду чрезвычайной простоты исходных уравнений приводить строгое доказательство этого утверждения было бы излишне.

Обратимся теперь к отображению Энона и продемонстрируем на нем некоторые из упомянутых выше свойств или понятий. Прежде всего нас будет интересовать вопрос о сокращении площадей (аналогичный проблеме сокращения объемов под действием трехмерных диссипативных потоков). В случае двумер-

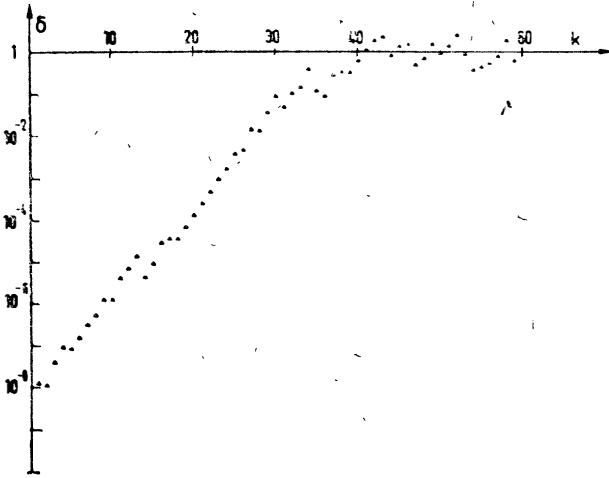


Рис. VI. 20. Временная эволюция расстояния δ между траекториями, задаваемыми отображением Энона. Траектории исходят из двух точек, выбранных вблизи аттрактора на расстоянии всего лишь $\delta_0 = 10^{-8}$ друг от друга. В среднем расстояние между двумя траекториями возрастает с числом итераций k на $\delta = \delta_0 \exp(\lambda_1 k)$, где λ_1 — наибольший показатель Ляпунова. В логарифмическом масштабе оценка показателя λ_1 может быть получена как средний наклон кривой $\delta = \delta_0 \exp(\lambda_1 k)$. В рассматриваемом случае $\lambda_1 \approx 0,50$, что находится в разумном согласии с результатами более подробных численных расчетов. Насыщение угла наклона кривой обусловлено теми же причинами, что и в случае, представленном на рис VI. 18. (См. также рис. VIII. 9.)

ного отображения якобиан играет роль производной Ли (см. приложение Д). Для отображения Энона он равен

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_{k+1}}{\partial X_k} & \frac{\partial X_{k+1}}{\partial Y_k} \\ \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial X_k} & \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial Y_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\alpha X_k & 1 \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = -\beta.$$

Таким образом, при каждой итерации площади умножаются на коэффициент $|\beta|$. Следовательно, если $|\beta| < 1$, то мы имеем сжатие. При $\beta = 0,3$ (мы рассматриваем здесь только этот случай) площадь, бывшая единичной после k -й итерации, станет равной $0,3$ после $(k + 1)$ -й итерации.

Это сжатие, относительно умеренное, отличается от сжатия в модели Лоренца, в которой за время, разделяющее две последовательные точки в сечении Пуанкаре, объем сжимается в 10^{-6} раз (в модели Энона этому промежутку времени соответствует интервал времени между двумя последовательными итерациями). Столь быстрое сжатие мешает различить фрактальную структуру сечения Пуанкаре аттрактора Лоренца. Иначе обстоит дело в случае аттрактора Энона, на котором вследствие умеренного сжатия ($|\beta| = 0,3$) легко различить фрактальную структуру. Некоторые из приведенных графиков (с все возрастающим увеличением) позволяют уточнить последнее замечание. Так, на рис. VI. 21, а в рамке мы видим три параллельные линии, которые почти сливаются одна с другой. После первого увеличения выясняется, что верхняя линия в действительности представляет собой три параллельные линии. Аналогично после второго увеличения становится видно, что верхняя из трех линий, обнаруженных после первого увеличения, также оказывается тройной и т. д. Иначе говоря, структура аттрактора повторяется в последовательных масштабах¹⁾ наблюдения. Такую структуру, характерную для фрактального объекта²⁾, можно рассматривать как сечение множества, состоящего из большего числа листов, т. е. как странный аттрактор. Аттрактор Энона (объект, занимающий промежуточное положение между линией и поверхностью) имеет размерность Хаусдорфа $d = 1,26$.

Аттрактор Энона можно использовать для иллюстрации существования сокращения площадей и ЧЗНУ. Напомним, что это сокращение происходит с постоянной скоростью: в $|\beta|^{-1} = (0,3)^{-1}$ раза за одну итерацию. Сокращение не изотропно: в первом приближении окружность (радиусом r , малым по сравнению с размером аттрактора) становится эллипсом, все более удлинняющимся в одном направлении и сжимающимся в другом (рис. VI. 22). Длины главных осей после итераций соответственно равны $r\Lambda_1^k$ и $r\Lambda_2^k$, где Λ_1 и Λ_2 — две константы, значения которых могут быть определены только численно³⁾. При $\Lambda_1 > 1$ и $\Lambda_2 < 1$ (и $\Lambda_1\Lambda_2 = |\beta| < 1$, так как имеет место глобальное сокращение) длины *растягиваются* в одном направлении и *сжимаются* в перпендикулярном направлении (рис. VI. 22, в). Мы снова встречаемся здесь с понятием

¹⁾ В некоторых случаях это масштабная инвариантность.

²⁾ Простейшим и наиболее известным примером объекта такого типа является канторовское множество, описанное в разд. VI. 4.2.

³⁾ Мы не знаем, как вычислять Λ_1 и Λ_2 аналитически, хотя умеем вычислять $\Lambda_1\Lambda_2 = |\beta|$.

гиперболичности, означающей схождение траекторий в одном направлении и расхождение их в другом направлении. В самом деле, поскольку аттрактор Энона можно рассматривать как сечение Пуанкаре трехмерного потока в хаотическом режиме, каж-

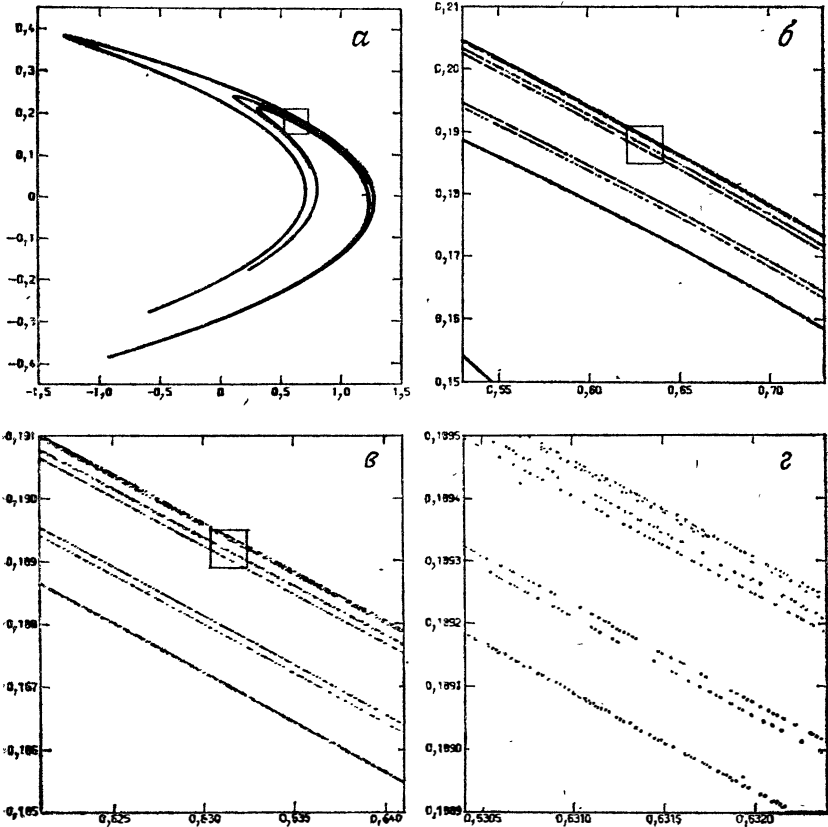


Рис. VI. 21. Пример, показывающий самоподобие структуры аттрактора Энона в различных масштабах. Небольшой квадрат на одном рисунке соответствует в увеличенном виде следующему рисунку (обратите внимание на изменение масштаба по осям): $a \rightarrow б \rightarrow в \rightarrow г$.

Из работы М. Энона.

дая точка является точкой пересечения плоскости, на которой определено отображение Энона, с траекторией, локально перпендикулярной ей. Для малого эллипса в окрестности точки O направление расхождения траекторий соответствует касательной DD' (рис. VI. 22, в), а направление сжатия CC' перпендикулярно DD' . Преобразование окружности во все более вытянутые

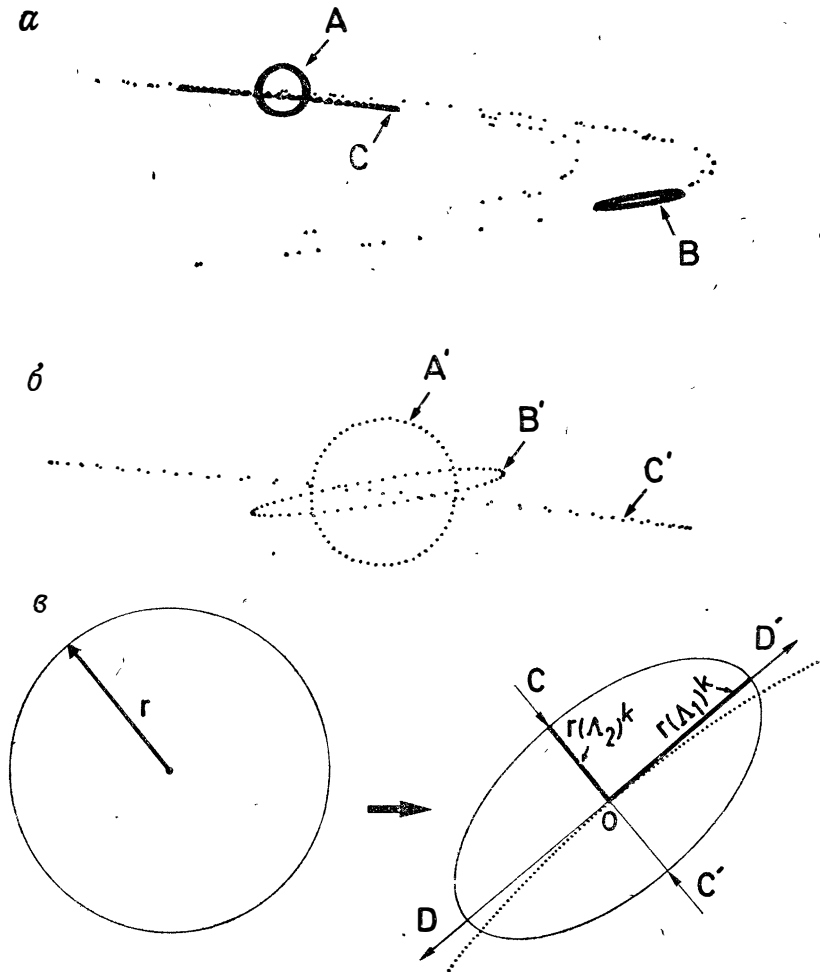


Рис. VI. 22. Деформация окружности при итерации отображения Энона. *a* — мы рассматриваем множество точек *A*, расположенных на окружности, центр которой лежит на аттракторе. После первой итерации мы получаем множество *B*. Обратите внимание на растяжение в направлении касательной к аттрактору и на сжатие в направлении, которое приближенно можно считать перпендикулярным касательной. Вторая итерация преобразует множество *B* в множество *C*; *b* — это преобразование переводит окружность в эллипсы. Увеличение и переобозначение множеств *A*, *B* и *C* в *A'*, *B'* и *C'* позволяет сделать сокращение площадей более заметным; *в* — гиперболичность и роль коэффициентов Ляпунова как пример преобразования окружности в эллипсы.

эллипсы служит конкретной иллюстрацией коэффициентов Ляпунова (см. приложение Б): в пределе малых r и больших k числа Λ_1 и Λ_2 являются двумя коэффициентами Ляпунова для отображения Энона. В другом предельном случае — при r порядка

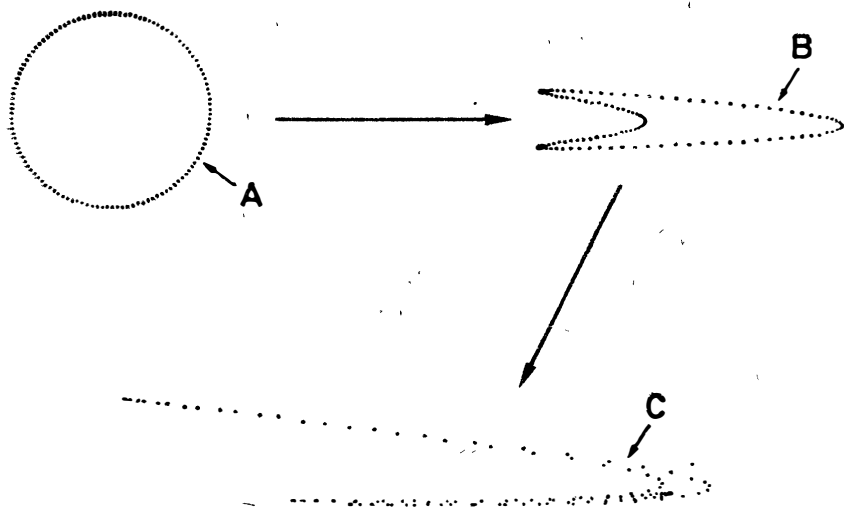


Рис. VI. 23. Образование складки при отображении Энона. Процедура остается такой же, как на рис. VI. 22, но окружность A на этот раз сравнима по размерам с аттрактором. На множествах B и C , получающихся из окружности A в результате первой и второй итераций, видно комбинированное действие растяжения и складывания.

размеров аттрактора — рис. VI. 23 показывает также, что эволюция на аттракторе включает две операции: растяжение и складывание.

VI. 3.3. Экспериментальные примеры странных аттракторов

Приводимые далее примеры заимствованы из экспериментов, выполненных на трех динамических системах, описанных в гл. V.

Начнем с вращающегося магнита, обладающего таким преимуществом, как регулируемость диссипации. При умеренных величинах трения в жидкости мы можем экспериментально наблюдать четко выраженную слоистую структуру странного аттрактора. Наш магнит (см. гл. V) испытывает совместное действие стационарного магнитного поля с индукцией B_1 и другого магнитного поля с индукцией B_0 , вращающегося с угловой частотой ω . Вязкое трение создается маслом в одном из подшипников магнита. Нетрудно построить сечение Пуанкаре фазо-

вых траекторий, поскольку перед нами осциллятор с вынуждающей силой, для которого период $2\pi/\omega$ вращающегося поля является естественным интервалом времени, через который производится выборка значений сигнала. Таким образом, доста-

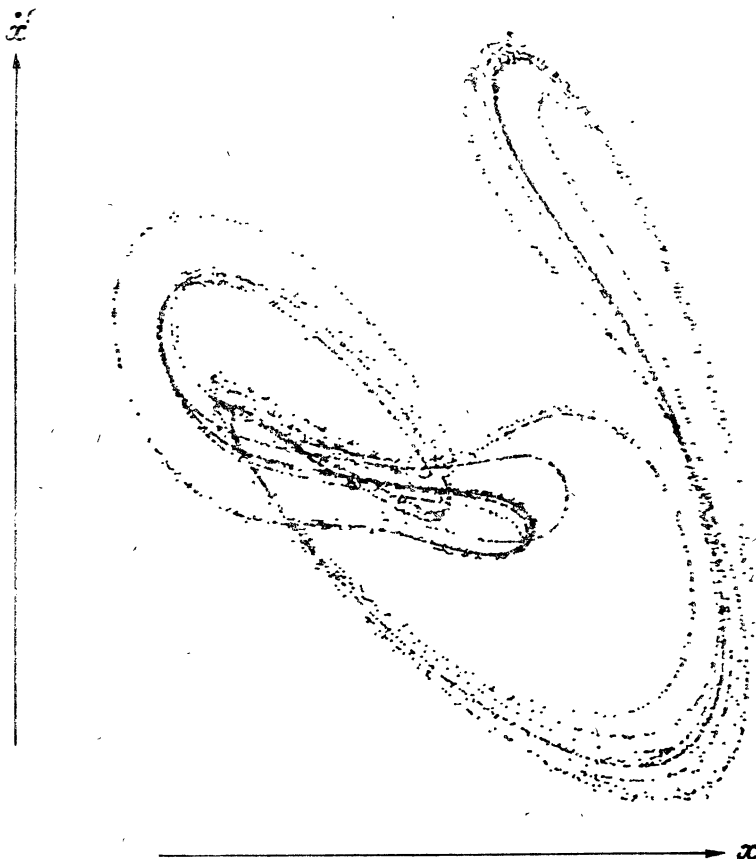


Рис. VI.24. Сечение Пуанкаре аттрактора в хаотическом режиме вращающегося магнита. Угловая скорость магнита пропорциональна x .
Из работы В. Крокетта.

точно фиксировать переменную $x(t)$, пропорциональную скорости магнита, и ее производную $\dot{x}(t)$ каждый раз, когда B_0 поворачивается на 2π . Результат проведения такой операции над хаотическим режимом представлен на рис. VI.24. Мы видим характерную структуру странного аттрактора с большим числом складок — сложную структуру, напоминающую аттрактор Энона.

Другое, еще более поразительное сходство между аттрактором Энона и экспериментом можно обнаружить в неустойчивости РБ. Экспериментальная процедура несколько отличается от той, которая применялась в случае магнита: так как конвек-

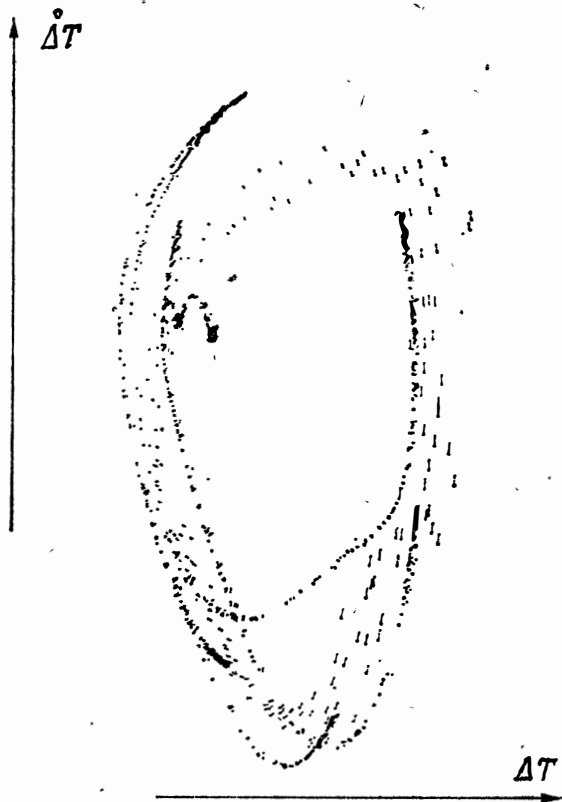


Рис. VI. 25. Сечение Пуанкаре аттрактора в хаотическом режиме конвекции Рэлея — Бенара. Величина ΔT приблизительно пропорциональна вертикальному градиенту температуры в данной точке слоя жидкости. Сечение Пуанкаре было получено стробоскопированием сигналов с частотой одного из двух осцилляторов тепловой конвекции.

Из работы М. Дюбуа.

ция РБ не испытывает периодического внешнего воздействия, вычисление сечений Пуанкаре оказывается более сложным. Напомним то, что было сказано в гл. V: две переменные¹⁾ (ΔT)

¹⁾ Обычно (ΔT) и ($\Delta T'$) измеряют, пропуская сквозь жидкость в горизонтальном направлении узкие пучки света. Эти пучки отклоняются пропорционально градиенту температуры.

и $(\Delta T)'$ измеряются в двух различных точках жидкости, в которой происходит тепловая конвекция (см. рис. V.8). Трехмерное фазовое пространство определяется координатами (ΔT) , $(\dot{\Delta T})$ и $(\Delta T)'$. Если удастся детектировать сигнал $(\Delta T)'$, представляющий в основном один из осцилляторов тепловой конвекции, то его период можно использовать в качестве интервала времени для стробоскопирования траекторий, проектируемых на плоскость $(\Delta T, \dot{\Delta T})$. Но получить сигнал $(\Delta T)'$, обладающий достаточной спектральной чистотой, обычно очень трудно даже

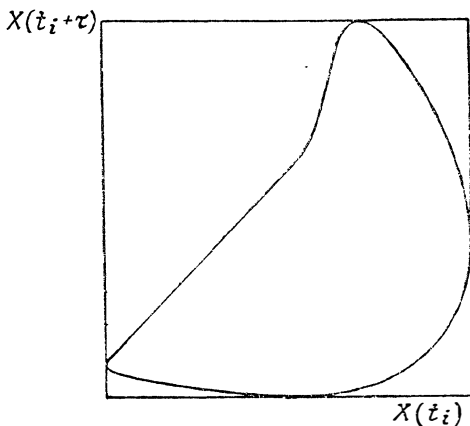


Рис. VI.26. Предельный цикл при периодическом режиме в реакции Белоусова — Жаботинского. Измеренный сигнал (потенциал специального электрода) пропорционален логарифму концентрации ионов Br^- . Используемое здесь представление основано на методе «задержек»: строится график зависимости сигнала, измеренного в момент времени $t + \tau$, от сигнала, измеренного в момент времени t (в данном случае время задержки равно 8,8 с).

Из работы Ж.-К. Ру, Р. Симон и Х. Суинни.

после фильтрации. Поэтому сечение Пуанкаре строят как пересечение траекторий в фазовом пространстве (ΔT) , $(\dot{\Delta T})$, $(\Delta T)'$ с плоскостью $(\Delta T)'' = K$. Для этого наносят на график координаты (ΔT) , $(\dot{\Delta T})$ всякий раз, когда координата $(\Delta T)'$ достигает заданного значения K (при определенном условии для знака $d(\Delta T)'/dt$, например при $d(\Delta T)'/dt > 0$).

Именно так было получено сечение Пуанкаре на рис. VI.25 в конвективном режиме, спектр Фурье которого содержит не только дискретные линии, но и существенный широкополосный шум. Мы видим (рис. VI.25), что точки в сечении Пуанкаре образуют сложную, но вполне определенную структуру¹⁾.

¹⁾ В случае недетерминированного хаотического режима мы увидели бы облако точек, не обладающее тонкой структурой.

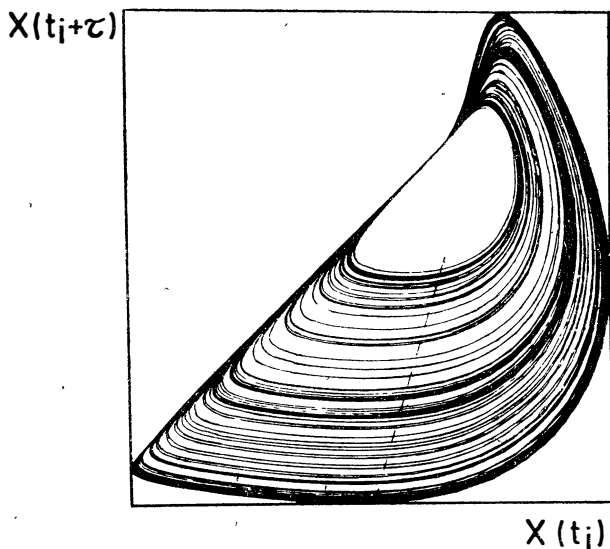


Рис. VI. 27. Аperiodический режим в реакции Белоусова — Жаботинского. Диаграмма такого же типа, как и на рис. VI. 26, но для хаотического режима. Петли являются проекциями траекторий на плоскости $(X(t_i), X(t_i + \tau))$.
Из работы Ж.-К. Ру, Х. Суинни.

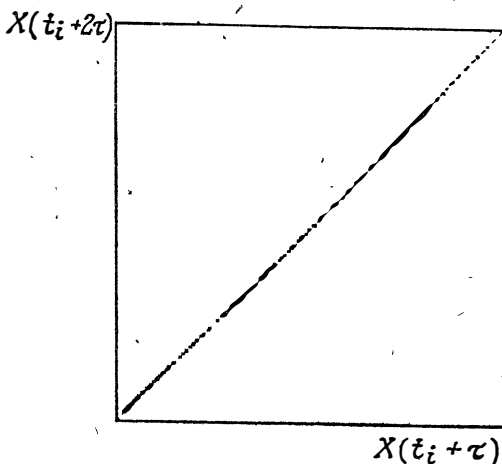


Рис. VI. 28. Сечение Пуанкаре. Это сечение пересекает те самые траектории в пространстве $X(t_i), X(t_i + \tau), X(t_i + 2\tau)$, проекция которых изображена на рис. VI. 27. Плоскость сечения перпендикулярна плоскости рисунка VI. 27, на которой след пересечения двух плоскостей отмечен штриховой линией. Заметим, что квазилинейный вид сечения — чистая случайность.
Из работы Ж.-К. Ру, Х. Суинни.

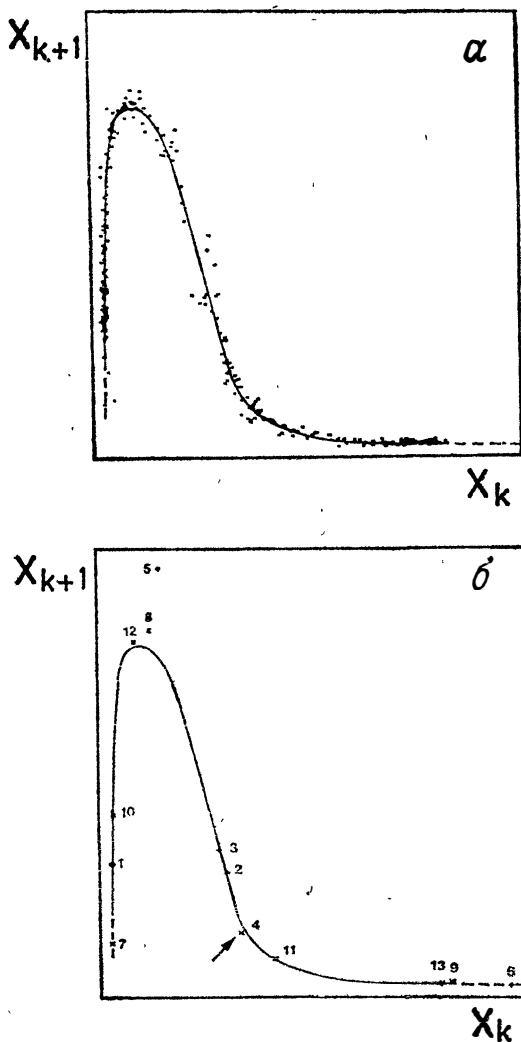
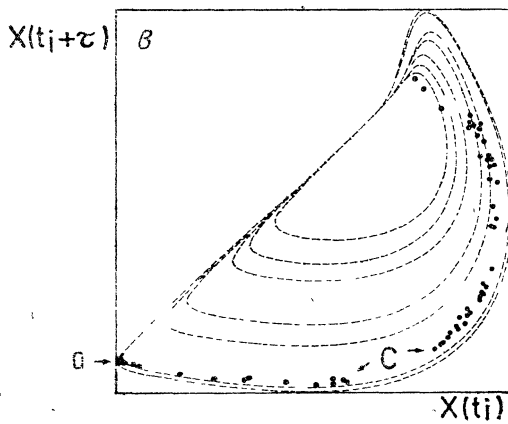
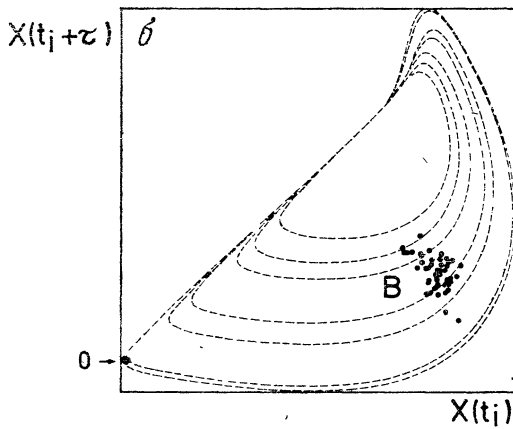
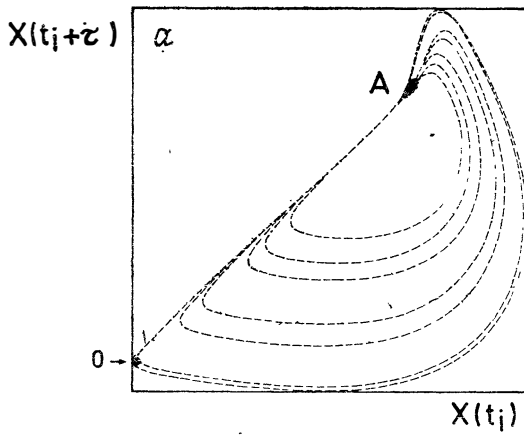


Рис. VI. 29. Отображение первого возвращения. Величина X_k — ордината точки сечения на рис. VI. 28. Для получения отображения первого возвращения мы строим график зависимости ординаты X_{k+1} от ординаты X_k ближайшей предшествующей точки. α — множество точек, полученных при хаотическом режиме аттрактора. Непрерывная кривая проведена только для удобства прослеживания общей зависимости; β — сплошная кривая, изображенная на рисунке α , начерчена повторно. При записи серии точек с номерами от 1 до 13 возмущение возникло примерно в тот момент, когда записывалась 4-я точка. Последующие точки быстро вернулись к асимптотической кривой, что свидетельствует об эффекте притяжения.
Из работы Ж.-К. Ру, Х. Суинни.



Обратимся теперь к химической реакции БЖ, чтобы изучить один аспект, непосредственно связанный с динамикой. Подлежащей измерению величиной является концентрация ионов брома в реакторе. Записи временных рядов $X(t_i)$, содержащих несколько десятков тысяч точек, производились при фиксированном значении потока реагентов (управляющий параметр μ). Фазовые диаграммы построены методом временных задержек (см. разд. IV.5), позволяющим получить представление аттрактора в трехмерном фазовом пространстве с координатами $X(t_i)$, $X(t_i + \tau)$, $X(t_i + 2\tau)$.

Простейший пример, иллюстрирующий эту процедуру, вы видите на рис. VI.26. При некоторых значениях потока реагента реакция БЖ становится периодической, и ее фазовая диаграмма (предельный цикл) представляема в двумерном пространстве. Ситуация радикально изменяется при других значениях потока: как свидетельствует проекция фазовой диаграммы, представленная на рис. VI.27, среди режимов могут быть обнаружены хаотические. Выбранными координатами являются величины

$$\begin{aligned} X &= X(t_i), \\ Y &= X(t_i + \tau), \end{aligned}$$

где $\tau = 8,8 \text{ с}^1$).

Кроме чисто эстетического интереса эта проекция мало говорит о динамическом состоянии системы. Было бы рискованно делать какие-либо заключения о существовании странного аттрактора только на основании рис. VI.27. Та же неопределенность сохранилась бы, даже если бы мы попытались представить аттрактор в трехмерном фазовом пространстве. Однако решающий шаг будет сделан, если мы проведем сечение Пуанкаре через трехмерное представление аттрактора, третьей координатой которого служит $X(t_i + 2\tau)$. Плоскость сечения перпендикулярна плоскости рис. VI.27, на которой след сечения проведен штриховой линией. Построенное сечение Пуанкаре показано на рис. VI.28. Подчеркнем, что квазилинейный вид сечения Пуанкаре обманчив: при другом выборе τ и другой

¹⁾ Это время следует сравнить с временем обхода аттрактора представляющей точкой, которое имеет порядок сотен секунд.



Рис. VI.30. Чувствительная зависимость от начальных условий. Штриховые линии соответствуют некоторым траекториям, изображенным на рис. VI.27. Положение точек при $t = 0$ отмечено буквой O . a — положение точек при $t = 80\Delta t$; b — положение точек при $t = 105\Delta t$; v — положение точек при $t = 210\Delta t$. ($\Delta t = 0,88 \text{ с}$. Среднее время, за которое точка успевает описать петлю, составляет $\sim 120\Delta t$.)

Из работы Ж.-К. Ру и Х. Суинни.

плоскости сечения мы получили бы другую кривую (как мы увидим дальше). Однако узость этого квазилинейного объекта напоминает аттрактор Лоренца. Причина та же: система БЖ (при рассмотренных выше условиях) сильно диссипативна, отсюда и очень малая ширина аттрактора. В дальнейшем мы узнаем и другие подтверждения столь сильного сжатия.

Детерминированный характер хаотического поведения, соответствующего аттрактору, убедительно подтверждается отображением первого возвращения, которое можно построить по отображению Пуанкаре при столь сильной диссипации, как в данном случае. Построив график зависимости ординаты X_{k+1} точки на рис. VI. 28 от ординаты X_k предыдущей точки, мы увидим на рис. VI. 29, а, что все точки ложатся на четкую кривую. Таким образом, знание одной точки определяет положение следующей точки. Это свидетельствует о *порядке*, управляющем траекториями на аттракторе.

Чтобы продемонстрировать два решающих свойства странного аттрактора, рассмотрим, как появляются в данном случае сжатие и ЧЗНУ. Первое из этих явлений можно проиллюстрировать, введя возмущение: например, пузырек воздуха, увлекаемый потоком одного из реагентов, на какое-то время нарушает нормальный ход реакции. На рис. VI. 29, б вы видите построенное отображение первого возвращения, а также непрерывную кривую, которая воспроизведена с рис. VI. 29, а. После точки 4 пузырек нарушает на время состояние реактора. Действие этого возмущения отчетливо видно на точке 5, которая явно не лежит на кривой. Последующие точки 6, 7 и 8 снова приближаются к кривой (и тем самым к аттрактору), а после точки 9 измерения недостаточно точны для того, чтобы мы могли обнаружить любое отклонение от кривой. Так сила притяжения возвращает «заблудшую» точку на аттрактор в четыре орбиты.

Что же касается ЧЗНУ (т. е. экспоненциального усиления отклонений), то обратимся снова к проекции фазовой диаграммы. Фигура, которую вы видите на рис. VI. 27, получена путем нанесения на график большого числа точек с координатами $(X(t_i), X(t_i + \tau))$, где моменты времени t_i разделены интервалом Δt (в данном случае 0,88 с), составляющем около одной сотой продолжительности одного обхода аттрактора. Вместо систематического нанесения на график всех точек поступим следующим образом: каждый раз, когда точка пройдет вблизи O (рис. VI. 30), будем следить за ее эволюцией, нанося на график ее последующие положения. На рис. VI. 30, а показано множество точек в момент времени $t = 80\Delta t$, где $t_i = 0$ соответствует моменту прохождения точки вблизи O . Множество точек на рис. VI. 30, б соответствует значению $t = 105\Delta t$, а на

рис. VI. 30, *в* — значению $t = 210\Delta t$. Повторим такую операцию несколько десятков раз. Мы видим, что при $t = 0$ существует множество точек, расположенных так близко друг от друга, что все они практически неотличимы от O . При $t = 80\Delta t$ мы замечаем,

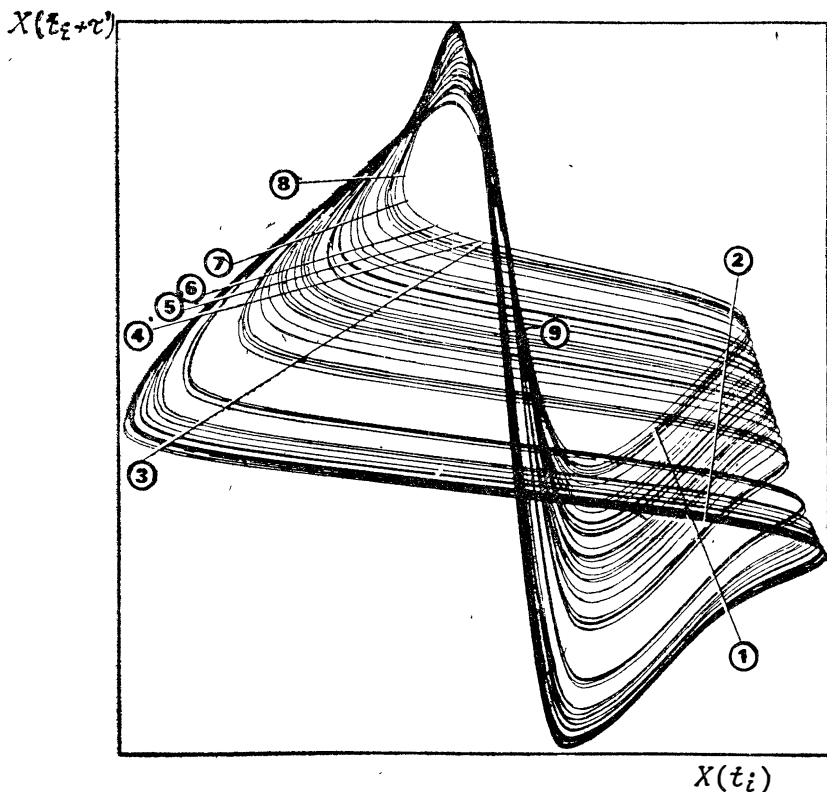


Рис. VI. 31. Проекция аттрактора при другом времени запаздывания τ' . Выбранные траектории соответствуют тому же хаотическому режиму, который представлен на рис. VI. 27, но $\tau' = 53$ с (вместо $\tau' = 8,8$ с). Штриховыми линиями показаны различные секущие плоскости (перпендикулярные плоскости чертежа), которые использовались для построения сечений Пуанкаре, представленных на рис. VI. 32.

Из работы Ж.-К. Ру, Р. Симон и Х. Суинни.

что эти точки начинают разделяться (рис. VI. 30, *а*, зона А). Расстояние между точками быстро возрастает со временем: к моменту времени $t = 210\Delta t$ (времени, которое (приблизительно) необходимо, чтобы совершить дважды обход аттрактора) точки рассеиваются почти по всему аттрактору (рис. VI. 30, *в*, зона С). Это означает, что начальное условие

(все точки практически неотличимы от O) забывается из-за расхождения начальных отклонений от точки O . Перед нами ЧЗНУ.

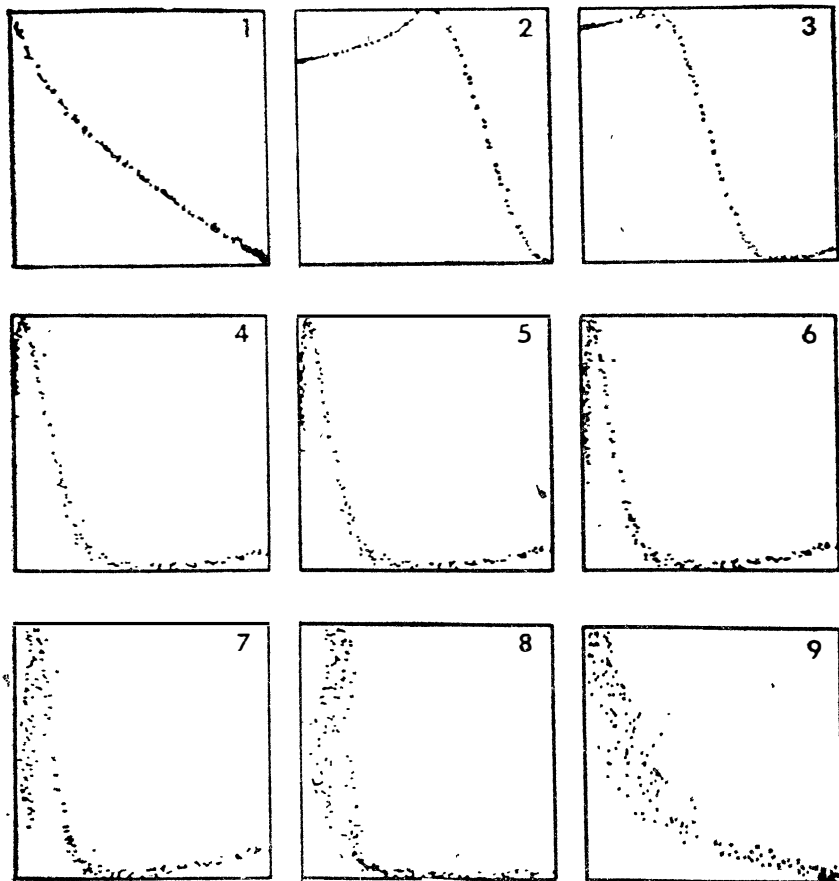


Рис VI.32. Сечения Пуанкаре. Каждое сечение Пуанкаре имеет свой номер (N) и соответствует отличной от других плоскости сечения, проекция которой имеет на рис. VI.31 такой же номер. Масштабы меняются от сечения к сечению. Для каждого сечения N коэффициенты изменения масштабов по оси абсцисс EX и оси ординат EY указаны ниже как (N) $EX \times EY$:
 (1) $0,3 \times 0,2$; (2) $1,1 \times 0,9$; (3) $1,0 \times 1,0$; (4) $0,5 \times 0,9$; (5) $0,5 \times 0,9$;
 (6) $0,5 \times 0,8$; (7) $0,4 \times 0,5$; (8) $0,4 \times 0,2$; (9) $0,4 \times 0,08$.

Из работы Ж.-К. Ру, Р. Симон, Х. Суинни.

Мы можем даже показать, каким образом в реакции БЖ осуществляются две операции (растяжения и складывания), общие для всех странных аттракторов. При изменении времени задержки τ (по сравнению с τ , принятым на рис. VI.27) фазо-

вая диаграмма претерпевает существенную деформацию, как видно из рис. VI.31, на котором показаны траектории, спроектированные на плоскость $(X(t_i), X(t_i + \tau'))$ с $\tau' = 53 \text{ с}^1$. Чтобы проследить за эволюцией соответствующего потока, рассмотрим сечения Пуанкаре плоскостями, перпендикулярными плоскости рис. VI.31 и обозначенными цифрами 1, 2, 3, ..., 9.

На рис. VI.32 показано, что сечение Пуанкаре постепенно на протяжении среднего периода обхода аттрактора, изображенного на рис. VI.31. Мы видим, что образование складки происходит между 2 и 8. Растяжение (менее заметное, так как масштабы сильно изменяются от одной фигуры к другой) происходит главным образом между 9 и 1. Именно поэтому ширина сечения гораздо меньше на плоскости 1, чем на плоскости 9.

VI.4. ИЗМЕРЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ СТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ

VI.4.1. Проблемы получения количественных характеристик динамических режимов

Динамический режим можно охарактеризовать с помощью анализа Фурье. Но анализ Фурье не позволяет провести различие между хаосом с небольшим числом степеней свободы (детерминированным хаосом) и белым шумом²⁾. В этом отношении исследование фазовых траекторий с помощью сечений Пуанкаре обладает важным преимуществом. Но получить при этом удастся только качественную информацию. Кроме того, использование сечений Пуанкаре ограничено на практике трехмерными фазовыми пространствами.

Охарактеризовать хаотический режим количественно можно, определяя наибольший показатель Ляпунова (см. приложение Б). Мы не будем обсуждать здесь алгоритмы определения наибольшего показателя Ляпунова по экспериментальным данным, поскольку все они еще не очень эффективны. Другой интересной характеристикой хаотического режима является фрактальная размерность аттрактора, которой посвящен этот раздел. Поскольку размерность странного аттрактора, как правило, нецелая, остановимся на этом понятии несколько подробнее.

¹⁾ На рис. VI.31 и VI.32 использованы те же экспериментальные данные, что и на рис. VI.27 и VI.28. Это еще раз подтверждает, что сечение Пуанкаре на рис. VI.28 имеет лишь видимость квазилинейного.

²⁾ Под «белым шумом» мы понимаем (в отличие от детерминированного хаоса) хаотический режим, в основе которого лежит очень большое число независимых мод или степеней свободы (см. разд. VII.3.3).

VI. 4.2. Фрактальные размерности

Рассмотрим множество точек в p -мерном пространстве. Мы хотим покрыть это множество (гипер)кубами с ребром ε . Пусть $N(\varepsilon)$ — наименьшее число кубов, необходимых для покрытия множества (рис. VI. 33). Размерность Хаусдорфа (называемая также размерностью Хаусдорфа — Безиковича) точки D определяется как предел, если он существует, отношения

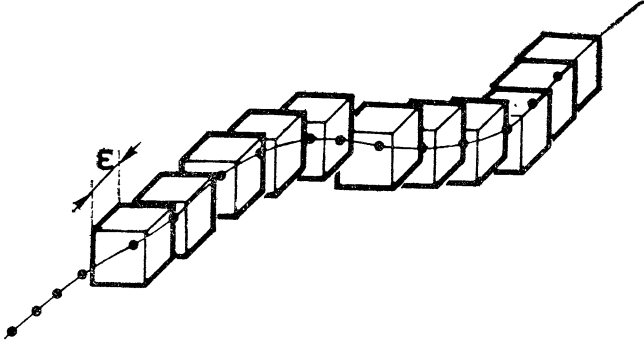


Рис. VI. 33. Покрытие объекта (множества точек) кубами с длиной ребра ε .

$\ln N(\varepsilon) / \ln (1/\varepsilon)$ при ребре ε гиперкуба, стремящемся к нулю, т. е.

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)}.$$

То же самое можно сформулировать иначе: минимальное число $N(\varepsilon)$ кубов, необходимое для покрытия множества точек, зависит от ε как ε^{-D} . Если множество состоит из одной точки, то

$$N(\varepsilon) = \text{const} = 1.$$

Следовательно, размерность Хаусдорфа точки D равна нулю (евклидова размерность точки также равна нулю). Если множество представляет собой отрезок линии длиной L , то

$$N(\varepsilon) = L\varepsilon^{-1},$$

поэтому $D = 1$, в то время как для поверхности с площадью S

$$N(\varepsilon) = S\varepsilon^{-2},$$

откуда $D = 2$.

До сих пор определение размерности Хаусдорфа ничего не добавило к определению евклидовой размерности. Обратимся теперь к канторовскому множеству, получаемому с помощью итерационного процесса. Сначала из единичного отрезка уда-

ляется средняя треть. Затем каждый из двух оставшихся отрезков также подвергается удалению средней трети. Эта операция повторяется до бесконечности, как показано на рис. VI. 34. В результате мы получаем бесконечное множество несвязных точек¹⁾, размерность которого заключена между нулем и единицей. Размерность Хаусдорфа канторовского множества нетрудно получить по его построению. При $\varepsilon = 1/3$ число элементов (в

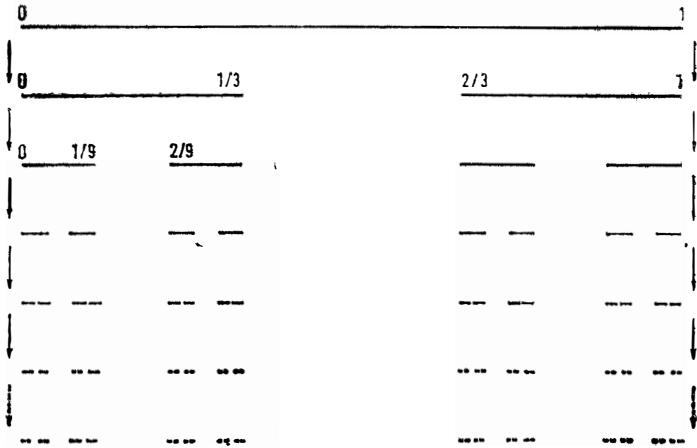


Рис. VI. 34. Первые стадии построения канторовского множества.

данном случае гиперкубы вырождаются просто в отрезки), необходимых для того, чтобы покрыть множество, равно $N(1/3) = 2$. Аналогично при $\varepsilon = 1/9$ мы получаем $N(\varepsilon) = 4$ и в общем случае при $\varepsilon = (1/3)^m$ имеем $N(\varepsilon) = 2^m$. По определению размерность Хаусдорфа есть величина

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^m}{\ln 3^m} \approx 0,63.$$

На этом примере мы видим, что размерность Хаусдорфа есть обобщение обычной геометрической размерности, позволяющее характеризовать «фрактальные» объекты.

Рассмотрим теперь второй классический фрактальный объект, называемый снежинкой. Снежинка обладает одним необыч-

¹⁾ Заметим, что построенная структура инвариантна относительно изменения масштаба. «Издали» канторовское множество выглядит как отрезок, из которого выкинута средняя треть. Вблизи мы увидим такую же картину при любом увеличении, т. е. на любых масштабах. След такой масштабной инвариантности сохраняется в структуре странных аттракторов — их разбросы на листы.

ным свойством (разделяемым сечениями Пуанкаре многих странных аттракторов): она имеет бесконечный периметр, хотя ограничивает конечную область плоскости. Возьмем равносторонний треугольник, разделим каждую из его сторон на три равные части и на каждой из трех центральных третей построим во внешнюю сторону по равностороннему треугольнику меньших размеров (рис. VI.35). Итерируя это построение бесконечно

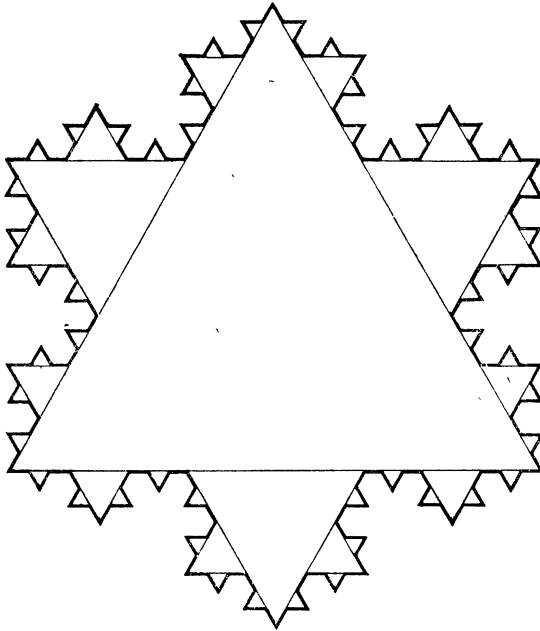


Рис. VI. 35. Фрактальный объект в форме снежинки (первые стадии построения).

много раз, мы получаем фрактальный объект¹⁾, называемый иногда *кривой Коха*. Рассуждая так же, как прежде, находим, что ее размерность Хаусдорфа равна

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

К сожалению, во многих других случаях, представляющих практический интерес, вычисления размерности Хаусдорфа непосредственно из ее определения как предела сходятся слишком

¹⁾ Подобно канторовскому множеству, этот объект обладает масштабной инвариантностью.

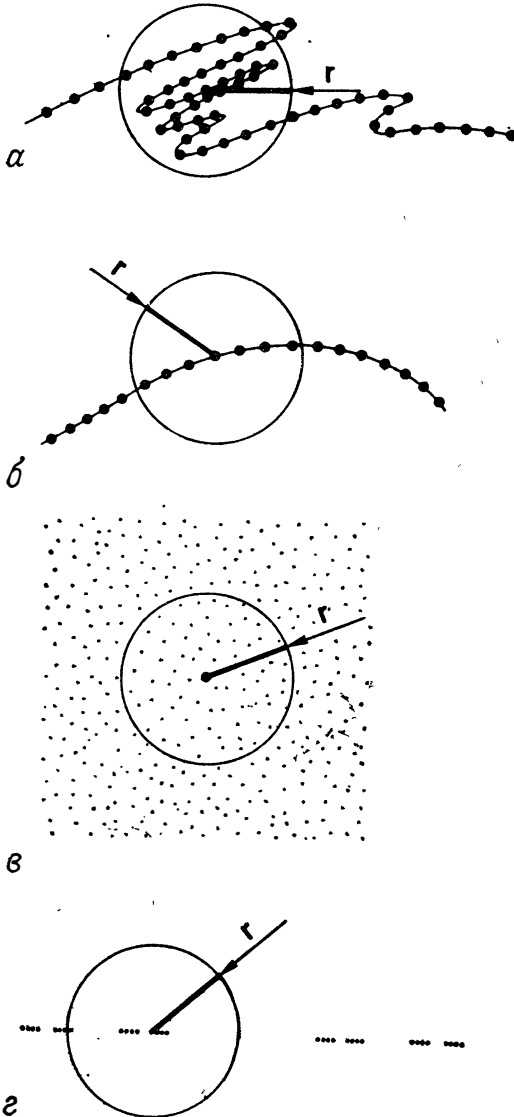


Рис. VI.36. Метод вычисления фрактальной размерности множества точек, расположенных в двумерном пространстве. Вокруг произвольной точки множества проводим окружность (сферу или гиперсферу в пространстве более высокой размерности) радиусом r и определяем число точек $N(r)$, оказавшихся внутри окружности, и его зависимость от r : a — в общем случае $N(r) \sim r^D$; $б$ — для линии (одномерный случай) $N(r) \approx r^1$; $в$ — для поверхности (двумерный случай) $N(r) \sim r^2$; $г$ — для канторовского множества $N(r) \sim r^{0.632}\dots$

медленно, если размерность p фазового пространства больше двух. Поэтому приходится использовать другую фрактальную размерность ν , которая может быть вычислена быстрее. Хотя ν , называемая корреляционной размерностью, вообще говоря, не равна в точности размерности Хаусдорфа D , она ограничивает D снизу:

$$\nu \leq D.$$

Проиллюстрируем наш второй подход на примерах из планиметрии. Рассмотрим множество точек на плоскости, представляющее, например, сечение Пуанкаре какого-то потока в \mathbb{R}^3 , и пусть $N(r)$ — число точек этого множества, расположенных внутри окружности радиусом r . В случае дискретного множества точек, равномерно распределенных по кривой (размерность 1), получаем при достаточно малых r :

$$N(r) \sim r,$$

т. е. $N(r) \sim r^\nu$ с $\nu = 1$ (рис. VI.36, б). С другой стороны, если точки равномерно распределены по поверхности (размерность 2; см. рис. VI.36, в), то

$$N(r) \sim r^2, \quad \nu = 2.$$

Теперь мы уже можем рассмотреть общие объекты произвольной размерности, такие, как описанное выше канторовское множество (рис. VI.36, г). Число точек $N(r)$, расположенных внутри окружности, растет в среднем медленнее, чем радиус r . Полагая $N(r) \sim r^\nu$, можно вычислить, что $\nu \approx 0,63$. Это равно вычисленной выше размерности Хаусдорфа. Аналогично для аттрактора Энона (см. разд. VI.3.2) мы получаем среднюю зависимость

$$N(r) \sim r^\nu, \quad \text{где } \nu \approx 1,26.$$

Метод допускает обобщение на p -мерные пространства, если под $N(r)$ понимать число точек, содержащихся в p -мерной гиперсфере радиусом r^1 .

¹⁾ Корреляционная размерность ν зависит от плотности точек на аттракторе, так как связана с подсчетом точек. В отличие от нее размерность Хаусдорфа D множества зависит только от геометрии множества. По определению D есть «максимальная» размерность объекта. Основной вклад в D дает та компонента объекта, для покрытия которой требуется наибольшее число сфер. Это наиболее «складчатая» часть, если объект является странным аттрактором, получающимся в результате растяжения и складывания. Если распределение точек на аттракторе имеет низкую плотность именно в складчатой части, то эта часть не даст существенного вклада в ν . Таково качественное обоснование того, что корреляционная размерность ν ограничена сверху размерностью Хаусдорфа D . Для таких конструкций, как канторовское множество или снежинка Коха, эти две размерности равны, если плотность точек, используемых при вычислении ν , однородна по объекту.

VI.4.3. Геометрическая характеристика аттрактора

В последнее время был предложен эффективный метод оценки геометрических характеристик аттрактора на основе описанного выше подхода в сочетании с возможностью восстановления траекторий в фазовом пространстве по задержкам времени.

Напомним, что, исходя из одной зависящей от времени переменной $X(t)$, мы можем восстановить траекторию в p -мерном фазовом пространстве (см. разд. IV.5), выбирая в качестве ко-

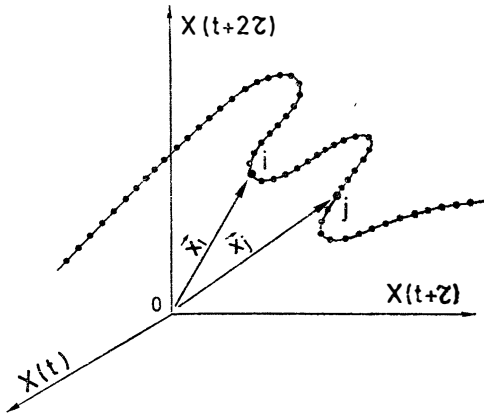


Рис. VI.37. Схематическое изображение траектории, восстанавливаемой поточно по значениям простой переменной $X(t)$ методом запаздывающего аргумента. В этом примере использовано трехмерное пространство с координатами $X(t)$, $X(t + \tau)$, $X(t + 2\tau)$.

ординат величины $X(t)$, $X(t + \tau)$, $X(t + 2\tau)$, ..., $X(t + (p - 1)\tau)$, где τ — надлежащим образом выбранная временная задержка¹⁾. На практике время t дискретизуется, в результате чего мы получаем серию p -мерных векторов, представляющих фазовую диаграмму динамической системы (рис. VI.37).

В хаотическом режиме (соответствующем странному аттрактору) положения двух точек на одной и той же траектории, но разделенных во времени, некоррелированы²⁾ вследствие ЧЗНУ. Так как все точки лежат на аттракторе, существует пространственная корреляция, которую можно попытаться охарактеризовать с помощью какой-то функции. Мы можем написать

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1/m^2) \times [\text{число пар } i, j, \text{ для которых } |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| < r],$$

¹⁾ Оптимальный выбор τ сильно зависит от конкретной формы сигнала $X(t)$ и определяется отчасти эмпирически.

²⁾ И в этом случае «виновницей» является ЧЗНУ.

где i и j — индексы, упорядочивающие точки вдоль траектории, на которой расположено всего m точек (рис. VI.37). Функцию $C(r)$ можно определить более строго:

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{i, j=1}^m H(r - |x_i - x_j|),$$

где H — функция Хевисайда, равная по определению единице при положительных x и нулю при остальных значениях x . Число пар точек i, j , расстояние между которыми меньше r , есть вместе с тем сумма всех $N(r)$ (см. выше) — величин, «пересчитывающих» точки в гиперсферах с центрами в *каждой*¹⁾ точке аттрактора. Следовательно, $C(r)$ пропорциональна $N(r)$:

$$C(r) \sim r^\nu.$$

Заметим, что применимость этого степенного закона ограничена значениями r , достаточно малыми по сравнению с размерностями аттрактора. При увеличении r величина $N(r)$ достигает насыщения, когда r принимает значения, сравнимые с размером аттрактора, поскольку тогда учитываются m точек и, следовательно, $C(r) \rightarrow 1$. С другой стороны, при очень малых значениях r число пар точек i, j , расстояние между которыми меньше r , становится малым, поскольку число точек на аттракторе конечно и статистика становится бедной. Кроме того, приобретает решающее значение относительный вклад инструментальной ошибки. Следовательно, на практике степенной закон $C(r) \sim r^\nu$ выполняется только в ограниченном диапазоне значений r и может быть использован для определений ν — корреляционной размерности аттрактора.

VI.4.4. Реализация процедуры

Исходя из дискретных значений $X(t_i)$, полученных экспериментально, мы восстанавливаем траекторию в p -мерном пространстве, как описано выше, при возрастающих целых значениях p :

$$p = 2, 3, 4, 5, \dots$$

При каждом значении p мы вычисляем $C(r)$ и определяем тангенс угла наклона касательной к графику функции f , опре-

¹⁾ Суммирование по всем парам i, j приводит к дополнительному благоприятному эффекту — повышению статистической точности функции $C(r)$. С другой стороны, эта процедура сопряжена с большой затратой машинного времени. Как показывает опыт, весьма разумное усреднение достигается уже при сотне или около того операций, тогда как число точек $m \approx 10^4$, что приводит к значительной экономии машинного времени.

деляемой равенством $C(r) = f(\log r)$, достигаемым при некотором показателе ν . Для периодического режима, на фазовой диаграмме которого мы имеем предельный цикл, зависимость $C(r)$ от r строго линейна (с точностью до эффектов, связанных с размером объекта). С совершенно иной ситуацией мы встречаемся в случае белого шума¹⁾. Сигнал можно рассматривать как суперпозицию бесконечного числа независимых колебательных мод. Следовательно, такой режим может быть описан с помощью

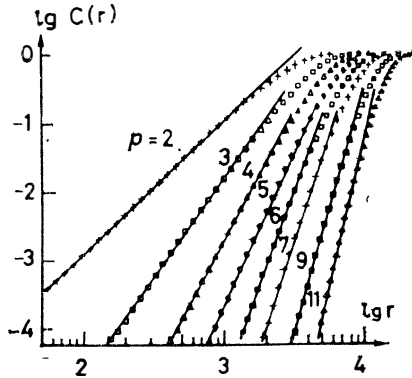


Рис. VI. 38. График функции $C(r)$ для белого шума в двойном логарифмическом масштабе. Обратите внимание на то, что наклон кривых (позволяющий судить о величине показателя ν) возрастает с увеличением размерности p пространства представления.

Из работы Б. Мальрезона, П. Аттена, П. Берже и М. Дюбуа.

аттрактора T^n с очень большим n . Траектории плотно покрывают любое фазовое пространство размерности

$$p \leq n.$$

Действительно, как показывает рис. VI. 38, у характерных функций $C(r)$, получаемых из белого шума, тангенсы углов наклона касательных к их графикам в двойном логарифмическом масштабе продолжают возрастать с увеличением p : $\nu \sim p$. Этот результат допускает обобщение: если вычисленное значение ν равно p (или продолжает возрастать вместе с p), то это означает, что размерность пространства, используемого для вычислений, меньше размерности соответствующего аттрактора (или сравнима с ней). С другой стороны, если размерность ν , вычисленная для хаотического режима, становится не зависящей от p , то хаос детерминированный и соответствующий аттрактор странный.

¹⁾ Определение белого шума см. в разд. III. 3.3.

В качестве иллюстрации этого метода вычисления корреляционной размерности ν для странных аттракторов рассмотрим аттрактор Энона, определенный в разд. VI.3.2. На рис. VI.39 показан график функции $C(r)$ в двойном логарифмическом масштабе. Значение ν , которое можно получить из этого графика, составляет

$$\nu = 1,25 \pm 0,05,$$

что согласуется с значением размерности Хаусдорфа, вычисленной исходя из ее определения:

$$D = 1,26.$$

Наконец рассмотрим пример из области неустойчивости РБ в ограниченной геометрии (см. разд. V.3). В качестве жидкости

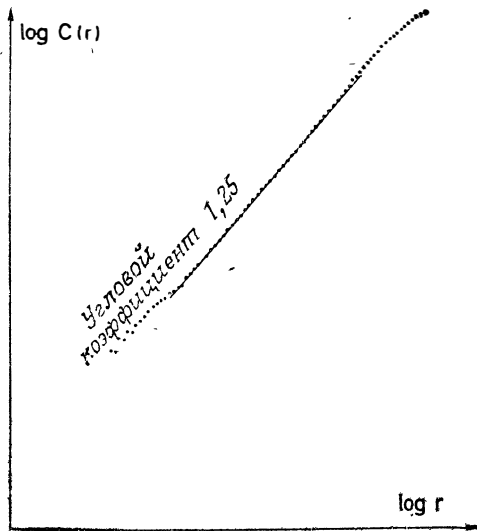


Рис. VI.39. График функции $C(r)$ для аттрактора Энона в двойном логарифмическом масштабе. В этом частном случае вычисления проведены только для двумерной задачи (в плоскости X, Y аттрактора), поэтому на графике представлена только одна кривая.

выберем силиконовое масло с числом Прандтля 40 в ячейке с аспектным отношением (ширина/высота), равным 2. Конвективная структура состоит из двух валов. Увеличивая число Рейнольдса, мы переходим от периодического режима к хаосу через субгармонический каскад (см. гл. VIII). Отслеживаемой переменной и на этот раз является отклонение узкого пучка света, пропускаемого сквозь ячейку. Это отклонение служит мерой вер-

тикального градиента температуры. Анализируемые данные соответствуют хаотическому режиму в конце обратного каскада (см. гл. VIII). Как видно из рис. VI. 40, тангенсы угла наклона

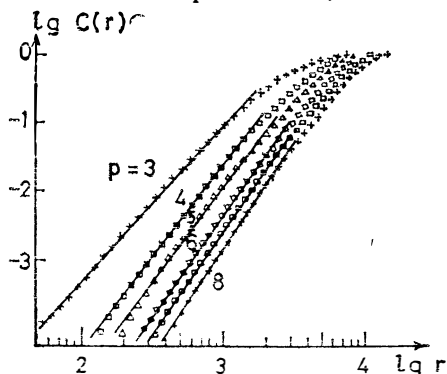


Рис. VI. 40. График функции $C(r)$ для конвекции Рэлея — Бенара. В отличие от белого шума (рис. VI. 38) наклон кривых перестает возрастать, начиная с размерности пространства $p = 4$.

Из работы Б. Мальрезона, П. Аттена, П. Берже и М. Дюбуа.

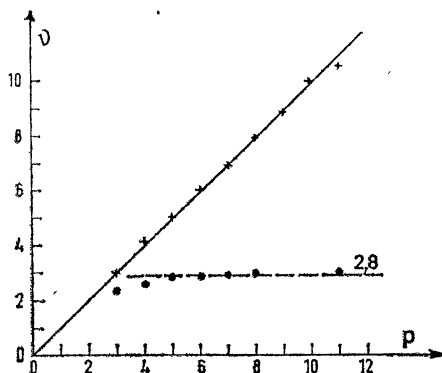


Рис. VI. 41. Показатель ν как функция размерности p . Величину показателя ν мы оцениваем по наклону характеристик, представленных на рис. VI. 38 и VI. 40. В случае белого шума показатель ν возрастает с увеличением p линейно. Иная картина наблюдается при турбулентной конвекции Рэлея — Бенара, когда показатель ν достигает насыщения.

Из работы Б. Мальрезона, П. Аттена, П. Берже, М. Дюбуа.

касательной к графику функции $C(r)$ в двойном логарифмическом масштабе достаточно хорошо определены и не зависят от размерности p фазового пространства, как только p становится больше 3. Насыщение корреляционной размерности ν при возрастании p лучше видно на рис. VI. 41 и контрастирует с линейной

зависимостью ν от p для белого шума (или случайного сигнала). Анализ данных такого типа свидетельствует о детерминированном характере хаотического поведения в этом режиме и, кроме того, определяет нижнюю границу числа возбужденных степеней свободы.

VI. 5. АТТРАКТОР ТИПА ПОДКОВЫ

На протяжении этой главы мы занимались описанием различных свойств странных аттракторов. Смейл, обобщив более раннюю работу Левинсона, предложил отображение плоскости на себя, ставшее теоретической моделью, позволяющей иллюстрировать эти свойства.

Основной операцией, необходимой для создания странного аттрактора, является *растяжение* в сочетании со *складыванием*, порождающие аттрактор, который занимает ограниченную часть фазового пространства. Двоякая операция растяжения-складывания и была выбрана за исходный пункт при построении модели. Возьмем прямоугольник $ABCD$ (рис. VI. 42) и, растянув его (например) в 2 раза по оси x и одновременно сжав в 2η раз по оси y , получим прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$. При $\eta > 1$ такая операция приводит к *сокращению площади*, что необходимо для диссипативной системы. Сложим прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ в виде подковы и наложим на исходный прямоугольник $ABCD$. Именно форма изогнутого прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ и дала название модели. Повторяя операцию (снова растяжение по оси x и складывание по оси y), мы получаем образ подковы, напоминающий по форме двойную заколку для волос¹⁾ (рис. VI. 43). Итерируя операцию бесконечно много раз, мы получаем сложную многослойную структуру \mathcal{A} , обладающую, как будет показано, всеми свойствами странного аттрактора²⁾.

¹⁾ Модель Смейла и преобразование пекаря, с которым мы встретимся в гл. IX, тесно связаны между собой. Вместе с тем следует обратить внимание на два существенных различия между ними: преобразование пекаря разрывно и, кроме того, сохраняет площадь.

²⁾ Строго говоря, \mathcal{A} есть пересечение всех итераций исходного прямоугольника R . Если f — отображение Смейла, то

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(R).$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что доминирующий эффект преобразования состоит в растяжении горизонтальных участков, и не будем учитывать действия преобразования на изогнутую часть подковы. Иначе говоря, мы можем предположить, что длина прямоугольника $ABCD$ по оси x во много раз превосходит его ширину.

Рис. VI. 42. Первая итерация преобразования типа подковы. Исходный прямоугольник $ABCD$ мы растягиваем вдвое в направлении оси x и сжимаем более чем вдвое в направлении оси y . Сжатый и растянутый таким образом прямоугольник складываем вдвое и получаем образ исходного прямоугольника при данном преобразовании, напоминающий по форме подкову.

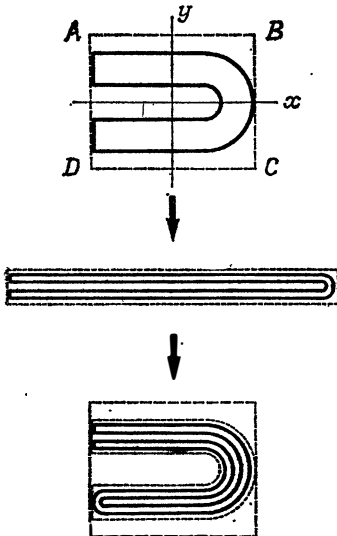
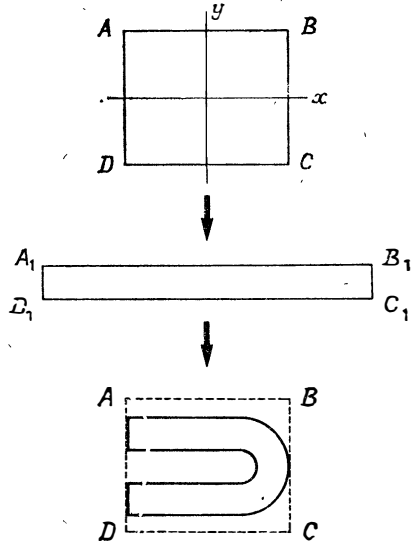


Рис. VI. 43. Вторая итерация преобразования типа подковы. Операция, изображенная на рис. VI. 42, повторяется на подкове. На первом этапе получаем сильно вытянутую подкову. (Мы предполагаем, что ширина образа подковы постоянна. Строго говоря, такое предположение неверно, поскольку изогнутая часть подковы также подлежит растяжению.) После складывания мы получаем нечто вроде двойной заколки для волос.

То, что структура \mathcal{A} есть аттрактор, гарантируется значением $\eta > 1$, которое приводит к сокращению площадей: образ каждой точки исходного прямоугольника $ABCD$ лежит внутри \mathcal{A} . Кроме того, аттрактор \mathcal{A} *странный*, так как обладает ЧЗНУ: каждая итерация удваивает компоненту x расстояния между двумя точками, тем самым порождая экспоненциальное увеличение расстояния между точками.

Преобразование Смейла служит особенно простым примером *гиперболичности*. Растяжение происходит по оси x (можно

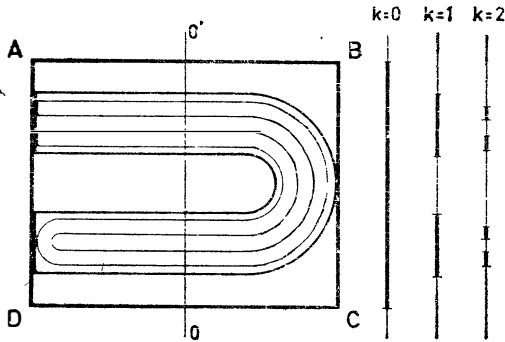


Рис. VI. 44. Поперечные сечения, проведенные через несколько первых образов исходного прямоугольника при преобразовании типа подковы. Поперечные сечения вдоль оси OO' проведены через исходный прямоугольник ($k=0$), его первую итерацию (подкову, $k=1$) и вторую итерацию (двойная заковка для волос, $k=2$). Сравнивая с рис. VI. 34, мы обнаруживаем тот же принцип, что и используемый при построении канторовского множества.

сказать также, что ось x соответствует неустойчивому многообразию), а сжатие — по оси y (ось y соответствует устойчивому многообразию). С этими двумя направлениями x и y (перпендикулярными аттрактору типа подковы) связаны два *коэффициента Ляпунова* отображения. Большой коэффициент Ляпунова (вдоль оси x) равен $\Lambda_1 = 2$, а другой коэффициент Ляпунова равен $\Lambda_2 = 1/2\eta$. Произведение этих коэффициентов $\Lambda_1\Lambda_2 = 1/\eta$ служит мерой степени сжатия площадей (см. также рис. VI. 22), а показатели Ляпунова соответственно равны $\lambda_1 = \ln \Lambda_1$ и $\lambda_2 = \ln \Lambda_2$.

Наконец убедимся, что аттрактор \mathcal{A} является фрактальным объектом. На рис. VI. 44 показана эволюция сечения OO' , проведенного через прямоугольник, при повторяющихся итерациях. В начале ($k=0$) мы имеем прямоугольник $ABCD$, и его сечение OO' имеет вид прямолинейного отрезка. После одной итерации ($k=1$) мы получаем подкову, а сечение состоит из двух

отрезков. После второй итерации сечение, проведенное через «двойную заколку для волос», состоит из четырех отрезков и т. д. Мы легко узнаем принцип построения канторовского множества в том виде, как оно описано в предыдущем разделе. Можно вычислить, как это было сделано для канторовского множества, размерность Хаусдорфа сечения OO' аттрактора:

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 2\eta}.$$

В результате получаем фрактальную размерность аттрактора \mathcal{A} :

$$D' = 1 + \frac{\ln 2}{\ln 2\eta},$$

которая характеризует объект, занимающий промежуточное положение между линией и поверхностью¹⁾.

Заметим, что в пределе при $\eta \rightarrow 1$ (пренебрежимо слабая диссипация, почти полное отсутствие сокращения площадей) D' стремится к двум, а поэтому итерации точек прямоугольника $ABCD$ практически заполняют всю его поверхность. В противоположном предельном случае сильной диссипации $\eta \gg 1$ размерность D' стремится к единице и аттрактор \mathcal{A} почти вырождается в линию (как сечение Пуанкаре аттрактора Лоренца).

Аттрактор \mathcal{A} является сравнительно простой иллюстрацией свойств странных аттракторов. Помимо педагогического интереса существенно и то, что основные свойства аттрактора типа подковы обнаруживаются у многих сечений Пуанкаре хаотических потоков. Например, численные эксперименты показывают, что при некоторых значениях параметра сечение Пуанкаре аттрактора Лоренца возникает при повторных итерациях отображения типа подковы. В основу самого отображения Энона было положено следующее замечание: оно сводится к отображению, которое при каждой итерации растягивает, сокращает и складывает данную фигуру. На рис. VI. 23 показано, к чему приводит отображение Энона. Результаты очень похожи на то, к чему приводит отображение Смейла.

ЛИТЕРАТУРА

- Brandstätter A., et al.*, Physical Review Letters, **51**, p. 1442 (1983).
Croquette V., Poitou C., Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris. **C292**, p. 1353 (1981).
Croquette V., Pour la Science, **62**, p. 62 (1982).

¹⁾ Подобно аттрактору Энона, аттрактор типа подковы может рассматриваться как сечение Пуанкаре хаотического трехмерного потока.

- Dubois M.*, Lecture Notes in Physics, **164**, p. 117 (1982).
Grassberger P., Procaccia I., Physical Review Letters, **50**, p. 346 (1983).
Grassberger P., Procaccia I., Physica, **9D**, p. 189 (1983).
Guckenheimer J., Buzina G., Physical Review Letters, **51**, p. 1438 (1983).
Hénon M., Pomeau Y., Lecture Notes in Mathematics, **565**, p. 29 (1976).
Hénon M., Communications in Mathematical Physics, **50**, p. 69 (1976).
Lorenz E. N., Journal of Atmospheric Sciences, **20**, p. 130 (1963).
Malraison B., et al., Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **C297**, p. 209 (1983).
Roux J.-C., et al., Physica, **8D**, p. 257 (1983).
Roux J.-C., Swinney H. L.: In: Non linear phenomena in chemical dynamics, ed. C. Vidal, A. Pacault, Springer-Verlag, p. 38 (1981).
Simó C., Journal of Statistical Physics, **21**, p. 465 (1979).
Tresser C., et al., Le Journal de Physique Letters, **13**, p. L123 (1980).
Yorke J., Yorke E., Journal of Statistical Physics, **21**, p. 263 (1979).

ГЛАВА VII

КВАЗИПЕРИОДИЧНОСТЬ

VII.1. БИФУРКАЦИЯ ХОПФА ИЗ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА

В гл. VI было показано, что странные аттракторы характерны для хаотического поведения в диссипативной динамической системе с небольшим числом степеней свободы. Вопрос, на который мы пытаемся ответить в этой главе и в последующих главах, можно было бы сформулировать так: с помощью каких

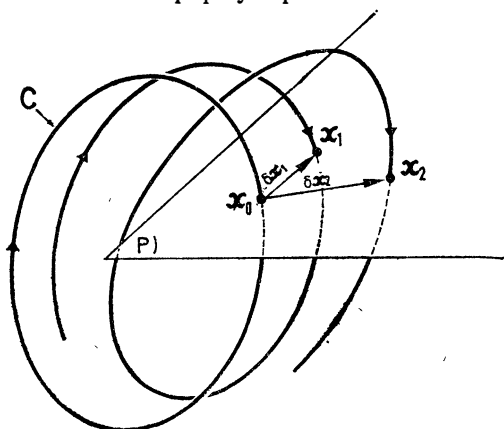


Рис. VII. 1. Сечение Пуанкаре фазовых траекторий вблизи предельного цикла C .

механизмов осуществляется переход между периодическим и странным аттрактором? Отвечая на него, исследователи установили «маршруты», или «сценарии», переходов к хаосу, характеризующиеся ограниченным числом бифуркаций. Их удалось разделить на три главных типа маршрутов в зависимости от того, каким образом периодический режим утрачивает свою устойчивость. Анализ сечения Пуанкаре показывает, что предельный цикл линейно неустойчив: последовательные пересечения x_1, x_2, \dots траектории, первоначально близкой к предельному циклу, с плоскостью S (рис. VII. 1), удаляются от точки x_0 :

$$\overrightarrow{|x_0 x_1|} < \overrightarrow{|x_0 x_2|} < \dots$$

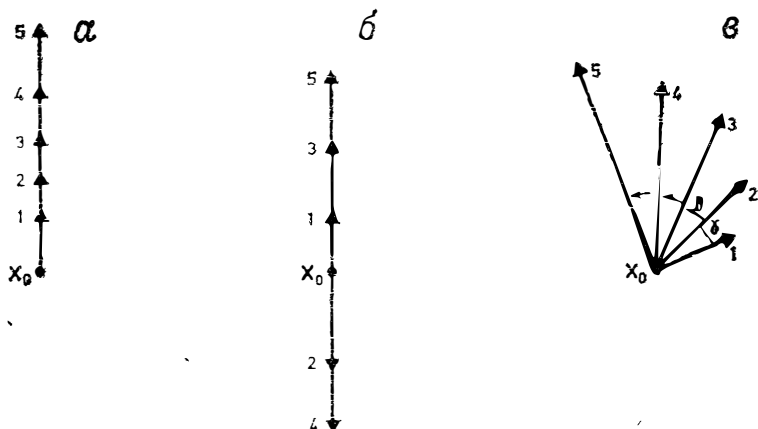


Рис. VII.2. Представление на плоскости сечения Пуанкаре векторов $\delta x_i = \overrightarrow{x_0 x_i}$ при возрастающих значениях i . Собственное значение λ матрицы Флоке может выйти из области, заключенной внутри единичной окружности, в трех случаях: a — при $\lambda > 1$; b — при $\lambda < -1$; c — при $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $|\lambda| > 1$. На рисунке показана только динамика в направлении собственного вектора, соответствующего наибольшему по абсолютной величине собственному значению.

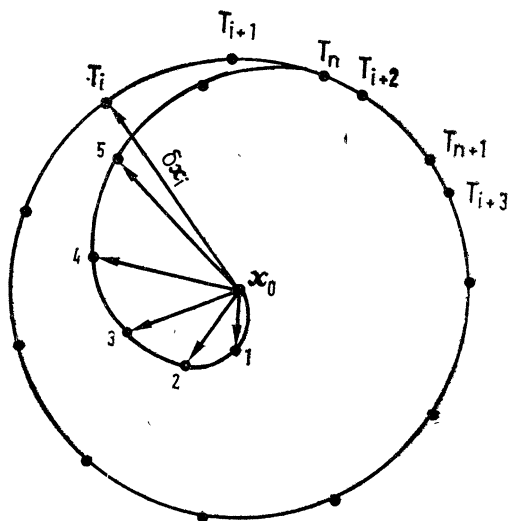


Рис. VII.3. Эволюция вектора δx_i в плоскости сечения Пуанкаре после бифуркации Хопфа. Точка x_0 — сечение неустойчивого теперь предельного цикла, точки T_i принадлежат тору T^2 .

Полагая $\delta x_1 = x_0 x_1$, $\delta x_2 = x_0 x_2$, мы видим, что $\delta x_2 = M \delta x_1$, где M — матрица Флоке. Условие неустойчивости предельного цикла состоит в том, что модуль по крайней мере одного собственного значения λ матрицы M должен быть больше единицы. Если $\lambda = 1 + \varepsilon$, то каждый вектор δx_i увеличивается в одном и том же направлении с каждым оборотом. Если $\lambda = -(1 + \varepsilon)$, то последовательные векторы δx_i увеличиваются по модулю, но попеременно направлены то в одну, то в противоположную сторону. Наконец в случае двух комплексно-сопряженных собственных значений векторы δx_i с каждым циклом поворачиваются на угол γ , а их длина увеличивается (рис. VII. 2). Если бифуркация, сопровождающая неустойчивость последнего типа, суперкритическая, то нелинейные эффекты (не учитываемые в приведенных выше рассуждениях) ограничивают удлинение модуля $|\delta x_i|$ до некоторой конечной величины. Предельный цикл, которому в сечении Пуанкаре соответствует точка x_0 , преобразуется бифуркацией Хопфа в тор T^2 , сечение Пуанкаре которого состоит из множества точек T_i, T_{i+1}, \dots (рис. VII. 3).

В этой главе мы рассмотрим события, которые ведут от тора T^2 (квазипериодического режима) к странному аттрактору, соответствующему хаотическому режиму.

VII. 2. ТЕОРИЯ РЮЭЛЯ — ТАКЕНСА (РТ)

VII. 2.1. Описание

Эта теория, выдвинутая в 1971 г. и развитая в 1978 г. Рюэлем, Такенсом и Ньюхаусом (РТН), имеет большое историческое значение, поскольку она впервые достаточно обоснованно поставила под сомнение механизм турбулентности, предложенный Ландау, согласно которому для возникновения турбулентности требуется бесконечное число бифуркаций Хопфа. Выдвинув эту революционную идею, Рюэль и Такенс (РТ) пошли на эпистемологический разрыв с традицией: оказалось, что для генерации хаотического режима достаточно очень небольшого числа бифуркаций. Если не воспроизводить здесь доказанную ими весьма абстрактную математическую теорему, то подход РТН схематически сводит к следующему. Рассмотрим динамическую систему в стационарном состоянии, например ламинарное течение вязкой жидкости. Предположим, что, когда управляющий параметр (число Рейнольдса) возрастает, режим утрачивает свою устойчивость и переходит в колебания с частотой f_1 . Предположим, что такой же процесс повторяется еще 2 раза, т. е. всего происходят три последовательные бифуркации Хопфа, порождающие три независимые частоты f_1, f_2 и f_3 . Тогда, согласно

теории РТН, соответствующий тор T^3 при весьма общих условиях может стать неустойчивым и перейти в странный аттрактор. Нестационарное поведение перестает быть квазипериодическим с тремя частотами (на торе T^3), а становится явно хаотическим (рис. VII. 4).

Рюэль, Такенс и Ньюхаус показали, что некоторые возмущения могут разрушить тор T^3 и преобразовать его в странный

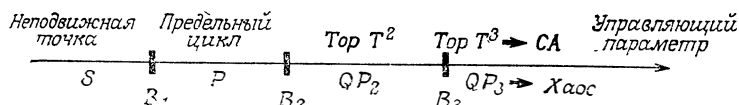


Рис. VII. 4. Схематическое изображение последовательных бифуркаций B_1 , B_2 и B_3 , приводящих, согласно теории Рюэля — Такенса, к хаосу. S — стационарное состояние; P — периодическое состояние; QP_2 — квазипериодический режим с двумя частотами; QP_3 — квазипериодический режим с тремя частотами; CA — странный аттрактор.

аттрактор. Но в отличие от тора странный аттрактор обладает устойчивостью по отношению к действующим на систему возмущениям. Можно ожидать, что при этих условиях спектр мощности динамической системы будет эволюционировать как функция управляющего параметра следующим образом. Спектр мощ-

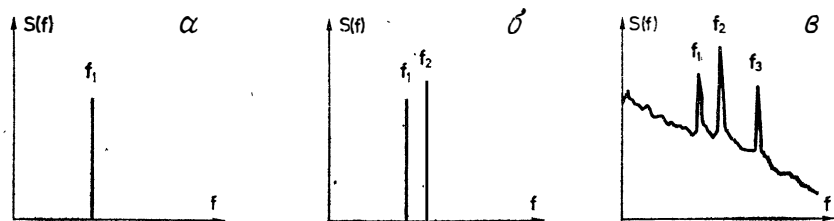


Рис. VII. 5. Схема эволюции спектра мощности согласно теории Рюэля — Такенса. a — периодический режим; b — квазипериодический режим с двумя частотами; $в$ — хаотический режим. $S(f)$ — спектр мощности, определенный в гл. III (и обозначенный там через $|\dot{x}_k|^2$).

ности будет содержать сначала одну частоту (f_1), затем две частоты (f_2 и f_3) и иногда три частоты (f_1 , f_2 и f_3). Как только в спектре появляется третья частота, возникает характерная для хаоса широкополосная шумовая компонента (рис. VII. 5). Третья частота может обнаруживаться (а может и не обнаруживаться) в спектре перед тем, как мы идентифицируем хаос. Нельзя не подчеркнуть еще раз принципиальное различие между механизмом РТН и механизмом Ландау: вместо бесконечно большого числа частот достаточно трех частот. Это говорит о том, что система с небольшим числом степеней свободы может порождать

хаотический режим. Попытаемся теперь обосновать необходимость возникновения квазипериодического режима с тремя частотами перед появлением на этом маршруте странного аттрактора.

VII. 2.2. Топологическая интерпретация

В предыдущей главе было показано, что для существования странного аттрактора необходимо фазовое пространство с размерностью не ниже трех¹⁾. Вернемся к последовательности из трех бифуркаций Хопфа, идущих одна за другой. Первая бифуркация ведет к переходу от начального стационарного состояния (неподвижная точка, размерность 1) к периодическому состоянию (предельный цикл, размерность 1). Вторая бифуркация Хопфа преобразует периодический режим (с частотой f_1) в квазипериодический режим (с частотами f_1 , f_2 и иррациональным отношением f_1/f_2). Соответствующий аттрактор — тор T^2 с размерностью 2. На торе T^2 траектории могут подвергаться топологической деформации только при синхронизации, т. е. когда отношение f_1/f_2 становится рациональным (см. разд. VI. 1.3 и примечания к нему). Третья бифуркация Хопфа, если она суперкритическая, порождает переход (в линейном приближении) от квазипериодического режима с двумя частотами к квазипериодическому режиму на торе T^3 с тремя частотами (f_1 , f_2 и f_3). Подобно тому как T^2 — двумерный аттрактор, тор T^3 — трехмерный аттрактор. Мы можем построить развертку аттрактора T^3 в \mathbb{R}^3 так же, как можно построить развертку тора T^2 в \mathbb{R}^2 . В случае тора T^2 траектории должны ложиться на отрезки прямых в прямоугольнике (прямоугольник представляет собой развертку тора T^2 ; см. разд. VI. 2.2). Но траектории на T^3 «живут» в кубе²⁾ (рис. VII. 6), поэтому они могут не быть параллельными и тем не менее не пересекаться (см. разд. VI. 2.2). Таким образом, дополнительная степень свободы³⁾, возникающая с по-

¹⁾ Подчеркнем еще раз, что размерность аттрактора не следует смешивать с размерностью фазового пространства, в котором находится аттрактор.

²⁾ Подобно тому как траектории на торе T^2 удобно изображать на прямоугольнике (см. разд. VI. 1.3), траектории на торе T^3 можно представить линиями, проходящими внутри прямоугольного параллелепипеда с отождествленными противоположными гранями. (Соответствующее фазовое пространство должно быть не менее чем четырехмерным; см. рис. VII. 6 и подпись к нему.)

³⁾ Заметим, что появление у режима новой частоты требует учета дополнительной размерности фазового пространства, причем каждая новая частота соответствует новой степени свободы. Согласно интерпретации Ландау, каждой частоте соответствует фаза, значение которой зависит от деталей процесса возникновения турбулентности. Эта «свободная» фаза и есть степень свободы.

явлением третьей частоты, привносит в картину совершенно новый элемент. Она позволяет развиваться неустойчивостям (рис. VII.7), отличным от синхронизации — единственной воз-

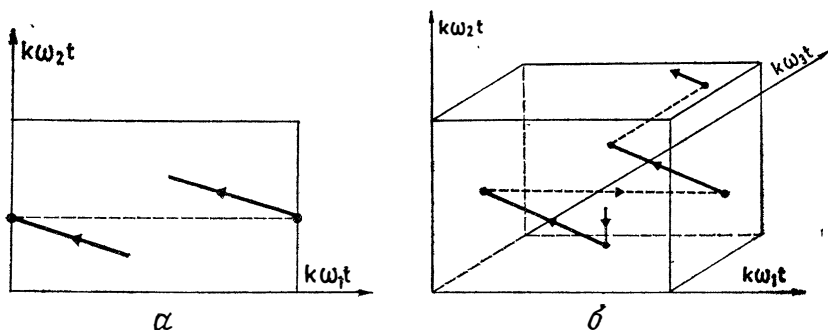


Рис. VII.6. Развертки торов T^2 и T^3 , a — развертка тора T^2 в прямоугольник. Достигнув стенки, траектория скачком переходит на противоположную стенку, после чего продолжается в ту же сторону, что и раньше; b — каждая из граней тора T^3 отождествлена с противоположной гранью. Угловые частоты квазипериодического движения равны ω_1 , ω_2 и ω_3 .

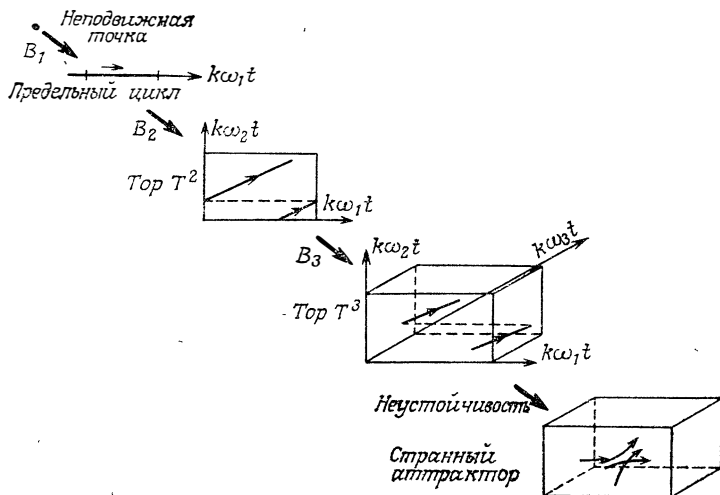


Рис. VII.7. Последовательные фазовые диаграммы в теории Рюэля — Такенса. После каждой бифуркации Хопфа размерность фазового пространства повышается на единицу.

можности, существующей для T^2 , как было показано в разд. VI.1.3. Исходя из этих элементарных топологических соображений, мы можем попытаться интерпретировать необходи-

мость наличия по крайней мере трех степеней свободы¹⁾ для получения хаоса, описываемого странным аттрактором. Но достаточно ли это условие? Ответить на этот вопрос мы попытаемся в следующем разделе.

VII. 2.3. Практическое значение: численное моделирование

В рамках обсуждаемого здесь подхода, для того чтобы поток в фазовом пространстве имел странный аттрактор, необходимы три независимые частоты. Наша цель состоит в том, чтобы определить, могут ли малые возмущения дестабилизировать тор T^3 и превратить его в странный аттрактор. Существование устойчивых экспериментально наблюдаемых режимов, квазипериодических с тремя частотами и свободных от хаоса, доказывает, что по крайней мере *не все* возмущения дестабилизируют тор T^3 .

Эти соображения, а также абстрактный математический характер теоремы РТН наводят на мысль проиллюстрировать их теорему численными экспериментами. Рассмотрим квазипериодическую функцию $X(t)$ с тремя частотами f_1, f_2, f_3 :

$$X(t) = F(f_1 t, f_2 t, f_3 t).$$

Введем в уравнение потока контролируемое возмущение, чтобы проанализировать устойчивость потока относительно таких возмущений. Устойчивость функции $X(t)$ исследуется с помощью сечения Пуанкаре потока. В частности, мы выбираем поверхность сечения так, чтобы значения $X(t)$ можно было получать через времена, кратные периоду $T_1 = 1/f_1$, т. е. в дискретные моменты времени²⁾ $t_k = k/\dot{f}_1$.

Сечение Пуанкаре аттрактора T^3 , соответствующее функции $X(t)$, есть тор T^2 , который может быть описан двумя углами θ и ϕ . Последовательные пересечения с поверхностью сечения удовлетворяют уравнениям³⁾

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= [\theta_k + \omega_1] \pmod{1}, \\ \phi_{k+1} &= [\phi_k + \omega_2] \pmod{1}. \end{aligned} \tag{VII. 1}$$

Мы определяем устойчивость режима $X(t)$, возмущая отображение Пуанкаре, заданное системой (VII. 1). Пусть $\varepsilon P(\theta, \phi)$ — воз-

¹⁾ Отсюда необходимость трех последовательных бифуркаций Хопфа.

²⁾ Мы снова прибегаем здесь к стробоскопическому методу, описанному в предыдущей главе в связи с вычислениями сечений Пуанкаре в экспериментах с тепловой конвекцией.

³⁾ Мы снова используем преимущество метода Пуанкаре, сводя квазипериодический поток с тремя частотами к итерационному двумерному отображению.

мушение ¹⁾, приложенное для выяснения устойчивости решения. Амплитуда возмущения управляется параметром ε , где $\varepsilon = 1$ соответствует полному возмущению.

Возмущенное отображение Пуанкаре тора T^3 принимает вид

$$\begin{aligned}\theta_{k+1} &= [\theta_k + \omega_1 + \varepsilon P_1(\theta_k, \phi_k)] \pmod{1}, \\ \phi_{k+1} &= [\phi_k + \omega_2 + \varepsilon P_2(\theta_k, \phi_k)] \pmod{1}.\end{aligned}\tag{VII. 2}$$

Над системой (VII. 2) с случайно выбранными P_1 и P_2 возрастающим параметром ε выполнено много численных экспериментов. Заключение относительно возмущенной системы (VII. 2) мы извлекаем, вычисляя показатели Ляпунова этого отображения (см. приложение Б). Возникающие режимы можно классифицировать, разделяя их на четыре типа в зависимости от знаков показателей Ляпунова:

- 1) квазипериодические режимы с тремя частотами (0, 0, 0, —);
- 2) квазипериодические режимы с двумя частотами (0, 0, —, —);
- 3) периодические режимы с одной частотой (0, —, —, —);
- 4) хаотические режимы (+, 0, —, —).

Статистические результаты многих численных экспериментов, соответствующие возмущениям $P(\theta, \phi)$ различного рода и различным отношениям частот, показаны на круговых диаграммах ²⁾ (рис. VII. 8) при трех различных значениях ε (т. е. при трех амплитудах возмущений). Эти результаты явно подтверждают конкретные следствия из теоремы РТН: тор T^3 неустойчив относительно некоторых (достаточно больших) возмущений, под действием которых он переходит в странный аттрактор, устойчивый, как показывают дальнейшие численные эксперименты. Ясно, однако, что в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ вероятность получения хаотического режима обращается в нуль. Можно провести аналогию между структурной неустойчивостью траекторий на T^2 и T^3 . Единственная неустойчивость траекторий на T^2 приводит к явлению синхронизации, подробно исследованному в приложении В. Нетрудно видеть, что по мере приближения к порогу бифуркации Хопфа, при которой впервые проявляется аттрактор T^2 , синхронизация встречается редко. Аналогично не следует

¹⁾ Здесь $P(\theta, \phi)$ — функция, периодическая по θ и ϕ , амплитуда и фаза которой выбрана случайным образом. Средняя амплитуда возмущения управляется параметром ε .

²⁾ Например, 7% хаотического режима означает, что из N численных экспериментов, проведенных над системой (VII. 2), $7 \cdot (N/100)$ привели к хаотическому режиму.

удивляться тому, что неустойчивость на T^3 , приводящая к хаосу, также становится редкой (для слабых возмущений) при произвольном выборе параметров бифуркации. Это обстоятельство,

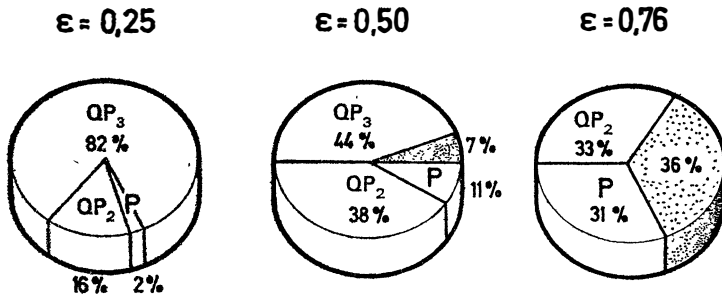


Рис. VII. 8. Процентное соотношение различных динамических режимов, наблюдаемых в численных экспериментах при трех различных амплитудах ϵ возмущения, вводимого в квазипериодический режим с тремя частотами (тор T^3). P — периодический режим; QP_2 — квазипериодический режим с двумя частотами; QP_3 — квазипериодический режим с тремя частотами. Точками выделен сектор, соответствующий хаотическому режиму.

отмеченное Арнольдом, согласуется с результатами численных экспериментов на основе приведенных выше моделей.

VII. 2.4. Экспериментальный пример

Проиллюстрируем теорию РТ на примере неустойчивости РБ. Жидкостью, в которой происходит конвекция, является вода со средней температурой, соответствующей числу Прандтля, равному 5. Аспектное отношение ячейки $\Gamma_x = 3,5$, а поэтому образуются три конвективных вала. Управляющим параметром служит отношение Ra/Ra_c ¹⁾. При возрастании отношения Ra/Ra_c стационарная конвекция теряет устойчивость и переходит в периодический режим, начиная с $Ra/Ra_c = 30$ (первой бифуркации Хопфа). При $Ra/Ra_c = 39,5$ периодический режим в свою очередь теряет устойчивость и сменяется квазипериодическим режимом с двумя частотами (вторая бифуркация Хопфа). Наконец при $Ra/Ra_c = 41,5$ происходит третья бифуркация Хопфа, соответствующая появлению квазипериодического режима с тремя частотами, спектр которого показан на рис. VII. 9.

Заметим, что идентификация такого спектра, содержащего большое число трех несоизмеримых частот, — задача весьма не-

¹⁾ Ra/Ra_c есть отношение числа Рэлея в эксперименте к критическому числу Рэлея Ra_c , соответствующему возникновению конвекции в бесконечной геометрии.

тривиальная. Необходимо показать, что частота каждой из линий *может быть* индексирована комбинацией трех частот $f = m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3$, где m_1, m_2, m_3 — целые числа (не превышающие некоторого максимального числа, например 20), и (что особенно важно) *не может быть* индексирована комбинацией двух частот $f = m'_1 f'_1 + m'_2 f'_2$. Для установления этого факта требуются многочисленные подгоночные расчеты на компьютере. Для проверки несоизмеримости необходимо удостовериться в том, что отношения f_1/f_2 , f_1/f_3 и f_2/f_3 непрерывно изменяются

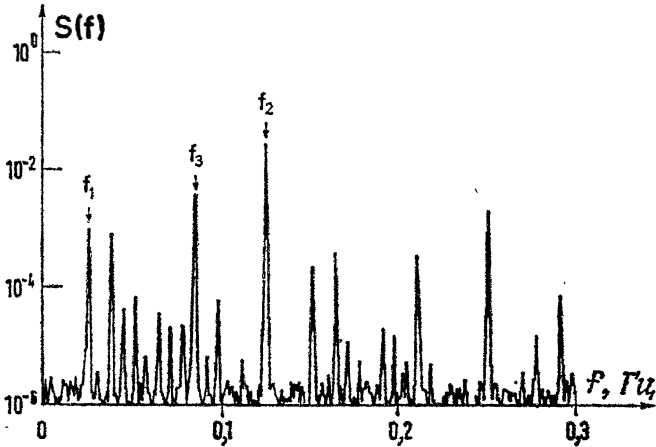


Рис. VII. 9. Спектр мощности квазипериодического режима с тремя несоизмеримыми частотами, наблюдаемого при неустойчивости Рэля — Бенара. В качестве жидкости выбрана вода с $Ra/Ra_c = 42,3$. Спектральная плотность как функция частоты в герцах представлена в логарифмическом масштабе. Из работы Дж. Голлуба и С. Бенсона.

при изменении отношения Ra/Ra_c . Если бы возникала синхронизация (например, при рациональном отношении f_1/f_2), то это проявлялось бы в существовании интервала захвата частоты, т. е. конечного интервала значений Ra/Ra_c , в котором отношение частот f_1/f_2 остается постоянным (о синхронизации см. приложение В).

После четкой идентификации квазипериодического режима с тремя частотами, как показывают эксперименты, в небольшой области значений отношения Ra/Ra_c соответствующие спектры (с точностью до погрешности измерений) свободны от шума. Это подтверждает один из выводов, сделанных на основе численной модели в предыдущем разделе: при тех же условиях трехчастотный режим устойчив. Но выше некоторого значения $R_T = Ra/Ra_c \approx 43$ становится заметным широкополосный шум,

одновременно происходит уширение пиков: режим становится хаотическим. На рис. VII. 10 показана последовательность различных режимов, приводящая к хаосу, в данном конкретном эксперименте.

Очень трудно установить, существует ли порог R_T возникновения хаоса, отличный от порога квазипериодичности с тремя частотами, или эти два порога в действительности совпадают.

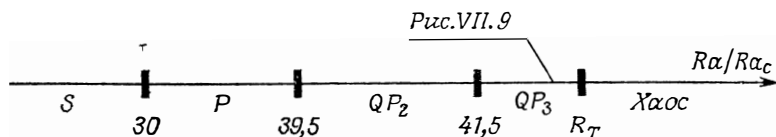


Рис. VII. 10. Стадии маршрута, ведущего к хаосу через квазипериодический режим с тремя частотами.

Наблюдения были проведены на примере неустойчивости Белоусова — Жаботинского (в воде).

Следует иметь в виду, что может существовать достаточно высокий уровень шума инструментального происхождения: если порог R_T превзойден, то можно утверждать, что уровень внутреннего шума системы выше уровня инструментального шума. Анализируя только экспериментальные данные, мы не можем исключить возможность того, что при пренебрежимо низком уровне инструментального шума порог R_T возникновения хаоса и порог появления третьей частоты совпадают.

VII. 3. ПЕРЕХОД К ХАОСУ ОТ ТОРА

VII. 3.1. Модель Керри — Йорке

Мы описали маршрут, ведущий к хаосу, — маршрут, на котором тор T^3 трансформируется в странный аттрактор. Рассмотрим теперь другой маршрут также через квазипериодичность, но на котором хаос возникает непосредственно из квазипериодического режима с двумя частотами (т. е. без появления третьей частоты). Иначе говоря, этот маршрут соответствует дестабилизации или, точнее, разрушению тора T^2 . Между дестабилизацией тора T^2 и изложенными выше соображениями относительно того, что T^3 имеет наименьшую размерность, необходимой для возникновения странного аттрактора, нет противоречия. Действительно, в случае, о котором сейчас пойдет речь, хаос, хотя он и возникает из тора T^2 , обусловлен тем не менее появлением дополнительной степени свободы, но не в форме третьей частоты, а посредством постепенного отклонения траек-

торий от тора T^2 , приводящего в конце концов к его разрушению.

Доказательство существования такого маршрута следует не из строгой, обоснованной теории, а из результатов численных экспериментов с итерациями некоторого двумерного отображения, соответствующего сечению Пуанкаре трехмерного потока.

Такое отображение удовлетворяет нескольким критериям:

- 1) оно должно быть нелинейным;
- 2) оно должно быть сжимающим (т. е. соответствовать диссипативной системе);

3) оно должно обладать бифуркацией Хопфа.

При увеличении управляющего параметра неподвижная точка отображения должна терять устойчивость и через бифуркацию Хопфа переходить в предельный цикл. Для трехмерного потока, отображение Пуанкаре которого требуется рассмотреть, эта бифуркация Хопфа соответствует бифуркации предельный цикл $\rightarrow T^2$.

Керри и Йорке построили модель, удовлетворяющую всем этим условиям. Рассмотрим композицию двух гомеоморфизмов (см. приложение Д) на \mathbb{R}^2 :

$$\psi = \psi_1 \circ \psi_2,$$

где символом \circ обозначена композиция отображений¹⁾.

Отображение ψ_1 определяет (в полярных координатах (ρ, θ)) $(k+1)$ -ю итерацию как функцию k -й по формулам

$$\psi_1 = \begin{cases} \rho_{k+1} = \varepsilon \log(1 + \rho_k), \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \theta_0, \end{cases}$$

где ε — управляющий параметр ($\varepsilon \geq 1$) и угол $\theta_0 > 0$ фиксирован для данной серии экспериментов.

Отображение ψ_2 определяется следующим соотношением между прямоугольными координатами (X, Y) $(k+1)$ -й и k -й итераций:

$$\psi_2 = \begin{cases} X_{k+1} = X_k, \\ Y_{k+1} = Y_k + X_k^2. \end{cases}$$

1) Композицию $\psi = \psi_1 \circ \psi_2$ можно было бы также представить в форме, аналогичной модели Энона:

$$\psi = \begin{cases} X_{k+1} = f(X_k, Y_k), \\ Y_{k+1} = g(X_k, Y_k). \end{cases}$$

Но при этом окончательная формулировка становится весьма громоздкой и малопривлекательной для интуитивного понимания.

Нетрудно убедиться, что отображения ψ_1 , ψ_1^{-1} , ψ_2 и ψ_2^{-1} непрерывны, а поэтому ψ действительно является гомеоморфизмом.

Начнем с рассмотрения того, как действует отображение ψ_1 . Результат преобразования $\rho_{k+1} = \varepsilon \log(1 + \rho_k)$ представлен на

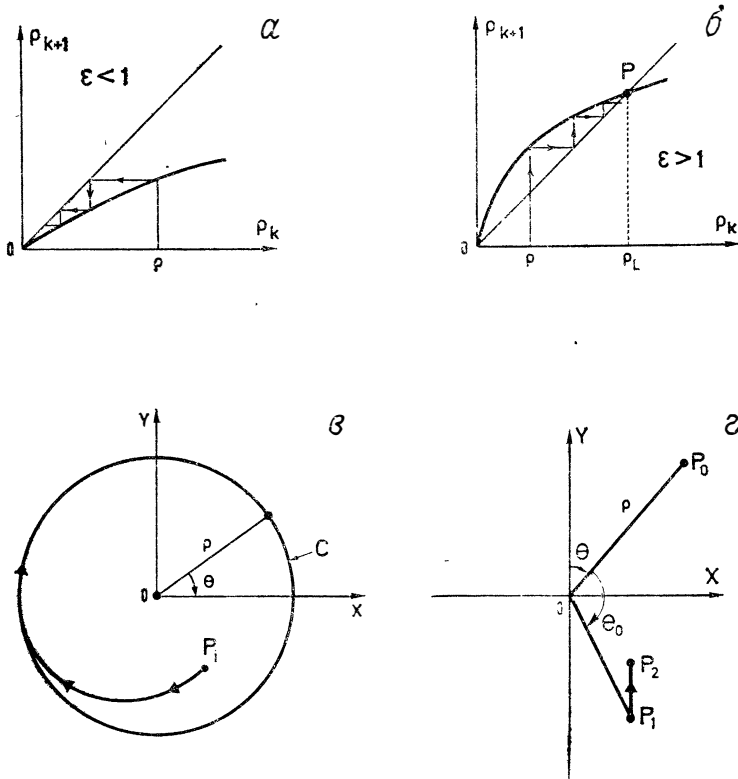


Рис. VII. 11. Модель Карри—Горка. *a* — график отображения $\rho_{k+1} = \varepsilon \log(1 + \rho_k)$ при $\varepsilon < 1$; *b* — график того же отображения при $\varepsilon > 1$; *v* — итерация отображения ψ_1 только при $\varepsilon > 1$. Любая начальная точка P_i после нескольких итераций отображается на притягивающую окружность C ; *z* — представление композиции отображений $\psi = \psi_1\psi_2$ на плоскости с прямоугольной системой координат. Отображение ψ_1 переводит P_0 в P_1 , а отображение ψ_2 переводит P_1 в P_2 .

графиках рис. VII. 11. Тангенс угла наклона касательной к кривой в начале координат равен ε . Следовательно, если $\varepsilon < 1$, то начало координат является устойчивой неподвижной точкой: при итерациях все начальные значения ρ стремятся к нулю (рис. VII. 11, *a*). При $\varepsilon > 1$ существует еще одна неподвижная точка помимо начала координат: при итерациях все начальные

значения P стремятся к пределу ρ_L — положительному отличному от нуля решению уравнения (рис. VII. 11, б).

Вторая часть отображения ψ_1 , а именно отображение $\theta_{k+1} = \theta_k - \theta_0$, есть простой поворот на угол θ_0 . На рис. VII. 11, показана комбинация двух типов итерированных графиков отображения ψ_1 . При $\varepsilon \leq 1$ начало координат O является единственной притягивающей точкой, в то время как при $\varepsilon > 1$ отображение ψ_1 имеет притягивающую окружность¹⁾ S радиусом ρ_L , возрастающим с увеличением ε . Нетрудно видеть, что сформулированные в начале раздела условия (диссипация и существования бифуркации Хопфа) выполнены. Отображение ψ_1 в действительности описывает диссипативную систему. В соответствующем трехмерном потоке (сечении Пуанкаре которого представлено графиком отображения ψ_1) существует бифуркация от предельного цикла к инвариантному тору T^2 при $\varepsilon = 1$.

Композиция отображений ψ нелинейна, так как, во-первых, ψ_1 содержит логарифмический член, а ψ_2 — квадратичный член:

$$Y_{k+1} = Y_k + X_k^2.$$

Действие²⁾ отображения ψ_2 состоит в установлении существующей в ψ_1 связи между θ («углом») и ρ («действием»). Пока угол и действие не связаны, аттракторами преобразования могут быть только окружности. Кроме того, в композиции $\psi = \psi_1 \circ \psi_2$ нелинейные эффекты усиливаются с увеличением ε .

На рис. VII. 11, г показано, как действует преобразование ψ на плоскости (X, Y) . Выбрав точку P_0 с координатами (X_0, Y_0) за начальную, мы вычисляем ее образ P'_1 под действием преобразования ψ_1 , затем образ точки P'_1 под действием преобразования ψ_2 и получаем точку P_2 . Потом повторяем процедуру, действуя преобразованием ψ на точку P_2 . Итерации могут продолжаться до бесконечности. После того как затухают переходные эффекты (на практике, чтобы исключить их, достаточно отбросить первые 100 итераций), точки оказываются на аттракторе.

VII. 3.2. Поведение модели в зависимости от ε

Пусть $\theta_0 = 2$ (в радианах). Так как это значение близко к $2\pi/3$, при каждой итерации $\theta_{k+1} = \theta_k + \theta_0$ мы совершаем примерно треть полного оборота (рис. VII. 12, а). Следовательно,

¹⁾ Можно провести параллель между итерированным отображением ψ_1 при $\varepsilon > 1$ и фазовой диаграммой генератора Ван дер Поля. В обоих случаях растяжение, действующее вблизи начала координат, вдали от начала сменяется сжатием, а поэтому аттрактор существует на конечном расстоянии от начала координат (см. разд. II. 1.1).

²⁾ Заметим, что в отличие от ψ_1 отображение ψ_2 сохраняет площади (его якобиан равен единице).

через каждые три итерации мы оказываемся близко от исходной точки (на рис. VII.12, а представлены последовательные

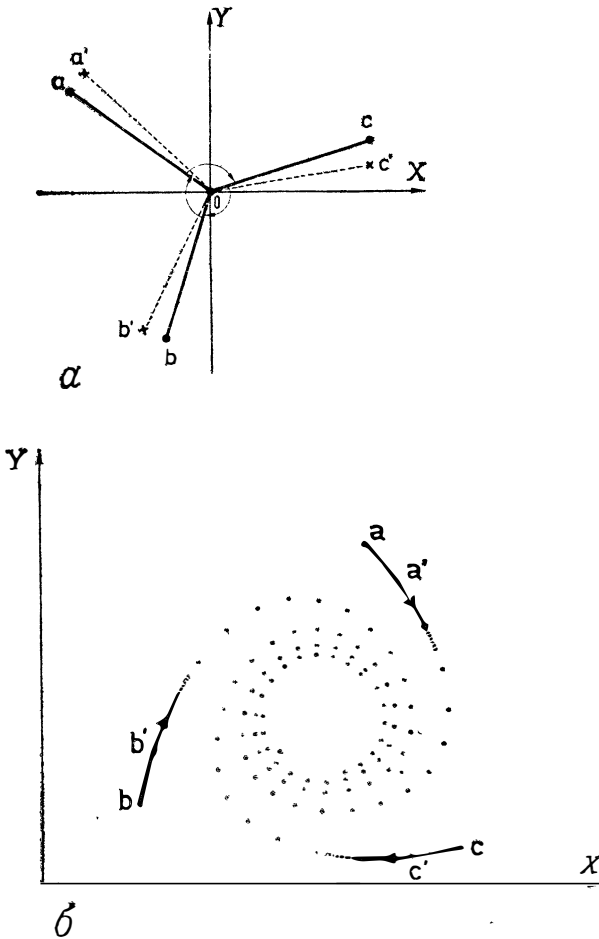


Рис. VII.12. Последовательные итерации отображения ψ . a — псевдосимметрия с осью третьего порядка. Точки b , c , a' , b' и c' — последовательные интерированные образы начальной точки a ; b — притяжение к окружности. Как и на рис. VII.12, а, точки b , c , a' , b' и c' ... получаются из точки a при итерации отображения ψ (при $\varepsilon = 1,01$).

итерации a , b , c , a' , b' , c'). Мы уже говорили о том, что при $\varepsilon = 1$ начало координат является единственной притягивающей неподвижной точкой отображения. При $\varepsilon = 1_+$ аттрактор имеет форму окружности с центром в начале координат (рис. VII. 12, б).

С увеличением ε радиус окружности быстро возрастает. Нелинейные эффекты деформируют окружность и приводят к возникновению симметрии с осью 3-го порядка замкнутой петли, которая является аттрактором (петля остается топологически эквивалентной¹⁾ окружности). Обращает на себя внимание наличие трех зон (рис. VII. 13), плотность которых намного выше

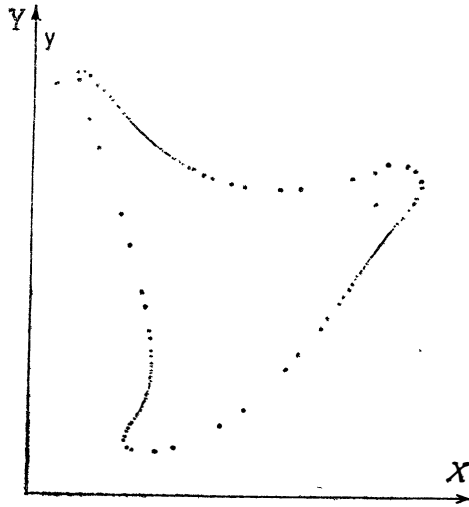


Рис. VII.13. Асимптотическое поведение отображения ϕ при $\varepsilon = 1,27$. Оставаясь гомеоморфной окружностью, кривая приобретает форму, обладающую псевдосимметрией третьего порядка, и вариация плотности обнаруживает первые признаки синхронизации с $f_1/f_2 = 3$.

плотности остальной части аттрактора. Это предвестник затягивания частоты третьего порядка, но пока режим носит отчетливо выраженный квазипериодический характер с двумя несоизмеримыми частотами. Аттрактором служит тор T^2 , сечением Пуанкаре которого является замкнутая кривая, представленная на рис. VII. 13. Продолжая увеличивать ε , т. е. делая нелинейные эффекты все более важными, мы видим, как то, что было тенденцией к затягиванию частоты, становится подлинным затягиванием частоты 3-го порядка. Иначе говоря, график состоит только из трех точек и орбита имеет период, равный трем. С физической точки зрения это означает, что две частоты f_1 и f_2 исследуемого квазипериодического режима становятся соизмеримыми: $f_1/f_2 = 3$.

¹⁾ Математически более точным было бы выражение: петля «гомеоморфна окружности».

Затягивание частоты существует в диапазоне $1,28 < \varepsilon < 1,3953$. Сразу же над порогом $\varepsilon_c = 1,3953$ вновь появляется замкнутая петля. Она сильно напоминает ту петлю, которая возникает при значениях ε , несколько меньших 1,28. Но новая петля не гомеоморфна окружности. Подобное исследование (на рис. VII. 14 мы имеем $\varepsilon = 1,48$) открывает качественно новое явление: на петле появляются «зазубрины»¹⁾ (таких выступов даже бесконечно много), отчего она обретает определенную

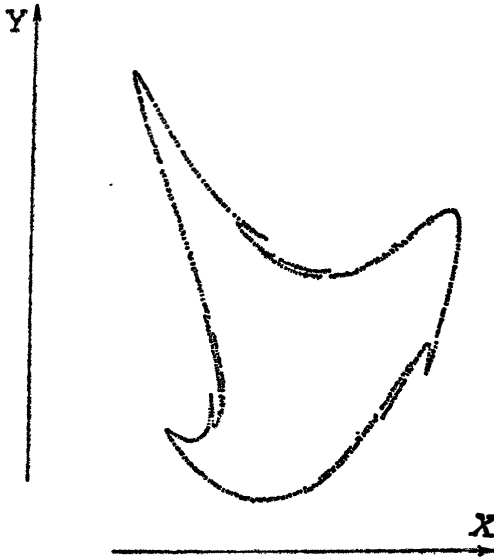


Рис. VII. 14. Асимптотическое поведение отображения ψ при $\varepsilon = 1,48$. Так как режим хаотический, кривая более не гомеоморфна окружности: ее можно рассматривать как сечение Пуанкаре странного аттрактора. Обратите внимание на выступы, свидетельствующие о том, что образуются складки.

«толщину»²⁾. Размерность петли более не равна единице (т. е. размерности прямой или окружности), а становится фрактальной (близкой к единице, но несколько большей ее). Следовательно, график представляет собой сечение странного аттрактора и упорядочение точек на петле теперь несколько хаотично. Иначе говоря, тор T^2 разрушен; выше $\varepsilon = \varepsilon_c$ аттрактор обретает

¹⁾ Такая структура, едва различимая непосредственно над порогом ε_c , при увеличении ε становится все более заметной.

²⁾ Второе сечение, перпендикулярное петле, обнаружило бы, что петля состоит из бесконечно большого числа листов со структурой канторовского множества.

некоторую толщину в форме мелких складок («морщин»), покрывающих поверхность тора.

Вернемся к преобразованию ψ , чтобы проиллюстрировать происхождение хаотического режима. Рассмотрим две точки P_1 и P_2 , первоначально близкие в сечении Пуанкаре (рис. VII. 15),

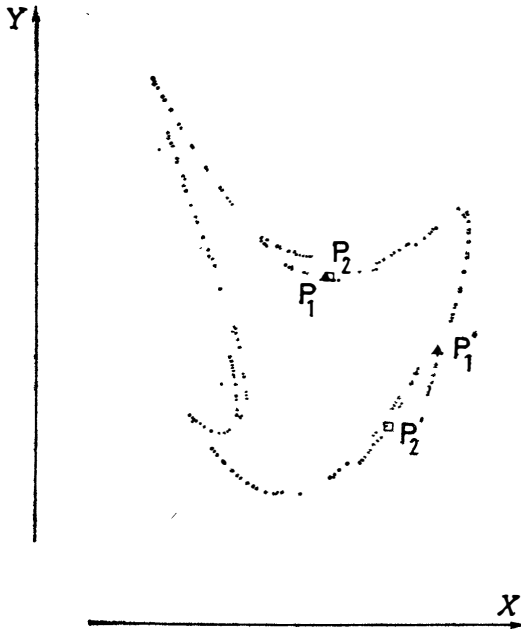


Рис. VII. 15. Чувствительная зависимость отображения ψ от начальных условий. P_1 и P_2 — две первоначально очень близкие точки на аттракторе. Хотя точки P_1 и P_2 почти неотличимы друг от друга, после сорока итераций их образы P'_1 и P'_2 разделены уже вполне отчетливо.

т. е. две соседние траектории трехмерного потока. При выполнении итераций (т. е. со временем) образы $P'_1 = \psi^k(P_1)$ и $P'_2 = \psi^k(P_2)$ все более удаляются друг от друга до тех пор, пока не окажутся на противоположных сторонах петли. Расхождение итераций свидетельствует о расхождении соседних траекторий (ЧЗНУ), характерном для странных аттракторов. После расхождения на максимальное расстояние образы P'_1 и P'_2 начинают сближаться вследствие образования складок. Сойдясь на минимальное расстояние, они снова расходятся и т. д. С такой комбинацией растяжения и складывания — необходимым и

достаточным условием существования хаоса¹⁾ — мы уже встречались неоднократно.

На рис. VII. 16 показаны различные маршруты, ведущие к хаосу в модели Керри — Йорке. Заметим, что в области $\epsilon > \epsilon_c$, соответствующей хаотическому режиму, встречаются «окна» периодических режимов. При соответствующих значениях ϵ аттрактор перестает быть странным и становится периодическим.

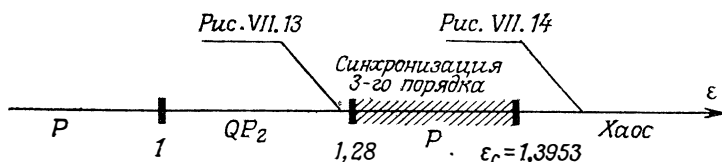


Рис. VII. 16. Последовательность этапов перехода к хаосу в модели Керри — Йорка.

С аналогичной ситуацией мы встретимся также при рассмотрении маршрута, ведущего к хаосу через удвоение периода (см. гл. VIII).

VII. 3.3. Некоторые экспериментальные примеры

Некоторые экспериментальные наблюдения возникновения хаоса из квазипериодического режима могут быть ошибочно приняты за результаты численных экспериментов, выполненных на основе модели Керри — Йорке, — настолько сильно сходство.

Приводимые ниже иллюстративные примеры заимствованы главным образом из неустойчивости РБ в ограниченной геометрии, приводящей в этой области к необычайно разнообразным режимам²⁾. Управляющий параметр Ra/Ra_c уже был определен. Но знание Ra/Ra_c бесполезно, если мы, кроме того, не зададим конвективную структуру³⁾ в ячейке. Поэтому мы, не вдаваясь в подробности относительно самой структуры, обозначим

¹⁾ Как будет показано в дальнейшем, это двойное явление вводит «перемешивание» — одну из существенных характерных особенностей хаоса.

²⁾ Поддержание одной и той же конвективной структуры на протяжении всего маршрута, ведущего к хаосу, — ограничение, выполнить которое экспериментально необычайно трудно. Малейшее возмущение конвективной структуры изменяет динамическое поведение. Нередко неполнота наблюдений объясняется отнюдь не тем, что экспериментатор не пожелал выйти за пределы исследуемого диапазона параметров, а обусловлена тем, что конвективная структура теряет устойчивость.

³⁾ Описание конвективной структуры должно включать в себя число конвективных валов, их симметрию, направление вращения, дефекты структуры и т. д.

каждую структуру символически буквой *A*, *B* или *C*. Мы можем воспользоваться этим случаем, чтобы продемонстрировать разнообразие проявлений неустойчивости РБ в жидкостях при больших числах Прандтля. Если в качестве жидкости выбрано силиконовое масло, то его прозрачность в сочетании со значительными тепловыми вариациями показателя преломления наводит на мысль об использовании локальных или полулокальных оптических измерений. Это позволяет постоянно следить за типом и качеством конвективной структуры. В частности, оптические методы позволяют локализовать (и тем самым исследовать в отдельности) осцилляторы тепловой конвекции, ответственные за наблюдаемые режимы.

На рис. VII. 17, *a* вы видите спектр, снятый на структуре *A* при $Ra/Ra_c = 569$ и свидетельствующий о квазипериодичности с двумя частотами, для которых $f_1/f_2 = 2,91$. Два осциллятора тепловой конвекции I и II были идентифицированы и локализованы. Иначе говоря, если мы нацеливаем оптическое устройство на малую окрестность осциллятора I, то при этом детектируется в основном ¹⁾ частота f_1 (аналогичное утверждение справедливо относительно осциллятора II и частоты f_2). Ясно, что эта информация представляет необычайную ценность для понимания процессов, происходящих в жидкости, и однозначной идентификации главных частот спектра.

Возможность разделения вкладов двух осцилляторов также облегчает построение сечений Пуанкаре. На одном детекторе мы собираем вклад главным образом осциллятора I, который обозначим через ΔT . Одновременно мы с помощью аналогового устройства (*RC*-цепи) дифференцируем ΔT и получаем $\Delta \dot{T}$. Сигналы ΔT и $\Delta \dot{T}$ поступают на входы двух каналов графопостроителя (см. рис. V. 8 и разд. VI. 3.3). Можно построить фазовые траектории на плоскости ($\Delta T, \Delta \dot{T}$). На рис. VII. 17, *b* показано, насколько сложными могут быть эти траектории. Если теперь мы с помощью второго детектора регистрируем второй сигнал, поступающий главным образом от осциллятора II, то эту информацию можно использовать для стробоскопирования ²⁾ траектории при фиксированной фазе колебаний осциллятора II. Результат этой процедуры показан на рис. VII. 17, *в*. Сравнивая рис. VII. 17, *b* и *в*, мы можем оценить упрощения, простирающиеся

¹⁾ Разумеется, осцилляторы I и II связаны между собой гидродинамикой. В колебаниях осциллятора I мы обнаруживаем примесь частоты f_2 , характерной для осциллятора II, и наоборот (см. подпись к рис. V. 8).

²⁾ На практике, вместо того чтобы постоянно держать перо графопостроителя в нижнем положении (именно так был построен график на рис. VII. 17, *б*), мы опускаем перо только в те моменты, когда осциллятор II находится в определенной фазе.

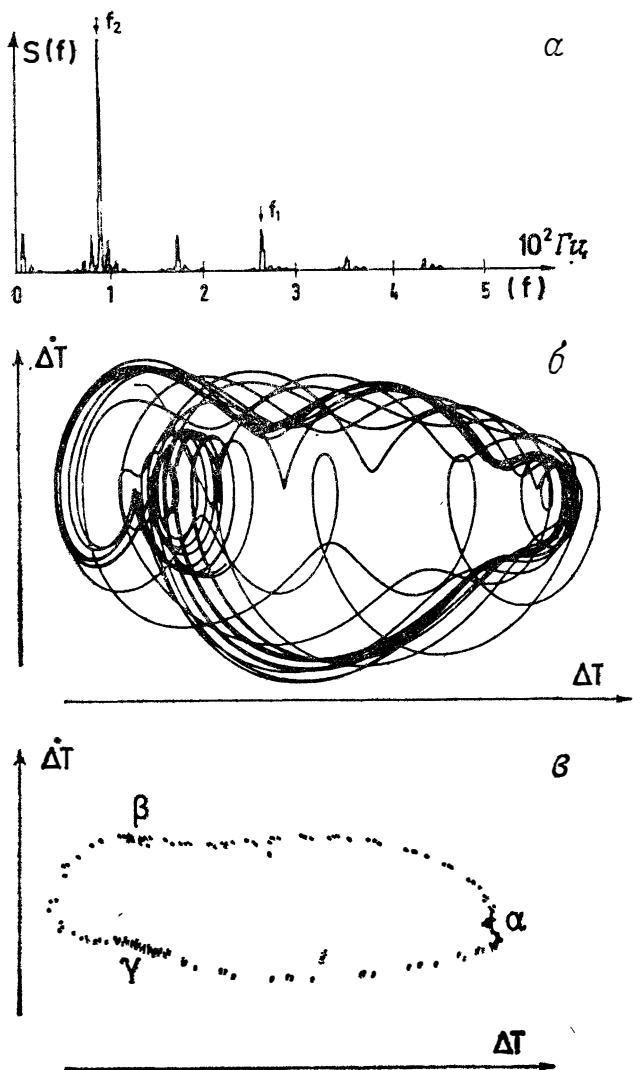


Рис. VII.17. Конвекция Рэлея—Бенара. Структура А, $Ra/Ra_c = 569$. a —комбинационный спектр мощности градиента температуры. Две характеристические частоты обозначены через f_1 и f_2 , остальные пики соответствуют их линейным комбинациям $m_1 f_1 + m_2 f_2$ с $f_1/f_2 = 2,91$; b —фазовые траектории на плоскости $[\Delta T, \dot{\Delta T}]$, где ΔT —градиент температуры и $\dot{\Delta T}$ —производная от него по времени; c —сечение Пуанкаре траекторий на рис. b , полученное с помощью стробоскопирования сигналов на частоте одного из двух осцилляторов тепловой конвекции. Зоны наибольшей плотности, обозначенные буквами α , β и γ ,—предвестники синхронизации с $f_1/f_2 = 3$.

Из работы М. Дюбуа, П. Берже, В. Крокетта.

от метода сечений Пуанкаре. Расшифровать запутанные траектории на рис. VII. 17, б невозможно, тогда как на рис. VII. 17, в мы легко узнаем сечение Пуанкаре тора. Теперь мы уже в состоянии различить некую более тонкую деталь: большую плот-

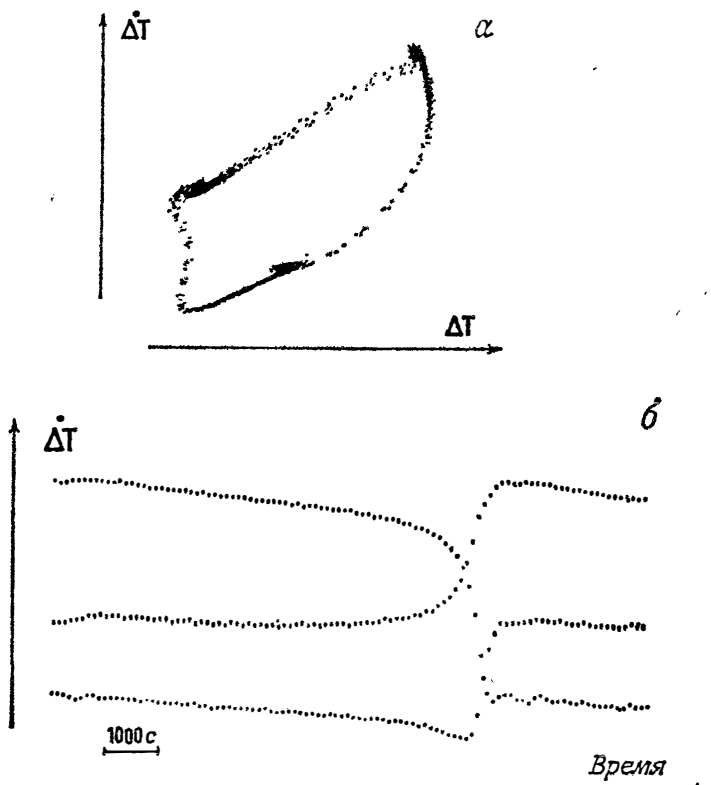


Рис. VII. 18. Конвекция Рэлея — Бенара. Структура А, $Ra/Ra_c = 590$. а — сечение Пуанкаре: отношение частот f_1/f_2 равно 2,99. Обратите внимание на сильнейшее различие в плотности точек между тремя наиболее темными областями и остальной частью кривой; б — величина ΔT как функция времени: после продолжительного периода (обратите внимание на масштаб времени) медленной эволюции происходит резкий поворот на $2\pi/3$. Из работы М. Дюбуа, П. Берже и В. Крокетта.

ность точек на участках α , β и γ . Это связано с тем, что, поскольку отношение f_1/f_2 равно 2,91, рассматриваемый режим близок к простому натягиванию частоты 3-го порядка. Осцилляторы I и II интенсивно взаимодействуют, и поэтому тенденция к синхронизации с отношением частот, близким к 3, сохраняется в течение какого-то времени.

При бoльших значениях управляющего параметра Ra/Ra_c эта замечательная тенденция к временной¹⁾ синхронизации еще больше усиливается. При $Ra/Ra_c = 590$ отношение f_1/f_2 становится равным 2,99, что очень близко к 3. На рис. VII. 18, а мы

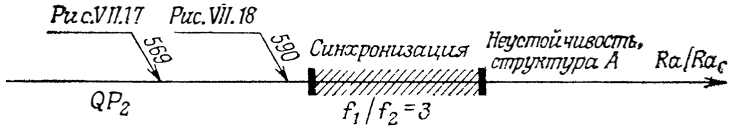


Рис. VII. 19. Последовательность смены динамических режимов структуры А в зависимости от значений параметра Ra/Ra_c .

видим, что три зоны содержат почти все точки сечения Пуанкаре. Еще отчетливее это видно на рис. VII, 18, б, где величина (ΔT) представлена как функция времени. Заметим, что относительная фаза изменяется сначала очень медленно²⁾, а затем

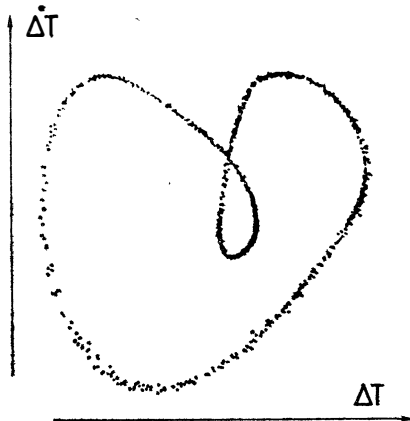


Рис. VII. 20. Конвекция Рэлея — Бенара. Структура В, $Ra/Ra_c \approx 520$. Сечение Пуанкаре проведено для квазипериодического режима с двумя частотами. Самопересечение кривой обусловлено наличием в сигнале гармоники второго порядка с большой амплитудой.

скачком на $2\pi/3$. Чередование периодов медленного и быстрого изменения соответствует чередованию синхронизации и десинхронизации. Это чередование строго периодически с периодом $1/(f_1 - 3f_2)$, где $f_1 - 3f_2$ — отклонение от синхронизации. При дальнейшем увеличении параметра Ra/Ra_c мы достигаем значе-

¹⁾ Обратите внимание на поразительное сходство с затягиванием частоты в численной модели из разд. VII.3.2.

²⁾ В отсутствие связи между осцилляторами относительная фаза изменялась бы линейно со временем.

ния $Ra/Ra_c = 593$, соответствующего точной и постоянной синхронизации с $f_1/f_2 = 3$, при которой сечение Пуанкаре состоит только из трех точек. Различные описанные выше стадии представлены на рис. VII. 19.

Что произойдет, если мы увеличим параметр Ra/Ra_c выше значений, соответствующих синхронизации при $f_1/f_2 = 3$? Как показывают эксперименты, исчезнет структура *A*. Динамический режим, который придет ей на смену, не имеет никакого отноше-

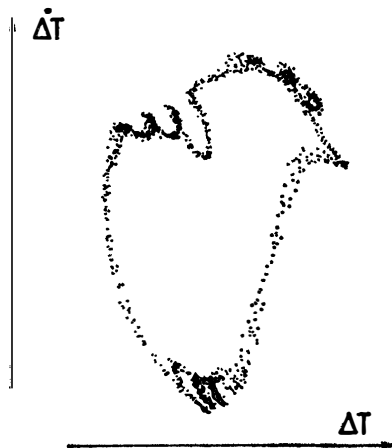


Рис. VII. 21. Конвекция Рэлея — Бенара. Структура *B*, $Ra/Ra_c \approx 563$. На сечении Пуанкаре видны складки, характерные для странного аттрактора.

ния к маршруту, который мы рассматривали до сих пор. Необходимо рассмотреть другую структуру, которая, хотя и соответствует более слабой связи между осцилляторами, выходит на хаотический режим. Пусть *B* — эта новая структура. При $Ra/Ra_c = 520$ структура *B* находится в квазипериодическом режиме, о чем свидетельствует сечение Пуанкаре¹⁾ на рис. VII. 20. При дальнейшем увеличении управляющего параметра Ra/Ra_c сечение Пуанкаре приобретает характерную структуру, изображенную на рис. VII. 21, где $Ra/Ra_c = 563$. Появление морщин и складок на поверхности аттрактора типично для двойной операции, приводящей к возникновению странного аттрактора²⁾: растяжения и складывания.

¹⁾ Заметим, что кривая на рис. VII. 20 не замкнута, а с самопересечением. Это обусловлено только наличием второй гармоники в сигнале, использованном для построения сечения Пуанкаре.

²⁾ Так как $Ra/Ra_c = 563$ соответствует появлению мелких складок на поверхности тора, хаос выражен еще недостаточно отчетливо. В спектре мощности видны только пики квазипериодического режима, а уровень шума остается низким.

Сходство между таким аттрактором и аттрактором в модели Керри — Йорке заметно на рис. VII. 22, где представлены сече-



a



б

Рис. VII. 22. Сравнение двух сечений Пуанкаре. *a* — сечение Пуанкаре для модели Керри — Йорке при $\varepsilon = 1,465$; *б* — сечение Пуанкаре для термоконвекции в условиях эксперимента, представленного на рис. VII. 21. Бросается в глаза разительное сходство сечений Пуанкаре *a* и *б*.

ния Пуанкаре этих двух аттракторов. В обоих случаях мелкие складки на поверхности аттрактора появляются в окрестности

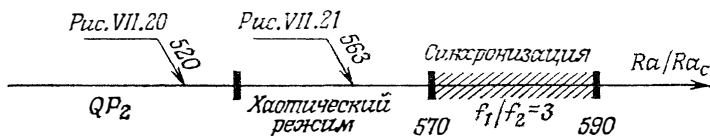


Рис. VII. 23. Последовательность смены динамических режимов структуры *B* в зависимости от значений параметра Ra/Ra_c . Возможность появления «окон» периодичности в хаотической области не исключается, хотя имеющиеся в настоящее время экспериментальные методы не позволяют обнаружить их.

синхронизации 3-го порядка. Но на структуре *B* появление мелких складок непосредственно предшествует синхронизации, которая наступает при $570 < (Ra/Ra_c) < 590$ (рис VII. 23), в

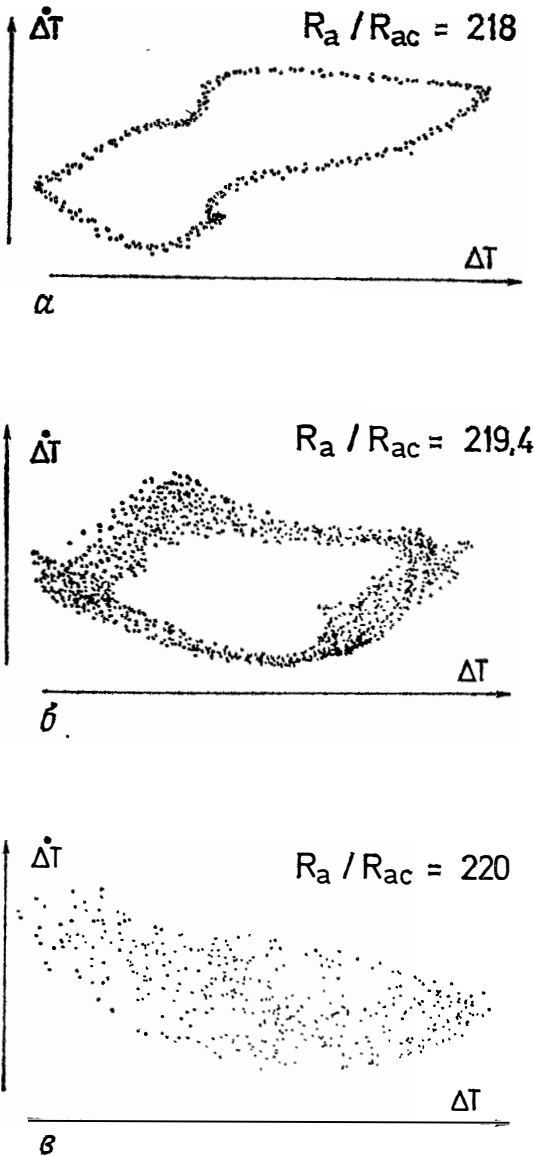


Рис. VII. 24. Конвекция Рэлея — Бенара. Структура S . Сечения Пуанкаре при трех очень близких значениях параметра R_a/R_{ac} . a — квазипериодический режим; b и v — хаотические режимы. Усиливающийся разброс точек может отражать существование странного аттрактора с размерностью большей 3 (или очень близкой к 3).

Из работы М. Дюбуа и П. Берже.

отличие от модели Керри — Йорке, в которой мелкая «рябь» на поверхности аттрактора появляется после синхронизации.

Наконец упомянем о переходе к хаосу через периодичность, для которого в отличие от рассмотренных нами переходов сечение Пуанкаре не дает информации. Измерения, производимые на структуре третьего типа, обозначенной нами через C , получены в экспериментах с силиконовым маслом при малом, а не большом, как в предыдущих примерах, числе Прандтля ($Pr=38$ вместо $Pr=130$). На рис. VII. 24, *a* видно, что при $Ra/Ra_c=218$ структура C находится в квазипериодическом режиме. При чрезвычайно малом увеличении управляющего параметра Ra/Ra_c (менее чем на 1 %) мы наблюдаем не появление мелких складок в сечении, а разброс точек (рис. VII. 24, *б*). Когда Ra/Ra_c достигает значения 220 (рис. VII. 24, *в*), в сечении существует только облако точек. В этом случае нет оснований для заключения о том, что наблюдаемый хаотический режим соответствует странному аттрактору с размерностью большей 3 (или несколько меньшей 3), а не тору с высокой размерностью (недетерминированный хаос). Вопрос о размерности аттрактора может быть решен только с помощью метода, описанного в разд. VI. 4.4.

VII. 4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ ОТ ТОРА T^2

Как было показано, простая математическая модель позволяет воспроизводить переход от тора T^2 непосредственно к странному аттрактору без изменения числа степеней свободы¹). Ниже мы попытаемся рассмотреть это явление в более широких рамках.

Отображение первого возвращения для потока на T^2 может быть описано с помощью непрерывного обратимого отображения окружности T^1 на себя. Отображение $f(\theta)$ (график которого представлен на рис. VII. 25) задается монотонно возрастающей (или убывающей) функцией с двумя фиктивными разрывами, обусловленными только тем, что идентифицированы точки 0 и 1 на окружности. Такое отображение окружности на себя характеризуется числом вращений²). Если число вращений рационально, то говорят, что имеет место затягивание частоты, или синхронизация. Затягивание частоты в общем случае происходит в некотором открытом интервале значений управляющих параметров. Иррациональное число вращений соответствует квазипериодическому режиму. Чтобы проанализировать эту фено-

¹) Число степеней свободы здесь понимается в том смысле, в каком оно определено в примечании 3 на с. 185.

²) См. приложение В.

менологию, желательно ввести двухпараметрическое отображение $f(\theta)$. Например, Арнольд предлагает отображение

$$f : \theta \rightarrow \theta + \theta_0 + \frac{\alpha}{2\pi} \sin(2\pi\theta).$$

Двумя управляющими параметрами являются α и θ_0 . Каждой паре значений этих параметров, представленной точкой на плоскости с прямоугольными системами координат, соответствует некоторое точное значение числа вращений. Плоскость плотно покрыта множеством непересекающихся полос конечной ширины (в основном очень узких), таких, что внутри каждой по-

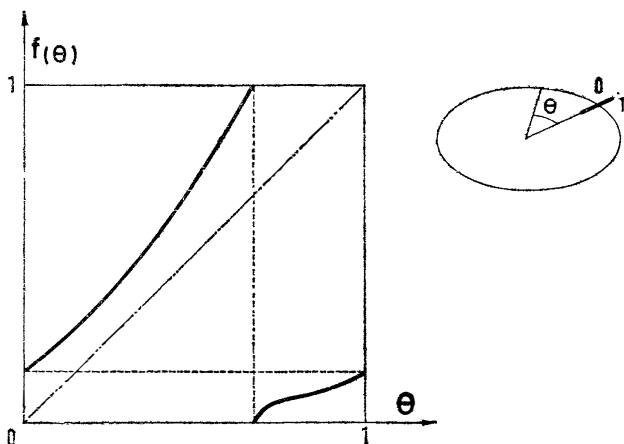


Рис. VII. 25. Представление отображения окружности на себя в прямоугольной системе координат. Разрывы на графике функции $f(\theta)$ фиктивные и исчезают при отождествлении 0 и 1 по осям абсцисс и ординат.

лосы число вращений постоянно и рационально. Эти полосы, называемые полосами синхронизации, плотны на плоскости (подобно тому, как рациональные числа всюду плотны на интервале). Затягивание частоты с отношением p_3/q_3 , заключенным между p_1/q_1 и p_2/q_2 (например, отношение $3/5$ заключено между $1/2$ и $2/3$), происходит в полосе (p_3/q_3) , расположенной между полосами (p_1/q_1) и (p_2/q_2) , где p_i, q_i — положительные целые числа. Структура множества полос синхронизации (по крайней мере локально) напоминает структуру канторовского множества: между любой парой полос синхронизации мы находим другие полосы, между которыми в свою очередь располагаются другие полосы синхронизации и т. д.

Нетрудно представить, как деформировать $f_{\theta_0, \alpha}(\theta)$, чтобы касательная к кривой $\theta_0(\alpha)$ на плоскости управляющих пара-

метров стала горизонтальной (рис. VII.26 и VII.27). Образование складки на кривой $\theta_0(\alpha)$ означает потерю устойчивости отображения f , которой можно объяснить переход $T^2 \rightarrow$ стран-

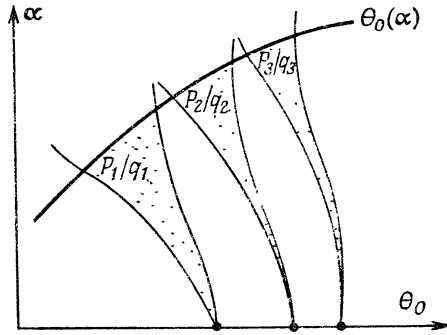


Рис. VII. 26. Полосы синхронизации с рациональным числом вращений для отображения $\theta \rightarrow f_{\theta_0, \alpha}(\theta)$ с двумя параметрами θ_0 и α . Внутри каждой полосы число вращений постоянно и рационально. Полосы плотны на плоскости параметра и не пересекаются. Кривая $\theta_0(\alpha)$ отделяет в пространстве параметров область, в которой функция f обратима, от области, в которой функция f необратима (см. рис. VII. 27).

ный аттрактор, о котором идет речь в этой главе. В связи с описанной выше конструкцией возникают два вопроса.

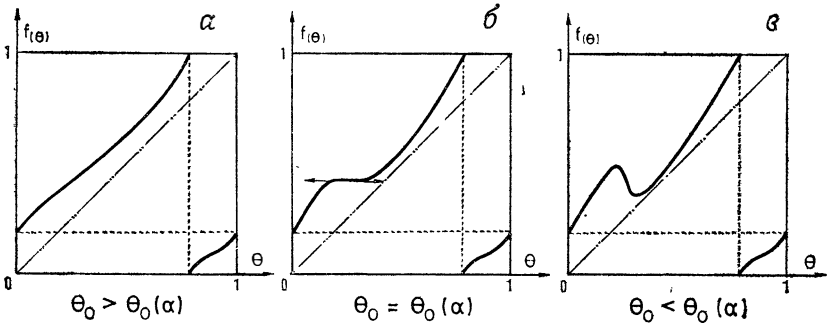


Рис. VII. 27. Деформация графика функции $f_{\theta_0, \alpha}(\theta)$. Когда параметр θ_0 пересекает на плоскости параметров кривую $\theta_0(\alpha)$, касательная к графику функции $f(\theta)$ принимает горизонтальное положение (см. рис. б). На рис. а отображение обратимо, на рис. в оно необратимо.

- 1) Что происходит при итерации $\theta \rightarrow f_{\theta_0, \alpha}(\theta)$ вблизи значения параметра $\theta_0(\alpha)$?
- 2) Как может произойти потеря устойчивости отображения первого возвращения плоскости на себя?

Попытаемся ответить на эти вопросы по очереди.

1) Если ограничиться областью $\theta_0 > \theta_0(\alpha)$ (где сохраняется обратимость отображения), то в ней доминирует явление синхронизации в окрестности значения $\theta_0(\alpha)$. Действительно, мы знаем, что в указанной окрестности существует затягивание частоты и при итерации отображения $\theta \rightarrow f(\theta)$ две первоначально близкие точки сближаются. Можно представить себе, что кривая $f(\theta)$ содержит почти горизонтальное плато, т. е. значение θ_0 несколько больше $\theta_0(\alpha)$.

Простые вычисления показывают, что расстояние между двумя близкими точками при каждой итерации умножается на $|df/d\theta|$. Следовательно, если существуют значения θ , при которых производная очень мала, то отображение сильно сближит итерации соседних точек, что, как уже говорилось, характерно для синхронизации. Кроме того, Херман показал, что вероятность иррационального числа вращений (т. е. отсутствия синхронизации) при случайном выборе точки на кривой $\theta_0(\alpha)$ равна нулю. Можно представить себе (хотя доказать это трудно), что при приближении к $\theta_0(\alpha)$ синхронизация становится доминирующим явлением, хотя при некоторых значениях (θ_0, α) синхронизация отсутствует, так как при непрерывном переходе от одного рационального значения к другому число вращений должно принимать иррациональное значение¹⁾.

В той области пространства параметров, где отображение f необратимо, мы наблюдаем очень сложную картину, которая понята еще не до конца. Тем не менее можно утверждать, что по крайней мере в части области сохраняется синхронизация. Это объясняется тем, что синхронизация с рациональным числом вращений p/q зависит только от существования решения уравнения $f^{(q)}(\theta) = \theta$. Мы почти всегда можем по непрерывности продолжить это решение за $\theta_0(\alpha)$, хотя для разрешимости уравнения не требуется обратимости ни f , ни $f^{(q)}$. Но в отличие от случая, когда отображение f обратимо, полосы синхронизации имеют сложную внутреннюю структуру.

Как возникает синхронизация (например, с периодом 3) при отображении $\theta \rightarrow f(\theta)$ окружности на себя? Синхронизация обусловлена наличием трех неподвижных точек отображения $f^{(3)}$ (третьей итерации отображения f). График отображения $f^{(3)}$ колеблется относительно диагонали, с которой он пересекается 6 раз: три точки пересечения образуют устойчивый цикл

¹⁾ Одновременное исчезновение квазипериодических орбит было предметом весьма подробного исследования, отчасти в связи с разрушением магнитных поверхностей, удерживающих горячую плазму в тороидальных конфигурациях.

с периодом 3, а три остальные точки пересечения образуют неустойчивый цикл с периодом 3 (рис. VII. 28). Деформация графика отображения $f^{(3)}$, соответствующего затягиванию частоты, выглядит как простой сдвиг по вертикали, возникающий в результате прибавления постоянного угла θ^* к $f^{(3)}(\theta)$. Пусть θ_1, θ_2 и θ_3 — точки устойчивого цикла, $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ — точки неустойчивого цикла. Когда цикл возникает, график отображения $f^{(3)}(\theta)$ (штри-

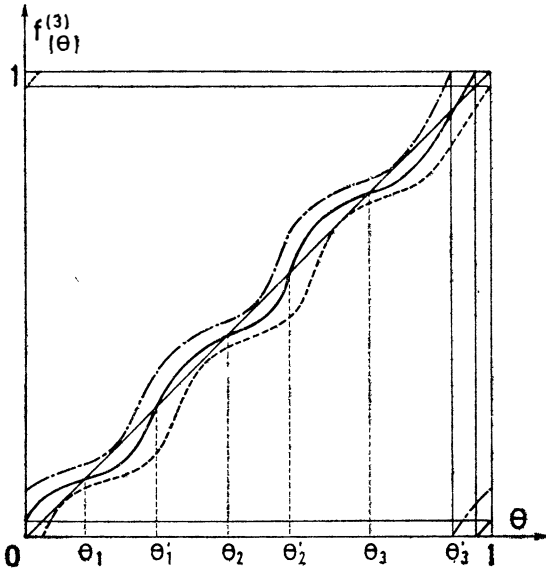


Рис. VII. 28. Деформация графика функции $f^{(3)}(\theta)$ в окне синхронизации с периодом 3. Двумя штриховыми линиями обозначены кривые (каждая из которых касается диагонали), указывающие верхний и нижний пределы окна синхронизации с периодом 3. Стандартной ситуации внутри окна соответствует сплошная линия, на которой расположены три устойчивые неподвижные точки ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) и три неустойчивые неподвижные точки ($\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$)

ховая кривая на рис. VII. 28) касается диагонали. Следовательно, два цикла совпадают и $\theta_1 = \theta'_1, \theta_2 = \theta'_2, \theta_3 = \theta'_3$. Когда цикл исчезает, т. е. когда значение θ^* достаточно велико (верхняя кривая на рис. VII. 28), происходит такое же слияние устойчивого и неустойчивого циклов, но на этот раз при $\theta_1 = \theta'_3, \theta_2 = \theta'_1$ и $\theta_3 = \theta'_2$ (за циклами и точками при трансляции графика отображения $f^{(3)}$ мы следим по непрерывности). Таким образом мы получаем геометрическое объяснение процесса возникновения и исчезновения цикла по обе стороны интервала синхронизации.

Посмотрим теперь, что происходит, когда отображение $f(\theta)$ имеет экстремум¹⁾ и, следовательно, перестает быть обратимым. Используя формулы дифференцирования композиции функций, находим, что если производная от f обращается в нуль при одном значении θ , то производная от $f^{(q)}$ обращается в нуль по крайней мере при q различных значениях θ , если только она

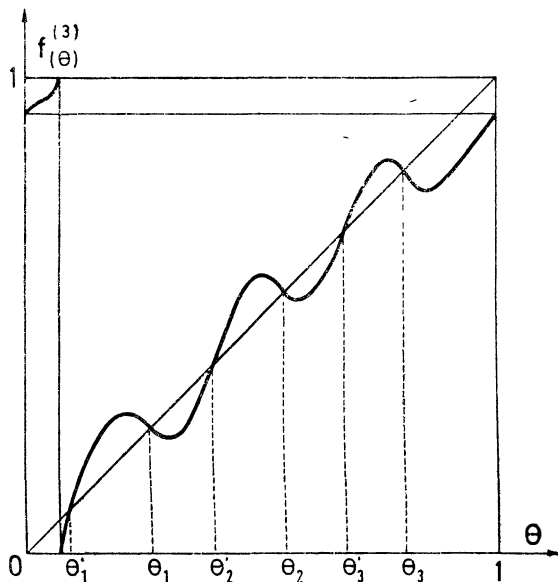


Рис. VII. 29. Пример неустойчивого отображения $f(\theta)$ с двумя неустойчивыми 3-циклами. В отличие от обратимого случая, которому на рис. VII. 28 соответствует сплошная линия, цикл $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ не обязательно устойчив, так как производная от $f^{(3)}(\theta)$ по θ в любой из трех точек может быть меньше -1 .

не обращается тождественно в нуль на всем периоде. В нашем примере 3-цикла $f^{(3)}$ имеет нулевую производную (в точке локального максимума или минимума) между каждой парой неподвижных точек (рис. VII. 29). Как показывает исследование кривой на рис. VII. 29, в отличие от случая, когда отображение f (и, следовательно, $f^{(3)}$) обратимо, мы не можем более определить априори устойчивость точки θ_i , например, как неподвижной точки отображения $f^{(3)}$. Но по-прежнему выполняется

¹⁾ Если (как мы будем предполагать) f отображает на себя интервал $[0, 1]$, т. е. значения $f(\theta)$ пробегает один раз единичный интервал, когда θ пробегает один раз единичный интервал, то f имеет четное число экстремумов (в рассматриваемом случае два экстремума).

неравенство $(df^{(3)}/d\theta)|_{\theta'_1} > 1$, а поэтому точка θ'_1 неустойчива и по-прежнему $(df^{(3)}/d\theta)|_{\theta_1} < 1$. Но, кроме того, справедливо неравенство $(df^{(3)}/d\theta)|_{\theta_1} < 0$ и точка θ_1 неустойчива, если $(df^{(3)}/d\theta)|_{\theta_1} < -1$, а в этом случае неустойчивы оба 3-цикла отображения f . Таким образом, внутри полосы синхронизации 3-цикла на плоскости параметров (θ_0, α) мы обнаруживаем две области в зависимости от того, больше или меньше единицы величина $|df^{(3)}/d\theta|_{\theta_1}$, т. е. в зависимости от того, существуют ли один или два неустойчивых 3-цикла. Область неустойчивости обоих цик-

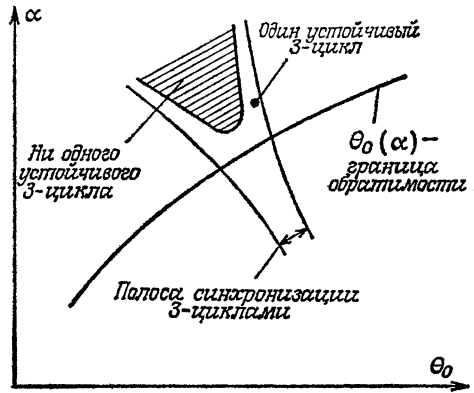


Рис. VII. 30. Полоса синхронизации с периодом 3 на плоскости параметров (θ_0, α) . В области, где отображение f необратимо, а именно выше и левее кривой $\theta_0(\alpha)$, внутри полосы синхронизации существует подобласть, в которой оба 3-цикла неустойчивы. В остальной части полосы синхронизации один из 3-циклов устойчив. В заштрихованной области могут наблюдаться хаотические режимы.

лов образует своего рода полосу с полосой синхронизации внутри (рис. VII. 30). Аналогичным образом подразделяется на две части каждая полоса синхронизации с числом вращений p/q . Чем больше знаменатель q , тем ближе граница между двумя частями к кривой $\theta_0(\alpha)$.

Внутри области неустойчивости обоих циклов мы встречаем большое разнообразие режимов. Как видно на рис. VII. 29, у отображения $f^{(3)}(\theta)$ имеются локально параболические области, аналогичные тем, которые рассматриваются в гл. VIII. Они могут порождать хаос с помощью механизма каскада удвоений периода, который анализируется в гл. VIII. Существуют и другие более сложные возможности, поскольку $f^{(3)}$ не отображает интервал (θ'_1, θ_1) на себя. В частности, если образ

максимума функции $f^{(3)}$, расположенного между θ'_1 и θ_1 , попадает в интервал $[\theta'_2, \theta_2]$ и если образ минимума, расположенного между θ_1 и θ'_2 , попадает в интервал $[0, \theta'_1]$, то итерация отображения $f^{(3)}$ сопровождается явлением, которое не встречается ни в каскаде удвоений периода, ни в обратимых отображениях окружности на себя: суперпозицией случайной диффузии на окружности и хаотического режима.

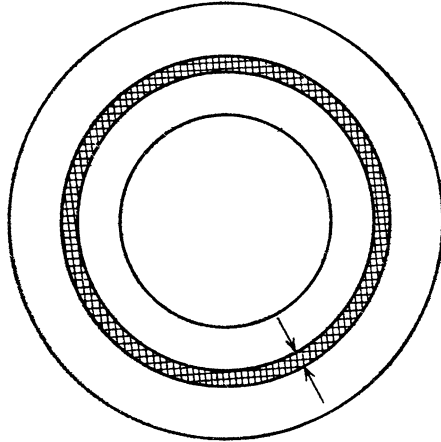


Рис. VII. 31. Обратимое отображение плоскости. При сжатии кольца отображение порождает аттрактор, имеющий форму окружности. Заштриховано точечное множество — образ внешнего кольца.

2) Как мы уже знаем, некоторые отображения плоскости имеют «круговой» аттрактор, т. е. аттрактор в форме простой замкнутой кривой, которую можно рассматривать как сечение Пуанкаре притягивающего тора трехмерного потока. На окружности отображение есть непрерывное и обратимое преобразование, характеризуемое некоторым числом вращений. Поэтому интерес к переходам, связанным с потерей обратимости отображений окружности на себя, может показаться парадоксальным. Однако мы покажем, что потеря обратимости *на окружности* все же совместима с обратимостью исходного отображения на плоскости. Следовательно, такая ситуация может возникнуть и для данной динамической системы с варьируемыми параметрами.

Обоснование этого утверждения состоит в следующем. Из работ Пуанкаре нам известно, что круговой аттрактор для отображения на плоскости возникает из диссипативного преобразования кольца в себя (рис. VII. 31). Это преобразование само

можно рассматривать как результат радиального сжатия с последующим поворотом относительно центра кольца. В этом простом случае аттрактор представляет собой окружность нулевой толщины, возникающей от кумулятивного влияния радиального сжатия на конечную толщину кольца. Представим теперь, что кольцо одновременно подвергается складыванию (рис. VII. 32).

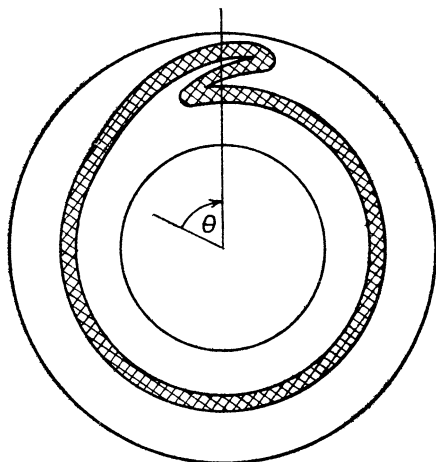


Рис. VII. 32. Необратимое отображение плоскости. Как и на рис. VII. 31, заштриховано точечное множество — образ внешнего кольца. Один и тот же угол θ для образа может быть получен из трех различных значений угла в кольце. Это означает, что по углам отображение становится необратимым.

Если свести такое преобразование к его действию на угол, то мы увидим, что складывание разрушает необратимость, поскольку порождает максимум и минимум у функции $f(\theta)$, определяющей действие преобразования на углы. Разумеется, само отображение кольца на себя остается обратимым: точки, образы которых находятся под одним и тем же углом, различаются своим радиальным положением (рис. VII. 32).

Другой способ убедиться в этом состоит в следующем. В «стандартном» случае, т. е. до потери обратимости, образ кольца при итерированном отображении есть замкнутая кривая конечной длины, которая может быть параметризована с помощью угла. Увеличение длины этой замкнутой кривой при складывании¹⁾ обладает тем свойством, что в момент потери обратимости (т. е. в каждой точке рассмотренной выше кривой

¹⁾ Напомним, что сжатие площадей не означает сжатия всех длин (см. разд. I. 4.2).

$\theta_0(\alpha)$ в пространстве параметров) длина кривой становится бесконечной и это исключает параметризацию с помощью угла.

Мы видели, что на кривой $\theta_0(\alpha)$ вероятность обнаружить квазипериодический режим априори очень мала. Тем не менее мы обсуждаем этот случай, когда итерация описывает кривую бесконечной длины. Если окружность имеет конечную длину и число вращений иррационально, то различные возможные значения угла посещаются с равной вероятностью. Но в момент потери необратимости (и в отсутствие синхронизации) посещаемые точки образуют по значениям угла канторовское множество.

Практическая ценность такого результата ограничена тем, что при приближении к кривой $\theta_0(\alpha)$ доминирующим становится периодический режим. По-видимому, этим объясняется, что в экспериментах хаос часто появляется через синхронизацию. Такая ситуация встречается далеко за порогом потери обратимости, который мы только что обсуждали.

ЛИТЕРАТУРА

- Bérge P., Dubois M.*, Physics Letters, 93A, p. 365 (1983).
Bérge P., Physica Scripta, T1, p. 71 (1982).
Curry J. M., Communications in Mathematical Physics, 60, p. 193 (1978).
Curry J., Yorke J. A., — In: The structure of attractors in dynamical systems, Springer Notes in Mathematics, 668, p. 48, Springer-Verlag, (1977).
Dubois M., — In: Symmetries and Broken Symmetries in Condensed Matter Physics, ed. N. Boccara, I. D. S. E. T. Paris (1981).
Dubois M., Bérge P., Croquette V., Compt. Rend. de l'Académie des Sciences de Paris, C293, p. 409 (1981).
Dubois M., Bérge P., Le Journal de Physique, 42, p. 167 (1981).
Gollub J. P., Benson S. V., Journal of Fluid Mechanics, 100, p. 449 (1980).
Gollub J. P., Benson S. V., — In: Pattern Formation, ed. H. Haken, Springer-Verlag, p. 74 (1979).
Gollub J. P., Brunner T. O., Danly B. G., Science, 200, p. 48 (1978).
Grebogi C., Ott E., Yorke J. A., Physical Review Letters, 51, p. 339 (1983).
Herman M., Publications mathématiques de l'I. H. E. S., 49, p. 5 (1979).
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Изд. 3-е, перераб. — М.: Наука, 1986.
Newhouse S., Ruelle D., Takens F., Communications in Mathematical Physics, 64, p. 35 (1978).
Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E., Physica, 8D, p. 303 (1983).
Ruelle D., Takens F., Communications in Mathematical Physics, 20, p. 167 (1971). [Имеется перевод: Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности. — В сб.: Странные аттракторы. — М.: Мир, 1981, с. 117.]

ГЛАВА VIII

СУБГАРМОНИЧЕСКИЙ КАСКАД

VIII. 1. ВВЕДЕНИЕ

VIII. 1.1. Субгармоническая неустойчивость

В гл. II мы уже обсуждали субгармоническую неустойчивость в связи с параметрическим осциллятором. Мы увидели механизм, посредством которого возбуждение, даже если амплитуда его мала, приводит к срыву устойчивости движения маятника при условии, что внешняя сила воздействует на маятник в моменты времени, разделенные целым числом полупериодов (см. разд. II.2.4). Возбуждение наиболее эффективно, когда оно происходит каждые полпериода: частота колебаний равна половине частоты (период равен удвоенному периоду) возбуждения, о чем и говорит прилагательное «субгармоническая» в названии неустойчивости. Этот результат следует расширить и обобщить.

Поскольку процесс субгармонической неустойчивости интересен для нас сам по себе, мы рассмотрим субгармоническую неустойчивость общего периодического решения безотносительно к параметрическому осциллятору. Заметим, что по аналогичным причинам решение с частотой $f/2$ (или периодом $2T$) может в свою очередь претерпевать субгармоническую неустойчивость, что приводит к половинной частоте $f/4$ (периоду $4T$) и т. д. Иначе говоря, соответствующая вариация управляющего параметра должна позволить нам наблюдать целую серию субгармонических неустойчивостей, что порождает решения с периодами $2T$, $4T$, $8T$ и т. д. Мы называем это явление каскадом субгармонических бифуркаций или *субгармоническим каскадом*, каждый этап которого сопровождается уменьшением частоты вдвое, т. е. удвоением периода.

VIII. 1.2. Механизм удвоения периода

Теория Флоке объясняет процесс, при котором происходит удвоение периода. На рис. VIII.1 показаны основные ингредиенты, необходимые для исследования линейной устойчивости периодического решения: сечение Пуанкаре траектории (рис. VIII.1, *a*) и пересечение единичной окружности на комплексной плоскости собственным значением матрицы Флоке

(рис. VIII. 1, б). Посмотрим, что происходит, когда собственное значение приближается к критическому значению -1 и, наконец, достигает его. Пусть x — собственный вектор, соответствующий этому собственному значению, и S — плоскость сечения, со-

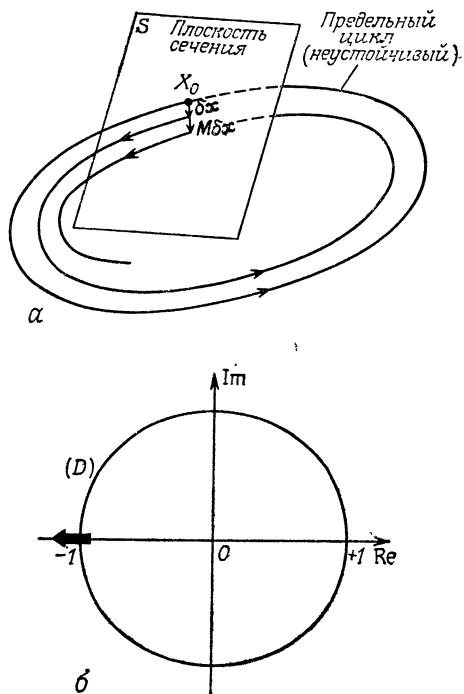


Рис. VIII.1. Устойчивость предельного цикла в линейном приближении. a — используя сечение Пуанкаре предельного цикла, мы можем определить эволюцию начального возмущения δx под действием потока. В зависимости от того, становится ли Mb_x больше (как на рисунке) или меньше, чем δx , предельный цикл неустойчив или устойчив; b — нейтральная устойчивость возникает в том случае, когда собственное значение матрицы M (которая называется матрицей Флоке) пересекает на комплексной плоскости единичную окружность D . В случае субгармонической неустойчивости собственное значение пересекает окружность D в точке -1 .

держая x . Не уменьшая общности, мы можем рассматривать только эволюцию последовательных точек пересечения фазовой траектории с плоскостью S (рис. VIII. 2). До бифуркации любое смещение начальной амплитуды x_0 убывает с каждым периодом, так как значение x умножается на отрицательный коэффициент, абсолютная величина которого меньше единицы (рис. VIII. 2, a). Следовательно, предельный цикл с периодом T линейно устой-

чив. Его сечение Пуанкаре вырождается в точку, выбранную на рис. VIII.2 за начало координат. Но, когда собственное значение становится равным -1 , ситуация изменяется. Расстояние от начала координат не убывает со временем: при каждом пересечении отклонение от начала изменяет свой знак, но модуль его остается неизменным. Через каждые два пересечения (обо-

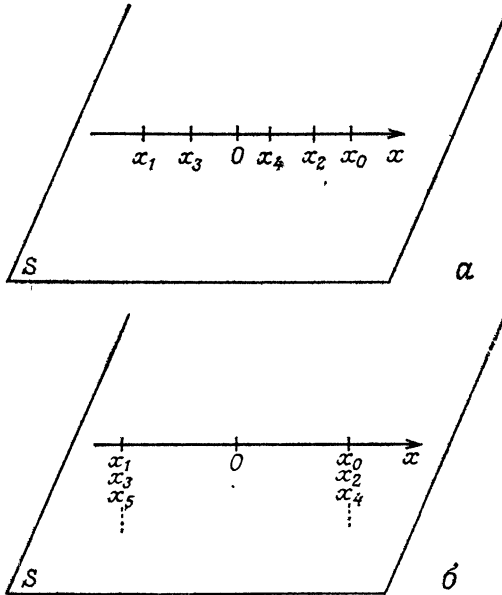


Рис. VIII.2. Последовательность итераций потока. Показано, что происходит вдоль собственного вектора x , соответствующего тому собственному значению матрицы Флоке, которое пересекает единичную окружность в точке -1 . a — до бифуркации предельный цикл устойчив. Итерации начальной точки x_0 сходятся к нулю — сечению Пуанкаре предельного цикла. Так как собственное значение отрицательно, итерации попеременно оказываются то по одну, то по другую сторону от нуля; $б$ — в точке бифуркации итерации перестают сходиться. Модуль любого начального смещения x_0 сохраняется, тогда как знак смещения изменяется при каждой итерации.

значенные на рис. VIII.2, б через x_2, x_4 и т. д.) мы возвращаемся в исходную точку x_0 . Мы видим, что возникает новая периодическая орбита с периодом, вдвое большим периода исходной орбиты. Новая орбита зависит от выбора начального смещения x_0 . Кроме того, оставаясь в рамках линейной теории Флоке, мы ничего не можем сказать об устойчивости новой орбиты. Правдоподобно, однако, что непосредственно за точкой бифуркации возникает устойчивый предельный цикл с периодом $2T$ (если бифуркация суперкритическая).

VIII. 1.3. Отображение первого возвращения

В предыдущем разделе снова показана центральная роль критического собственного значения матрицы Флоке и связанного с ней собственного вектора. Учитывая это, мы сосредоточим внимание на сечении Пуанкаре и на этом собственном векторе и оставим в стороне остальную часть траектории, имеющую второстепенное значение. Это приводит нас к исследованию эволюции начального условия через дискретные интервалы времени $T, 2T, 4T, \dots$, т. е. к анализу свойств итерированного преобразования точки на оси. Поведение потока можно выяснить с помощью одномерного отображения вида

$$x_{k+1} = f(x_k),$$

связывающего координату x_{k+1} точки в момент времени $(k+1)T$ с координатой x_k предыдущей точки в момент времени kT и являющегося *отображением первого возвращения* исходного потока. Мы снова видим эвристическое преимущество сведения анализа нелинейного потока к математически гораздо более простой задаче¹⁾.

Еще в 1918 г. исследования того, что мы называем итерациями отображений интервала на себя, были предприняты Жюлиа и Фату. Но в то время эта проблема казалась весьма экзотической и ее практическое значение не было оценено по достоинству. Важность работ Жюлиа и Фату была осознана лишь в свете современных достижений теории динамических систем. С 1975 г. число работ по этому кругу вопросов необычайно возросло, и дать их исчерпывающий обзор не представляется возможным. Именно поэтому мы ограничимся изложением наиболее существенных результатов, имеющих непосредственное отношение к возникновению хаоса. Напомним, что одномерный подход, как было показано в гл. IV, обоснован, когда мы имеем дело с сильно диссипативной системой. Действительно, в силу крайне быстрого сокращения площадей, обусловленного сильной диссипацией, существенную роль играет лишь одна степень свободы. Таким образом, вся полезная информация сосредоточена в одном выделенном направлении в фазовом пространстве, и мы можем спокойно пренебречь остальными. В этой главе мы излагаем анализ субгармонического каскада и свойства квадратичных отображений интервала на себя.

¹⁾ Отображение первого возвращения широко применяется и не ограничивается отображением интервала на себя, которое мы рассматриваем в этой главе. Другие примеры применения отображения первого возвращения приведены в гл. IX в связи с анализом перемежаемости.

VIII. 2. СУБГАРМОНИЧЕСКИЙ КАСКАД

VIII. 2.1. Квадратичное отображение интервала

Рассмотрим непрерывную функцию

$$f(x) = 4\mu x(1-x), \quad x \in [0, 1].$$

При $0 < \mu \leq 1$ эта функция описывает отображение первого возвращения

$$x_{k+1} = 4\mu x_k(1-x_k) = f(x_k), \quad (\text{VIII.1})$$

которое каждой точке x_k из единичного интервала ставит в соответствие другую точку x_{k+1} единичного интервала, называемую итерацией точки x_k . Условие $\mu \leq 1$ необходимо (для того чтобы гарантировать принадлежность $f(x_k)$, как и x_k , единичному интервалу $[0, 1]$). В действительности ни точная форма¹⁾ функции, ни ограничение значений x единичным интервалом не ограничивают общность излагаемых ниже соображений. Но, для того чтобы прийти к определенным выводам, мы должны выбрать вполне определенную функцию; приведенная выше форма функции и нормировка интервала на единичный интервал $[0, 1]$ выбраны нами из соображений удобства.

Прежде всего построим график функции f при каком-нибудь заданном значении μ , например при $\mu = 0,7$ (рис. VIII. 3). Нетрудно видеть, что f обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 1$ и что эта парабола достигает максимума при $x = 0,5$. Методом, описанным в гл. IV, исходя из произвольного начального условия x_0 , исследуем с помощью этого графика, как ведут себя итерации отображения. Как видно из рис. VIII.3, итерации сходятся к точке с абсциссой x^* (точке пересечения графика функции f с диагональю) независимо от абсциссы x_0 начальной точки, за исключением двух случаев: концов интервала 0 и 1. Выбирая $x_0 = 0$ или $x_0 = 1$, мы получаем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... Но при любом положительном значении x_0 , сколь угодно близком к нулю, но отличном от нуля, итерации сходятся к x^* . Можно сказать, что любое смещение из начала координат, сколь бы малым оно

¹⁾ Функция f должна удовлетворять на интервале $[0, 1]$ только следующим условиям: а) быть непрерывной и дифференцируемой; б) иметь один экстремум; в) иметь отрицательную производную Шварца. Второе условие требует, чтобы f была нелинейной функцией. Ни одно из описываемых в этой главе явлений не может породиться линейной функцией и вообще функцией, монотонной на интервале. Третье условие, которое мы не используем в явном виде, можно рассматривать как требование вогнутости графика функции f . Оно обеспечивает суперкритичность всех бифуркаций отображения $x \rightarrow f(x)$. Квадратичное отображение удовлетворяет этому последнему условию.

ни было, усиливается итерациями и образы начальной точки удаляются от начала координат. Следовательно, начало координат — неустойчивая неподвижная точка. Наоборот, неподвижная точка с абсциссой x^* , к которой сходятся итерации, если начальная точка принадлежит открытому интервалу $(0, 1)$, устойчива, т. е. является аттрактором. Чтобы обозначить как-то ситуацию, когда на каждом этапе итерации мы находимся в одной

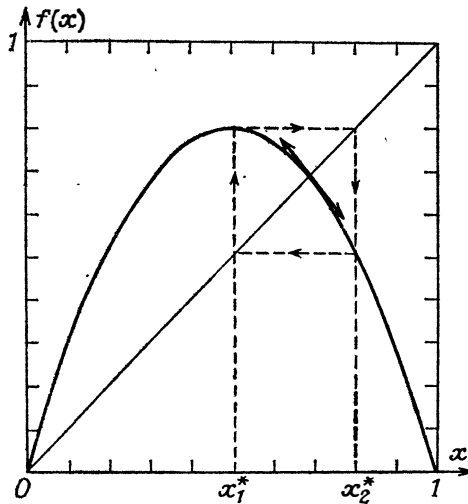


Рис. VIII.3. График отображения $f(x)$ при $\mu = 0,7$. Начало координат — неустойчивая неподвижная точка. Точка x^* пересечения графика отображения f с диагональю — устойчивая неподвижная точка, к которой сходятся итерации всех начальных условий в открытом интервале $(0, 1)$.

и той же неподвижной точке, условимся говорить, что перед нами аттрактор с периодом 1 (за единицу времени неявно принят один шаг итерации). Можно было бы также сказать, что за единицу времени мы выбрали период предельного цикла, сечением Пуанкаре которого является данная неподвижная точка.

VIII. 2.2. Каскад удвоений периода

Ситуация, изображенная на рис. VIII.3, не единственно возможная. Действительно, кривая $f(x)$ зависит от значения параметра μ , который, как мы видели, задает максимальное значение функции f . Варьируя μ , мы изменяем кривую, что может иметь решающие последствия для всей серии итераций. Чтобы убедиться в этом, обратимся к рис. VIII.4, для которого $\mu = 0,8$. Неподвижная точка x^* неустойчива, так как тангенс угла на-

клона касательной к кривой в этой точке по абсолютной величине больше единицы. Как показывает графическое построение, у отображения имеются две такие особые точки с абсциссами x_1^* и x_2^* , что

$$x_2^* = f(x_1^*) \text{ и } x_1^* = f(x_2^*).$$

Иначе говоря, итерации попеременно совпадают то с одной из них, то с другой. Начав с любой из этих точек, мы через две

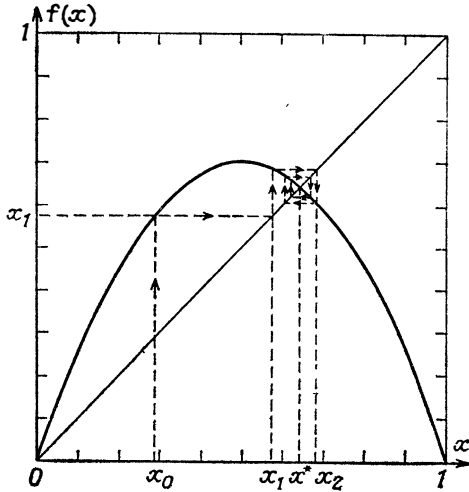


Рис. VIII. 4. График отображения $f(x)$ при $\mu = 0,8$. При этом значении параметра μ обе неподвижные точки отображения f неустойчивы. Нетрудно видеть, что асимптотическим пределом итераций при любом начальном условии из открытого интервала $(0, 1)$ служит пара точек x_1^* и x_2^* , с которыми попеременно совпадают образы начальной точки.

итерации вернемся в нее. Такие две точки образуют аттрактор с периодом 2, который называется также 2-циклом. Так как

$$\begin{aligned} x_2^* &= f(x_1^*) = f(f(x_2^*)), \\ x_1^* &= f(x_2^*) = f(f(x_1^*)), \end{aligned}$$

то эти две точки (не являющиеся неподвижными точками отображения f) являются неподвижными точками функции

$$g(x) = f(f(x)) = f^2(x),$$

в чем мы легко убеждаемся, взглянув на рис. VIII. 5. Более подробное исследование показывает, что существует непрерывный переход от первой ситуации (рис. VIII. 3) ко второй

(рис. VIII. 4) при увеличении значения параметра μ . Сам переход происходит при единственном значении $\mu_1 = 0,75$. В этот момент устойчивая неподвижная точка отображения f становится неустойчивой и соответственно появляются две устойчивые неподвижные точки отображения f^2 . Аттрактор с периодом 2 возникает вместо аттрактора с периодом 1: происходит удвоение периода, как предсказывает теория Флоке при пересечении единичной окружности в точке -1 .

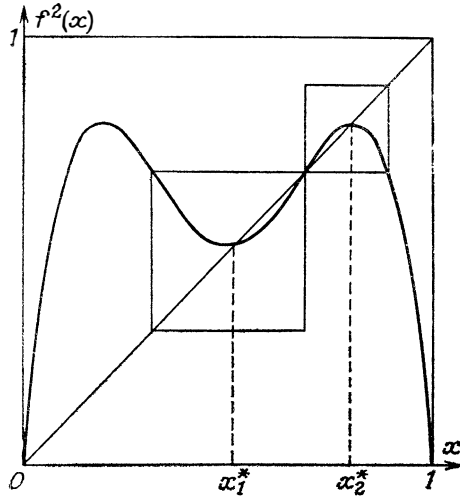


Рис. VIII. 5. График отображения $g(x) = f(f(x)) = f^2(x)$ при $\mu = 0,8$. Это отображение имеет четыре неподвижные точки, две из которых (x_1^* и x_2^*) устойчивы. Отображение $f(x)$ переводит точку x_1^* в x_2^* , а x_2^* — в x_1^* .

Два квадрата, построенные вокруг неподвижных точек, призваны подчеркнуть структурное сходство этого графика с графиком отображения $f(x)$ на рис. VIII. 3.

Что происходит при дальнейшем увеличении параметра μ ? Кривые f и f^2 постепенно деформируются так, что неподвижные точки отображения f^2 также в конце концов теряют устойчивость. Следующее простое графическое построение позволяет предсказать и понять последовательность событий. Рассмотрим квадрат вокруг неподвижной точки с абсциссой x_2^* на рис. VIII. 5¹⁾). Внутри квадрата мы видим локально параболическую кривую с устойчивой неподвижной точкой, т. е. обнаруживаем ситуацию, полностью аналогичную той, которая избира-

¹⁾ Те же рассуждения применимы и к неподвижной точке x_1^* , которая также является экстремумом, но минимумом.

жена на рис. VIII. 3. Следовательно, когда при деформации кривой эта неподвижная точка становится неустойчивой, мы можем ожидать такого же явления, как прежде: замены неподвижной точки отображения g двумя точками, которые являются неподвижными точками функции

$$h(x) = g(g(x)) = f^4(x).$$

Такой же вывод применим к двум неподвижным точкам отображения g с абсциссами x_1^* и x_2^* , которые одновременно теряют устойчивость при

$$\mu_2 = \frac{1 + \sqrt{6}}{4} = 0,86237 \dots$$

Выше этого значения отображение g не имеет устойчивых неподвижных точек. Но, как видно из рис. VIII. 6, отображение h

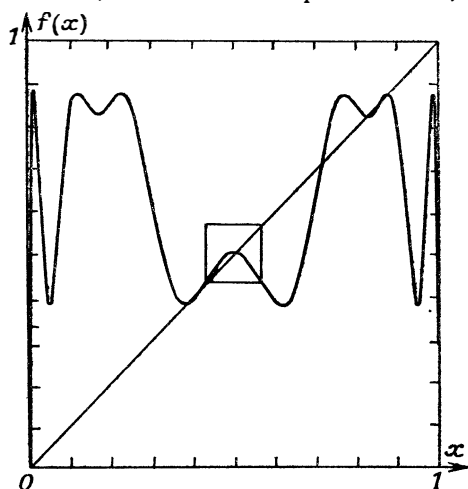


Рис. VIII. 6. График отображения $h(x) = g(g(x)) = f^4(x)$ при $\mu = 0,875$. Это отображение имеет восемь неподвижных точек, четыре из них устойчивы. Квадрат, построенный вокруг одной из них, показывает, что мы снова воспроизводим ситуацию, изображенную на рис. VIII. 3. Это позволяет сказать, что в действительности речь идет о бесконечном повторении одного и того же процесса.

имеет при $\mu = 0,875$ четыре неподвижные точки. Они образуют аттрактор, состоящий из четырех последовательно посещаемых точек отображения, представленного на рис. VIII. 1. С какой бы из этих четырех точек мы ни начали, для возвращения в нее нам потребуются четыре последовательные итерации: период аттрактора равен 4 (4-цикл). Таким образом, снова произошло удвоение периода при субгармонической бифуркации.

При дальнейшем увеличении параметра μ в отображении (VIII. 1) то же явление повторяется до бесконечности: мы получаем каскад бифуркаций, каждая из которых сопровождается удвоением периода, связанным с субгармонической неустойчивостью. Квадрат, очерченный вокруг одной из неподвижных точек функции $h(x)$ на рис. VIII.6, подчеркивает сохранение структуры, представленной на рис. VIII.3. Мы замечаем аналогию между структурами во всех масштабах, о которой уже упоминали в связи с канторовским множеством. При уменьшении параметра μ мы наблюдаем последовательность аттракторов с периодами 2^l , или 2^l -циклов, где l — целое число от 0 (при $\mu \leq 0,75$) до бесконечности. Значения μ , при которых происходит этот каскад бифуркаций, обладают замечательным свойством: они образуют возрастающую последовательность, быстро сходящуюся к точке накопления μ_∞ . Значение μ_∞ может быть найдено численно:

$$\mu_\infty = 0,892486418 \dots$$

В табл. VIII. 1 приведены значения μ , соответствующие нескольким первым бифуркациям субгармонического каскада.

Таблица VIII. 1

Период аттрактора	Значение μ_l в точке бифуркации
$1 \cdot 2^0 = 1$	
$1 \cdot 2^1 = 2$	$\mu_1 = 0,75$
$1 \cdot 2^2 = 4$	$\mu_2 = 0,86237 \dots$
$1 \cdot 2^3 = 8$	$\mu_3 = 0,88602 \dots$
$1 \cdot 2^4 = 16$	$\mu_4 = 0,89218 \dots$
$1 \cdot 2^5 = 32$	$\mu_5 = 0,8924728 \dots$
	$\mu_6 = 0,8924835 \dots$
.....
$1 \cdot 2^\infty = \infty$	$\mu_\infty = 0,892486418 \dots$

VIII. 2.3. Законы подобия

Внимательное изучение чисел, представленных в табл. VIII. 1, показывает, что их сходимость к точке накопления подчиняется простому и строгому закону: разность значений μ , соответ-

ствующих двум последовательным бифуркациям, уменьшается каждый раз соответственно почти постоянному коэффициенту:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i} = \delta.$$

Этот фундаментальный результат, важность которого трудно переоценить, означает, что коэффициент уменьшения масштаба

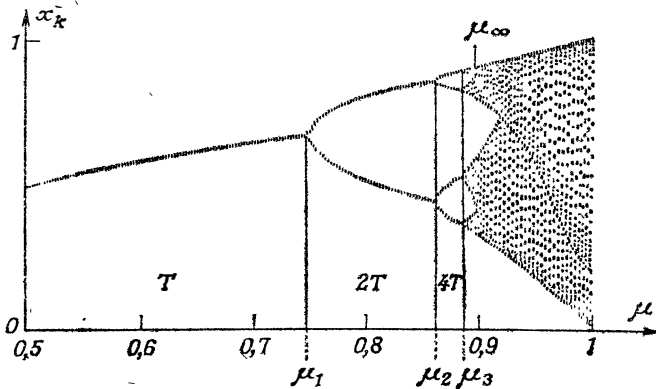


Рис. VIII. 7. Асимптотические итерации отображения $f(x)$ при $\mu \in [0,5; 1]$. На графике показана зависимость от параметра μ значения (или значений) x_k , т.е. k -й итерации отображения $f(x)$ при $k \rightarrow \infty$. Слева направо мы видим: 1) последовательность периодических аттракторов, разделенных субгармоническими бифуркациями, каждая из которых приводит к удвоению числа точек на аттракторе и периода. Каскад субгармонических бифуркаций имеет точку накопления при $\mu_\infty = 0,89248\dots$; 2) за μ_∞ область, в которой аperiodические и периодические аттракторы чередуются.

Некоторые периодические аттракторы существуют на достаточно большом интервале значений параметра μ и поэтому видны как более светлые зоны. В частности, отчетливо виден аттрактор с периодом 3 при $\mu \approx 0,96$.

δ является универсальной константой, не зависящей от деталей рассматриваемой функции f :

$$\delta = 4,6692016091029909 \dots$$

Вторая универсальная константа ¹⁾

$$\alpha = 2,50290787509589284 \dots$$

задает коэффициент уменьшения масштабов расстояний на оси x . Более точно можно утверждать, что, итерируя любое отображение, обладающее *квадратичным экстремумом*, мы всегда обнаружим один и тот же каскад удвоений периодов

¹⁾ Как и в случае μ_∞ , значения констант δ и α определяются численно.

с одними и теми же законами подобия, которые приведены выше. Мы располагаем весьма общей теорией, которая апостериори обосновывает наш выбор конкретной функции f . Замечательно, что эта теория позволяет делать количественные предсказания, если выполнено простое качественное условие¹⁾.

График, на котором значения x в точках на каждом аттракторе представлены в зависимости от μ , позволяет наглядно представить описанный выше субгармонический каскад (рис. VIII.7). Первые бифуркации с удвоением числа точек аттрактора видны особенно ясно. Но бифуркации быстро снижаются и становятся неразличимыми, если значения μ откладывать в линейном масштабе. На рис. VIII.7 аттрактор с периодом 8 — последний, который различим без труда. Эти результаты следуют из приведенного выше закона сходимости — геометрической прогрессии: значения, приведенные в табл. VIII. I, показывают, почему аттракторы с периодами 16, 32 и т. д. в масштабе, выбранном на рис. VIII.7, практически неразличимы.

VIII.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАОСА

VIII.3.1. За субгармоническим каскадом

При возрастании параметра μ и его стремлении к μ_∞ появляются аттракторы со все большим периодом 2^i . Следовательно, для того чтобы установить соответствующую периодичность, за явлением требуется наблюдать в течение все более продолжительного (бесконечно большого в точке μ_∞) времени. Но что происходит за точкой накопления?

Численное моделирование показывает, что за критическим значением $\mu = 0,892\,486\,418 \dots$ начинается очень сложная область. На графике, представленном на рис. VIII.7, появляются различные зоны, одни более светлые, другие более темные. Подробный анализ обнаруживает, что в закритической области периодические аттракторы чередуются с режимом, который теперь принято называть хаосом.

В последнем случае итерации функции f порождают последовательность таких значений x , которые а) не повторяются, б) зависят от начального условия x_0 . В частности, две первоначально близкие точки порождают две последовательности итераций (или траекторий), которые расходятся друг от друга. Для столь простого преобразования такое поведение весьма не-

¹⁾ Хорошо известна аналогия между упомянутой теорией и теорией фазовых переходов, в частности процедурой и терминологией теории ренорм-группы. Константы δ и α можно рассматривать как «критические показатели» в точке накопления.

ожиданно! Мы попытаемся понять, чем оно вызвано, и рассмотрим два существенных свойства этого отображения, ключевых для понимания хаотического поведения.

VIII. 3.2. Два фундаментальных свойства отображения

Чтобы понять эти два свойства — необходимость преобразования и его ЧЗНУ, — достаточно рассмотреть график функции

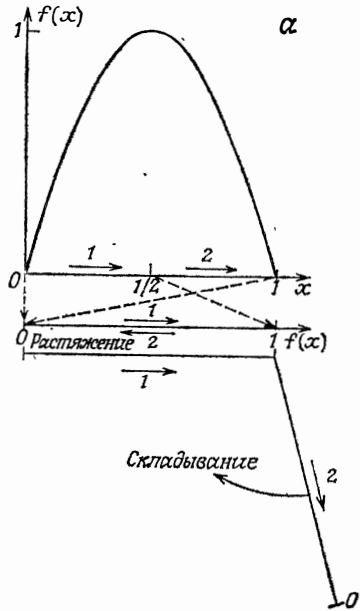
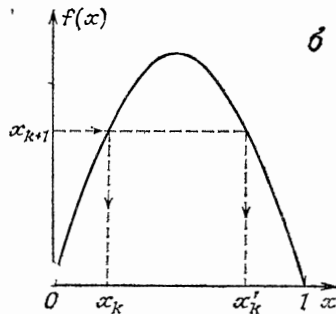


Рис. VIII. 8. Фундаментальные свойства отображения $f(x)$. *a* — растяжение и складывание. Функция f отображает первую половину интервала $[0, 1/2]$ на весь интервал $[0, 1]$. Вторая половина также отображается на весь интервал, но в обратном направлении (см. стрелки). Можно сказать, что отображение f сначала растягивает интервал вдвое, а затем складывает его так, как это требуется для того, чтобы образ интервала совпадал с интервалом $[0, 1]$. *б* — необратимость.

Из формы кривой f видно, что любая итерация x_{k+1} имеет два прообраза: x'_k и x''_k . Это означает, что отображение f необратимо, так как из-за неопределенности в выборе прообраза оно может быть выполнено только в одном направлении. Необратимость — важное свойство, которое необходимо для того, чтобы отображение прямой \mathbb{R} в \mathbb{R} могло породить хаос.



$f(x)$ при значениях μ , близких к единице. Построим график функции f (рис. VIII.8, *a*), а под осью x проведем горизонтальную линию, на которой будем откладывать образы $f(x)$. Выясним, что происходит, когда x принимает значения из интервала

$[0, 1]$. Образ точки $x = 0$ есть 0, образ точки $x = 1/2$ есть 1. Следовательно, первая половина интервала $[0, 1/2]$ «растягивается» при отображении на весь интервал $[0, 1]$. Нетрудно видеть также, что образ точки $x = 1$ есть 0 и что преобразование растягивает вторую половину интервала $[1/2, 1]$ на весь интервал и при этом изменяет направление его на обратное. Иначе говоря, когда x однократно пробегает единичный интервал, образ точки x проходит единичный интервал туда и обратно. Такое поведение образа можно рассматривать как результат двойной операции: растяжение [в нашем примере в среднем в 2 раза ¹⁾] в сочетании со складыванием (необходимым, чтобы образ интервала покрыл интервал $[0, 1]$). Каждая из этих двух операций приводит к важному следствию.

1. Растяжение приводит к тому, что образ малого начального смещения δx_0 (в среднем) умножается при каждой операции на коэффициент растяжения. Если коэффициент растяжения больше единицы, то этот геометрический процесс приводит к экспоненциальному росту смещения. Эти события происходят за критическим значением μ_∞ , когда не существует периодический аттрактор: именно они и обуславливают ЧЗНУ, о которой говорилось в гл. VI. Средняя скорость увеличения данного смещения измеряется параметром λ экспоненциального закона:

$$\delta x_k = \delta x_0 \exp(\lambda k),$$

где λ — показатель Ляпунова (см. приложение Б) одномерного отображения. Этот экспоненциальный рост отчетливо заметен на рис. VIII. 9.

2. Складывание, необходимое для того, чтобы растяжение было совместимо с ограниченностью области (в данном случае интервала), приводит к «перемешиванию» образов различных точек. Оно также является важной характеристикой хаоса. Именно образование складок не позволяет однозначно указать для точки предшествующую ей точку: у каждой точки x_{k+1} имеются два прообраза x_k в предыдущей итерации (рис. VIII. 8, б), четыре прообраза еще на одну итерацию раньше и т. д. Следовательно, преобразование, легко выполнимое при возрастающих значениях k , не может быть выполнено в обратную сторону. Такое преобразование называется *необратимым* ²⁾. Следовательно, наше преобразование запрещает знание про-

¹⁾ При заданной параболической форме $f(x)$ может быть определено только растяжение в среднем. Области вблизи концов $x = 0$, $x = 1$ единичного отрезка растянуты сильнее всего, тогда как область вблизи максимума $x = 1/2$ сжата.

²⁾ Справедливо более общее утверждение: любое непрерывное отображение \mathbb{R} в \mathbb{R} должно быть необратимым, чтобы оно приводило к хаосу.

лых значений x , а также (вследствие ЧЗНУ) предсказание будущих значений x через какой-то период времени. Долговремен-

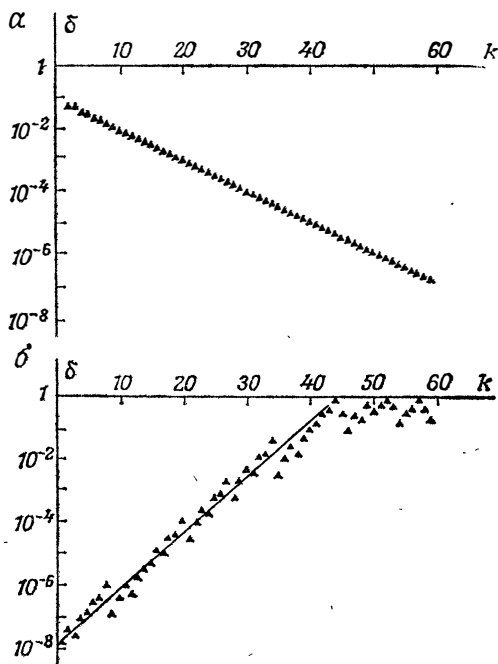


Рис. VIII. 9. Эволюция расстояния δ между двумя итерациями отображения $f(x) = 4\mu x(1-x)$ при различных начальных значениях. Чтобы исключить переходные эффекты, связанные с погрешностью в начальных условиях x_0 , отображение подвергалось 100-кратной итерации. Для вычисления двух серий итераций в качестве начальных условий выбирались точки x_0 и $x_0 + \delta_0$. Абсолютная величина расстояния между двумя k -ми итерациями изменяется по закону

$$\delta = \delta_0 \exp(\lambda k),$$

где λ — показатель Ляпунова. Таким образом, показатель Ляпунова характеризует средний угловой коэффициент графика зависимости δ от k в полулогарифмическом масштабе, как на рис. а и б.

а — при $\mu = 0,7$ показатель Ляпунова $\lambda \approx -0,02$. Соответствующий режим периодический, и расстояние δ убывает: показатель Ляпунова отрицателен.
 б — при $\mu = 0,95$ показатель Ляпунова $\lambda \approx +0,4$. Соответствующий режим хаотический, и расстояние δ возрастает: показатель Ляпунова положителен. Когда δ достигает величины, сравнимой с длиной интервала $[0, 1]$, наступает насыщение.

ное предсказание значений x потребовало бы, чтобы начальное условие было известно с бесконечной точностью, так как малейшая (даже бесконечно малая) неопределенность в x_0 не позволяет нам различать траектории; которые непременно разойдутся

по истечении достаточно большого промежутка времени. Разумеется, бесконечная точность недостижима на практике. Поэтому, несмотря на то что она описывается детерминированным уравнением (VIII.1), эволюция остается принципиально непредсказуемой и представляется нам неупорядоченной и хаотичной. Вопреки широко распространенному мнению детерминированность и хаос не являются взаимно исключающими противоположностями.

VIII. 3.3. Обратный каскад

Сказанное выше позволяет полагать, что хаотический режим при $\mu > \mu_\infty$ не полностью лишен определенного порядка, хотя этот порядок на первый взгляд, возможно, и не виден. Другим

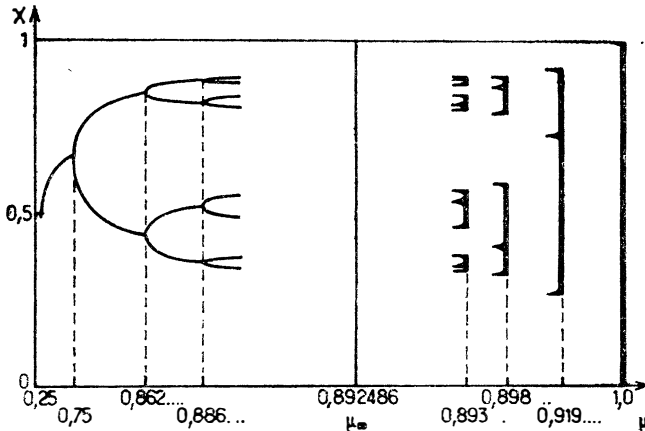


Рис. VIII. 10. Прямой и обратный каскады. Этот схематический рисунок приведен для того, чтобы привлечь внимание читателя к одной детали, которая не видна на рис. VIII. 7: обратный каскад — своего рода нечеткое отражение прямого каскада относительно вертикали, соответствующей значению параметра μ_∞ . По оси абсцисс взята неравномерная шкала $\sqrt[5]{th(4\mu - 4\mu_\infty)}$; выбор ее обусловлен исключительно удобством построения графика и не должен мешать пониманию того, что «естественным» представлением решений следует считать то, которое можно видеть на рис. VIII. 7.

Из работы С. Гроссмanna и С. Томе.

элементом порядка, свидетельствующим о том же, являются «окна периодичности» (разд. VIII. 3.4) — периодические аттракторы в интервале $(\mu_\infty, 1)$. Некоторые из них можно наблюдать в виде более светлых зон¹⁾ на рис. VIII. 7. Периодические и аperiodические аттракторы тесно взаимосвязаны. Действительно, как показывает тщательный анализ аperiodических аттракторов, они являются своего рода «шумовыми предельными цик-

лами» с периодом 2^l , где l — целое число, неограниченно возрастающее, когда μ стремится к μ_∞ сверху. Более точно, образ точки последовательно посещает множество, состоящее из 2^l непересекающихся отрезков из интервала $(0, 1)$. После 2^l итераций мы возвращаемся на исходный отрезок: это позволяет говорить о цикле. Вместе с тем поведение внутри каждого отрезка полностью хаотическое: отсюда прилагательное «шумовой». Коротче говоря, все итерации порядка 2^l содержатся внутри малого отрезка, но там они полностью неупорядочены. Аналогичное утверждение справедливо относительно каждого из 2^l отрезков.

При возрастании μ мы видим, что при некоторых значениях этого параметра отрезки расщепляются на два. Вместо шумового цикла с периодом 2^l возникает другой шумовой цикл с вдвое меньшим периодом, т. е. с периодом 2^{l-1} . При дальнейшем возрастании μ процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнут «период» $2^0 = 1$. На рис. VIII.10 схематично показана серия изменений периода. Мы видим, что наряду с субгармоническим каскадом существует другой каскад с близкой структурой, но ведущий в противоположном направлении по оси μ . Обычно первый каскад принято называть прямым, а второй обратным. Результат, который по самым скромным оценкам может быть назван замечательным, состоит в том, что значения параметра μ , при которых происходят бифуркации обратного каскада, также сходятся к μ_∞ с тем же масштабным множителем $\delta = 4,669 \dots$, что и прямой каскад. В этом еще одно подтверждение того, что в хаосе существует некоторый порядок (если это утверждение нуждается в подтверждении)!

VIII. 3.4. Окна периодичности

Как мы уже упоминали, интервал $[\mu_\infty, 1]$ содержит не только хаос. В нем встречаются также узкие диапазоны значений μ , в которых траектории строго периодические. Сначала рождается цикл с основным периодом p ($p > 1$), затем процесс, аналогичный описанному выше, приводит к появлению последовательности аттракторов с периодом $p \cdot 2^l$ ($l = 1, 2, \dots, \infty$). Это, несомненно, субгармонический каскад, удовлетворяющий приведенным выше законам подобия. Точкой накопления ($l \rightarrow \infty$) отмечен конец окна периодичности с периодом p . Каждое окно занимает отрезок оси μ , длина которого варьируется в широких пределах, но в большинстве случаев отрезки очень малы. Именно поэтому их невозможно разглядеть на рис. VIII.7, где почти весь интервал $[\mu_\infty, 1]$ кажется хаотическим. Наибольшее окно ($0,9571 \dots < \mu < 0,9624 \dots$) содержит циклы с основным периодом, равным 3. Его мы и используем в качестве

примера (поскольку его численная реализация наиболее удобна), на котором можно показать, как рождается цикл.

Когда мы говорим о цикле с периодом p , это означает, что после p итераций мы возвращаемся в исходную точку. Чтобы идентифицировать такой цикл, удобно построить график отображения p -го возвращения, т. е. функции $x_{k+p} = f^p(x_k)$. На

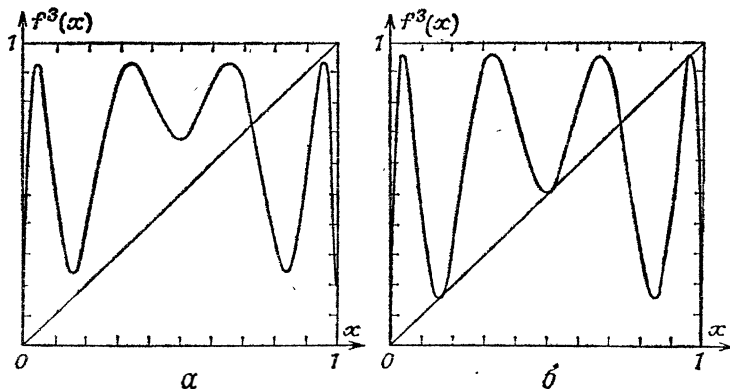


Рис. VIII.11. Рождение цикла с периодом 3. Наибольшее окно периодичности ($0,9571 \dots < \mu < 0,9624 \dots$) содержит циклы с периодом $3 \cdot 2^l$ ($l = 0, \dots, \infty$). Чтобы объяснить, как рождается цикл с периодом 3, построим график отображения третьего возвращения:

$$x_{k+3} = f^3(x_k).$$

a — немного ниже порогового значения (при $\mu = 0,9$) отображение не имеет устойчивой неподвижной точки; b — при достижении порога (при $\mu = 0,9751 \dots$) график отображения f^3 касается диагонали в трех точках. Эти три точки, первоначально нейтрально устойчивые, становятся устойчивыми, как только параметр μ превысит пороговое значение. Бифуркация касания порождает цикл с периодом 3.

рис. VIII.11 вы видите такое отображение при $p=3$ и двух значениях μ ; одно несколько выше, а другое несколько ниже порога появления цикла. Ниже порога неподвижные точки (точки пересечения диагонали с кривой) неустойчивы (тангенс угла наклона касательной к кривой по абсолютной величине больше единицы). При вариации параметра μ кривая, деформируясь, касается диагонали в трех точках — рождаются три неподвижные точки, нейтрально устойчивые на пороге и асимптотически устойчивые над порогом. Поэтому бифуркация такого типа называется *касательной* или *тангенциальной бифуркацией*. Если параметр μ продолжает возрастать, то следует ожидать, что субгармоническая неустойчивость дестабилизирует этот

режим, как прежде. И действительно, цикл с периодом 3 постигает судьба, аналогичная той, которая постигла цикл с периодом 1, что приводит к хаосу¹⁾ через субгармонический каскад, все еще удовлетворяющий тем же законам подобия.

VIII. 3.5. Универсальная последовательность

Другое весьма необычное свойство относится к иерархии относительного расположения окон периодичности вдоль оси μ . Действительно, если абсолютное расположение и длина окон зависят от рассматриваемого нами конкретного отображения f , то порядок, в котором эти окна включаются при увеличении

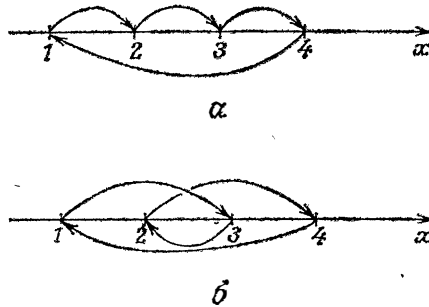


Рис. VIII. 12. Два аттрактора с циклами периода 4. Для каждого периодического аттрактора характерен свой порядок обхода образующих его точек при итерациях. Возможны два различных цикла с периодом 4: $a - 1-2-3-4$; $b - 1-3-2-4$. Других циклов с периодом 4 при заданной форме отображения не существует.

параметра μ , остается неизменным. Иначе говоря, при любой функции f (лишь бы она имела один экстремум, квадратичный или неквадратичный) периодические аттракторы образуют последовательность всегда в одном и том же порядке, которая поэтому называется *универсальной последовательностью*.

Характеризуя периодический аттрактор, следует иметь в виду, что два аттрактора с одним и тем же периодом могут различаться порядком обхода принадлежащих им точек. Используя простейший пример аттракторов с периодом 4, изобразим схематически четыре точки на оси x (рис. VIII. 12). Мы видим, что

¹⁾ Когда последовательность образов полученных численно, кажется хаотической, естественно возникает вопрос: является ли данная последовательность действительно хаотической или периодической с очень большим периодом и сопровождается долгоживущими переходными режимами? Окончательный ответ на этот вопрос пока не получен, хотя некоторые факты подтверждают гипотезу истинного хаоса.

существуют два 4-цикла¹⁾, соответствующие замкнутым маршрутам 1-2-3-4 и 1-3-2-4.

Полезно поэтому идентифицировать периодический аттрактор по расположению его компонент на оси x . Различные аттракторы с одним и тем же периодом могут быть охарактеризованы двумя способами. Один способ состоит в том, чтобы сначала пронумеровать точки аттрактора в порядке их обхода при итерации отображения, а затем записать, в каком порядке они располагаются на оси x . Следуя второму методу, мы приписываем каждой точке букву П или Л в зависимости от того, находится ли она *справа* или *слева* от максимума функции f . Перечисляя буквы в порядке обхода точек, мы получаем характеристическую последовательность букв П и Л. Можно показать, что в любом окне периодичности существует такое значение μ , при котором сам максимум является частью аттрактора. Следовательно, итерации достаточно начать с максимума, который мы обозначим символом 0 (не смешивать с левым концом интервала — точкой $x=0$). Так как нуль расположен не слева и не справа от максимума, в последовательности букв П и Л знаков на один меньше, чем точек в периодическом аттракторе.

Данные о различных аттракторах универсальной последовательности с периодом от 1 до 6 представлены в табл. VIII.2.

Таблица VIII.2

μ	Период p	Последовательность точек	Последовательность символов П и Л
↓	6	2-0-4-3-5-1	ПЛППП
	5	2-0-4-3-1	ПЛПП
	3	2-0-1	ПЛ
	6	2-5-3-0-4-1	ПЛЛПЛ
	5	2-3-0-4-1	ПЛЛП
	6	2-3-0-4-5-1	ПЛЛПП
	4	2-3-0-1	ПЛЛ
	6	2-3-4-0-5-1	ПЛЛЛП
	5	2-3-4-0-1	ПЛЛЛ
	6	2-3-4-5-0-1	ПЛЛЛП

Из-за формы кривой $f(x)$ образ максимума (точки 0) всегда является крайней правой точкой (точкой 1), образ которой в свою очередь совпадает с крайней левой точкой. Именно по-

¹⁾ Если форма рассматриваемой функции f задана, то существуют только два различных аттрактора. Из формы этой функции (рис. VIII.3) следует, что образ крайней левой точки совпадает с крайней правой точкой. Это означает, что любой цикл должен начинаться с точки 1 и заканчиваться в точке 4.

этому последовательность точек всегда начинается с 2, а заканчивается 1, в то время как последовательность символов П и Л для любого периодического аттрактора начинается с комбинации ПЛ.

VIII.4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

VIII.4.1. Природа наблюдений

Экспериментальная идентификация некоторых явлений, описанных при рассмотрении квадратичного отображения, не должна быть особенно трудной. Если периодический режим с частотой f в результате субгармонической неустойчивости переходит в другой периодический режим с удвоенным периодом, то такой переход должен сопровождаться

- 1) удвоением числа точек сечения Пуанкаре;
- 2) появлением в спектре Фурье частоты $f/2$ и ее нечетных гармоник ($3f/2, 5f/2$ и т. д.).

В субгармоническом каскаде такой процесс повторяется неоднократно и поэтому легко наблюдаем, если мы можем достаточно точно регулировать управляющий параметр.

Аналогично в случае обратного каскада мы ожидаем, что должны наблюдаться:

- 1) удлинение отрезков, образующих сечение Пуанкаре, когда они попарно сливаются (рис. VIII.10);
- 2) связанный с хаотическим режимом шум, который последовательно уничтожает субгармоники $\dots, f/16, f/8, f/4, f/2$ в порядке, обратном последовательности их появления в прямом каскаде, прежде чем они заполнят весь спектр.

Исследование универсальной последовательности предполагает точную идентификацию типа периодического аттрактора. Эта задача, недоступная спектральному анализу, требует использования сечения Пуанкаре.

Многие эксперименты, значительная часть которых была выполнена на трех системах, описанных в гл. V, подтвердили адекватность теоретических выводов, к которым мы пришли в гл. VIII. Наблюдения не оставляют сомнений в том, что

- 1) субгармонический каскад действительно является одним из способов перехода к хаосу;
- 2) если управляющий параметр возрастает за точкой накопления μ_∞ субгармонического каскада, то мы действительно наблюдаем обратный каскад. Он сопровождается постепенным уширением линий спектра Фурье и, следовательно, ростом хаоса;
- 3) за прямым каскадом мы встречаем периодические аттракторы, принадлежащие универсальной последовательности.

Если измерения достаточно точны, то мы можем даже проверить законы подобия: согласие между теорией и экспериментом носит не только качественный, но и количественный характер.

VIII. 4.2. Субгармонический каскад: конвекция РБ

Начнем с описания эксперимента, выполненного на жидкой ртути при очень малом числе Прандтля ($Pr \approx 0,03$). Чтобы стабилизировать конвективную структуру, воспользуемся ячейками с малым аспектным отношением. ($\Gamma = 4$ или $\Gamma = 6$), которые, кроме того, поместим в магнитное поле. Два обстоятельства способствуют успеху экспериментов. Во-первых, вследствие высокой электропроводности ртути конвективные валы имеют сильную тенденцию выстраиваться в направлении, параллельном магнитному полю. Это фиксирует пространственный порядок и препятствует расплыванию структуры при увеличении параметра Ra (см. разд. V.3.2). Во-вторых, магнитное поле способствует затуханию некоторых мод, вызывающих колебания валов, делает более интенсивной диссипацию, что, как мы видели, благоприятно для использования отображения первого возвращения.

Ртуть мы помещаем между двумя толстыми медными пластинами. Конвективные движения измеряются болометрами, так как оптические моды неприменимы в непрозрачной среде. На первом этапе эксперимента мы фиксируем интенсивность магнитного поля на нуле и увеличиваем разность температур до возникновения конвекции при критическом значении числа Рэлея Ra_c . Продолжая увеличивать Ra , мы замечаем, что вблизи $2Ra$ наступает новая неустойчивость. Сигнал, зарегистрированный болометром, начинает осциллировать во времени с частотой f_1 . Эта осцилляторная неустойчивость может быть обусловлена волной, распространяющейся вдоль осей валов. При дальнейшем увеличении параметра Ra периодический режим в свою очередь становится неустойчивым и в спектре мощности сигнала появляется вторая частота ¹⁾ f_2 , близкая, но все же отличная от $f_1/2$. Физические колебания, связанные с этой второй частотой, до сих пор достоверно не идентифицированы. При несколько большем значении Ra происходит синхронизация двух осцилляторов, если выполняется условие субгармонического резонанса $f_2 = f_1/2$.

Тенденция к синхронизации знаменует начало второго этапа эксперимента. Ячейку мы помещаем в постоянное и однородное

¹⁾ Происходит переход от предельного цикла к тору T^2 через бифуркацию, описанную в гл. VII.

магнитное поле, интенсивность которого сравнима с амплитудами двух осцилляторов. Постепенно увеличивая число Рэлея, мы встречаем последовательность четко определенных значений

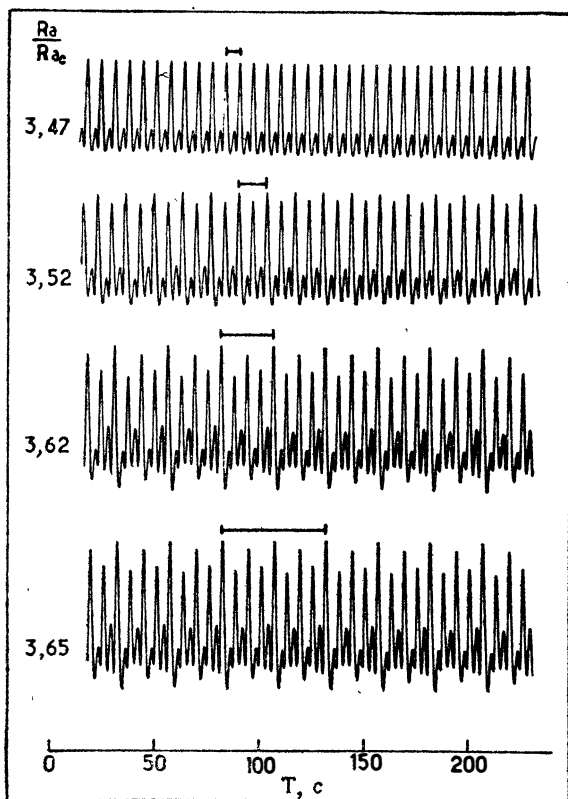


Рис. VIII.13а. Субгармонический каскад в эксперименте с тепловой конвекцией. Изменение формы сигнала (температуры жидкости в одной точке как функции времени) отчетливо указывает на то, что при увеличении параметра Ra/Ra_c происходит процесс удвоения периода. Отрезки соответствуют длине периода, определяемой основным мотивом, который повторяется неограниченно.

Из работы А. Либхабера, С. Фова и К. Лароша.

Ra , при которых один периодический режим после бифуркации переходит в другой, с удвоенным периодом. На рис. VIII.13, а представлены экспериментальные сигналы нескольких последовательных периодических режимов. Появление в спектре Фурье субгармоник $f_1/4$, $f_1/8$, $f_1/16$, $f_1/32$ (и их нечетных гармоник) свидетельствует об удвоениях периода (рис. VIII.13, б). По этим

результатам можно попытаться оценить скорость сходимости последовательных бифуркаций. Полученное значение 4,4 очень близко к значению 4,669 ..., предсказываемому теорией универсального асимптотического режима.

Этот эксперимент с конвекцией РБ убедительно подтверждает существование субгармонического каскада в физической си-

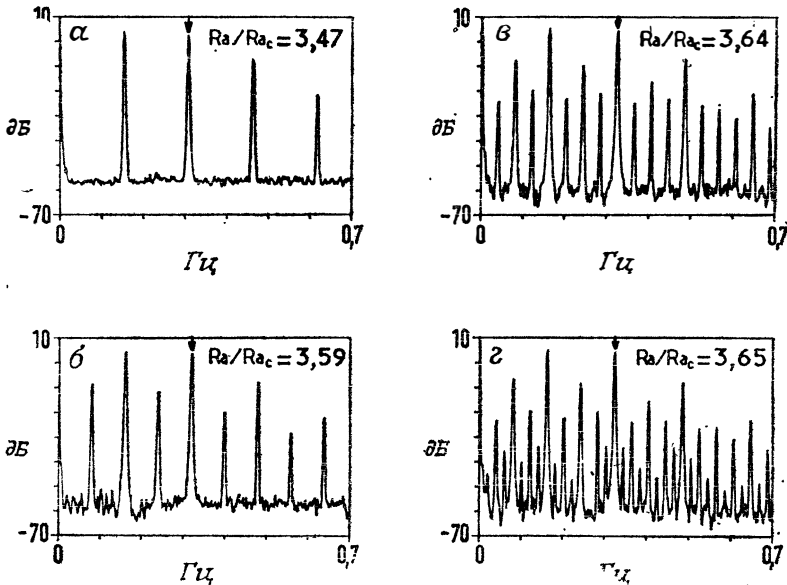


Рис. VIII. 136. Субгармонический каскад в эксперименте с тепловой конвекцией. Анализ Фурье со всей определенностью подтверждает вывод, к которому приводит рассмотрение рис. VIII. 13. *a*: при возрастании параметра Ra/Ra_c появляются субгармоники — сначала с частотой $f_1/2$ (*a*), затем с частотами $f_1/4$ (*b*), $f_1/8$ (*v*) и $f_1/16$ (*z*), а также их нечетные субгармоники. Из работы А. Либхабера, С. Фова и К. Лароша.

стеме. Особенно важно, что измерение таких величин, как отношение амплитуд последовательных субгармоник, подтверждает теоретические предсказания. Упомянем также о том, что тепловая конвекция в других жидкостях (жидком гелии, воде и т. д.) также приводит к возникновению каскада удвоений периода.

VIII. 4.3. Обратный каскад: вращающийся магнит

Субгармонический каскад легко наблюдается и в эксперименте с магнитом, что еще раз подтверждает универсальность теории. Ось магнита (см. гл. V) погружена в масло с большой

вязкостью, чтобы обеспечить сильную диссипацию энергии. Зафиксировав амплитуду и частоту вращающегося магнитного поля, мы постепенно изменяем амплитуду B_1 стационарного магнитного поля, в свою очередь изменяющую управляющий параметр M в уравнении (12) гл. V. В эксперименте используются следующие значения параметров:

$$\alpha = 0,174; \quad P = 0,335; \quad M \in [0, 1600; 0, 2321].$$

Варьируя M , мы порождаем последовательность периодических режимов, характеризуемых на каждом этапе удвоением периода. В качестве примера на рис. VIII. 14 показаны результаты, полученные после четвертой бифуркации. В спектре Фурье мы различаем субгармоники $f_1/2$, $f_1/4$, $f_1/8$ и $f_1/16$ начальной частоты f_1 , а также их нечетные гармоники. Аналогично в сечении Пуанкаре мы видим 16 точек, подразделенных на две группы. В свою очередь каждая группа подразделяется на четыре пары точек, что составляет всего восемь пар. Такого рода распределение мы получили бы, проведя вертикальную прямую на рис. VIII. 7 в области существования аттрактора с периодом $16T$. Продолжая увеличивать M выше значения, близкого к $0,2285$ (численной оценки точки накопления), мы увидим заметное изменение в эволюции спектра Фурье и сечения Пуанкаре. Дополнительные субгармонические пики высших порядков в спектре не появляются. Вместо этого шум начинает уширять основания некоторых пиков, прежде чем поглотить их. Этот процесс происходит на нечетных гармониках сначала частоты $f_1/16$ (рис. VIII. 15, *a*), затем частоты $f_1/8$ (рис. VIII. 16, *a*) и т. д. Аналогично в сечении Пуанкаре прекращается образование пар новых точек за счет «удвоения» существующих точек. Вместо этого дополнительные точки мало-помалу распространяются по коротким сегментам, удлиняящимся при увеличении M , прежде чем слиться попарно. Мы видим это на рис. VIII. 15, *b*, где все еще можно различить восемь групп, и на рис. VIII. 16, *b*, где различимы только четыре группы. Такое поведение вполне предвидимо, если на рис. VIII. 10 передвинуть вертикальную прямую вправо за μ_∞ . Как предсказывает теория, вслед за прямым каскадом идет обратный каскад.

Заметим, что с точностью до ошибок измерений точки сечения Пуанкаре (рис. VIII. 16, *b*) не покрывают поверхность, а располагаются вдоль двух дуг кривых. Так происходит потому, что диссипация энергии достаточно велика и маскирует структуру апериодического аттрактора. Именно это служит обоснованием анализа режимов с помощью отображения интервала на себя.

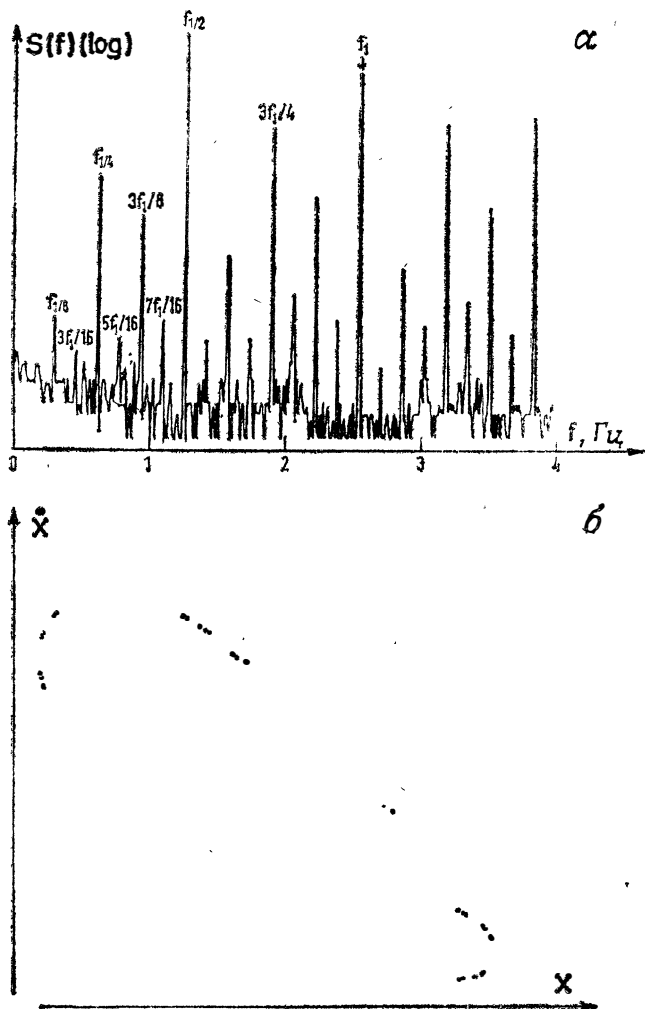


Рис. VIII.14. Режим вращающегося магнита с частотой $f_1/16$. Описанный в гл. V вращающийся магнит претерпевает субгармонический каскад. Спектр Фурье (а) и сечение Пуанкаре (б) плоскостью (x, \dot{x}) получены для предельного цикла после четырех субгармонических бифуркаций. Форма спектра и разбиение сечения Пуанкаре на шестнадцать групп точек соответствуют предсказаниям теории.

Из работы В. Крокетта и К. Пуату.

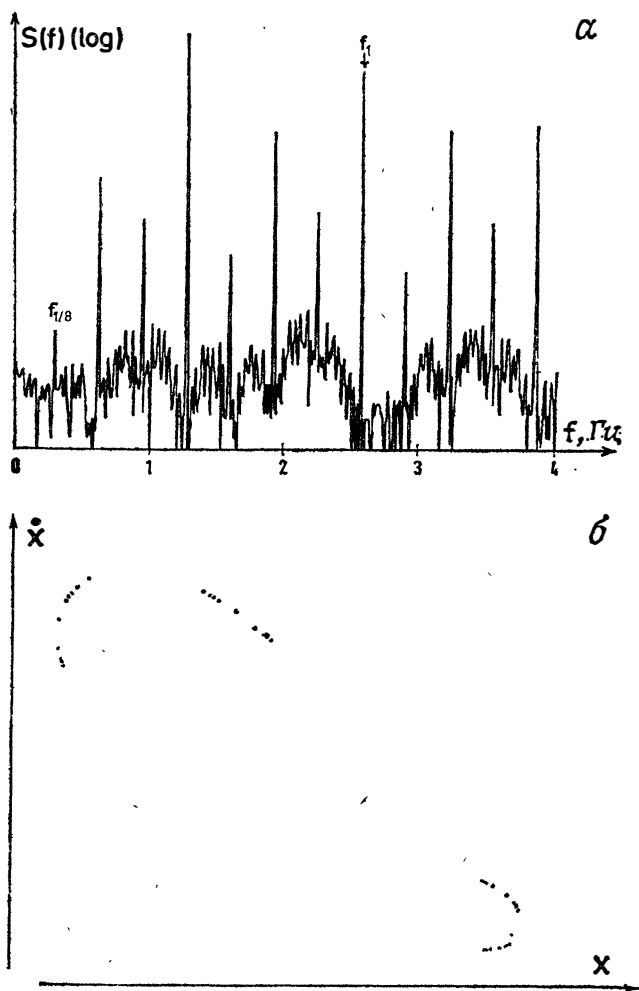


Рис. VIII. 15. Исчезновение частоты $f_1/16$ в обратном каскаде. *a* — пики, соответствующие нечетным гармоникам частоты $f_1/16$, поглощены шумом и не видны в спектре Фурье, но субгармоники частоты $f_1/8$ еще отчетливо видны; *a* — точки сечения Пуанкаре разделены на восемь групп. В каждой из групп точки уже не разбиты на пары.
Из работы В. Крокетта и К. Пуату.

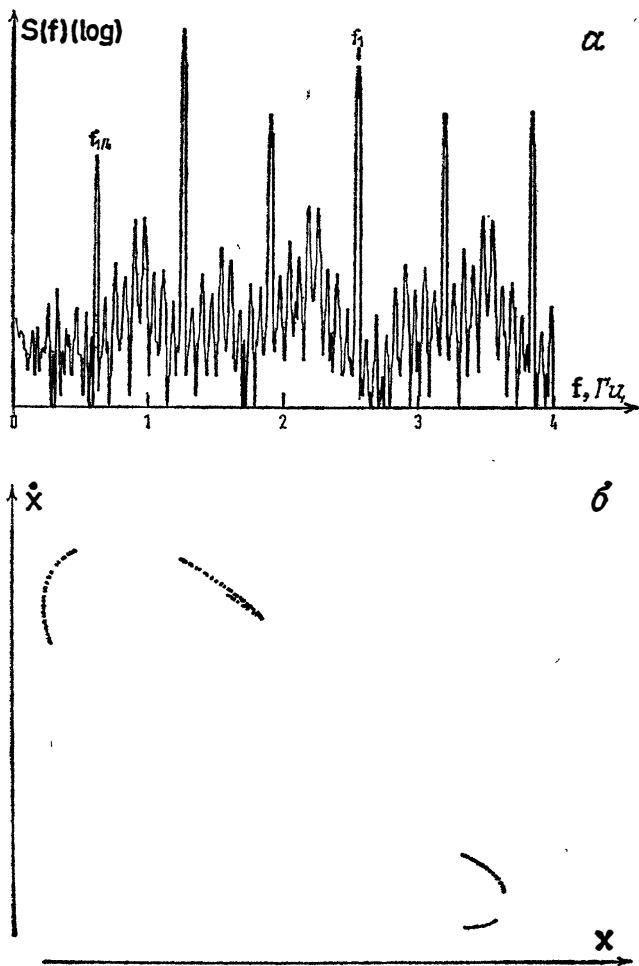


Рис. VIII. 16. Исчезновение частоты $f_1/8$ в обратном каскаде. *a* — спектр, напоминающий спектр на рис. VIII. 15, но без пиков с частотами, кратными $f_1/8$; *b* — сечение Пуанкаре состоит лишь из четырех дуг кривых, длина которых заметно увеличилась.

Из работы В. Крокетта и К. Пуату.

VIII. 4.4. Универсальная последовательность: реакция БЖ

Реакция БЖ в открытом реакторе обладает последовательностью периодических режимов с удвоением периода на каждой ступени каскада бифуркаций — так же, как в конвекции РБ и в случае вращающегося магнита. Реально наблюдаются несколько первых бифуркаций каскада — режимы с периодом T , $2T$, $4T$, $8T$ и т. д. Причина обрезания каскада чисто экспериментальная: управляющим параметром в этом примере является величина, обратная среднему времени пребывания реагентов в реакторе, которое можно изменять, варьируя скорость потока на входе с помощью питательных насосов. Но стабилизировать скорость потока (по крайней мере на протяжении длительного интервала времени) удастся на уровне не выше 0,5—1 %. Задавая значение универсальной постоянной δ геометрической прогрессии, мы можем определить, как далеко нам удастся продвинуться в наблюдении режимов с периодами больше $8T$.

Помимо субгармонического каскада, более наглядно иллюстрируемого другими экспериментами, реакция БЖ позволяет продемонстрировать весьма интересный аспект теории. Весь набор наблюдаемых режимов представлен в табл. VIII.3 в использованных ранее обозначениях. Сравнивая табл. VIII.2 и VIII.3, мы идентифицируем несколько первых элементов универсальной последовательности. Наблюдаются даже режимы с периодом больше 6. Хотя весьма вероятно, что другие периодические режимы также присутствуют, но не детектируемы; так как их области существования на оси управляющего параметра

Таблица VIII.3

	Период	Последовательность точек	Последовательность символов П и Л
Каскад 2^l	1	0	—
	2	0—1	П
	4	2—0—3—1	ПЛП
	8	2—6—0—4—3—7—5—1	ПЛПППЛП
Универсальная последовательность	10	2—8—6—0—4—3—9—5—7—1	ПЛПППЛПЛП
	6	2—0—4—3—5—1	ПЛППП
	5	2—0—4—3—1	ПЛПП
	3	2—0—1	ПЛ
	6	2—5—3—0—4—1	ПЛЛПЛ
	9	2—8—5—3—0—6—4—7—1	ПЛЛПЛПЛП
	5	2—3—0—4—1	ПЛЛП
	4	2—3—0—1	ПЛЛ
	8	2—6—3—7—4—0—5—1	ПЛЛЛПЛЛ

слишком узки, можно сказать, что эти режимы неустойчивы относительно экспериментальных возмущений. Аналогичным образом можно интерпретировать отсутствие в табл. VIII. 2 и VIII. 3 некоторых элементов, и это не должно нас интересовать.

Рассмотрим табл. VIII.3 более подробно. На протяжении каждого эксперимента мы записываем временную вариацию потенциала электрода, обладающего специфической чувствитель-

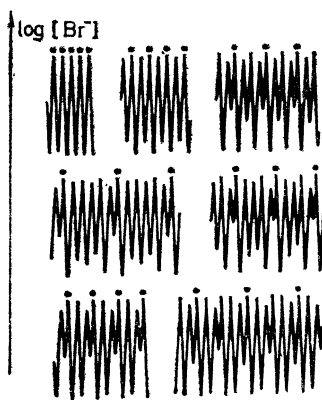


Рис. VIII. 17. Периодические режимы в реакции Белоусова — Жаботинского. Для идентификации нескольких периодических режимов, соответствующих различным значениям потока реакционной смеси, использовался сигнал электрода, обладающего селективной чувствительностью к ионам Br^- . Эти сигналы (выборка из сигналов, полученных после субгармонического каскада) описывают движение на аттракторах, принадлежащих универсальному каскаду, представленному на рис. VIII. 3. Точки над сигналами указывают начало и конец периодов.

Из работы Р. Симон, А. Вольфа и Г. Суинни.

ностью к иону Br^- . Это позволяет нам проследить за ходом реакции, измеряемым логарифмом концентрации иона. Варьируя среднее время пребывания одного из реагентов в активной зоне реактора и поддерживая все остальные параметры (например, концентрации реагентов в резервуарах, откуда они поступают в реактор, температуру реактора) на постоянном уровне, мы обнаруживаем различные режимы, иногда периодические, иногда непериодические. На рис. VIII. 17 видно, что сигналы записаны от нескольких периодических режимов¹⁾. Как можно воспользоваться этой информацией для идентификации типа аттрактора, который мы наблюдаем?

¹⁾ Обращаем внимание на сходство между этими сигналами и сигналами, представленными на рис. VIII. 13 и соответствующими конвекции РБ.

Для ответа на этот вопрос читателю следует иметь в виду, что экспериментатор проходит тот же путь, какой выпадает теоретику, но в противоположном направлении! Теоретик начинает с функции, определяющей последовательные итерации. Экспериментатор сначала идентифицирует итерации по измерениям и надеется затем реконструировать функцию, задающую итерации (или по крайней мере ее график), которая является «известной» в задаче.

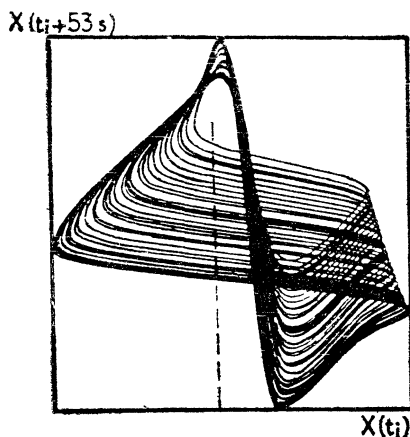


Рис. VIII. 18. Аperiodический аттрактор. Форма аттракторов в пространстве $X(t)$, $X(t + \tau)$, $X(t + 2\tau)$ с $\tau = 53$ с восстановлена по сигналу $X(t)$. Изображена проекция аттрактора на плоскость $X(t)$, $X(t + \tau)$. Сечение Пуанкаре восстановленного аттрактора плоскостью, перпендикулярной плоскости рисунка, проведено вдоль штриховой прямой.

Из работы Р. Симон, А. Вольфа и Г. Суинни.

Если измерена только одна из динамических переменных, то восстановить аттрактор в исходном фазовом пространстве не представляется возможным. Но метод, описанный в конце гл. IV, позволяет построить проекцию аттрактора в трехмерном фазовом пространстве, если в качестве координат выбрать значение сигнала в момент времени t и в два более поздних момента времени $t + \tau$ и $t + 2\tau$. Затем мы находим точки пересечения траектории с плоскостью, например с плоскостью, перпендикулярной плоскости рис. VIII. 18 (след пересечения показан штриховой линией). Мы видим, что точки пересечения распределены отнюдь не случайно, а расположены на одной кривой (почти на прямой). Это признак сильной диссипации. При таких условиях мы можем построить график зависимости абсциссы точки на кривой от абсциссы предшествующей точки и

получить отображение первого возвращения: график x_{k+1} как функции x_k . Если наши предположения верны, то следует ожидать, что множество точек распределится вдоль некоторой кривой. Эта кривая должна быть графиком той функции, которая задает итерации. Именно так и происходит, в чем нас убеждает рис. VIII.19,а: мы получаем кривую, а это свидетельствует

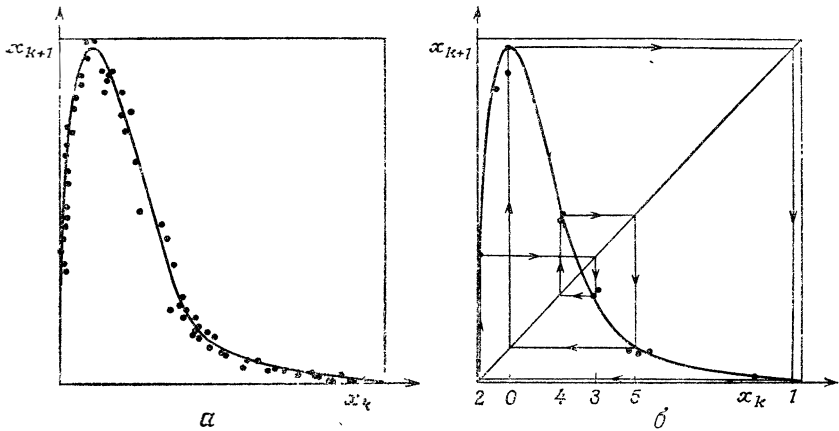


Рис. VIII.19. Отображение первого возвращения. *a* — после того как построено сечение Пуанкаре аттрактора, динамика может быть исследована путем построения графика зависимости координаты точки x_{k+1} от координаты предшествующей точки x_k . Для экспериментатора важно восстановить по этим данным график отображения первого возвращения. Как видно из рисунка *a*, мы получаем кривую, а не набор отдельных точек и построенная кривая имеет экстремум; *b* — плавно деформируя кривую, построенную на рис. *a*, мы наблюдаем переход от аperiodического аттрактора к соседнему периодическому аттрактору с периодом 6.

Из работы Р. Симон, А. Вольфа и Г. Суинни.

о том, что дисперсия на плоскости (x_k, x_{k+1}) очень мала. В частности, заметим, что эта кривая не монотонна: она имеет максимум («горб»), как используемая в рассматриваемой теории квадратичная функция. На этой стадии сравнение с теорией самоочевидно. Медленно варьируя управляющий параметр, мы можем постепенно изменять форму кривой и, следовательно, последовательность режимов, одни из которых хаотические, другие периодические. На рис. VIII.19,б показано, как итерационная кривая, представленная на рис. VIII.19,а, порождает первый аттрактор с периодом 6 универсальной последовательности, идентифицируемый как аттрактор 2-0-4-3-5-1, или ПЛППП.

ЛИТЕРАТУРА

- Collet P., Eckmann J. P.*, Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems, Birkhäuser, Boston (1980).
- Croquette V.*, Déterminisme et chaos, *Pour la Science*, **62**, 62 (1982).
- Feigenbaum M. J.*, Quantitative universality for a class of non-linear transformations, *Journal of Statistical Physics*, **19**, 25 (1978).
- Grossmann S., Thomaes S.*, Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes, *Zeitschrift für Naturforschung*, **A32**, 1353 (1977).
- Libchaber A., Fauve S., Laroche C.*, Two-parameter study of the routes to chaos, *Physica*, **7D**, 73 (1983).
- May R. M.*, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, **261**, 459 (1976).
- Metropolis M., Stein M. L., Stein P. R.*, On finite limit sets for transformations of the unit interval, *Journal of Combinatorial Theory*, **A15**, 25 (1973).
- Simoyi R. H., Wolf A., Swinney H. L.*, One-dimensional dynamics in a multi-component chemical reaction, *Physical Review Letters*, **49**, 245 (1982).
- Tresser C., Couillet P.*, Itérations d'endomorphisme et groupe de renormalisation, *Compt. Rend. de l'Académie des Sciences de Paris*, **A287**, 577 (1978).
- Derrida B., Gervois A., Pomeau Y.*, Iteration of endomorphisms on the real axis and representation of numbers, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **29**, 305 (1978).
- Derrida B., Gervois A., Pomeau Y.*, Universal metric properties of bifurcations of endomorphisms, *Journal of Physics*, **A12**, 269 (1979).

ГЛАВА IX

ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ

IX. 1. ВВЕДЕНИЕ

Во введении ко второй части этой книги мы уже охарактеризовали перемежаемость как один из типичных маршрутов перехода от периодического состояния к хаосу. В этой главе мы укрепим наше утверждение как теоретическими аргументами, так и анализом типичных и тщательно выбранных экспериментов. В данном введении мы впервые попытаемся объяснить, что кроется за термином «перемежаемость». Затем мы кратко рассмотрим содержание последующих разделов.

Строго говоря, перемежаемость не имеет канонического определения. Мы называем сигнал перемежающимся, если он подвержен резким вариациям большой амплитуды. Под такое несколько расплывчатое определение можно подвести много случайных явлений природы, не столь легко поддающихся традиционному статистическому описанию в терминах распределений вероятности, средних значений (математических ожиданий), дисперсий и т. д. Приведем теоретический пример такой ситуации. Предположим, что нам необходимо выбрать вещественную случайную величину x с распределением вероятности $P(x) = (1 + x^2)^{-1/2}$. В элементарной теории вероятностей такое распределение недопустимо, поскольку оно ненормируемо: интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx$, который выражает вероятность того, что x принимает какое-нибудь значение и поэтому должен быть равен единице, в действительности логарифмически расходится при больших $|x|$. Это означает, что гистограмма значений x , взятых из конечной выборки (x_1, x_2, \dots, x_N) объемом N , сильно растянута и, если ее нормировать, стремится к нулю при любом значении x . В отличие от этого гистограмма нормируемого распределения вероятности $P_0(x)$ (такого, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} P_0(x) dx$ сходится) стремится к $P_0(x)$ при каждом значении x , если число N выборок стремится к бесконечности. При нормируемом распределении ненормированная гистограмма возрастает в среднем как N при больших N [в интервале $(x - (\Delta x/2), x + (\Delta x/2))$] оказы-

вается примерно $\rho_0(x)\Delta x \sim N$ выбранных значений x]. В случае же «распределения» $(1+x^2)^{-1/2}$ ненормированная гистограмма растет только как $N/\ln N$. Причина различия состоит в том, что при возрастании N мы выбираем все большие значения x с таким весом, который достаточен для непрерывного уменьшения относительного веса любого конечного значения x . На этом основано одно из возможных определений перемежаемости: случайная величина x называется перемежающейся, если относительный вес больших флуктуаций непрерывно возрастает для статистических выборок возрастающего объема. На практике мы не будем пользоваться этим формальным математическим определением.

Многочисленные примеры перемежающихся процессов мы находим в природе и физике. В частности, в гидродинамике перемежаемость возникает в нескольких классах экспериментальных явлений. Если мы возмутим быстрое течение (с большим числом Рейнольдса), поместив в него пластину, параллельную среднему направлению течения, то в окрестности пластины образуется пограничный слой. Такой турбулентный пограничный слой, если его усреднить по времени, имеет четкую пространственную границу. Но по непонятным до конца причинам эта граница в отдельные редкие интервалы времени испытывает очень большие мгновенные смещения. Соответствующие флуктуации в поле скоростей становятся все более перемежающимися, если мы производим измерения на все больших расстояниях от пограничного слоя. Мы можем также упомянуть мелкомасштабную перемежаемость в полностью развитой турбулентности—явлении, объяснение которого все еще остается спорным. Переходные течения в трубах (т. е. течения с числами Рейнольдса, точно соответствующими экспериментальной точке перехода между ламинарным и турбулентным режимами) также имеют перемежающуюся структуру: турбулентность имеет тенденцию сосредоточиваться в зонах пространства с четко выраженной границей, как показал Рейнольдс более ста лет назад.

Вполне возможно (хотя и не абсолютно достоверно), что в основе всех упомянутых нами явлений перемежаемости в гидродинамике лежит пространственная структура явлений: «большие флуктуации», о которых идет речь, локализованы в пространстве и во времени. Но цель нашей книги состоит в описании главным образом динамических явлений, в которых пространственная структура не играет важной роли: описание пространственной структуры мы свели к описанию амплитуд небольшого числа четко выраженных мод. Было показано (и теоретически, и экспериментально), что в динамических системах с небольшим числом степеней свободы при переходе от

периодического¹⁾ к хаотическому (или квазипериодическому) режиму может существовать *временная перемежаемость*. Даже при столь ограничительных условиях существует несколько, а именно три перехода через перемежаемость, каждый со своими отличительными особенностями.

Опишем кратко феноменологию, общую для всех трех типов. Когда значение r управляющего параметра меньше некоторого критического значения r_i , рассматриваемая динамическая система (будь то экспериментальная система типа систем РБ или БЖ или теоретическая типа модели Лоренца, отображения окружности и пространства более высокой размерности на себя) имеет предельный цикл (или в случае отображений — устойчивый дискретный цикл). Система совершает регулярные колебания и устойчива относительно малых возмущений. При r , лишь незначительно большем r_i (порога перемежаемости), мы имеем *перемежающийся* динамический режим. Временной сигнал состоит из колебаний, которые кажутся регулярными и напоминают устойчивый колебательный режим при $r < r_i$. Но на этот раз колебания время от времени прерываются «аномальными» флуктуациями, амплитуда и направление остаются примерно одними и теми же от флуктуации к флуктуации и слабо зависят от r . Мы называем этот переход *перемежающимся*, поскольку, когда r приближается к r_i в перемежающейся области ($r \gtrsim r_i$), флуктуации становятся все более редкими и полностью исчезают при $r \leq r_i$. Подчеркнем, что в точке перехода к нулю *не амплитуда и не частота* исключительных флуктуаций, а только их *средняя частота*.

Теория перемежающихся переходов состоит из двух частей. Первая часть (теория Флоке) занимается изучением линейной неустойчивости предельного цикла, объясняющей «спонтанный» рост флуктуации относительно режима, близкого к периодическому режиму. Вторая часть описывает процесс «реинъекции», или «реламинаризации», в ходе которого перемежающиеся флуктуации заглушают, уступая место новой фазе регулярных колебаний. В основе классификации перемежаемости на типы I, II и III лежат три типа линейных неустойчивостей периодических траекторий: пересечения единичной окружности мультипли-

¹⁾ Можно представить себе переход через перемежаемость непосредственно от стационарного состояния к турбулентному режиму. Например, такого рода переход может происходить, если устойчивое и неустойчивое многообразие неподвижной точки потока в фазовом пространстве двумерны. В модели Лоренца такого произойти не может, поскольку размерность фазового пространства равна только трем. Этот тип перемежаемости не был исчерпывающим образом изучен ни экспериментально, ни теоретически, и мы не будем рассматривать его здесь.

каторами Флоке в точке $+1$ (I тип), -1 (III тип) или в двух комплексно-сопряженных собственных значениях (II тип). В следующих трех разделах мы дадим более полное теоретическое описание каждого из этих трех типов и дополним его экспериментальными примерами, подтверждающими существование переменяемости I и III типов.

Пути мультипликаторов Флоке на комплексной плоскости зависят только от линеаризации динамических уравнений относительно предельного цикла. Это приближение, линейное по амплитуде флуктуаций, приводит к неконтролируемому росту флуктуаций. Однако в нашем чисто качественном обзоре явления переменяемости мы описываем флуктуации как достигающие со временем конечного уровня. Следовательно, теория требует анализа эффектов, которые по крайней мере слабо нелинейны по амплитуде флуктуаций. В случае II и III типов переменяемость возможна лишь в том случае, если бифуркация *субкритическая*, т. е. если нелинейные эффекты имеют тенденцию к *усилению* неустойчивости. Но в случае переменяемости I типа мы можем не спрашивать, будет ли бифуркация суперкритической или субкритической, так как существует только один тип бифуркации, которая (в определенном смысле) всегда субкритическая (см. приложение А).

IX. 2. ПЕРЕМЕНАЕМОСТЬ I ТИПА

IX. 2.1. Общие теоретические соображения

В этом случае периодическая траектория, устойчивая при $r \leq r_i$, теряет устойчивость (и фактически исчезает) при $r = r_i$, так как собственное значение матрицы Флоке выходит из единичной окружности через точку $+1$. Наш анализ подразделяется на две части, о которых упоминалось выше. Сначала мы рассмотрим явления в окрестности периодической траектории, теряющей устойчивость. Для этого мы воспользуемся локальным анализом в духе теории Ландау с учетом нелинейных эффектов в членах низшего порядка ряда Тейлора по амплитуде флуктуации. Несмотря на сравнительно элементарный характер такого подхода, он все же позволяет высказать ряд количественных предсказаний, которые впоследствии подлежат сравнению с результатами численного моделирования системы Лоренца и с данными экспериментов с реакцией БЖ.

На второй стадии нашего анализа мы обсудим определенный выше процесс реинъекции, или реламинаризации. Этот процесс зависит от глобальной структуры потока в фазовом пространстве в следующем смысле; если траектория покидает

окрестность потерявшего устойчивость предельного цикла, она должна «обследовать» части фазового пространства, находящиеся на конечном расстоянии от предельного цикла, и тем самым обрести чувствительность к глобальной структуре потока. В частности, мы покажем, что реламинаризация допускает очень простое объяснение для потоков на торе T^2 . Как известно, на T^2 возможны только периодические или квазипериодические режимы. Отсюда следует, что для некоторых переходов между двумя регулярными (нехаотическими) режимами, например для переходов от периодического режима к квазипериодическому, может наблюдаться перемежаемость I типа. Как показывает проводимое ниже обсуждение модели Лоренца, перемежаемость I типа может возникать при переходе от периодического режима к хаотическому. Все эти соображения мы рассмотрим более подробно в разделе, посвященном реламинаризации.

IX. 2.2. Локальный анализ

Собственному значению матрицы Флоке, пересекающему единичную окружность, вообще говоря, соответствует единичный собственный вектор. Именно так, как мы увидим в разд. IX. 2.5, обстоит дело в случае модели Лоренца. Определим на плоскости сечения Пуанкаре координату u , откладываемую по направлению собственного вектора. Следовательно, умножение на матрицу Флоке сводится к простому умножению координаты u на собственное значение $\lambda(r)$:

$$u' = \lambda(r)u. \quad (\text{IX. 1})$$

Пересечение единичной окружности в точке $+1$ при $r = r_i$ означает, что $\lambda(r_i) = 1$ и $(d\lambda/dr)|_{r_i} \neq 0$. Чтобы получить представление о том, как трансформируется отображение Пуанкаре, когда параметр r изменяется в окрестности r_i , воспользуемся упрощающим предположением (которое будет обосновано в дальнейшем) о том, что выражение (IX. 1) при $r = r_i$ есть начальный отрезок ряда Тейлора функции $u'(u, r)$ в окрестности $u = 0$ и $r = r_i$. Тогда для объяснения перемежаемости I типа достаточно учесть члены старших порядков.

Предельный цикл для динамической системы мы обнаруживаем как неподвижную точку отображения Пуанкаре. Вблизи неподвижных точек при $r < r_i$ график функции $u'(u)$ почти касается диагонали (графика тождественного отображения), так как $(du'/du)|_{r_i} = \lambda(r_i) = 1$. Таким образом, мы находимся в ситуации, схематически изображенной на рис. IX. 1, *a*. В точке бифуркации ($r = r_i$) кривая $u'(u)$ касается диагонали, так как

$(du'/du) = 1$ в неподвижной точке (рис. IX.1, б)¹⁾. Переход от рис. IX.1, а к рис. IX.1, б осуществляется сдвигом кривой $u'(u)$ вверх. При дальнейшем увеличении параметра r кривая продолжает подниматься, и между кривой и диагональю образуется узкий канал (рис. IX.1, в).

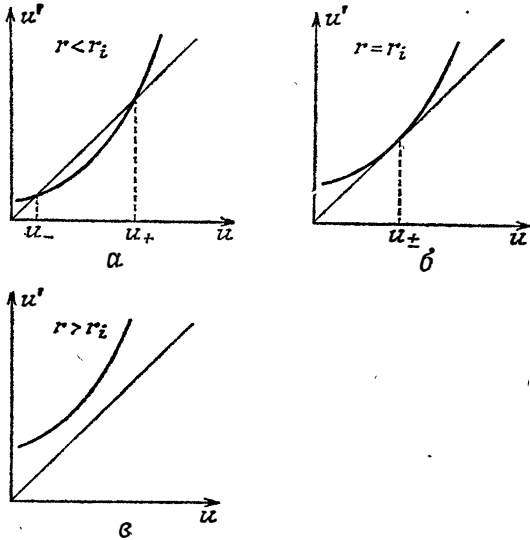


Рис. IX.1. График отображения $u \rightarrow u'(u)$ вблизи его неподвижной точки. Когда угловой коэффициент кривой $u'(u)$ на рис. б становится равным единице, график отображения касается диагонали. При изменении управляющего параметра r происходит непрерывный переход от а к в. На рис. а отображение $u \rightarrow u'(u)$ имеет две неподвижные точки u_{\pm} , которые исчезают на рис. в

Однопараметрическое семейство кривых вблизи контакта представимо в следующей общей для u' форме:

$$u' = u + \varepsilon + u^2. \tag{IX.2}$$

Коэффициент при u^2 (втором члене разложения величины u' в ряд Тейлора относительно $u = 0$ и $r = r_i$) при подходящем выборе масштаба переменной u можно выбрать равным единице. Параметр ε , пропорциональный $r - r_i$, является управляющим параметром, варьируя который, мы осуществляем переход от рис. IX.1, а к рис. IX.1, в.

¹⁾ Эта бифуркация возникает при слиянии двух неподвижных точек (одной устойчивой и другой неустойчивой) и называется бифуркацией седло-узла. Является ли она суперкритической или субкритической, безразлично, поскольку такая бифуркация сопровождается исчезновением всех решений как устойчивых, так и неустойчивых (см. приложение А).

Ситуация при $\varepsilon = 0$ изображена на рис. IX. 1, б: уравнение $u'(u) = u$ имеет двойной корень при $u = 0$ с тангенсом угла наклона касательной $(du'/du)|_{u=0} = +1$. При $\varepsilon \neq 0$ неподвижные точки уравнения (IX. 2) являются решениями уравнения $u'(u) = u$, т. е. $u_{\pm} = \pm(-\varepsilon)^{1/2}$, и существуют только при условии, если $\varepsilon < 0$. Их собственные значения Флоке равны $(du'/du)|_{u_{\pm}} = 1 \pm 2(-\varepsilon)^{1/2}$; поэтому решение u_- устойчиво, а решение u_+ неустойчиво. В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться графическим построением для итераций преобразования $u \rightarrow u'(u)$ (рис. IX. 2).

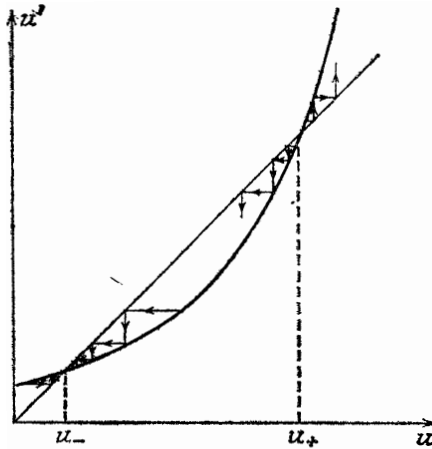


Рис. IX. 2. Итерации отображения $u \rightarrow u'(u)$ для случая, когда существуют две неподвижные точки u_{\pm} . Точка u_- локально устойчива: итерации, начинающиеся вблизи точки u_- , сходятся к ней. Точка u_+ неустойчива: итерации, начинающиеся вблизи точки u_+ , удаляются от нее.

Устойчивая неподвижная точка u_- служит аттрактором для начальных условий $u < u_+$, а неподвижная точка u_+ неустойчива. Итерации, начинающиеся с $u > u_+$, быстро расходятся как $(u^{(0)})^{2n}$ при большом n и u^0 , близком к начальному условию. Графическое представление перехода от режима с $\varepsilon < 0$ к режиму с $\varepsilon > 0$ также показывает, что обрыв ряда Тейлора для $u'(u, r)$ на члене первого порядка по $(r - r_i)$ и второго порядка по u дает правильное описание окрестности перехода: кривизна кривой $u'(u)$, тангенс угла наклона касательной, близкий к $+1$ в области касания, и подъем кривой представлены верно.

Мы видели, что при малом положительном ε между диагональю и кривой $u'(u)$ образуется узкий канал. Это приводит к двум важным следствиям.

1) При $\varepsilon > 0$ ($r \geq r_i$) в рассматриваемой области не существует более неподвижной точки отображения первого возвращения. Это ясно из того, что неподвижные точки представимы в виде $u_{\pm} = \pm (-\varepsilon)^{1/2}$.

2) Итерации, начинающиеся с отрицательного значения u , систематически дрейфуют в область $u > 0$ (рис. IX.3): так как ε и ε^2 положительны, справедливо неравенство $u' = u + \varepsilon + u^2 > u$.

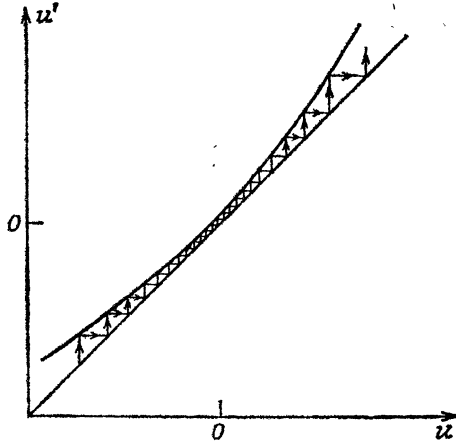


Рис. IX.3. Итерации отображения $u \rightarrow u' = u + \varepsilon + u^2$ при $\varepsilon > 0$. В отличие от отображения на рис. IX.2 ($\varepsilon < 0$) это отображение не имеет ни одной неподвижной точки. При малых положительных ε итерации, начинающиеся при отрицательных значениях u , проводят много времени в узком коридоре, отделяющем график отображения u' от графика тождественного отображения.

Но если параметр ε очень мал, то последовательные итерации накапливаются в самой узкой части канала. Это возвращает нас к вопросу о перемежаемости. Область канала (точнее, значений u , которые действительно наблюдаемы) очень близка к неподвижным точкам, существующим при $\varepsilon < 0$. Следовательно, если мы обратимся снова к непрерывному временному сигналу потока, соответствующего прохождению через канал для отображения Пуанкаре, то обнаружим временную зависимость, во многом аналогичную временной зависимости устойчивых колебаний, происходящих при $\varepsilon < 0$. Но колебания более не устойчивы, так как отображение первого возвращения $u \rightarrow u'(u, \varepsilon)$ не имеет неподвижной точки вблизи нуля и поэтому не существует периодического решения, устойчивого или неустойчивого, уравнений движения вблизи предельного цикла.

Это первое теоретическое описание перемежающегося перехода оставляет открытыми несколько вопросов.

1) Существует ли простая динамическая модель, позволяющая воспроизвести перемежающийся переход только что описанного типа? В разд. IX.2.5 будет показано, что в модели Лоренца такой переход существует.

2) Позволяет ли теория высказывать количественные предсказания, сравнимые с экспериментом?

3) Если итерации прошли сквозь канал и траектория вышла из почти регулярного колебательного режима, то как она может войти снова в канал слева, чтобы начать новую фазу колебаний?

Рассмотрим два последних вопроса.

IX.2.3. Количественные предсказания модели

В нашей теоретической модели исключение физических параметров приводит к универсальной форме преобразования $u \rightarrow u'(u)$:

$$u' = u + \varepsilon + u^2,$$

справедливой в окрестности $u = 0$. Количественные предсказания, вытекающие из этого описания, принимают форму *законов подобия*, например, управляющих средней продолжительностью ламинарных фаз вблизи $\varepsilon = 0$. Чтобы найти эти законы, заметим следующее: если величина u' близка к u , то разность $u' - u$ можно заменить производной du/dk . При этом индекс итерации k надлежит рассматривать как непрерывную переменную, что законно, если разность $u' - u$ мала. Таким образом, *разностное уравнение мы заменяем дифференциальным уравнением*

$$\frac{du}{dk} = \varepsilon + u^2. \quad (\text{IX.3})$$

Это уравнение имеет общее решение

$$u(k) = \varepsilon^{1/2} \operatorname{tg}(\varepsilon^{1/2}(k - k_0)), \quad (\text{IX.4})$$

где k_0 (приближенно) фиксирует шаг, на котором итерация проходит наиболее узкую часть канала. Для удобства записи положим $k_0 = 0$. Функция $u(k)$ расходится при $k = \pm (\pi/2)\varepsilon^{-1/2}$. Смысл этой расходимости состоит в том, что, когда k достигает значений порядка $\varepsilon^{-1/2}$, разность $u' - u$ перестает быть малой величиной, а поэтому разностное уравнение (IX.2) не может быть заменено дифференциальным уравнением (IX.3). Это свидетельствует помимо прочего о том, что число итераций, необходимое для прохождения через канал, составляет величину по-

рядка $\varepsilon^{-1/2}$, так как именно такая величина соответствует интервалу значений между двумя последовательными особыми точками решения (IX.4). Данная оценка является первым законом подобия: средняя продолжительность ламинарных фаз сходится как $\varepsilon^{-1/2} \sim |r - r_i|^{-1/2}$ по мере приближения к порогу.

Когда мы имеем переход через перемежаемость между периодическим и турбулентным режимом, число Ляпунова $\gamma(\varepsilon)$, характеризующее уровень неустойчивости турбулентных траекторий, становится величиной такого же порядка, как величина, обратная времени корреляции сигнала с собой. Предполагая,

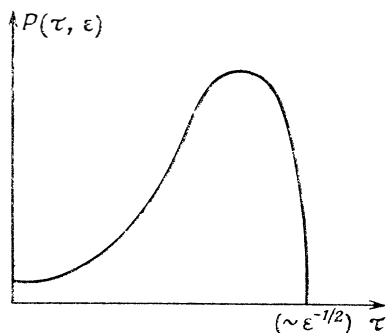


Рис. XI.4. Распределение длин ламинарных фаз в режиме перемежаемости типа I. На рисунке представлен лишь качественный характер распределения, так как вид кривой зависит от деталей процесса реламинизации. Верхняя граница порядка $\varepsilon^{-1/2}$ вблизи $\varepsilon = 0_+$ характерна для перемежаемости типа I и соответствует максимальному времени прохождения коридора на рис. IX.3.

что корреляция почти полностью исчезает во время турбулентных всплесков, мы заключаем, что время корреляции составляет величину порядка $\varepsilon^{-1/2}$, как среднее время прохождения канала, и что обратная ему величина (число Ляпунова) удовлетворяет закону $\gamma(\varepsilon)_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \sim \varepsilon^{1/2}$. Этот закон действительно подтверждается моделью Лоренца (разд. IX.2.5).

Другой интересной величиной является статистическое распределение продолжительности τ ламинарных фаз, т. е. $P(\tau, \varepsilon)$. В выборке из N ламинарных фаз (N — целое число) существует $N \int_0^\tau d\tau' P(\tau', \varepsilon)$ фаз продолжительностью менее τ . Мы уже знаем, что средняя продолжительность ламинарной фазы равна $\int_0^\infty d\tau P(\tau, \varepsilon) \tau \sim \varepsilon^{-1/2}$. При фиксированном ε продолжительность ламинарных фаз ограничена сверху величиной порядка $\varepsilon^{-1/2}$, и чем ближе мы подходим к порогу, тем меньше флуктуирует

продолжительность ламинарных фаз. Эти соображения позволяют нам прийти к качественным заключениям относительно формы функции $P(\tau, \varepsilon)$ в перемежающемся режиме (рис. IX. 4).

Точная форма функции $P(\tau, \varepsilon)$ зависит от деталей рассматриваемой задачи, так как флуктуации параметра τ отражают флуктуации процесса реинжекции в канал. Распределение $P(\tau, \varepsilon)$ априори более легко измеримо, чем упомянутые выше законы подобия, требующие точной локализации порога $\varepsilon = 0$ и, следовательно, серии экспериментов с очень близкими значениями управляющего параметра. Заметим также, что в случае перемежаемости других типов (II и III) распределение продолжительности ламинарных фаз подчиняется закону, весьма отличному от того, которому подчиняется распределение в случае перемежаемости I типа. Этот другой закон распределения имеет максимум при малых временах и убывает алгебраически при больших временах.

IX. 2.4. Реламинаризация

До сих пор мы не рассматривали, как ведут себя перемежающиеся решения вне области канала. Этот вопрос связан с реламинаризацией — процессом, позволяющим траектории вернуться в канал. Мы ограничимся качественными соображениями, так как процесс реинжекции приводит к исследованию областей фазового пространства, имеющих конечные размеры. Следовательно, только топологический подход позволяет нам прийти к заключениям, обладающим некоторой общностью.

Ниже мы опишем три возможных варианта реинжекции: 1) поток на торе; 2) преобразование пекаря (с незначительными модификациями, позволяющими применять его к модели Лоренца); 3) аттрактор Смейла.

Реламинаризация на торе

Напомним, что, когда мы рассматриваем поток на торе T^2 , преобразование Пуанкаре является просто обратимое отображение окружности в себя. Это отображение можно представить в виде графика отображения полуоткрытого интервала $[0, 1)$ в $[0, 1)$ при условии, что определяемая им непрерывная функция $\theta \rightarrow f(\theta)$ строго монотонна (например, монотонно возрастает) и точки 0 и 1 отождествлены. В прямоугольной системе координат на графике (рис. IX. 5) возникают кажущиеся разрывы, которые исчезают, если отождествить 0 и 1. Рис. IX. 5 позволяет наглядно представить, как происходит переход с перемежаемостью I типа в случае диффеоморфизма окружности.

Как показано на рис. IX.6, график функции f касается диагонали, а затем отрывается от нее. В этом случае процесс реинжекции протекает очень просто: итерации, выйдя из канала, описывают круг и входят в канал с другой стороны. Это не переход к турбулентности. Действительно, как мы уже знаем, поток на T^2 может быть периодическим или квазипериодическим, но не хаотическим, т. е. турбулентным. В пережимаемости такого типа «турбулентные» всплески наступают приблизительно периодически и их период либо соизмерим, либо несоизмерим

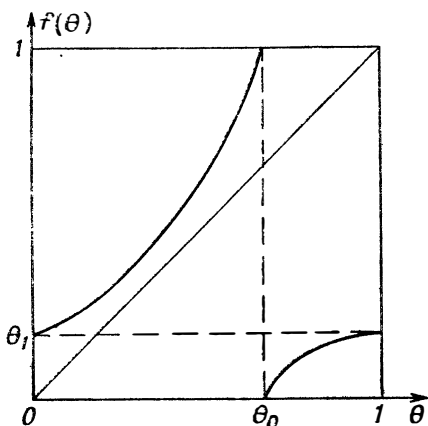


Рис. IX.5. Общий вид отображения первого возвращения для потока на T^2 . Сечение Пуанкаре имеет вид окружности, параметризованной интервалом $[0, 1]$ с отождествленными концами. Разрывы графика отображения в точках 0 , θ_0 и 1 — кажущиеся. Они обусловлены выбором представления для отображения.

с периодом быстрого движения на торе в зависимости от того, является ли пережимающийся режим периодическим или квазипериодическим.

Когда канал закрыт, как на рис. IX.6, а, существуют две неподвижные точки отображения \bar{j} ; это соответствует затягиванию частоты, или синхронизации (см. гл. VII и приложение В). В этом случае после n -кратного обхода тора по большой окружности (параллели) траектория возвращается в исходную точку на малой окружности. Знание отображения Пуанкаре не задает однозначно значение n : число вращений определено лишь по модулю 1. В случае пережимаемости (рис. IX.6, в), предшествующей синхронизации, на временном сигнале наблюдается «проскальзывание фазы» между двумя «квазирегулярными» периодами колебаний. Это явление можно объяснить следующим

образом. При прохождении через канал вращения по большой и малой окружностям четко согласованы по фазе. Во временном сигнале это создает видимость регулярных колебаний только с одним периодом. Между двумя прохождениями канала траектория совершает один дополнительный оборот по малой

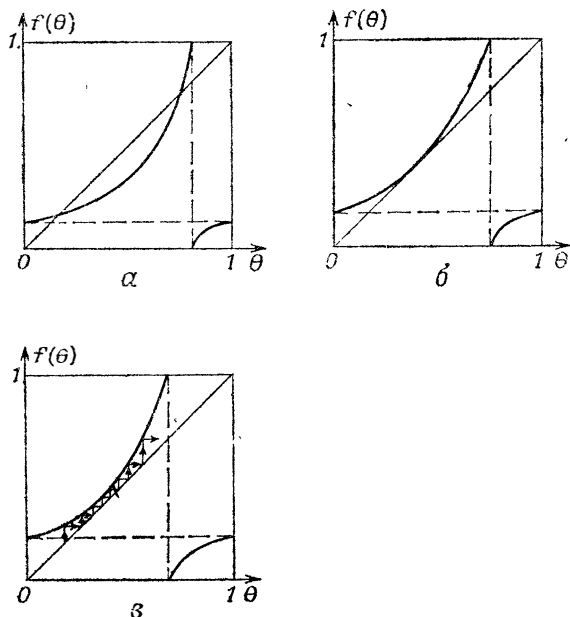


Рис. IX. 6. Переход с перемежаемостью для диффеоморфизма окружности. На рис. *a* устойчивый 1-цикл сосуществует с неустойчивым 1-циклом. В переходной ситуации *б* остается лишь один 1-цикл, который исчезает на рис. *в*. В возникающем режиме перемежаемости реламинаризация происходит тогда, когда точка, выходящая из коридора справа, возвращается в коридор слева после однократного обхода окружности.

окружности. Это означает, что один из осцилляторов сдвигается по фазе на один период относительно другого, отсюда и проскальзывание фазы на временном сигнале. Проскальзывание фазы является признаком аномальной «флуктуации» перемежающегося режима. Может случиться даже так, что для какой-нибудь динамической переменной проскальзывание фазы служит единственным проявлением аномальной флуктуации, не сопровождающейся сколько-нибудь заметным изменением амплитуды колебаний. Так происходит, например, в случае релаксационного осциллятора.

Переход через перемежаемость и преобразование пекаря

В этом разделе мы объясним процесс реламинаризации, возникающий при преобразовании пекаря. Как будет показано ниже, сказанное с незначительными видоизменениями применимо к переходу через перемежаемость в модели Лоренца. Сначала мы приведем несколько результатов относительно отображения сдвига Бернулли и тесно связанного с ним преобразования пекаря. Затем покажем, что, несмотря на кажущиеся разрывы, преобразование пекаря может быть отображением первого возвращения непрерывного потока. И в заключение объясним, как может произойти переход через перемежаемость от периодического режима к хаотическому и, в частности, как происходит реламинаризация.

Преобразованием полуоткрытого интервала $[0, 1)$ в себя с характерной ЧЗНУ является сдвиг Бернулли $x \rightarrow \{2x\}$, где $\{2x\}$ есть по определению дробная часть числа 2 (например, $\{2 \cdot (3/5)\} = 1/5$). При каждой итерации преобразования все расстояния умножаются на 2. Таким образом, даже первоначально бесконечно малое расстояние возрастает в ходе итераций в геометрической прогрессии. Сдвиг Бернулли не может быть отображением первого возвращения по двум причинам: оно не является однозначно обратимым (например, $2 \cdot (1/4)\} = \{2 \cdot (3/4)\} = 1/2$) и непрерывным ($\{2x\} \xrightarrow{x \rightarrow (1/2+0)} 0$, а $\{2x\} \xrightarrow{x \rightarrow (1/2-0)} 1$). На первый взгляд кажется, что *разрывность* отображения несовместима с *непрерывностью* уравнений движения (таких, как уравнения Лоренца). В действительности это не так. Не вдаваясь в детали, можно утверждать, что, поскольку в модели Лоренца всегда существует неустойчивая неподвижная точка (например, конвективное состояние $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$), существует и множество начальных условий, приводящих при больших временах к неустойчивой неподвижной точке.

Такое множество, называемое устойчивым многообразием неподвижной точки, образует поверхность¹⁾ нулевой меры (нулевая мера означает, что вероятность случайного выбора начальных условий, при которых траектория достигает неподвижной точки, чрезвычайно мала и попасть в точку можно, только специальным образом выбрав начальные условия). Если неустойчивая неподвижная точка не принадлежит плоскости сечения

¹⁾ Эта поверхность называется *устойчивым* многообразием неподвижной точки. У *неустойчивой* неподвижной точки, кроме того, имеется *неустойчивое* многообразие (состоящее из всех начальных условий, из которых траектории достигают неподвижную точку за *отрицательное* бесконечно большое время). В отличие от неустойчивой точки устойчивая точка имеет только устойчивые многообразия.

Пуанкаре, то пересечение (если оно существует) устойчивого многообразия с плоскостью Пуанкаре содержит точки, не имеющие образа при отображении первого возвращения. Именно вдоль кривой пересечения отображения Пуанкаре может быть разрывным. Примером такого поведения может служить плоское сечение $Z = r - 1$ в модели Лоренца.

Итак, мы хотим построить обратимое, но разрывное отображение, исходя из сдвига Бернулли. При сдвиге Бернулли у каждой точки имеются ровно два прообраза, т. е. два числа x_0 и x_1 , такие, что

$$0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}, \quad x_1 = x_0 + \frac{1}{2}, \\ \{2x_0\} = \{2x_1\}.$$

Чтобы сделать это преобразование обратимым, необходимо ввести еще одну координату y , позволяющую различать два прообраза точки. Определим преобразование квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ в себя, называемое преобразованием пекаря, как

$$(x, y) \rightarrow (\{2x\}, y'(y, x)),$$

где

$$y'(y, x) = \begin{cases} y/2, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (y+1)/2, & \text{если } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Это обратимое преобразование сохраняет площади, так как якобиан его равен единице:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial x} \\ \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1.$$

Заметим, что по оси x мы сохранили сдвиг Бернулли $x' = \{2x\}$. Для большей наглядности мы нарисовали голову кошки («кошка Арнольда») на единичном квадрате плоскости (x, y) и на его образе после разрезания пополам и растяжения под действием преобразования пекаря (рис. IX.7). Растяжение вдоль оси абсцисс отражает ЧЗНУ преобразования Бернулли.

Весьма простое обобщение предыдущей конструкции позволяет нам построить обратимое и разрывное (двумерное) отображение, исходя из любого двукратного разрывного отображения $x \rightarrow f(x)$ интервала $[0, 1]$ в себя, которое монотонно возрастает. Другое обобщение приводит к отображению, которое сокращает площади, что отражает диссипативный характер рассматриваемой динамической системы. Вследствие этого отобра-

жение имеет аттрактор, наделенный слоистой структурой, в то время как изображенное на рис. IX.7 преобразование пекаря не имеет такого аттрактора, поскольку оно сохраняет площади. Например, вместо отображения y , определяемого по правилу $y \rightarrow y/2$ и $y \rightarrow (y + 1)/2$, мы могли бы воспользоваться отображением $y \rightarrow \beta(y/2)$ и $y \rightarrow \beta(y + 1)/2$, где $0 < \beta < 1$. С каждой итерацией площадь сокращается в $1/\beta$ ($\beta < 1$) раз. Любое отображение f , удовлетворяющее выдвинутым выше условиям

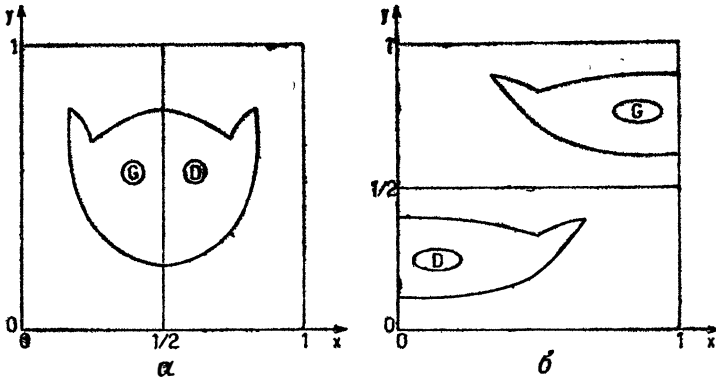


Рис. IX.7. Отображение пекаря. Действие преобразования пекаря можно наглядно представить себе, проследивая преобразования какой-нибудь фигурки, нарисованной на единичном квадрате (в данном случае головы кошки — пример, предложенный В. И. Арнольдом). Смысл названия отображения пекаря ясен из следующего описания. Квадрат из теста a сжимают вдоль оси y и растягивают вдоль оси x . Затем его разрезают пополам по вертикали и одну половину водружают поверх другой, образуя квадрат b . Объем теста при этой операции остается неизменным. Разрывное отображение пекаря сохраняет площади: сжатие в 2 раза вдоль оси y в точности компенсируется растяжением в 2 раза вдоль оси x .

(функция f монотонно возрастает, и у каждой точки имеются два прообраза), может порождать переход с пережимаемостью, аналогичный рассмотренному нами в случае отображения окружности, и аналогичное утверждение справедливо относительно отображения $(x, y) \rightarrow (f(x), y'(y, x))$. На рис. IX.8 показано, как изменяется f при переходе через порог пережимаемости.

Итерируя отображение, представленное на рис. IX.8, b , мы видим, что процесс реинжекции (или реламинаризации) происходит при пересечении разрыва отображения $x \rightarrow f(x)$. По выходе из канала итерации возрастают до тех пор, пока они не оказываются по другую сторону разрыва (обозначенного на рис. IX.8, b через x_0). За исключением особых случаев, итерации не попадают точно в точку при $x = x_0$, а поэтому следующая итерация (в общем случае) смещает точку в область

малых положительных значений x . Так как начало координат является неустойчивой неподвижной точкой, итерации начинают снова расти; в конце концов снова входят в канал и т. д. Заметим, что в отличие от рассмотренной ранее ламинаризации на T^2 в интересующем нас сейчас случае всегда остается (неустойчивая) неподвижная точка отображения, которая на рис. IX.8 выбрана за начало координат. Наконец, упомянем о том, что

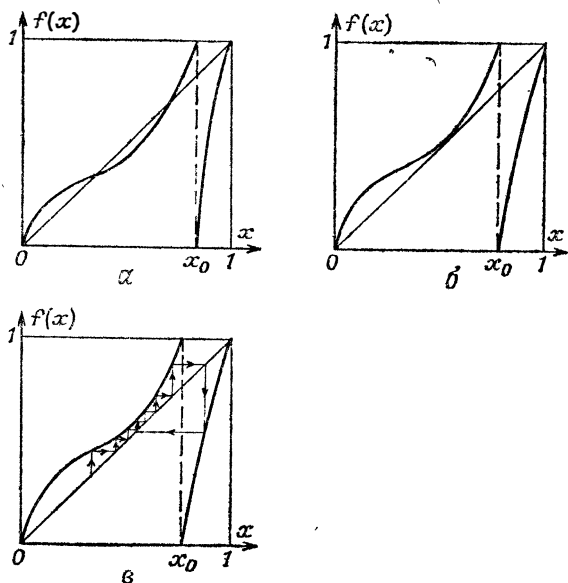


Рис. IX.8. Переход с перемежаемостью типа I в преобразовании лекаря. Тесто растягивается вдоль оси x . Разрыв (подлинный, а не кажущийся) в точке x_0 вводится при разрезании куска теста на две части.

между двумя «ламинарными фазами» траектория попадает в неустойчивые области фазового пространства. В таких областях, например в области $x_0 < x < 1$ на рис. IX.8, производная функции f больше единицы. Следовательно, флуктуации соответствующего временного сигнала существенно непредсказуемы, хотя их средние характеристики не изменяются от одного турбулентного всплеска к другому, так как траектория блуждает в одной и той же части пространства. Таким образом, вполне допустимо говорить о подлинно «турбулентном всплеске». Например, это проявляется в рассматриваемой ниже модели Лоренца.

Реламинаризация в случае аттрактора Смейла

В этом разделе мы попытаемся объяснить, как можно сделать обратимыми сдвиг Бернулли и аналогичное отображение, добавляя по двум другим вещественным координатам отображение, сокращающее площади. Это отображение (известное топологам еще в 20–30-е годы XX столетия) позволило Смейлу показать, что непрерывная динамическая система может обладать «устойчивой» ЧЗНУ (это означает, что ЧЗНУ характерна не только для самой системы, но и для близких к ней систем). В модели Смейла отображение первого возвращения по одной из координат такое же, какое было выведено нами для отображения, близкого к сдвигу Бернулли. Следовательно, если отвлечься от второстепенных деталей, то это отображение по существу сводится к сдвигу Бернулли, а поскольку сдвиг Бернулли порождает перемежаемость, в модели Смейла, основанной на преобразовании пекаря, нет ничего принципиально нового. Но интерпретация процесса реламинаризации отличается от предыдущего случая, поскольку в случае отображения Смейла нет разрыва в отображении первого отображения. Мы обсудим кратко последний вопрос после того, как рассмотрим аттрактор Смейла.

Рассмотрим еще раз двукратное отображение $x \rightarrow f(x)$ интервала $[0, 1]$ на себя, порождающее переход через перемежаемость, которая связана с исчезновением пары неподвижных точек (схематически это исчезновение изображено на рис. IX.9). Но в отличие от предыдущего случая мы исключаем разрыв, выбирая в качестве x угловую переменную так, чтобы отождествить 0 и 1 (рис. IX.9, а). Разрыв при таком выборе устраняется:

$$f(x_0 - 0) = +1 \quad \text{и} \quad f(x_0 + 0) = 0.$$

Чтобы сделать отображение обратимым и непрерывным, мы добавляем к фазовому пространству еще две переменные y и z вместо одной переменной, как в предыдущем случае. Для координат y и z область определения отображения есть внутренность окружности C . Рассмотрим образ окружности при двух значениях x — x_a и x_b , таких, что $f(x_a) = f(x_b)$. Образ отображения, который требуется построить, имеет вид двух небольших непересекающихся окружностей, расположенных диаметрально противоположно внутри C (рис. IX.9, б). Одна из малых окружностей C_a есть образ окружности C при $x = x_a$, другая окружность C_b есть образ окружности C при $x = x_b$. Когда x_a изменяется от 0 до x_0 , а x_b от x_0 до 1, каждая из окружностей C_a и C_b поворачивается на угол π вдоль кривой Γ , изображенной на рис. IX.9, б. Следовательно, когда x принимает значения от

0 до 1, завершая полный цикл изменений на интервале $[0, 1]$, малые окружности также совершают полный оборот, обеспечивая непрерывность отображения по y и z .

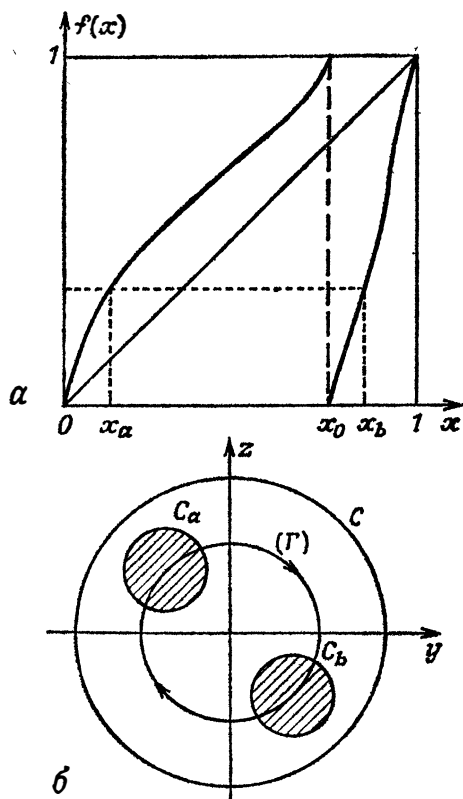


Рис. IX. 9. Действие преобразования Смейла на координаты. *a* — отображение первого возвращения по угловой переменной x . Отображение необратимо: когда x совершает однократный обход окружности (представленной здесь в виде интервала $[0, 1]$ с отождествленными концами), образ $f(x)$ точки x дважды обходит окружность; *b* — преобразование координат y и z . Круг C отображается либо на C_a , либо на C_b в зависимости от того, чему равен x : x_a или x_b (см. рис. *a*). Таким образом, глобальное отображение обратимо. Когда точка x обходит окружность, круги C_a и C_b , оставаясь диаметрально противоположными, совершают полный обход окружности Γ .

Мы можем также разложить это отображение, отправляясь от «бублика», или «полного» тора T^2 (а не только его поверхности). Полный тор есть фазовое пространство: он образуется при обнесении диска, ограниченного окружностью C на пло-

скости (x, y) , по окружности при изменении величины x . Уменьшим объем тора, одновременно удвоив длину его большой окружности (параллели). Сложим затем тор в форме восьмерки и вложим в исходный тор (рис. IX. 10). Эта конструкция иллюстрирует возможное отображение Пуанкаре для *четырёхмерного потока*, сечение Пуанкаре которого порождает *трехмерные*

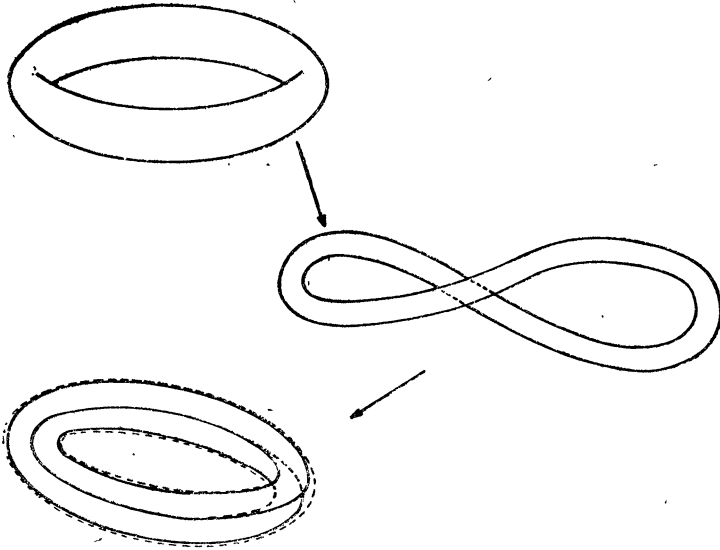


Рис. IX. 10. Схема отображения «шины» в самое себя при преобразовании Смейла. Шина растягивается по большому кругу и складывается в восьмерку. Одна петля восьмерки укладывается поверх другой, после чего шину вкладывают в первоначальную шину. Такое вложение возможно, так как сечение и объем шины уменьшаются вследствие диссипации.

объекты. Она показывает также, что отображение «полного» тора на себя может определить отображение первого возвращения, поскольку оно возникает от последовательности непрерывных деформаций. Вопрос о том, является ли данное отображение фазового пространства более или менее высокой размерности на себя отображением первого возвращения, может быть весьма нетривиальным. Следует заметить также, что такое отображение никогда не наблюдалось в физической системе, несомненно, из-за его сложности.

Качественное описание перехода через перемежаемость в фазовом пространстве и процесса реламинаризации в рассматриваемом непрерывном случае отлично от приведенного выше описания для (разрывного) преобразования пекаря. Следовательно,

нам необходимо найти новое объяснение процесса реламинизации, которое бы не опиралось на разрывность. Рассмотрим окрестность неподвижной точки, исчезающей при переходе через перемежаемость. Эта неподвижная точка слабо устойчива в направлении оси x и обладает конечной устойчивостью в направлениях осей y и z [такая устойчивость соответствует сокращению площадей в плоскости (y, z) — см. рис. IX. 9]. Когда неподвижная точка исчезает и открывается канал (в отображении по координате x), конечное притяжение в направлении осей y и z

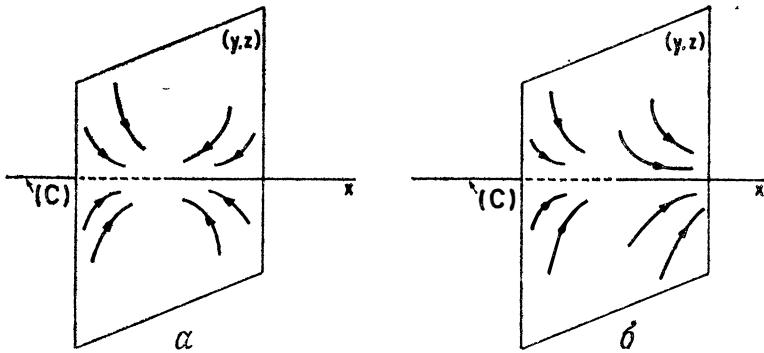


Рис. IX. 11. Окрестность неподвижной точки преобразования Смейла. Итерации быстро сходятся к оси x вдоль осей y и z , но медленно движутся вдоль самой оси x . При переходе от a к b подвижная точка исчезает.

сохраняется. Устойчивое многообразие в направлении оси x вырождается в линию C , которая притягивает близко расположенные точки из своей окрестности и вдоль которой отображением первого возвращения является отображение $x \rightarrow f(x)$ с каналом (рис. IX. 11). Если в своем хаотическом движении (т. е. в фазе турбулентного всплеска) траектория попадает в окрестность «признака» неподвижной точки, то предварительно ее притягивает линия C . Процесс притяжения к линии C протекает с конечной скоростью, в то время как в направлении, параллельном линии C , траектория очень медленно приближается к порогу перемежаемости. Оказавшись почти на линии C , точка начинает ощущать (медленную) динамику одномерного отображения вдоль оси x и медленно дрейфует в канале. Именно поэтому продолжительность ламинарных фаз велика и намного превышает продолжительность «хаотических» блужданий в фазовом пространстве между двумя посещениями «призрака» неподвижной точки. Следовательно, на долю ламинарных фаз приходится подавляющая часть временного поведения системы.

IX. 2.5. Перемежаемость в модели Лоренца

Поскольку модель Лоренца была введена в гл. V и является предметом подробного анализа в приложении Г, мы лишь напомним здесь, что она состоит из трех обыкновенных дифференциальных уравнений и предназначается для моделирования конвекции Рэлея — Бенара. Уравнения имеют следующий вид:

$$\dot{X} = \text{Pr}Y - \text{Pr}X, \quad (\text{IX. 5.1})$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y, \quad (\text{IX. 5.2})$$

$$\dot{Z} = XY - bZ. \quad (\text{IX. 5.3})$$

Модель Лоренца стала предметом интенсивных исследований как функция параметра r и иногда начальных условий при обычных значениях параметров $\text{Pr} = 10$, $b = 8/3$. Эти исследования

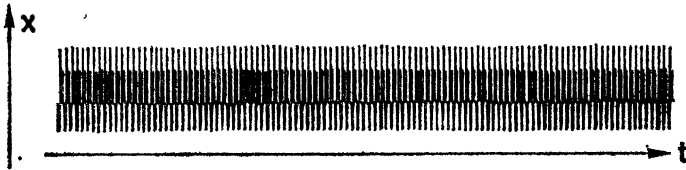


Рис. IX. 12. Периодические колебания в модели Лоренца при $r = 166$. Из работы И. Помо и П. Манневилля.

позволили получить множество различных результатов. В частности, были открыты два сценария перехода к турбулентности: переход через субгармонический каскад (гл. VIII) и переход через перемежаемость. В этом разделе мы опишем в общих чертах, как переход через перемежаемость осуществляется в модели Лоренца.

Один из возможных типов динамических режимов в модели Лоренца связан с существованием предельного цикла. При $r = r_0 = 166$ выбранные случайным образом начальные условия после затухания переходных процессов выходят на совершенно регулярные колебания, в чем нетрудно убедиться, взглянув на графики $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ или любой функции этих величин (рис. IX. 12).

Когда r чуть больше r_0 , мы наблюдаем устойчивые колебания, аналогичные изображенному на рис. IX. 12, на всем интервале $[r_0, r_i]$, где $r_i = 166, 07$. «Прочность» режима, соответствующего предельному циклу, выражает глубокое свойство *структурной устойчивости* (устойчивых) колебаний. Но когда r становится чуть больше r_i , типичные решения модели Лоренца становятся «турбулентными», но весьма характерного вида.

При $r = 166,1$ (напомним, что $r_i \approx 166,07$) временной сигнал $X(t)$ (рис. IX. 13) совершает колебания, почти столь же регулярные, как и сигнал на рис. IX. 12, но прерываемые время от

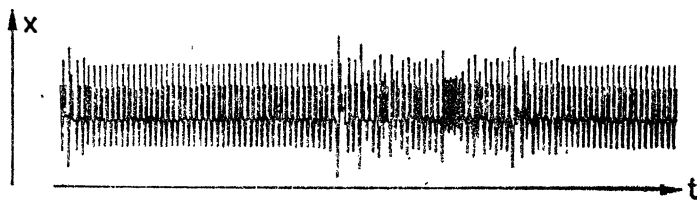


Рис. IX. 13. Перемежаемость в модели Лоренца при $r = 166,1$. Колебания между всплесками турбулентности почти такие же, как и в случае устойчивого предельного цикла на рис. IX. 12.

Из работы И. Помо и Манневия.

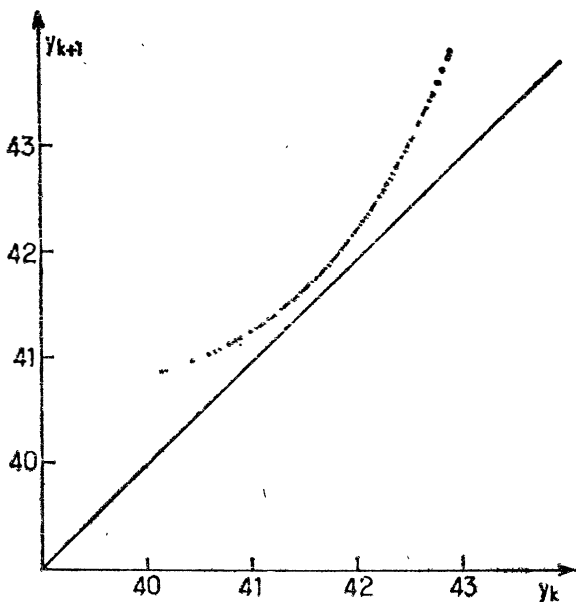


Рис. IX. 14. Отображение первого возвращения в режиме перемежаемости ($r = 166,2$). Построенный график подтверждает существование коридора и свидетельствует о сложности отображения, содержащего несколько разрывов.

Из работы И. Помо и П. Манневия.

времени всплесками турбулентности. Эти хаотические флуктуации имеют вполне определенную среднюю продолжительность и завершаются тем, что мы назвали реламинаризацией, т. е. возвращением к ламинарному режиму. Хотя такое описание заве-

домо включает в себя переход через переменяемость, мы не можем немедленно решить, каким типом переменяемости (I, II или III) обусловлено описанное выше явление.

Переменяемость II типа в случае модели Лоренца (с положительными значениями параметров) исключается, так как при такой переменяемости наблюдалось бы *локальное* расширение объемов в фазовом пространстве, в то время как система Ло-

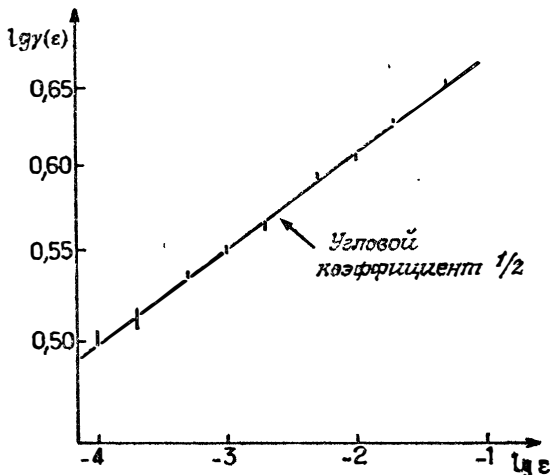


Рис. IX. 15. Вариация числа Ляпунова вблизи порога переменяемости. Наблюдаемый рост в соответствии с теорией пропорционален квадратному корню из расстояния ε от порога, в чем мы легко убеждаемся благодаря логарифмическому масштабу по оси абсцисс.
Из работы И. Помо и П. Манневилля.

ренца *глобально*¹⁾, т. е. всюду, сокращает площади. Не столь определенно мы можем исключить также переменяемость III типа, анализируя рис. IX. 13. В этом сигнале не наблюдается характерная особенность переменяемости III типа (см. разд. IX. 3) — рост субгармонических колебаний в ламинарной фазе. Доказательство того, что в модели Лоренца имеет место переменяемость I типа, опирается главным образом на численное построение отображения первого возвращения, в котором обнаруживается характерное для переменяемости I типа явление «открывания канала». Рис. IX. 14 позволяет со всей определенностью заключить, что в модели Лоренца вблизи $r \approx r_i$

¹⁾ Впрочем, по этой самой причине лоренцева система не может иметь инвариантного тора T^2 : в противном случае внутренний объем тора глобально сохранялся бы данной динамикой. Экспоненциальным сжатием же всех объемов это исключается.

наблюдается перемежаемость I типа. Поскольку в численной модели величинам могут быть приданы любые значения, другие теоретические предсказания также допускают проверку. Например, рис. IX. 15 показывает, что вблизи порога перемежаемости число Ляпунова $\gamma(\varepsilon)$ возрастает, как $\varepsilon^{1/2}$. Это подтверждает также хаотический характер турбулентных всплесков в том смысле, что они разрушают временную корреляцию сигнала с собой. Переход действительно происходит от периодического режима к хаотическому режиму с положительным числом Ляпунова. Наконец, упомянем о том, что процесс реламинаризации в принципе аналогичен преобразованию пекаря. Отображение первого возвращения имеет разрывы, связанные с пересечением устойчивого многообразия неподвижной точки $(0, 0, 0)$ с плоскостью сечения Пуанкаре. К таким следствиям приводит сложность (странного) аттрактора траекторий в режиме перемежаемости.

IX. 2.6. Перемежаемость в реакции БЖ

Введенная в гл. V химическая реакция БЖ обладает необычным разнообразием пространственно-временного поведения. Сосредоточим внимание на переходах через перемежаемость I типа, наблюдавшихся экспериментально в гомогенной фазе в открытом реакторе. Управляющим параметром служит среднее время пребывания T_r реагентов. Физико-химические условия поддерживаются как можно более точно при следующих значениях параметров:

Реакционный объем	28 мл,
Температура	39,6 °С.

Концентрации реагентов в молях на литр:

NaBrO ₃	$1,8 \cdot 10^{-3}$
CH ₂ (COOH) ₂	$5,6 \cdot 10^{-3}$
Ce ₂ (SO ₄) ₃	$5,8 \cdot 10^{-4}$
H ₂ SO ₄	1,5

Концентрация ионов Ce⁴⁺, определяемая по оптической плотности реакционной среды на длине волны 340 нм, изменяется и позволяет следить за ходом реакции.

При среднем времени пребывания T_r около 100 мин реакция совершает абсолютно правильные колебания (рис. IX. 16, a) с периодом порядка минуты. Когда T_r становится меньше критического значения $T_{r, i} \approx 76$ мин, колебания делятся большую

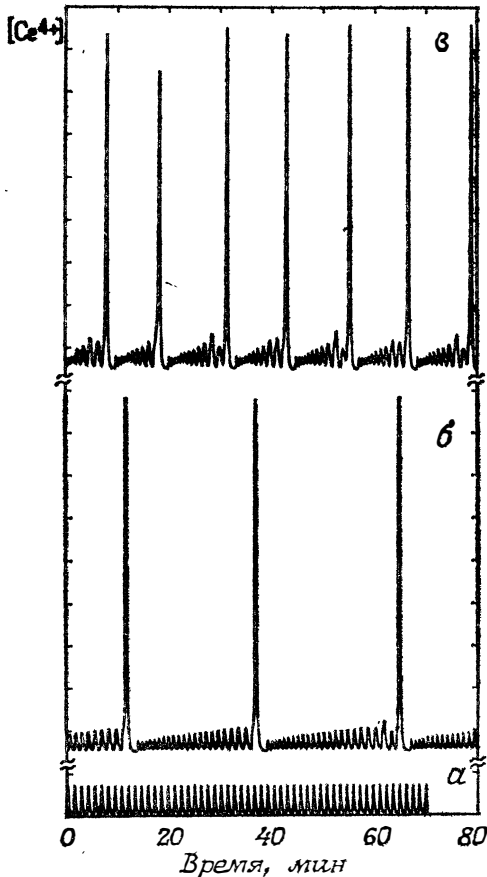


Рис. IX.16. Колебания концентрации ионов Se^{4+} вблизи порога переменяемости в реакции Белоусова — Жаботинского. *a* — ниже порога наблюдаются периодические колебания концентрации — автоколебательный режим с предельным циклом (среднее время пребывания в реакторе 100 мин); *б* — чуть выше порога (среднее время пребывания в реакторе 76 мин) амплитуда малых колебаний медленно возрастает со временем вплоть до внезапного появления пика с большой амплитудой; *в* — при значительно меньшем времени пребывания в реакторе (35 мин) амплитуда малых колебаний сильно уменьшается, сами колебания становятся менее регулярными, а пики с большой амплитудой встречаются чаще.

Из работы И. Помо, Ж.-К. Ру, А. Росси, С. Башляра и К. Видаля.

часть времени, но прерываются от случая к случаю большими флуктуациями (рис. IX.16, б). При дальнейшем уменьшении T_r (ниже $T_{r,i}$) промежутки времени между двумя большими флуктуациями сокращаются (рис. IX.16, в).

Такое поведение естественно наводит на мысль о переходе через перемежаемость. Гипотеза о перемежаемости подтверждается существованием канала в отображении первого возвращения, который может быть найден экспериментально

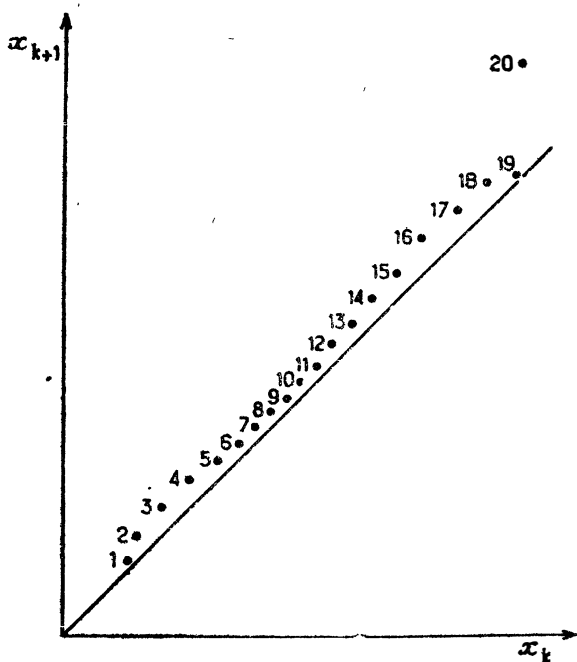


Рис. IX. 17. Отображение первого возвращения $x_{k+1} = f(x_k)$. В качестве координаты x при построении этого графика выбрана амплитуда малых колебаний сигнала на рис. IX. 16, б. Экспериментальные точки пронумерованы в хронологическом порядке, что позволяет проследить за медленным движением вдоль диагонали при прохождении коридора.

Из работы И. Помо, Ж.-К. Ру, А. Росси, С. Башляра и К. Видаля.

(рис. IX. 17) путем построения графика зависимости амплитуды одного колебания от амплитуды предыдущего колебания. Наше утверждение о том, что этот переход, по-видимому, приводит к хаотическому режиму, опирается в основном на расплывание распределения вероятности интервалов между большими флуктуациями (рис. IX. 18). Заметим, что это распределение имеет форму, предсказываемую теорией (см. рис. IX. 4).

Другие результаты, также согласующиеся с теоретическими предсказаниями, были получены в экспериментах с тепловой конвекцией. На рис. IX. 19 показаны два сигнала (один выше,

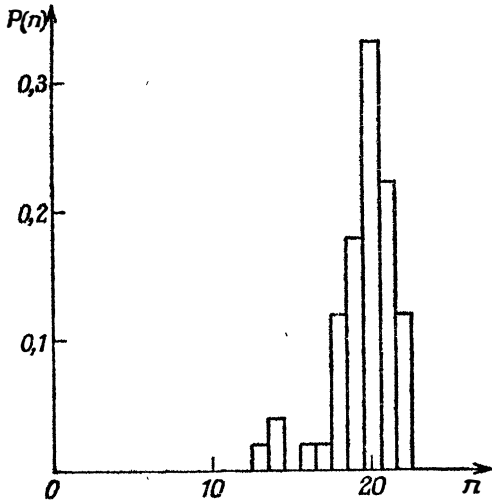


Рис. IX. 18. Гистограмма для фаз периодических колебаний вблизи порога перемежаемости. По оси ординат отложена вероятность $P(n)$ наблюдения n периодических колебаний между двумя пиками с большими амплитудами. Данные заимствованы из экспериментального сигнала, часть которого представлена на рис. IX. 16, б. Построенная гистограмма явно подтверждает теоретические предсказания (см. рис. IX. 4).

Из работы И. Помо, Ж.-К. Ру, А. Росси, С. Башляра и К. Видалея.

α

$$Ra = 270 Ra_c$$



β

$$Ra = 300 Ra_c$$

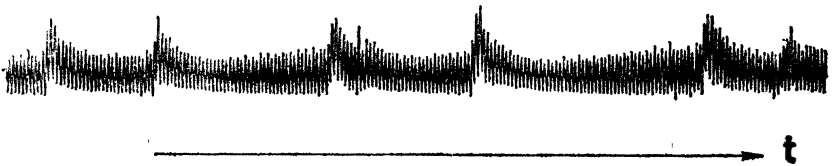


Рис. IX. 19. Поведение скорости вблизи порога перемежаемости типа I в конвекции Рэлея — Бенара. Конвективная структура в этом эксперименте состоит из двух валов вдоль каждого из двух горизонтальных направлений ячейки. a — периодический режим при $Ra < Ra_l$, где $Ra_l = 295 Ra_c$ — порог наступления перемежаемости; b — режим с перемежаемостью при $Ra > Ra_l$. Обращают на себя внимание длинные (неравной длины) последовательности слабо возмущенных колебаний (прохождение через коридор), прерываемые внезапными всплесками. Поразительно сходство между этими экспериментальными сигналами и поведением модели Лоренца (см. рис. IX. 12 и IX. 13).

Из работы П. Берже, М. Дюбуа, П. Манневила и И. Помо

другой ниже порога перемежаемости). Бросается в глаза их сходство с результатами численного моделирования системы Лоренца (см. рис. IX. 12 и IX. 13).

IX. 3. ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ III ТИПА

В этом случае собственное значение матрицы Флөке пересекает единичную окружность на комплексной плоскости в точке -1 и соответствующая бифуркация субкритическая, а поэтому нелинейные эффекты низшего порядка не стабилизируют траектории (или поток) или последовательные итерации (для отображения) в окрестности прежнего аттрактора¹⁾. В этом разделе мы разовьем теорию перемежаемости III типа и проиллюстрируем экспериментально существование такой перемежаемости в неустойчивости РБ.

IX. 3.1. Теория перемежаемости III типа

Как и в случае перемежаемости I типа, теория перемежаемости III типа состоит из нескольких частей.

- 1) Описание локальных явлений в слабо неустойчивой области (соответствующей ламинарным фазам в динамике).
- 2) Количественные следствия для статистики ламинарных фаз вблизи порога.
- 3) Описание процесса реламинаризации: как может начаться ламинарная фаза после турбулентного всплеска?

Описание локальных явлений

Как и в случае перемежаемости I типа, мы можем, исходя из простой модели, сделать количественные предсказания относительно ламинарных фаз динамики, так как эти фазы по существу соответствуют пребыванию траектории в окрестности бывшего аттрактора. Во введении к этой главе и ко второй части книги мы уже упоминали о том, что феноменология перемежаемости относительно независима от типа. Если значения управляющего параметра меньше критического, то мы имеем устойчивый предельный цикл. Если управляющий параметр незначительно превосходит критическое значение, то на протяжении большей части времени мы по-прежнему наблюдаем периодический режим, но он от случая к случаю прерывается турбулентными всплесками. Когда мы приближаемся к критическому

¹⁾ Наоборот, в случае удвоения периода (или, возможно, каскада удвоений периода) нелинейные эффекты стабилизируют линейно неустойчивые субгармонические флуктуации (см. гл. VIII).

значению управляющего параметра, при котором мультипликатор Флоке пересекает единичную окружность в точке -1 , всплески становятся более редкими. Как видно по экспериментально полученным сигналам (наблюдавшимся в случае неустойчивости РБ, рис. IX.20), ламинарная фаза наблюдается как интервал, на протяжении которого амплитуда субгармоники нарастает до тех пор, пока не происходит своего рода

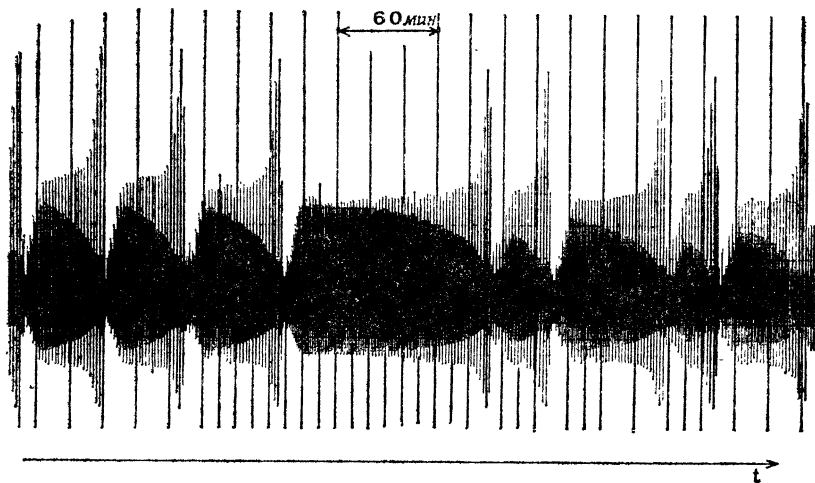


Рис. IX.20. Временная зависимость горизонтального градиента температуры вблизи порога пережеваемости типа III при конвективном режиме Рэлея — Бенара. Этот эксперимент проведен для конвекции Рэлея — Бенара с отношением $Ra/Ra_c \approx 420$, несколько превышающим порог пережеваемости ($Ra/Ra_c \approx 416,5$). Отмечается непрерывный рост с последующим резким увеличением амплитуды субгармоники, сопровождающийся уменьшением амплитуды основной частоты.

Из работы М. Дюбуа, М. А. Рубио и П. Берже.

катастрофа, знаменующая начало турбулентного всплеска. Следуя подходу, близкому к тому, которым мы воспользовались при анализе пережеваемости I типа, исследуем динамику ламинарных фаз с помощью одномерного отображения. Это отображение должно соответствовать слабо неустойчивому многообразию замкнутой траектории.

В *линейном* приближении это отображение принимает вид

$$x \rightarrow x' = -(1 + \varepsilon)x. \quad (\text{IX.6})$$

Неподвижная точка $x=0$ при $\varepsilon=0$ становится нейтрально устойчивой. При малых положительных (отрицательных) значениях эта неподвижная точка неустойчива (устойчива). Муль-

типликатор Флоке $(\partial x'/\partial x)|_{x=0}$ равен $-(1 + \epsilon)$ при пересечении единичной окружности в точке -1 и $\epsilon = 0$. Неподвижная точка имеет координату $x = 0$ вдоль слабо устойчивого (при $\epsilon < 0$) или слабо неустойчивого (при $\epsilon > 0$) многообразия. Как и в случае перемежаемости I типа, дополним линейный анализ, введя в уравнение (IX.6) члены, нелинейные по x . Как будет показано в дальнейшем, для самосогласованности необходимо ввести члены второго и третьего порядков по x . Новое отображение имеет вид

$$x \rightarrow x' = -(1 + \epsilon)x + \alpha x^2 + \beta' x^3. \quad (\text{IX.7})$$

Для дифференциальных уравнений коэффициенты α и β' могут быть определены явными формулами. Заметим, что значения этих коэффициентов определяют выбор масштаба по x , так как они входят в кубический полином, неоднородный по x .

Чтобы проанализировать отображение, задаваемое уравнением (IX.7) по причинам, которые станут ясными из дальнейшего, желательно проитерировать дважды. Если ограничиться членами, кубическими по x и линейными по ϵ (так как нас интересуют только значения x и ϵ в окрестности нуля), то отображение второго возвращения принимает вид

$$x \rightarrow x'' = x' [x'(x)] \approx (1 + 2\epsilon)x + \beta x^3, \quad (\text{IX.8})$$

где

$$\beta = -2(\beta' + \alpha^2).$$

В выражение для β мы включили только члены, не зависящие¹⁾ от ϵ , так как нас интересует, что произойдет в пределе при $\epsilon \rightarrow 0$.

Отметим две отличительные особенности уравнения (IX.8).

1) Коэффициент при линейном члене имеет значение, близкое к $+1$ [а не -1 , как в уравнении (IX.7)]. Это связано просто с тем, что мультипликатор Флоке при каждой итерации умножается на себя. В результате после второй итерации первоначальный коэффициент (-1) переходит в $(-1)^2 = +1$.

2) Уравнение (IX.8) не содержит (по крайней мере в низшем члене по ϵ) члена, квадратичного по x . Это резко контрастирует с моделью перемежаемости I типа, развитой выше, и обусловлено отбрасыванием после двух итераций всех старших членов [а фактически всех членов четного порядка в разложении $x'(x)$] и сохранением только членов низшего порядка по ϵ .

¹⁾ Мы предполагаем также, что β имеет вполне определенный знак вблизи $\epsilon = 0$. Действительно, β — коэффициент при кубическом члене в разложении функции $x'(x)$ в ряд Тейлора — зависит от ϵ . Мы не рассматриваем случай $\beta (\epsilon = 0) = 0$, который соответствует коразмерности 2.

Уравнение (IX. 8) можно представить в виде

$$x'' = x((1 + 2\varepsilon) + \beta x^2).$$

Нелинейный член βx^2 в зависимости от знака коэффициента ε порождает два противоположных эффекта. Если $\beta < 0$, то мы имеем суперкритическую бифуркацию с удвоением периода. В слабонелинейной области ($\varepsilon \geq 0$) отображение, задаваемое уравнением (IX. 8), имеет устойчивую неподвижную точку (точка $x = 0$ неустойчива). Следовательно, отображение x' имеет устойчивый 2-цикл: существуют значения x_1 и x_2 , такие, что

$$x''(x_{1,2}) = x_{1,2}; \quad x'(x_1) = x_2; \quad x'(x_2) = x_1,$$

где

$$x_{1,2} \underset{\varepsilon \rightarrow 0+}{\approx} \pm (-2\varepsilon/\beta)^{1/2}$$

и

$$|(dx'/dx)|_{x_1} \cdot |(dx'/dx)|_{x_2} < 1 \text{ (условие устойчивости).}$$

Наоборот, если $\beta > 0$, то нелинейный член βx^2 оказывает такой же эффект, как и $\varepsilon > 0$: с каждой итерацией он увеличивает мультипликативный коэффициент при x . Таким образом, нелинейность усиливает неустойчивость и мы имеем субкритическую бифуркацию. Именно этот последний случай приводит к перемежаемости III типа, которая нас сейчас интересует.

Как и в случае перемежаемости I типа, мы проанализируем субкритическую бифуркацию ($\beta > 0$), заменив вблизи неподвижной точки разность $x'' - x$ производной dx/dk и разностное уравнение (IX. 8) дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dk} = x(2\varepsilon + \beta x^2). \tag{IX. 9}$$

Вводя в x нормирующий множитель $(2\varepsilon/\beta)^{1/2}$, а в k нормирующий множитель ε^{-1} , приведем это уравнение к универсальной форме

$$\frac{dx}{dk} = x(1 + x^2). \tag{IX. 10}$$

Это масштабное преобразование само по себе полезно для теоретических предсказаний. Индекс k , задающий число колебаний на основной частоте, является мерой времени. Естественным масштабom для k служит величина ε^{-1} . Мы заключаем, что средняя продолжительность ламинарных периодов вблизи порога перемежаемости расходитя, как ε^{-1} . Вблизи того же порога среднее время корреляции сигнала также сравнимо по

порядку величины с средней продолжительностью ламинарной фазы. Это время есть величина, обратная показателю Ляпунова, характеризующему среднюю скорость расходимости траекторий в фазовом пространстве. Мы заключаем, что показатель Ляпунова, характеризующий турбулентность, возрастает в фазе перемежаемости, как ϵ . Аналогичным образом мы можем утверждать, что, так как масштабом x служит величина $(2\epsilon/\beta)^{1/2}$, средняя амплитуда субгармонических флуктуаций в ламинарных фазах вблизи порога есть величина порядка $\epsilon^{1/2}$.

Вместо интегрирования уравнения (IX. 10) попытаемся объяснить, как вывести из него статистическое распределение длин ламинарных периодов.

Статистика ламинарных периодов

Уравнение (IX. 9) показывает, что при данном малом значении параметра ϵ существуют два режима. Если x достаточно превосходит величину $(2\epsilon/\beta)^{1/2}$, то доминирует член βx^2 . При этих условиях уравнение (IX. 9) сводится к уравнению

$$\frac{dx}{dk} = \beta x^3, \quad (\text{IX. 11})$$

которое имеет решение

$$x = \frac{x_0}{(1 - 2\beta k x_0^2)^{1/2}}$$

с начальным условием $x(k=0) = x_0$. Когда знаменатель обращается в нуль, т. е. при

$$k = \frac{1}{2\beta x_0^2}, \quad (\text{IX. 12})$$

это решение расходится. Продолжительность интервала времени, к концу которого решение уравнения (IX. 11) расходится, можно отождествить с концом ламинарной фазы, измеряемой в периодах основного колебания.

Это соображение позволяет нам получить первую оценку статистического распределения ламинарных фаз. Предположим, что начальное значение x_0 выбрано случайным образом, т. е., иначе говоря, из однородного распределения в окрестности неустойчивой неподвижной точки (гипотеза, которая должна быть подтверждена впоследствии при исследовании процесса реламинаризации). Соотношение между x_0 и k (длиной ламинарной фазы), задаваемое формулой (IX. 12), приводит к следующему соотношению дифференциалов:

$$dk = \frac{1}{\beta x_0^3} dx,$$

которое может быть представлено в виде

$$dx_0 = \frac{k^{-3/2}}{2^{3/2}\beta^{1/2}} dk.$$

Это соотношение позволяет нам связать распределение длин k с распределением начальных условий x_0 . Если величина x_0 произвольна, то в достаточной большой статистической выборке доля значений x_0 , заключенных между x_0 и $x_0 + dx_0$, пропорциональна dx_0 . Предыдущее соотношение между дифференциалами показывает, что относительное число ламинарных фаз, заключенных между k и $k + dk$, есть величина порядка $P(k)dk \sim \beta^{-1/2}k^{-3/2}dk$.

Разумеется, при малых k этот закон распределения не выполняется. По определению малые k означают, что длина ламинарной фазы есть величина порядка нескольких основных периодов. При столь коротких фазах последовательные итерации расходятся слишком быстро того, чтобы мы могли считать разность $x'' - x$ малой и заменить отображение (IX. 8) уравнением (IX. 9)¹⁾. Следовательно, распределение $P(k) \sim k^{-3/2}$ справедливо только при достаточно больших значениях k . Но эти значения не должны быть и слишком большими. Если k становится большим, то, как показывает уравнение (IX. 12), начальная точка итерации приближается к нулю, а это противоречит гипотезе о том, что $x \gg (\varepsilon/\beta)^{1/2}$, которая была использована при выводе уравнения (IX. 11) из уравнения (IX. 9).

Если эта гипотеза не выполняется (т. е. если исходная точка недостаточно близка к неустойчивой неподвижной точке), то ламинарная фаза разделяется на две части. В первой из них главным в уравнении (IX. 9) является член, линейный по x , а поэтому $x(k) \sim x_0 \exp(2k\varepsilon)$. Эта часть заканчивается приблизительно тогда, когда $x \approx (\varepsilon/\beta)^{1/2}$, так что $k \sim (1/4\varepsilon) \ln(\varepsilon/\beta x_0^2)$. Как показывают рассуждения, аналогичные приведенным выше, далее при $k \gg \varepsilon^{-1}$ (что реализуется при $x_0 \ll (\varepsilon/\beta)^{1/2}$) распределение вероятности $P(k)$ убывает по закону $\exp(-2\varepsilon k)$.

¹⁾ Строго говоря, разностное уравнение (IX. 8) предсказывает, что итерации расходятся как

$$x(k) \approx \beta^k (x_0)^{2^k}.$$

Однако это весьма быстрая расходимость не приводит к особенности за конечное время в отличие от того, что происходит в дифференциальном уравнении (IX. 10). Но, как бы то ни было, используемое нами приближение означает, что значения x малы, и это позволяет нам оборвать разложение $x'(x)$ в ряд Тейлора после нескольких первых членов. Быстрая расходимость итерации, или особенности в дифференциальном уравнении, вынуждает x покинуть область применимости уравнений.

Резюмируя, можно утверждать, что $P(k)$ имеет два асимптотических предела: при $1 \ll k \ll \varepsilon^{-1}$ мы получаем $P(k) \sim k^{-3/2}$, а при $k \gg \varepsilon^{-1}$ мы имеем $P(k) \sim \exp(-2\varepsilon k)$.

Реламинаризация

Как и в случае перемежаемости I типа, анализ реламинаризации не может быть в той же мере количественным, что и анализ ламинарной фазы: реламинаризация зависит от глобальной структуры потока, и поэтому ее анализ должен носить топологический, т. е. качественный, характер.

Прежде всего заметим, что мультипликатор Флоке не может пересечь единичную окружность в точке -1 в случае, когда поток определен на T^2 или на плоскости. Действительно, построив соответствующие графики, нетрудно понять, что слабо неустойчивая траектория, отщепляющаяся от замкнутой траектории, должна быть проведена на листе Мёбиуса, срединной линией которого служит замкнутая траектория. Лист Мёбиуса неориентируем¹⁾ и поэтому не может быть частью плоскости или T^2 , которые являются ориентируемыми поверхностями. Это означает, что в случае перемежаемости III типа процесс реламинаризации (в отличие от перемежаемости I типа) не может происходить на торе. Что же касается реламинаризации посредством преобразования пекаря или на аттракторе Смейла, то она может происходить при перемежаемости как III, так и I типа.

Чтобы в конструкции, представленной на рис. IX.9, перейти от I типа к III типу, достаточно после завершения процесса (или перед его началом, так как система итерационная) произвести дополнительно поворот тора на 180° . Эта операция изменяет знак мультипликатора Флоке, перемещая его из окрестности точки $+1$ (перемежаемость I типа) в окрестность точки -1 (перемежаемость III типа). В результате отображение на рис. IX.9 переходит от $x \rightarrow f(x)$ в $x \rightarrow \hat{f}(x) = f(1-x)$ (рис. IX.21). Такого рода топологические построения устанавли-

¹⁾ Поверхность называется ориентируемой, если на замкнутых кривых, проведенных на ней, можно однозначно задать направление вращения. Плоскость, поверхность сферы и тор T^2 ориентируемы. Проведя на одной из этих поверхностей небольшую окружность и непрерывно перемещая ее по поверхности, мы однозначно определим направление вращения (например, по часовой стрелке) в каждой точке поверхности. В отличие от этого лист Мёбиуса или, например, бутылка Клейна неориентируемы. Перемещая по листу Мёбиуса небольшую (ориентированную) окружность, мы можем оказаться на оборотной стороне листа. Окружности, проведенные на «лицевой» и на оборотной стороне листа Мёбиуса, имеют противоположную ориентацию, поскольку лист Мёбиуса — односторонняя поверхность (у которой лицевая сторона и «изнанка» отождествлены). Это доказывает, что лист Мёбиуса неориентируем.

ливают связь между перемежаемостью типа I и типа III лишь в довольно общем виде, не детализируя ее. В частности, такие глобальные построения в общем случае не сохраняют неподвижные точки.

Все эти соображения применимы к проблеме реламинаризации. В случае перемежаемости I типа реламинаризация возникает в результате прохождения итераций через канал, образующийся между графиком функции $f(x)$ и диагональю. В случае

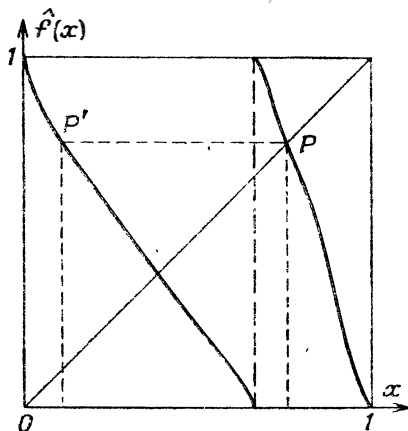


Рис. IX. 21. Отображение окружности при перемежаемости типа III. Если угловой коэффициент в точке P становится меньше -1 и сопровождается субкритической бифуркацией, то возникает перемежаемость типа III. Существует (неустойчивая) неподвижная точка P , имеющая два прообраза: себя и другую точку P' . Когда итерация попадает в окрестность точки P' , отображение переводит ее в окрестность точки P : это и есть процесс реламинаризации.

перемежаемости III типа ничего такого не наблюдается, так как пересечение единичной окружности мультипликатором Флоке не сопровождается исчезновением неподвижной точки отображения. В случае отображения, схематически изображенного на рис. IX. 21, перемежаемость III типа может возникнуть, когда тангенс угла наклона касательной к кривой $\hat{f}(x)$ в неподвижной точке P станет меньше -1 и будет выполнено условие $\beta > 0$ на первые члены разложения функции \hat{f} в ряд Тейлора в окрестности точки P , обеспечивающее субкритичность сопровождающей бифуркации. Как известно, эти условия не гарантируют исчезновения неподвижной точки P . Реламинаризация возникает, когда у неподвижной точки имеются два прообраза: она сама и точка, обозначенная на рис. IX. 21 буквой P' . Тогда если траектория, блуждая во время турбулентного всплеска, окажется в

окрестности точки P' , то следующие итерации вернут ее в окрестность точки P — слабо неустойчивой неподвижной точки. Это будет означать наступление новой ламинарной фазы. Может показаться, что такой процесс исключается для реальных систем, описываемых детерминистическими уравнениями, которые позволяют нам единственным способом возвращаться вспять по времени¹⁾. Такое соображение априори исключало бы необратимое отображение Пуанкаре. Но мы уже увидели, что, когда отображение Пуанкаре является достаточно сильно сжимающим вдоль некоторых направлений пространства, порождаемое им отображение первого возвращения свободно от ограничения обратимости. В случае перемежаемости достаточно даже слабого сжатия вдоль устойчивого многообразия. Если начальная точка оказывается в достаточно близкой окрестности устойчивого многообразия траектории, то выходящая из нее траектория экспоненциально быстро устремляется к периодической траектории (или к неподвижной точке сечения Пуанкаре) вдоль этого многообразия и медленно удаляется от нее вдоль неустойчивого многообразия, так как вблизи порога перемежаемости неустойчивость всего лишь нейтральна. Используя отображение на рис. IX. 21 в качестве модели, мы можем свести приближение к неустойчивой неподвижной точке вдоль ее устойчивого многообразия к единственной итерации — той, которая переводит P' в P .

При этих условиях мы можем обосновать случайный выбор начальной точки итерации в ламинарной фазе в окрестности точки P . Действительно, по крайней мере на рис. IX. 21, отображение $x \rightarrow f(x)$ является сильно растягивающим вне достаточно

¹⁾ Возможность вернуться вспять во времени понятна, когда мы рассматриваем обыкновенные дифференциальные уравнения вида $(dx/dt) = F(x)$. С другой стороны, для дифференциальных уравнений с диссипацией, например уравнений гидродинамики, вообще говоря, невозможно вернуться назад во времени, даже если речь идет о бесконечно малых интервалах. Если мы попытаемся вернуться вспять во времени в уравнении теплопроводности, или уравнении Фурье, $T_t = \kappa T_{xx}$ ($\kappa > 0$), т. е. найти $T(t, x)$ по $T(t + \tau, x')$ при $\tau > 0$, то получим *некорректную* задачу (в смысле Адамара). Поэтому не вполне ясно, является ли условие единственности траекторий при обращении времени столь ограничительным, каким оно кажется. Необратимость проистекает из существования флуктуаций, затухающих со временем, со сколь угодно малыми постоянными времени. При обращении времени эти флуктуации усиливаются сколь угодно быстро и становятся неконтролируемыми. В случае гидродинамики можно принять точку зрения, согласно которой в *сокращенном описании* (например, в описании, приводящем к обыкновенным дифференциальным уравнениям, как в случае модели Лоренца) такие флуктуации пренебрежимо малы независимо от направления времени. Такая гипотеза (формально) делает возможной обратимость сокращенного описания. Более подробное обоснование обратимости увело бы нас слишком далеко в сторону от темы нашей книги.

малой окрестности точки P . Это растяжение, или ЧЗНУ, как мы знаем, означает, что начальные условия забываются, т. е. что точки реинжекции по существу выбираются случайным образом. В следующем разделе мы приведем описание эксперимента РБ, в котором наблюдался такой переход через перемежаемость III типа.

IX.3.2. Перемежаемость III типа в конвекции РБ

Эксперимент проводился при следующих условиях: конвекция наблюдалась в силиконовом масле с числом Прандтля $Pr \approx 38$, высотой ячейки $d \approx 1,5$ см, длиной $L_x = 2d$ и шириной $L_y = 1,2d$. Число Рэлея Ra примерно в 380—400 раз больше критического значения Ra_c . Измеряется отклонение узкого пучка света, вызванное градиентом температуры в конвектирующей жидкости. Непосредственные наблюдения сводятся к следующему. При Ra/Ra_c между 333 и 377 вызванные тепловой конвекцией течения совершают почти регулярные колебания¹⁾ с частотой порядка $1,7 \cdot 10^{-2}$ Гц (т. е. с периодом около 1 мин). При $Ra/Ra_c \approx 416,7$ в сигнале возникает субгармоническая частота, сопровождаемая перемежаемостью. Типичный сигнал представлен на рис. IX.20. Между двумя турбулентными всплесками отчетливо видны увеличение амплитуды субгармоники и заметное уменьшение основной частоты. Когда амплитуда субгармоники достигает того же порядка величины, что и амплитуда основного колебания, возникает флуктуация, или турбулентный всплеск, нарушающая регулярность сигнала. Сразу же после этого устанавливается регулярный режим с малой случайной амплитудой субгармоники. Начальная амплитуда определяет продолжительность ламинарной фазы до следующего турбулентного всплеска. Чем меньше начальная амплитуда субгармоники, тем больше продолжительность ламинарной фазы. Режим перемежаемости обратим, и это подтверждает соотношение

¹⁾ Физическая природа этих колебаний весьма сложна и связана с геометрией конвективных течений в ячейке. В описываемом эксперименте колебания связаны с пульсацией холодного «шлейфа». Шлейф — это локальная флуктуация температуры жидкости, в данном случае понижение по сравнению с окружающей жидкостью. Шлейф отделяется через более или менее регулярные интервалы времени от границ, создающих градиент температуры в жидкости. Шлейфы существуют главным образом в жидкостях при больших числах Прандтля по следующим причинам. Большое число Прандтля означает, что кинематическая вязкость жидкости во много раз больше ее теплопроводности. Поэтому последняя малоэффективна, что позволяет большим градиентам температуры и плотности долго существовать в жидкости, прежде чем они релаксируют. В свою очередь это вызывает большие флуктуации архимедовой силы, которая служит причиной движения шлейфа.

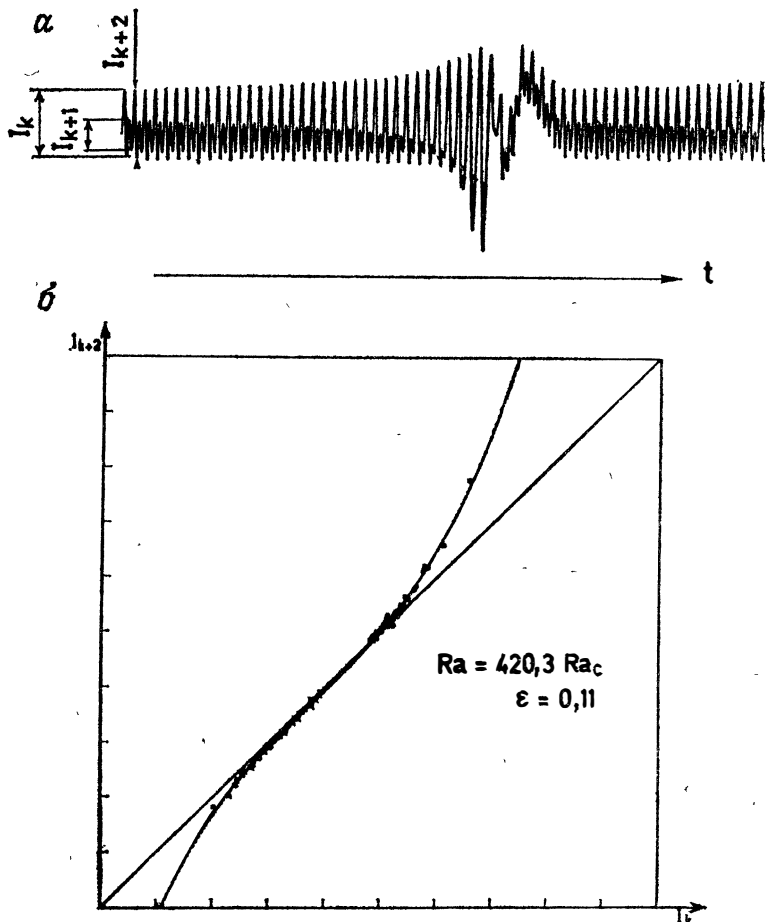


Рис. IX. 22. Перемежаемость типа III в конвекции Рэлея — Бенара. *a* — образец переменного сигнала для того же режима, который представлен на рис. IX. 20. Растянутая шкала времени позволяет более наглядно представить рост субгармоники и связанное с ним затухание основной частоты. Слева определены величины I_k , используемые при построении графика отображения второго возвращения. *б* — график отображения второго возвращения $I_{k+2} = f(I_k)$.

При построении этого графика по экспериментальным данным, представленным на рис. IX. 20, использованы два различных символа: один из них (квадратики) соответствует субгармонике (возрастающие амплитуды), другой (крестики) отвечает фундаментальной частоте (уменьшающиеся амплитуды).

Непрерывная кривая — график функции

$$f(I) = (1 + 2\varepsilon)I + aI^2 + bI^3$$

(*a* и *b* — константы, удовлетворяющие неравенству $a \ll b$). Как предсказывает теория, именно такую форму должна иметь функция, задающая отображение второго возвращения вблизи порога перемежаемости. Обращает внимание превосходное согласие с экспериментальными данными, полученное путем выбора подходящего значения подгоняющего параметра ε ($\varepsilon = 0,11$).

Из работы М. Дюбуа, М. А. Рубио и П. Берже.

ние о том, что переход к хаотическому состоянию через пере-
межаемость обратим.

Используя экспериментальные данные, можно показать, что
в ламинарных фазах отображение второго возвращения имеет
форму, предсказанную уравнением (IX. 8). Пусть I_k — значение
 k -го максимума физического сигнала, например сигнала, пред-
ставленного на рис. IX. 20. Отображение второго возвращения
определяется графиком зависимости $I_{k+2} = f(I_k)$ для последо-

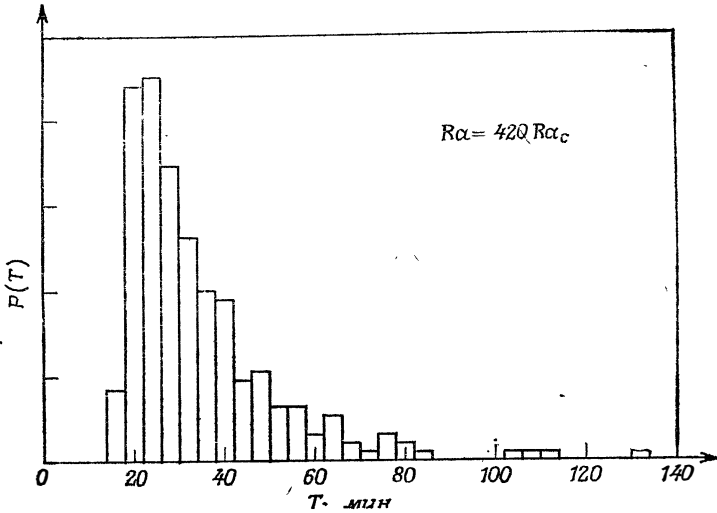


Рис. IX. 23. Гистограмма для ламинарных фаз. Наблюдаемые длины варьи-
руются от 18 мин до 2 ч и более. Наиболее существенной особенностью и
распределения является длинный хвост при больших T , характерный для пере-
межаемости типа III. Форма распределения заметно отличается от рас-
пределения, характерного для перемежаемости типа I (см. рис. IX. 4 и IX. 18).
Из работы М. Дюбуа и М. А. Рубио.

вательности значений k . Напомним, что теория предсказывает
следующую форму функции:

$$I_{k+1} = (1 + 2\epsilon) I_k + b I_k^3. \tag{IX. 13}$$

Как видно из рис. IX. 22, б, эта форма хорошо согласуется с экс-
периментальными данными. В частности, обращает на себя
внимание существование точки перегиба в окрестности непод-
вижной точки отображения $f(I_k)$. Это соответствует отсутствию
квадратичного члена в разложении функции $f(I_k)$ в ряд Тей-
лора.

Другим характерным признаком перемежаемости является
статистическое распределение длин τ ламинарных фаз

(рис. IX. 23). Как показывают вычисления, аналогичные проведенным в разд. IX. 3.1, если $P(\tau)d\tau$ — доля ламинарных фаз в интервале времени от τ до $\tau + d\tau$ ($d\tau$ — малая величина), то

$$P(\tau) \sim \frac{\exp(-2\epsilon\tau)}{[1 - \exp(-4\epsilon\tau)]^{3/2}}.$$

При $\tau \gg \epsilon^{-1}$ имеем $P(\tau) \sim \exp(-2\epsilon\tau)$, в то время как при $1 \ll \tau \ll \epsilon^{-1}$ справедливо соотношение $P(\tau) \sim (4\epsilon\tau)^{-3/2}$ (оба соотношения подтверждают теоретические предсказания). Время

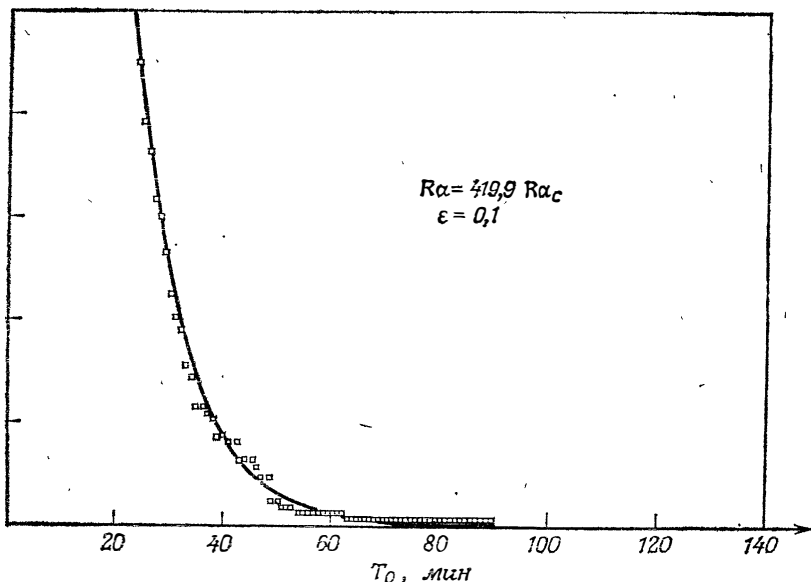


Рис. IX. 24. Число ламинарных фаз, продолжительность которых превышает τ_0 . Экспериментальные точки получены путем суммирования гистограммы на рис. IX. 23. Непрерывная линия — теоретическая кривая, подогнанная к экспериментальным точкам путем изменения свободного параметра ϵ . Поразительно, что выбранное значение ($\epsilon = 0,1$) оказалось очень близким к значению, определенному независимо от отображений второго возвращения (рис. IX. 21).

Из работы М. Дюбуа, М. А. Рубио и П. Берже.

$\tau = 1$, ограничивающее область применимости последней оценки, можно интерпретировать как период колебаний с основной частотой. Действительно, представление о ламинарной фазе имеет смысл только в том случае, если на протяжении интервала времени, в течение которого длится такая фаза, мы можем наблюдать большое число колебаний с основной частотой. Сравнение теории и эксперимента в рассматриваемом случае произво-

дится путем подсчета числа ламинарных фаз $N(\tau > \tau_0)$, длящихся больше τ_0 . При $\tau_0 \gg 1$ получаем

$$N(\tau > \tau_0) \sim \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau P(\tau) \sim \left(\frac{\exp(-4\epsilon\tau_0)}{1 - \exp(-4\epsilon\tau_0)} \right)^{1/2}. \quad (\text{IX. 14})$$

Эта функция параметра τ_0 полностью определяется значением параметра ϵ . На рис. IX.24 показаны результаты сравнения уравнения (IX.14) и экспериментальных данных. Согласие превосходное, так как наилучшая аппроксимация уравнением (IX.14) экспериментальных данных осуществляется при $\epsilon \approx 0,1$, в то время как сами экспериментальные данные (рис. IX.22, б и IX.23) приводят к $\epsilon \approx 0,11$. Это позволяет идентифицировать наблюдаемое явление как перемежаемость III типа. Заметим также, что одна из гипотез, сформулированных в разд. IX.3.1, согласно которой ламинарные фазы начинаются случайно в окрестности неподвижной точки, хорошо подтверждается статистическими исследованиями, приводящими к рис. IX.24.

IX.4. ТЕОРИЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ II ТИПА

Мы ограничим свой анализ слабо нелинейными, или локальными, явлениями, т. е. процессами, происходящими в окрестности слабо неустойчивой замкнутой траектории. Мы можем построить модель отображения первого возвращения — непрерывную, обратимую и порождающую переход через перемежаемость II типа. Помимо прочего такая модель указывает возможный путь для реламинаризации. В основе модели лежит весьма сложное геометрическое построение в пятимерном пространстве, причем главная идея по существу совпадает с той, которая положена в основу аттрактора Смейла.

Когда два комплексно-сопряженных мультипликатора Флоке выходят из единичной окружности на комплексной плоскости, периодическая траектория утрачивает свою устойчивость. Неустойчивое возмущение экспоненциально возрастает по модулю (в линейном приближении), одновременно поворачиваясь на конечный угол в своей плоскости при каждой итерации. Для описания линейных и слабо нелинейных явлений при таких бифуркациях естественно (и это уже традиция) воспользоваться комплексными числами. Пусть (x, y) — прямоугольные координаты на плоскости малых отклонений (возмущений) от неподвижной точки в направлении собственных векторов, соответствующих двум комплексно-сопряженным собственным значениям, покидающим единичную окружность. Мы определяем комплексное число $z = x + iy$ так, что в линеаризованном приближении для

амплитуд малых возмущений действие отображения первого возвращения сводится к умножению z на $\lambda e^{i\phi}$, где λ —положительное вещественное число, а ϕ —просто вещественное число. На пороге неустойчивости параметр λ равен единице, ϕ —угол поворота образа точки при каждой итерации (см. приложение В). В этих обозначениях два комплексно-сопряженных собственных значения матрицы Флоке имеют вид $\lambda e^{\pm i\phi}$ и определение линейной устойчивости сводится к исследованию необычайно простой итерации

$$z \rightarrow z' = \lambda e^{i\phi} z. \quad (\text{IX. 15})$$

Как и в случае перемежаемости двух рассмотренных выше типов, введем малый управляющий параметр ε , обращение которого в нуль совпадает с нейтральной устойчивостью, т. е. с $\lambda = 1$. Таким образом, мы получаем $\lambda = 1 + \varepsilon$. Угол ϕ , входящий в уравнение (IX. 15), априори также зависит от ε . Но мы предполагаем, что $\phi(\varepsilon = 0)$ не совпадает с одним из специальных углов: $0, \pi/2, \pi, 2\pi/3, \dots$. Как будет показано ниже, исключение таких ситуаций позволяет пренебречь зависимостью ϕ от ε в окрестности $\varepsilon = 0$.

Как и в случае перемежаемости I и III типов, анализ слабых нелинейностей мы начинаем с интерпретации правой части уравнения (IX. 15) как начала разложения в ряд Тейлора функции $z'(z)$. Но в рассматриваемом случае не существует причины, по которой разложение должно идти только по степеням z . Это означает, что мы должны рассматривать на равных основаниях степени z и z^* (величины, комплексно-сопряженной с z) и классифицировать члены ряда только по степени модуля величины z . Как и в случае перемежаемости III типа, мы должны удерживать члены до третьего порядка, чтобы получить теорию первого порядка по нелинейностям. Мы получаем отображение

$$z \rightarrow z' = \lambda e^{i\phi} z + a_1 z^2 + a_2 (z^*)^2 + a_3 z z^* + \\ + b_1 z^3 + b_2 z^2 z^* + b_3 (z^*)^2 z + b_4 (z^*)^3 + \dots, \quad (\text{IX. 16})$$

где a_i и b_i —комплексные коэффициенты, которые в аналитическом примере могут быть вычислены на основе общих принципов разложения типа Ландау. Так же как линейные члены, нелинейные члены порождают два эффекта: они поворачивают z вокруг начала координат и изменяют модуль числа z . Как разделить эти два эффекта, вообще говоря, неясно, так как они тесно связаны нелинейностью уравнения (IX. 16). Но в рассматриваемом нами примере можно воспользоваться упрощениями, возникающими вблизи $z = 0$ и $\lambda = 1$, т. е. в окрестности, где справедливо разложение (IX. 16). Эффект нелинейностей весьма раз-

личен в зависимости от того, рассматриваем ли мы *модуль* z или *угол* числа z . Неустойчивость сказывается главным образом на поведении модуля, который нейтрально устойчив при $\varepsilon = 0$. Это означает, что при λ , близком к 1 (или ε близком к 0), модуль числа z эволюционирует, как мы и предполагаем, очень медленно. Но угол, на который z поворачивается с каждой итерацией, остается конечным при $\varepsilon = 0$. Следовательно, предполагая, что угол z изменяется значительно, в то время как модуль z остается почти неизменным, мы по существу принимаем *адиабатическое приближение*¹⁾. В качестве примера рассмотрим случай, когда нелинейности в уравнении (IX. 16) сводятся к одному члену $a_1 z^2$:

$$z \rightarrow z' = \lambda e^{i\phi} z + a_1 z^2. \quad (\text{IX. 17.1})$$

Уравнение для комплексно-сопряженного числа z^* имеет вид

$$z^* \rightarrow z'^* = \lambda e^{-i\phi} z^* + a_1^* (z^*)^2. \quad (\text{IX. 17.2})$$

Умножая почленно эти два выражения, получаем

$$|z'|^2 = \lambda^2 |z|^2 + |a_1|^2 |z|^4 + \lambda |z|^2 (e^{i\phi} z^* a_1^* + e^{-i\phi} z a_1). \quad (\text{IX. 18})$$

Теперь нас интересует средняя эволюция величины $|z'|^2$ при числе итераций, достаточно большом для того, чтобы угол z мог принимать многие значения, но в то же время достаточно малом для того, чтобы модуль z мог изменяться лишь незначительно. В первом приближении отображение, действующее на углы, есть поворот на постоянный угол ϕ с начальным значением ϕ_0 . Известно²⁾, что если ϕ — произвольный иррациональный угол, то углы $(\phi_0 + k\phi) \pmod{2\pi}$ равномерно распределены на интервале $[0, 2\pi]$, где k принимает многие различные целые значения. Следовательно, среднее, которое мы хотим найти, есть

¹⁾ Адиабатическим приближением называется такое приближение, в котором параметр изменяется медленно, в то время как система испытывает быстрые изменения (обычно быстрые колебания). Такая терминология берет начало в термодинамике: процесс там называется адиабатическим, если протекает настолько медленно, что позволяет пренебречь необратимыми явлениями, обусловленными вязким трением, пропорциональным скорости процесса. Несмотря на кажущуюся простоту, адиабатические теории отличаются тонкостью и глубиной: они связаны с такими проблемами, как долговременная устойчивость Солнечной системы, микроскопические основания второго начала термодинамики и классический предел квантовой механики.

²⁾ Именно здесь входит условие, согласно которому угол ϕ ($\varepsilon = 0$) не принимает специальные значения $\pi/2$, $2\pi/3$ и т. д. В противном случае мы не могли бы принять гипотезу о том, что значения $(\phi_0 + k\phi)$ равномерно распределены по окружности. Так как ϕ зависит от $|z|$, мы рассматриваем гораздо более сложный случай: необходимо в явном виде учитывать связь между ϕ и модулем $|z|$. Соответствующая теория напоминает знаменитую теорию КАМ (Колмогорова — Арнольда — Мозера).

простое среднее по углу числа z с однородным распределением на $[0, 2\pi]$: Усредняя уравнение (IX. 18), мы оставляем неизменными члены $\lambda^2|z|^2$ и $|a_1|^2|z^4|$, не зависящие от угла. Наоборот, рассмотрим последний член в уравнении (IX. 18): если ψ — угол комплексного числа z , то последний член зависит от ψ как $\cos(\bar{\phi} - \psi)$ и при усреднении по ψ дает нуль. Обобщая эти рассуждения, мы заключаем, что средняя эволюция модуля $|z|$ (который мы обозначим через ρ) в адиабатическом приближении определяется соотношением

$$\rho \rightarrow \rho' = (\lambda^2 \rho^2 + A\rho^4 + \dots)^{1/2}. \quad (\text{IX. 19})$$

Сумма в скобках представляет собой ряд по ρ^2 , коэффициенты которого могут быть почленно вычислены¹⁾ путем разложения соотношения (IX. 16) и усреднения по ϕ . Коэффициент A в формуле (IX. 19) зависит явно от коэффициентов a_i и b_i соотношения (IX. 16).

В рассматриваемом приближении модуль ρ близок к 0 и член $A\rho^4$ можно считать малым по сравнению с $\lambda^2\rho^2$. Это позволяет разложить в ряд квадратный корень в соотношении (IX. 19) и получить

$$\rho' = \lambda\rho \left(1 + \frac{A\rho^2}{2\lambda^2} + \dots \right). \quad (\text{IX. 20})$$

(Напомним, что параметр λ положителен и близок к единице.) Здесь также члены в скобке являются началом ряда по ρ^2 . В дальнейшем мы ограничимся только членами, явно выписанными в соотношении (IX. 20), т. е. отображение модуля имеет вид

$$\rho \rightarrow \rho' = \lambda\rho \left(1 + \frac{A}{2\lambda^2} \rho^2 \right). \quad (\text{IX. 21})$$

Различие между субкритической и суперкритической бифуркацией зависит от знака коэффициента A . Чтобы убедиться в этом, мы можем рассматривать в первом приближении действие нелинейных членов в $\rho'(\rho)$ только как замену множителя λ величиной $\lambda [1 + (A/2\lambda^2)\rho^2]$. Если $\lambda > 1$ (т. е. в условиях линейной неустойчивости), неустойчивость может компенсироваться нелинейностями низшего порядка при $A < 0$ и усиливаться при $A > 0$. Чтобы придать нашему анализу более количествен-

¹⁾ Заметим, что в эти выражения угол ϕ явно не входит. Это отражает глубокое свойство адиабатического приближения: «быстрая» переменная (в нашем случае ϕ) не связана с «медленной» переменной (в нашем случае ρ) во всех алгебраических порядках разложения. Связь возникает только в трансцендентных порядках по ρ , например в $\exp(-1/\rho)$,

ный характер, рассмотрим окрестность точки $\lambda = 1$, т. е. значения $\lambda = 1 + \varepsilon$, где $|\varepsilon| \ll 1$. Отображение, задаваемое соотношением (IX.21), имеет одну или несколько неподвижных точек, которые являются решениями уравнений: $\rho = (-2\varepsilon/A)^{1/2}$ при $A < 0$ и $\rho = 0$. (Мы видим здесь квадратично-корневую зависимость, характерную для теории бифуркаций Ландау.) Если $A < 0$, то существует суперкритическая бифуркация и неподвижная точка $\rho = (-2\varepsilon/A)^{1/2}$ линейно устойчива при $\varepsilon > 0$, а $\rho = 0$ неустойчива. Если же $A > 0$ (мы здесь рассматриваем именно этот случай), то бифуркация субкритическая. Это означает, что при $\varepsilon < 0$ линейно устойчивая точка сосуществует с неустойчивой неподвижной точкой $\rho = (-2\varepsilon/A)^{1/2}$. При $\varepsilon = 0$ неустойчивая неподвижная точка [в действительности инвариантная окружность на плоскости (x, y) неустойчивых направлений матрицы Флоке] сливается с точкой $\rho = 0$ — проекцией предельного цикла на плоскость (x, y) . Следовательно, при $\varepsilon > 0$ не существует устойчивого аттрактора в области фазового пространства вблизи интересующей нас замкнутой траектории. Именно в этом случае становится возможной переменяемость II типа, которую мы исследуем, используя задаваемое соотношением (IX.21) отображение. Приведем ρ к безразмерной форме делением на $(2\lambda^2/A)^{1/2}$, запишем соотношение (IX.21) в «стандартном» виде

$$\rho \rightarrow \rho' = (1 + \varepsilon)\rho + \rho^3. \quad (\text{IX.22})$$

Формально перед нами то же итерационное соотношение, с которым мы встречались при анализе переменяемости III типа. Следовательно, соотношение между длиной ламинарных периодов (обозначенной через N), значением ρ в начале ламинарного периода (обозначенное через ρ_0) и параметр ε остаются по существу такими же, как в случае переменяемости III типа. Если $\varepsilon^{1/2} \ll \rho_0 \ll 1$, то в итерациях, задаваемых соотношением (IX.22), главным является кубический член и $N \sim \rho_0^{-2}$. С другой стороны, если $\rho_0 \ll \varepsilon^{1/2}$, то увеличение амплитуды колебаний в ламинарной фазе управляется членом $\varepsilon\rho$ в уравнении (IX.22) и поэтому $N \sim -\varepsilon^{-1} \ln \rho_0$. Таким образом, как и в случае переменяемости III типа, гистограмма длин N ламинарных фаз состоит из двух частей, отвечающих неравенствам $N \gg \varepsilon^{-1}$ и $1 \ll N \ll \varepsilon^{-1}$. Однако эта элементарная теория распределения отличается от аналогичной теории, развитой для переменяемости III типа. В последнем случае неустойчивым многообразием является линия, и ламинарная фаза начинается на этой линии в случайной точке вблизи неустойчивой неподвижной точки. Иначе говоря, если s_0 — расстояние между начальной точкой

и неустойчивой неподвижной точкой, то вероятность того, что s_0 принадлежит интервалу $[s_0, s_0 + ds_0]$, равна просто дифференциалу ds_0 , умноженному на нормирующий множитель, но в случае перемежаемости II типа неустойчивое многообразие двумерно. Продолжительность ламинарной фазы, как и прежде, определяется расстоянием ρ_0 между начальной точкой и неустойчивой неподвижной точкой, измеренным на поверхности обычным способом. Если начальная точка выбрана случайным образом на поверхности, то вероятность того, что ρ_0 лежит в интервале $[\rho_0, \rho_0 + d\rho_0]$, равна величине $2\pi\rho_0 d\rho_0$, умноженной на константу, так как $2\pi\rho_0 d\rho_0$ — площадь кольца, ограниченного окружностями радиусов ρ_0 и $(\rho_0 + d\rho_0)$ с центром в неподвижной точке. Так как $\rho_0 \sim N^{-1/2}$, мы получаем следующее соотношение между дифференциалами:

$$d\rho_0 \sim N^{-3/2} dN.$$

Предположим теперь, что начальная точка выбрана на неустойчивом многообразии случайным образом, т. е. с мерой $d\mu$, пропорциональной площади многообразия. Тогда $d\mu \sim \rho_0 d\rho_0$, или $d\mu \sim \rho_0 N^{-3/2} dN \sim N^{-2} dN$. Если мы находимся точно на пороге неустойчивости ($\varepsilon = 0$), то это означает, что средняя продолжительность ламинарной фазы расходится, так как она определяется интегралом, который при больших N ведет себя как $\int N (dN/N^2)$. Но при конечном (малом) ε среднее значение $\langle N \rangle$ величины N не расходится. Действительно, распределение вероятности $P(N)$ ведет себя как $1/N^2$ при $\varepsilon^{-1} \ll N \ll 1$ (что соответствует $\varepsilon^{1/2} \ll \rho_0 \ll 1$) и как $\exp(-2\varepsilon N)$ при $N \gg \varepsilon^{-1}$ (или, что эквивалентно, $\rho_0 \ll \varepsilon^{1/2}$). Таким образом, если параметр ε конечен, то интеграл, определяющий среднее $\langle N \rangle$, сходится при больших N , так как в этой области $P(N)$ убывает экспоненциально. Характерный временной масштаб, ограничивающий продолжительность ламинарной фазы, изменяется вблизи $\varepsilon = 0$ как ε^{-1} . Поскольку интеграл, определяющий среднее $\langle N \rangle$, при $\varepsilon = 0$ логарифмически расходится в области больших N , мы заключаем, что в окрестности $\varepsilon = 0$ среднее $\langle N \rangle$ ведет себя как ε^{-1} . Предположим теперь, что число Ляпунова $\gamma(\varepsilon)$ — величина того же порядка, что и $\langle N \rangle^{-1}$, и сигнал утрачивает память после каждого турбулентного всплеска. Тогда $\gamma(\varepsilon) \sim 1/\ln(1/\varepsilon)$. В заключение укажем, что тщательные численные исследования обнаруживают тонкие статистические эффекты, которые вносят изменения в приведенное выше элементарное описание статистики.

ЛИТЕРАТУРА

- Bergé P., Dubois P., Manneville P., Pomeau Y.*, Intermittency in Rayleigh — Bénard convection, *Le Journal de Physique — Letters*, **41**, L341 (1980).
- Dubois M.*, Approach of the turbulence in hydrodynamic instabilities. — In: *Symmetries and Broken Symmetries in Condensed Matter physics*, I. D. S. E. T. Paris (1981).
- Dubois M., Rubio M. A., Bergé P.*, Experimental Evidence of Intermittencies Associated with a Subharmonic Bifurcation, *Physical Review Letters*, **51**, 1446 (1983).
- Manneville P., Pomeau Y.*, Intermittency and the Lorenz Model. — In: *Symmetries and Broken Symmetries in Condensed Matter Physics*, I. D. S. E. T. Paris (1981).
- Manneville P., Pomeau Y.*, Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems, *Physica*, **1D**, 219 (1980).
- Manneville P.*, Intermittency, Self Similarity and $1/f$ Spectrum, *Le Journal de Physique*, **41**, 1235 (1980).
- Pomeau Y.*, Approche de la turbulence, Actes de la conférence de la Société française de Physique, Clermont-Ferrand, Les éditions de physique, Orsay (1981).
- Pomeau Y., Manneville P.*, Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems, *Communications in Mathematical Physics*, **74**, 189 (1980).

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНАЯ ДИСКУССИЯ

К. Видаль: «Прежде всего мне хотелось бы затронуть один принципиально важный аспект, не получивший должного развития в книге: область, в пределах которой теория динамических систем верна и применима, до сих пор остается неопределенной. Мы располагаем описаниями отдельных событий и последовательностей событий, приводящих к хаотическим ситуациям: из таких описаний состоит вторая часть книги. Это означает, что при определенных условиях мы в состоянии предсказать, каким образом возникнет аperiodический режим, т. е. произойдет переход. Но теория ничего не говорит о том, сочетание каких условий гарантирует, что данная последовательность событий завершится установлением хаотического режима. Теория не определяет (по крайней мере в существующем ныне виде) *предпосылки* хаотического режима, и это, несомненно, следует отнести к числу ее недостатков».

И. Помо: «Я полностью согласен с этой точкой зрения. Можно сказать, однако, что проделанный анализ переходов к хаосу и хаотических явлений, несмотря на все недостатки, обладает или должен обладать большой прогностической силой, поскольку экспериментаторы наблюдали и переходы к хаосу, и хаотические явления. Это позволяет нам надеяться на то, что, анализируя более подробно эксперименты, пытаясь разобраться в деталях наблюдавшихся явлений, мы поймем, наконец, почему в данном эксперименте удалось наблюдать именно тот, а не другой сценарий перехода к хаосу, почему наблюдался тот или иной тип турбулентности, почему было большим или малым число степеней свободы. Неясно пока другое: потребуется ли для того, чтобы узнать все это, чудовищный объем вычислений, ставящий под сомнение эффективность предсказаний, поскольку эти расчеты сопряжены с неприемлемо большими затратами машинного времени и в конце концов не слишком проясняют существо дела, или мы можем разработать промежуточную теорию, менее общую, чем теория динамических систем в том виде, как она существует теперь, но достаточно подробную, чтобы предсказывать происходящее в данной ситуации, не вда-

ваясь в детали конкретных уравнений, описывающих систему».

П. Берже: «В связи с высказанными замечаниями по поводу предсказаний я хотел бы подчеркнуть определенную *практическую* ценность понятий, изложенных в этой книге. Например, мы можем надеяться, что когда-нибудь нам удастся уточнить прогнозы погоды, если бы только мы сумели обобщить метод отображений первого возвращения. Мы видели, что такие отображения действительно позволяют определить будущее, хотя и не позволяют предсказывать долговременное поведение хаотической системы, т. е. найти «порядок в хаосе». Можем ли мы, опираясь на такого рода методы, усовершенствовать прогноз погоды? Можем ли мы лучше понять исследование зависящих от двух параметров популяций живых организмов и эволюцию популяций различных видов с разнотипными циклами и, следовательно, лучше управлять этими популяциями? Мы считаем, что это возможно. Следует отметить также важность того, что в последнее время теории детерминированных динамических систем нашли применение в гидродинамике, по крайней мере для анализа некоторых типов турбулентности. В настоящее время нет сомнения в том, что во многих экспериментах, в которых эффективное число степеней свободы мало, нам удалось понять несколько вполне определенных маршрутов, ведущих к хаосу. Возникает серьезный вопрос: можем ли мы продвинуться гораздо дальше на пути к развитой турбулентности, в которой число степеней свободы очень велико? В этой связи следует упомянуть несколько самых последних работ по моделям, занимающим в некотором смысле промежуточное положение между моделями с небольшим числом степеней свободы, рассмотренными в этой книге, и моделями с очень большим, практически бесконечным числом степеней свободы. Мы начинаем понимать механизмы, возникающие в модельных системах с 50 или около того степенями свободы. Небезынтересно отметить, что прогресс, достигнутый в понимании промежуточных случаев, подготавливает нас к преодолению пропасти, отделяющей в настоящее время детерминированную турбулентность от обширной области развитой турбулентности, в которой пока остается много неясного».

И. Помо: «Интересно, что были предложены модели для описания таких достаточно конкретных явлений, как химическая турбулентность и неустойчивости в пламенах. Эти модели занимают промежуточное положение между системами с небольшим числом степеней свободы и полностью развитой турбулентностью со всеми примыкающими проблемами. В частности, эти модели обладают тем преимуществом, что позволяют понять взаимодействие между описанными в книге эффектами сложной дина-

мики и не менее сложными эффектами пространственной структуры — двумя элементами, которые, несомненно, должны помочь нам объяснить развитую турбулентность. Важно понимать, что исследования, проводимые на основе этих моделей, сопряжены с большим объемом вычислений, но наша цель состоит отнюдь не в проведении этих громоздких вычислений, а в анализе результатов вычислений для достижения лучшего понимания. Проводимым до сих пор исследованиям развитой турбулентности не доставало не средств для выполнения большого объема вычислений, а скорее способа анализа их результатов, опиравшегося на слишком рудиментарные понятия и потому не вносящего сколько-нибудь существенного вклада в понимание статистической механики, лежащей в основе теории турбулентности. Ныне мы постепенно выходим из этой ситуации слишком грубого анализа проблем нелинейной эволюции, но пока лишь начинаем использовать сравнительно тонкие методы анализа, применявшиеся к системам с небольшим числом степеней свободы».

К. Видаль: «Если мы попытаемся (как вы только что сделали) заглянуть в будущее, то разумно ожидать, что нас подхватит течение и наш путь будет пролегать от систем с небольшим числом степеней свободы к системам с большим числом степеней свободы, прежде чем будет достигнуто более общее описание с элементами понимания полностью развитой турбулентности. Кроме того, мы должны предпринять попытку подняться против течения, т. е. найти что-нибудь, напоминающее первое и даже второе начало теории динамических систем по аналогии с термодинамикой. Я должен признать, что задача эта весьма амбициозна. Знание общих начал позволило бы вывести минимальные условия, необходимые для наблюдения того или иного режима, а это десятикратно усилит мощь теории.

Построение теории, как мы только что видели, уже идет по одному пути: это направление является естественным продолжением достижений последних десяти лет или около того. Другой путь уводит к самым глубоким корням анализа: если на этом пути когда-нибудь и удастся достичь прогресса, то весьма вероятно, что продвижение будет очень медленно. Из множества многообещающих идей и фактов, изложенных нами так, как мы понимаем их сейчас, следует особо выделить один элемент, имеющий первостепенное значение: я имею в виду ту концептуальную методологическую и педагогическую роль, которую теория динамических систем играет в точных науках».

И. Помо: «Мы уже неоднократно отмечали в книге практическое значение такого понятия, как чувствительная зависимость от начальных условий, и я хотел бы кратко вернуться к нему еще раз. Необходимо отчетливо сознавать, что введение чувстви-

тельной зависимости от начальных условий знаменует подлинный прогресс в точных науках. Анализ многих явлений, о которых мы беголо упоминали (в метеорологии, биологии, турбулентности, экономике), был пересмотрен на основе понятия ЧЗНУ. Выяснилось, что даже, казалось бы, строгий математический формализм может приводить к понятию статистической вариации без необходимости введения флуктуаций внешнего происхождения, и, как мы знаем, несмотря на этот статистический аспект, можно что-то сделать, например проанализировать распределения вероятности флуктуаций или кратковременную эволюцию, установление хаоса через показатели Ляпунова или возникновение непредсказуемости. В определенном смысле именно этот аспект явлений, исследованный нами, отсутствует в той математике, которую мы изучали до сих пор, и становится все более важным для понимания затронутого нами круга явлений.

В этой связи уместно подчеркнуть новизну методов, используемых и внедренных в практику. Новизна практически состоит только в одном: хотя фундаментальные идеи, о которых идет речь, начали широко применяться лет 10—20 назад, они были высказаны такими учеными, как Пуанкаре и Адамар, еще в начале столетия. Случилось так, что их практическое проникновение в физику произошло лишь совсем недавно. Они оказались весьма эффективными, в чем мы уже успели убедиться, и таят в себе необычайно богатые возможности с точки зрения образовательного аспекта, что делает желательным включение их в программу высшей школы. Еще один важный аспект новых идей и понятий — универсальность».

П. Берже: «Я хотел бы дополнить сказанное и подчеркнуть «достоинства» новой области в надежде на то, что по крайней мере некоторые из них не прошли незамеченными для читателя нашей книги. Первое достоинство — искусство упрощения, приводящее к моделям, имеющим некий смысл, несмотря на все огрубляющие предположения. Приведу конкретный пример: конвекцию Рэлея — Бенара даже в малой ячейке, где уместаются только два конвективных вала, описывают уравнения гидродинамики — уравнения Навье — Стокса, которые, как правило, не поддаются решению. Без упрощений и аппроксимаций самые мощные компьютеры не позволяют получить численные решения. Один из возможных подходов состоит в том, чтобы построить модель, сильно урезав исходные уравнения. Как известно, именно так была построена модель Лоренца. Такой подход нельзя не признать многообещающим, но мы можем пойти дальше и перейти от дифференциальных уравнений к разностным с тем, чтобы закончить дву- и даже одномерными отображениями. Пройдя этот переход, мы приходим к предельно

простой формулировке, для реализации которой требуются самые скромные вычислительные средства. На этом пути нам удалось помимо прочего найти маршрут, ведущий к турбулентности через каскады удвоенный периодов, убедительно подтвержденный экспериментально.

Второе, что мне хотелось бы отметить особо — силу идеи универсальности. Мы упростили исходные уравнения до предела, и теперь наша модель универсальна. Какой смысл мы вкладываем в это понятие? Универсальность означает, что *не только* уравнение $f(x) = 4\mu x(1-x)$, описывающее каскад удвоенный периода, но и *почти любая* нелинейная функция переменной x порождает тот же каскад: сценарий нечувствителен к деталям модели. Другой аспект, связанный с универсальностью, состоит в том, что удвоение периода, приводящее к хаосу, обнаружено экспериментально: в колебаниях параметрического маятника, в некоторых системах электронных генераторов, в особом режиме работы синхронного двигателя, в некоторых немонотонных химических реакциях, в движении жидкости в тепловой конвекции и т. д. Мы видим здесь подлинную универсальность поведения, что убеждает нас в правильности наблюдений и показывает, сколь широка сфера применимости проведенного анализа. Наконец, среди общих особенностей, которые я с удовольствием отмечаю в исследованиях динамических систем, существует взаимно обогащающее сотрудничество между теоретиками и экспериментаторами и, что еще более замечательно, между математиками и физиками. Кроме того, теории динамических систем представляют собой область, в развитие которой можно внести вклад, располагая относительно скромными материальными средствами, но обладая богатым воображением: она как бы воплощает в себе триумф «легкой физики».

К. Видаль: «Весьма близкая идея, которая не может не волновать физика, состоит в тесной взаимосвязи методологии (даже в ходе рассуждений), существующей между теорией динамических систем и методами, на протяжении ряда лет применявшимися для исследования фазовых переходов. Разумеется, я имею в виду метод ренормгруппы, которым мы можем воспользоваться для определения знаменитого параметра $\delta = 4,6692 \dots$ субгармонического каскада. Ясно, что в свое время непременно будет достигнут глобальный синтез, поскольку между двумя теориями имеется слишком много формальных аналогий, чтобы их нельзя было объединить в рамках единого более широкого подхода.

В более широком плане следует, несомненно, подчеркнуть элемент, приводящий к многочисленным и разнообразным эпи-

стемологическим следствиям, которые мы лишь бегло затронули в нашей дискуссии: я имею в виду проблему пересмотра традиционных представлений о детерминированности и случайности. Ясно, что серьезный пересмотр научных определений этих понятий действительно необходим и что теперь мы должны выйти за рамки идей, сформулированных впервые Лапласом около двух столетий назад. Замечательно также, что понятие странного аттрактора, необычайно расширившего признанную область детерминированности, одновременно подводит гораздо более прочную, чем прежде, основу под необходимость обращения к статистическим методам. Необходимость использования статистических методов теперь обосновывается не соображениями прагматического характера, а как бы внутренней логикой самой математики».

И. Помо: «Хотя в книге об этом ничего не говорится, мы можем также упомянуть о гамильтоновых системах, играющих важную роль, с одной стороны, в небесной механике, а с другой — имеющих самое непосредственное отношение к проблемам термоядерной плазмы, т. е. к решению самых важных технических и научных проблем нашей эры. Как показали различные исследователи, в гамильтоновых системах, например в движении частиц в неоднородных магнитных полях, также существуют законы универсальности, принципы которых были открыты методами ренормгруппы, разработанными в связи с исследованием критических явлений. Здесь также произошла своего рода перегруппировка понятий: например, в случае гамильтоновых систем была доказана взаимосвязь между одномерными кристаллами, проблемами квантовой механики с квазипериодическими потенциалами и проблемой движения заряженных частиц в сравнительно сложных магнитных полях термоядерных реакторов. И в этом случае можно утверждать, что у нелинейной физики, о которой мы попытались рассказать в этой книге, хватило сил, чтобы обнаружить универсальные явления. Можно сказать, что блоки, на которые делились принципиальные проблемы, связанные с нелинейностью, начали мало-помалу рассыпаться, и теперь мы являемся свидетелями возникновения нового единого подхода к нелинейным явлениям, что следует считать неожиданным поворотом событий».

К. Видаль: «С философской точки зрения здесь можно усмотреть необычайно мощную идею, которой несомненно потребуются время для того, чтобы проникнуть в умы ученых. Она вытекает из центрального понятия чувствительной зависимости от начальных условий, которое иногда принято называть слабо устойчивой динамикой. Эта фундаментальная идея состоит в том, что через понятие ЧЗНУ наука снова приходит к осозна-

нию, идентификации своих пределов. Здесь уместно провести параллель с принципом неопределенности Гейзенберга. Согласно этому принципу, самое совершенное лабораторное оборудование не позволяет измерить одновременно сколь угодно точно координату и импульс частицы. Аналогичным образом чувствительная зависимость от начальных условий запрещает нам предсказывать будущее динамической системы, поток которой находится на странном аттракторе, независимо от того, каким образом мы будем это делать. Разумеется, эту параллель не следует проводить слишком далеко, поскольку между принципом неопределенности Гейзенберга и ЧЗНУ существуют многочисленные различия. Наиболее очевидное различие состоит в том, что теория динамических систем есть феноменология на макроскопическом уровне, в то время как малость постоянной \hbar (кванта действия) ограничивает действие принципа неопределенности Гейзенберга микроскопическим уровнем. Тем не менее и в том и в другом случае речь идет об идентификации внутренних пределов науки и тем самым ее силы. Существование этой силы неоспоримо, но она ограничена в самом математическом смысле слова. Теория динамических систем по мере своего развития обнаруживает способность находить пределы сферы своей собственной эффективности, что отнюдь не тривиально и отнюдь не лишено интереса».

ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 1

1. ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ

В гл. II понятие бифуркации вводится на отдельных примерах — в контексте параметрических осцилляторов и осцилляторов с вынуждающей силой. Но это понятие более фундаментально: оно имеет основополагающее значение для целой области математики, известной под названием *теории бифуркаций*¹⁾. В данном приложении мы сформулируем основные положения этой теории.

Рассмотрим автономный поток на \mathbb{R}^n :

$$\dot{\mathbf{X}} = F_{\mu}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n.$$

Этот поток зависит от некоторого множества параметров, представляемого символически буквой μ , выбранной в качестве индекса правой части F (если существует k параметров, то $\mu \in \mathbb{R}^k$). Ими могли бы быть Ra и Rg в эксперименте по тепловой конвекции; Rg , b и r в модели Лоренца; концентрация реагента $[X]_0$, объемный расход J и температура T в химических реакциях и т. д. Решения системы алгебраических уравнений

$$F_{\mu}(\mathbf{X}) = 0$$

являются неподвижными точками потока, т. е. особыми точками сопряженного векторного поля, или стационарными состояниями физической системы. Разумеется, поток имеет и другие решения иной природы, например периодические решения. В пространстве параметров существование данного решения может быть прослежено с помощью графика, описывающего зависимость решения от μ : решение как функция параметра μ называется *ветвью решения*. Точка в пространстве параметров, от которой расходятся несколько ветвей, называется *точкой бифуркации*.

Часто по причинам, связанным с существующими методами анализа, мы вынуждены ограничиться рассмотрением непосред-

¹⁾ Теория бифуркаций берет начало в работах Анри Пуанкаре по системам дифференциальных уравнений в начале этого столетия. Термин «бифуркация» был предложен Пуанкаре для обозначения ситуации, когда из данного решения рождается несколько решений.

ственной окрестности бифуркации. Основная идея состоит в том, чтобы вывести наиболее существенные свойства, сохраняя в разложении в ряд Тейлора только члены низшего порядка. Такая процедура не является слишком серьезным ограничением, ее наиболее заметным следствием является в принципе некоторое сужение области применимости наших выводов. Такое локальное математическое описание называется *локальными бифуркациями* в отличие от *глобальных бифуркаций*. Это означает, что мы рассматриваем малую окрестность данного решения, а не то, что происходит на конечном расстоянии от него.

II. КОРАЗМЕРНОСТЬ

Хотя размерность k пространства параметров зависит от рассматриваемой задачи, мы хотим развить общий подход, свободный от ограничений, возникающих в связи с конкретными условиями. Имея это в виду, мы определяем *коразмерность бифуркации* как наименьшую размерность пространства параметров, в котором может происходить такая бифуркация. Поясним это понятие на примере трехмерного пространства параметров ($k = 3$). Геометрическое место точек в пространстве параметров, удовлетворяющих некоторому условию, например потери устойчивости решения, в общем случае имеет вид поверхности Ω (рис. А.1, а). Почти любая прямая D пересекает эту поверхность: двигаясь по прямой D (размерность 1), мы в конце концов пересекаем поверхность Ω и наблюдаем соответствующую бифуркацию. В этом случае мы говорим, что наблюдается бифуркация коразмерности 1. Если мы наложим не одно, а два условия, то они выполняются только вдоль линии пересечения L двух поверхностей Ω_1 и Ω_2 , соответствующих выбранным нами двум условиям. Априори произвольная линия не имеет шанса пересечься с L : чтобы пересечь линию бифуркации коразмерности 2 (рис. А.1, б), мы должны двигаться вдоль поверхности (размерность 2).

Сказанное выше для случая $k = 3$ легко обобщается на любое другое значение k путем простой замены слов «пространство», «поверхность» и т. д. словами «гиперпространство», «гиперповерхность» и т. д. Таким образом, существенным элементом является не само значение размерности k , а коразмерность, т. е. минимальное число параметров, которые необходимо варьировать для того, чтобы наблюдать бифуркацию определенного типа. Исследование бифуркаций при этом упрощается, так как используются только геометрические свойства соответствующего пространства и не учитывается конкретная размерность пространства параметров. Кроме того, поскольку характеристики

каждого типа бифуркации (диаграмма, свойства) устанавливаются без явной ссылки на какие-либо специфические условия, результаты приобретают совершенно общую приложимость.

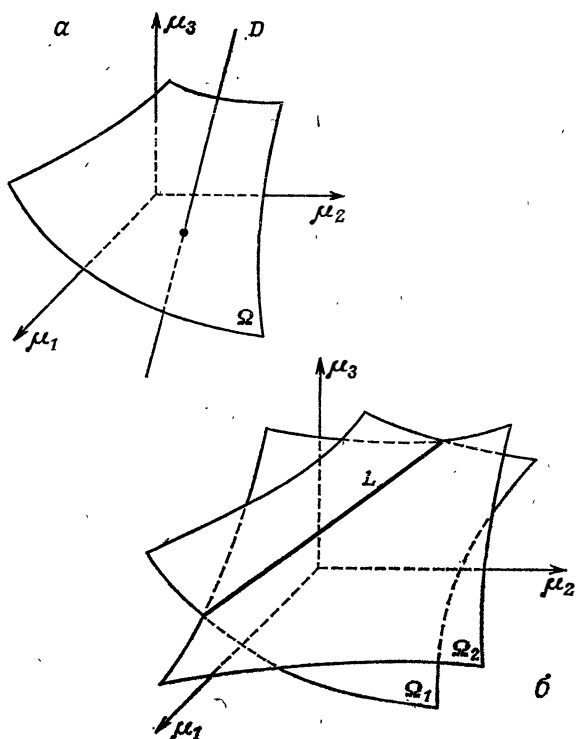


Рис. А.1. Коразмерности бифуркаций в трехмерном пространстве параметров. а — одно простое условие обычно соответствует заданию некоторой поверхности Ω . Произвольная линия D пересекает эту поверхность (кроме исключительных случаев). Следовательно, для того чтобы обнаружить бифуркацию, достаточно двигаться вдоль линии D . Именно поэтому о такой бифуркации принято говорить как о бифуркации коразмерности один; б — два условия, соответствующие поверхностям Ω_1 и Ω_2 , одновременно удовлетворяются только вдоль их линии пересечения L . Ненулевую вероятность пересечения с линией L имеет только поверхность (не изображенная на нашем рисунке). Именно поэтому о бифуркациях, возникающих на линии, говорят как о бифуркациях коразмерности два.

Ради простоты мы рассмотрим только локальные бифуркации коразмерности 1, отсылая читателя, который заинтересуется бифуркациями коразмерности 2 и 3, к более специальным книгам и статьям.

III. СУПЕРКРИТИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 1 НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Математики доказали, что при весьма общих условиях локальное исследование бифуркаций коразмерности 1 неподвижной точки может быть сведено к нескольким архетипам. Точнее говоря, было доказано, что существуют разложения в ряды и замены переменной, такие, что вблизи неподвижной точки поведение системы описывается небольшим числом дифференциальных уравнений, зависящих от одного параметра, который мы обозначим через μ . Интуитивно это заключение кажется достаточно разумным для бифуркаций коразмерности 1. Более удивительно то, что в фазовом пространстве также достаточно только одной переменной. Под действием преобразований, переводящих неподвижную точку в начало координат, уравнения принимают одну из классических *нормальных форм*. Ограничиваясь третьим порядком, мы перечислим кратко четыре наиболее часто встречающиеся формы, представленные в табл. I. Поскольку типичные случаи собраны, описаны и проанализированы, нам достаточно решить, какой из них соответствует рассматриваемой проблеме, и обратиться к имеющейся полной (локальной) теории.

Таблица I. Бифуркации коразмерности 1 неподвижных точек

Нормальная форма (суперкритическая)	Название бифуркации
$\dot{x} = \mu - x^2$	Седло — узел (или точка возврата)
$\dot{x} = \mu x - x^2$	Транскритическая (или со сменой устойчивости)
$\dot{x} = \mu x - x^3$	Типа вилки
$\dot{z} = (\mu + i\gamma)z - z z ^2$	Хопфа

x — вещественная переменная;
 z — комплексная переменная;
 μ — расстояние от точки бифуркации;
 i — мнимая единица;
 γ — произвольная постоянная.

III. 1. Бифуркации седло — узел $\dot{x} = \mu - x^2$

Стационарное решение имеет вид $x = \pm \sqrt{\mu}$. Оно определено только при $\mu > 0$ и впервые возникает при $\mu = 0$. При $\mu < 0$ решение не существует (ни устойчивое, ни неустойчивое). В результате мы получаем бифуркационную диаграмму, изображенную на рис. А.2.

III. 2. Транскритическая бифуркация: $\dot{x} = \mu x - x^2$

Два стационарных решения $x=0$ и $x=\mu$ сосуществуют. Нетрудно видеть, что решение $x=0$ устойчиво при $\mu < 0$ и неустойчиво при $\mu > 0$, а для решения $x=\mu$ все наоборот; в точке

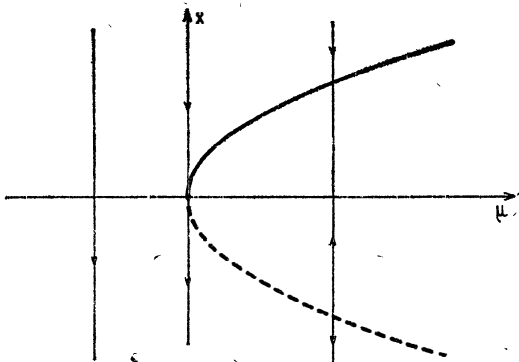


Рис. А.2. Схема бифуркации седло — узел. Неподвижная точка расположена в начале координат ($x=0$, $\mu=0$). Из точки бифуркации выходят две ветви стационарных состояний: одна устойчивая (сплошная жирная линия), другая неустойчивая (штриховая линия). Вертикальные линии соответствуют силовым линиям векторного поля. Стрелками указано направление.

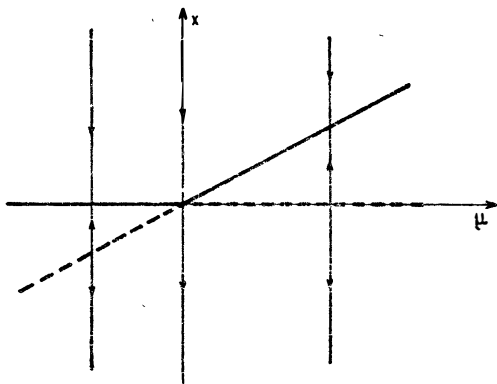


Рис. А.3. Схема транскритической бифуркации.

бифуркации эти два решения обмениваются устойчивостью (рис. А.3).

III. 3. Бифуркация типа вилки: $\dot{x} = \mu x - x^3$

Стационарные решения в этом случае имеют вид $x=0$ и $x = \pm \sqrt{\mu}$ (последние два решения определены только при $\mu > 0$). Заметим, что эта нормальная форма инвариантна отно-

сительно преобразования $x \rightarrow (-x)$. Каждый раз, когда задача нечувствительна к симметрии относительно отражения (например, образование конвективных валов РБ при первой конвек-

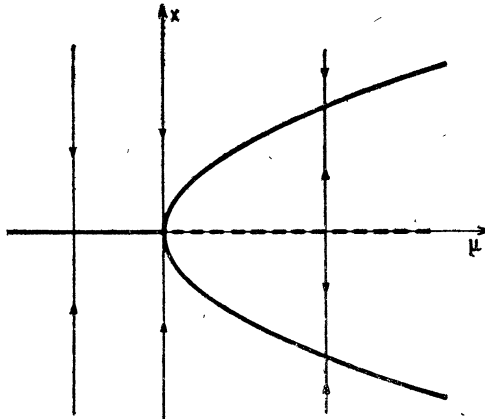


Рис. А.4. Схема бифуркации типа вилки.

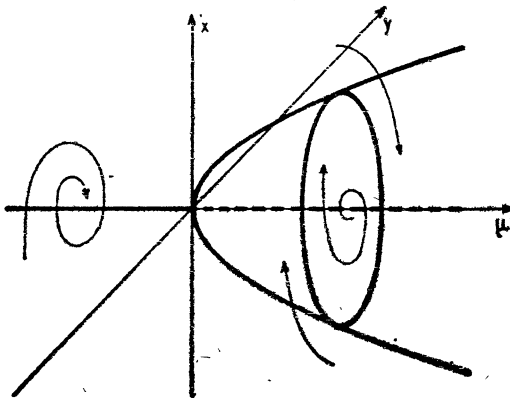


Рис. А.5. Схема бифуркации Хопфа. На этой диаграмме имеется дополнительное измерение γ . Стрелки указывают направление силовых линий векторного поля.

тивной неустойчивости), следует ожидать нормальную форму этого типа. Ее бифуркационная диаграмма представлена на рис. А.4.

III. 4. Бифуркация Хопфа: $\dot{z} = (\mu + i\gamma)z - z|z|^2$

На этот раз z — комплексная переменная, а γ — произвольная константа, которая не играет роли бифуркационного пара-

метра. Заметим, что эта нормальная форма является комплексным эквивалентом нормальной формы бифуркации типа вилки. Чтобы найти решения, удобно перейти к вещественным переменным, используя прямоугольные или полярные координаты. Полагая $z = x + iy$, приводим нормальную форму к следующему виду:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= [\mu - (x^2 + y^2)]x - \gamma y, \\ \dot{y} &= \gamma x + [\mu - (x^2 + y^2)]y.\end{aligned}$$

Помимо решения $z = 0$ (т. е. $x = y = 0$) существует другое решение, для которого $|z|^2$ не зависит от времени:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \mu.$$

Это условие определяет на плоскости (x, y) окружность радиусом $\sqrt{\mu}$ (рис. А.5).

IV. СУБКРИТИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ

Все нормальные формы, рассматриваемые в предыдущем разделе, являются *суперкритическими* (называемыми также нормальными). Под этим мы понимаем, что нелинейные члены x^2 и x^3 оказывают действие, противоположное неустойчивости, обусловленной членом низшего порядка. Возьмем форму $\dot{x} = \mu x - x^3$. При малых x мы можем сохранять только линейный член. Получаемое тогда решение $x = \exp(\mu t)$ расходится на бесконечности при $\mu > 0$. Но решение полного уравнения не расходится экспоненциально, так как линейный член компенсируется членом $-x^3$, который возрастает слишком быстро для того, чтобы им можно было пренебречь. Записывая уравнение к виду

$$\dot{x} = \mu x \left(1 - \frac{x^2}{\mu}\right),$$

мы видим, что нелинейный член вызывает «насыщение» эффекта линейной неустойчивости при $x^2 = \mu$.

Однако ничто не мешает нелинейному члену низшего порядка оказывать на решение дестабилизирующее действие. В этом случае бифуркация называется *субкритической*, а иногда *обратной*. Все перечисленные выше нормальные формы могут быть сделаны субкритическими: для этого достаточно лишь

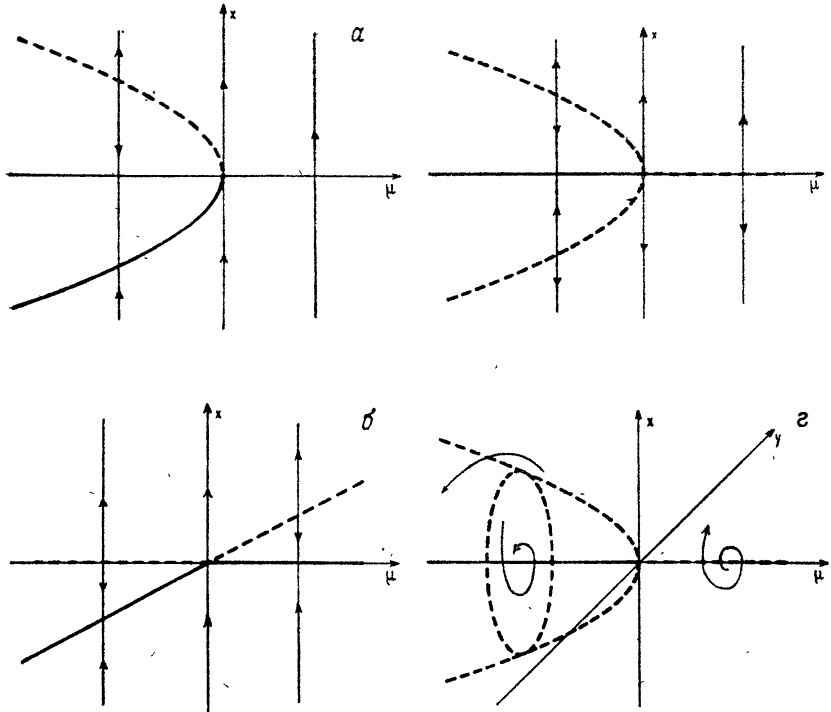


Рис. А.6. Схемы субкритических (или обратных) бифуркаций.

а) $\dot{x} = \mu + x^2$; б) $\dot{x} = \mu x + x^2$; в) $\dot{x} = \mu x + x^3$; г) $\dot{z} = (\mu + i\gamma)z + z|z|^2$

изменить знак нелинейного члена. В результате мы получаем бифуркационную диаграмму на рис. А.6.

V. БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 1 ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ

Естественно спросить, какого рода бифуркации могут происходить локально не из неподвижной точки, а из периодической орбиты. Трудно удержаться от искушения еще больше обобщить предыдущие результаты, особенно если учесть, что сечением Пуанкаре периодической орбиты является неподвижная точка. Возникает вопрос: как далеко можно провести аналогию между неподвижной точкой потока и неподвижной точкой сечения Пуанкаре. Можно предсказать, что соответствующая математическая задача могла бы оказаться трудно разрешимой. Действительно, чтобы определить, где теория возвращается в плоскость сечения, нам потребовалось бы проинтегрировать уравнения вдоль орбиты. Но теория Флоке (см. разд. IV.3.1)

позволяет обойти эту трудность и заняться исследованием линейной устойчивости периодической орбиты без необходимости проследивать эволюцию потока шаг за шагом. Мы можем заключить, что собственное значение может пересечь единичную окружность на комплексной плоскости тремя возможными способами.

Если пересечение происходит в точке $+1$, то теория не слишком отличается от той, которая была развита выше для неподвижных точек потока. Нормальная форма, топологически эквивалентная нормальной форме бифуркации седло-узел, представляема в виде

$$\dot{x} = x + \mu - x^2,$$

где член x введен собственным значением $+1$. Аналогично существуют нормальные формы, приводящие к бифуркациям типа вилки и транскритическим бифуркациям.

Когда собственное значение, равное -1 , приводит к потере линейной устойчивости, эта ситуация не имеет аналогов среди бифуркаций неподвижной точки потока. Для этого случая необходимо развить свой особый подход, как мы сделали в гл. VIII. На этот раз бифуркация приводит к возникновению орбиты с удвоенным периодом через субгармоническую неустойчивость. Бифуркационная диаграмма совпадает с диаграммой бифуркации типа вилки (см. рис. А.4), но поведение решения радикально отличается. После субгармонической бифуркации периодическое решение попеременно посещает обе ветви. С другой стороны, после выбора одной из ветвей, или геометрического места точек, в случае бифуркации типа вилки устанавливается одно и только одно решение.

Наконец, если потеря устойчивости обусловлена пересечением единичной окружности двумя комплексно-сопряженными собственными значениями, то возникает явление, которое напоминает бифуркацию Хопфа и часто так называется, несмотря на некоторые различия между этими двумя бифуркациями. В сечении Пуанкаре неподвижная точка заменяется множеством точек на кривой, напоминающей предельный цикл. Однако наш анализ нуждается в уточнении, так как эта кривая сама не является траекторией и траектории пересекают ее весьма необычным образом. Именно здесь становится существенным число вращений и его рациональность или иррациональность. Эти вопросы рассмотрены в приложении В, посвященном квазипериодичности и синхронизации (затягиванию частоты).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА

I. ОПИСАНИЕ

Чем быстрее расходятся траектории на аттракторе, тем труднее следить за эволюцией хаотического потока. Именно поэтому мы пытаемся оценить или измерить скорость разбегания траектории. Величина, используемая как мера расходимости траекторий, называется *показателем Ляпунова* или *числом Ляпунова*¹⁾.

Чтобы продемонстрировать важность этой величины, рассмотрим поведение траектории вблизи решения $\phi(t)$ потока:

$$\frac{d\phi}{dt} = F(\phi).$$

Без ограничения общности мы будем рассматривать трехмерный поток $\phi(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ и воспользуемся в качестве примера моделью Лоренца (приложение Д). Линеаризуя поток относительно $\phi(t)$, получаем уравнение, описывающее эволюцию разности, которую мы обозначим через $\delta\phi(t)$:

$$\delta\dot{\phi} = \left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right|_{\phi(t)} \delta\phi, \quad (\text{Б.1})$$

где $\partial F/\partial \phi$ — матрица, которая зависит как от потока, так и от рассматриваемого частного решения. Для решения $X(t), Y(t), Z(t)$ модели Лоренца получаем

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right|_{\phi(t)} = \begin{vmatrix} -\text{Pr} & \text{Pr} & 0 \\ -Z(t) + 1 & -1 & -X(t) \\ Y(t) & X(t) & -b \end{vmatrix}.$$

Проинтегрировать уравнение (Б.1) аналитически, за исключением особых частных случаев, невозможно. Однако его всегда можно проинтегрировать численно и найти матрицу $L(t)$, такую, что

$$\delta\phi(t) = L(t) \delta\phi(0),$$

¹⁾ Иногда оба термина используют как синонимы. В более точной версии под показателем Ляпунова понимают натуральный логарифм числа Ляпунова. — *Прим. перев.*

где $\delta\phi(t)$ — решение уравнения (Б.1), соответствующее начальному смещению $\delta\phi(0)$. В силу предыдущего соотношения $L(0) = 1$. Для m -мерного потока матрица L имеет размеры $m \times m$ и m собственных значений.

Это очень напоминает теорию Флоке линейной устойчивости периодической траектории. Процедура имеет те же корни: линейный анализ поведения в окрестности траектории. Но если в теории Флоке нас интересует только то, что происходит через один период T при движении по замкнутой орбите, то в данном случае это ограничение снимается. Если собственные значения матрицы Флоке дают информацию о линейной устойчивости предельного цикла, то собственные значения матрицы L дают информацию об эволюции в окрестности траектории, которая отнюдь не обязательно должна замыкаться на себя.

Вместе с тем уравнения (Б.1) легко интегрируются аналитически, если производная $\partial F/\partial\phi$ не зависит от времени¹⁾ и ее собственные значения — числа (возможно, комплексные) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Мы приходим к матрице $L(t)$, которая диагональна в системе координат, образованной ее собственными векторами:

$$L(t) = \begin{vmatrix} \Lambda_1 & 0 & \\ & \Lambda_2 & \\ 0 & & \Lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{vmatrix}.$$

Пусть L^+ — матрица, эрмитово-сопряженная с матрицей L . След произведения L^+L равен:

$$\text{Tr}(L^+(t)L(t)) = e^{(\lambda_2 + \lambda_1^*)t} + e^{(\lambda_2 + \lambda_2^*)t} + e^{(\lambda_3 + \lambda_3^*)t}.$$

При возрастании t показатель с наибольшей вещественной частью $\bar{\lambda}$ в конце концов подавляет два остальных члена; поэтому

$$\bar{\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln [\text{Tr}(L^+(t)L(t))].$$

Это выражение позволяет найти наибольшую вещественную часть $\bar{\lambda}$, не прибегая к обычным методам определения собственных значений, что весьма важно с практической точки зрения, поскольку $\bar{\lambda}$ определяет долговременное поведение системы. Попробуем обобщить полученное выражение на не столь частные ситуации.

¹⁾ В нелинейном потоке так будет только в том случае, если само решение $\phi(t)$ стационарно, в чем можно убедиться, исходя непосредственно из уравнений модели Лоренца. Хотя это не соответствует интересующей нас проблеме эволюции вблизи траектории, изучение такой гипотезы тем не менее полезно для дальнейшего.

В большинстве случаев матрица $\partial F/\partial \phi$ зависит от времени и матрица $L(t)$ не представима в таком простом виде, как выше. Для этого существуют две причины: во-первых, собственные значения матрицы $\partial F/\partial \phi$ не постоянны и, во-вторых, матрица L не диагонализуема в фиксированной системе отсчета. Однако мы можем по-прежнему определить величину

$$\lambda_{[\phi]} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln [\text{Tr} (L^+(t) L(t))],$$

поскольку так называемые мультипликативные эргодические теоремы гарантируют существование этого предела для широкого круга ситуаций. Этот предел называется показателем Ляпунова (или числом Ляпунова), соответствующим решению $\phi(t)$. Он выражает тот факт, что при больших временах разность $\delta \phi$ возрастает или убывает в среднем экспоненциально в зависимости от того, положительна или отрицательна величина $\lambda_{[\phi]}$.

II. АНАЛИЗ ПРОСТЫХ СЛУЧАЕВ

Из многих возможных вариантов сосредоточим внимание на трех случаях, которые легче понять, так как матрица $\partial F/\partial \phi$ (и, следовательно, L) диагонализуема в фиксированной системе координат.

Если $\partial F/\partial \phi$ имеет постоянные собственные значения, то собственные значения матрицы $L(t)$ имеют вид $e^{\lambda_i t}$, где λ_i не зависят от t при любых i ; поэтому $\lambda_{[\phi]}$ действительно является наибольшей вещественной частью¹⁾ собственных значений λ_i .

В качестве второго случая рассмотрим матрицу $\partial F/\partial \phi$, соответствующую умножению на скаляр α , который стохастически флуктуирует во времени (эффект «мультипликативного шума»). Так как в этой ситуации

$$\delta \cdot \phi(t) = \alpha(t) \delta \phi(t),$$

$$\delta \phi(t) = \exp \left[\int_0^t dt' \alpha(t') \right] \delta \phi(0),$$

матрица $L(t)$ вырождается в скаляр:

$$\ln L(t) = \int_0^t dt' \alpha(t').$$

¹⁾ Матрица L имеет на самом деле m собственных значений, или показателей, каждое из которых соответствует поведению в одном из собственных направлений. Но данный метод вычислений позволяет выделить только одно собственное значение — с наибольшей вещественной частью.

Рассмотрим среднее значение этой величины

$$\overline{\ln L(t)} = \int_0^t dt' \overline{\alpha(t')}.$$

Если статистический ансамбль, по которому мы вычисляем среднее, стационарен (не зависит от времени), то эргодическая теорема¹⁾ позволяет заменить $\alpha(t')$ средним $\bar{\alpha}$ по (не зависящему от времени) ансамблю:

$$\overline{\ln L(t)} = \bar{\alpha}(t)$$

и поэтому²⁾

$$\lambda_{|\phi|} = \bar{\alpha}.$$

Обобщая, можно утверждать, что, когда $\partial F/\partial \phi$ и L диагонализуются в фиксированной системе отсчета, матричное уравнение (Б.1) принимает вид

$$\delta \dot{X}(t) = A[\phi(t)] \delta X,$$

$$\delta \dot{Y}(t) = B[\phi(t)] \delta Y,$$

$$\delta \dot{Z}(t) = C[\phi(t)] \delta Z,$$

где A , B и C — собственные значения (по предположению вещественные) матрицы $\partial F/\partial \phi$ в фиксированной системе отсчета. Решения известны:

$$\delta X(t) = \delta X(0) \exp \left[\int_0^t dt' A[\phi(t')] \right],$$

¹⁾ Эргодическая теорема по существу утверждает, что если $x(t)$ — зависящая от времени случайная величина с распределением вероятности $P(x)$, то среднее функции $f(x)$ по времени для реализации $x(t)$ не зависит от времени и равно:

$$\langle f \rangle = \int f(x) P(x) dx = \bar{f}.$$

²⁾ Более подробные вычисления показывают, что если $\alpha(t)$ не имеет «памяти», то при больших временах

$$(\ln L(t))^2 = \bar{\alpha}^2 t^2 + ct,$$

где коэффициент c зависит от двойной корреляции $\alpha(t)$ при малых временах, т. е. от величины $\alpha(t_1) - \bar{\alpha} - (\alpha(t_2) - \bar{\alpha})$. В свою очередь корреляция зависит только от разности $|t_1 - t_2|$, если, как сказано выше, α — стационарный случайный процесс. При большой разности $|t_1 - t_2|$ корреляция стремится к нулю, так как $\alpha(t_1)$ и $\alpha(t_2)$ при этом становятся независимыми случайными величинами и $(\alpha(t) - \bar{\alpha}) = 0$. Таким образом, при больших временах среднее $\bar{\alpha}(t)$ функции $L(t)$ статистически определено с точностью до флуктуаций порядка $t^{-1/2}$.

где величина X выбрана нами в направлении собственного вектора с наибольшим в среднем собственным значением. Поскольку нас интересует поведение δX при больших временах, а не мгновенные значения этой случайной величины, наше внимание привлекает величина

$$\frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta X(t)}{\delta X(0)} \right| = \frac{1}{t} \int_0^t dt' A[\phi(t')].$$

Эргодическая теорема, о которой мы уже упоминали, утверждает, что если $\langle A \rangle$ — среднее величины $A[\phi]$ по множеству значений ϕ , то $\langle A \rangle$ есть и среднее по времени. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' A[\phi(t')] = \langle A \rangle,$$

и поэтому

$$\langle A \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta X(t)}{\delta X(0)} \right|. \quad (\text{Б.2})$$

Нас интересует среднее значение логарифма отношения $|\delta X(t)/\delta X(0)|$, а не среднее значение самого отношения потому, что логарифм флуктуирует гораздо слабее и поэтому его среднее значение имеет больший физический смысл. Чтобы продемонстрировать это, разделим интервал, по которому проводится интегрирование, на множество интервалов длиной τ , где τ — характерная длина корреляции для $A[\phi(t')]$. Пусть N — число таких интервалов. Тогда

$$\int_0^t dt' A[\phi(t')] \approx \tau \sum_{i=1}^N A_i,$$

где A_i — среднее значение A по одному из малых интервалов. Заметим, что A_i с различными индексами статистически независимы, так как длина интервалов меньше длины корреляции. Этому разложению показателя в сумму соответствует разложение экспоненты в произведение:

$$E(t) = \exp \int_0^t dt' A[\phi(t')] \approx \prod_{i=1}^N \beta_i, \quad (\text{Б.3})$$

где $\beta_i (= \exp(\tau A_i))$ образуют последовательность из N независимых множителей.

Предположим теперь, что β_i с равной вероятностью принимают значения $1/2$ и 1 . Вычислим среднее и среднеквадратич-

ное значения $E(t)$:

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{2^N} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)^N = \left(\frac{3}{4} \right)^N,$$

$$\langle E^2(t) \rangle = \frac{1}{2^N} \left(\frac{1}{4} + 1 \right)^N = \left(\frac{5}{8} \right)^N.$$

Отношение среднего квадрата к квадрату среднего значения равно

$$\frac{\langle E^2(t) \rangle}{\langle E(t) \rangle^2} = \left(\frac{10}{9} \right)^N.$$

При очень больших N это отношение также становится очень большим. Следовательно, нескольких очень больших значений E достаточно для того, чтобы средний квадрат $\langle E^2 \rangle$ был гораздо больше¹⁾, чем квадрат среднего значения $\langle E \rangle^2$. Это означает, что распределение вероятности случайной величины E с увеличением N испытывает сильный разброс: мы показали, что задаваемая выражением (Б.3) величина E сильно флуктуирует при больших N . Как показывает приведенный в примечании пример, мы можем ожидать, что выбор среднего значения логарифма величины E будет гораздо более «разумным». Именно так и происходит: экспонента от среднего логарифма случайной величины $E(t)$ дает наиболее вероятное значение $E(t)$. Тем не менее не следует упускать из виду, что со временем отношение $|\delta X(t)/\delta X(0)|$ сильно флуктуирует относительно наиболее вероятного значения. В частности, его всегда можно умножить

¹⁾ Чтобы показать правдоподобность такого заключения, приведем простой числовой пример. Рассмотрим случайную величину X , принимающую значение 1 с вероятностью 99,9 % и значение 1000 с вероятностью 0,1 %. Среднее значение такой величины X равно $0,999 \cdot 1 + 0,001 \cdot 1000 \approx 2$, а ее средний квадрат равен $0,999 \cdot 1 + 0,001 \cdot 10^6 \approx 10^3$. Это показывает, что средний квадрат величины X гораздо чувствительнее к присутствию редких больших флуктуаций, чем ее среднее значение. Наш пример показывает также, что для сильно флуктуирующей случайной величины среднее значение утрачивает свой смысл. Действительно, утверждение о том, что среднее величины X равно 2, мало что говорит о распределении этой величины. Гораздо более содержательным было бы утверждение о том, что наиболее вероятное значение X равно 1. Нетрудно показать, что это наиболее вероятное значение может быть найдено из среднего значения логарифма:

$$\langle \lg X \rangle = 0,999 \cdot 0 + 0,001 \cdot 3 \approx 0,003.$$

Следовательно,

$$10^{\langle \lg X \rangle} \approx 1,$$

что и требовалось показать. Качественно полученный результат объясняется тем, что логарифм является очень медленно возрастающей функцией своего аргумента. Таким образом, большие флуктуации случайной величины X искажают статистику $\ln |X|$ гораздо меньше, чем статистику $|X|$ и тем более X^2 .

на коэффициент β_i , который будет уменьшать (или увеличивать) отношение в 10 раз по истечении интервала времени τ . Следовательно, если

$$\langle \ln E(t) \rangle \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} t\lambda,$$

то мы не можем заключить, что

$$\langle E(t) \rangle \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} e^{\lambda t},$$

так как отношение $\langle E(t) \rangle / e^{\lambda t}$ испытывает по крайней мере конечные флуктуации и, следовательно, не стремится к постоянному пределу, как того требует последнее равенство.

III. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определяющее соотношение (Б.2) имеет большое практическое значение, так как лежит в основе некоторых алгоритмов определения $\lambda_{[\phi]}$ по данным экспериментального измерения $\delta X(t)$. Принцип состоит в следующем: предположим, что мы свели непрерывную экспериментальную динамику к отображению первого возвращения $x \rightarrow f(x)$, также экспериментальному, в некотором конечномерном фазовом пространстве (на практике \mathbb{R}^2 или \mathbb{R}^3). От этого экспериментального отображения мы можем с помощью какой-нибудь численной процедуры¹⁾ перейти к аналитическому представлению отображения f . После того как это сделано, нам остается только найти число Ляпунова аттрактора, порождаемого приближенным аналитическим отображением f . Для этого мы воспользуемся непосредственно определением. Выберем последовательность из N итераций (x_1, x_2, \dots, x_N) и вычислим произведение матриц Якоби

$$J_N = \prod_{i=1}^N \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i}.$$

Так как при каждой итерации вектор флуктуаций умножается (в линейном приближении) на матрицу Якоби $\partial f / \partial x|_{x_i}$, после N

¹⁾ Как видно из рис. VI. 24 и VI. 25, сечения Пуанкаре некоторых аттракторов напоминают аттрактор Энона. Поскольку аттрактор Энона возникает в преобразовании, явно зависящем от двух вещественных чисел α и β , мы пытаемся определить значения параметров α и β в экспериментальной ситуации. Для этого можно воспользоваться, например, методом наименьших квадратов, т. е. минимизировать сумму $\sum |X_{i+1} - F_{\alpha, \beta}(X_i)|^2$ по α и β , где $F_{\alpha, \beta}$ — преобразование Энона, а X_i — упорядоченная последовательность экспериментальных точек.

итераций получаем

$$\delta \mathbf{x}_N = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_N} \dots \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_1} \delta \mathbf{x}_1 = J_N \delta \mathbf{x}_1.$$

Среднее по времени (соответствующее непрерывному времени) заменено средним по числу N итераций, и показатель Ляпунова, который требуется найти, равен

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \ln [\text{Tr} (J_N^+ J_N)],$$

где J_N заменяет матрицу $L(t)$. Ясно, что такой метод лучше всего работает, когда f может быть сведено к отображению прямой на себя. Заметим также, что показатель λ безразмерен, в то время как рассмотренная ранее величина $\langle A \rangle$ имеет размерность частоты (обратного времени). Для перехода от $\langle A \rangle$ к λ достаточно умножить $\langle A \rangle$ на среднее время между двумя пересечениями траектории с поверхностью сечения: показатель λ есть скорость расхождения траекторий за «средний период» (и, следовательно, безразмерен), тогда как $\langle A \rangle$ есть скорость расхождения траекторий в единицу времени.

При численном моделировании нелинейных потоков определение наибольшего показателя Ляпунова осуществляется непосредственно, если имеется доступ к адекватным вычислительным средствам. Исходя из вычисленного выше решения $\phi(t)$, мы можем с помощью численного интегрирования уравнения (Б.1) найти матрицу $L(t)$ и, пользуясь определением, оценить $\lambda_{[\phi]}$. Подчеркнем, что, согласно эргодической теореме, для этого не требуется предположения о диагонализации матрицы $\partial F / \partial \phi$. Это было сделано для модели Лоренца с $\text{Pr} = 10$, $b = 8/3$ и параметром r , близким к порогу перемежаемости r_i (см. гл. IX). Мы видим, что в этом случае (см. рис. IX.15) наибольший показатель Ляпунова возрастает как квадратный корень из $r - r_i$ (это подтверждает одно из предсказаний теории перехода через перемежаемости). Другим примером служит модель Рёсслера, введенная в гл. IV [уравнение (11)]. При фиксированных значениях параметров a и b ($a = b = 0,2$) мы варьируем третий параметр c и численно интегрируем поток. Мы получаем несколько режимов, одни из которых периодические, другие хаотические. На рис. Б.1 (графике наибольшего отличного от нуля показателя как функции параметра c) видно, что $\bar{\lambda}$ принимает положительные значения, а они соответствуют расхождению траекторий на аттракторе.

С другой стороны, когда мы сталкиваемся с решением $\phi(t)$, полученным экспериментально, вычисление показателя Ляпу-

нова становится гораздо более деликатной задачей из-за погрешностей в измерениях и неизбежного экспериментального шума. Если предположить, что $\phi(t)$ флуктуирует в некотором статистическом ансамбле, то теоретически возможно найти интервал времени $[t_1, t_2]$, на котором реализация (т. е. определен-

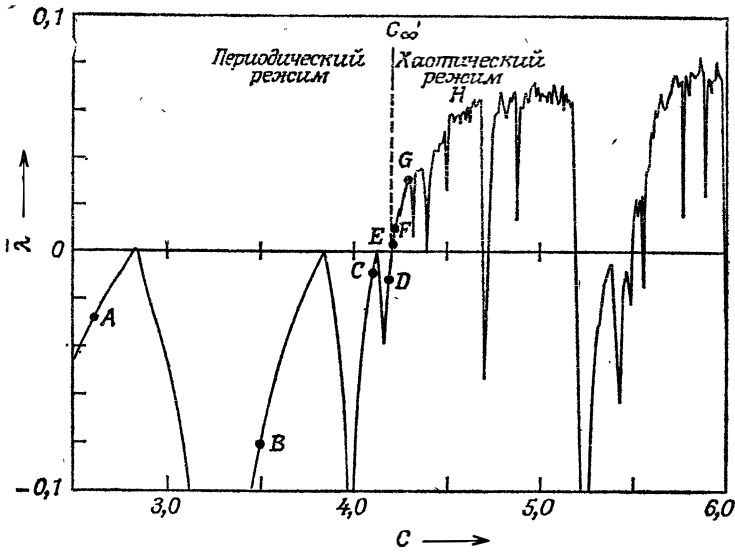


Рис. Б.1. Наибольший отличный от нуля показатель $\bar{\lambda}$ модели Рёсслера как функция параметра c [уравнение (11) из первой части нашей книги]. Положительные значения показателя $\bar{\lambda}$ свидетельствуют о расхождении первоначально близких траекторий на аттракторе (чувствительной зависимости от начальных данных). Непрерывная кривая проходит через 300 отдельно вычисленных точек ($a = b = 0,2$; параметр c принимает значения из интервала [2,5; 6]).

Из работы Дж. Кратчфилда, Д. Фармера, Н. Паккарда, Р. Шоу, Г. Джонса и Р. Дж. Доннелла.

ная последовательность значений) величины $\phi(t)$ сколь угодно близка к опорной реализации, заданной на интервале времени $[t'_1, t'_2]$ такой же длины. Для этого необходимо удовлетворить условию близости траекторий в начальный момент времени. Сравнивая поведение системы между t_2 и t'_2 , мы можем прийти к заключению о различии в эволюции между соседними траекториями. Конкретная трудность такого подхода проистекает от того, что показатель Ляпунова отражает средний эффект: сле-

довательно, для получения его статистически значимого среднего значения необходимо произвести многочисленные сравнения¹⁾.

IV. ХАРАКТЕРИСТИКИ АТТРАКТОРА

Для хаотического решения $\phi(t)$, связанного со странным аттрактором, ЧЗНУ означает существование положительного

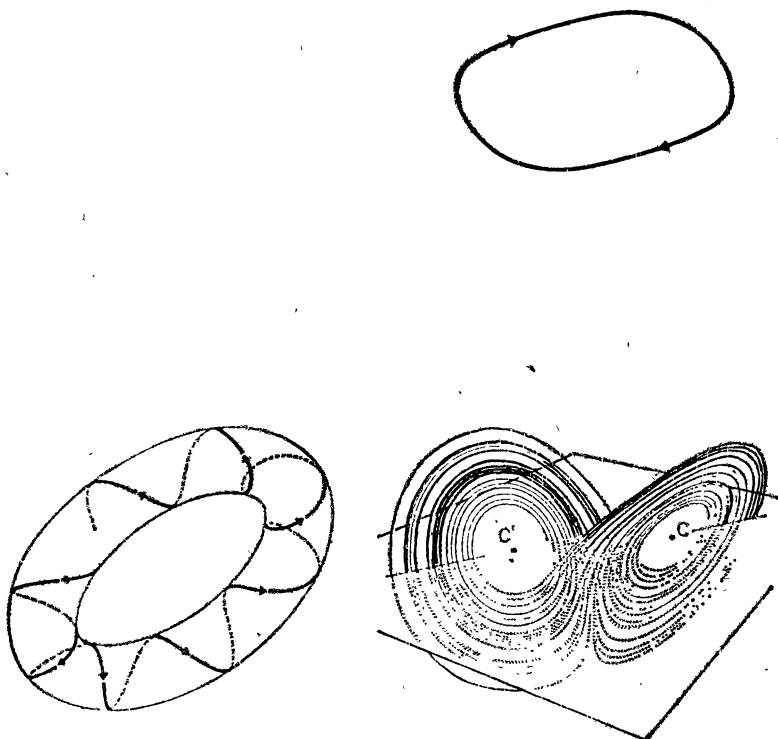


Рис. Б.2. Знаки показателей Ляпунова для аттракторов различных типов в трехмерном фазовом пространстве. Нетрудно узнать аттракторы, описанные в нашей книге: предельный цикл Ван дер Поля ($\varepsilon = 0,4$) и аттрактор Лоренца ($r = 28$).

показателя Ляпунова $\lambda_{[\phi]}$. Это — прямое следствие среднего расхождения соседних траекторий. Следовательно, получение положительного показателя Ляпунова есть верный признак

¹⁾ Для определения наибольшего показателя Ляпунова по экспериментальным временным рядам предложено несколько алгоритмов. Судя по отсутствию значительного прогресса, удовлетворительного результата пока достичь не удалось. Именно поэтому мы не излагаем здесь эти попытки.

хаотического режима. Вычисляя по определению показатель Ляпунова периодического или квазипериодического решения, мы получаем $\lambda_{[\phi]} = 0$. Если решение устойчиво, то любое смещение, «перпендикулярное» траектории, со временем убывает, и, следовательно, соответствующие собственные значения матрицы L всегда меньше единицы. С другой стороны, смещение вдоль самой траектории не затухает и не усиливается; оно эквивалентно просто сдвигу начальной точки x_0 . Инвариантность такого смещения во времени выражается существованием постоянного собственного значения Λ , равного единице, которое в этом случае больше всех остальных собственных значений. Следовательно, наибольший показатель Ляпунова λ_i равен нулю.

Обобщая эти простые рассуждения, естественно идентифицировать аттракторы по знакам показателей Ляпунова λ_i . Для трехмерного потока это приводит к результатам, представленным в таблице. Все перечисленные в ней аттракторы изображены на рис. Б.2.

Тип аттрактора	Знаки показателей Ляпунова
Неподвижная точка	(—,—,—)
Предельный цикл	(0,—,—)
Тор T^2	(0,0,—)
Странный аттрактор	(+,0,—)

СИНХРОНИЗАЦИЯ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Проблема синхронизации связанных нелинейных осцилляторов требует для своего решения сложных и глубоких математических теорий и привлекает внимание великих умов, начиная с Пуанкаре. В настоящее время ее можно считать решенной, но крайней мере с точки зрения физика. Мы не собираемся проводить здесь исчерпывающий анализ огромного объема накопленных значений, для которого нам потребовалось бы вводить сложные понятия из анализа, топологии и теории чисел, и ограничимся изложением наиболее важных практических результатов теории.

Если говорить не слишком строго, то можно утверждать, что в синхронизации осцилляторов существуют две компоненты.

а) Во-первых, необходимо иметь два или более независимых осцилляторов, описываемых, например, двумя уравнениями Ван дер Поля с различными значениями параметра ϵ , и иметь возможность связать их (позднее мы поясним на примерах, что имеется в виду под связью).

б) Во-вторых, необходима диссипация. В противном случае мы имели бы гамильтонову систему, для которой связанные осцилляторы (по крайней мере частично) описываются так называемой теорией КАМ¹⁾.

Наиболее известным примером синхронизации является движение Земли и Луны. Вращение Луны вокруг своей оси синхронизуется с ее обращением вокруг Земли, поэтому мы всегда видим обращенную к нам одну и ту же сторону Луны. С точки зрения математики это затягивание частоты простейшего типа 1:1, так как оба осциллятора имеют одинаковую частоту. Физическая интерпретация двух осцилляторов в случае движения Луны очень проста: одно твердое тело вращается с постоянной частотой вокруг оси инерции, а другое обращается по кеплеровской орбите. Механизм связи между этими двумя осцилляторами

¹⁾ Теория названа в честь ее создателей Колмогорова, Арнольда и Мозера. Было бы неверно утверждать, что в теории связанных осцилляторов все до конца понятно.

гораздо менее очевиден и имеет двойное происхождение. Во-первых, распределение масс на Луне обладает определенной асимметрией (Луна сферически несимметрична). Во-вторых, эта асимметрия связана силой ньютоновской гравитации с аналогичной асимметрией, вызываемой на Земле распространением приливов. Несмотря на малую интенсивность, эта связь приводит к весьма важным последствиям, поскольку вызываемые эффекты накапливаются на протяжении длительного периода времени (ситуация, часто встречающаяся в астрономии). Затухание обусловлено трением приливной волны о Землю (о континенты и о морское дно). Величину силы трения можно оценить по запаздыванию между приливом и вызывающим его притяжением Луны. Следует заметить, однако, что создание количественной теории приливов все еще остается делом будущего.

Можно привести много других примеров синхронизации. Интуитивно ясно, что для синхронизации осцилляторов с близкими частотами достаточно слабого взаимодействия. Например, известно, что если просто положить рядом на стол два экземпляра механических наручных часов одной модели, то механическая передача толчков от одной пары часов к другой обеспечивает их синхронизацию. Нельзя не вспомнить и биологические примеры: циркадные ритмы, синхронизованные со сменой дня и ночи, и более курьезные явления, такие, как синхронизация менструальных циклов у женщин, живущих повседневно общающейся группой.

Многочисленные примеры синхронизации мы находим в окружающих нас различных механических и электрических колебательных устройствах. Так, субгармоническая неустойчивость параметрического осциллятора означает, что между частотами собственных колебаний и вынуждающей силы имеет место арифметическое соотношение (см. гл. II). Процесс синхронизации того или иного рода часто лежит в основе точных методов измерения и регистрации: гетеродин в радиотехнике, нониус в механике, муар в оптике. Само слово «синхронизация» стало достоянием широких кругов общества и в повседневной речи употребляется в смысле одновременности событий, происходящих далеко друг от друга, а не совпадения частот.

II. АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ

Теоретический подход к явлению синхронизации, которого мы будем здесь придерживаться, основывается главным образом на исследовании отображения Пуанкаре на окружности. Напомним кратко взаимосвязь между синхронизацией и диффеоморфизмами на окружности.

а) Теория Флоке устойчивости периодических траекторий показывает, что бифуркация Хопфа происходит, когда два комплексно-сопряженных собственных значения матрицы устойчивости пересекают единичную окружность на комплексной плоскости при изменении управляющего параметра. Бифуркация Хопфа является суперкритической, когда слабо нелинейные эффекты стабилизируют траекторию в окрестности бывшей периодической траектории, которая сохраняется, но становится линейно неустойчивой. В общем случае r — диаметр малой окружности тора (меридиана), а ε — управляющий параметр [в точке

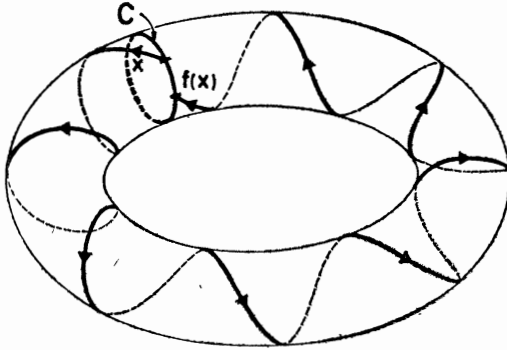


Рис. В.1. Сечение Пуанкаре потока на торе T^2 . На этом рисунке показано, как, зная поток на торе, построить соответствующее сечение Пуанкаре для окружности C на торе. Траектория, выходящая из точки x на окружности C , пересекает окружность C снова в точке $f(x)$.

бифуркации $\varepsilon = 0$; при $\varepsilon < 0$ предельный цикл вдоль большой окружности (параллели) линейно устойчив; при $\varepsilon > 0$ он линейно неустойчив и поэтому *не является более предельным циклом*]. Если параметризация с помощью ε «общего положения»¹⁾, то выполняется закон подобия $r \approx \varepsilon^{1/2}$.

Вывод теории бифуркаций, которым мы воспользуемся, состоит в том, что по крайней мере в окрестности суперкритической бифуркации Хопфа существует поток, для которого аттрактором является тор T^2 .

б) Поток на T^2 (рис. В.1) определяет отображение Пуанкаре (или диффеоморфизм) со следующими свойствами:

- 1) отображение непрерывно и дифференцируемо;
- 2) оно отображает окружность T^1 (или одномерную сферу S^1) на себя.

¹⁾ Это не исключает некоторых частных случаев, рассмотренных Арнольдом. Они возникают при $\varepsilon = 0$, когда собственные значения матрицы Флоке являются простыми корнями из единицы, например $\exp(\pm 2\pi i/3)$ и $\pm i$.

Окружность удобно параметризовать с помощью криволинейной координаты, «развертывая» окружность в единичный

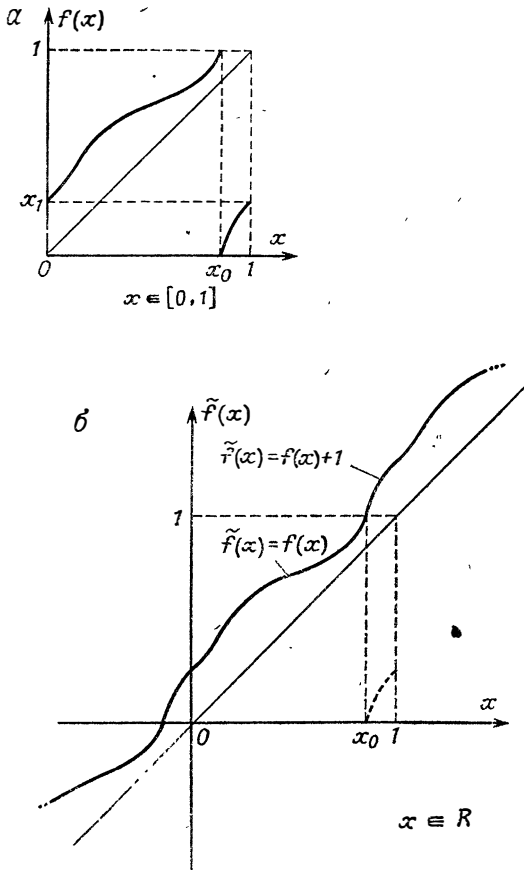


Рис. В.2. Представление двух непрерывных обратимых отображений в прямоугольной системе координат. *a* — отображение f окружности на себя описывает поток на торе как сечение Пуанкаре этого потока (см. рис. В.1). Кажущиеся разрывы в точках 0, 1 и x_0 устраняются, если вспомнить, что как на оси абсцисс, так и на оси ординат 0 и 1 соответствуют одной и той же точке на разрезе развернутой окружности; *b* — второе отображение $\tilde{f}(x) \in \mathbb{R}$ построено по отображению f и может быть использовано для определения числа вращений $\rho_{[f]}$ на торе.

интервал $[0, 1]$. При этом точки 0 и 1 соответствуют одной и той же окружности. После этого диффеоморфизм можно представить отображением $x \rightarrow \tilde{f}(x)$ интервала $[0, 1]$ на себя, таким, что $\tilde{f}(x) \in [0, 1]$, $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1)$ и прообраз $\tilde{f}^{-1}(x)$ каждой

точки единствен. Последнее свойство связано с тем, что рассматриваемые потоки однозначно обратимы. График отображения $f(x)$ в прямоугольной системе координат имеет кажущийся разрыв (рис. В.2), возникающий из-за невозможности представить циклическую координату на плоском графике. Условие непрерывности диффеоморфизма на окружности состоит в том, что если $f(x_0 + 0) = 1$, то $f(x_0 - 0) = 0$ и $f(0) = f(1) = x_1$, как показано на рис. В.2, а. Отображение f обратимо, если условие $(df/dx) > 0$ выполняется всюду [возможно также неравенство $(df/dx) < 0$, но рассматривая вместо f двукратную итерацию $f \circ f$, мы снова возвращаемся к случаю $(df/dx) > 0$].

Приняв все сказанное за отправной пункт, исследуем свойства диффеоморфизмов на окружности, аналогичных диффеоморфизму на рис. В.2, где изображено отображение первого возвращения потока на торе (см. рис. В.1). Существенным элементом анализа является число вращений отображения f , обозначенное через ρ_{ff} , — еще одно понятие, введенное Пуанкаре.

III. ЧИСЛО ВРАЩЕНИЙ

Чтобы понять, какой смысл имеет число вращений, рассмотрим сначала простейшую из возможных функций f , удовлетворяющих условиям, которые наложены на отображение первого возвращения — поворот окружности на постоянный угол α :

$$x \rightarrow \{x + \alpha\},$$

где $\{y\}$ — дробная часть числа y . Здесь α — произвольное положительное вещественное число, которое меньше или равно единице. Исходя из этого отображения, мы можем затем определить другое отображение, которое непрерывно и переводит \mathbb{R} в себя, с помощью простого сдвига:

$$x \rightarrow y + \alpha, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Мы видим, что при $0 < x < 1$ второе отображение порождает либо $\{x + \alpha\} + 1$, либо $\{x + \alpha\}$. Итерируя это отображение n раз, получаем

$$x^{(n)} = x + n\alpha,$$

откуда находим значение α :

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n}.$$

С помощью аналогичного построения мы можем определить угол поворота любого диффеоморфизма на S^1 , представленного

отображением $x \rightarrow f(x)$. Первый этап состоит в построении по отображению f диффеоморфизма \tilde{f} на \mathbb{R} , который относится к f , как $x + \alpha$ к $\{x + \alpha\}$. Пусть x_0 — точка из $[0, 1]$, такая, что $f(x_0) = 1$. Определим $\tilde{f}(x)$, просто полагая (рис. В.2, б), что

$$\text{а) } \tilde{f}(x) = f(x) \text{ при } 0 < x \leq x_0;$$

$$\text{б) } \tilde{f}(x) = f(x) + 1 \text{ при } x_0 < x < 1;$$

в) при всех остальных значениях $x \in \mathbb{R}$ диффеоморфизм $\tilde{f}(x)$ полностью определяется условием периодичности $\tilde{f}(x + n) = \tilde{f}(x) + n$, где n — целое число.

Нетрудно проверить, что если $f(x) = \{x + \alpha\}$, то $\tilde{f}(x) = x + \alpha$, и что в общем случае $\tilde{f}(x)$ наследует от $f(x)$ свойства непрерывности и обратимости. Число вращений по определению есть величина

$$\rho_{[f]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}^{(n)}(x)}{n}, \quad (\text{В.1})$$

где $\tilde{f}^{(n)}(x)$ есть n -я итерация отображения \tilde{f} .

Число вращений не зависит от выбора начальной точки x . В этом можно убедиться, если учесть, что, поскольку f монотонно возрастает, $\tilde{f}(x)$ и, следовательно, $\tilde{f}^{(n)}(x)$ изменяются самое большее на единицу, когда x принимает значения, заключенные между 0 и 1. Следовательно, «остаток», обусловленный выбором точки x в определении $\rho_{[f]}$, составляет лишь $1/n$ в правой части соотношения (В.1) и обращается в нуль в пределе больших n .

Важность числа вращений обусловлена главным образом тем, что величина $\rho_{[f]}$ инвариантна относительно сопряжения. В некотором смысле число вращений полностью описывает диффеоморфизм f (за исключением того случая, когда $\rho_{[f]}$ обладает «исключительными» арифметическими свойствами). Под сопряжением мы понимаем изменение параметризации (или замену переменной) окружности. Пусть $x \rightarrow C(x)$ — преобразование координат, где C — обратимое отображение интервала $[0, 1]$ на себя. В результате преобразования координат C диффеоморфизм f переходит в отображение

$$f_C = C^{-1} \circ f \circ C,$$

где \circ означает композицию функций. Мы можем построить по C преобразование координат \tilde{C} на \mathbb{R} , такое, что

$$\tilde{f}_C = \tilde{C}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{C},$$

где операция \sim расширяет диффеоморфизм на S^1 до диффеоморфизма на \mathbb{R} , определенного выше.

Ясно, что

$$\tilde{f}_C^{(2)} = \tilde{C}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{C} \circ \tilde{C}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{C},$$

а поскольку композиция функции и обратной функции есть тождественное отображение:

$$\tilde{C} \circ \tilde{C}^{-1} = I,$$

мы получаем

$$\tilde{f}_C^{(2)} = \tilde{C}^{-1} \circ \tilde{f}^{(2)} \circ \tilde{C}$$

и в общем случае

$$\tilde{f}_C^{(n)} = \tilde{C}^{-1} \circ \tilde{f}^{(n)} \circ \tilde{C}.$$

Используя определение числа вращений, можно показать, что

$$\rho_{[f_C]} = \rho_{[f]},$$

а это доказывает инвариантность ρ относительно сопряжения, т. е. ρ не изменяется при произвольном преобразовании координат $x \rightarrow C(x)$.

Важность числа вращений проистекает из обращения следующего свойства: если два диффеоморфизма на S^1 имеют одно и то же *иррациональное* число вращений, то существует преобразование координат $C(x)$, связывающее их сопряжением. Доказательство этого утверждения сложно и основано на нетривиальном использовании алгебраических свойств $\rho_{[f]}$, а поэтому мы не будем останавливаться на нем.

Таким образом, мы видим различие между двумя типами ситуаций: в одних случаях $\rho_{[f]}$ рационально (сопряжения, вообще говоря, не существует), в других иррационально (сопряжения существует). Такое заключение часто считают «нефизическим», так как оно придает решающее значение природе потока на торе и алгебраическим свойствам числа вращений. Мы подробно рассмотрим, к каким физическим следствиям приводит такое различие после того, как выясним, какие математические следствия из него проистекают.

IV. РАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО ВРАЩЕНИЙ, СИНХРОНИЗАЦИЯ

Заглядывая вперед, мы можем утверждать, что случай, когда число вращений $\rho_{[f]}$ рационально, важен, поскольку соответствует синхронизации двух частот вращения по большой и малой окружности тора (см. рис. В.1). Пусть $\rho_{[f]} = \{p/q\}$ (p, q — целые числа). Прежде всего мы можем ограничиться случаем $\rho_{[f]} = 0$. Действительно, используя определение числа

вращений, можно показать, что

$$\rho_{[f^{(k)}]} = \{k\rho_{[f]}\},$$

а поэтому

$$\rho_{[f^{(q)}]} = \left\{ q \frac{p}{q} \right\} = \{p\} = 0.$$

Покажем теперь, что если число вращений равно нулю, то уравнение $f(x) = x$ имеет в интервале $[0, 1]$ по крайней мере один корень. Если бы это было не так, то (поскольку интервал $[0, 1]$ компактен) для $|f(x) - x|$ должна была бы существовать нижняя граница ξ и верхняя граница ξ' , такие, что $0 < \xi < |f(x) - x| < \xi' < 1$. Следовательно, расстояние между графиком функции $f(x)$ и диагональю (или графиком любой из функций $x + n$) всегда было бы больше, чем $\min(\xi, 1 - \xi')$. Отсюда мы заключаем, что

$$0 < \inf(\xi, 1 - \xi') < \rho_{[f]} < 1 - \inf(\xi, 1 - \xi') < 1,$$

а это противоречит гипотезе, согласно которой $\rho_{[f]} = 0$. Следовательно, уравнение $f(x) = x$ имеет на S^1 по крайней мере один корень. Мы можем доказать более сильное утверждение: при *общем* выборе отображения f , такого, что $\rho_{[f]} = 0$, отображение $x \rightarrow f(x)$ имеет по крайней мере две неподвижные точки, из которых одна устойчивая, а другая неустойчивая. Это свойство лучше всего доказывать графически. Рассмотрим случай, когда $f(x) - x$ имеет корень между 0 и точкой x_0 , удовлетворяющей уравнению $f(x_0 - 0) = 1$, и $f(0) = x_1 > 0$ (как на рис. В.3). Тогда функция $f(x) - x$ положительна между 0 и x_a (наименьшим корнем уравнения $f(x) = x$) и обращается в нуль в точке x_a . Если $(df/dx)|_{x=x_a} \neq 1$, то график функции $f(x)$ не касается диагонали в точке x_a и при значениях x , чуть больших x_a , функция $(f(x) - x)$ отрицательна. Так как при $x = x_0$ функция $(f(x) - x)$ снова положительна, между x_a и x_0 заведомо существует второй корень x_b функции $(f(x) - x)$. Это общая ситуация в том смысле, что мы приняли только одно предположение: $(df/dx)|_{x=x_a} \neq 1$. Обобщение этого рассуждения показывает, что корни функции $(f(x) - x)$ встречаются парами, если каждую точку касания графика функции $f(x)$ и диагонали считать за два корня.

Выясним, что происходит при итерации отображения $x \rightarrow f(x)$. Корни функции $(f(x) - x)$ являются неподвижными точками итерации. Рассмотрим простейший случай, когда $(f(x) - x)$ имеет в интервале $[0, 1]$ только два корня x_a и x_b , таких, что $0 < x_a < x_b < x_0$ (см. рис. В.3). Каким будет результат

итерации $x \rightarrow f(x)$? Так как $0 < (df/dx)|_{x=x_a} < 1$, x_a — устойчивая неподвижная точка, а так как $(df/dx)|_{x=x_b} = x_b > 1$, x_b — неустойчивая неподвижная точка. Применяя изложенные в гл. IV графические методы, мы видим, что при всех начальных точках итерации отображения f сходятся к x_a , за исключением того случая, когда в качестве начальной точки мы выбираем неустойчивую неподвижную точку x_b .

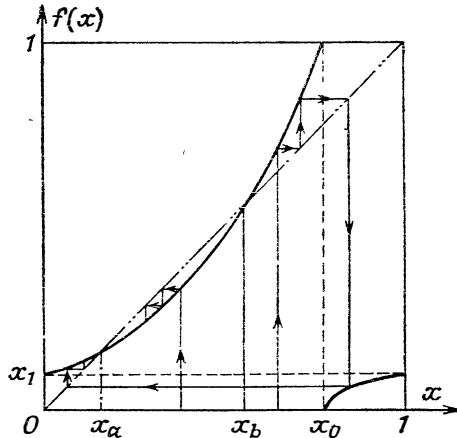


Рис. В.3. Итерации отображения на окружности $x \rightarrow f(x)$. Существуют две неподвижные точки: x_a (устойчивая) и x_b (неустойчивая). Итерации всех начальных условий на $[0, 1]$, кроме $x = x_b$, сходятся к точке x_a .

Если x_a и x_b в действительности совпадают с одной и той же точкой касания графика функции $f(x)$ и диагонали, то итерации отображения f всегда сходятся к той же точке касания. В этом случае заключительная фаза сходимости к неподвижной точке происходит медленнее, чем в том случае, когда $(df/dx)|_{x=x_a} < 1$.

Напомним, что по предположению число вращений равно нулю

а) либо потому, что отношение p/q — целое число и тогда по определению

$$\rho_{\{f\}} = \{p/q\} = 0,$$

б) либо потому, что мы рассматриваем q -ю (а не первую) итерацию отображения ($f^{(q)}$), используя сравнение по модулю единица, входящее в определение числа вращений¹⁾.

¹⁾ Этот случай соответствует затягиванию частот с отношением 1:1 (как вращение Луны вокруг своей оси и ее обращение вокруг Земли). Период вращения по малой окружности тора кратен периоду вращения по большой

Если p и q — взаимно простые (т. е. не имеющие общего делителя) целые числа, то, как известно, отображение $x \rightarrow f^{(q)}(x)$ имеет по крайней мере одну пару неподвижных точек, поскольку $\rho_{|f|} = 0$. Но что можно сказать о самом отображении f ? Пусть x — одна из неподвижных точек отображения $f^{(q)}$. Показатель q — наименьшее число, такое, что $f^{(q)}(x) = x$. Действительно, предположим, что существует целое число $q^* < q$, для которого $f^{(q^*)}(x) = x$. Тогда число вращений отображения $f^{(q^*)}$ было бы равно нулю, а число вращений отображения f было бы вида p^*/q^* . Это противоречит предположению о том, что в отношении p/q числа p и q взаимно простые. Кроме того, q последовательных итераций точки X , т. е. $f(X), \dots, f^{(q)}(X)$, образуют последовательность точек (X_1, X_2, \dots, X_q) на S^1 , называемую q -циклом и такую, что

$$X_j = f(X_{j-1}); \quad X_j \neq X_k, \quad 1 < j < k \leq q,$$

где индекс j берется по модулю q , так что $X_1 = f(X_q)$. Поскольку $f^{(q)}$ имеет две неподвижные точки, существуют по крайней мере две такие последовательности (с периодом q), одна из которых неустойчива. В нейтральном случае, когда график отображения $f^{(q)}$ касается диагонали в точке X_1 [а также в точках X_2, X_3, \dots, X_q , поскольку производная $(df/dx)f^{(q)}$ принимает в каждой точке последовательности одно и то же значение], обе последовательности совпадают. В остальных случаях между любыми двумя точками устойчивой последовательности всегда найдется одна точка неустойчивой последовательности, и наоборот. Таким образом, устойчивая последовательность притягивает все начальные точки, за исключением точек неустойчивой последовательности. Обобщая эти рассуждения, можно показать, что если существуют другие последовательности, устойчивые или неустойчивые, то они также имеют период q .

Если отображение Пуанкаре $x \rightarrow f(x)$ имеет устойчивый q -цикл, то соответствующий непрерывный поток имеет предельный цикл. Устойчивая траектория системы пересекает себя после q оборотов и, следовательно, является простой замкнутой кривой. Спектр Фурье состоит из линий на частотах, кратных некоторой основной частоте. Мы говорим, что это *синхронизация*, поскольку две основные частоты, соответствующие движениям по большой и малой окружности тора, связаны между

окружности. Сводя поток на торе к диффеоморфизму на окружности, мы не можем различить, сколько оборотов (один, два или больше) по большой окружности совершила траектория между двумя последовательными пересечениями с малой окружностью. Следовательно, с точки зрения диффеоморфизма на S^1 отношения двух периодов движения определены только с точностью до целого числа.

собой рациональным отношением. Однако при очень больших q основной период становится очень длинным, а так как расстояние между соседними линиями спектра Фурье порядка $1/q$, анализ спектра может стать затруднительным и даже невозможным, поскольку неизбежный экспериментальный шум увеличивает ширину линий (см. гл. III).

V. ИРРАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО ВРАЩЕНИЙ, КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЙ РЕЖИМ

Изложение в этом разделе неизбежно должно быть более сухим из-за математических трудностей, связанных с анализом в случае иррациональных чисел вращений. Мы уже говорили о том, что два диффеоморфизма f и f' на S^1 называются сопряженными, т. е. связанными заменой переменной, если их числа вращений равны и иррациональны. Это позволяет нам рассмотреть только простое вращение $x \rightarrow \{x + \rho_{[f]}\}$. В теории чисел существует множество результатов, имеющих отношение к вращениям на иррациональные углы. Один из важных результатов состоит в том, что если число α иррационально, то последовательные образы x , $\{x + \alpha\}$, $\{x + 2\alpha\}$, ..., $\{x + n\alpha\}$ постепенно покрывают окружность непрерывно и равномерно. Соответствующая траектория всюду плотно наматывается на тор без самопересечений.

В анализе Фурье такой непрерывной временной последовательности мы обнаружим две различные угловые частоты ω_1 и ω_2 , соответствующие периодам вращения по большой и малой окружности тора. Так как отношение этих двух угловых частот иррационально, квазипериодический сигнал обнаруживает (априори, так как осцилляторы не гармонические) всюду плотное бесконечное множество пиков на всех частотах $|n_1\omega_1 \pm n_2\omega_2|$, где n_1, n_2 — целые числа (см. гл. III). Строго говоря, несколько более сложная ситуация возникает, если иррациональное отношение ω_1/ω_2 «слишком близко» к рациональному. Такая ситуация, хотя и вызывает восторг у математиков, по-видимому, не играет особо важной роли в физике (см. ниже).

VI. СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И СИНХРОНИЗАЦИЯ, «ЧЕРТОВА ЛЕСТНИЦА»

До сих пор мы ограничивались анализом явлений, исходя из арифметической природы числа вращений. Было показано, что если число вращений иррационально, то происходит синхронизация, а если оно рационально, то возникает квазипериодичность. Чтобы продвинуться дальше, нам необходимо оценить относительную важность этих двух ситуаций. Следует ли

считать синхронизацию, соответствующую рациональному числу вращений, чем-то исключительным, как рациональные числа в множестве вещественных чисел? Из работы М. Хермана мы знаем, как отвечать на такого рода вопрос, требующий нетривиального анализа, поскольку мы находимся в рамках весьма общего подхода и не используем индивидуальные особенности выбранной модели. С этой точки зрения следует отметить два особенно замечательных свойства.

1) Синхронизация — явление *структурно устойчивое*, чем (в принципе) и объясняется его относительная универсальность.

2) Вариация числа вращений как функция управляющего параметра в общем случае имеет своим графиком «*чертову лестницу*».

Эти два утверждения заслуживают обоснования и более подробного объяснения.

VI. 1. Структурная устойчивость синхронизации

Предположим, что число вращений рационально (например, равно нулю). Тогда в стандартном случае график отображения $x \rightarrow f(x)$ пересекает диагональ в двух точках. Если мы, изменяя управляющий параметр, слегка деформируем отображение f , то две точки пересечения останутся (по крайней мере в том случае, когда возмущение не слишком велико). Именно это мы и имеем в виду, когда говорим о структурной устойчивости, которую не следует смешивать с динамической устойчивостью в ее обычном смысле (т. е. с устойчивостью относительно изменения начальных данных). Пока число точек пересечения остается равным двум, число вращений сохраняет свое нулевое значение. К аналогичному результату мы придем всякий раз, когда число вращений будет рациональным. Следовательно, $\rho_{[f]}$, когда оно рационально, есть *константа* на открытых интервалах значений управляющего параметра.

Концы этих интервалов соответствуют нейтральным ситуациям, когда график функции $|f(x)$ касается диагонали. Здесь также число вращений равно нулю, но бесконечно малое изменение управляющего параметра может привести к отрыву графика $f(x)$ от диагонали и, следовательно, к изменению числа вращений (см. гл. IX).

VI. 2. «Чертова лестница»

Число вращений $\rho_{[f]}$ есть непрерывная функция отображения f и, следовательно, любого непрерывного параметра λ , характеризующего f . Следовательно, изменение величины $\rho_{[f]}$ как функции параметра λ имеет весьма необычный вид: каждый

раз, когда ρ проходит через рациональное значение, в графике $\rho(\lambda)$ появляется горизонтальная ступень, так как эта функция постоянна на открытом интервале значений параметра λ . Но это еще и непрерывная функция параметра λ .

Пусть 1 и 2 — два интервала значений параметра λ , на которых ρ принимает рациональные значения p_1/q_1 и p_2/q_2 (рис. В.4). Тогда заведомо существует другой интервал 3 значений λ , расположенный между 1 и 2, на котором $\rho = p_3/q_3$, где p_3/q_3 — любое рациональное число, заключенное между p_1/q_1 и

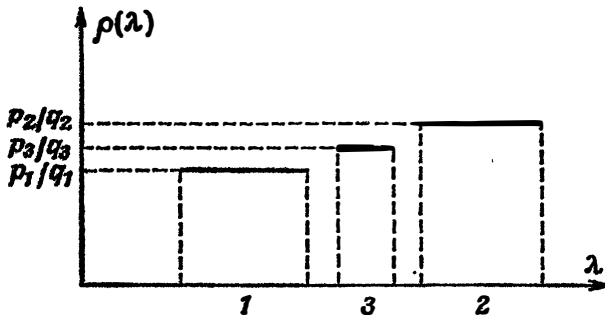


Рис. В.4. Построение «чертовой лестницы». Показана зависимость числа вращений $\rho(\lambda)$ от управляющего параметра λ . На открытых интервалах 1 и 2 число вращений рационально и равно соответственно p_1/q_1 и p_2/q_2 . В интервале 3 между интервалами 1 и 2 число вращений равно p_3/q_3 — рациональному числу, заключенному между числами p_1/q_1 и p_2/q_2 . Следовательно, функция $\rho(\lambda)$ постоянна на некотором открытом интервале значений параметра λ всякий раз, когда она принимает рациональное значение. Окончательно мы получаем функцию, состоящую из бесконечного числа ступеней, которая известна под названием «чертовой лестницы».

p_2/q_2 , например $(p_1 + p_2)/(q_1 + q_2)$. Та же процедура повторяется для нового рационального числа, заключенного между p_1/q_1 и p_3/q_3 (или p_2/q_2 и p_3/q_3), и т. д. для всех интервалов значений λ , остающихся между интервалами синхронизации. Ось λ в конце концов оказывается всюду плотно покрытой интервалами синхронизации. Но это не исчерпывает всех возможностей: так как функция $\rho(\lambda)$ непрерывна, она должна также принимать все иррациональные значения, заключенные между любыми рациональными. Иррациональные значения ρ должны вклиниваться между интервалами синхронизации. График $\rho(\lambda)$ образует то, что получило название *чертовой лестницы*, так как между любыми двумя ступенями заключено бесконечно много ступеней. Но, естественно, большинство ступеней имеет бесконечно малую ширину, так как в любом ограниченном интервале содержится (счетное) бесконечное множество ступеней.

На практике ступени со сколько-нибудь заметной шириной соответствуют синхронизации с «простым» рациональным числом p/q , т. е. с отношением небольших целых чисел, например $1/1$, $1/2$, $2/3$ и т. д.

Возникает вопрос: каково практическое значение иррациональных значений ρ ? Действительно, для физики имеют значение только такие явления, которые имеют ненулевую меру. Дело в том, что для реальной физической системы значение λ никогда точно не известно, и поэтому мы не знаем, располагаем ли *точным* значением λ , соответствующим иррациональному числу вращений, или близким к нему значением из очень узкого интервала синхронизации. Очень разумная точка зрения, позволяющая учитывать экспериментальные «впечатления», состоит в принятии вероятностного подхода. Иррациональные числа вращений обретают «физический» смысл (как квазипериодические режимы, противопоставляемые режиму синхронизации), если значение λ , выбранное случайным образом в интервале (например, между 1 и 2 на рис. В.4), имеет шанс оказаться соответствующим иррациональному $\rho_{[f]}$. Ответ, данный математиками на этот вопрос, можно сформулировать в виде двух утверждений.

1) Вблизи *нормальной* (суперкритической) бифуркации Хопфа, т. е. в момент, когда в спектре Фурье сигнала возникает вторая частота с очень малой амплитудой, два осциллятора «игнорируют» друг друга. Это означает, что мы почти заведомо находимся вне интервала синхронизации (несмотря на то что интервалы синхронизации расположены всюду плотно!).

2) По мере возрастания амплитуды колебаний второго осциллятора, т. е. когда мы покидаем точку бифуркации Хопфа, вероятность оказаться вне интервала синхронизации убывает и обращается в нуль при значениях управляющего параметра, превышающих некоторое критическое конечное значение. Как было показано в гл. VII, это значение такое, что график отображения $x \rightarrow f(x)$ имеет точку перегиба с горизонтальной касательной.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г
МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦА

Г. КОНВЕКЦИЯ РЭЛЕЯ — БЕНАРА

Рассмотрим слой жидкости бесконечной протяженности по горизонтали, подогреваемый снизу. В приближении Буссинеска безразмерные уравнения, описывающие связанный перенос импульса жидкости [через ее скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$] и тепла [через отклонение температуры $\theta(\mathbf{r}, t)$], имеют вид ¹⁾

$$\text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \theta \mathbf{e}_z + \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (\text{Г.1а})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{Г.1б})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \text{Ra} \lambda \cdot \mathbf{v} + \nabla^2 \theta \quad (\text{Г.1в})$$

с числом Прандтля $\text{Pr} = \nu/D_T$ и числом Рэлея

$$\text{Ra} = (\rho_0 g \alpha d^3 / \eta D_T) \delta T.$$

Наличие оператора дифференцирования ∇ по пространственным переменным означает, что перед нами дифференциальные уравнения с частными производными, не слишком удобные в обращении. Следовательно, желательно преобразовать их в какую-нибудь конечную систему дифференциальных уравнений, т. е. в поток (разумеется, в математическом смысле, а не в поток жидкости). Для этого мы воспользуемся методом Галеркина, который можно рассматривать как своего рода экстраполяцию разложений типа Ландау. Основная задача состоит в том, чтобы определить неустойчивые моды, которые надлежит сохранить в обрезанном разложении, поскольку подход в духе Ландау не может удовлетворительно учитывать все нелинейности, когда входят флуктуации конечной амплитуды. Несколько правил помогают правильно отбирать моды.

а) Не следует вводить неустраняемые особенности. В нелинейной динамике это не всегда легкая задача. Например, простейшее нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

¹⁾ Здесь мы снова используем обозначения из гл. V, где читатель может найти все необходимые определения.

имеет решение

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - tx(0)},$$

которое обращается в бесконечность при $t = 1/x(0)$, т. е. за конечное время, если $x(0) > 0$. Разумеется, для исключения всех расходимостей из исходных уравнений необходимо использовать физику задачи. Но для того чтобы произвести вычисления, почти всегда необходимо обращаться к тем или иным приближениям и очень трудно проследить за тем, чтобы введение приближений не сопровождалось появлением новых особенностей.

б) Количественные свойства уравнений должны оставаться неизменными, в частности законы сохранения таких экстенсивных переменных, как масса, импульс и т. д.

в) Усеченные уравнения следует выбирать как можно ближе к исходным. Если мы пытаемся моделировать дифференциальные уравнения с частными производными, как в случае задачи РБ, то желательно взять столько узлов в разностной схеме (или столько мод Фурье), сколько требуется для эффективности вычислений.

Вывод модели Лоренца из уравнений (Г.1) требует в основном правил «а» и «б». Что же касается правила «в», то в нем выражается требование максимального упрощения представления динамики. Апостериори, по крайней мере если судить по обильному урожаю полученных результатов¹⁾, такая процедура представляется вполне разумной.

II. ВЫВОД МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

Самое первое упрощение состоит в том, чтобы считать конвективные валы, возникающие за порогом неустойчивости РБ, параллельными (рис. Г.1). Тогда вектор скорости любого элемента жидкости перпендикулярен оси валов. Вдоль оси валов существует трансляционная инвариантность, поэтому переменные в уравнениях (Г.1) зависят только от двух пространственных координат: высоты z и горизонтальной координаты x , перпендикулярной оси валов (рис. Г.1).

Пусть $u(x, z, t)$ и $w(x, z, t)$ — компоненты поля скоростей по осям x и z . Тогда уравнение несжимаемости (Г.16) запишется

¹⁾ Напомним, что первоначально (1963) Лоренц намеревался создать хотя бы грубую модель земной атмосферы, которая позволила бы производить расчеты на бывшем тогда в его распоряжении сравнительно небольшом компьютере LPG 30.

в виде ¹⁾

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = u_x + w_z = 0.$$

Вводя функцию тока Лагранжа $\psi(x, z, t)$, замечаем, что уравнению несжимаемости удовлетворяют

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\psi_z; \quad w = +\frac{\partial \psi}{\partial x} = +\psi_x.$$

Поле скоростей должно удовлетворять условиям, наложенным на верхнюю и нижнюю поверхности жидкости, задаваемые в

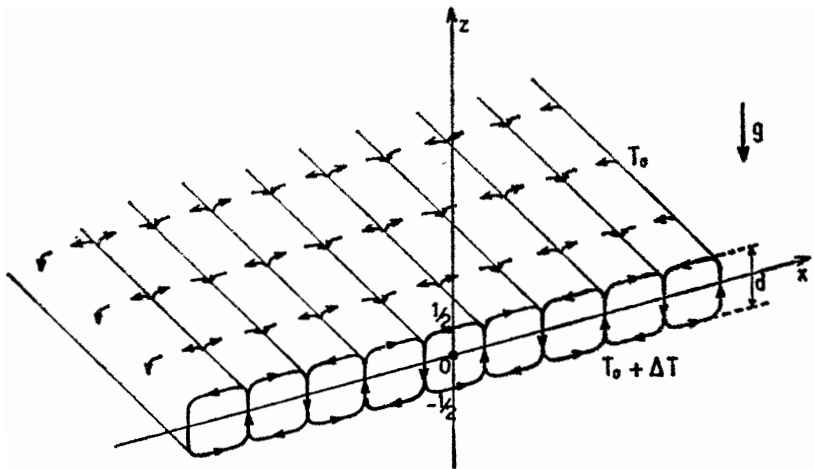


Рис. Г.1. Схематическое изображение конвекционных валов при тепловой конвекции Рэлея — Бенара. Все валы прямые, с параллельными осями. Вся структура периодична по оси x . Высота валов d по оси z принята за единицу длины, поэтому верхняя и нижняя поверхности жидкости определяются уравнениями

$$z = -1/2 \quad \text{и} \quad z = +1/2.$$

Направление градиента температуры противоположно направлению гравитационного поля g .

единицах длины d уравнениями $z = +1/2$ и $z = -1/2$. Первое требование состоит в том, что, не должно быть потока жидкости через поверхности:

$$w|_{z=+1/2} = 0.$$

¹⁾ Мы используем обычные обозначения:

$$y_x = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{z, t}.$$

Кроме того, если обе поверхности считаются «свободными» (это означает, что мы пренебрегаем силами поверхностного натяжения), то сдвиговая компонента тензора напряжения должна быть равной нулю:

$$-\eta \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\pm 1/2} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\pm 1/2} = 0.$$

Нетрудно видеть, что эти условия выполняются, если ψ удовлетворяет условиям

$$\psi \Big|_{z=\pm 1/2} = 0,$$

$$\psi_{zz} \Big|_{z=\pm 1/2} = 0.$$

Этим двум условиям удовлетворяет член типа $\cos(\pi z)$. Так как линии уровня функции ψ являются линиями тока поля скоростей, они должны адекватно воспроизводить систему валов в направлении оси x . Этого можно достичь с помощью члена типа $\sin(qx)$ с периодом $2\pi/q$ в направлении оси x .

Используя метод Галеркина, мы произвольно ограничиваем описание функций ψ одним членом:

$$\psi(x, z, t) = \psi_1(t) \cos(\pi z) \sin(qx),$$

что приводит к следующим выражениям для компонент поля скоростей:

$$u = \pi \psi_1(t) \sin(\pi z) \sin(qx), \quad (\text{Г.2a})$$

$$w = q \psi_1(t) \cos(\pi z) \cos(qx). \quad (\text{Г.2б})$$

Запишем теперь уравнение (Г.1a) для компонент x и z ¹⁾:

$$\text{Pr}^{-1}(u_t + uu_x + wu_z) = -p_x + \Delta u, \quad (\text{Г.3a})$$

$$\text{Pr}^{-1}(w_t + uw_x + ww_z) = -p_z + \Delta w + \theta. \quad (\text{Г.3б})$$

Действуя на уравнение (Г.1a) оператором rot [вычисляя $(\partial/\partial z)$ (Г.3a) — $(\partial/\partial x)$ (Г.3б)], получаем

$$\text{Pr}^{-1} \left[-(\Delta \psi)_t + \frac{\partial}{\partial z}(uu_x + wu_z) - \frac{\partial}{\partial x}(uw_x + ww_z) \right] = -\Delta^2 \psi - \theta_z, \quad (\text{Г.3в})$$

¹⁾ Δ означает оператор Лапласа в прямоугольных координатах (x, z) :

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

где мы воспользовались соотношением

$$\Delta\psi = - \left(\frac{\partial}{\partial z} u - \frac{\partial}{\partial x} w \right).$$

Придерживаясь метода Галеркина, мы должны далее выбрать произвольную, но подходящую форму для θ . Если дано, что отклонение температуры θ связано с полем скоростей уравнениями (Г.1а) и (Г.3в), то естественно наложить на θ ту же периодичность по x , какой обладает поле скоростей. Именно поэтому мы принимаем для θ такую же зависимость от x , как для w (компоненты скорости по оси z). Кроме того, мы считаем, что температура жестко задана на двух поверхностях. Это означает, что отклонение температуры θ обращается на поверхностях в нуль:

$$\theta|_{z=\pm 1/2} = 0.$$

Таким образом, мы приходим к следующей форме для θ :

$$\theta(x, z, t) = \theta_1(t) \cos(\pi z) \cos(qx) + \theta_2(t) \sin(2\pi z), \quad (\text{Г.4})$$

согласующейся с граничными условиями. Второй член, не зависящий от x , оказывается необходимым, как мы увидим в дальнейшем, для включения хотя бы части нелинейностей системы (Г.1).

Подставляя в уравнение (Г.3в) приведенные выше уравнения для u , w , ψ и θ , получаем

$$\text{Pr}^{-1} \dot{\psi}_1 = \frac{q\theta_1}{\pi^2 + q^2} - (\pi^2 + q^2) \psi_1 \quad (\text{Г.5})$$

— линейное дифференциальное уравнение первого порядка¹⁾ для ψ_1 .

Из уравнения теплопроводности (Г.1в) следует, что

$$\dot{\theta}_t + \psi_x \theta_z - \psi_z \theta_x = \text{Ra} \psi_x + \Delta\theta. \quad (\text{Г.6})$$

Величина $\psi_x \theta_z - \psi_z \theta_x$ в этом уравнении — наследие нелинейного члена $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta$ в уравнении (Г.1в); она равна

$$\psi_x \theta_z - \psi_z \theta_x = \pi q \psi_1 \left[-\frac{\theta_1}{2} \sin(\pi z) + \theta_2 \cos(qx) (\cos(\pi z) + \cos(3\pi z)) \right].$$

Подставляя в уравнение (Г.6) выражения для поля скоростей (Г.2) и температуры (Г.4), приходим к уравнению, допускающему только неконвективные решения ($\dot{\psi}_1 = 0$). Следовательно,

¹⁾ В результате обрезания исходных уравнений за счет выбора соответствующих функциональных форм для ψ и θ нелинейный член $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta$ уравнения (Г.1а) исчез.

вместо того чтобы требовать точного равенства, как мы обычно делали, потребуем равенства членов $\cos(qx)\cos(\pi z)$ и $\sin(2\pi z)$ и пренебрежем членом $\cos(qx)\cos(3\pi z)$. В результате получим два уравнения

$$\dot{\theta}_1 = -\pi q \psi_1 \theta_2 + q \text{Ra} \psi_1 - (\pi^2 + q^2) \theta_1, \quad (\text{Г.7a})$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{1}{2} \pi q \psi_1 \theta_1 - 4\pi^2 \theta_2, \quad (\text{Г.7б})$$

относительно членов, входящих в $\cos(qx)\cos(\pi z)$ и $\sin(2\pi z)$. Уравнения (Г.5), (Г.7a) и (Г.7б) образуют систему трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений для амплитуд ψ_1 , θ_1 и θ_2 . Удобно произвести замену переменных

$$t' = (\pi^2 + q^2)t; \quad X = \frac{\pi q}{\sqrt{2}(\pi^2 + q^2)} \psi_1,$$

$$Y = \frac{\pi q^2}{\sqrt{2}(\pi^2 + q^2)} \theta_1; \quad Z = \frac{\pi q^2}{(\pi^2 + q^2)^3} \theta_2$$

и ввести два параметра

$$r = \frac{q^2}{(\pi^2 + q^2)^3} \text{Ra}; \quad b = \frac{4\pi^2}{\pi^2 + q^2}.$$

В результате мы приходим к так называемой модели Лоренца

$$\dot{X} = \text{Pr}(Y - X), \quad (\text{Г.8a})$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y, \quad (\text{Г.8б})$$

$$\dot{Z} = XY - bZ. \quad (\text{Г.8в})$$

III. НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ МОДЕЛИ

Прежде всего убедимся в том, что обрезание не ввело явно в модель какую-нибудь нежелательную особенность. Достаточно показать, что ни одно решение уравнений (Г.8) не обращается в бесконечность; иначе говоря, что векторное поле в \mathbb{R}^3 на поверхности, окружающей начало координат и проходящей на большом расстоянии от него, всюду направлено к началу. Пусть $f(X, Y, Z) = 0$ будет уравнение такой поверхности. Необходимое и достаточное условие существования векторного поля состоит в том, чтобы скалярное произведение вектора скорости и нормали, направленной наружу от поверхности, было всюду отрицательным:

$$Df = \dot{X}f_x + \dot{Y}f_y + \dot{Z}f_z < 0.$$

Подставляя \dot{X} , \dot{Y} , \dot{Z} из уравнений (Г.8), получаем

$$Df = \text{Pr}(Y - X)f_x + (-XZ + rX - Y)f_y + (XY - bZ)f_z.$$

Из большого запаса возможных поверхностей f выберем эллипсоид, уравнение которого имеет вид

$$f(X, Y, Z) = \frac{X^2}{2Pr} + \frac{Y^2}{2} + \frac{Z^2}{2} - (r+1)Z - \mu = 0$$

с произвольно большим $\mu \geq 0$. Подставляя уравнение эллипсоида, получаем

$$Df = -X^2 - Y^2 - bZ^2 + (r+1)Z.$$

Из определения поверхности ясно, что при достаточно большом μ доминируют квадратичные члены, а членом, линейным по Z , можно пренебречь. Следовательно, величина Df всегда отрицательна: ни одна траектория, выходящая из начала координат, не может на конечном расстоянии от него уйти в бесконечность¹⁾.

Нельзя не отметить еще одно обстоятельство: объемы в фазовом пространстве сокращаются. Это означает, что поток, определяемый уравнениями (Г.8), диссипативен, как и исходные уравнения. Сокращение объема следует из того, что поле скоростей имеет постоянную отрицательную дивергенцию:

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(Pr + 1 + b).$$

Если в некоторый момент $t = 0$ мы рассмотрим множество начальных данных, занимающих объем $\Omega(0)$, то концы траекторий, выходящих из точек множества, в момент времени t заполнят объем $\Omega(t)$, равный

$$\Omega(t) = \Omega(0) \exp[-(Pr + 1 + b)t].$$

Таким образом, объем монотонно убывает со временем. Попутно заметим, что, поскольку модель Лоренца задает поток в \mathbb{R}^3 , экспоненциальное сокращение объема запрещает существование аттрактора на торе T^2 , так как в противном случае объем внутри тора сохранялся потоком. Следовательно, в силу своей внутренней структуры модель Лоренца не может иметь квазипериодического решения²⁾.

Нам остается определить волновое число q валов вдоль оси x . Так как одна из наших целей состоит в моделировании порога конвекции, представляется естественным выбрать (как

¹⁾ Приведенное выше доказательство использует метод, характерный для модели Лоренца. Установить регулярность решений нелинейного потока при всех t не всегда так просто.

²⁾ Это свойство является общим для всех потоков в \mathbb{R}^3 с всюду отрицательной дивергенцией.

делал сам Лоренц) волновое число флуктуаций, дестабилизирующих состояние, в котором конвекция отсутствует и передача тепла осуществляется только за счет теплопроводности. По определению такое состояние характеризуется тем, что

$$\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = 0.$$

Его линейная устойчивость зависит от эволюции бесконечно малой флуктуации δX , δY и δZ , удовлетворяющей уравнениям

$$\delta \dot{X} = \text{Pr}(\delta Y - \delta X),$$

$$\delta \dot{Y} = r \delta X - \delta Y,$$

$$\delta \dot{Z} = -b \delta Z,$$

получающимся при линеаризации потока (Г.8) относительно доконвективного состояния. Компонента δZ всегда затухает, так как коэффициент b положителен. Что же касается компонент δX и δY , то они имеют вид

$$\delta X = \delta X_0 \exp(\sigma t), \quad \delta Y = \delta Y_0 \exp(\sigma t),$$

где σ — корень характеристического уравнения:

$$(\sigma + \text{Pr})(\sigma + 1) - r \text{Pr} = 0,$$

или

$$\sigma^2 + (\text{Pr} + 1)\sigma + \text{Pr}(1 - r) = 0.$$

Так как $\text{Pr} > 0$, мы видим, что один из вещественных корней этого квадратного уравнения становится положительным, как только параметр r превосходит единицу. Следовательно, доконвективное состояние линейно неустойчиво при $r \geq 1$, т. е. при

$$\text{Ra} \geq \frac{(\pi^2 + q^2)^2}{q^2}.$$

Соответствующими флуктуациями на пороге неустойчивости являются такие, которые приводят к минимуму Ra , т. е. такие, при которых правая часть достигает минимума:

$$q^2 = \frac{1}{2} \pi^2.$$

Следовательно, $\text{Ra} = 27\pi^4/4$.

Эти хорошо известные значения впервые были вычислены Рэлеем. Параметр b в этом случае равен $8/3$. Это значение часто используется при численном моделировании системы Лоренца.

IV. БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА ($Pr = 10$; $b = 8/3$)

После того как система Лоренца выведена, поток (Г.8) сам по себе может быть предметом исследования безотносительно к его гидродинамическому происхождению. Поскольку в общем случае модель Лоренца не интегрируема, ее решения могут быть найдены численно с помощью компьютера, если фиксировать три параметра Pr , b и r . Много исследований было проведено с значениями параметров, первоначально выбранными самим Лоренцом¹⁾:

$$Pr = 10, \quad b = 8/3, \quad r > 0.$$

Параметр r , непосредственно связанный с параметром Ra в проблеме РБ, т. е. с приложенной разностью температур, служит бифуркационным, или управляющим, параметром. Совершим краткий обзор бифуркационной диаграммы.

Стационарные решения по определению таковы, что

$$\begin{aligned} \dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} &= 0, \\ Y = X; \quad Z &= \frac{1}{2} X^2; \quad X = \pm [b(r - 1)]^{1/2}. \end{aligned}$$

При $0 \leq r \leq 1$ существует только одно решение такого типа — чисто теплопроводящее состояние:

$$X = Y = Z = 0.$$

Когда параметр r становится больше единицы, это решение теряет устойчивость. Возникают два стационарных решения:

$$X = Y = \pm [b(r - 1)]^{1/2}, \quad Z = r - 1.$$

Мы имеем здесь бифуркацию типа вилки, при которой устойчивая неподвижная точка рождает две другие неустойчивые неподвижные точки. Эти результаты следуют из инвариантности потока (Г.8) относительно симметрии

$$(X, Y, Z) \rightarrow (-X, -Y, -Z).$$

Очень простые вычисления подтверждают, что два решения при $r \geq 1$ линейно независимы. Физически они соответствуют наступлению конвекции, и каждое из них связано с одним из двух возможных направлений вращения валов. Они теряют линейную устойчивость при $r = 24,74$, где каждое решение претерпевает субкритическую бифуркацию Хопфа; выше точки бифуркации существует только апериодическое решение. Хотя строгое математическое доказательство пока отсутствует, по-

¹⁾ Были исследованы и некоторые другие комбинации параметров, в основном $Pr = 16$, $b = 4$. Для наших целей достаточно результатов, полученных Лоренцом.

видимому, мы имеем здесь дело со странным аттрактором. При бифуркации Хопфа наблюдается гистерезис, и при значениях параметра r от 24,06 до 24,74 сосуществуют три аттрактора: два стационарных решения и странный аттрактор, который

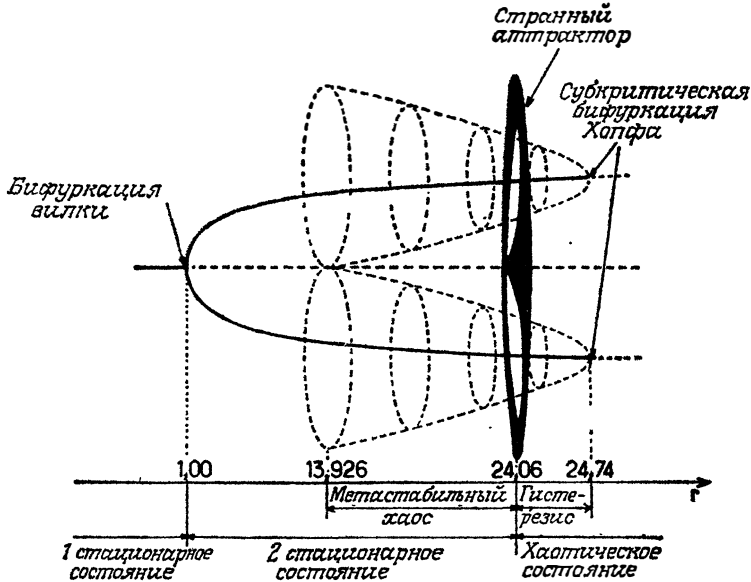


Рис. Г.2. Бифуркационная диаграмма для модели Лоренца ($Pg = 10$, $b = 8/3$). Первая бифуркация ($r = 1$) — суперкритическая бифуркация типа вилки, обусловленная симметрией $(X, Y, Z) \rightarrow (-X, -Y, Z)$ данной модели. Вторая бифуркация ($r = 24,74$) — субкритическая бифуркация Хопфа. Величины, отложенные по оси ординат, изменяются как X или Y . Как обычно, штриховые линии соответствуют неустойчивым, а сплошные — устойчивым состояниям.

Из диссертации К. Трессера «Простые модели перехода к турбулентности» на звание доктора философии, защищенной в Университете Ниццы в 1981 г.

иногда называется «нестандартным». Упомянем также о том, что метастабильный хаос, о котором шла речь в гл. VI, получается при меньших значениях r (до $r = 13,926$). На рис. Г.2 схематически изображена бифуркационная диаграмма. Заметим, что хаос на ней появляется не через потерю устойчивости периодической траектории. Эта мода перехода «не вписывается» в один из трех маршрутов, описанных во второй части книги.

При $r \in [24,74; 30,1]$ странный аттрактор составляет только устойчивое решение потока (Г.8). Нетрудно понять, почему так много математических исследований было выполнено при $r = 28$, т. е. в самом центре этой области. Выше $r = 30,1$ и до $r \approx 214$ диаграмма решений становится необычайно сложной, с чередо-

ванием хаотических и периодических режимов, внешне напоминающих соответствующие режимы, которые возникают при

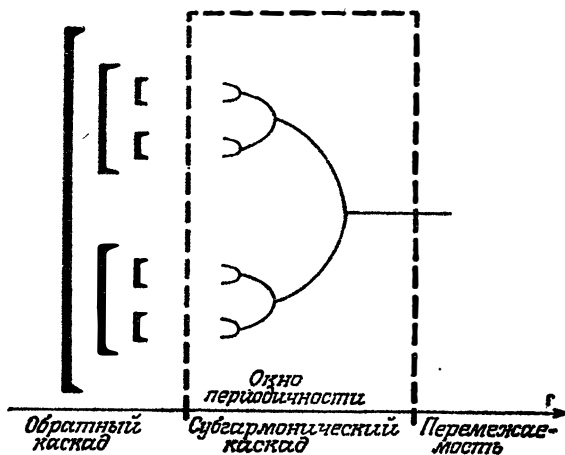


Рис. Г.3. Типичное окно периодичности и процессы, предшествующие его появлению и исчезновению. Численные эксперименты, с необходимостью ограниченные лишь самыми широкими (по r) окнами, показывают, что появлению окон периодичности всегда предшествует обратный каскад. Прямой субгармонический каскад завершается основным предельным циклом, который впоследствии разрушается перемежаемостью типа I.

квадратичном отображении интервала на себя при $\mu \in [0,892, \dots; 1]$ (см. рис. VIII.7). Имеются веские основания считать, что «окон периодичности» бесконечно много. Мы упомянем лишь три самых больших окна¹⁾:

$$99,524 \dots < r < 100,795 \dots,$$

$$145, \dots < r < 166, \dots,$$

$$214,364 \dots < r.$$

Эти области, как объяснялось в разд. VIII.3.5, являются областями различных периодических аттракторов. Интересно, что их появление и исчезновение подчиняются той последовательности событий, которую мы сейчас описываем (см. рис. Г.3). Незадолго до того, как действительно начинается окно периодичности, наблюдается обратный каскад бифуркаций того типа, который описан в разд. VIII.3.3. В спектре Фурье шум и, следовательно, хаос монотонно убывают. Обратный каскад сменяется прямым субгармоническим каскадом, который заканчивается основным предельным циклом, а вся совокупность режимов

¹⁾ Границы окон указаны в соответствии с имеющимися данными. Этим (и только этим) объясняется различное число десятичных знаков.

в целом составляет окно периодичности¹⁾. Так же, как окну периодичности всегда предшествует обратный каскад (по крайней мере во всех достаточно хорошо изученных случаях), пере-

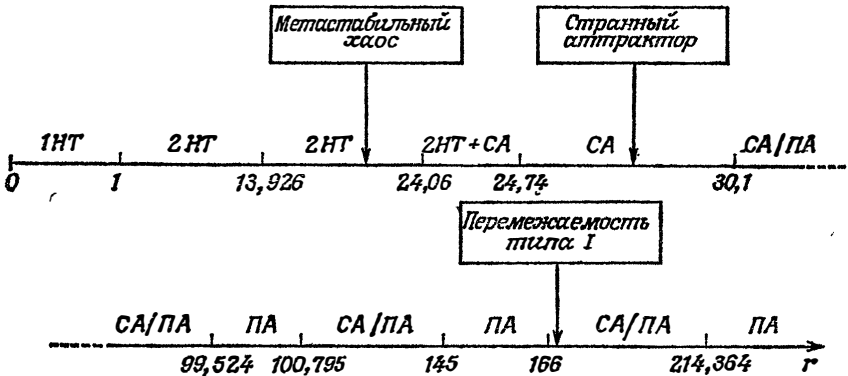


Рис. Г.4. Последовательность аттракторов в модели Лоренца ($Pg = 10$, $b = 8/3$). НТ — неподвижная точка; СА — странный аттрактор; ПА — периодический аттрактор (окно периодичности); «+» — сосуществование, а «/» — чередование различных аттракторов.

межаемость I типа каждый раз указывает на его конец²⁾. Когда основной предельный цикл утрачивает устойчивость, это происходит из-за перехода через точку $+1$ одного из собственных значений матрицы Флоке. Переход к хаосу при этом осуществляется от периодического решения и вписывается в один из сценариев теории.

Аналитическое исследование модели (Г.8) в пределе больших значений r показывает, что последний аттрактор непременно является предельным циклом, и этот вывод убедительно подкрепляется данными численного моделирования. Последнее окно периодичности начинается при $r = 214,364$, а заканчивается обратным каскадом, который начинается при $r = 197,4$. Прямой каскад заканчивается при $r = 313$. Выше этого значения параметра r остается только соответствующий основной предельный цикл в качестве устойчивого аттрактора. На рис. Г.4 показаны последовательность аттрактора вдоль оси x и явления, подробно описанные в других частях этой книги.

¹⁾ Подробно эта ситуация была объяснена в гл. VIII, где мы рассматривали субгармонический каскад, встречающийся при квадратичном отображении интервала на себя. Для восстановления той же последовательности (прямого каскада, за которым следует обратный каскад) достаточно выбрать в качестве бифуркационного параметра μ какую-нибудь убывающую функцию от r , например $1/r$.

²⁾ Переменяемость I типа была открыта и исследована при численном моделировании с $r > 166$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

I. МАТРИЦЫ

Мы опишем здесь некоторые свойства квадратных матриц, иллюстрирующих основы теории матриц Флоке в том числе, в каком они встречаются в различных частях нашей книги.

I. 1. Общие сведения

Пусть S_0 — начало координат в сечении Пуанкаре устойчивого предельного цикла и пусть S_1, S_2, \dots, S_n — последовательность точек пересечения траектории, первоначально близкой к предельному циклу.

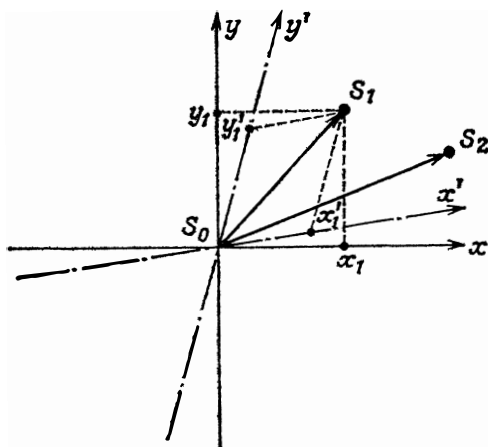


Рис. Д.1. Две системы координат S_0x' и S_0y' — два собственных направления матрицы (если она имеет действительные собственные значения).

Выясним, как S_2, \dots, S_n можно получить из S_1 в зависимости от типа используемого отображения. Пусть (S_0x, S_0y) — прямоугольная система и пусть x_1 и y_1 — координаты точки S_1 (рис. Д.1). Рассмотрим линейное преобразование, определяющее координаты образа S_2 точки S_1 :

$$S_2 \begin{cases} x_2 = ax_1 + by_1, \\ y_2 = cx_1 + dy_1 \end{cases}$$

и в общем случае n -я итерация S_n :

$$S_n \begin{cases} x_n = ax_{n-1} + by_{n-1}, \\ y_n = cx_{n-1} + dy_{n-1}. \end{cases}$$

Матрица M этого линейного преобразования имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

и мы можем написать

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \overrightarrow{S_0 S_n} = M^{n-1} \overrightarrow{S_0 S_1}.$$

Обычно вычисление матрицы M^{n-1} сопряжено с громоздкими и трудными выкладками. Однако мы можем в общем случае найти другую систему координат (x', y') и два числа λ_1 и λ_2 (которые могут быть комплексными), таких, что координаты образа S_2 связаны с координатами точки S_1 более просто:

$$S_2 \begin{cases} x'_2 = \lambda_1 x'_1, \\ y'_2 = \lambda_2 y'_1. \end{cases}$$

Аналогично

$$S_n \begin{cases} x'_n = \lambda_1^{n-1} x'_1, \\ y'_n = \lambda_2^{n-1} y'_1. \end{cases}$$

Матрица M' в новой системе координат диагональна:

$$M' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \text{и в этом случае}$$

вычислить

$$M'^{n-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix}$$

нетрудно.

Величины λ_1 и λ_2 называются *собственными значениями матрицы M* . Они являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Нетрудно понять, при каких условиях собственные значения могут быть комплексными. Тогда (в случае матрицы M) они непременно комплексно-сопряженные:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$$

Собственными векторами V матрицы M называются такие векторы, для которых $M \cdot V = \lambda V$. Один из них параллелен оси S_0x' , другой — оси S_0y' новой системы координат; поэтому эти оси называются *собственными направлениями* матрицы M .

Оси S_0x' и S_0y' определяются (в системе координат x, y) соотношениями

$$\begin{aligned} ax + by &= \lambda x, \\ cx + dy &= \lambda y, \end{aligned} \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2.$$

Так как

$$S_n \begin{cases} x'_n = \lambda_1^{n-1} x'_1, \\ y'_n = \lambda_2^{n-1} y'_1, \end{cases}$$

асимптотическое поведение преобразования S_n определяется наибольшим по модулю значением λ . Пусть $|\lambda|^+$ — модуль этого значения. Тогда

- 1) если $|\lambda|^+ < 1$, то $\lambda^n \rightarrow 0$ и S_n сходятся к началу координат S_0 ;
- 2) если $|\lambda|^+ > 1$, то $\lambda^n \rightarrow \infty$ и S_n стремятся к бесконечности.

1.2. Матрица вращения

Матрицей вращения M_r называется матрица

$$M_r = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Нетрудно убедиться, что ее собственные значения λ (два комплексно-сопряженных λ) по модулю равны единице и что действие ее на вектор сводится к повороту его на угол γ , такой, что $\cos \gamma = a$, $\sin \gamma = b$. Матрицу вращения можно представить в виде

$$M_r = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Мы рассмотрим несколько конкретных примеров, чтобы проиллюстрировать эволюцию последовательных образов начальной точки на плоскости (x, y) (по предположению — плоскости сечения Пуанкаре).

1. 3. Матрица, у которой наибольшее по модулю собственное значение вещественно и больше единицы

С таким случаем мы встречаемся, когда потеря устойчивости вызвана пересечением единичной окружности в точке $+1$. Предположим, что $|\lambda_1| < 1 < \lambda_2$.

При каждой итерации абсцисса x' умножается на число λ_1 , абсолютная величина которого меньше единицы, в то время как ордината y' умножается на число λ_2 , которое больше единицы. Итерации любой начальной точки S_1 при этом быстро (экспоненциально) сходятся к оси y' , а вдоль нее расходятся, удаляясь

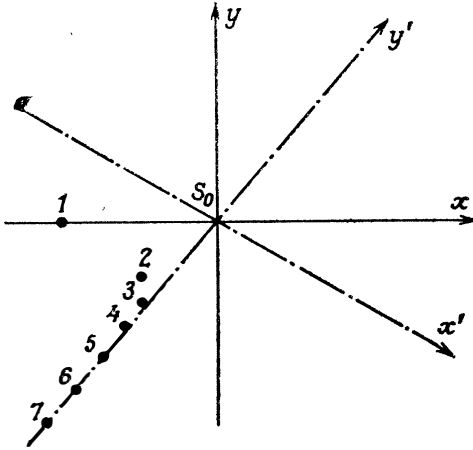


Рис. Д.2. Первые несколько итераций для матрицы $M = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,9 \end{bmatrix}$ с собственными значениями $\lambda_1 = 0,16$ и $\lambda_2 = 1,23$. На этом и последующих рисунках (до рис. Д46) начальной точке присвоен номер 1, а итерации пронумерованы последовательными натуральными числами в порядке возрастания.

в бесконечность. Следует отметить сильное сходство между таким поведением и описанием (см. разд. VI.3.2) гиперболичности отображений Пуанкаре. В случае гиперболичности также существуют сжимающее направление x' и растягивающее направление и два (локальных!) коэффициента Ляпунова λ_1, λ_2 . Заметим, что сжимающее направление не обязательно перпендикулярно растягивающему направлению.

На рис. Д.2 показаны положения нескольких первых итераций линейного преобразования, матрица которого

$$M = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,9 \end{bmatrix}$$

имеет собственные значения

$$\lambda_1 = 0,16;$$

$$\lambda_2 = 1,23.$$

I. 4. Матрица, у которой наибольшее по модулю собственное значение вещественно и меньше единицы

$$\lambda_2 < -1, \quad -1 < \lambda_1 < 1.$$

Этот случай встречается, когда потеря устойчивости вызвана пересечением единичной окружности в точке -1 . При каждой

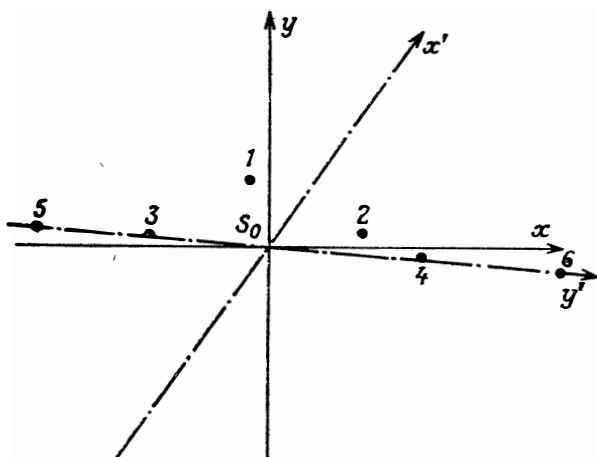


Рис. Д3а. Первые итерации для матрицы $M = \begin{bmatrix} -1,3 & 1 \\ 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$ с собственными значениями $\lambda_1 = 0,36$ и $\lambda_2 = -1,36$.

итерации абсцисса x' умножается на число λ_1 , абсолютная величина которого меньше единицы, в то время как ордината y' умножается на отрицательное число λ_2 , абсолютная величина которого больше единицы. Как и в предыдущем случае, существует экспоненциальная сходимость к оси y' , вдоль которой образы экспоненциально расходятся, но на этот раз оказываются попеременно то на положительной, то на отрицательной полуоси из-за умножения на отрицательное число λ_2 , изменяющего при каждой итерации знак ординаты y' .

На рис. Д.3а показано действие линейного преобразования, матрица которого

$$M = \begin{bmatrix} -1,3 & 1 \\ 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

имеет собственные значения

$$\lambda_1 = 0,36;$$

$$\lambda_2 = -1,36.$$

1.5. Матрица, у которой наибольшее по абсолютной величине собственное значение вещественно и равно -1

Может показаться, что этот случай не представляет особого практического интереса. В действительности же его можно рассматривать как асимптотическую ситуацию, возникающую, когда

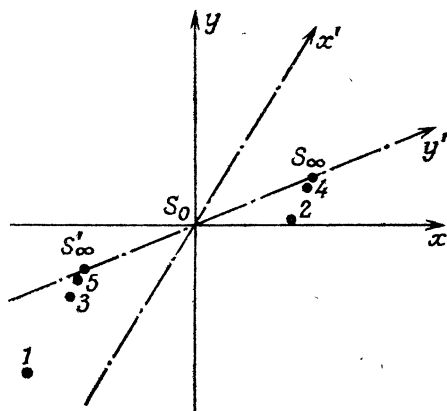


Рис. Д.3б. Сходимость последовательных итераций к двум пределам S_∞ и S'_∞ (четные итерации сходятся к S_∞ , нечетные — к S'_∞). Линейное преобразование имеет матрицу $M = \begin{bmatrix} -1,5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ с собственными значениями $\lambda_1 = 0,5$ и $\lambda_2 = -1$.

линейное нарастание неустойчивости насыщается действием нелинейных членов.

На рис. Д.3б показана эволюция последовательных итераций при умножении на матрицу

$$M = \begin{bmatrix} -1,5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

с собственными значениями

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0,5; \\ \lambda_2 &= -1.\end{aligned}$$

По достижении прямой $S_{0y'}$ (действие собственного значения λ_1) точки попеременно оказываются то на S_∞ , то на S'_∞ . На этом графике мы видим сечение Пуанкаре после субгармонической бифуркации, а на рис. Д.3а изображена фаза экспоненциального роста (линейная теория).

1.6. Матрицы с комплексно-сопряженными собственными значениями, модуль которых больше единицы

Этот случай встречается, когда предельный цикл теряет устойчивость из-за пересечения единичной окружности в комплексно-сопряженных точках $\alpha \pm i\beta$. Собственных направлений x' и y' при этом не существует, и вместо них нам необходимо вычислить матрицу вращений и угол γ (исходя из заданной матрицы). Например, рассмотрим преобразование, матрица которого

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ имеет собственные значения } \lambda_{1,2} = 1 \pm i,$$

модуль которых равен $\sqrt{2}$.

Записав исходную матрицу в виде

$$M = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

мы узнаем матрицу вращения

$$M_r = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \text{ с } \gamma = \pi/4.$$

Умножение на M сводится к растяжению в $\sqrt{2}$ раз и последующему повороту на угол $\pi/4$ (рис. Д.4а).

Нейтральный случай, когда модуль собственных значений равен единице, соответствует асимптотическому состоянию сечения Пуанкаре режима после того, как нелинейные эффекты погасили экспоненциальный рост, вызванный линейной неустойчивостью (см., например, рис. Д.4а). На рис. Д.4б показано дей-

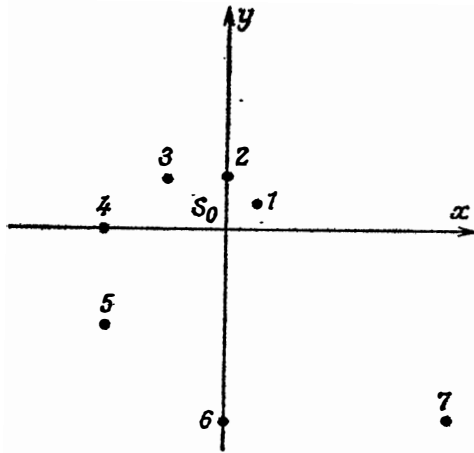


Рис. Д4а. Первые итерации для матрицы $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2 = 1 \pm i$.

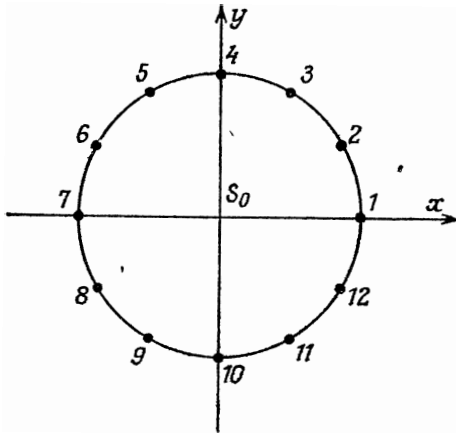


Рис. Д4б. Итерации для матрицы $M = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ с комплексными собственными значениями, равными по модулю 1.

ствии преобразования с матрицей

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Модуль ее собственных значений равен единице, и M есть просто матрица вращений ($\gamma = \pi/6$). На рис. Д.46 показано, что итерации S_i обходят поочередно 12 эквидистантных точек на единичной окружности. Их можно рассматривать как сечение Пуанкаре потока, который после бифуркации Хопфа претерпевает синхронизацию 12-го порядка.

II. ЯКОБИАН

II. 1. Линейное преобразование

Рассмотрим две системы координат (Ox, Oy) и (Oz, Ot) и линейное преобразование, которое отображает точку M с координатами x, y в первой системе в точку P с координатами z, t

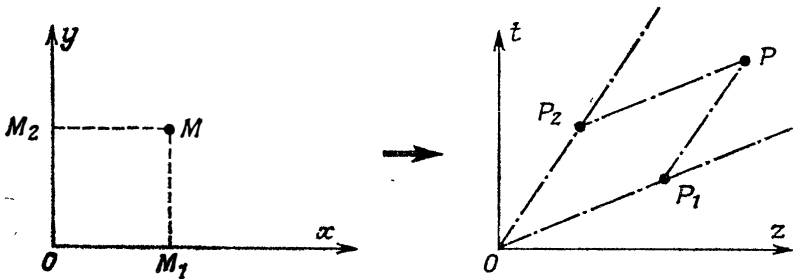


Рис. Д.5. Схематическое представление линейного преобразования.

во второй системе (рис. Д.5) и определяется уравнениями

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + \beta y, \\ t &= \gamma x + \delta y, \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — вещественные числа. Пусть M_1 и M_2 — две точки с координатами $(1, 0)$ и $(0, 1)$, а P_1 и P_2 — их образы с координатами (α, γ) и (β, δ) .

Единичный квадрат OM_1MM_2 преобразуется в параллелограмм OP_1PP_2 , площадь которого (величина векторного произведения) равна абсолютной величине определителя

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

(знак определителя указывает ориентацию преобразования: плюс соответствует сохранению направления отсчета углов). Если $|\alpha\delta - \beta\gamma| > 1$, то происходит растяжение площадей, а при $|\alpha\delta - \beta\gamma| < 1$ их сокращение.

Заметим, что особый случай $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ соответствует преобразованию единичного квадрата в отрезок прямой. Такое пре-

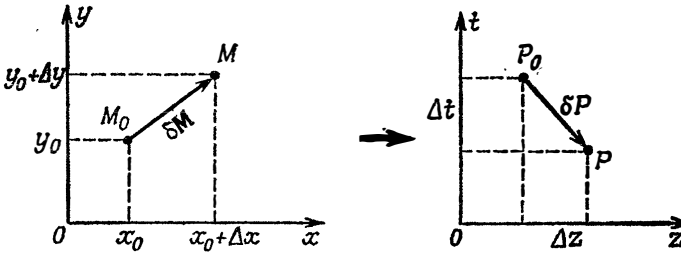


Рис. Д.6. Векторы, иллюстрирующие локальную линейризацию преобразования.

образование не биективно, т. е. x и y не могут быть однозначно определены по z и t ; преобразование перестает быть обратимым¹⁾.

II. 2. Локальное исследование произвольного преобразования

Пусть $z = f(x, y)$ и $t = g(x, y)$ — нелинейное преобразование. В окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, т. е. при малых приращениях $\Delta x, \Delta y$, членами второго порядка можно пренебречь (рис. Д.6). Если

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = f'_x dx + f'_y dy,$$

то

$$\Delta z \approx f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$$

¹⁾ Мы говорим, что отображение, действующее из множества A в множество B , обратимо, или биективно, если у каждого элемента множества B существует единственный прообраз в множестве A . Например, отображение окружности на себя, переводящее точку M , расположенную под углом θ , в точку M' , расположенную под углом 2θ , не является обратимым (точка M' повернута на вдвое больший угол, чем точка M), в то время как отображение вращения

$$\theta \rightarrow \theta + \alpha$$

обратимо. Заметим, что если отображение есть числовая функция одной переменной, то обратимое отображение должно быть монотонным (иначе у каких-то образов окажется по крайней мере два прообраза; см. гл. VIII). Но непрерывность для обратимости не обязательна (см. разд. VII.4 и приложение В).

и аналогично для Δt и $g(x, y)$. Если $\delta \mathbf{P}$ — образ вектора $\delta \mathbf{M}$ в окрестности точки M_0 , то

$$\delta \mathbf{P} \approx \begin{bmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \delta \mathbf{M}.$$

Эта матрица называется матрицей Якоби и определяет линейное отображение¹⁾, возвращающее нас к рассмотренному в начале этого раздела случаю преобразований. Если определитель

$$J = \begin{vmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

называемый *определителем Якоби* или *якобианом*, в точке (x_0, y_0) , отличен от нуля, то отображение локально обратимо. Если $|J| > 1$, то в окрестности точки M_0 площади растягиваются; если $|J| < 1$, то площади сокращаются.

Пример: отображение Энона

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - \alpha x_k^2, \\ y_{k+1} = \beta x_k. \end{cases}$$

В приведенных выше обозначениях

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\alpha x^2 + y + 1, \\ g(x, y) &= \beta y \end{aligned}$$

якобиан равен

$$J = \begin{vmatrix} -2\alpha x & 1 \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = -\beta.$$

В случае отображения Энона якобиан есть константа. При итерации отображения площадь каждый раз умножается на β и после k итераций становится равной

$$a = a_0 |\beta^k|.$$

При $\beta = 0,3$ площади сокращаются.

Предельный случай $J = 0$, т. е. $\beta = 0$, должен соответствовать потере обратимости: действительно, координата $y_{k+1} = 0 \cdot x_k = 0$ и отображение становится нелинейным одномерным отображением, о котором уже известно (см. гл. VIII), что оно необратимо.

¹⁾ Это отображение называется линейным касательным отображением.

III. ГОМЕОМОРФИЗМЫ, ДИФФЕОМОРФИЗМЫ

Пусть $f(x, y, z, \dots)$ — функция n вещественнозначных переменных, задающая отображение, которое действует из некоторой части n -мерного пространства \mathbb{R}^n в множество вещественных чисел \mathbb{R} :

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

(если бы было p функций и переменных, то отображение действовало бы из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^p).

III. 1. Гомеоморфизмы

Отображение типа отображения f из подмножества A пространства \mathbb{R}^n в подмножество B пространства \mathbb{R}^p называется гомеоморфизмом A на B , если оно обратимо и непрерывно в обе стороны (т. е. непрерывно само отображение f и обратное отображение $f^{-1}: B \rightarrow A$). Непрерывность определяется в естественной топологии n -мерного пространства (индуцированной евклидовой метрикой) и предполагает, что каждое из подмножеств A и B содержит вместе с любой своей точкой некоторую ее окрестность.

Например, рассмотрим окружность внутри равностороннего треугольника, центр масс G которого совпадает с центром масс окружности. Любая прямая, исходящая из G , пересекает окружность в точке M , а треугольник — в точке M' . Отображение

$$f: M \rightarrow M'$$

ставит в соответствие каждой точке окружности некоторую точку треугольника, и наоборот. Кроме того, две соседние точки каждой из фигур отображаются в две соседние точки другой фигуры. Отображение f является гомеоморфизмом. Можно также сказать, что окружность и треугольник гомеоморфны.

III. 2. Диффеоморфизмы

Диффеоморфизм должен удовлетворять более ограничительному условию, чем гомеоморфизм: отображение f называется диффеоморфизмом из A в B , если оно обратимо и имеет на A непрерывные частные производные первого порядка. (Можно показать, что обратное отображение имеет непрерывные частные производные первого порядка на B .) Любой диффеоморфизм есть гомеоморфизм. Обратное утверждение неверно.

Вещественнозначная функция f вещественной переменной, определенная на интервале I , на котором она имеет непрерывную производную постоянного знака, есть диффеоморфизм I на образ интервала $f(I)$.

Отображение окружность \rightarrow треугольник из предыдущего раздела не является диффеоморфизмом из-за разрывов производной в вершинах треугольника. Аналогичное отображение из окружности в эллипс является диффеоморфизмом. Другой пример диффеоморфизма, приведенный в разд. VII.4 и в приложении В — биективное отображение окружности в интервал $[0, 1)$.

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РАБОТЫ

I Книги

- Abraham R. H., Shaw C. D.*, Dynamics: the Geometry of Behavior, Aerial Press, Santa Cruz, 1983.
- Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971.
- Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
- Арнольд В. И.* Математические методы небесной механики. — М.: Наука, 1974.
- Arnol'd V., Avez A.*, Ergodic Problems of Classical Mechanics, Benjamin, New York, 1968.
- Collet P., Eckmann J.-P.*, Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems, Birkhäuser, Boston, 1980.
- Ekeland I.*, Le calcul, l'imprévu, Le Seuil, Paris, 1983.
- Guckenheimer J., Holmes P.*, Non-Linear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, 1983.
- Хакем Н.*, Advanced Synergetics, Springer-Verlag, Heidelberg, 1983. [Имеется перевод: Хакем Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1985.]
- Hirsch M. W., Smale S.*, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, New York, 1974.

- Joseph D.*, Stability of Fluid Motion, Springer-Verlag, 1976.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
Lin C. C., The Theory of Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Cambridge, 1955. [Имеется перевод: *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. — М.: ИЛ, 1958.]
Mandelbrot B. B., Les objets fractals: forme, hasard et dimension, Flammarion, Paris, 1975.
Marsden J. E., McCracken M., The Hopf Bifurcation and its Applications, Springer-Verlag, New York, 1976. [Имеется перевод: *Марсден Д., МакКракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.]
Minorsky N., Nonlinear Oscillations, Van Nostrand, New York, 1962.
Nayfeh A. M., Mook D. T., Nonlinear Oscillations, Wiley, New York, 1979.
Prigogine I., Physique, temps et devenir, Masson, Paris, 1980.
Rocard Y., Dynamique générale des vibrations, Masson, Paris, 1949.
Smale S., The Mathematics of Time: Essays on Dynamical Systems, Economic Processes and Related Topics, Springer-Verlag, New York, 1980.
Sparrow C., The Lorenz Equations, Springer-Verlag, New York, 1982.
Thom R., Stabilité structurelle et morphogénèse, Benjamin, New York, 1972.

II Обзоры

- Abraham N. B., Gollub J. P., Swinney H. L.*, Testing Nonlinear Dynamics, *Physica*, **11D**, 252 (1984).
Bergé P., Pomeau Y., La turbulence, *La Recherche*, **110**, 422 (1980).
Croquette V., Déterminisme et chaos, *Pour la Science*, **62**, 62 (1982).
Dubois M., Attracteurs étranges et dimension fractale, *Images de la Physique*, **92** (1984).
Eckmann J.-P., Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems, *Review of Modern Physics*, **53**, 643 (1981).
Ott E., Strange Attractors and Chaotic Motions of Dynamical Systems, *Review of Modern Physics*, **53**, 655 (1981).
Рабинович М. И. Стохастические автоколебания и турбулентность. УФН. 1978, т. 125, вып. 1, с. 123.
Ruelle D., Déterminisme et prédictibilité, *Pour la Science*, **82**, 58 (1984).
Ruelle D., Les attracteurs étranges, *La Recherche*, **108**, 132 (1980).
Shaw R. S., Strange Attractors, Chaotic Behavior and Information Flow, *Zeitschrift für Naturforschung*, **A36**, 80 (1981).
Swinney H. L., Gollub J. P., The Transition to Turbulence, *Physics Today*, **31**, 41 (1978).
Vidal C., Roux J.-C., Comment naît la turbulence, *Pour la Science*, **39**, 50 (1981).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автокорреляционная функция 56—57
Аспектное отношение 104
Аттрактор 6
— *Смейла* 176
— странный 6
- Бифуркации точка 46, 305
Бифуркаций теория 305
Бифуркационная диаграмма 48
Бифуркационный параметр 48
Бифуркация 46
— глобальная 306
— касательная 234
— локальная 306
— нормальная 49
— обратная 49, 311
— субкритическая 49, 311
— суперкритическая 49, 311
— *Хопфа* 48
- Ветвь решения 305
- Геофизическое динамо 120
Гиперболичность 138—140, 178
- Детерминированность 69
Детерминированный хаос 7
- Колебания изохронные 19
— релаксационные 36
Коэффициент *Ляпунова* 178
Кривая *Коха* 168
Критическое значение 46
- Матрица *Флоке* 80, 122
Модель *Рикитакэ* — *Аллена* 120
- Образование Энона 148—154
- Показатель *Ляпунова* 314
Поток 75
— автономный 75
— *Лоренца* 141
— неавтономный 75
— *Рёсслера* 88—91
Производная *Ли* 130
- Размерность евклидова 166
— корреляционная 170
— фрактальная 140
— *Хаусдорфа* 166
— *Хаусдорфа* — *Безиковича* 166—167
Растяжение 176
Резонанс точный 43
Ритм циркадный 15
— циркануальный 15
- Сепаратриса 23
Сигнал аperiодический 69
— квазипериодический 65—69
— неperiodический 69
Система гамильтонова 6, 24
— динамическая 6
— диссипативная 6
— консервативная 6, 24
— обратимая 26
Складывание 176
Случайность 69
Спектр мощности 58—60
Степень свободы 21
Субгармоническая неустойчивость 43
Субгармонический каскад 217
Сценарий 180
- Трение в жидкости 28
Трение твердых тел 28

Теория Блоха — Ванье 43
— Галуа 39
— Флоке 40, 43

Уравнение интегрируемое 39
— Матье 39, 41—43
— неинтегрируемое 39
— Хилла 39
Устойчивость нейтральная 30—31
— структурная 271

Фазовая траектория 21
Фазовое пространство 21
Фазовый портрет 21

Функция Ляпунова 31
— Матье 40

Характеристический показатель 40

Число Ляпунова 314
Чувствительная зависимость от начальных условий 120

Шум белый 69—70, 72
— окрашенный 70, 73

Эолова арфа 14

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие авторов	5
Предисловие Давида Рюэля	9
ЧАСТЬ 1. От порядка	11
Введение. Немонотонная эволюция	11
Глава I. Свободный осциллятор, осциллятор с вынуждающей силой . .	19
Глава II. Осциллятор с вынуждающей силой, параметрический осциллятор	33
Глава III. Преобразование Фурье	52
Глава IV. Сечения Пуанкаре	75
Глава V. Три примера динамических систем	94
ЧАСТЬ 2. . . . К хаосу	116
Введение. Временный хаос в диссипативных системах	116
Глава VI. Странные аттракторы	127
Глава VII. Квазипериодичность	181
Глава VIII. Субгармонический каскад	217
Глава IX. Перемежаемость	250
Заключительная дискуссия	298
Приложение А. Локальные бифуркации коразмерности	305
Приложение Б. Показатели Ляпунова	314
Приложение В. Синхронизация осцилляторов	325
Приложение Г. Модель Лоренца	339
Приложение Д. Математические дополнения	351
Некоторые общие работы	363
Предметный указатель	365

Учебное издание

Пьер Берже, Ив Помо, Кристан Видаль

ПОРЯДОК В ХАОСЕ
О детерминистском подходе к турбулентности

Заведующий редакцией проф. А. Н. Матвеев. Зам. зав. редакцией С. М. Жебровский. Научн. редактор Е. С. Куранский. Мл. ред. Р. Х. Зацепина, Г. Г. Сорокина, В. Н. Цлаф. Художник К. В. Радченко. Художественные редакторы И. Калезин, О. Адакина. Технический редактор Т. А. Мнрошина. Корректор Н. А. Мнстриюкова

ИБ № 7391

Сдано в набор 29.06.90. Подписано к печати 15.01.91. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 1. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 11,50 бум. л. Усл. печ. л. 23,00. Усл. кр.-отг. 23,00. Уч. изд. л. 19,05. Изд. № 2/7805. Тираж 6000 экз. Зак. 592. Цена 4 р. 90 к.

Издательство «Мир»
В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета ССРСР по печати
129820, ГСП, Москва, 1-й Рижский пер. 2.

Набрано в Ленинградской типографии № 2, головного предприятия ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.
Отпечатано в Ленинградской типографии № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати.
190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.

