



**В. В. Смыслов**

**ГИДРАВЛИКА  
И АЭРОДИНАМИКА**

В. В. СМЫСЛОВ

# ГИДРАВЛИКА И АЭРОДИНАМИКА

---

*Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебника для студентов вузов,  
обучающихся по специальности  
«Теплогазоснабжение и вентиляция»*

Киев  
Головное издательство издательского объединения  
«Вища школа»  
1979

ББК 30.12  
605  
С52

УДК 532 + 533.6 (075.8)

Смыслов В. В. Гидравлика и аэродинамика: Учебник для вузов.— Пер. с укр., перераб. и доп.— Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1979.— 336 с. 30210. 1703040000.

Рассматриваются основные законы покоя и движения жидкости, гидравлические сопротивления, а также движение жидкости по трубам и истечение из отверстий. Излагаемый материал иллюстрируется примерами из практики. Приведен гидравлический расчет трубопроводов в соответствии с последними нормами. Даны основы моделирования гидроаэродинамических явлений.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности «Тепло-газоснабжение и вентиляция».

Табл. 6. Ил. 170. Список лит.: 28 назв.

Перевод с украинского издания, перераб. и доп. («Вища школа», 1971)

Редакция литературы по строительству, архитектуре и коммунальному хозяйству  
Зав. редакцией *В. В. Гаркуша*

С  $\frac{30210-086}{M211(04)-79}$  172. 79. 1703040000

© Издательское объединение «Вища школа», 1979

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга представляет собой переработанное и дополненное в соответствии с программой курса, утвержденной Минвузом СССР для специальности «Теплогазоснабжение и вентиляция», издание учебника «Гидравлика и аэродинамика», выпущенного в 1971 г. на украинском языке (Киев, Вища школа).

В учебнике излагаются теоретические основы гидравлики — важнейшие положения учения о равновесии и движении жидкости, применяющиеся для решения частных вопросов на практике; подробно рассматриваются физические свойства, особенности движения газа; приводятся новые научные данные, полученные за последнее время при изучении механики жидкости.

Теория движения несжимаемой жидкости применима как для жидких, так и для газообразных сред, но действие ее основных законов имеет свою специфику, что нашло отражение в предлагаемой книге. Например, уравнение Бернулли, обычно излагаемое в форме напоров при изучении водопроводных систем, для расчетов систем газоснабжения и вентиляции представляется в форме давлений.

Наибольшее внимание в учебнике уделено гидравлике трубопроводов (внутренней задаче гидроаэродинамики). Вопросы обтекания тел жидкостью (внешняя задача гидроаэродинамики), сжимаемости газов (элементы газодинамики) и некоторые другие изложены более кратко, поэтому

желающим глубже изучить эти вопросы следует пользоваться специальной литературой, перечень которой приведен в конце книги.

Теоретический материал сопровождается числовыми примерами, подкрепляющими различные теоретические положения по работе систем газоснабжения и вентиляции.

Учитывая, что в настоящее время происходит повсеместный переход к использованию Международной системы единиц, все примеры выполнены в единицах СИ и единицах, допускаемых к применению наравне с ними.

Автор выражает глубокую признательность проф. Альтшулю А. Д. за ценные замечания, данные им в рецензии на учебник, которые учтены автором при подготовке настоящего издания.

## Глава I

### ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

#### § 1

#### Предмет гидравлики и аэродинамики.

#### Методы их изучения

Предметом механики жидкости и газа, или гидроаэромеханики, является наука о движении жидкости. При этом под жидкостью понимают не только воду и другие капельные вещества, но также газы (воздух). Если рассматривается газ без учета его сжимаемости, применяется термин «несжимаемая жидкость». Если сжимаемость газа учитывается, о нем говорят как о «сжимаемой жидкости». Если по смыслу следует разграничить жидкости и газы, жидкость называют «капельной жидкостью», сохраняя в другом случае термин «газ» (воздух).

Механика жидкости намного сложнее механики твердого тела. Поэтому для решения задач прикладного характера используют те или иные приемы упрощенного подхода к изучению явлений.

В зависимости от методики изложения материала и области применения гидроаэромеханика приобретает различные названия, например гидравлика, аэродинамика, газодинамика, хотя по существу она остается технической механикой жидкости или газа.

*Гидравлика* — прикладная наука о законах движения и покоя жидкости.

Термин «гидравлика» возник от сочетания двух греческих слов: *hydro* — вода и *aulos* — трубка — и означал сначала учение о водоводах. Область применения гидравлики сегодня — различные трубопроводы, сооружения, машины и аппараты.

*Аэродинамика* изучает законы движения воздуха и его силовое взаимодействие с окружающими твердыми телами. Эта наука возникла с развитием авиационной техники.

Введение основ аэродинамики в настоящий курс обусловлено тем значением, которое имеет знание законов покоя и движения воздуха в области вентиляции.

Знание законов механики жидкости и газа необходимо для решения многих практических вопросов теплогазоснабжения и вентиляции: расчета трубопроводных систем для перемещения воды, воздуха, газа и других жидкостей (водо-, воздухо-, газо-, паропроводы), сооружений и устройств для передачи тепловой энергии (тепловые сети, отопительные системы, теплообменные аппараты), конструирования машин, сообщаящих жидкости механическую энергию (насосы, вентиляторы, холодильные установки), проектирования котельных агрегатов, печных и сушильных установок, воздухо- и газоочистных аппаратов, вентиляционных устройств и кондиционеров.

**Гипотеза сплошной среды.** Теоретическая механика как допустимую абстракцию использует понятия *материальной точки* и *системы материальных точек*. Последняя может быть дискретной, т. е. состоять из отдельных материальных точек, и сплошной, представляющей собой непрерывное распределение вещества и физических констант. Абсолютно твердое тело является простейшим примером абстрактной неизменной сплошной среды. Более общий случай механики сплошной среды объединяет как упругие и пластические, так и жидкие и газообразные тела, которые в отличие от абсолютно твердого тела обладают способностью деформироваться.

Итак, в механике жидкости и газа система материальных точек заменяется понятием *сплошной среды*, в которой нет разрывов и пустот. Говоря о непрерывной среде и абстрагируясь от ее молекулярного строения, мы тем самым исключаем из рассмотрения молекулярные движения (точнее, учитываем только средние характеристики молекулярного движения, например давление и температуру), изучаем только движения, вызываемые внешними силами. Значит, гидроаэромеханические явления носят макроскопический характер. Поэтому при их анализе даже самый малый объем среды (элементарная частица) считается большим по сравнению с межмолекулярными расстояниями.

С математической точки зрения условие сплошной среды означает, что любая функция, которая характеризует состояние жидкости (газа), непрерывна и дифференцируема.

**Законы Ньютона и законы сохранения.** При выводе уравнений движения или покоя среды возможны два подхода. Первый — *метод материальной частицы* — заключается в составлении на основе второго закона Ньютона дифференциального уравнения движения (покоя) с последующим его интегрированием; такой подход применяется главным образом в гидроаэромеханике. Второй — *метод контрольных объемов* — использует общие законы механики и физики (законы сохранения) для составления суммарных (интегральных) характеристик движения; он характерен для гидравлики.

Применение первого метода связано со значительными трудностями, возникающими вследствие специфического характера взаимодействия частиц жидкой или газовой среды между собой. Если при движении твердого тела расстояние между двумя любыми точками тела сохраняется неизменным, то при движении жидкости (газа) из-за легкoподвижности частиц расстояние между ними все время изменяется, что и приводит к усложнению исходных дифференциальных уравнений и их интегрирования. Поэтому в настоящем прикладном курсе главным образом применяется второй метод — метод гидравлики.

Из законов сохранения прежде всего используется *закон сохранения материи* (массы) и *закон сохранения энергии* в его общем виде (первый закон термодинамики) и в форме теоремы кинетической энергии (для механических систем). В ряде случаев, как следствие второго закона Ньютона, применяется *теорема сохранения количества движения*.

При изучении движения и покоя газа с учетом его сжимаемости необходимо знать законы изменения его состояния при рассматриваемых процессах. Этим занимается специальная наука — *термодинамика*, с основами которой читатель уже знаком.

**Методы подобия и анализа размерностей.** С помощью аналитических способов механики жидкости не всегда удастся решить даже самые простые инженерные задачи, связанные с учетом сил вязкостного трения, например задачу о движении жидкости (газа) в цилиндрической трубе. Поэтому наряду с методами механики широко используется теория инженерного эксперимента, которая учит, как ставить и планировать эксперимент; как наиболее правильно производить измерения и, что особенно важно, как обобщать результаты отдельных опытов и



распространять их на целые классы явлений, устанавливая при этом нужные количественные зависимости. Основой теории инженерного эксперимента являются *методы анализа размерностей и подобия* (см. гл. IX).

## § 2

### Основные величины

**Масса и плотность.** Согласно гипотезе сплошной среды *масса* распределяется по всему объему выделенного пространства, где находится жидкость или газ.

Предел отношения массы рассматриваемого элемента среды  $\Delta m$  к его объему  $\Delta V$ , когда последний приближается к размерам точки,

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} |\Delta m / \Delta V|$$

называется *плотностью среды*. Учитывая условие непрерывности среды, можно утверждать, что такой предел существует. Для однородной среды плотность представляет собой массу единицы объема:

$$\rho = m/V. \quad (1)$$

**Силы.** Различают две категории сил, действующих в жидкой и газовой среде: массовые и поверхностные.

**Массовые силы** действуют на каждый элемент среды и пропорциональны массе и объему элемента. К массовым силам прежде всего относится *сила тяжести* (вес)

$$G = mg, \quad (2)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения.

Вес единицы объема однородной среды называют *удельным весом*:

$$\gamma = G/V = mg/V = \rho g. \quad (3)$$

Вес определяется гравитационным полем (в земном поле тяготения это — сила тяжести). Следовательно, удельный вес зависит от гравитационного поля и поэтому применение его в качестве характерной величины не рекомендуется.

Кроме сил тяжести, при изучении движения сплошной среды большое значение имеют и *силы инерции*, равные произведению массы тела  $m$  на его ускорение  $w$ , взятое с обратным знаком:

$$I = -mw.$$

Поверхностные силы проявляются на граничных поверхностях рассматриваемого объема среды.

Пусть задан некоторый объем среды, ограниченный произвольной поверхностью (рис. 1, а). Мысленно разрежем его на две части и отбросим часть II. Тогда все внутренние силы, с которыми частицы II действовали на частицы I, станут внешними силами, действующими на заштрихованную площадь  $S$  (рис. 1, б). Внешние силы, заменяющие действие отброшенной части, называют поверхностными.

Поверхностную силу, действующую на элементарную площадку (рис. 1, б), всегда можно разложить на две составляющие: нормальную силу  $\Delta P$  и тангенциальную  $\Delta T$ . Первую называют *силой давления* (поскольку в жидкости действуют только сжимающие усилия), а вторую — *силой сопротивления* (жидкостного трения). Силы сопротивления проявляются только при движении жидкости, а силы давления действуют как в покоящейся, так и в движущейся среде.

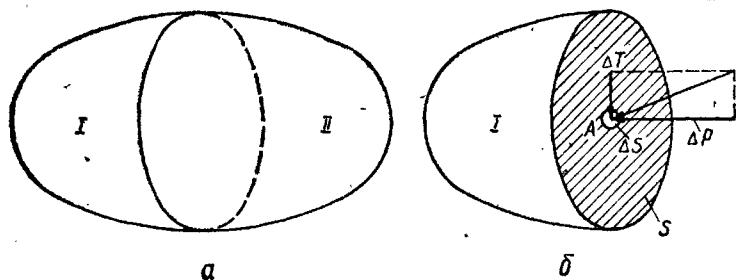
**Гидромеханическое давление.** Поверхностные силы, отнесенные к единице площади, называют *напряжениями*. В сплошной среде поверхностные силы распределяются непрерывно. Поэтому напряжения также действуют во всех точках выделенного объема среды и можно говорить о его *напряженном состоянии*.

Нормальные напряжения в жидкости, определяемые пределом отношения силы давления  $\Delta P$  к площадке  $\Delta S$ ,

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} |\Delta P / \Delta S|$$

называют *гидромеханическим давлением* или просто *давлением*. При переходе от точки к точке давление изменяется. Поэтому отношение конечной силы давления  $P$  к конечной

Рис. 1. К методу замены внутренних сил внешними.



площади  $S$  дает среднее давление на эту площадь:

$$p = P/S. \quad (4)$$

**Касательные напряжения и гидромеханическое определение понятия «жидкость».** Предел отношения элементарной силы  $\Delta T$  к площадке  $\Delta S$  или отношение конечной тангенциальной силы  $T$  к площади  $S$  называют *касательным напряжением*:

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} |\Delta T / \Delta S|, \text{ или } \tau = T/S. \quad (5)$$

Касательные напряжения возникают при деформации сдвига, где наиболее четко проявляются особенности жидкой (газовой) среды.

Рассмотрим деформацию сдвига твердого (упругого) тела и жидкой среды. В первом случае касательные напряжения, вызванные действием сдвигающей силы  $\Delta T = \Delta S E \varphi$  (рис. 2, а), пропорциональны угловой деформации  $\varphi$ :

$$\tau = \Delta T / \Delta S = \Delta S E \varphi / \Delta S = E \varphi,$$

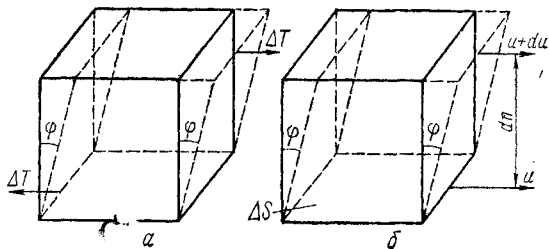
где  $E$  — модуль упругости тела.

Во втором случае (рис. 2, б) касательные напряжения возникают в результате скольжения верхней грани куба относительно нижней и деформация сдвига в данном случае

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{du}{dn},$$

где  $\frac{du}{dn}$  — градиент скорости ( $du$  — изменение скорости течения при удалении на расстояние  $dn$  от поверхности слоя в перпендикулярном к нему направлении).

Рис. 2. К определению понятия «жидкость» в механике жидкости.



## Сдвигающая сила

$$\Delta T = \Delta S \mu \frac{du}{dn},$$

откуда

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}, \quad (6)$$

где  $\mu$  — коэффициент пропорциональности.

Формула (6) выражает гипотезу Ньютона о природе трения в жидкости: «Соппротивление, происходящее от недостатка скользкости жидкости при прочих равных условиях, предполагается пропорциональным скорости, с которой частицы жидкости разъединяются друг с другом». Исходя из этой же формулы, можно рассматривать жидкость (с механической точки зрения) как тело, у которого *касательные напряжения возникают только при движении одного слоя по отношению к другому*.

Если в твердом теле напряжения сдвига пропорциональны величине деформации, то в жидкости они зависят от скорости деформации; если в покоящейся жидкости касательные напряжения отсутствуют ( $\tau = 0$  при  $du = 0$ ), в твердом теле они могут существовать. Внутренние силы, возникающие в жидкости при деформации сдвига, носят характер сил трения, в твердом теле — сил упругости. Силы трения в жидкости отличаются от трения твердых тел: в жидкости эффект трения зависит от градиента скорости, а в твердых телах он является функцией нормального давления.

## § 3

### Основные физические свойства жидкостей

**Текучесть и вязкость.** **Текучесть** — это свойство, общее для всех жидкостей, означающее способность течь под влиянием самых малых сдвигающих усилий. Этим, в частности, объясняется движение жидкости в трубе при наличии ничтожной разности давлений. С другой стороны, самое незначительное относительное движение слоев (частиц) жидкости порождает эффект сопротивления, называемый **визкостью**. Как следует из самого определения, понятие вязкости обратно понятию текучести.

Коэффициент пропорциональности  $\mu$ , входящий в формулу (6), называется *динамическим коэффициентом вязкости*

(сокращенно — вязкостью); единица этой величины — паскаль-секунда (Па · с).

*Кинематическая вязкость*, измеряемая в квадратных метрах на секунду ( $\text{м}^2/\text{с}$ ),

$$\nu = \mu/\rho. \quad (7)$$

Вязкость определяют с помощью приборов, называемых *вискозиметрами*. Эти приборы весьма разнообразны как по своей конструкции, так и по принципу действия. Для капельных жидкостей применяют, например, капиллярные и шариковые, для газов — ротационные, ультразвуковые вискозиметры [2], [6].

Вязкость практически не зависит от давления, но существенно изменяется с изменением температуры (табл. 1). Вязкость воды с повышением температуры быстро уменьшается, а для газов — возрастает.

Молекулярная теория объясняет это различие между капельными жидкостями и газами так.

Вязкость газов обусловлена переносом количества движения, связанного с обменом молекул между слоями газа. При нагревании активность молекул увеличивается, т. е. растет скорость их хаотического движения, а следовательно, обмен количеством движения и вязкость.

Капельные жидкости имеют сравнительно стабильную решетчатую структуру, в пределах которой молекулы колеблются относительно положений равновесия. Под действием касательных напряжений слои жидкости скользят относительно друг друга и колеблющиеся частицы могут переходить в новые положения равновесия. Усиление молекулярных колебаний при повышении температуры ослабляет жесткость связей, облегчая смещение частиц, что приводит к увеличению текучести и уменьшению вязкости.

Согласно формуле (6) жидкость должна прилипать к стенкам сосуда, в котором она находится. В 1879—1882 гг. проф. Н. П. Петров, исследуя условия смазки подшипников железнодорожных вагонов, подтвердил правильность гипотезы Ньютона. Опыт сводится к следующему.

Таблица 1. Значения кинематической вязкости и удельной газовой постоянной для воды, воздуха и метана

Жидкость	Кинематическая вязкость $10^4 \nu$ , $\text{м}^2/\text{с}$ , при температуре, $^{\circ}\text{C}$				Удельная газовая постоянная $R$ , Дж/(кг · К)
	0	20	50	100	
Вода	—	0,01	0,005	0,003	—
Воздух	0,133	0,151	0,178	0,232	287
Метан	0,145	0,165	0,197	0,256	520

Между двумя параллельными пластинками, одна из которых неподвижна ( $u = 0$ ), а другая движется со скоростью  $u = u_n$  (рис. 3), находилась жидкость (масло). Измерив касательную силу  $T$ , необходимую для сообщения скорости движущейся пластинке, и зная площадь пластинки  $S$ , можно было определить касательные напряжения  $\tau = T/S$ . При изменении расстояния между пластинками  $n$  изменялось и значение силы  $T$ . Оказалось, что между напряжениями  $\tau$  для данной жидкости и расстоянием  $n$  между пластинками существует *линейная зависимость* [см. формулу (6)].

Гипотеза Ньютона подтверждается и для нулевой скорости у неподвижной стенки опытами с помощью современной измерительной аппаратуры.

Формула (6) применима во всех случаях движения жидкости только вблизи неподвижной стенки.

Следует обратить внимание, что кинематическая вязкость воздуха при  $20^\circ \text{C}$  в 15 раз больше, чем для воды при той же температуре, а вязкость природного газа почти не отличается от вязкости воздуха.

**Уравнения состояния.** Для капельных жидкостей уравнения состояния сложны. В диапазоне давлений, рассматриваемых в настоящем курсе, состояние жидкости практически зависит только от температуры, например:

Температура воды, $^\circ\text{C}$	4	20	40	60	80	90
Плотность $\rho$ , $\text{кг/м}^3$	1000	998	992	983	972	959

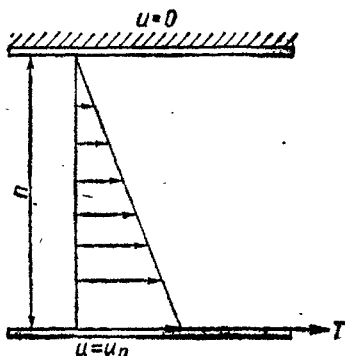
При повышении температуры от  $4$  до  $90^\circ \text{C}$  плотность воды уменьшается примерно на  $4\%$ , что следует помнить при проектировании отопительных систем.

В гидравлических расчетах обычно принимают постоянное значение плотности капельных жидкостей, в частности для воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

Для идеальных газов (воздух, природный газ, перегретый пар) уравнение состояния при относительно небольших температурах и давлениях принимает простую форму уравнения Клапейрона — Менделеева:

$$p/\rho = RT, \quad (8)$$

Рис. 3. Распределение касательных напряжений в жидкости между двумя пластинками, одна из которых движется, а другая неподвижна.



или

$$\rho = p/(RT), \quad (9)$$

где  $R$  — удельная газовая постоянная: для воздуха  $R = 287$  Дж/(кг · К), для природного газа  $R = 520$  Дж/(кг · К);  $T$  — термодинамическая температура, К.

Уравнение (9) позволяет определить плотность газа при данном давлении и известной температуре.

В технических расчетах плотность газа обычно приводят к *нормальным* ( $t = 0^\circ \text{C}$ ) или *стандартным* ( $t = 20^\circ \text{C}$ ) условиям при давлении, равном 760 мм рт. ст., или 101 325 Па.

Согласно уравнению (9), плотность воздуха в нормальных условиях

$$\rho_n = \frac{101\,325}{287(273 + 0)} = 1,29 \text{ кг/м}^3,$$

в стандартных условиях

$$\rho_{ст} = \frac{101\,325}{287(273 + 20)} = 1,2 \text{ кг/м}^3. \quad (10)$$

Газ, находящийся в равновесии с его жидкой фазой, называют *насыщенным паром*; он имеет более сложную структуру. уравнения состояния.

**Давление насыщенного пара.** При определенных условиях капельные жидкости превращаются в пар и, наоборот, газ (перегретый пар) переходит в жидкость. Изменение агрегатного состояния, т. е. процесс кипения, зависит от давления паров жидкости, насыщающих пространство при данной температуре. Например, вода закипает при таких условиях:

Температура, °С	10	20	40	80	100
Абсолютное давление, Па	1175	2350	7350	19 800	101 325

Таким образом, вода при малом давлении (около 2000 Па) может закипать при невысокой температуре. Это необходимо иметь в виду при анализе работы водопроводных систем на участках пониженного давления (всасывающие линии насосов, сифонные трубопроводы и др.).

**Сжимаемость.** Капельные жидкости при сжатии ведут себя как упругое тело, т. е. подчиняются закону Гука:

$$-\frac{dV}{V} = \frac{dp}{\rho E},$$

где  $dV$  — уменьшение первоначального объема жидкости  $V$  при увеличении давления на  $dp$ ;  $E$  — модуль объемной упругости. Для воды при температуре  $20^\circ \text{C}$   $E = 2 \cdot 10^9$  Па, т. е. вода приблизительно в 100 раз менее упруга, чем сталь.

Величину, обратную модулю упругости, называют *коэффициентом объемного сжатия*:

$$\beta_V = \frac{1}{E} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}. \quad (11)$$

Для воды  $\beta_V = \frac{1}{2 \cdot 10^9}$  м<sup>2</sup>/Н. Иначе говоря, при изменении давления на 1 Па ее объем уменьшается на  $\frac{1}{2 \cdot 10^9}$  своего первоначального объема, а при изменении давления на 1 МПа объем воды изменяется на  $\frac{1}{2000}$ .

Таким образом, коэффициенты объемного сжатия воды, а также других капельных жидкостей весьма невелики, что позволяет в диапазоне изменения давлений, встречающегося в сантехнике, как правило, считать их *несжимаемыми*.

Коэффициент сжимаемости идеальных газов значительно больше и определяется соотношениями (9) и (11) для заданного процесса сжатия. Например, при постоянной температуре (процесс изотермического сжатия)  $\beta_V = 1/p$ .

Сжимаемость характеризуется также отношением изменения давления к изменению плотности, равным квадрату скорости распространения звука в среде:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}. \quad (12)$$

Очевидно, для малосжимаемой среды при больших изменениях давления изменение плотности незначительно и скорость звука получается большой, и наоборот, при большой сжимаемости среды скорость звука оказывается малой. Например, скорость звука в воздухе равна 330 м/с.

Для оценки сжимаемости среды при ее движении важно не абсолютное значение скорости звука, а отношение скорости течения  $u$  к скорости звука  $a$ , которое называется *числом Маха*:

$$\text{Ma} = u/a. \quad (13)$$

Если скорость движения среды мала по сравнению со скоростью звука в ней, число Маха мало по сравнению с



единицей и движущуюся среду можно рассматривать как несжимаемую жидкость. Скорость воздуха в воздухопроводах, газа в газопроводах низкого давления и газопроводах котельных установок не превышает 12 м/с. Следовательно, в практике теплогоснабжения и вентиляции газ (воздух) можно рассматривать как *несжимаемую* жидкость. Поэтому в последующем изложении, когда не будет специальных оговорок, принимается условие

$$\rho = \text{const.} \quad (14)$$

При движении газов со скоростью более 70 м/с, а также при большой разности давлений влияние сжимаемости следует учитывать, т. е. полагать, что

$$\rho \neq \text{const.} \quad (15)$$

а газы рассматривать как *сжимаемую* жидкость.

**Прочность на разрыв.** При решении практических задач предполагают, что жидкости и газы не оказывают сопротивления растягивающим усилиям. Для газов это является очевидным благодаря их свойству безгранично расширяться.

Капельная жидкость не заполняет весь объем сосуда, в котором она находится, а образует на границе с окружающим ее газом *свободную поверхность*. Экспериментальные исследования показывают, что если стенки сосуда тщательно очищены и жидкость не содержит газа, прочность ее на разрыв может оказаться довольно значительной (для воды — до 2800 Н/см<sup>2</sup>). Однако эта цифра соответствует представлению о разрыве или, вернее, распаде жидкости, происходящем одновременно во всем ее объеме. В действительности разрыв всегда начинается в каком-либо одном наиболее «слабом» месте. В частности, наличие хотя бы одного пузырька газа резко уменьшает прочность жидкости. Можно сказать, что наличие в жидкости в практических условиях растворенного воздуха и разных примесей снижает прочность жидкости почти до нуля.

**Капиллярность.** Поверхностный слой капельной жид-

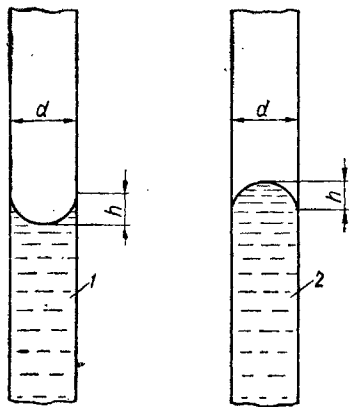


Рис. 4. Эффект капиллярности.

кости на ее свободной поверхности находится в особом напряженном состоянии, вызываемом неуравновешиваемостью действия молекулярных сил и характеризуемом силами поверхностного натяжения. Обычно этими силами в гидравлике пренебрегают, однако в некоторых случаях их влияние становится заметным. Например, в трубках малого диаметра уровень жидкости, смачивающей стенки трубки, поднимается (рис. 4,1) и опускается, если стенки не смачиваются (рис. 4,2), по сравнению с уровнем при отсутствии поверхностного натяжения. Это явление называют *капиллярностью*.

Высота капиллярного поднятия воды  $h$ , мм, в стеклянной трубке диаметром  $d$ , мм, при  $20^\circ \text{C}$

$$h = 30/d,$$

для ртути при тех же условиях

$$h = 10/d.$$

Указанные поправки следует учитывать при отчетах показаний в измерительных приборах, где используются стеклянные трубки с жидкостью.

**Ньютоновские и неньютоновские жидкости.** Жидкости, вязкость которых полностью определяется их химической природой и состоянием (температурой и давлением), называются *ньютоновскими*. К ним относятся вода, воздух, пар, природный газ и др. Их движение описывается формулой (6).

Жидкости, вязкость которых не является константой, а зависит от времени действия и величины касательных напряжений, называются *неньютоновскими*. К ним, в частности, относятся растворы полимеров, резко снижающие сопротивление течению воды в трубах, пластические материалы, обладающие порогом текучести, ниже которого они ведут себя как твердые тела, а выше — как жидкости (глинистые и цементные растворы, коллоиды, консистентные смазки и пр.). Свойства пластических материалов и неньютоновских жидкостей изучает наука *реология*.

**Однофазные и многофазные жидкости.** Ньютоновские жидкости представляют собой *однофазные* жидкие системы. На практике встречаются и многофазные, чаще всего *двухфазные*, системы, например жидкость — газ (воздух), жидкость — твердые частицы, жидкость — пар. В сантехнике

примером двухфазных потоков служат течения с образованием воздушных пробок в водопроводных линиях, кавитационные явления в насосах, перемещение твердых частиц и пыли в воздуховодах (пневмотранспорт).

**Вязкая и невязкая жидкости.** Воображаемую жидкость, которая характеризуется отсутствием внутреннего трения при ее движении, называют *невязкой*. Такой жидкости в природе не существует \*. Тем не менее, абстрактная модель невязкой жидкости оказывается полезной при решении теоретических вопросов и описании ряда явлений, связанных с обтеканием твердых тел и движением жидкости через некоторые установки и сооружения.

Модель невязкой жидкости не может объяснить происхождение потерь механической энергии при движении жидкости по трубопроводам и вообще эффекта сопротивления. Для описания этих явлений используется более сложная модель вязкой жидкости. Простейшей и наиболее употребительной моделью вязкой жидкости является ньютоновская жидкость.

#### § 4

#### **Обозначения, единицы и размерности величин**

Для закрепления сведений, изложенных выше, а также для облегчения изучения последующего материала приводим таблицу основных величин, применяемых в курсе гидравлики и аэродинамики.

В Международной системе единиц (СИ) в качестве основных механических и тепловых единиц используются: метр (длина —  $L$ ), килограмм (масса —  $M$ ), секунда (время —  $T$ ), кельвин (температура —  $\theta$ ). Таким образом, символическое обозначение системы величин механики и тепловых величин —  $LM\theta$ .

До введения системы СИ наибольшее распространение в технике имела система МКГСС (техническая система —  $LFT$ ). В системе МКГСС основными единицами являются единицы длины, силы и времени: метр, килограмм-сила, секунда.

---

\* Жидкий гелий при температуре, близкой к абсолютному нулю, ведет себя как невязкая жидкость.

В табл. 2 указаны единицы СИ, их обозначения и размерности в соответствии с [19], [27].

Если установленные единицы для практических измерений физических величин оказываются слишком большими или слишком малыми, применяют десятичные кратные и дольные единицы от исходных единиц СИ.

Таблица 2. Основные и производные единицы, используемые в данном курсе

Величина	Обозначение	Единица СИ		
		размерность	наименование	обозначение
Длина	$l$	$L$	метр *	м
Масса	$m$	$M$	килограмм	кг
Сила	$P, T^{**}, R, F$	$LMT^{-2}$	ньютон	Н
Время	$t^{***}$	$T$	секунда	с
Термодинамическая температура	$T$	$\theta$	кельвин	К
Площадь	$S$	$L^2$	квадратные метры	$m^2$
Площадь живого сечения	$\omega$	$L^2$	то же	$m^2$
Объем	$V$	$L^3$	кубический метр	$m^3$
Объемный расход	$Q$	$L^3T^{-1}$	кубический метр в секунду	$m^3/c$
Местная скорость	$u$	$LT^{-1}$	метр в секунду	м/с
Средняя скорость	$v$	$LT^{-1}$	то же	м/с
Ускорение свободного падения	$g$	$LT^{-2}$	метр на секунду в квадрате	$m/c^2$
Кинематическая вязкость	$\nu$	$L^2T^{-1}$	квадратный метр на секунду	$m^2/c$
Массовый расход	$M$	$MT^{-1}$	килограмм в секунду	кг/с
Плотность	$\rho$	$ML^{-3}$	килограмм на кубический метр	кг/м <sup>3</sup>
Давление	$p$	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па
Касательное напряжение	$\tau$	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па
Динамическая вязкость	$\mu$	$L^{-1}MT^{-1}$	паскаль-секунда	Па·с
Удельная энергия	$E$	$L^2T^{-2}$	джоуль на килограмм	Дж/кг
Удельная газовая постоянная	$R$	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг × К)

\* В метрах измеряется также высота или напор, обозначаемые  $H$  или  $h$ .

\*\* Применяется также для обозначения термодинамической температуры, измеряемой кельвинами.

\*\*\* Применяется также для обозначения внесистемной единицы измерения температуры в градусах Цельсия.

Для измерения многих физических величин используются удобные внесистемные единицы (техническая атмосфера, миллиметры ртутного и водяного столба и др). Чтобы избежать ошибок при выполнении численных расчетов, в формулы необходимо подставлять величины, выраженные в единицах СИ (или МКГСС). Нельзя подставлять внесистемные, долговые или кратные единицы.

## Глава II

### ГИДРОСТАТИКА

#### § 5

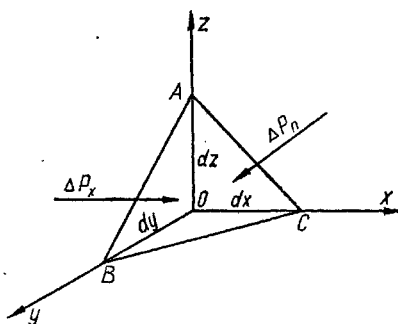
#### Гидростатическое давление и его свойства

Гидростатика рассматривает законы равновесия жидкостей, находящихся в состоянии покоя, и практическое приложение этих законов.

Из двух видов поверхностных сил — нормальных и тангенциальных — в покоящейся жидкости действуют только первые, т. е. силы давления. Тангенциальные силы, или силы трения, проявляются только в движущейся жидкости [см. формулу (6)]. Поскольку жидкости не оказывают сопротивления разрыву, силы давления всегда направлены внутрь по нормали, т. е. действуют как сжимающие усилия.

Соответственно из двух видов напряжений (нормальных и касательных) в покоящейся жидкости действуют только нормальные напряжения  $p$ , называемые гидростатическим давлением. Касательные напряжения  $\tau$  равны нулю.

Выделим в жидкости элементарный объем в виде тетраэдра (рис. 5).



Заменим действие окружающей среды поверхностными силами давления, направленными по внутренней нормали к грани тетраэдра. Как видно из рисунка, направления

Рис. 5. К установлению независимости действия давления от его направления.

трех сил совпадают с направлениями координатных осей. На грань  $ABC$  действует сила  $\Delta P_n$  в некотором направлении  $n$ . Кроме сил давления, на жидкость в объеме тетраэдра действуют еще массовые силы. Обозначим проекции этих сил, отнесенных к единице массы, соответственно  $X, Y, Z$ .

Рассмотрим условия равновесия сил, действующих на выделенный тетраэдр. Например, проектируя все силы на ось  $x$ , можем написать:

$$\Delta P_x - \Delta P_n \cos(n, x) + X\rho \frac{1}{6} dx dy dz = 0,$$

где  $\rho \frac{1}{6} dx dy dz$  — масса жидкости в объеме тетраэдра.

Заменяя в соответствии с выражением (4) силу давления произведением давления на нормальную к этой силе площадку, перепишем приведенное уравнение так:

$$p_x \frac{1}{2} dy dz - p_n dS_n \cos(n, x) + X\rho \frac{1}{6} dx dy dz = 0.$$

Площадь проекции треугольника  $ABC$  на координатную плоскость  $yOz$  равна  $AOB$ , т. е.

$$dS_n \cos(n, x) = \frac{1}{2} dy dz.$$

Таким образом,

$$p_x \frac{1}{2} dy dz - p_n \frac{1}{2} dy dz + X\rho \frac{1}{6} dx dy dz = 0,$$

или, после сокращения на  $\frac{1}{2} dy dz$ ,

$$p_x - p_n + X \frac{1}{3} dx = 0.$$

Теперь будем уменьшать тетраэдр до размеров точки. Тогда длина ребер тетраэдра приближается к нулю, в частности,  $dx \rightarrow 0$ . Переходя к пределу, получим

$$p_x - p_n = 0, \text{ или } p_x = p_n.$$

Проектируя силы на оси  $y$  и  $z$ , аналогично найдем  $p_y = p_n$ ;  $p_z = p_n$ . Окончательно

$$p_x = p_y = p_z = p_n.$$

Поскольку ориентация тетраэдра в пространстве выбрана произвольно, полученный результат доказывает, что

гидростатическое давление в данной точке жидкой среды *одинаково во всех направлениях*. В другой точке пространства, занятого жидкостью, давление может быть другим. Значит, давление определяется только расположением данной точки, т. е. является непрерывной функцией координат пространства:

$$p = f(x, y, z). \quad (16)$$

Другими словами, давление образует *скалярное поле*, а сила давления, определяемая по формуле (4) как произведение давления на площадку действия, является *вектором*.

## § 6 Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера)

Выделим в жидкости элементарный объем в форме параллелепипеда со сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 6). На этот параллелепипед действуют по внутренней нормали поверхностные силы давления окружающей жидкости, а также массовые силы выделенного объема с проекциями  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , отнесенными к единице массы.

Если на три грани параллелепипеда, пересекающиеся в точке, действует давление  $p$ , на соответствующих противоположных гранях [см. функциональную зависимость (16)] давления изменятся на величину соответствующих частных дифференциалов  $\frac{\partial p}{\partial x} dx$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} dy$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z} dz$ .

Рассмотрим условие равновесия сил, проектирующихся на ось  $x$ . Если сила давления на левую грань равна  $p dy dz$ , то на правую грань она составит  $(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz$ . Массовая

сила равна  $X \rho dx dy dz$ . Таким образом, уравнение равновесия в данном случае запишется так:

$$p dy dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho X dx dy dz = 0,$$

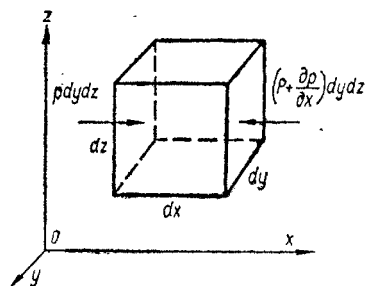


Рис. 6. К выводу дифференциальных уравнений равновесия Эйлера.

или

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \rho X dx dy dz = 0.$$

Отнесем уравнение к единице массы, поделив все его члены на массу параллелепипеда  $\rho dx dy dz$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Второе и третье уравнения в системе (17) получены аналогично первому при проектировании сил на оси координат  $y$  и  $z$ .

Система уравнений (17) и есть *дифференциальные уравнения равновесия жидкости*. Впервые их вывел Леонард Эйлер в 1755 г.

В векторной форме условие равновесия жидкости записывается одним дифференциальным уравнением. Изменение скалярного поля давления характеризуется его градиентом:

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  — единичные векторы координатных осей.

Действующая на выделенный элементарный объем жидкости  $\Delta V$  результирующая сила давления равна  $\text{grad } p \Delta V$ . Она уравновешивается массовой силой  $\rho \Delta V F$ , где  $F = Xi + Yj + Zk$ , т. е.

$$\rho \Delta V F = \text{grad } p \Delta V,$$

или

$$F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0, \quad (18)$$

что эквивалентно уравнениям (17).



## § 7

### Интегрирование уравнений Эйлера. Поверхности уровня

Для интегрирования умножим уравнения (17) соответственно на  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и просуммируем их:

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0.$$

Выражение в скобках представляет собой полный дифференциал давления  $dp$ , поэтому уравнение можно переписать так:

$$\frac{dp}{\rho} = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (19)$$

Левая часть формулы (19) является полным дифференциалом. Значит, и правая часть этого уравнения также должна быть полным дифференциалом. Для этого необходимо и достаточно, чтобы существовала функция

$$\Pi = f(x, y, z),$$

частные производные которой по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  с обратным знаком равнялись бы проекциям массовых сил на оси координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , отнесенным к единице массы, т. е.

$$\left. \begin{aligned} X &= - \frac{\partial \Pi}{\partial x}; \\ Y &= - \frac{\partial \Pi}{\partial y}; \\ Z &= - \frac{\partial \Pi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Функция  $\Pi$  называется *потенциальной*, а силы, удовлетворяющие условию (20), называются *силами, имеющими потенциал*.

На основании изложенного можно утверждать, что жидкость находится в равновесии лишь в том случае, если действующие в ней силы имеют потенциал. Из условий (19), (20) следует, что

$$\frac{dp}{\rho} = -d\Pi, \quad \text{или} \quad \frac{dp}{\rho} + d\Pi = 0.$$

Проинтегрировав это выражение, получим

$$\Pi + p/\rho = \text{const.} \quad (21)$$

В векторном представлении уравнение (21) получается сразу из уравнения (18). Действительно, если массовые силы имеют потенциал, то  $F = -\text{grad } \Pi$ .

Тогда

$$\text{grad } \Pi + \frac{1}{\rho} \text{grad } \Pi = 0, \text{ или } \Pi + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

Точки равного давления в скалярном поле образуют *поверхности уровня*. Для таких поверхностей  $p = \text{const}$ ,  $dp = 0$ . Дифференциальное уравнение поверхностей уровня согласно выражению (19)

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \quad (22)$$

откуда следует, что массовые силы перпендикулярны к поверхностям уровня.

## § 8

### Основное уравнение гидростатики в поле сил тяжести

Из массовых сил в условиях «абсолютного» покоя жидкости учитываются только силы тяжести, которые обладают потенциалом. Для проекций сил тяжести, приходящихся на единицу массы,

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -1 \cdot g = -g.$$

Знак «минус» в последнем равенстве поставлен потому, что ускорение свободного падения  $g$  направлено вниз, а ось  $z$  — вверх.

Подставив последнее условие в выражение (19), получим дифференциальное уравнение равновесия в поле сил тяжести:

$$\frac{dp}{\rho} = -gdz, \text{ или } \frac{dp}{\rho} + gdz = 0. \quad (23)$$

Для несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) уравнение (23) легко интегрируется:

$$gz + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (24)$$

Это уравнение и выражает основной закон гидростатики.

Дифференциальное уравнение поверхности уровня (22) в поле сил тяжести

$$-gdz = 0,$$

откуда уравнение поверхности уровня

$$z = \text{const.} \quad (25)$$

Таким образом, в покоящейся однородной жидкости, которая находится под действием сил тяжести, поверхности уровня являются *горизонтальными плоскостями*. Например, для капельных жидкостей свободная поверхность — это поверхность уровня; поэтому она всегда горизонтальна независимо от расположения сосуда, в котором находится жидкость. Из выражения (25) также следует, что поверхность раздела двух несмешивающихся жидкостей является поверхностью уровня, т. е. горизонтальной поверхностью.

Конкретизируем смысл постоянной в правой части уравнения (24). Выделим в среде две поверхности уровня с давлениями  $p$  и  $p_0$  и вертикальными координатами  $z$  и  $z_0$  (рис. 7, а). Для этого случая уравнение (24) можно записать так:

$$gz + \frac{p}{\rho} = gz_0 + \frac{p_0}{\rho},$$

откуда  $p = p_0 + \rho g(z_0 - z)$ .

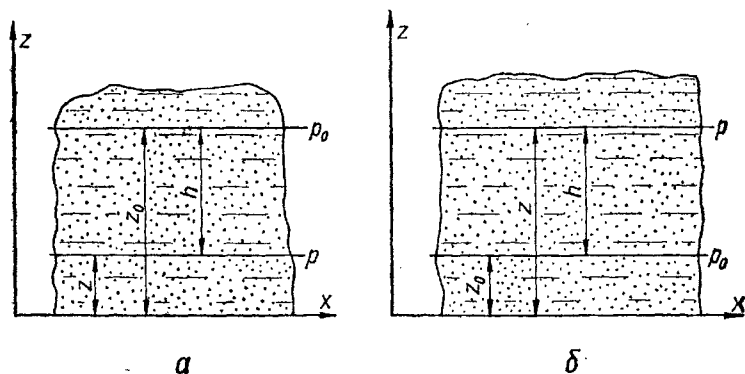
Обозначив разность  $z_0 - z = h$ , находим

$$p = p_0 + \rho gh.$$

Если же поверхности уровня поменять местами; т. е. считать, что заданная поверхность с давлением  $p_0$  расположена внизу, а поверхность с давлением  $p$  —верху (рис. 7, б),

Рис. 7. К выводу основного уравнения гидростатики (16):

а — поверхность с давлением  $p$  расположена ниже заданной плоскости с давлением  $p_0$ ; б — то же, выше



то

$$p = p_0 + \rho g (z - z_0),$$

или

$$p = p_0 - \rho gh.$$

Обобщая полученный результат, окончательно получаем

$$p = p_0 \pm \rho gh. \quad (26)$$

Это другая форма основного уравнения гидростатики (24), удобная для практического применения. Член  $\rho gh$  в уравнении (26) характеризует вес столбика несжимаемой жидкости высотой  $h$  и площадью в 1 квадратную единицу. Знак перед вторым членом правой части уравнения зависит от расположения искомой точки с давлением  $p$ . Если эта точка находится ниже заданной поверхности  $p_0$ , в уравнении (26) надо принимать знак «плюс»; если же искомая точка расположена выше поверхности  $p_0$ , следует подставлять знак «минус».

Для невесомой жидкости, т. е. для среды без учета сил тяжести, уравнение гидростатики принимает вид

$$p = p_0, \quad (27)$$

т. е. давление во всех точках среды одинаково.

Основное уравнение гидростатики (26) можно получить, не интегрируя уравнение Эйлера. Рассмотрим равновесие вертикального цилиндрика жидкости высотой  $h$  и площадью  $\Delta S$  (рис. 8). Сила давления снизу  $p_2 \Delta S$  уравновешивается силой давления сверху  $p_1 \Delta S$  и силой тяжести самого цилиндрика  $\rho gh \times \Delta S$  (силы давления, действующие на боковую

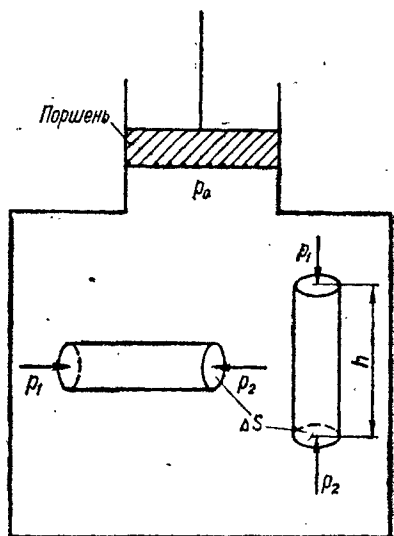


Рис. 8. Равновесие элементарных цилиндров жидкости, находящихся в горизонтальном и вертикальном положениях.

поверхность цилиндра слева и справа, нормальны к вертикали). Таким образом,

$$p_2 \Delta S = p_1 \Delta S + \rho g h \Delta S,$$

$$p_2 = p_1 + \rho g h,$$

т. е. мы получили частный случай уравнения (26).

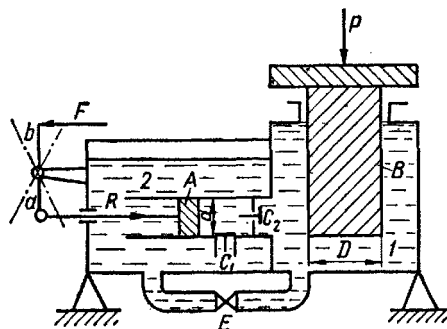
Если же рассматривать условие равновесия горизонтального цилиндра, нетрудно доказать, что в горизонтальных плоскостях давление одинаково.

До сих пор изучались законы равновесия жидкости в условиях «абсолютного» покоя, где массовые силы были представлены только силами тяжести. Если жидкость находится в движущемся сосуде, возникают условия относительного покоя. Подвижную систему координат в состоянии относительного покоя, как известно из теоретической механики, можно свести к неподвижной системе, прибавив силы инерции в переносном движении. В результате это приводит к деформации поверхностей уровня, между тем как давление распределяется согласно основному закону гидростатики, т. е. уравнению (26). Например, при вращении открытого сосуда с водой вокруг вертикальной оси (центрифуга) свободная поверхность приобретает форму параболоида вращения.

## § 9

### Закон Паскаля и его практическое приложение

Уравнение (26) представляет собой аналитическое выражение закона Паскаля, согласно которому *давление передается без изменения в каждую точку среды.*



Действительно, давление  $p$ , которое создается поверхностной силой, приложенной к поршню, согласно уравнению (26) входит как слагаемое в давления всех точек данного объема жид-

Рис. 9. Схема гидравлического домкрата.

кости. Этот же вывод вытекает непосредственно для невязкой жидкости.

Закон Паскаля указывает на способность жидкости передавать усилия на расстояние. Эта особенность жидкостей, коренным образом отличающая их от сыпучих тел (например, от песка), широко используется на практике.

Приведем два характерных примера применения закона Паскаля.

**Гидравлический домкрат.** Принцип работы гидравлического домкрата ясен из схемы рис. 9. Сила  $R$ , прикладываемая к поршню  $A$ , создает давление масла под поршнем  $p = R/(\pi d^2/4)$ . Это давление передается в пространство, наполненное маслом под плунжером  $B$ . Давление  $p$ , действующее на площадь плунжера, уравновешивается грузом  $P$ , т. е.  $p = P/(\pi D^2/4)$ . Сопоставив эти соотношения, получаем

$$R = P (d^2/D^2).$$

Учитывая правило рычага первого рода, находим условие для поднятия груза:

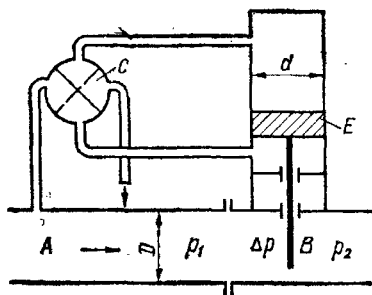
$$F > P (d^2/D^2) (a/b).$$

Клапан  $C_1$  на схеме необходим для перепуска масла под поршень  $A$  при холостом, а  $C_2$  — под плунжер  $B$  при рабочем ходе. Для опускания плунжера и груза масло выпускается обратно из полости 1 в полость 2 через перепускной вентиль  $E$ .

**Силовой цилиндр** служит для сообщения рабочему органу возвратно-поступательного движения. На рис. 10 представлена простейшая схема гидроуправления заслонкой  $B$ . Давление жидкости, которая находится в трубопроводе  $A$ , действует через распределительный кран  $C$  на поршень силового цилиндра  $E$ , жестко связанного с заслонкой  $B$ . Положение крана, показанное на схеме, соответствует открытию заслонки. При положении крана, показанного штриховой линией, заслонка закрывается.

**Пример 1.** Определить диаметр  $d$  силового цилиндра для подъема заслонки, установленной

Рис. 10. Схема силового цилиндра для приведения в действие задвижки.



на водопроводной линии диаметром  $D = 200$  мм. Разница давлений по обе стороны закрытой заслонки  $\Delta p = p_1 - p_2 = 600$  кПа. Масса подъемных частей  $m = 100$  кг. Коэффициент трения заслонки в направляющих  $f = 0,1$ .

Сила давления на заслонку

$$P = \Delta p \frac{\pi D^2}{4} = 600 \cdot 10^3 \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} = 18\,750 \text{ Н.}$$

Сила, необходимая для подъема заслонки,

$$F = fP + mg = 0,1 \cdot 18\,750 + 100 \cdot 9,8 = 2855 \text{ Н.}$$

Требуемая площадь поршня силового цилиндра

$$S = \frac{F}{\Delta p} = \frac{2855}{600 \cdot 10^3} = 0,00475 \text{ м}^2 \approx 48 \text{ см}^2.$$

Искомый диаметр силового цилиндра

$$d = \sqrt{(4/\pi)S} = 1,13 \sqrt{S} = 1,13 \sqrt{48} \approx 8 \text{ см.}$$

Рассмотренные случаи свидетельствуют о возможности передачи давления с помощью рабочей жидкости. На этом принципе основана работа гидростатического (объемного) гидропривода и систем гидропневмоавтоматики.

## § 10

### **Абсолютное и манометрическое давление, вакуум**

При измерении давления, как и любой другой физической величины, необходимо условиться, что принимать за начало отсчета. Исходя из конструктивных и физических требований к приборам, измеряющим давление, наиболее удобно считать за нуль атмосферное давление  $p_a$ . Тогда при давлении больше атмосферного прибор будет показывать манометрическое, или избыточное давление

$$p_{\text{ман}} = p - p_a, \quad (28)$$

где  $p$  — абсолютное давление, отсчитываемое от нулевого давления.

Если измеряемое давление меньше атмосферного, прибор показывает вакуумметрическое давление, или просто вакуум (рис. 11):

$$p_{\text{вак}} = p_a - p. \quad (29)$$

Приборы, измеряющие избыточное давление, называют *манометрами*, а вакуум — *вакуумметрами*.

Сопоставив уравнения (28) и (29), получим

$$p_{\text{ман}} = -p_{\text{вак}}, \quad (30)$$

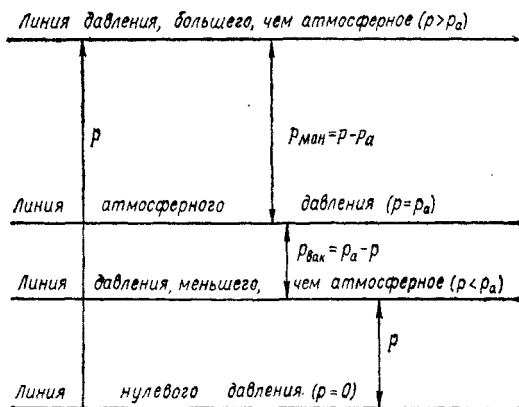
т. е. вакуум можно рассматривать как отрицательное избыточное давление.

Заметим, что максимально возможный вакуум равен атмосферному давлению ( $p_{\text{вак}}^{\text{макс}} \rightarrow p_a$  при  $p = 0$ ), а незначительный вакуум часто называют *разрежением*.

Измерение разрежений и малых давлений, которые часто встречаются в технике теплогазоснабжения и вентиляции, весьма просто осуществляется *жидкостным мановакуумметром*. Этот прибор представляет собой U-образную трубку, в которой находится капельная жидкость, например вода: один конец трубки сообщен с атмосферой, а другой присоединяется к среде, где измеряется давление. На рис. 12 показана трубка, заполненная газом. Если давление в трубе больше атмосферного, уровень измерительной жидкости в U-образной трубке поднимается в правом колене и прибор работает как манометр; если давление газа в трубе меньше атмосферного, уровень жидкости поднимается в левом колене и прибор работает как вакуумметр.

Пренебрегая весом газа, можно считать, что давление в трубе  $p$  равно давлению в плоскости  $O-O$ , проведенной на уровне жидкости в левом колене прибора (рис. 12, а). Вспоминая свойство поверхности уровня, можно утверждать, что и в правом колене на этом уровне давление равно  $p$ .

Рис. 11. К понятию манометрического (избыточного) давления и вакуума.





На высоте  $h$  верхней отметки уровня жидкости в правом колене давление атмосферное —  $p_a$ . Используя уравнение гидростатики (26), находим

$$p = p_a + \rho gh,$$

откуда

$$p - p_a = \rho gh.$$

С учетом условия (28)

$$p_{\text{ман}} = \rho gh, \quad (31)$$

где  $\rho$  — плотность измерительной жидкости.

Таким образом, показания прибора пропорциональны манометрическому давлению. В частности, 1 мм вод. ст. соответствует давлению 9,8 Па. Действительно, подставляя в формулу (31) соответствующие значения величин, получаем

$$1 \text{ мм вод. ст.} = 1000 \cdot 9,8 \cdot 0,001 = 9,8 \text{ Па.}$$

Для манометра, заполненного ртутью,

$$1 \text{ мм рт. ст.} = 13600 \cdot 9,8 \cdot 0,001 = 133,3 \text{ Па.}$$

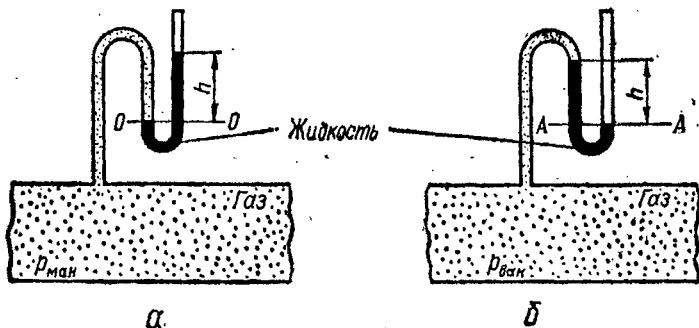
В вакуумметре (рис. 12, б) плоскость равного давления А—А в трубке отвечает атмосферному давлению. Рассуждая аналогичным образом, находим

$$p_a = p + \rho gh,$$

откуда

$$p_a - p = \rho gh.$$

Рис. 12. Измерение жидкостным манометром в газовой среде: а — манометрического давления; б — вакуума (разрежения).



Учитывая условие (29),

$$p_{\text{вак}} = \rho gh. \quad (32)$$

Хотя выражения (31) и (32) имеют одинаковую форму, важно обратить внимание, что отсчет высот в этих уравнениях, как видно из схем рис. 12, а, б, производится в противоположных направлениях. Сделанный вывод вытекает непосредственно из условия (30).

Для измерения весьма малых давлений (разрежений) применяют *микроманометры*, с помощью которых обычно контролируют работу вентиляционных устройств и газовых трактов котельных установок, где их называют *тягомерами*. Как видно из схемы рис. 13, с увеличением наклона трубки растягивается шкала для измерения:

$$l = h/\sin \alpha.$$

Измерительной жидкостью служит технический спирт, который имеет незначительный эффект капиллярности (см. рис. 4).

При измерении избыточного давления точка замера соединяется с отверстием резервуарчика (на рис. 13 знак «+»), а в случае разрежения — к самой наклонной трубке («-»).

Сложнее производить измерения жидкостными приборами среды, которая сама является капельной жидкостью. Во-первых, необходимо, чтобы жидкость, в которой производится измерение, не смешивалась с жидкостью в U-образном мановакуумметре (вода и ртуть как раз отвечают этим требованиям). Во-вторых, в тех случаях, когда ось прибора не совпадает с точкой замера, следует вводить поправку на расположение прибора, обусловленную весом вертикального столба жидкости в подводящих трубочках. Если прибор расположить выше точки замера, его показания будут преуменьшенными в случае избыточного давления и преувеличенными в случае вакуума, соответственно поправка будет положительная или отрицательная. Наоборот, при расположении прибора ниже точки замера его показания преувеличены при измерении избыточного давления и преуменьшены при вакууме, а поправки отрицательны или положительны.

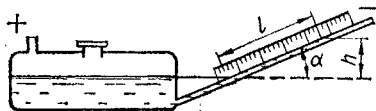


Рис. 13. Микроманометр.

**Пример 2.** Определить манометрическое давление воды в котле, который расположен в подвальном помещении, если ртутный манометр, находящийся на первом этаже, показывает  $h = 500$  мм рт. ст.,  $H = 4$  м (рис. 14).

Давление по показаниям ртутного манометра относительно плоскости  $O-O$  в соответствии с формулой (31)

$$p_{\text{ман}} = \rho_{\text{рт}} g h = 13\,600 \cdot 9,8 \cdot 0,5 = 66\,640 \text{ Па.}$$

Истинное давление, отнесенное к плоскости оси котла,

$$p_{\text{ман}} = p'_{\text{ман}} + \rho_{\text{вод}} g H = 66\,640 + 1\,000 \cdot 9,8 \cdot 4 = 105\,840 \text{ Па.}$$

Положительная поправка на расположение манометра при этом весьма значительна:

$$p_{\text{ман}} - p'_{\text{ман}} = 105\,840 - 66\,640 = 39\,200 \text{ Па} = 39,2 \text{ кПа.}$$

Если манометр измеряет разность давлений в двух точках, его называют *дифференциальным* (рис. 15). Обозначим разность уровней измерительной жидкости в коленах прибора через  $h$ , ее плотность —  $\rho_{\text{ж}}$ , а плотность жидкости в подводящих трубках 1, 2 —  $\rho_{\text{т}}$ . Тогда перепад давлений, который отвечает показанию дифференциального манометра  $h$ , определяется по формуле

$$\Delta p = g (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{т}}) h. \quad (33)$$

Действительно, проведем поверхность уровня  $O-O$  на отметке измерительной жидкости в левом колене прибора. Давления на этом уровне одинаковы в обоих коленах. Применяя уравнение гидростатики (26), можем записать для давлений в центрах труб  $A$  и  $B$  (см. рис. 15):

$$p_A = p_0 - \rho_{\text{т}} g h;$$

$$p_B = p_0 - \rho_{\text{т}} g (h_1 - h) - \rho_{\text{ж}} g h.$$

Искомая разность (перепад) давлений

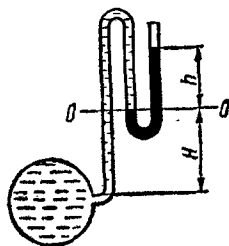


Рис. 14. К примеру 2.

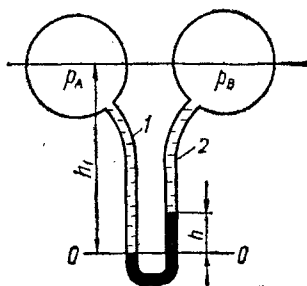


Рис. 15. Схема дифференциального манометра.

$$\Delta p = p_A - p_B = p_0 - \rho_T g h_1 - p_0 + \rho_{ж} (h_1 - h) + \rho_{ж} g h = g (\rho_{ж} - \rho_T) h,$$

т. е. получили уравнение (33).

Если в подводящих трубках 1 и 2 находится газ, а не капельная жидкость, то влиянием его плотности  $\rho_T$  можно пренебречь по сравнению с плотностью  $\rho_{ж}$ , и тогда формула (33) приобретает вид, аналогичный формуле (31):

$$\Delta p = \rho_{ж} g h. \quad (34)$$

**Пример 3.** Определить перепад давлений в трубах А и В, если показания дифференциального манометра  $h = 100$  мм рт. ст., когда он подключен:

а) к газопроводу; б) к паропроводу.

В случае а) искомый перепад по формуле (34)

$$\Delta p = 9,8 \cdot 13\,600 \cdot 0,1 = 13\,333 \text{ Па} = 100 \text{ мм рт. ст.}$$

В случае б) в подводящих трубках скапливается вода; по формуле (33)

$$\Delta p = 9,8 (13\,600 - 1000) \cdot 0,1 = 12\,350 \text{ Па} = 92 \text{ мм рт. ст.}$$

При измерении больших давлений, где жидкостные приборы неудобны из-за больших размеров, наиболее распространенными являются *пружинные манометры*. На рис. 16 представлена схема пружинного манометра, где основной деталью служит согнутая по кругу полая металлическая трубка, имеющая в сечении форму овала или эллипса. Один конец этой трубки запаян, а другой соединен с пространством, где измеряется давление, под влиянием которого конец трубки перемещается, что с помощью передаточного механизма сообщается стрелке.

Имеется ряд других конструкций приборов для изме-

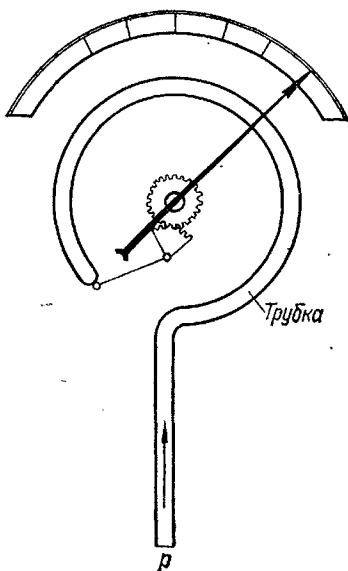


Рис. 16. Схема пружинного манометра.

рения давления (мембранные, грузопоршневые, электрические и др.). Все они измеряют давление по отношению к атмосферному, т. е. являются манометрами или вакуумметрами.

В заключение отметим, что в формулы гидравлики для несжимаемой жидкости можно подставлять манометрическое давление, а в случае вакуума — отрицательное манометрическое давление. Однако при изучении сжимаемой жидкости, где учитывается изменение состояния среды, необходимо при расчетах брать абсолютное давление

$$p = p_{\text{ман}} + p_a, \quad (35)$$

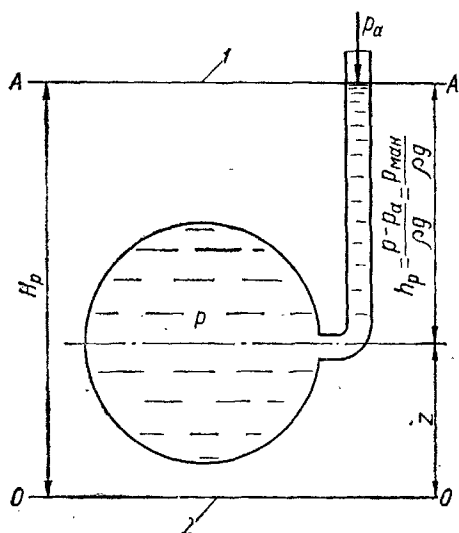
где  $p_a$  — давление атмосферы, принимаемое по уровню моря равным 760 мм рт. ст. (101 325 Па).

## § 11

### Пьезометрическая высота и пьезометрический напор

Для капельной жидкости возможен еще специфический способ измерения давления непосредственно высотой столба этой же жидкости.

Возьмем закрытый резервуар (трубу), заполненный жидкостью с давлением больше атмосферного, и присоединим к



нему открытую с другого конца стеклянную трубку (рис. 17). Жидкость в трубке поднимается относительно оси сосуда на некоторую высоту  $h_p$ . Проведем поверхность уровня по оси сосуда, где давление  $p$ , и по отметке жидкости в трубке, где давление равно атмосферному ( $p_a$ ).

Рис. 17. Схема, иллюстрирующая понятия пьезометрической высоты и пьезометрического напора:

1 — пьезометрическая плоскость; 2 — плоскость сравнения.

Согласно основному уравнению гидростатики (26)

$$p = p_a + \rho gh,$$

откуда

$$h_p = \frac{p - p_a}{\rho g},$$

или

$$h_p = \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g}. \quad (36)$$

Итак, манометрическое давление выражается высотой столба жидкости  $h_p$ . Эта высота называется *пьезометрической*, а стеклянная трубка, измеряющая пьезометрическую высоту, — *пьезометром* (греч. *piezo* давлѹ + *metreo* мерю).

В зависимости от рода жидкости пьезометрическая высота при одном и том же давлении будет разная. Например, пьезометрическая высота, эквивалентная внесистемной единице давления в одну техническую атмосферу, равна:

для воды

$$h_p = \frac{9,8 \cdot 10^4}{1000 \cdot 9,8} = 10 \text{ м вод. ст.},$$

для ртути

$$h_p = \frac{9,8 \cdot 10^4}{13\,600 \cdot 9,8} = 0,735 \text{ м рт. ст.}$$

Рассмотрим теперь случай, когда давление в сосуде меньше атмосферного, т. е. имеется вакуум. Согласно условию (30) вакуум можно измерить трубкой, опущенной книзу (на рис. 18 она показана слева штриховой линией). Однако практически такое измерение осуществить не удастся. Поступают иначе: берут стеклянную трубку, одним концом соединенную с верхней точкой сосуда, а другим — опущенную во вспомогательный открытый сосуд с той же жидкостью, на свободной поверхности которой давление равно атмосферному (рис. 18). Поскольку в основном сосуде давление меньше атмосферного, жидкость в трубке поднимется на некоторую высоту  $h_{\text{вак}}$ . Применяя уравнение (26) к свободной поверхности вспомогательного сосуда с давлением  $p_a$  и к отметке жидкости в трубке с абсолютным давлением  $p$ , получим

$$p + \rho gh_{\text{вак}} = p_a,$$

откуда

$$p_a - p = \rho g h_{\text{вак.}}$$

Поскольку  $p_a - p = p_{\text{вак.}}$ ,

$$h_{\text{вак.}} = \frac{p_{\text{вак.}}}{\rho g} . \quad (37)$$

Высоту  $h_{\text{вак}}$  называют *вакуумметрической*. Рассмотренный случай объясняет подъем (всасывание) жидкости в трубе за поршнем насоса (рис. 19).

Как уже было сказано, максимально возможный вакуум равняется атмосферному давлению. Если стеклянную трубку с одного конца запаять, наполнить ее ртутью и открытым концом опустить в чашку с ртутью (опыт Торричелли), ртуть поднимается по трубке на высоту  $h_a$ , равную атмосферному давлению (чашечный барометр). На уровне моря  $h_a = 760$  мм рт. ст., что соответствует давлению

$$p_a = \rho g h_a = 13\,600 \cdot 9,8 \cdot 0,76 = 101\,325 \text{ Па.} \quad (38)$$

Еще во времена Галилея было известно, что вода за поршнем насоса не может подняться на высоту более 10,3 м. Однако лишь после опыта Торричелли в 1648 г. удалось установить причину этого явления:

максимальная вакуумметрическая высота в метрах во-

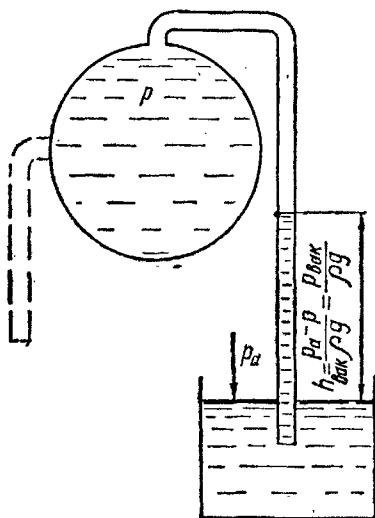
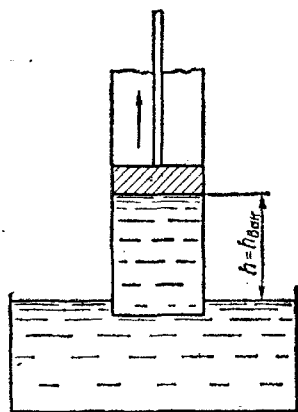


Рис. 18. К понятию вакуумметрической высоты.

Рис. 19. Подъем жидкости в трубе за поршнем насоса.



дяного столба

$$h_{\text{вак}}^{\text{max}} = \frac{p_a}{\rho g} = \frac{101\,325}{1000 \cdot 9,8} = 10,33 \text{ м вод. ст.} \quad (39)$$

Обычно в наиболее распространенных центробежных насосах высота всасывания не превышает 6—7 м из-за опасности вскипания жидкости при нормальных температурах и связанной с этим возможности разрыва столба жидкости.

Проведем произвольно ниже сосуда (см. рис. 17) горизонтальную плоскость  $O-O$  — *плоскость сравнения*. Расстояние от этой плоскости до поверхности уровня с давлением  $p$  обозначим через  $z$ . Сумма

$$z + \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} = z + h_p = H_p \quad (40)$$

называется *пьезометрическим напором* и складывается из двух высот: высоты расположения данной точки относительно выбранной плоскости сравнения и пьезометрической высоты, отвечающей давлению в этой точке.

Горизонтальная плоскость, проведенная через уровень жидкости в пьезометре, называется *пьезометрической*. На рис. 17 она показана линией  $A-A$ . Таким образом, пьезометрический напор представляет собой расстояние между плоскостью сравнения и пьезометрической плоскостью. Если за плоскость сравнения принять отметку геодезического нуля, то пьезометрическая плоскость дает пьезометрическую отметку.

Выясним физический смысл термина «пьезометрический напор». Обозначим массу частицы жидкости через  $\Delta m$ . Тогда запас потенциальной энергии частицы, находящейся на отметке пьезометра, относительно плоскости сравнения

$$E_{\text{пот}} = \Delta m g (z + h_p).$$

Если отнести этот запас к единице веса, разделив обе части равенства на  $\Delta m g$ , получим

$$H_p = \frac{E_{\text{пот}}}{\Delta m g} = z + h_p,$$

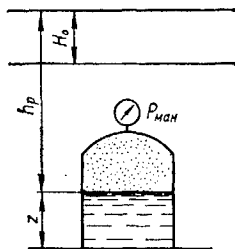


Рис. 20. К примеру 4.



т. е. выражение (40). Согласно основному уравнению гидростатики (24) эта сумма постоянна для всех точек покоящейся однородной жидкости. Следовательно, пьезометрический напор представляет собой запас потенциальной энергии жидкости, отнесенной к единице веса, относительно выбранной плоскости сравнения.

**Пример 4.** В системе пневматического водоснабжения (рис. 20) поддерживается постоянное давление  $p_{\text{ман}} = 400$  кПа. Средняя отметка уровня воды в резервуаре относительно условной отметки, принимаемой за нуль,  $z = 30$  м. Отметка объекта для подачи воды  $z_0 = 60$  м. Определить свободный напор при отсутствии течения воды.

Свободный напор равен разности пьезометрической отметки и отметки объекта водоснабжения:

$$H_0 = H_p - z_0.$$

Пьезометрическая отметка относительно условного нуля согласно уравнению (40)

$$H_p = 30 + \frac{400 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9,8} = 71 \text{ м.}$$

Свободный напор

$$H_0 = 71 - 60 = 11 \text{ м.}$$

Приведенные в этом параграфе понятия дают наглядное представление о высотном положении уровня жидкости в различного рода установках, сооружениях и системах и поэтому широко используются в водо- и теплоснабжении.

В заключение важно подчеркнуть, что указанные понятия трудно использовать для газа. Присоединим, например, пьезометрическую трубку к резервуару с газом, находящимся под давлением. Газ, который поднимается в трубке на высоту  $\frac{p_{\text{ман}}}{\rho g}$ , нельзя отличить от окружающей атмосферы. Вот почему в газоснабжении и вентиляции понятия «пьезометрическая высота», «пьезометрический напор» не применяются.

## § 12

### Примеры применения основного уравнения гидростатики

Основное уравнение гидростатики (24), или (26), показывает, что давление в покоящейся несжимаемой жидкости распределяется по линейному закону.

На рис. 21 представлены эпюры давления капельной жидкости на вертикальную стенку резервуара. При откры-

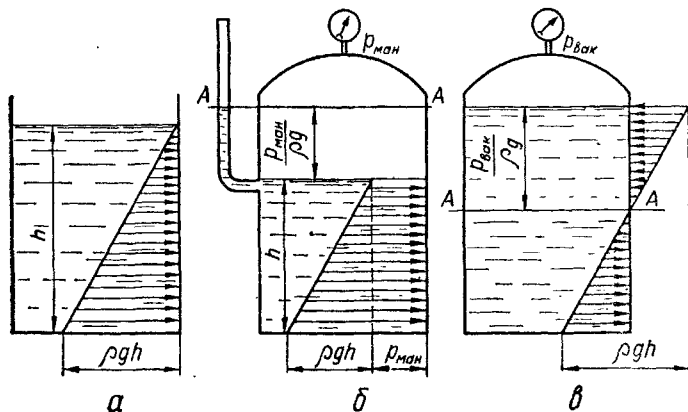
том резервуаре давление под действием сил тяжести распределяется по треугольнику с основанием  $\rho gh$  и вершиной на свободной поверхности (рис. 21, а). Если на свободную поверхность действует еще избыточное давление (рис. 21, б), эпюра давления приобретает форму трапеции с основаниями  $p_{\text{ман}}$  и  $p_{\text{ман}} + \rho gh$ ; другими словами, для построения эпюры давления достаточно сместить треугольник, показанный на рис. 21, а, влево на величину  $p_{\text{ман}}$ . Для вакуума этот треугольник смещается вправо, вследствие чего эпюра может принять вид, приведенный, например, на рис. 21, в. Расположение пьезометрической плоскости в последних двух случаях показано на рис. 21, б, в линией А—А.

Сложнее распределяется гравитационное давление (т. е. давление сил тяжести) воздуха или газа. Здесь при построении эпюры манометрического давления необходимо учитывать изменение атмосферного давления по высоте, а также особенности конкретной схемы. Для иллюстрации сказанного разберем некоторые важные случаи из практики теплогоснабжения.

**Дымовая труба.** Плотность наружного воздуха  $\rho_n$  больше плотности отходящих газов в дымовой трубе  $\rho_{\text{вн}}$ . В плоскости выходного сечения трубы 2—2 (рис. 22) можно принять, что давление равно давлению атмосферного воздуха в этой же плоскости —  $p_{a_2}$ . В плоскости 1—1 по оси топки давления по обе стороны заслонки С будут разными. Согласно уравнению (26) для вертикального столба наружного воздуха

Рис. 21. Эпюры распределения давления капельной жидкости на вертикальную стенку резервуара:

а — открытого; б — закрытого и находящегося под давлением; в — закрытого и находящегося под вакуумом.



высотой  $H$  и столба газа такой же высотой внутри трубы можно написать:

$$p_{a_1} = p_{a_2} + \rho_{\text{н}} g H;$$

$$p_{\text{вн}_1} = p_{a_2} + \rho_{\text{вн}} g H.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$p_{a_1} - p_{\text{вн}_1} = \rho_{\text{н}} g H - \rho_{\text{вн}} g H = g (\rho_{\text{н}} - \rho_{\text{вн}}) H,$$

откуда, учитывая формулу (28), разрежение

$$p_{\text{разр}} = g (\rho_{\text{н}} - \rho_{\text{вн}}) H. \quad (41)$$

Таким образом, труба с более легким газом создает разрежение (тягу), величина которого прямо пропорциональна высоте трубы и разности плотностей наружного воздуха и внутреннего газа. Если плотность газа в трубе больше плотности наружного воздуха ( $\rho_{\text{н}} < \rho_{\text{вн}}$ ), на внутреннюю сторону заслонки  $C$  действует манометрическое давление, воздух не поступает в топку, а газ выходит наружу. Такое явление, весьма нежелательное, называют *опрокидыванием тяги*. Оно случается, например, летом, когда при пуске холодный воздух в трубе тяжелее наружного. Сказанное полностью относится к вытяжным устройствам зданий, где более теплый (легкий) воздух в помещении стремится через трубу выйти наверх.

Газовый стояк — это вертикальная труба (рис. 23), заполненная газом, расположенная внутри здания для распределения газа по эта-

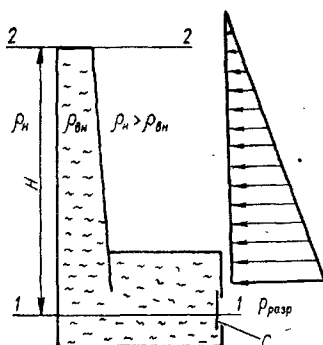


Рис. 22. Схема дымовой трубы.

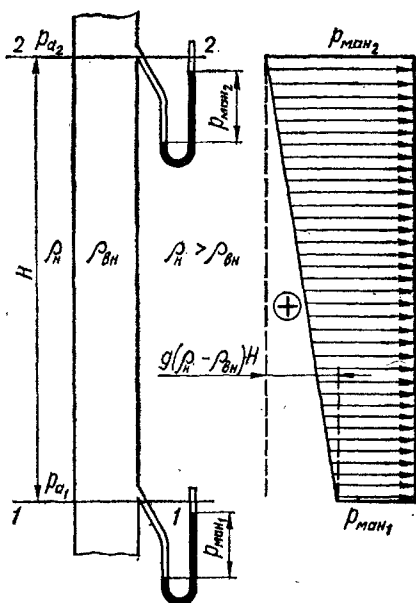


Рис. 23. Вертикальная труба, заполненная газом (газовый стояк).

жам. Стояк является частью газопровода низкого давления и находится под небольшим манометрическим давлением. Плотность природных и большинства искусственных газов меньше плотности атмосферного воздуха, т. е.  $\rho_{\text{вн}} < \rho_{\text{н}}$ .

Рассмотрим давление вне и внутри трубы в сечениях 1—1 и 2—2, ведя отсчет от плоскости 1—1. Согласно уравнению (26) давление внутри трубы  $p_{\text{вн}_2}$  и давление наружного воздуха  $p_{\text{а}_2}$  в плоскости 2—2 относительно плоскости 1—1

$$p_{\text{вн}_2} = p_{\text{вн}_1} - \rho_{\text{вн}} g H; \quad p_{\text{а}_2} = p_{\text{а}_1} - \rho_{\text{н}} g H.$$

Вычитая второе уравнение из первого и учитывая формулу (28), находим зависимость между манометрическими давлениями по высоте стояка:

$$p_{\text{ман}_2} = p_{\text{ман}_1} + g (\rho_{\text{н}} - \rho_{\text{вн}}) H,$$

откуда

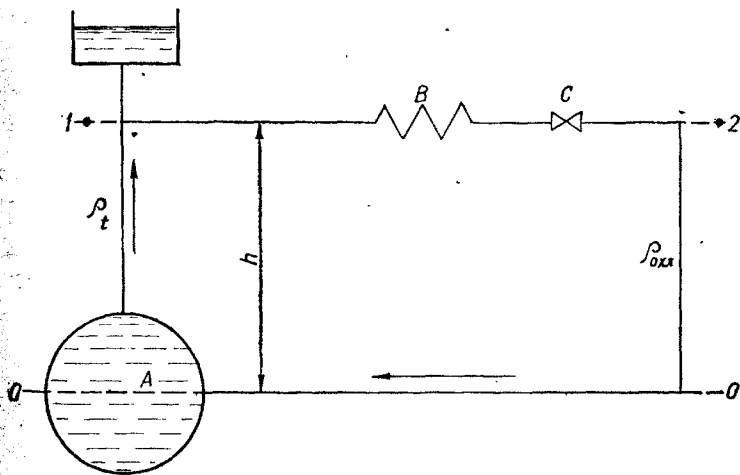
$$p_{\text{ман}_2} - p_{\text{ман}_1} = g (\rho_{\text{н}} - \rho_{\text{вн}}) H. \quad (42)$$

Значит, манометрическое давление в газовом стояке (при условии  $\rho_{\text{н}} > \rho_{\text{вн}}$ ) возрастает с высотой по линейному закону. Это объясняется тем, что абсолютное давление наружного воздуха уменьшается с высотой быстрее, чем абсолютное давление более легкого газа внутри трубы. Иначе говоря, дополнительное давление газа с высотой возникает потому, что абсолютное давление в газопроводе падает в меньшей степени, чем барометрическое.

Если принять  $\rho_{\text{н}} = 1,2 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_{\text{вн}} = 0,7 \text{ кг/м}^3$  и  $H = 2 \text{ м}$ , получим, что на каждые 2 м высоты манометрическое давление в газовом стояке возрастает на

$$9,8 (1,2 - 0,7) \cdot 2 = 9,8 \text{ Па} \approx 1 \text{ мм вод. ст.}$$

Рис. 24. Схема водяного отопления с естественной циркуляцией.



Вот почему при одинаковых условиях работы газовых приборов эффективность их на верхних этажах жилого дома больше, чем на нижних.

Если плотность газа в стояке больше плотности наружного воздуха, манометрическое давление линейно уменьшается с высотой.

**Водяное отопление с естественной циркуляцией.** На рис. 24 представлена простейшая схема водяного отопления с естественной циркуляцией, состоящая из котла *A* и одного нагревательного прибора *B*. Условно принимаем, что температура изменяется только в нагревательном приборе. Плотность горячей воды в левом стояке обозначим  $\rho_t$ , а плотность охлажденной в правом стояке —  $\rho_{охл}$ . При закрытом вентиле *C* задачу можно решать в условиях гидростатики. Примем давление в плоскости *O—O*, проходящей через ось котла, равным  $p_0$ . В плоскости *1—2*, проходящей через ось прибора, давление будет разным. Так, для точки *1* перед прибором согласно уравнению (26)

$$p_{t_2} = p_0 - \rho_t g H,$$

а после вентиле (точка *2*)

$$p_{охл_2} = p_0 - \rho_{охл} g H.$$

Поскольку плотность горячей воды меньше плотности охлажденной, вычитаемая величина в первом уравнении меньше, чем во втором; значит, давление слева  $p_{t_2}$  больше давления справа  $p_{охл_2}$ . Разность давлений

$$\Delta p = p_{t_2} - p_{охл_2} = p_0 - \rho_t g H - (p_0 - \rho_{охл} g H) = g (\rho_{охл} - \rho_t) H. \quad (43)$$

Если вентиль *C* открыт, указанная разность давления создает циркуляцию воды в системе по часовой стрелке.

При температуре горячей воды  $t = 80^\circ \text{C}$  плотность  $\rho_t = 972 \text{ кг/м}^3$  (см. § 3), а для охлажденной до  $t = 40^\circ \text{C}$  воды  $\rho_{охл} = 992 \text{ кг/м}^3$ . Таким образом, на каждый метр высоты прибора относительно оси котла давление

$$\Delta p = 9,8 (992 - 972) \cdot 1 = 196 \text{ Па} \approx 20 \text{ мм вод. ст.}$$

Для систем индивидуального отопления такое давление достаточно. Для многоэтажных строений и больших объектов в систему включают насос для принудительной циркуляции воды.

Из изложенного следует, что для возникновения естественной циркуляции необходима разность высотных положений нагревательного прибора и котла.

## § 13

### Сила давления жидкости на плоские стенки

Определение силы давления жидкости, действующей на ту или иную поверхность, имеет большое практическое значение при механических расчетах стенок, заглушек, перегородок, мембран и других устройств.

Начнем с более простого случая — определения силы давления жидкости на плоскую поверхность — на плоскую стенку. Будем считать, что стенка подвергается одностороннему давлению (с другой стороны давление атмосферное).

Поэтому интерес представляет только сила избыточного давления.

Для общности случая возьмем капельную жидкость, свободная поверхность которой (являющаяся поверхностью уровня) находится под воздействием избыточного давления

$p_{\text{ман}}$ . Высота этого давления  $\frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} = h_p$  характеризуется пьезометрической плоскостью  $A-A$  (рис. 25), составляющей угол  $\theta$  с плоской стенкой.

Определим силу давления жидкости, действующую на выбранную площадь  $S$  данной плоской стенки. На разные точки площади  $S$ , находящиеся на разных глубинах, действуют согласно уравнению (26) различные давления. Для определения искомой силы  $P$  сначала найдем силу давления на элементарную площадку

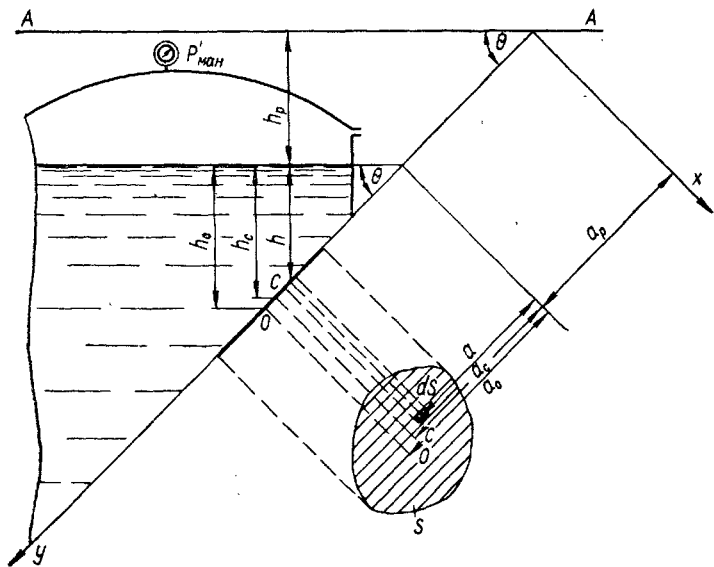
$$dP = (p_{\text{ман}} + \rho gh) dS = \rho g (h_p + h) dS,$$

где  $h_p + h$  — расстояние по вертикали от данной точки до пьезометрической плоскости  $A-A$ .

Как видно из рис. 25,

$$h_p + h = (a_p + a) \sin \theta.$$

Рис. 25. К выводу формул (45), (49).



Следовательно, элементарная сила давления

$$dP = \rho g (a_p + a) \sin \Theta dS.$$

Полная сила давления на всю площадь  $S$  определится суммой элементарных сил:

$$P = \int_S \rho g \sin \Theta (a_p + a) dS = \rho g \sin \Theta \int_S (a_p + a) dS.$$

Выражение  $\int_S (a_p + a) dS$  представляет собой статический момент площади относительно оси  $x$ . Он равен  $(a_p + a_c)S$ , где  $a_p + a_c$  — расстояние от центра тяжести рассматриваемой площади до оси. Поэтому

$$P = \rho g \sin \Theta (a_p + a_c) S.$$

Учитывая, что  $(a_p + a_c) \sin \Theta = h_p + h_c$  и  $\rho g (h_p + h_c) = p_{\text{ман}} + \rho gh = p_{\text{ман}}$ ,

$$P = (\rho gh_p + \rho gh_c) S. \quad (44)$$

В уравнении (44) первое слагаемое  $(\rho gh_p)$  характеризует избыточное давление над свободной поверхностью  $p_{\text{ман}}$ , а второе  $(\rho gh_c)$  — избыточное давление, создаваемое весом самой жидкости. Таким образом, полное манометрическое давление, действующее в центре тяжести  $C$ ,

$$p_{\text{ман}C} = p'_{\text{ман}} + \rho gh_c.$$

Поэтому уравнение (44) можно представить в следующем виде:

$$P = p_{\text{ман}C} S, \quad (45)$$

т. е. сила давления жидкости на плоскую стенку равна произведению площади рассматриваемой поверхности на манометрическое давление в ее центре тяжести.

Если над свободной поверхностью жидкости имеется вакуум, то пьезометрическая плоскость располагается на расстоянии  $h_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{вак}}}{\rho g}$  (см. рис. 21, в), вниз от свободной поверхности и манометрическое давление в центре тяжести  $C$  в зависимости от соотношения глубин  $h_p$  и  $h_c$  может быть положительным или отрицательным.

Если  $p'_{\text{ман}} = 0$  (случай открытого резервуара), пьезометрическая плоскость совпадает со свободной поверхностью

( $h_p = 0$ ) и нагрузка на стенку определяется только силой тяжести самой жидкости. В этом случае

$$P = \rho g h_c S, \quad (46)$$

где  $h_c$  — глубина погружения центра тяжести смоченной поверхности.

Сила давления на горизонтальное дно открытого сосуда с жидкостью, где глубины погружения всех элементарных площадок одинаковы,

$$P = \rho g h S. \quad (47)$$

Из выражения (47) следует, что сила давления жидкости на дно сосуда не зависит от формы его боковых стенок. На рис. 26 показаны три сосуда, наполненные до одного уровня  $h$  и имеющие одинаковую площадь дна  $S$ . Силы давления на дно согласно уравнению (47) для всех сосудов равны; поставленные же на коромысловые весы сосуды дадут различный результат. Это так называемый гидростатический парадокс. Читателю предлагается самому разъяснить это явление.

Для невесомой жидкости, когда можно пренебречь влиянием ее веса и считать давление во всех точках рассматриваемой площади  $S$  одинаковым, формулу (45) можно записать так:

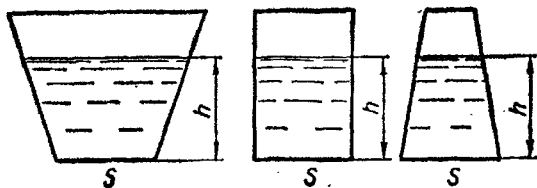
$$P = p_{\text{ман}} S, \quad (48)$$

где  $p_{\text{ман}}$  — манометрическое давление среды.

Практически этот случай распространяется не только на газы, но и на жидкости в трубах и котлах, находящиеся под значительным внутренним давлением.

**Пример 5.** Найти силу давления, действующую на заглушку трубопровода диаметром  $d = 100$  мм, находящегося под давлением  $p_{\text{ман}} = 800$  кПа.

Рис. 26. Гидростатический парадокс.





По формуле (48)

$$P = 800 \cdot 10^3 \frac{\pi}{4} 0,1^2 = 6300 \text{ Н} = 6,3 \text{ кН.}$$

Кроме силы давления, надо знать точку, через которую проходит ее равнодействующая, — *центр давления*. Для этого воспользуемся теоремой Вариньона: момент равнодействующей силы относительно некоторой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси. Обозначим расстояние от центра давления  $O$  до оси  $x$  через  $a_p + a_0$  (см. рис. 25). Поскольку силы давления всегда направлены перпендикулярно к стенке, момент силы  $P$  равен  $(a_p + a_0)P$ , а момент элементарных сил —  $(a_p + a_0) dP$ , то

$$\begin{aligned} P(a_p + a_0) &= \int_S (a_p + a) dP = \int_S (a_p + a) \rho \sin \Theta (a_p + a) dS = \\ &= \rho g \sin \Theta \int_S (a_p + a)^2 dS. \end{aligned}$$

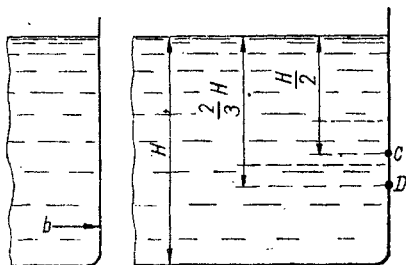
Выражение  $\int_S (a_p + a)^2 dS$  представляет собой момент инерции рассматриваемой площади  $S$  относительно оси  $x$ , образованной пересечением поверхности стенки с пьезометрической плоскостью. Обозначим его через  $I_x$ . Тогда

$$P(a_p + a_0) = \rho g \sin \Theta I_x.$$

Заменим величину  $I_x$  моментом инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, —  $I_0$ . В соответствии с теоремой Штейнера

$$I_x = I_0 + (a_p + a_0)^2 S.$$

Вместо  $P$  подставим его выражение из формулы (44).



Тогда уравнение моментов запишется так:

$$\begin{aligned} \rho g (a_p + a_0) \sin \Theta S (a_p + \\ + a_0) &= \rho g \sin \Theta [I_0 + \\ &+ (a_p + a_0)^2 S], \end{aligned}$$

Рис. 27. Определение центра давления тяжелой жидкости на вертикальную стенку.

откуда

$$a_0 = a_c + \frac{I_G}{(a_p + a_c) S} \quad (49)$$

Формулу (49) можно привести к виду

$$h_0 = h_c + \frac{I_C}{(h_p + h_c) S} \sin^2 \Theta, \quad (50)$$

где  $h_0$  и  $h_c$  — глубины погружения центра давления и центра тяжести рассматриваемой поверхности  $S$ . Последнее выражение показывает, что *центр давления лежит ниже центра тяжести* (за исключением случая вакуума, когда  $h_0 > h_c$ ). Для горизонтальной стенки ( $\sin^2 \Theta = 0$ ,  $h_c = = h_0$ ) эти точки совпадают.

Для вертикальной стенки открытого прямоугольного резервуара  $\sin^2 \Theta = 1$ . Тогда уравнение (50) примет вид

$$h_0 = h_c + \frac{I_C}{h_c S} \quad (51)$$

При глубине жидкости в резервуаре  $H$  и его ширине  $b$  (рис. 27)

$$h_0 = H/2 + 2bH^3/(12Hb) = H/2 + H/6 = 2/3H,$$

т. е. *центр давления расположен на расстоянии 2/3 глубины от свободной поверхности, или на расстоянии 1/3 глубины от дна.*

Для невесомой жидкости  $h_0 = h_c$ .

**Пример 6.** Для регулирования уровня воды в открытом резервуаре применен поворачивающийся щиток, который должен автоматически открывать квадратное отверстие размером  $a \times b = 200 \times 200$  мм в стенке при заданном уровне воды по отношению к центру отверстия  $h_c = 0,5$  м (рис. 28). Найти месторасположение шарнира  $O$ .

Если шарнир расположить по оси отверстия, щиток будет прижиматься к отверстию. Очевидно, для выполнения условия задачи необходимо, чтобы ось шарнира проходила через центр давления при глубине  $h_0$ . Обозначим искомое расстояние через  $\Delta h$ . Применяем уравнение

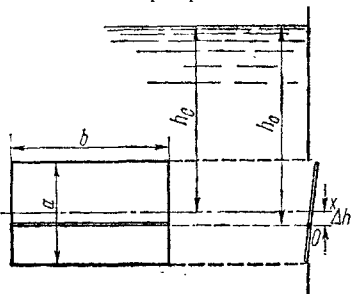


Рис. 28. К примеру 6.

(51), можно написать

$$\Delta h = h_O - h_C = \frac{l_C}{h_C S} = \frac{ba^3}{12abh_C} = \frac{a^2}{12h_C} = \frac{0,2^2}{12 \cdot 0,5} = 0,0067 \text{ м} = 6,7 \text{ мм.}$$

Величины  $\Delta h$  и  $h_C$  обратно зависимы. Наибольшее значение  $\Delta h$  отвечает случаю, когда верхний край отверстия совпадает с уровнем воды ( $h = a/2$ ). Тогда

$$\Delta h = a/6 = 0,2/6 = 0,033 \text{ м} = 33 \text{ мм.}$$

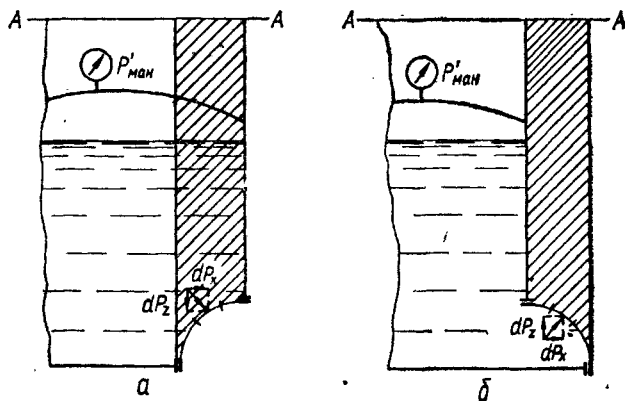
## § 14

### Сила давления жидкости на цилиндрические поверхности

Сила давления жидкости на плоскую стенку равна сумме элементарных сил, параллельных друг другу, поэтому их можно свести к одной равнодействующей.

Для неплоской (криволинейной) поверхности элементарные силы давления перпендикулярны соответствующей площадке, но не параллельны между собой. В общем случае они образуют систему сил, как угодно расположенных в пространстве; расчет сводится к определению главного вектора (сил) и главного момента (пары сил). Эта задача достаточно сложна. Поэтому ограничимся определением сил давления на цилиндрические поверхности, которые сводятся к одной равнодействующей.

Рис. 29. К определению силы давления жидкости на цилиндрическую поверхность.



Возьмем две цилиндрические поверхности с горизонтальной осью: на рис. 29, а показан случай, когда жидкость находится над стенкой, а на рис. 29, б — под ней.

Пусть избыточное давление на свободной поверхности жидкости с пьезометрической плоскостью  $A-A$  равно  $p_{\text{ман}}$ . Определим горизонтальную и вертикальную составляющие силы давления на рассматриваемые цилиндрические поверхности.

Выделим элементарную площадку  $dS$ . Нормальную к этой площадке элементарную силу  $dP$  разложим на две составляющие — горизонтальную  $dP_x$  и вертикальную  $dP_z$ :

$$dP_x = dP \cos(n, x);$$

$$dP_z = dP \cos(n, z),$$

или, учитывая формулу (45),

$$dP_x = p_{\text{ман}} \cos(n, x) dS;$$

$$dP_z = p_{\text{ман}} \cos(n, z) dS.$$

Как известно, произведение площади на косинус угла, который составляет нормаль к ней с некоторой осью, равно проекции этой площади на плоскость, перпендикулярную к оси, или

$$dS \cos(n, x) = dS_z;$$

$$dS \cos(n, z) = dS_x.$$

Следовательно, выражения для составляющих элементарных сил примут вид

$$dP_x = p_{\text{ман}} dS_z;$$

$$dP_z = p_{\text{ман}} dS_x.$$

Суммарные значения искомых составляющих будут:

$$P_x = \int_S p_{\text{ман}} dS_z;$$

$$P_z = \int_S p_{\text{ман}} dS_x.$$

Аналогично тому, как была выведена зависимость (45) для силы давления на плоскую стенку, получаем, что первый интеграл написанных соотношений равен

$$P_x = p_{\text{ман}C} S_z. \quad (52)$$

Таким образом, горизонтальная составляющая силы давления на цилиндрическую плоскость равна силе давления на вертикальную проекцию этой стенки.

Второй интеграл, т. е. вертикальные составляющие

$$P_z = \int_S p_{\text{ман}} dS_x = \int_S \rho g (h_p + h) dS_x$$

представляют собой вес жидкости в объеме так называемого тела давления, образованного данной стенкой, ее проекцией на пьезометрическую плоскость и вертикальными проектируемыми поверхностями. Цилиндрические поверхности на рис. 29 расположены перпендикулярно к чертежу, Поэтому тело давления на рисунке представлено плоской заштрихованной фигурой. В зависимости от расположения стенки по отношению к жидкости направление вертикальной составляющей силы может быть положительным (вниз — см. рис. 29, а) или отрицательным (вверх — см. рис. 29, б). Поэтому в общем виде этот интеграл записывается так:

$$P_z = \pm G = \pm mg = \pm \rho Vg, \quad (53)$$

где  $m$  и  $V$  — соответственно масса и объем тела давления.

В каждом конкретном случае направление (знак) вертикальной силы нетрудно установить, разложив нормальную силу давления, действующую на элемент площади стенки, на горизонтальную и вертикальную составляющие.

**Пример 7.** Определить силу, разрывающую болты полуцилиндрической крышки радиусом  $r = 0,5$  м, шириной в плоскости, перпендикулярной к чертежу,  $b = 2$  м и находящуюся под внутренним давлением  $p_{\text{ман}} = 50$  кПа (рис. 30).

Так как жидкость находится под крышкой, вертикальная составляющая силы давления направлена вверх и является разрывающей си-

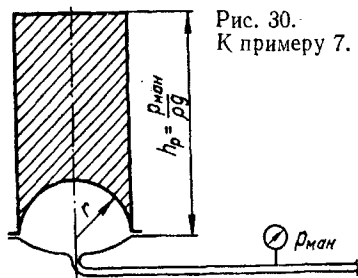
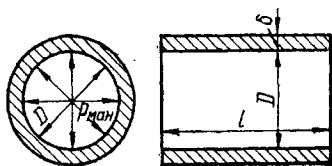


Рис. 30.  
К примеру 7.

Рис. 31. К определению напряжений на разрыв в цилиндрических резервуарах, находящихся под внутренним давлением.



лой. Для построения тела давления нанесем линию пьезометрической плоскости на высоте

$$h_p = \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} = \frac{50 \cdot 10^3}{1000 \cdot 10} = 5 \text{ м.}$$

Мысленно ограничим крышку вертикальными плоскостями. Разрез полученного тела давления на рисунке заштрихован. Искомая сила

$$\begin{aligned} P_z &= -\rho g V = \rho g \left( h_p - \frac{\pi r}{4} \right) 2rb = \\ &= 1000 \cdot 10 \left( 5 - \frac{\pi \cdot 0,5}{4} \right) 2 \cdot 0,5 \cdot 2 = 92,3 \cdot 10^3 \text{ Н} = 92,3 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Полученные зависимости для определения горизонтальной и вертикальной составляющих силы давления на цилиндрические поверхности можно распространить и на другие виды кривых стенок, в частности на сферические [17].

Для невесомой жидкости вертикальная и горизонтальная составляющие силы давления равны между собой:

$$P_n = p_{\text{ман}} S_n, \quad (54)$$

т. е. сила давления невесомой жидкости на неплоскую поверхность (кривую стенку) по заданному направлению  $n$  равна произведению избыточного давления на проекцию этой стенки на плоскость, перпендикулярную  $n$ .

Формула (54) прежде всего применяется для расчета толщины стенок котлов и трубопроводов. Сила давления на полуцилиндрическую поверхность длиной  $l$ , которая находится под внутренним давлением  $p_{\text{ман}}$  (рис. 31), равна силе давления  $P$  на диаметральную проекцию этой полосы:

$$P = p_{\text{ман}} D l.$$

Эта сила должна уравновешиваться силами упругости стенок трубы по площади  $2\delta l$ :

$$F = 2\sigma\delta l,$$

где  $\sigma$  — напряжения на разрыв. Следовательно,

$$p_{\text{ман}} D l = 2\sigma\delta l,$$

откуда искомая толщина стенки

$$\delta = p_{\text{ман}} D / (2\sigma). \quad (55)$$

## § 15

### Закон Архимеда

Определим результирующую силу давления жидкости (рис. 32, а) или газа (рис. 32, б) на тело произвольной формы, погруженное в данную среду. Проведем поверхность уровня  $O—O$  с давлением  $p_0$  и вертикальную цилиндрическую поверхность так, чтобы ее образующая касалась тела. Этим мы делим поверхность тела по контуру на две части: верхнюю  $KBC$  и нижнюю  $KDC$ . Найдем вертикальные составляющие силы давления на указанные части.

Сравнивая рис. 30 и рис. 32, убеждаемся, что поверхности уровня на рис. 32 играют ту же роль, что и пьезометрическая плоскость на рис. 30; различие состоит лишь в том, что избыточное давление в плоскости  $O—O$  на рис. 32 не равно нулю. Следовательно, формула (53) может быть применена и в данном случае с учетом силы давления  $F_0 = p_0 S$  на проекцию тела в плоскости  $O—O$ .

Вертикальная составляющая силы давления на поверхность  $KBC$

$$P_{z_{KBC}} = F_0 + \rho g V_{KBC}^{mn}$$

где  $V_{KBC}^{mn}$  — объем тела давления.

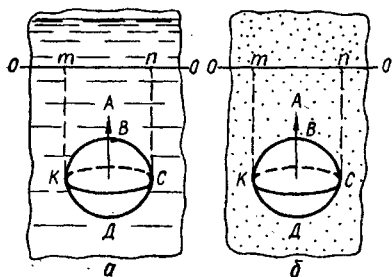
Вертикальная составляющая на поверхность  $KDC$

$$P_{z_{KDC}} = -(F_0 + \rho g V_{KDC}^{mn}).$$

Знак «минус» тут обусловлен правилом, приведенным в § 14 (рис. 29, б).

Вертикальная составляющая силы давления жидкости или газа на тело равна алгебраической сумме приведенных сил:

$$P_{z_{KBC}} + P_{z_{KDC}} = F_0 - F_0 + \rho g V_{KBC}^{mn} - \rho g V_{KDC}^{mn} = -\rho g V,$$



где  $V$  — объем тела (замкнутой поверхности).

Аналогично, проведя горизонтальную цилиндрическую поверхность так, чтобы ее образующая ка-

Рис. 32. К выводу закона Архимеда:

а — жидкая среда; б — газовая.

салась тела, нетрудно показать, что в горизонтальном направлении нет неуравновешенной силы давления жидкости на тело.

Итак, искома результирующая сила давления среды на тело (замкнутую поверхность)

$$A = -\rho gV = -mg = -G. \quad (56)$$

Эта формула и выражает закон Архимеда: *на всякое тело, которое находится в жидкой (газообразной) среде, действует сила, направленная вверх и равная весу жидкости (газа) в объеме тела (замкнутой поверхности)*. Эта сила  $A$  называется *выталкивающей*, или *архимедовой силой* \*.

Архимедову силу обычно учитывают только для твердых тел, погруженных в жидкость. В газах эта сила незначительна. Однако архимедова сила существенно проявляется в газовой среде разной плотности.

Если вес тела (замкнутой поверхности) больше архимедовой силы  $A$ , их равнодействующая направлена вниз и тело (замкнутая поверхность) погружается в данной среде. Наоборот, если вес тела (замкнутой поверхности) меньше силы  $A$ , тело поднимается вверх. На этом принципе основана конструкция воздушного шара, масса которого, включая оболочку, груз и легкий газ внутри шара, меньше веса воздуха в объеме шара. Этим же объясняется искривление вверх траекторий теплых струй, имеющих первоначально в холодном воздухе горизонтальное направление. Следовательно, *условие подъема массы* внутри замкнутой поверхности в жидкой или газообразной среде выразится неравенством

$$A \geq G.$$

При выходе твердого тела на свободную поверхность капельной жидкости выталкивающая сила уменьшится в соответствии с уменьшением объема погруженной части тела, в результате чего тело будет плавать на свободной

---

\* В сантехнике вместо термина «архимедова сила» часто применяют термин «подъемная сила». Однако его нельзя признать удачным, поскольку в аэродинамике общепринятым является понятие подъемной силы как нормальной составляющей к направлению течения при обтекании тел.



поверхности. Условие плавания может быть записано так:

$$\rho g V_{\pi} = mg, \quad (57)$$

где  $V_{\pi}$  — объем погруженной части тела.

По этому условию рассчитывают поплавковые устройства сливных бачков и другое сантехническое оборудование.

## § 16

### Равновесие газа с учетом его сжимаемости

До сих пор при изучении законов равновесия газ рассматривался как несжимаемая жидкость ( $\rho = \text{const}$ ). Выведем теперь основное уравнение газостатики, учитывая влияние сжимаемости газа ( $\rho \neq \text{const}$ ). Дифференциальное уравнение равновесия (23) для переменной плотности среды после интегрирования примет вид

$$\int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{const}. \quad (58)$$

Для вычисления интеграла  $\int \frac{dp}{\rho}$  необходимо задать закон изменения состояния газа. Примем, что температура постоянна:  $T = \text{const}$  (изотермический закон). Тогда уравнение состояния (9) примет вид

$$\rho = p/(RT) = p/C,$$

откуда

$$C = p/\rho,$$

где  $C$  — постоянная величина.

Подставив последнее соотношение в уравнение (58), находим

$$C \ln p + gz = \text{const},$$

или

$$gz + \frac{p}{\rho} \ln p = \text{const}. \quad (59)$$

Полученное уравнение газостатики (59) отличается от основного уравнения гидростатики (24) тем, что давление газа по высоте с учетом его сжимаемости в изотермических условиях распределяется не по линейному, а по *логарифмическому* закону.

Указанная разница невелика даже при значительном изменении высоты. Чтобы убедиться в этом, сделаем следующие преобразования. Напишем уравнение (58) для двух высот ( $z_0$  и  $z$ ):

$$gz + \frac{p}{\rho} \ln p = gz_0 + \frac{p_0}{\rho_0} \ln p_0,$$

откуда  $g(z - z_0) = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p_0}{p}$ .

Обозначив  $z - z_0 = h$  и  $\frac{p_0}{\rho_0 g} = H$ , а также учитывая, что  $\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$ , получим

$$h = H \ln \frac{p_0}{p},$$

откуда

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{h}{H}}.$$

Разложим правую часть последнего равенства в степенной ряд:

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \frac{h}{H} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{H} \right)^2 + \dots$$

Первые два слагаемых этого ряда дают основное уравнение гидростатики в форме (26). Действительно,

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \frac{h}{H} = 1 - h \frac{\rho_0 g}{p_0} = \frac{p_0 - \rho_0 g h}{p_0},$$

откуда

$$p = p_0 - \rho_0 g h,$$

или, считая  $\rho_0 \approx \rho$ ,

$$p = p_0 - \rho g h.$$

Таким образом, ошибка при вычислении давления по формуле гидростатики (26) для несжимаемой жидкости не превышает  $\frac{1}{2} \left( \frac{h}{H} \right)^2$ , т. е.

$$\left| \Delta \frac{p}{p_0} \right| < \frac{1}{2} \left( \frac{h}{H} \right)^2.$$

Если задаться допустимой ошибкой в 1%, или  $\frac{1}{2} \left(\frac{h}{H}\right)^2 = 0,01$ , то  $\frac{h}{H} = \sqrt{\frac{1}{50}} = \frac{1}{7,1}$ . При стандартной плотности воздуха  $\rho_0 = 1,2 \text{ кг/м}^3$  и нормальном давлении атмосферы ( $p_0 = 101\,325 \text{ Па}$ )

$$H = \frac{101\,325}{1,2 \cdot 9,8} = 8500 \text{ м,}$$

откуда

$$h = \frac{8500}{7,1} = 1200 \text{ м.}$$

Итак, распределение давления воздуха в поле сил тяжести при изотермических условиях с ошибкой не более 1% можно определять, рассматривая газ как несжимаемую жидкость ( $\rho = \text{const}$ ) при изменении высоты до 1200 м. Приблизительно такой же результат получится и при задании другого закона изменения состояния газа по высоте (например, адиабатического).

Поскольку в задачах газоснабжения и вентиляции встречаются значительно меньшие перепады высот, ошибка при применении уравнений гидростатики будет незначительной, что и оправдывает их применение в данном случае при рассмотрении условий равновесия воздуха (газа).

### Глава III

## ДВИЖЕНИЕ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОАЭРОДИНАМИКИ)

### § 17

#### Основные понятия кинематики жидкости

Раздел механики жидкости, изучающий законы ее движения, называют **гидроаэродинамикой**.

Легкоподвижность жидкости требует знания поведения каждой ее частицы, что создает большие трудности при исследовании движения. Поэтому изучение движения жидкости обычно начинают с абстрактной модели *невязкой* жидкости, теорию движения которой можно считать достаточно разработанной.

Ограничимся рассмотрением только *несжимаемой* жидкости.

Как и в механике твердого тела, сначала изучают виды движения, не касаясь вопроса о силах, вызывающих эти движения (кинематика), а уже затем рассматривается движение как результат действия сил (динамика).

**Поле скоростей.** Движение жидкости можно изучать способом Лагранжа или способом Эйлера.

В первом случае рассматривают поведение частиц жидкости, перемещающихся в пространстве и непрерывно изменяющих свои координаты. Поскольку таких частиц бесконечное множество, этот метод исследования сложен.

Обычно пользуются способом Эйлера, при котором наблюдают, что происходит с движущейся жидкостью в данных точках пространства в определенные моменты времени.

Представим себе пространство, занятое движущейся жидкостью. Через каждую его точку проходят частицы с той или иной скоростью, характеризуемой вектором  $u$  и проекцией его модуля на оси координат  $u_x, u_y, u_z$ . В различных точках пространства скорости различны, т. е. *пространство образует векторное поле скоростей*, для которого применима общая теория физического поля.

Итак, вектор скорости является функцией расположения данной точки пространства и времени:

$$u = F(r, t), \quad (60)$$

где радиус-вектор выражается через единичные векторы (орты) по осям координат:

$$r = u_x i + u_y j + u_z k.$$

При записи в проекциях

$$\left. \begin{aligned} u_x &= f_1(x, y, z, t); \\ u_y &= f_2(x, y, z, t); \\ u_z &= f_3(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

**Конвективное и локальное ускорения.** Математическое выражение ускорения можно получить, взяв полную производную по времени от функциональной зависимости (60) с учетом элементарного перемещения частицы жидкости  $dr$  при переходе от точки к точке. Полный дифференциал вектора скорости как функции двух переменных  $r$  и  $t$  равен

сумме частных дифференциалов:

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Чтобы найти ускорение  $w$ , нужно изменение скорости  $du$  разделить на  $dt$ :

$$w = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dt}.$$

$$\text{Поскольку } \frac{dr}{dt} = u, \quad w = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Используя символическую запись пространственного дифференцирования

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k,$$

получим

$$w = (u \nabla) u + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (62)$$

Первое слагаемое уравнения (62) характеризует изменение скорости при перемещении частиц жидкости из одной точки пространства в другую и называется *конвективным ускорением*; второе слагаемое характеризует изменение скорости во времени в данной точке и называется *локальным ускорением*.

**Установившееся и неустановившееся движения.** Если поле скоростей не меняется с течением времени, движение называется *установившимся* (стационарным). В этом случае характеристики движения изменяются только при переходе от точки к точке пространства и функциональная зависимость для скорости примет вид

$$u = F(r). \quad (63)$$

В проекциях на оси координат

$$\left. \begin{aligned} u_x &= f_1(x, y, z); \\ u_y &= f_2(x, y, z); \\ u_z &= f_3(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Таким образом, при установившемся движении локальные ускорения равны нулю и полное ускорение равно конвективному:

$$w = (u \nabla) u. \quad (65)$$

Типичными примерами установившегося движения являются: истечение воды через отверстие в резервуаре при постоянном уровне или из крана при постоянном давлении, течение во всасывающих и нагнетательных линиях центробежных насосов и вентиляторов, работающих при постоянных числе оборотов и производительности, течение в распределительной водопроводной или газовой сети при неизменном характере работы потребителей, обтекание потоком воздуха зданий при постоянной скорости ветра.

В общем случае, когда характеристики скоростного поля изменяются с течением времени и справедливы зависимости (60), (61), движение называется *неустановившимся* (нестационарным). Примерами такого движения могут быть процессы наполнения и опорожнения резервуаров газохранилищ, течение в трубопроводах при быстром открытии или закрытии запорных органов, течение в поршневых насосах и компрессорах, обтекание зданий при порывистом ветре.

Изучение неустановившихся движений значительно сложнее установившихся. Мы ограничимся изучением только установившихся движений\*.

**Линии тока.** Представим себе в векторном поле скоростей ряд линий, скорости к которым касательны в любой точке (рис. 33). Такие линии и образуют линии тока. Следовательно, *линия тока представляет собой кривую, в каждой точке которой в данный момент времени вектор скорости жидкости касателен к кривой.*

Не следует смешивать понятия линии тока и траектории движущихся частиц. Касательные к траектории дают направление скорости частицы в последовательные моменты времени, между тем как касательные к линиям тока характеризуют направление скоростей разных частиц в определенный момент времени. Таким образом, при неустановившемся движении, когда линии тока изменяют свое положение в про-

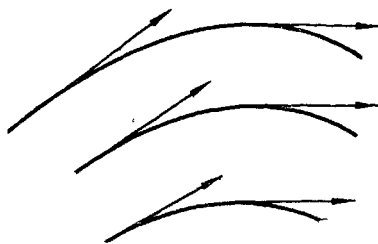


Рис. 33. Линии тока.

\* Исключением является § 59, где рассматривается типичный случай неустановившегося движения капельной жидкости — гидравлический удар.

пространстве с течением времени, траектории и линии тока не совпадают между собой. При установившемся движении, когда линии тока не меняют своего положения в пространстве с течением времени, траектории и линии тока совпадают. В этом случае компоненты скорости в декартовой системе координат  $u_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $u_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $u_z = \frac{dz}{dt}$  и дифференциальное уравнение линий тока

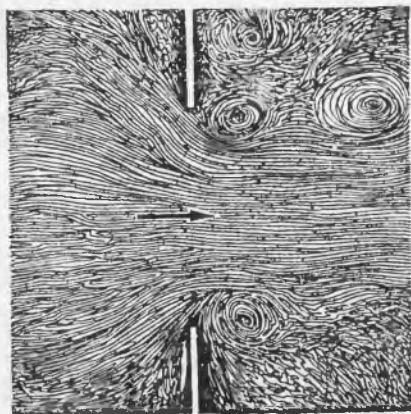
$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} . \quad (66)$$

Представление о линиях тока возникает непосредственно из наблюдений за движением жидкости. Для этого нужно сделать течение видимым. Подмешаем, например, в воду алюминиевый порошок. Фотографический снимок, сделанный с небольшой выдержкой, покажет путь частицы индикатора в виде короткого штриха. Каждый штрих можно рассматривать как вектор скорости. Совокупность штрихов образует семейство линий тока, которые в целом дают наглядную картину течения (рис. 34).

Движение воздуха можно сделать видимым с помощью дыма или тлеющих опилок.

Из определения линии тока также следует, что через каждую точку пространства может проходить только одна линия тока или, иначе говоря, *линии тока не пересекаются*.

Геометрическую картину движущейся жидкости в виде семейства линий тока, дающую представление о характере движения, называют *спектром течения*.



**Поток вектора и расход.** В теории поля потоком вектора сквозь некоторую поверхность  $S$  называется интеграл от проекции этого вектора на нормаль к каждому элементу данной поверхности:

$$Q = \int_S u_n dS. \quad (67)$$

Рис. 34. Визуализация линий тока.

В гидроаэродинамике поток вектора скорости представляет собой объем жидкости, которая протекает через рассматриваемую поверхность за 1 с. Действительно, объем цилиндра с основанием  $dS$  и высотой  $u_n$  равен объему жидкости, вытекающей из элемента поверхности за 1 с (рис. 35). Сумма же этих элементарных объемов образует секундный объем  $Q$ , который называется *расходом* жидкости.

Поток вектора — величина скалярная. Знак вектора зависит от ориентации поверхности  $S$ . На рис. 35 элементарный цилиндр построен на наружной поверхности, где жидкость как бы вытекает из нее, поэтому в данном случае поток считается положительным; если направление проекции скорости изменить на обратное, элементарный цилиндр строится на внутренней стороне поверхности, где жидкость как бы втекает в нее и потоку приписывается знак «минус».

Умножив подынтегральное выражение (67) на плотность жидкости  $\rho$ , получаем поток вектора «массовой скорости»

$$M = \int_S \rho u_n dS, \quad (68)$$

который представляет собой массу жидкости, проходящую сквозь поверхность  $S$  за 1 с.

**Дифференциальное уравнение неразрывности.** Выделим внутри пространства с движущейся жидкостью неподвижный контур в форме элементарного параллелепипеда с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 36). Обозначим скорость жидкости, которая втекает в левую грань параллелепипеда, через  $u_x$ . Скорость жидкости, вытекающей из правой грани, вслед-

Рис. 35. Поток вектора через поверхность.

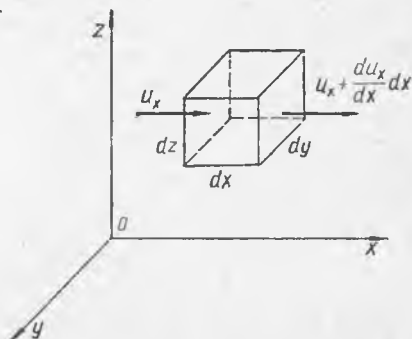
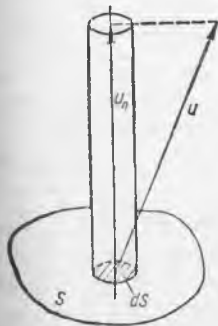


Рис. 36. К выводу уравнения неразрывности.



ствии непрерывности поля скоростей равна  $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$ . Поскольку рассматриваемый элементарный объем неподвижен, изменение скорости не зависит от времени. В направлении оси  $x$  через левую грань втечет за 1 с жидкость массой  $(-\rho u_x dydz)$ , а вытечет через правую грань  $[\rho (u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx) \times dydz]$ . Значит, за 1 с из параллелепипеда вытекает в направлении оси  $x$  жидкости больше, чем втекает, на  $\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} \times dx dydz$ . Аналогичные выражения получаются и для направлений  $y$  и  $z$ . Закон сохранения массы требует, чтобы сумма трех полученных приращений была равна нулю:

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz + \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz + \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz = 0.$$

Для несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$ , поэтому после сокращения на  $\rho dx dy dz$  получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (69)$$

т. е. расход несжимаемой жидкости в данной точке, отнесенный к единице объема (или объемное расширение несжимаемой жидкости), равен нулю.

В теории поля левая часть выражения (69) называется *расходимостью*, или *дивергенцией вектора скорости* ( $\text{div } u$ );

$$\text{div } u = 0.$$

**Деформация и вращение частиц.** Если движение твердого тела в общем случае складывается из поступательного и вращательного движений, то жидкая частица при своем перемещении не только двигается поступательно и вращательно, но и деформируется.

Рассмотрим движение элементарной частицы в форме элементарного параллелепипеда с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  за элементарный промежуток времени  $dt$ . Поскольку расстояния, которые преодолевает частица за единицу времени, пропорциональны скоростям, исследование поведения частицы для несжимаемой жидкости сводится к изучению величин скоростей в разных точках внутри выделенного объема жидкости. За элементарный промежуток времени рассматриваемый параллелепипед переместится в новое положение. При этом вследствие разных скоростей точек он не только перемещается в пространстве, но и изменяет свою первоначаль-

ную ориентацию и форму. Схематически этот процесс можно иллюстрировать, рассматривая грань параллелепипеда, где перемещение сведено к следующим движениям (рис. 37): *a* — параллельный перенос; *b* — линейная деформация (изменение длины каждой пары сторон); *в* — угловая деформация (изменение каждого из четырех углов грани); *г* — поворот грани (как вращение твердого тела). Можно показать, что деформация и вращение выражаются соответственно полусуммой и полуразностью накрест взятых производных (для данной грани  $\frac{\partial u_y}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ ).

Условие вращения частиц записывается в проекциях на оси координат так:

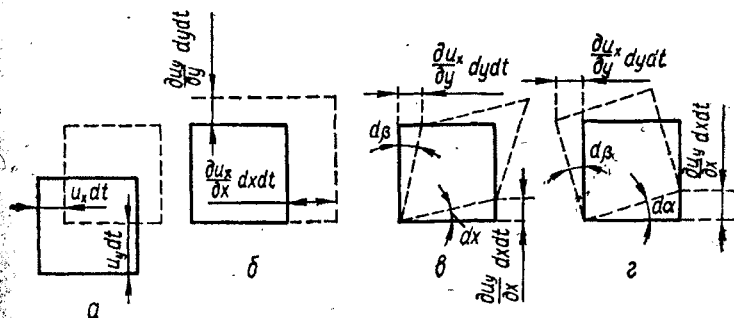
$$\left. \begin{aligned} 2\Omega_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}; \\ 2\Omega_y &= \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ 2\Omega_z &= \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

где  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  — компоненты угловой скорости вращения частицы. В теории поля вектор, компоненты которого характеризуются удвоенными значениями ( $2\Omega_x, 2\Omega_y, 2\Omega_z$ ), называется *вихрем* и обозначаются  $\text{rot } u$ .

**Вихревое и безвихревое движение.** Различают движение жидкости с вращением и без вращения частиц. Если вихрь

Рис. 37. Деформация частицы жидкости при ее движении:

*a* — перемещение; *b* — линейная деформация; *в* — угловая деформация; *г* — вращение.



отличается от нуля, т. е.

$$\operatorname{rot} u \neq 0, \quad (71)$$

движение называют *вихревым*. Если же вращение частиц отсутствует, движение называют *безвихревым*. Аналитически условие безвихревого движения записывается в векторной форме

$$\operatorname{rot} u = 0, \quad (72)$$

или в компонентах накрест взятых производных скорости

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

**Потенциал скорости.** Введем для установившегося движения некоторую скалярную функцию координат  $\varphi(x, y, z)$ , частные производные которой по соответствующим координатным осям дают компоненты скорости, т. е.

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (74)$$

Эта функция удовлетворяет условиям безвихревого движения. Действительно, продифференцируем уравнение (74) соответственно по  $z, x, y$ :

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z};$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x};$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}$$

и по  $y, z, x$ :

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}.$$

Величина вторых производных не зависит от порядка дифференцирования. Поэтому, сравнивая обе системы написанных равенств, находим условие (73), что и является признаком безвихревого движения.

Функция  $\phi$ , определенная указанным образом, обладает свойством потенциальной функции и называется *потенциалом скоростей*. Соответственно безвихревое движение называют также потенциальным. Введение понятия потенциала скорости дает возможность заменить векторное поле скоростей скалярным полем  $\phi$ , что значительно упрощает исследование.

**Понятия вихревого движения.** Пространство, в котором происходит вихревое движение, образует векторное вихревое поле, компоненты которого определяются выражениями (70). При изучении этого поля применяются понятия, аналогичные понятиям поля скоростей. *Линия, касательная к которой в любой ее точке совпадает с направлением вектора вихря, называется вихревой линией* (рис. 38). Частицы жидкости, расположенные вдоль вихревой линии, вращаются вокруг касательных к ней в соответствующих точках. Вихревая линия является криволинейной осью вращения этих частиц. Наглядное представление о вихревой линии (по Н. Е. Жуковскому) дают бусинки, нанизанные на нитку.

Отметим, что в общем случае вихревые линии не совпадают с линиями тока. Можно доказать, что вихревые линии являются замкнутыми и не могут обрываться внутри жидкости и заканчиваться на ее границах. Примерами этого служат смерч (точнее — его ядро), который упирается своими концами в поверхность земли (воды) и облака, обра-

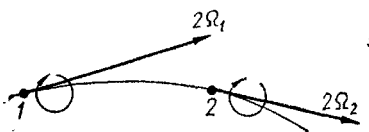


Рис. 38. К понятию вихревого движения.

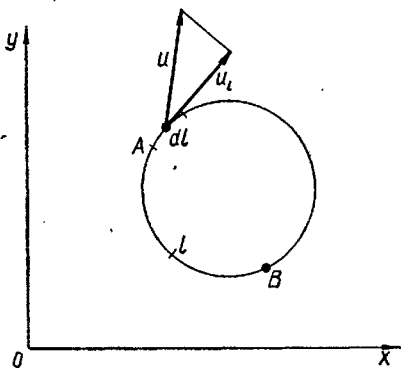


Рис. 39. К понятию циркуляции.

зование воронок в открытых водяных потоках (верхние концы этих воронок заканчиваются на свободной поверхности, а нижние — на дне русла).

С характеристикой вихревого поля тесно связано понятие *циркуляции*, которое определяется как криволинейный интеграл вектора скорости, взятый вокруг замкнутой кривой (рис. 39):

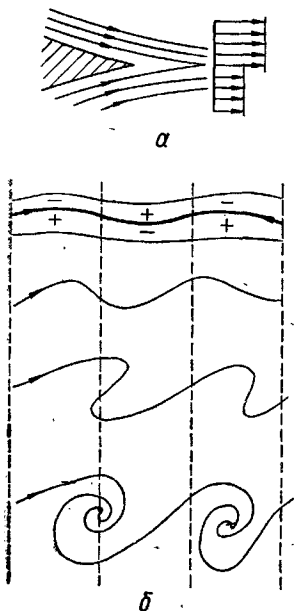
$$\Gamma = \oint u_i dl. \quad (75)$$

В потенциальных течениях циркуляция скорости равна нулю.

Примерами вихревых движений могут служить кружение опавших листьев при ветре за углом дома, образование вихревых движений позади мостовых опор на реке, дымовые кольца, которые срываются с краев выхлопных труб двигателей внутреннего сгорания.

Особое значение имеют вихревые движения при изучении местных сопротивлений в трубах (см. гл. V, § 42).

Возникновение вихревых движений по Прандтлю связано с образованием и распадом *поверхностей раздела*. Такого рода поверхности могут возникнуть, например,



при слиянии двух течений с различными скоростями (рис. 40, а). По поверхности раздела происходит как бы скачок скорости. В результате воздействия какого-нибудь случайного возмущения поверхность раздела начинает искривляться, принимая волнообразную форму. В дальнейшем деформация поверхности раздела нарастает (иллюстрацией такого процесса может служить колебание полотнища флага при ветре); постепенно поверхность раздела закручивается, образуя вихрь. Затем этот вихрь под воздействием течения уплывает, а на его месте образуется новый

Рис. 40. Схема распада поверхности раздела на вихри по Прандтлю:

а — скачок скорости на поверхности раздела; б — процесс образования вихрей.

вихрь. Схематически описанное явление в разных его фазах показано на рис. 40, б\*.

В заключение необходимо подчеркнуть, что, хотя теория вихревых движений базируется на модели невязкой жидкости, первопричиной вращения частиц является внутреннее трение, т. е. вязкость жидкости.

## § 18

### Кинематика плоских потенциальных течений

При плоском течении частицы жидкости движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости со скоростями, не зависящими от расстояния до этой плоскости. Другими словами, плоское течение определяется двумя координатами пространства ( $x$  и  $y$ ) и поэтому его также называют двумерными. Такое ограничение упрощает исследование благодаря уменьшению числа неизвестных, а также дает возможность применения эффективных математических приемов (метод конформных преобразований).

Характер многих течений, встречающихся в практике, приближается к плоским. Это прежде всего относится к обтеканию достаточно длинных тел, когда течение нормально к их образующим (ребрам).

**Уравнение Лапласа.** Для плоских течений дифференциальное уравнение неразрывности (69) переходит в

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (76)$$

а при условии потенциальности (73) в

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0. \quad (77)$$

Подставив в уравнение неразрывности (76) вместо частных производных компонентов скорости их выражения через потенциал скорости ( $u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ;  $u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ), получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (78)$$

\* Знаки « $\rightarrow$ » и « $\leftarrow$ » на рис. 40, б означают уменьшение давления в местах сгущения линий тока и его увеличение, где линии тока расходятся (см. § 21); эта разность давлений имеет тенденцию возрастать со временем, что содействует распаду на вихри.

Это уравнение называется *уравнением Лапласа*. Решение его для заданных граничных условий дает семейство линий равного потенциала скорости

$$\varphi(x, y) = C. \quad (79)$$

Задавая различные значения постоянной  $C$ , находим различные линии равного потенциала, принадлежащие данному семейству.

Вдоль линии равного потенциала  $d\varphi = 0$ :

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = 0.$$

С учетом уравнения (74) можно написать:

$$u_x dx + u_y dy = 0,$$

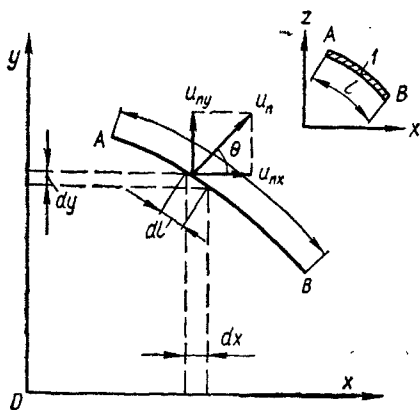
откуда дифференциальное уравнение линий равного потенциала

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}. \quad (80)$$

**Функция тока.** Будем считать, что при установившемся движении существует функция

$$\Psi(x, y) = C,$$

где каждому значению постоянной  $C$  отвечает конкретная линия тока. Иначе говоря, эта зависимость является уравнением семейства линий тока. Вдоль линии тока эта функция не меняет своего значения, т. е.  $\Psi = \text{const}$ , или  $d\Psi = 0$ . Следовательно, вдоль линии тока



$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy = 0. \quad (81)$$

Для установившегося движения линии тока совпадают с траекториями движущихся частиц и описываются уравнением (66), которое в дан-

Рис. 41. К пояснению физического смысла функции тока.

ном случае можно записать так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x}, \quad (82)$$

или

$$u_x dy - u_y dx = 0.$$

Сравнивая уравнения (81) и (82) для линии тока, находим аналитическое условие для функции тока:

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad u_y = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (83)$$

Выясним физический смысл функции тока. Возьмем произвольный отрезок кривой  $AB$  и составим выражение для потока вектора через эту кривую. Представим, что его толщина равна 1 в плоскости, нормальной к чертежу (рис. 41), поэтому площадь поверхности, которая соответствует отрезку кривой  $l$ , равна  $l \cdot 1$  (на рис. 41 эта поверхность показана в плоскости  $ZX$  справа). Поток вектора скорости сквозь элементарную площадку длиной  $l$  при скорости  $u_n$ , нормальной к этому элементу,

$$dq = u_n dl \cdot 1,$$

а через всю кривую [см. формулу (67)]

$$q = \int_l u_n dl. \quad (84)$$

Эта величина характеризует также *расход жидкости в плоском потоке*.

Определим скорость  $u_n$  через проекции на координатные оси, обозначив через  $\Theta$  угол, который образует вектор  $u_n$  с осью  $x$ . Как следует из рис. 41,

$$u_n = u_{nx} \cos \Theta + u_{ny} \sin \Theta$$

и

$$-dy = dl \cos \Theta; \quad dx = dl \sin \Theta.$$

Подставляем эти соотношения в уравнение для элементарного расхода  $dq$  и находим, что

$$dq = u_n dl = u_{ny} dx - u_{nx} dy,$$

или, используя уравнение (83),

$$dq = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = d\Psi.$$



Таким образом, дифференциал функции тока равен расходу жидкости сквозь элементарный участок кривой. Расход через весь участок кривой  $AB$

$$q = \int_A^B d\Psi = \Psi_A - \Psi_B, \quad (85)$$

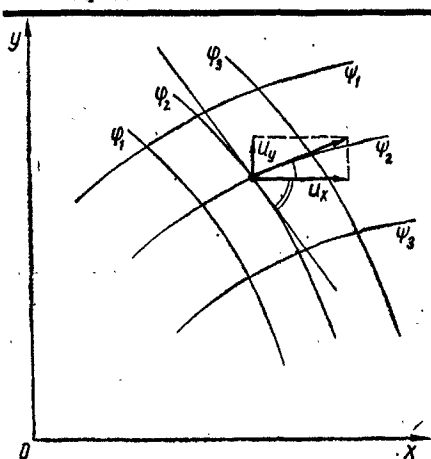
т. е. расход жидкости через произвольный отрезок кривой  $AB$  равен разности значений функций тока на ее границах и не зависит от формы кривой. Следовательно, если кривая  $AB$  представляет собой участок линии тока, то расход через нее  $q = 0$  (поскольку вдоль линии тока  $\Psi = \text{const}$ ). Полученное выражение (85) также показывает, что расход между двумя линиями тока на всем их протяжении представляет постоянную величину.

Функция тока  $\Psi$  для потенциального течения, как и потенциал скорости  $\phi$ , удовлетворяет уравнению Лапласа. Действительно, взяв условие потенциальности (77) и выражения для компонентов скорости через функцию тока (83), получим

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (86)$$

Понятие функции тока свойственно (за некоторыми исключениями) только плоским течениям и применимо также для изучения течений, не обладающих потенциалом скоростей.

**Гидродинамическая сетка.** Линии тока и линии равного



потенциала ортогональны между собой. Действительно, угловые коэффициенты для этих линий в соответствии с выражениями (82) и (80)

$$a_1 = u_y/u_x;$$

$$a_2 = -u_x/u_y,$$

откуда  $a_1 a_2 = -1$ , что и является признаком ортогональности рассматриваемых кривых.

Рис. 42. Гидродинамическая сетка.

Таким образом, линии тока и линии равного потенциала образуют *гидродинамическую сетку движения*, которая полностью определяет кинематическую картину самого движения (см. рис. 42). При этом векторы скорости касательны к линиям тока и нормальны к линиям равного потенциала.

Функции  $\varphi$  и  $\Psi$  являются сопряженными, т. е. гидродинамическая сетка не изменится, если линии тока принять за линии равного потенциала, однако при этом само движение будет совсем другим (сравните рис. 45 и рис. 47).

Чтобы построить точную гидродинамическую сетку при заданных граничных условиях, необходимо решить уравнение Лапласа (78) или (86), что представляет значительные математические трудности. В некоторых случаях точное решение получается с помощью теории функций комплексного переменного (метод конформных преобразований). Имеются приближенные графические способы построения гидродинамической сетки. В последние годы в связи с бурным развитием вычислительной техники получают распространение численные способы решения уравнений Лапласа.

## § 19

### Примеры плоских потенциалных течений

Учитывая специфические трудности, связанные с решением уравнений Лапласа, большой интерес представляют те случаи потенциалных течений, которые дают точные значения функции тока и потенциала скорости без решения этих уравнений. Общая методика такова: задаемся произвольной функцией, которая удовлетворяет уравнению Лапласа, а затем выясняем, какой гидродинамической сетке она отвечает. Разберем несколько характерных примеров.

**Плоскопараллельный поток.** Задаемся линейной функцией тока вида

$$\psi = ax + by. \quad (87)$$

Это уравнение удовлетворяет уравнению Лапласа. Действительно,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Уравнение линий тока

$$ax + by = C$$

дает ряд параллельных прямых с угловым коэффициентом  $-a/b$ .  
Из выражения (83)

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = b; \quad u_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -a.$$

Уравнение линий равного потенциала с учетом уравнения (80)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} = \frac{b}{a},$$

или, после интегрирования,

$$ay = bx + C,$$

что дает ряд прямых с угловым коэффициентом  $b/a$ , перпендикулярных линиям тока. Линии равного потенциала можно было получить сразу, учитывая свойство ортогональности между линиями тока и линиями равного потенциала.

На рис. 43, *a* представлена схема плоскопараллельного течения, а на рис. 43, *б* — частный случай течения, параллельного оси  $x$  ( $\Psi = by$ ).

**Обтекание преграды.** Рассмотрим гиперболическую функцию

$$\Psi = axy, \tag{88}$$

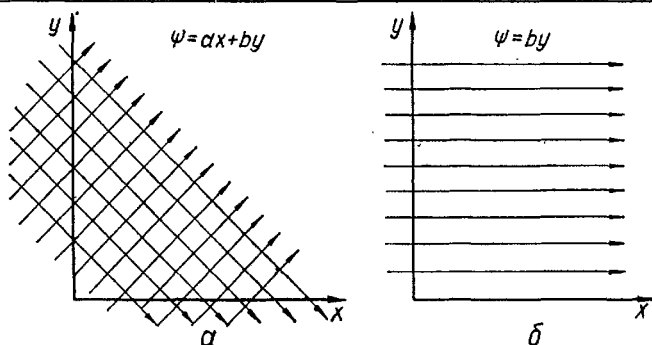


Рис. 43. Плоскопараллельный поток:

*a* — общий случай; *б* — течение, параллельное оси  $x$ .

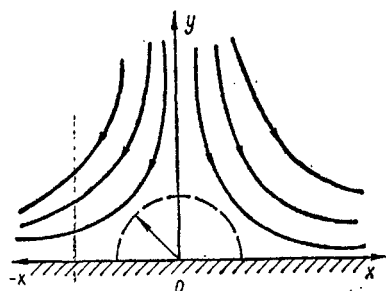


Рис. 44. Обтекание преграды.

удовлетворяющую уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0.$$

Уравнение линий тока

$$xy = C$$

характеризует семейство равносторонних гипербол с осями  $x$  и  $y$ , которые являются их асимптотами. Если принять ось  $x$  как преграду, асимптота  $x = 0$ , т. е. ось  $y$  (при этом  $C = 0$ ) отвечает центральной линии тока. При отрицательных значениях  $C$  линии тока располагаются левее оси  $y$ . Общая картина течения при обтекании преграды представлена на рис. 44.

Составляющие вектора скорости:

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = ax; \quad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ay,$$

откуда получаются и направления линий тока, показанные на рис. 44 стрелками.

Модуль скорости

$$u = a \sqrt{x^2 + y^2} = ar$$

определяется расстоянием от данной точки до точки  $O$  и прямо пропорционален ему. Таким образом, скорость центральной линии тока постепенно уменьшается к центру  $O$  и в пределе при  $r \rightarrow 0$  скорость также стремится к нулю.

Уменьшение скорости при подходе к препятствию полностью подтверждается экспериментом.

Если обе асимптоты  $x$  и  $y$  принять за стенки, получим картину обтекания прямого угла.

Изменяя вид гиперболической функции (88), можно получить спектры обтекания острого и тупого угла или пластинки [13].

Итак, исследование течений, описываемых функцией (88), показывает, что жидкость обтекает препятствие, а не ударяется о него.

**Источник (сток) на плоскости.** Рассмотрим течение, функция тока которого определяется выражением

$$\Psi = \pm \frac{q}{2\pi} \Theta, \quad (89)$$

где  $q$  — постоянная;  $\Theta$  — угол радиуса-вектора в полярных координатах. Читателю самому предлагается убедиться в том, что эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа.

Задавая различные значения  $\Theta$  в пределах от 0 до  $2\pi$ , получаем линии тока в виде пучка прямых, выходящих из центра  $O$ . При этом линии равного потенциала — концентрические окружности относительно этого же центра. Если линии тока направлены от центра к периферии (рис. 45, а), жидкость как бы вытекает из точки  $O$ . В этом случае течение называют *источником на плоскости*. Если же линии тока

направлены от периферии к центру (рис. 45, б), жидкость как бы втекает в точку  $O$ , а течение называют *стоком на плоскости*.

При полном вращении радиуса-вектора вокруг точки  $O$ , когда приращение полярного угла  $\Theta$  составляет  $2\pi$ , функция тока получает приращение  $q$ . Вспомнив выражение (84) для расхода в плоском потоке, убеждаемся, что постоянная  $q$  представляет собой расход жидкости сквозь цилиндрическую поверхность, охватывающую источник (сток) и имеющую единичную высоту.

Описанное движение можно еще трактовать как непрерывное вытекание или втекание в каждую точку прямой, нормальной к плоскости чертежа, и поэтому его также называют *линейным источником (стоком)*. Если представить, что поток вытекает или втекает в точку  $O$  в пространственных условиях, движение называют *источником (стоком) в пространстве*.

Практически движение в виде источника (стока) в точности осуществить не удастся. Однако во многих случаях можно пользоваться идеализированной схемой. Например, работа всасывающих щелей вытяжных вентиляционных устройств приближается к плоскому (линейному) стоку.

На основании уравнения (84) легко найти скорость течения

$$u = q/(2\pi r), \quad (90)$$

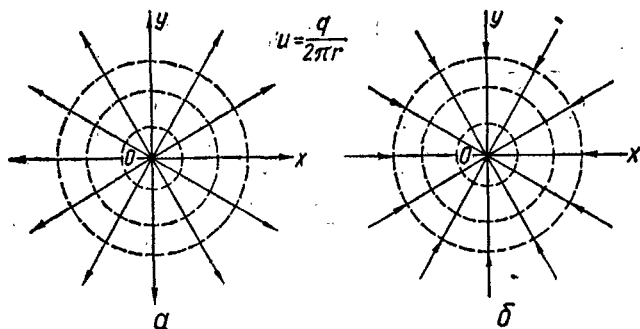
где  $r$  — расстояние от данной точки течения до центра  $O$ . Из этой формулы следует, что скорость обратно пропорциональна расстоянию от центра. Центр  $O$  является особой точкой поля скоростей (при  $r \rightarrow 0$   $u \rightarrow 0$ ), где расход  $q$  внезапно появляется (источник) или исчезает (сток).

**Пример 8.** Определить скорость течения воздуха на расстоянии 1 м от всасывающей щели шириной  $b = 0,3$  м, ограниченной двумя плоскостями (щитами) под углом  $\Theta = \pi/6$  (рис. 46), при скорости в щели  $u_1 = 10$  м/с.

Рассматриваем данное течение как линейный сток. Тогда расход на 1 м длины щели в плоскости, перпендикулярной к чертежу, по формуле (84)

$$q = u_1 b = 10 \cdot 0,3 = 3 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Рис. 45. Источник и сток на плоскости.



Тот же расход пройдет на расстоянии  $r = 1$  м сквозь цилиндрическую поверхность высотой 1 м и длиной  $\Theta r$ . Поэтому искомая скорость течения по формуле (90) с учетом того, что в данном случае полярный угол равен  $\pi/6$ ,

$$u_2 = \frac{q}{(\pi/6)r} = \frac{6 \cdot 3}{\pi \cdot 1} = 5,7 \text{ м/с.}$$

Следует иметь в виду, что такой расчет уже не годится для области вблизи самой щели (приблизительно на расстоянии ширины  $b$ ).

**Циркуляционное течение.** Рассмотрим течение, сопряженное со стоком (источником). В этом случае гидродинамическая сетка остается без изменения, но линии тока и равного потенциала меняются местами. При таком течении частицы жидкости движутся по concentрическим окружностям вокруг центра  $O$ , поэтому его называют *циркуляционным* (рис. 47). При этом сами частицы не вращаются вокруг своих осей, поскольку в целом поток безвихревой (потенциальный).

Линейная скорость движения частиц вокруг центра  $O$  согласно уравнению (75)

$$u = \Gamma/(2\pi r) \quad (91)$$

При циркуляционном течении, как и в случае источника (стока), скорости возрастают по мере приближения к центру. При этом произведение линейной скорости на расстояние движущейся частицы от центра остается постоянным:

$$ur = \text{const.} \quad (92)$$

Поскольку произведение  $ur$  пропорционально площади треугольника, построенного с основанием  $u$  при вершине в центре  $O$ , зависимость (92) часто называют *законом площадей*.

Циркуляционное движение с некоторым приближением осуществляется в циклоне, симметричном относительно вертикальной оси враще-

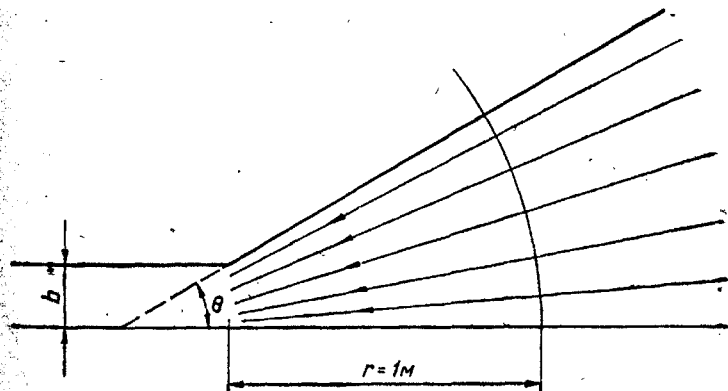


Рис. 46. К примеру 8.

ния резервуара (рис. 48), где с помощью инерционной сепарации воздух очищается от пыли. Загрязненный воздух подводится по касательной к стенке, вследствие чего движение в резервуаре приближается к описываемому формулой (92). Твердые частицы вследствие инерции прижимаются к внешней стенке, теряют в результате трения свою скорость и падают вниз.

В циркуляционном течении центр  $O$  также является особой точкой, поэтому физически такой поток возможен лишь за пределами некоторого ядра конечного радиуса (на рис. 47 это ядро заштриховано). Ядро может быть образовано жесткой границей или вращающейся жидкостью, течение в которой не является потенциальным. Примером подобного рода есть уже упоминавшийся смерч.

**Сложение течений.** Уравнения Лапласа (78), (86) — линейные дифференциальные уравнения. Как известно, сумма частных решений линейных уравнений является также решением этих уравнений. Таким образом, просуммировав в различных комбинациях имеющиеся решения для простейших течений, мы получим различные виды более сложных потенциальных течений.

На рис. 49, *a* показан поток (кривые линии) как результат наложения плоскопараллельного течения и источника. Графически результирующий поток получают геометрическим сложением сторон клеток, образующихся от пересечения линий тока складываемых потоков. Диагональ каждой клетки соответствует вектору скорости и направлению суммарной линии тока.

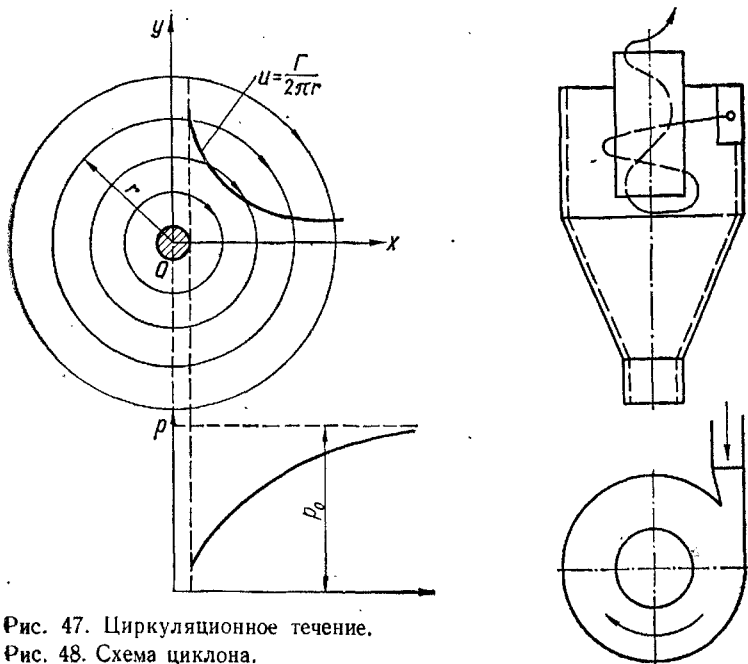


Рис. 47. Циркуляционное течение.

Рис. 48. Схема циклона.

Рассмотрим одну из клеток (рис. 49, б). Так как масштабы складываемых потоков должны быть одинаковыми, стороны клеток  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  пропорциональны векторам соответствующих скоростей, т. е.

$$\frac{\Delta l_1}{u_1} = \frac{\Delta l_2}{u_2}.$$

При достаточной густоте линий тока каждую клетку можно рассматривать как параллелограмм. Обозначим расстояния между линиями токов соответственно  $\Delta n_1$  и  $\Delta n_2$ . Образованные заштрихованные на рисунке треугольники подобны, следовательно,

$$\frac{u_1}{\Delta n_1} = \frac{u_2}{\Delta n_2},$$

откуда

$$u_2 \Delta n_1 = u_1 \Delta n_2.$$

На основании уравнения (84) получаем условие

$$\Delta q_1 = \Delta q_2.$$

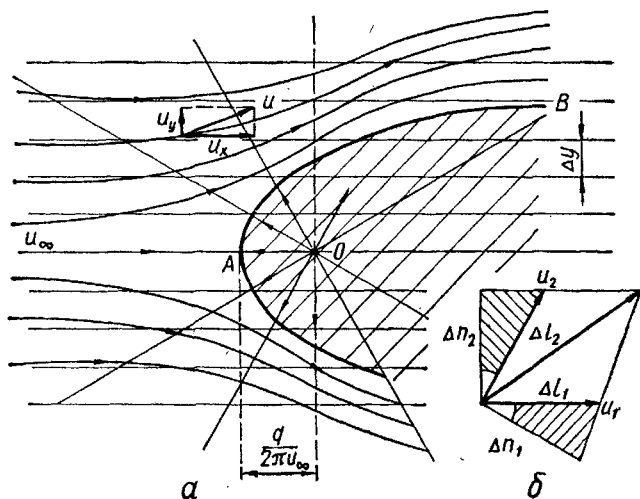
Значит, при графическом построении результирующего потока линии токов складываемых течений нужно вычерчивать так, чтобы расходы между ними были одинаковы.

В рассматриваемом случае плоскопараллельное течение вдоль оси  $x$  имеет скорость  $u_\infty$ , а источник — расход  $q$ . Из условия равенства расходов следует, что между смежными линиями

$$u_\infty \Delta y = q/k,$$

Рис. 49. Сложение течений:

*a* — линии тока; *б* — параллелограмм скоростей.





откуда

$$k\Delta y = q/u_{\infty},$$

где  $\Delta y$  — расстояние между линиями токов плоскопараллельного течения,  $k$  — количество лучей, выходящих из источника.

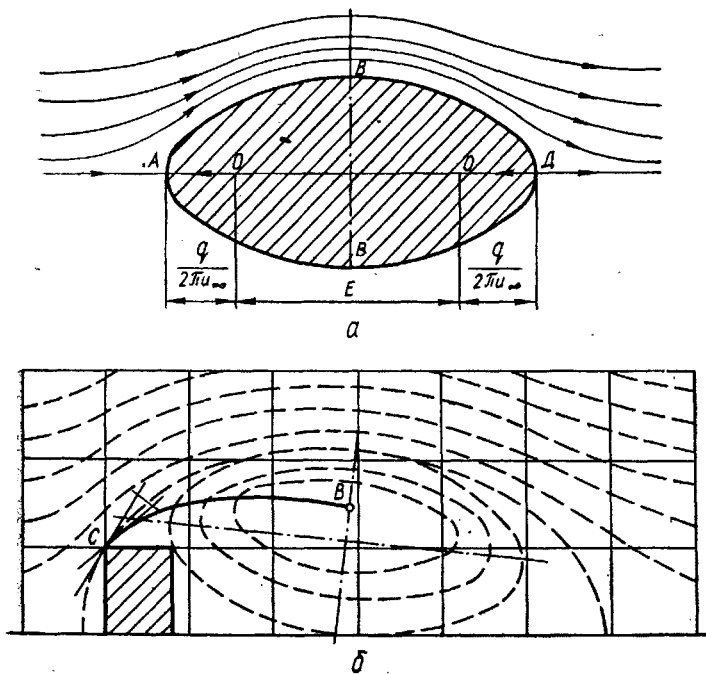
Линия тока источника, направленная против оси  $x$ , встречает линию тока плоскопараллельного потока, скорость которого ( $u_{\infty}$ ) постоянна. Поскольку скорость источника согласно уравнению (90) уменьшается с увеличением расстояния от центра  $O$ , должна существовать точка  $A$  на расстоянии

$$OA = q/(2\pi u_{\infty}),$$

где эти скорости равны между собой по абсолютной величине и противоположны по направлению. Результирующее течение в этой точке, называемой *критической*, имеет скорость, равную нулю. Течение (аналогично случаю обтекания преграды) разветвляется и симметрично огибает источник. При этом кривая  $AB$  как бы отделяет жидкость, вытекающую из источника, от остального потока. Контур всякого твердого тела, обтекаемого потоком, является (при отсутствии отрыва) линией тока. Поэтому, если заменить зону, ограниченную линией тока, твердым

Рис. 50. Сложение плоскопараллельного потока с источником и стоками:

$a$  — течение с одним стоком;  $b$  — течение с двумя стоками.

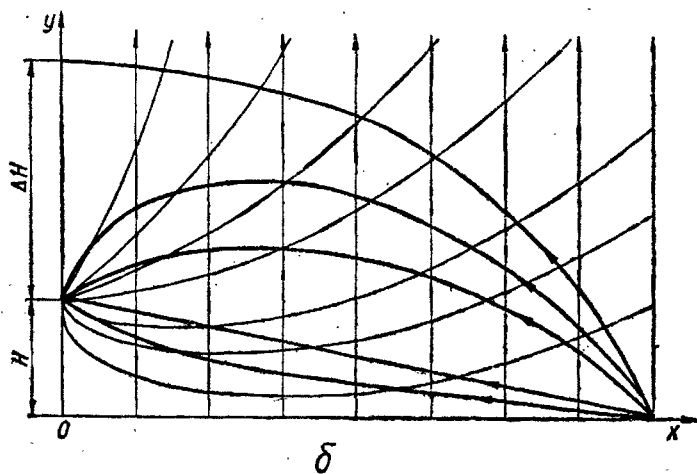
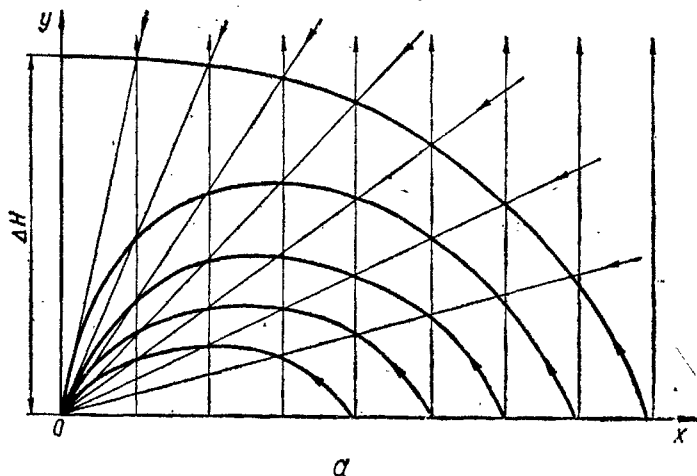


телом (область, отвечающая твердому телу, заштрихована), остальные линии тока при этом не изменятся и дадут картину обтекания этого твердого тела. Таким образом, источник является *фиктивным* и служит лишь способом для деформации плоскопараллельного потока, обтекающего данный контур.

Рассмотрим некоторые комбинированные течения, представляющие непосредственный интерес для решения задач вентиляции.

Рис. 51. Сложение плоскопараллельного потока и стоков:

а — течение с одним стоком; б — течение с двумя стоками.



Плоскопараллельный поток + источник + сток. Результирующее движение дает картину обтекания тела овальной формы (рис. 50, а). Если ось абсцисс мысленно совместить с поверхностью земли, верхнюю часть овала можно рассматривать как вертикальное сечение здания криволинейного очертания, например, эллинга.

Прибавляя еще один сток, можно получить несимметричный спектр течения, который приближенно описывает обтекание ветровым потоком здания прямоугольного профиля (рис. 50, б) [12]. Циркуляционная область (штриховые линии на рисунке) относится к вихревому движению и не описывается изложенным методом.

Рис. 52. Схема ванны с однобортовым отсосом.

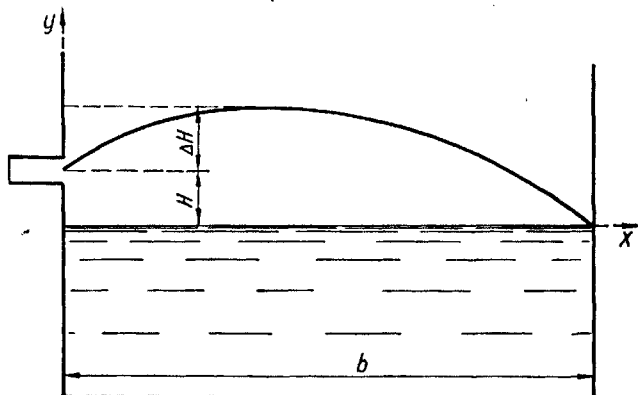
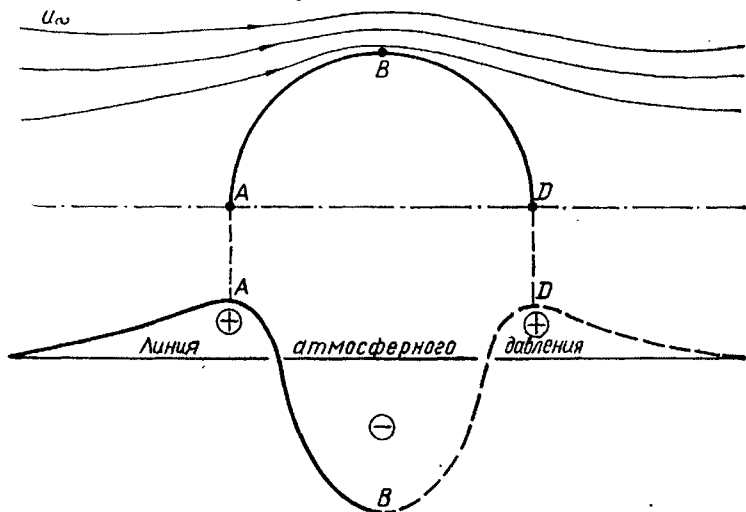


Рис. 53. Обтекание цилиндра.



Плоскопараллельный поток + сток. Результирующие линии тока представляют собой семейство кривых, исходящих из оси  $x$ , часть которых сходится в центре  $O$  (рис. 51). Эта схема [16] используется для расчета однобортового местного отсоса паров, выделяющихся во время эксплуатации промышленных ванн (рис. 52). Величина  $\Delta H$  граничной линии тока характеризует высоту спектра всасывания, обеспечивающую необходимый вентиляционный эффект. При этом ось всасывающей щели находится на уровне жидкости в ванне. Если щель расположена выше уровня жидкости, устраивают два стока по оси ординат (рис. 51, б).

Аналогично выполняется расчет и для двухбортового отсоса, а также при наличии нескольких точек отсоса.

Плоскопараллельный поток + диполь. *Диполем* называется определенная комбинация источника и стока, образующаяся в результате предельного перехода при их неограниченном сближении и условии, что их мощность (произведение расхода на расстояние) при этом остается постоянной. Такое абстрактное течение дает линии тока в виде семейства окружностей, касающихся оси  $x$ , центры которых находятся на оси  $y$ .

Если сложить диполь с плоскопараллельным потоком, получим картину обтекания цилиндра (имеется в виду цилиндр бесконечно большой длины в плоскости, перпендикулярной к чертежу. В двухмерном представлении это будет окружность). На рис. 53 показана половина симметричного спектра.

Скорость течения по контуру цилиндра

$$u = -2u_{\infty} \sin \theta, \quad (93)$$

где  $\theta$  — угол радиуса-вектора. Знак «минус» обусловлен тем, что вектор скорости направлен в сторону, противоположную отсчету угла  $\theta$ . Точка  $A$ , как и в других случаях разветвления симметричного обтекания, является критической; для нее  $u_A = 0$  (так как  $\sin \theta = 0$ ). Также критической является точка схода  $D$ . В дальнейшем мы убедимся, что в действительных условиях вязкой жидкости течение за участком контура  $BD$  будет совсем иным (см. рис. 160). В точке  $B$   $\sin \theta = 1$  и  $u_B = 2u_{\infty}$ . Таким образом, по образующей цилиндра, проектирующейся в точку  $B$ , скорость оказывается вдвое большей, чем скорость плоскопараллельного течения.

## § 20

### Основные уравнения динамики жидкости

**Гидродинамическое давление.** Давление движущейся жидкости имеет свойства гидростатического, если не учитывать силы вязкости. Действительно, для невязкой жидкости силы, являющиеся причиной движения, не отличаются от сил, действующих в покоящейся жидкости (массовые силы, силы инерции). Поэтому доказательство того, что давление образует скалярное поле (см. § 5), полностью распространяется и на движущуюся невязкую жидкость. Таким образом,

в пространстве, занятом движущейся жидкостью,

$$p = f(x, y, z, t). \quad (94)$$

Для установившегося движения

$$p = f(x, y, z). \quad (95)$$

**Дифференциальное уравнение движения в форме Эйлера.**  
 Для получения дифференциальных уравнений движения воспользуемся выведенными ранее уравнениями равновесия (17), добавив к ним согласно принципу Даламбера силы инерции. Эти силы должны быть отнесены к единице массы, как и силы тяжести и давления, входящие в уравнения (17). Силы инерции определяют как произведение массы на ускорение, взятое с обратным знаком. Проекция этих сил на оси координат равны:  $-1 \frac{du_x}{dt}$ ,  $-1 \frac{du_y}{dt}$ ,  $-1 \frac{du_z}{dt}$ .

Тогда

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Это и есть *дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости*, предложенные Л. Эйлером в 1775 г.

В векторной форме система уравнений Эйлера записывается одним уравнением. С учетом развернутого выражения для ускорения (62)

$$F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u. \quad (97)$$

Уравнения Эйлера не интегрируются в общем виде. Лишь в некоторых частных случаях удается получить несложные решения.

Для установившегося движения локальное ускорение  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  и уравнение (97) запишется так:

$$F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = (u \nabla) u. \quad (98)$$

Для безвихревого потенциального движения сразу получаем интеграл уравнения (98). Действительно, конвек-

тивное ускорение  $(u \nabla) u$  и согласно известному преобразованию векторного анализа \* может быть представлено так:

$$(u \nabla) u = \text{grad} \left( \frac{u^2}{2} \right) - \text{rot } u \times u. \quad (99)$$

Для безвихревого движения  $\text{rot } u \times u = 0$ . Считая, что массовые силы имеют потенциал ( $F = -\text{grad } \Pi$ ) и жидкость несжимаема ( $\rho = \text{const}$ ), уравнение (98) примет вид

$$d \left( \Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad (100)$$

откуда

$$\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (101)$$

Нетрудно получить интеграл уравнений Эйлера (96), записанных в форме проекций на координатные оси, для установившегося движения, если рассматривать перемещение частиц жидкости вдоль линий тока. Умножим каждое из уравнений системы (96) на соответствующую проекцию элементарного перемещения частиц  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и сложим их:

$$\begin{aligned} (Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) - \\ - \left( \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz \right) = 0. \end{aligned} \quad (102)$$

Поскольку для установившегося движения линии тока совпадают с траекториями движущихся частиц, то  $\frac{dx}{dt} = u_x$ ,  $\frac{dy}{dt} = u_y$ ,  $\frac{dz}{dt} = u_z$ . Последний трехчлен левой части уравнения (102) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz = u_x dx + u_y dy + \\ + u_z dz = \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} u^2. \end{aligned} \quad (103)$$

Кроме того, для установившегося движения, когда давление является только функцией координат и не зависит

\*  $\text{grad} (ab) = (b \nabla) a + (a \nabla) b + b \times \text{rot } a + a \times \text{rot } b$ ; при  $a = -b = u$   $(u \nabla) u = \text{grad} \left( \frac{u^2}{2} \right) - \text{rot } u \times u$ .

от времени [см. условие (95)], второй член уравнения (102) есть полный дифференциал давления:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp. \quad (104)$$

Наконец, первый трехчлен уравнения (102) [см. интегрирование дифференциальных уравнений равновесия (17)]

$$Xdx + Ydy + Zdz = -d\Pi. \quad (105)$$

Таким образом, с учетом выражений (103), (104), (105) уравнение (102) примет вид

$$d\Pi + \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} d(u^2) = 0.$$

Для несжимаемой жидкости

$$d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) = 0, \quad (106)$$

откуда

$$\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const.} \quad (107)$$

Уравнение (107) называется *интегралом Бернулли*.

Несмотря на одинаковую форму интегралов (101) и (107), эти уравнения существенно различаются. Константа в первом уравнении относится к потенциальному потоку в целом, а во втором — только к данной линии тока и может быть различной для разных линий тока.

Можно также показать [8], что интеграл (101) распространяется на винтовой поток (когда вихревые линии совпадают с линиями тока), а интеграл (107) справедлив для движения частиц жидкости вдоль вихревых линий.

## § 21

### Уравнение Д. Бернулли

При рассмотрении движения в поле сил тяжести справедливо условие (21), т. е.

$$\Pi = qz + C. \quad (108)$$

Тогда уравнения (101) и (107) примут вид

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const.} \quad (109)$$

Уравнение (109) применимо для потенциального и винтового потоков, а также для движения частиц жидкости вдоль линий тока или вихревых линий. Это уравнение будем называть *уравнением Бернулли*.

Даниил Бернулли (1700—1782 гг.) — сын выдающегося математика Иоганна Бернулли. С 1725 по 1733 гг. Бернулли работал в Петербургской академии наук, где и написал свой знаменитый труд «Гидродинамика», изданный на латинском языке в Страсбурге в 1738 г. Д. Бернулли впервые четко изложил ряд основных вопросов гидравлики и, в частности, сформулировал положения, из которых вытекает уравнение (109).

Разберем несколько типичных примеров применения уравнения Бернулли. При этом следует иметь в виду, что в уравнении (109) две неизвестных величины — давление  $p$  и скорость  $u$ , поэтому для его решения необходимо дополнительное условие [уравнение неразрывности (69)]. В примерах, рассматриваемых ниже, скорость будет считаться известной.

**Повышение давления (подпор) перед препятствием.** В критических точках  $O$  и  $A$  потенциальных течений (см. § 17, рис. 44, 53) скорость  $u = 0$ . Для точек течения, находящихся на некотором расстоянии от препятствия, давление равно  $p$ , а скорость —  $u$ . Написав уравнение (109) для критической точки и точек, удаленных от препятствия, и учитывая, что для плоского течения  $z = \text{const}$ , находим:

$$\frac{p_{O,A}}{\rho} + 0 = \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}.$$

Отсюда приращение давления (подпор), которое возникает вблизи препятствия,

$$\Delta p = p_{O,A} - p = \rho u^2 / 2. \quad (110)$$

Этот же результат можно получить, не налагая условия потенциальности течения, для течения вдоль линии тока и принимая нулевую скорость в критической точке на основании данных эксперимента.

**Пример 9.** Определить подпор перед стеной дома, если скорость течения (ветра), направленного перпендикулярно к стене,  $u = 10$  м/с, плотность воздуха  $\rho = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>.

По формуле (110)

$$\Delta p = 1,2 \cdot \frac{10^2}{2} = 60 \text{ Па} = 6 \text{ мм вод. ст.}$$



**Трубка Пито — Прандтля.** В трубу с движущейся капельной жидкостью поместим две стеклянные трубки (рис. 54): 1 — загнутую навстречу течению (ее называют трубкой Пито), 2 — пьезометрическую; в результате эффекта подпора жидкость в трубке Пито поднимется на большую высоту, чем в пьезометрической. Носик трубки Пито с жидкостью в ней является препятствием для окружающего течения, вследствие чего скорость частиц движущейся жидкости при подходе к носику трубки уменьшается и в критической точке *A* стремится к нулю. Важно подчеркнуть, что здесь не происходит явление удара, а имеет место обтекание препятствия. В точке *B* вблизи пьезометрической трубки скорость равна скорости на линии тока на удалении от трубок.

Исходя из уравнения (109), для точек *A* и *B*

$$\frac{p_A}{\rho} + 0 = \frac{p_B}{\rho} + \frac{u^2}{2},$$

откуда

$$u = \sqrt{2(p_A - p_B)/\rho} = \sqrt{2\Delta p/\rho}. \quad (111)$$

Умножив числитель и знаменатель подкоренного выражения (111) на ускорение свободного падения и зная, что  $\frac{\Delta p}{\rho g} = \Delta h$  — разность уровней жидкости в трубке Пито и пьезометрической трубке, получаем

$$u = \sqrt{2g\Delta h}. \quad (112)$$

Таким простым прибором можно измерить местную скорость в открытом потоке, например в реке или на канале.

Конструктивно объединенные в одном корпусе трубка Пито и пьезометрическая трубка (кольцевое пространство с прорезями на рис. 55) представляют собой *трубку Пито—Прандтля*. Такой прибор иногда называют гидрометрической (для жидкости) или пневмометрической (для воздуха) трубкой.

Чтобы трубкой Пито — Прандтля можно было непосредственно

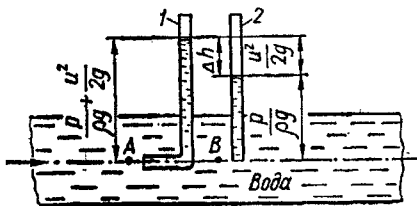


Рис. 54. К измерению местной скорости:

1 — трубка Пито; 2 — пьезометрическая трубка.

измерять скорость, к ней подключают дифференциальный манометр (рис. 55). При измерении небольшой скорости воздуха (газа) дифференциальный манометр представляет собой U-образную трубку, заполненную наполовину водой или спиртом; при очень малых перепадах давлений используется микроманометр (см. рис. 13).

Трубка Пито — Прандтля благодаря своей простоте и надежности в работе широко применяется на практике, в частности в вентиляционной технике.

**Пример 10.** Определить местную скорость течения воздуха, если показания водяного манометра, подключенного к трубке Пито — Прандтля, равны  $\Delta p = 15$  мм вод. ст.

Согласно условию (31) давление, измеряемое столбом воды в 1 мм, равно 9,8 Па. Тогда

$$\Delta p = 15 \cdot 9,8 = 147 \text{ Па.}$$

Искомая скорость по формуле (112)

$$u = \sqrt{2 \cdot 147 / 1,2} = 15,6 \text{ м/с.}$$

**Подъемная сила.** Классической иллюстрацией закона Бернулли является возникновение (при определенных условиях) подъемной силы при обтекании тел. Обратимся

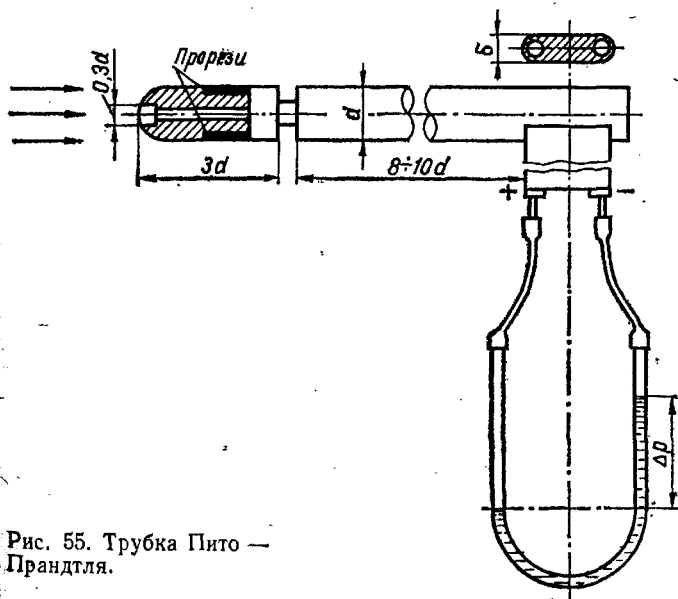


Рис. 55. Трубка Пито — Прандтля.

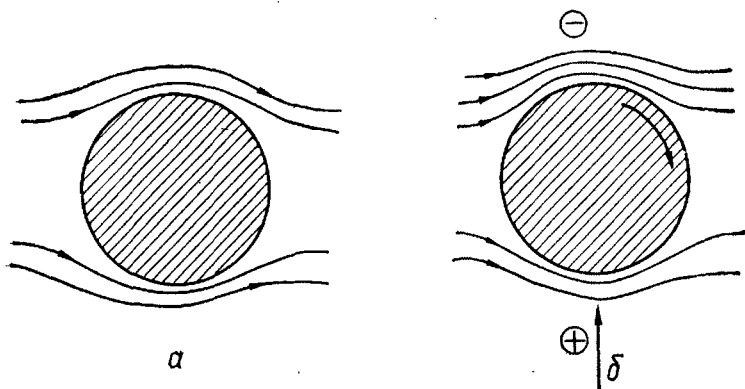


Рис. 56. К возникновению подъемной силы при вращении цилиндра.



Рис. 57. Возникновение подъемной силы при обтекании крыла:  
*a* — схема обтекания; *б* — циркуляция.

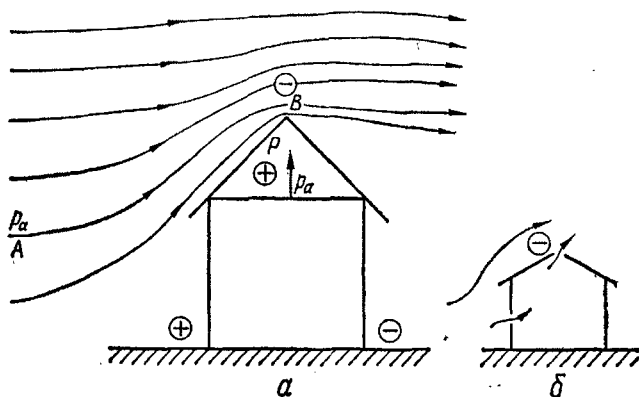


Рис. 58. Разрежение над крышей здания:  
*a* — сплошная крыша; *б* — крыша с прорезью на коньке.

прежде всего к случаю обтекания цилиндра (рис. 53), по бокам которого в точках  $B$  скорость увеличивается и давление уменьшается [см. уравнение (109)]. Если представить, что цилиндр вращается, это равносильно наложению на рассматриваемое течение некоторой циркуляции  $\Gamma^*$ . Тогда при вращении цилиндра по часовой стрелке скорость течения вверху будет еще большей, а внизу — меньшей, а давления, соответственно, внизу — большие, а вверху — меньшие (рис. 56). В результате возникает разность давлений, которая и дает указанную подъемную силу. Описанное явление носит название *эффекта Магнуса*.

Подобным образом трактуется эффект подъемной силы в обратном движении \*\* при обтекании профиля крыла самолета или судна на подводных крыльях (рис. 57). В 1906 г. Н. Е. Жуковский доказал, что подъемная сила на единицу длины профиля

$$P_y = \rho \Gamma u_\infty,$$

где  $\Gamma$  — циркуляция, связанная с интенсивностью вихрей, сбегających с профиля.

**Разрежение над крышей здания.** По аналогии со спектром течения, представленным на рис. 53, можно утверждать, что спектр течения перед зданием и над его крышей будет иметь конфигурацию, показанную на рис. 58, что означает увеличение скорости в точке  $B$  и соответствующее понижение давления. Таким образом, между воздухом под крышей, находящемся в состоянии покоя, где давление можно считать равным атмосферному, и течением над крышей, где давление пониженное, возникает разница давлений, которая может создать при сильном ветре значительную подъемную силу  $P_y$ .

Напишем уравнение Бернулли для линии  $AB$ , считая, что давление на удалении от здания равно давлению под крышей  $p_a$  (разностью высотных отметок пренебрегаем):

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \frac{p_B}{\rho} + \frac{u_B^2}{2}.$$

\* Благодаря действию сил вязкости слои воздуха, прилегающие к цилиндру, приходят в движение по направлению вращения цилиндра [см. формулу (6)].

\*\* В соответствии с принципом относительности в механике безразлично, находится ли жидкость в покое, а тело равномерно движется или, наоборот, тело находится в покое, а жидкость набегаёт на него с равной по величине, но противоположной по направлению скоростью.

## Разрежение над крышей

$$p_{\text{разр}} = p_a - p_B = \rho (u_B^2 - u^2)/2. \quad (113)$$

Если на коньке крыши сделать прорезь (рис. 58, б), то за счет всасывающего действия пониженного давления создается вентиляционный эффект, широко используемый в промышленных зданиях.

**Пример 11.** Определить силу, стремящуюся поднять крышу при скорости ветра на некотором расстоянии от здания  $u = 25$  м/с, а над коньком крыши  $u = 40$  м/с. Площадь горизонтальной проекции крыши  $S = 60$  м<sup>2</sup>, вес крыши  $G = 25$  кН.

Разрежение над коньком крыши по формуле (113)

$$p_{\text{разр}} = 1,2 (40^2 - 25^2)/2 = 580 \text{ Па} = 0,58 \text{ кПа.}$$

Подъемная сила

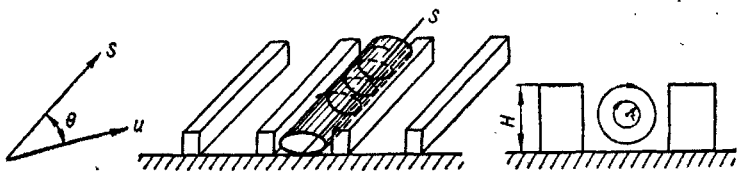
$$P_y = p_{\text{разр}} S = 0,58 \cdot 60 = 35 \text{ кН.}$$

Искомая сила

$$R = 35 - 25 = 10 \text{ кН.}$$

**Винтовое движение.** При обтекании двух или большего числа параллельно расположенных зданий между ними возникает движение воздуха, которое приближается к винтовому, если скорость ветра направлена под углом  $\theta$  к длинной стороне здания (рис. 59). При перпендикулярном направлении ветра возникает циркуляционное течение (см. рис. 48). Согласно формуле (91) при увеличении скорости к центру течения давление понижается. (Например, смерч, представляющий собой циркуляционное движение с вертикальной осью, обладает способностью засасывать встречающиеся на своем пути предметы. В данном случае образуется циркуляционное течение с горизонтальной осью и область пониженного давления формируется в пространстве, что не так опасно).

Рис. 59. Схема образования винтового течения при обтекании ветровым потоком зданий.



**Пример 12.** Определить разрежение в центральной зоне пространства между зданиями (см. рис. 59) на радиусе  $r = 2$  м при высоте здания  $H = 16$  м и скорости ветра  $u = 5$  м/с;  $\Theta = \pi/2$ .

По формуле (91) циркуляция на радиусе  $H/2 = 8$  м

$$\Gamma = 2\pi \cdot 8 \cdot 5 = 2\pi \cdot 40 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Скорость воздуха на радиусе  $r = 2$  м

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{2\pi \cdot 40}{2\pi \cdot 2} = 20 \text{ м/с}.$$

Согласно уравнению (113) разрежение

$$p_{\text{разр}} = 0,6 (20^2 - 5^2) = 225 \text{ Па}.$$

Этот пример поясняет возникновение местных «сквозняков» между зданиями даже при слабом ветре.

## Глава IV

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРАВЛИКИ (ОДНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ)

#### § 22

#### Метод гидравлики и понятие элементарной струйки

Широкий круг вопросов технической механики жидкости может быть решен с помощью специфического подхода к изучению движения жидкости, который называют методом гидравлики. Его сущность заключается в следующем.

Течение жидкости мысленно разбивается на ряд элементарных струек ( $ab$  на рис. 60), чтобы ось каждой из них была касательна к направлению скорости. Затем действительное течение с различными скоростями отдельных струек заменяют расчетной моделью потока, который движется как одно сплошное целое с постоянной для всех частиц в данном сечении скоростью. При такой схематизации течения скорости и ускорения в направлении, нормальном к основному движению, не учитываются. Для его описания достаточно только одной координаты пространства — расстояния  $l$  вдоль оси потока от рассмат-

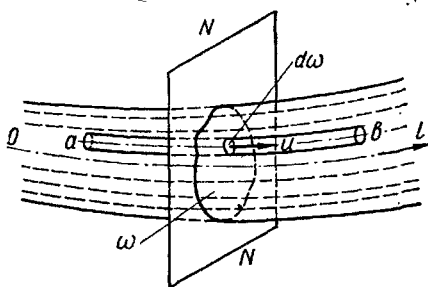


Рис. 60. Одномерное течение жидкости.

риваемого сечения до некоторой начальной точки  $O$ . Поэтому такое движение и называется *одномерным*. Решение задач одномерного движения жидкости является предметом гидравлики.

При изучении движения жидкости различают *внутреннюю* и *внешнюю задачи гидроаэродинамики*. В первом случае рассматривают течение, ограниченное жесткими стенками, во втором — практически безграничное течение, обтекающее твердые тела различной формы.

Метод гидравлики прежде всего используется для внутренней задачи гидроаэродинамики, т. е. для изучения движения жидкости в трубах и каналах.

Итак, метод гидравлики основывается на понятии элементарной струйки. Выясним содержание этого понятия несколько подробнее.

Проведем в движущейся жидкости небольшой замкнутый контур (рис. 61). Совокупность линий тока, которые проходят через этот контур, образуют *поверхность, или трубку тока*. Поскольку линии тока имеют направление скоростей, их нормальные составляющие на поверхности тока равны нулю, что указывает на отсутствие обмена частиц между внутренней и внешней сторонами поверхности тока. Следовательно, трубка тока в известной степени ведет себя как трубка с непроницаемыми стенками.

Содержимое трубки в виде пучка линий тока, т. е. жидкость, которая течет внутри трубки тока, называют *элементарной стружкой*.

Элементарная стружка обладает следующими свойствами.

1. При установившемся движении стружка не изменяет своего положения в пространстве и трубку тока можно рассматривать как жесткую трубку с непроницаемыми стенками.

2. Нормальные сечения стружки ( $\Delta\omega_1$ ,  $\Delta\omega_2$  на рис. 61) малы, но вместе с тем не одинаковы в разных местах. Иначе говоря, пучок линий тока внутри трубки может сгущаться и расширяться.

3. Скорости во всех точках данного нормального сечения стружки одинаковы (это вытекает из условия малой величины самих сечений), однако при переходе от одного к другому они изменяются.



Рис. 61. Элементарная стружка.

4. Количество жидкости, которое протекает внутри трубки за единицу времени, остается постоянным по ее длине, что следует из условия непроницаемости поверхности тока.

При установившемся движении элементарная масса жидкости, протекающая за единицу времени через сечение  $\Delta\omega_1$  и равная произведению плотности  $\rho_1$  на объем  $u_1\Delta\omega_1$ , должна равняться массе жидкости  $\rho_2 u_2 \Delta\omega_2$ , вытекающей за то же время из сечения  $\Delta\omega_2$  струйки (см. рис. 61):

$$\rho_1 u_1 \Delta\omega_1 = \rho_2 u_2 \Delta\omega_2.$$

Для несжимаемой жидкости  $\rho_1 = \rho_2$ , тогда

$$u_1 \Delta\omega_1 = u_2 \Delta\omega_2. \quad (114)$$

Это уравнение выражает условие неразрывности струйки. В частности, из уравнения (114) следует, что для несжимаемой жидкости при сужении трубки тока — сгущение линий тока — скорость возрастает, а при ее расширении — расхождение линий тока — падает (этот результат прекрасно иллюстрируется спектрами течений, рассмотренных в § 18). Трубки тока должны быть замкнутыми или заканчиваться на границах жидкости, поскольку при  $\Delta\omega \rightarrow 0$  скорость  $u \rightarrow \infty$ , что невозможно.

В заключение заметим, что при очень малых сечениях трубку тока можно рассматривать как линию тока.

## § 23

### Уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкой несжимаемой жидкости

Выделим в движущейся жидкости трубку тока, определяемую осью  $l$  (рис. 62). При установившемся движении ее положение в пространстве не изменяется. Далее возьмем в трубке элементарный объем длиной  $dl$  и рассмотрим силы, действующие на него в процессе движения. Прежде всего это силы давления. Если давление на основание элемента слева равно  $p$ , то справа  $p + dp$ . Соответствующие силы давления направлены в противоположные стороны и суммарная сила давления определится как

$$p\Delta\omega - (p + dp)\Delta\omega = -dp\Delta\omega.$$



Площадки  $\Delta\omega$  слева и справа выделенного элемента отличаются друг от друга на величину второго порядка малости, поэтому принимаются одинаковыми.

Проекции сил давления, действующих на боковые поверхности элемента, на ось  $l$  равны нулю.

На элемент действует также сила тяжести, в направлении движения равная

$$\Delta mg \cos \Theta = \rho g \Delta\omega dl \cos \Theta = - \rho g \Delta\omega dl \frac{dz}{dl},$$

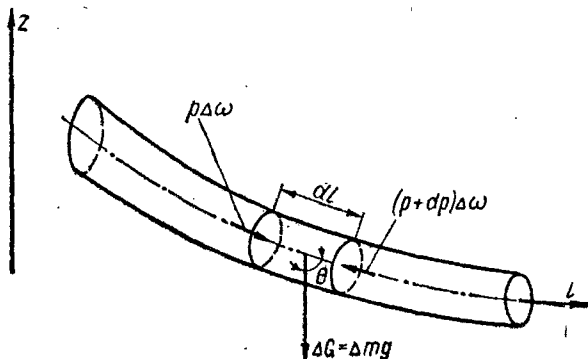
где  $\Theta$  — угол между линией действия силы тяжести и осью струйки; при вертикальном расположении оси  $z$ , направленной вверх,  $\cos \Theta = - \frac{dz}{dl}$ .

Наконец, согласно принципу Даламбера, для приведения уравнения движения к уравнению статики нужно еще ввести силы инерции, равные произведению массы на ускорение с обратным знаком. В одномерном представлении движения скорость при установившемся режиме является функцией одной координаты  $l$ , т. е.  $u = f(l)$ .

Поскольку в данном случае линии тока совпадают с траекториями движения частиц,  $u = \frac{dl}{dt}$ . В соответствии с этим ускорение

$$w = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dl} \frac{dl}{dt} = u \frac{du}{dl}.$$

Рис. 62. К выводу уравнения Бернулли для струйки.



Выражение для сил инерции примет вид

$$-\Delta m \omega = -\rho \Delta \omega dl \frac{du}{dt}.$$

В жидкости действуют еще силы сопротивления (жидкостного трения), однако для невязкой жидкости их не учитывают.

Итак, уравнение равновесия рассматриваемых сил на выделенный элемент жидкости в проекциях на ось движения  $l$

$$-dp \Delta \omega - \rho g \Delta \omega dl \frac{dz}{dl} - \rho \Delta \omega dl \frac{du}{dt} = 0.$$

Разделим все члены этого уравнения на массу элемента  $\rho \Delta \omega dl$ , т. е. отнесем его к единице массы, в результате чего получим:

$$g \frac{dz}{dl} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dl} + u \frac{du}{dl} = 0.$$

Умножив все члены последнего уравнения на элементарное перемещение  $dl$ , получим дифференциальное уравнение одномерного движения жидкости для струйки:

$$g dz + \frac{dp}{\rho} + u du = 0. \quad (115)$$

Для несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) это уравнение легко интегрируется:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (116)$$

Уравнение (116) — это *уравнение Бернулли для элементарной струйки*. По существу, это тот же интеграл Бернулли (109), если трубку тока рассматривать как линию тока.

При исследовании движения вдоль конкретной трубки тока константа предполагается известной, величина  $z$  заданной, а давление  $p$  и скорость  $u$  подлежат определению. Для решения задачи нужно еще уравнение неразрывности (114). Рассмотренные в § 21 примеры могут быть решены и с помощью уравнения (116).

**Энергетический смысл уравнения Бернулли.** Как следует из самого вывода уравнения (116), оно представляет собой уравнение работы, т. е. энергии. Каждый его член характеризует энергию жидкости, отнесенную к единице массы (Дж/кг). При этом размерность каждого члена уравнения

## Бернулли

$$\dim gz = \dim \frac{p}{\rho} = \dim \frac{u^2}{2} = L^2 T^{-2}.$$

Энергия жидкости, отнесенная к единице массы, называется *удельной энергией*. Соответственно отдельные члены уравнения (116) характеризуют следующие величины:  $gz$  — удельную энергию положения,  $\frac{p}{\rho}$  — удельную энергию давления (причем сумма  $gz + \frac{p}{\rho}$  равна удельной потенциальной энергии),  $\frac{u^2}{2}$  — удельную кинетическую энергию.

Таким образом, с энергетической точки зрения уравнение Бернулли можно сформулировать так: *при установившемся движении невязкой несжимаемой жидкости вдоль трубки тока сумма удельных энергий — потенциальной (положения и давления) и кинетической — есть величина постоянная*. Иначе говоря, уравнение Бернулли выражает собой закон сохранения механической энергии применительно к жидкости.

### § 24

#### **Уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкой сжимаемой жидкости**

Плотность сжимаемой жидкости изменяется в процессе движения ( $\rho \neq \text{const}$ ). Проинтегрировав выражение (115), получаем:

$$gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const.}$$

При установившемся движении влияние сжимаемости практически проявляется только в газах, при анализе течения которых удельной энергией положения (т. е. членом  $gz$ ) можно пренебречь (см. § 16). Тогда

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const.} \quad (117)$$

Это выражение можно назвать уравнением Бернулли для сжимаемой жидкости. Член  $\int \frac{dp}{\rho}$  характеризует потенци-

альную энергию газа с учетом преобразования его внутренней энергии. Поэтому уравнение (117) можно сформулировать так: *при установившемся течении невязкого газа сумма удельной потенциальной, внутренней и кинетической энергии есть величина постоянная.*

Для вычисления интеграла  $\int \frac{dp}{\rho}$  необходимо знать процесс изменения состояния газа при этом течении. Если считать, что течение происходит без теплообмена, то для невязкого газа это будет отвечать изэнтропическому\* изменению состояния. Такой процесс описывается уравнением

$$\frac{p}{\rho^k} = C, \quad (118)$$

где  $k$  — показатель адиабаты процесса;  $C$  — постоянная.

Подставим в интеграл  $\int \frac{dp}{\rho}$  вместо  $\rho$  его значение из уравнения (118):

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{\rho} &= C^{\frac{1}{k}} \int \frac{dp}{p^{\frac{1}{k}}} = C^{\frac{1}{k}} \int p^{-\frac{1}{k}} dp = C^{\frac{1}{k}} \frac{k}{k-1} p^{\frac{k-1}{k}} = \\ &= \frac{1}{\rho^{\frac{1}{k}}} \frac{k}{k-1} p^{\frac{k-1}{k}} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}. \end{aligned}$$

Теперь уравнение Бернулли для сжимаемой жидкости принимает вид

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const.} \quad (119)$$

Поскольку отношение  $\frac{p}{\rho}$  [см. уравнение состояния (9)] выражается через термодинамическую температуру, уравнение (119) можно записать в такой форме:

$$\frac{k}{k-1} RT + \frac{u^2}{2} = \text{const.} \quad (120)$$

Из уравнения (120) следует, что изменение скорости вдоль трубки тока сжимаемого газа связано с изменением температуры. При увеличении скорости температура падает

\* В общем случае процесс изменения состояния газа без теплообмена называют *адиабатическим*. Однако для невязкого газа процессы носят обратимый характер при неизменной энтропии, чем и обуславливается термин «*изэнтропический*».

(например, если открыть вентиль баллона, в котором находится сжатый газ, происходит заметное охлаждение и даже обледенение вентиля).

Каждый член уравнений (119), (120), как и члены уравнения Бернулли (116) для несжимаемой жидкости, представляет собой энергию, отнесенную к единице массы, и имеет аналогичную размерность.

## § 25

### Влияние сжимаемости газа на его течение

Чтобы пользоваться уравнением (116) или (119), важно оценить влияние сжимаемости газа. Для этого сравним результаты исследований по этим уравнениям типичных случаев движения.

Рассмотрим, например, течение перед преградой (см. § 21, рис. 44). Повышение давления (подпор) для несжимаемой жидкости можно определить по формуле (110). Для сжимаемого газа справедливо уравнение

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_A}{\rho_A},$$

или

$$\frac{k}{k-1} \left( \frac{p_A}{\rho_A} - \frac{p}{\rho} \right) = \frac{u^2}{2},$$

откуда

$$\frac{k}{k-1} \rho \left( \frac{p_A}{p} \frac{\rho}{\rho_A} - 1 \right) = \frac{\rho u^2}{2},$$

где  $\rho_A$  — плотность среды в критической точке с нулевой скоростью.

Выразим соотношение плотностей  $\frac{\rho}{\rho_A}$  через отношение давлений, используя уравнение (118):

$$\left( \frac{\rho}{\rho_A} \right)^k = \frac{p}{p_A}; \quad \frac{\rho}{\rho_A} = \left( \frac{p}{p_A} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Тогда

$$\frac{p_A}{p} \frac{\rho}{\rho_A} = \frac{p_A}{p} \left( \frac{p_A}{p} \right)^{-\frac{1}{k}} = \left( \frac{p_A}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

и выражение для подпора переписется так:

$$\frac{k}{k-1} p \left[ \left( \frac{p_A}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = \frac{\rho u^2}{2}.$$

Решим последнее равенство относительно отношения давлений:

$$\frac{p_A}{p} = \left( 1 + \frac{\rho u^2/2}{p} \cdot \frac{k-1}{k} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Разложим теперь полученную зависимость в биномиальный ряд, ограничиваясь первыми тремя членами разложения:

$$\frac{p_A}{p} = 1 + \frac{\rho u^2}{2p} + \frac{1}{2k} \left( \frac{\rho u^2}{2p} \right)^2.$$

Отсюда

$$\Delta p = p_A - p = \frac{\rho u^2}{2} \left( 1 + \frac{u^2}{4} \frac{\rho}{kp} \right).$$

Последний член правой части равенства в скобках можно представить через скорость звука:

$$\frac{\rho}{kp} = \frac{1}{a^2}.$$

Действительно, исходя из формул (12) и (118),

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = C k \rho^{k-1} = \frac{p}{\rho^k} k \rho^{k-1} = k \frac{p}{\rho}. \quad (121)$$

Теперь выражение для подпора окончательно примет вид

$$\Delta p = p_A - p = \frac{\rho u^2}{2} \left( 1 + \frac{u^2}{4a^2} \right) = \frac{\rho u^2}{2} \left( 1 + \frac{Ma^2}{4} \right), \quad (122)$$

где  $Ma$  — число Маха.

Формула (122) показывает, что влияние сжимаемости проявляется с приближением скорости течения к скорости звука. При малых числах Маха, когда квадратом этого числа можно пренебречь, формула (122) эквивалентна формуле подпора (110) для несжимаемой жидкости.

Задаваясь допустимой ошибкой  $\Delta$  при определении подпора, легко найти граничную скорость течения, при которой газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость. При ошибке в 1%, т. е. при  $\Delta = 0,01$ ,

$$\frac{\Delta p_{сж} - \Delta p_{несж}}{\Delta p_{несж}} = 0,01, \text{ или } \frac{\Delta p_{сж}}{\Delta p_{несж}} - 1 = 0,01,$$

откуда, используя уравнения (122) и (110),

$$\frac{\rho u^2 (1 + Ma^2/4)}{\rho u^2} - 1 = 0,01;$$

$$Ma^2/4 = 0,01; \quad Ma^2 = 0,04; \quad Ma = 0,2 \quad u/a = 0,2.$$

Таким образом, при скорости течения  $u \leq 0,2a$ , т. е. меньшей 1/5 скорости звука, влияние сжимаемости газа можно не учитывать. Скорость звука в воздухе при стандартных условиях ( $k = 1,4$ ,  $p = 101\,325$  Па;  $\rho = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>) согласно формуле (121)

$$a = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{1,4 \cdot 101\,325/1,2} = 343 \text{ м/с.}$$

Следовательно, скорость течения

$$u \leq 0,2a \leq 0,2 \cdot 343 \leq 70 \text{ м/с}$$

является границей при учете влияния сжимаемости воздуха. Для природного газа соответствующее значение граничной скорости получается равным 90 м/с.

Описанный анализ влияния сжимаемости можно проиллюстрировать графически. Нанесем на  $p - v$ -диаграмму (рис. 63) давление  $p_A$  перед препятствием (линия  $AA'$ ), а также давление, отвечающее течению на расстоянии от него (линия  $NN'$ ). Тогда площадь, заштрихованная на рисунке горизонтальными линиями, будет равна интегралу  $\int \frac{dp}{\rho}$ , или  $\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}$  в данном изоэнтропическом процессе образования подпора. Соответствующий подпор для несжимаемой жидкости, т. е. газа без учета его сжимаемости, выразится высотой прямоугольника, построенного исходя из процесса изменения состояния при постоянном объеме ( $\rho = \text{const}$ ). На рис. 63 эта площадь заштрихована вертикальными линиями. Площадь криволинейного треугольника  $A'N'K$  представляет разницу между изохорическим процессом ( $v = \text{const}$ ) для несжимаемой жидкости и изоэнтропическим процессом данного течения воздуха.

Подставим в формулу (110) граничные значения

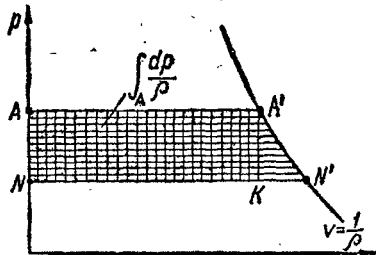


Рис. 63. Процесс течения газа на  $p - v$ -диаграмме.

скоростей для воздуха и газа. Тогда отвечающее этим скоростям повышение давления

$$\Delta p = \frac{\rho u^2}{2} = \frac{1,2 \cdot 70^2}{2} \div \frac{0,67 \cdot 90^2}{2} = 2950 \div 2730 \text{ Па} =$$

$$= 300 \div 265 \text{ мм вод. ст.}$$

В системах вентиляции и газопроводов низкого давления изменение давления не выходит за указанные пределы, чем и обосновывается применение там уравнений движения для несжимаемой жидкости.

Выполненный анализ относится к невязкой жидкости, где не учитывается влияние сопротивлений. В противном случае влияние сжимаемости может существенно проявиться и при скоростях течения, значительно меньших указанных. Например, в городских газопроводах среднего давления скорости принимают не более  $20 \div 30$  м/с, между тем как перепад давления вследствие сопротивлений составляет в них  $20 \div 30$  кПа ( $0,2 \div 0,3$  кгс/см<sup>2</sup>). Понятно, что в таких случаях необходимо учитывать изменение плотности газа в процессе течения.

## § 26

### Основные характеристики потока жидкости

**Поток.** В одномерной гидравлике под потоком понимают совокупность элементарных струек жидкости, движущихся с различными скоростями. В простейшем случае поток можно представить состоящим лишь из одной струйки.

Для замены действительного движения, имеющего различные скорости отдельных элементарных струек, расчетной моделью одномерного потока (с одной скоростью и давлением

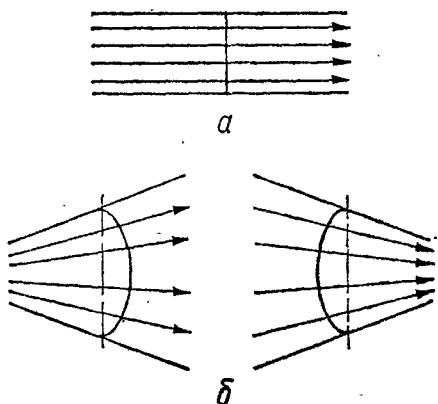


Рис. 64. Живое сечение потоков:

а — плоское; б — неплоское.



в данном сечении) необходимо еще ввести некоторые понятия и определения.

**Живое сечение.** Проведем в потоке жидкости поверхность так (см. рис. 60), чтобы пересекающие ее элементарные струйки были бы нормальны к этой поверхности. Такая поверхность образует *живое сечение потока* и обозначается буквой  $\omega$ . Если струйки параллельны между собой, живое сечение представляет собой плоскость, в частности, для цилиндрической трубы — круг (на рис. 64, *a* — прямая линия). Если струйки между собой не параллельны, живое сечение образует неплоскую, криволинейную поверхность, например для конусообразной трубы — сферическую (на рис. 64, *b* — вогнутая и выпуклая линии).

**Расход.** Количество жидкости, протекающее за единицу времени через данное живое сечение, называют *расходом*. Различают массовый  $M$  и объемный  $Q$  расходы.

Элементарный объемный расход через нормальное сечение струйки

$$\Delta Q = u \Delta \omega, \text{ или } dQ = u d\omega.$$

Объемный расход через все живое сечение

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u d\omega. \quad (123)$$

В дальнейшем объемный расход будем называть просто *расходом*.

Чтобы вычислить расход по формуле (123), нужно знать аналитическое выражение закона распределения скоростей в отдельных точках живого сечения или непосредственно измерить местные скорости течения в этих точках с последующим графическим интегрированием, что значительно

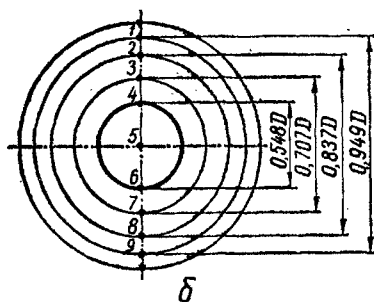
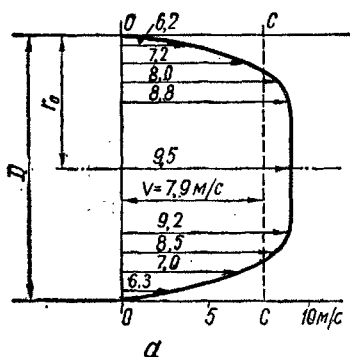


Рис. 65. К примеру 13:

*a* — эпюра скоростей; *b* — разбиение круглого сечения на пять равновеликих площадей.

усложняет расчет. Практически такие измерения (кроме целей научного исследования) нужны при определении расхода в воздухопроводах, воздушных и газовых каналах большого сечения.

**Пример 13.** Определить расход в воздухопроводе диаметром  $D = 400$  мм, если местные скорости измерялись с помощью трубки Пито — Прандтля методом равновеликих площадей\*; результаты измерений представлены в виде эпюры скоростей (рис. 65).

Сечение воздухопровода разделим на пять равновеликих кольцевых сечений. Расход через каждое из них

$$\Delta Q_1 = \frac{u_1 + u_9}{2} \Delta \omega_1; \quad \Delta Q_2 = \frac{u_2 + u_8}{2} \Delta \omega \text{ и т. д.}$$

Для пятого центрального сечения  $\Delta Q_5 = u_5 \Delta \omega$ , где  $\Delta \omega = \omega/5 = \pi D^2/20$ . Расход через все сечение воздухопровода

$$Q = (\pi D^2/40) (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + 2u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9).$$

Подставим соответствующие значения местных скоростей по данным рис. 65, а. Тогда

$$Q = (\pi \cdot 0,4^2/40) (6,2 - 7,2 - 8 - 8,8 - 2 \cdot 9,5 - 9,2 - 8,5 - 7 - 6,3) = 1 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Для сжимаемой жидкости, где плотность и, следовательно, объемный расход изменяются в процессе движения, применяется понятие массового расхода. Элементарный массовый расход сквозь нормальную площадку струйки

$$\Delta M = \rho u \Delta \omega, \text{ или } dM = \rho u d\omega;$$

массовый расход сквозь все живое сечение

$$M = \int_{\omega} dM = \int_{\omega} \rho u d\omega. \quad (124)$$

При одномерной трактовке движения сжимаемой жидкости неодинаковую плотность в отдельных точках живого сечения потока заменяют *средней* плотностью среды в данном сечении  $\rho$ ; вынеся  $\rho$  за знак интеграла, получим

$$M = \rho \int_{\omega} u d\omega = \rho Q. \quad (125)$$

Следует отметить, что уравнение (125) применяется не только для сжимаемых жидкостей. В системах теплогазо-

\* Для графического интегрирования эпюры скоростей в трубопроводах круглого сечения применяют способ *равновеликих площадей*. Для этого площадь круга делят на несколько равновеликих кольцевых сечений, центры которых соответствуют расстояниям, указанным на рис. 65, б.

снабжения и вентиляции, где движение газа и воздуха в большинстве случаев рассматривается без учета их сжимаемости, тепловые расчеты выполняются по массовому расходу с помощью формулы (125).

**Средняя скорость.** Пусть скорости всех струек, пересекающих живое сечение, одинаковы и равны  $v^*$ . Объемный расход согласно уравнению (125)

$$Q = \int_{\omega} v d\omega = v \int_{\omega} d\omega,$$

т. е.

$$Q = v\omega. \quad (126)$$

Уравнение (126) называют *уравнением расхода*.

Величину  $v$  называют *средней скоростью потока жидкости*. Из уравнения (126) следует, что

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{M}{\rho\omega}. \quad (127)$$

Таким образом, среднюю скорость можно определить как частное от деления расхода на площадь живого сечения или как частное от деления массового расхода на плотность и площадь живого сечения.

Поскольку в действительности скорости отдельных струек потока неодинаковы, среднюю скорость по живому сечению следует рассматривать как некоторое абстрактное понятие. Но введение этого понятия дает возможность изучать поток, как одну струйку. Такая схематизация потока является основой гидравлического подхода к изучению движения жидкости.

Для двух сечений потока, если считать, что между ними нет отвода или подвода жидкости, аналогично уравнению неразрывности (114) для элементарной струйки можно написать

$$\rho_1 v_1 \omega_1 = \rho_2 v_2 \omega_2, \quad (128)$$

а для несжимаемой жидкости

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2. \quad (129)$$

---

\* В термодинамике этой же буквой принято обозначать удельный объем ( $v = 1/\rho$ ). Таким образом, не следует смешивать эти понятия.

## § 27

### Удельная энергия потока несжимаемой жидкости

При выводе уравнения Бернулли (116) для элементарной струйки можно было пренебрегать изменением скорости и давления в пределах нормальных сечений благодаря их малым величинам. В потоке жидкости скорости и давления в пределах живых сечений различны, что необходимо учитывать.

Рассмотрим установившийся поток (рис. 60). Выделим в нем живое сечение. Удельная энергия одной из струек, проходящих через это сечение, согласно уравнению (116)

$$E = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}.$$

Полная энергия (мощность) струйки

$$dN = EdM = \left( gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u d\omega.$$

Просуммировав мощности струек по живому сечению, найдем полную энергию потока:

$$N = \int_{\omega} \left( gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u d\omega.$$

Искомая величина удельной энергии потока равна частному от деления приведенной суммы на массовый расход  $M$ :

$$E = \frac{\int_{\omega} \left( gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u d\omega}{M}.$$

Разобьем это уравнение на два интеграла:

$$E = E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = \frac{\int_{\omega} (gz + p/\rho) \rho u d\omega}{M} + \frac{\int_{\omega} \frac{u^2}{2} \rho u d\omega}{M}.$$

$E_{\text{пот}}$  характеризует удельную потенциальную энергию потока относительно выбранной плоскости сравнения, а  $E_{\text{кин}}$  — удельную кинетическую энергию потока.

Для вычисления интеграла  $\int_{\omega} \frac{u^2}{2} \rho u d\omega = \frac{\rho}{2} \int_{\omega} u^3 d\omega$  нужно знать закон распределения скоростей по живому сечению.

Умножим и поделим это выражение на  $v^3\omega$ , где  $v$  — средняя скорость потока, написав его так:  $\frac{v^2}{2} \rho v \omega \frac{\int u^3 d\omega}{v^3\omega}$ .

Учитывая, что  $M = \rho v \omega$ , и обозначая

$$\frac{\int u^3 d\omega}{v^3\omega} = \alpha, \quad (130)$$

получаем выражение для удельной кинетической энергии потока:

$$E_{\text{кин}} = \alpha v^2/2. \quad (131)$$

Коэффициент  $\alpha$  учитывает неравномерность распределения скоростей по живому сечению и представляет собой отношение действительной кинетической энергии потока к энергии, подсчитанной по средней скорости; его называют *коэффициентом кинетической энергии*, или *коэффициентом Кориолиса*. Если скорости во всех точках живого сечения потока одинаковы,  $\alpha = 1$ ; если же скорости неодинаковы,  $\alpha > 1$ . Докажем это.

Скорость в данной точке живого сечения (местную скорость) можно выразить через среднюю скорость:

$$u = v \pm \Delta u,$$

где  $\Delta u$  — малая величина. Тогда

$$\int_{\omega} u^3 d\omega = \int_{\omega} (v \pm \Delta u)^3 d\omega = \int_{\omega} (v^3 \pm 3v^2\Delta u + 3\Delta u^2v \pm \Delta u^3) d\omega.$$

Интегралом  $\int_{\omega} \Delta u^3 d\omega$  можно пренебречь, а  $3v^2 \int_{\omega} \Delta u d\omega = 0$ , поскольку  $Q = \int_{\omega} u d\omega = \int_{\omega} (v \pm \Delta u) d\omega = v \int_{\omega} d\omega \pm \int_{\omega} \Delta u d\omega = Q \pm \int_{\omega} \Delta u d\omega$ , откуда следует, что  $\int_{\omega} \Delta u d\omega = 0$ .

Итак,

$$\int_{\omega} u^3 d\omega = v^3\omega + 3v \int_{\omega} \Delta u^2 d\omega;$$

$$\alpha = \frac{v^3\omega + 3v \int_{\omega} \Delta u^2 d\omega}{v^3\omega} = 1 + 3 \frac{\int_{\omega} \Delta u^2 d\omega}{v^2\omega} = 1 + 3\epsilon > 1. \quad (132)$$

Значения коэффициента кинетической энергии определяют из эпюры распределения скоростей по живому сечению. Для основных случаев движения жидкости в трубах  $\alpha = 1,04 \div 1,08$  (см. § 40). В инженерных расчетах часто принимают  $\alpha \approx 1$ .

Для вычисления интеграла  $\rho \int (gz + p/\rho) u d\omega$  надо знать не только характер изменения скоростей, но и закон изменения давления по живому сечению. В общем случае решение такой задачи слишком сложно. Поэтому для упрощения вводят определенные ограничения для потока: рассматривают движение, при котором угол расхождения между соседними струйками и кривизна струек невелики. Движение, отвечающее указанным условиям, называют *плавноизменяющимся*.

Для плавноизменяющегося движения в пределах живых сечений потока ускорения и силы инерции столь незначительны, что ими можно пренебречь. Если составить уравнение движения для поверхности живого сечения, оно будет аналогично зависимостям для случая покоя жидкости. Следовательно, можно утверждать, что в пределах живых сечений плавноизменяющегося потока давления распределяются по закону гидростатики, т. е. согласно уравнению (24):

$$gz + p/\rho = \text{const.}$$

Для иллюстрации сказанного приведем примеры плавноизменяющегося движения (рис. 66, а) и движения, которое не отвечает его условиям (рис. 66, б, в). В первом случае пьезометры, подключенные в разных точках живого сечения, дают одинаковую высоту поднятия жидкости, т. е. закон гидростатики (15) выполняется. Для потока, струйки которого сходятся или расходятся, живое сечение будет неплоским (рис. 66, б). В вертикальном сечении появляются составляющие скорости разной величины, а значит, и ускорения. Силы инерции, соответствующие ускорениям, изменяют давление по сравнению с гидростатическим. Отсюда следует, что в потоках, где живые сечения отличаются от плоских, условия плавноизменяющегося движения не выполняются.

При поворотах потока (рис. 66, в) центробежные силы, возникающие вследствие искривления струек, увеличивают или уменьшают давление по сравнению с гидростатическим, что также нарушает условие плавноизменяющегося движения.

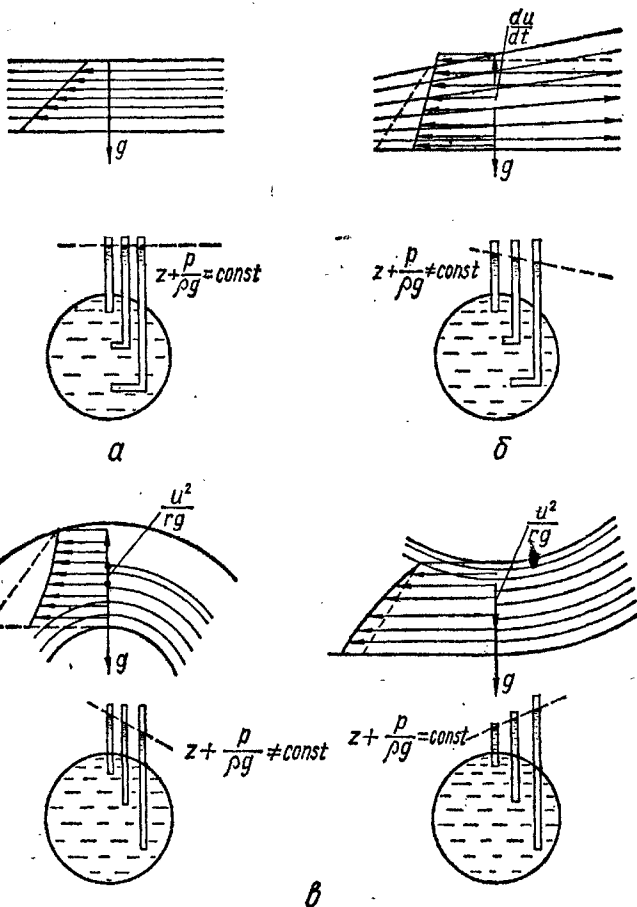


Рис. 66. Виды движений:  
 а — плавноизменяющиеся; б — с расходящимися струйками; в — с искривленными струйками.

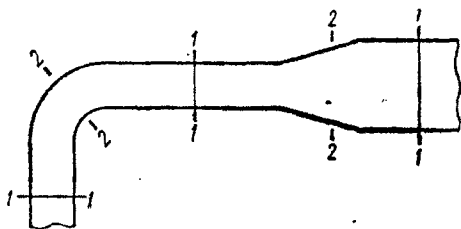


Рис. 67. Сечения, удовлетворяющие и не удовлетворяющие условиям плавноизменяющегося движения.

Итак, для плавноизменяющегося движения в выражении для  $E_{\text{пот}}$  можно вынести за знак интеграла сумму  $gz + p/\rho$ . Тогда

$$E_{\text{пот}} = \frac{\rho \left( gz + \frac{p}{\rho} \right) \int_{\omega} u d\omega}{M} = \frac{\rho Q \left( gz + \frac{p}{\rho} \right)}{M} = gz + \frac{p}{\rho}. \quad (133)$$

Удельная энергия потока с учетом уравнений (131) и (133)

$$E = gz + \frac{p}{\rho} + \alpha \frac{v^2}{2}. \quad (134)$$

Величины  $z$  и  $p$  можно брать для любой струйки; в напорных трубопроводах обычно берут *центральную* струйку, т. е. ту, которая проходит через центры тяжести живых сечений потока.

На рис. 67 линиями 1—1 показаны сечения, для которых выполняется условие плавноизменяющегося движения, линиями 2—2 — сечения, для которых это условие не выполняется.

## § 28

### Уравнение Бернулли для потока несжимаемой жидкости без учета потерь энергии

При решении ряда технических задач, связанных с движением жидкости, можно не учитывать потери энергии, возникающие вследствие вязкости между двумя живыми сечениями. Тогда удельная энергия потока в сечении 2—2 (рис. 68) будет приблизительно равна удельной энергии в сечении 1—1, т. е.  $E_1 \approx E_2$ .

Учитывая выражение для удельной энергии потока живого сечения (134), получаем уравнение Бернулли для потока несжимаемой жидкости без учета потерь энергии:

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2}. \quad (135)$$

Рассмотрим несколько характерных примеров применения уравнения Бернулли для потока несжимаемой жидкости без учета потерь энергии.

**Струйный аппарат.** Проанализируем изменение давления в плавном сужении горизонтальной трубы (рис. 69).



Напишем уравнение (135) для сечения 1—1 перед сужением и в его наиболее узком сечении — горле 2—2 — относительно плоскости сравнения, проведенной по оси трубы ( $z_1 = z_2 = 0$ ), приняв  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2},$$

откуда давление в горле

$$p_2 = p_1 - \rho \left( \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right).$$

Из уравнения неразрывности (129) следует, что с уменьшением живого сечения скорости возрастают, поэтому  $v_2 > v_1$  и, следовательно, давление в горле  $p_2 < p_1$ .

Выразим скорости через расход, поделенный на живое сечение:

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} \text{ и } v_2 = \frac{4Q}{\pi d^2}.$$

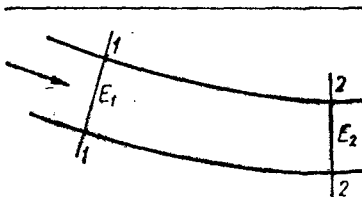
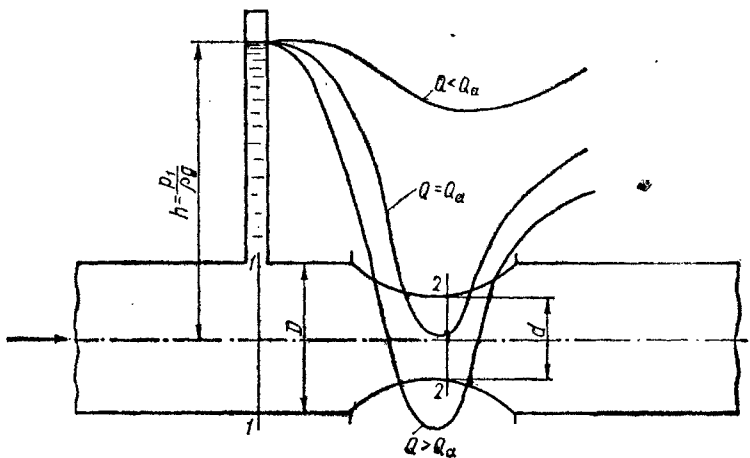


Рис. 68. К выводу уравнения Бернулли для потока.

Рис. 69. К образованию вакуума в плавном сужении трубы.



Тогда

$$p_2 = p_1 - \rho \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \frac{16Q^2}{2\pi^2 d^4}.$$

Последнее соотношение показывает, что давление в горле уменьшается с увеличением расхода. Вычтя из обеих частей равенства атмосферное давление и поделив на  $\rho g$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{p_{2\text{ман}}}{\rho g} &= \frac{p_{1\text{ман}}}{\rho g} - \frac{16}{2g\pi^2 d^4} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) = \\ &= h - \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right), \end{aligned}$$

т. е. пьезометрическая высота в горле при данном диаметре трубы  $D$ , сужении  $d$  и начальной высоте  $h$  уменьшается с увеличением расхода  $Q$ . При некотором значении  $Q_a$  в горле устанавливается атмосферное давление, т. е.  $\frac{p_{2\text{ман}}}{\rho g} = 0$ . При дальнейшем увеличении расхода ( $Q > Q_a$ ) пьезометрическая высота становится отрицательной, т. е. в горле устанавливается вакуум. Для последнего случая предыдущее равенство переписывается так:

$$h_{\text{вак}} = \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) - h.$$

Изменение пьезометрической высоты вдоль сужения характеризуется линией, проведенной через отметки пьезометров, — *пьезометрической линией*.

Отношение  $\frac{d^4}{D^4}$  обычно представляет собой малую величину, которой в первом приближении можно пренебречь. Тогда

$$h_{\text{вак}} \approx \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4} - h = \frac{v_2^2}{2g} - h. \quad (136)$$

Принцип образования вакуума при сужении трубы используется в струйных аппаратах — водоструйных насосах, или гидроэлеваторах, и эжекторах, широко применяемых в водотеплогасоснабжении и вентиляции (откачка воды из подвалов и на строительных площадках, отсасывание вредных газов из помещений, подкачка конденсата в теплосетях и пр.).

**Пример 14.** Определить диаметр горла гидроэлеватора (рис. 70) для образования вакуума  $h_{\text{вак}} = 7$  м при напоре перед аппаратом  $h = 4$  м и расходе  $Q = 2$  л/с.

По формуле (136)

$$\frac{v_2^2}{2g} = h_{\text{вак}} + h = 7 + 4 = 11 \text{ м,}$$

откуда скорость в горле

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 11} = 14,6 \text{ м/с.}$$

Из уравнения расхода (126)

$$d = \sqrt{4/\pi} \sqrt{Q/v} = 1,13 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{14,6}} = 0,013 \text{ м} = 13 \text{ мм.}$$

С уменьшением диаметра горла скорость резко возрастает. Например, при  $d = 12$  мм скорость достигнет значения  $v_2 = 17,8$  м/с, при которой, согласно уравнению (136),  $h_{\text{вак}} = 12$  м, что невозможно. В этом случае движение становится *неустановившимся*. Интенсивное образование пузырьков пара при пониженном давлении ведет к разрыву столба жидкости и прекращению на некоторый момент движения; при этом давление возрастает, пузырьки пара конденсируются и в последующий момент времени движение возобновляется. Затем описанное явление повторяется.

**Труба Вентури** служит для измерения расхода жидкости [17] и представляет собой плавную сходящуюся-расходящуюся вставку, к которой подключается дифференциальный манометр (рис. 71). Труба Вентури принципиально не отличается от сужения для образования вакуума, рассмотренного в предыдущем примере, только тут сужение значительно меньше.

Для вывода расчетной формулы применим уравнение (135) для сечения 1—1 перед сужением и сечения 2—2 в сужении ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ):

$$\Delta p = \rho \left( \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) = \rho \frac{v_2^2}{2} \left( 1 - \frac{v_1^2}{v_2^2} \right).$$

Учитывая уравнение неразрывности (129),

$$\Delta p = \frac{\rho v_2^2}{2} \left( 1 - \frac{d^4}{D^4} \right),$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho} \frac{1}{1 - (d^4/D^4)}}.$$

Подставив в уравнение расхода (126) полученное выражение скорости, находим, что

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho} \frac{1}{1 - (d^4/D^4)}}. \quad (137)$$

Следовательно, зная перепад давления по дифференциальному манометру и подсчитав по этим показаниям  $\Delta p$ , можно для данного диаметра вставки и трубы определить расход жидкости, протекающей через трубу.

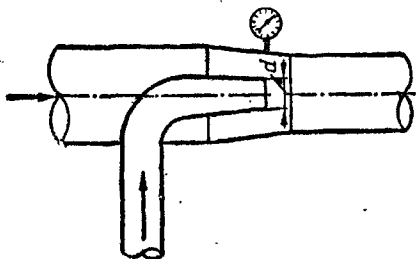


Рис. 70. Схема струйного аппарата.

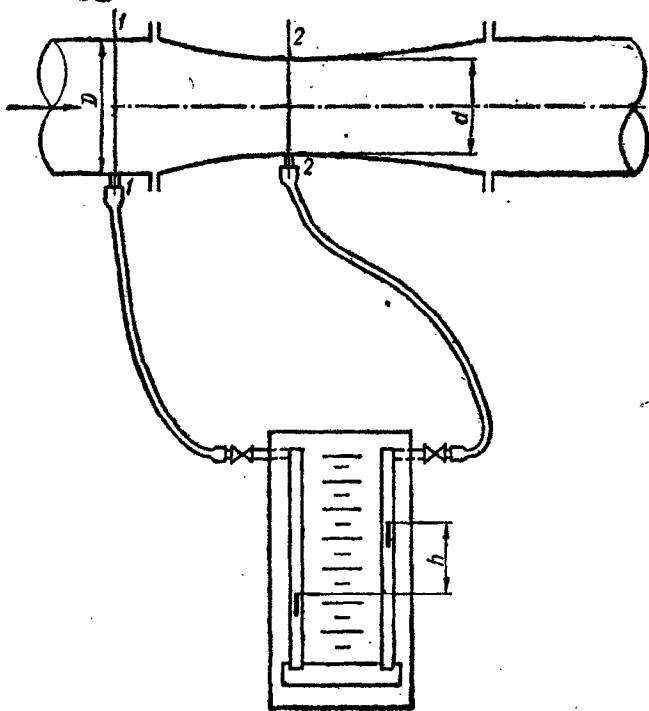


Рис. 71. Водомер Вентури (трубчатый водомер).

**Пример 15.** Определить расход воды через трубу Вентури, вмонтированную в трубопровод диаметром  $D = 100$  мм, если диаметр суженной части  $d = 70$  мм, а перепад давления по дифференциальному манометру  $h = 50$  мм рт. ст.

По формуле (33)

$$\Delta p = g(\rho_{рт} - \rho_{в})h = 9,8(13\,600 - 1000)0,05 = 6175 \text{ Па.}$$

По формуле (137)

$$Q = \frac{\pi \cdot 0,07^2}{4} \sqrt{2 \frac{6175}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{7}{10}\right)^4}} = 0,0155 \text{ м}^3/\text{с} = 15,5 \text{ л/с.}$$

**Пример 16.** Определить массовый расход газа через трубу Вентури при  $D = 100$  мм,  $d = 150$  мм и  $h = 20$  мм вод. ст. Плотность газа  $\rho = 0,7$  кг/м<sup>3</sup>.

По формуле (34)

$$\Delta p = \rho gh = 1000 \cdot 9,8 \cdot 0,02 = 196 \text{ Па.}$$

По формуле (137) расход

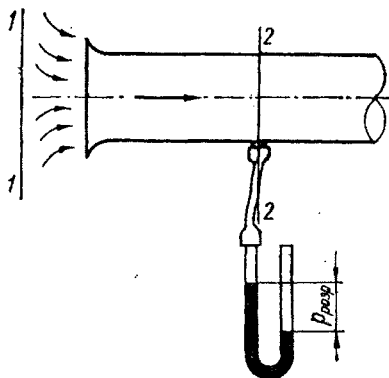
$$Q = \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4} \sqrt{2 \frac{196}{0,7} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{15}{20}\right)^4}} = 0,51 \text{ м}^3/\text{с.}$$

По формуле (125) искомый массовый расход

$$M = \rho Q = 0,7 \cdot 0,51 = 0,36 \text{ кг/с.}$$

**Коллектор.** Участок входа в трубу в системах вентиляции называют *коллектором*. При плавном очертании профиля он может быть использован как измеритель расхода воздуха (рис. 72).

Напишем уравнение Бернулли (135) для сечения перед коллектором ( $v_1 = 0$ ,  $p = p_a$ ) и для сечения 2—2 в самом коллекторе:



$$p_a = p_2 + \rho \frac{\alpha_2 v_2^2}{2}.$$

Разрежение в коллекторе

$$\begin{aligned} p_{\text{разр}} &= p_a - p_2 = \\ &= \alpha_2 \rho \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} = \alpha_2 \rho \frac{Q^2}{2(\pi D^2/4)^2}, \end{aligned}$$

Рис. 72. Схема коллектора.

откуда

$$Q = \frac{\pi D^3}{4} \sqrt{\frac{2\rho_{\text{разр}}}{\alpha\rho}}. \quad (138)$$

**Пример 17.** Определить расход воздуха ( $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$ ), засасываемого вентилятором через коллектор диаметром  $D = 100 \text{ мм}$ , если U-образный манометр показывает разрежение 25 мм вод. ст., а коэффициент  $\alpha = 1,06$ .

По формуле (138)

$$Q = 0,785 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 9,8}{1,06 \cdot 1,2}} = 0,154 \text{ м}^3/\text{с}.$$

## § 29

### Общие сведения о потерях энергии (гидравлических сопротивлениях)

Течение в трубах и каналах с учетом влияния вязкости составляет основное содержание внутренней задачи гидродинамики.

Для описания некоторых гидравлических явлений модель невязкой жидкости оказалась вполне достаточной. Однако уже при изучении самого простого случая течения в горизонтальной цилиндрической трубе с постоянной скоростью применение уравнения Бернулли (135) дает нереальный результат: при  $v_1 = v_2$   $p_1 = p_2$ , хотя в действительности всегда  $p_1 > p_2$ .

В этом случае нетрудно понять механический смысл влияния вязкости. Согласно гипотезе Ньютона [см. формулу (6)], жидкость как бы прилипает к стенкам и поэтому скорость граничной струйки, примыкающей к стенке, равна нулю. Но уже на небольшом расстоянии от стенки она значительна (см., например, эпюру скорости по сечению трубы на рис. 64, а). Это и является причиной возникновения градиента скорости и, как результат, касательного напряжения  $\tau$ , которое, действуя на площадь жидкостного трения, создает силу сопротивления. Для преодоления этих сил требуется определенная затрата механической энергии жидкости. Поэтому в процессе движения вязкой жидкости запас ее механической энергии уменьшается. Обращаясь к схеме рис. 67, можно утверждать, что

$$E_1 > E_2.$$

Обозначим энергию, затрачиваемую на преодоление сил сопротивления,  $E_{\text{п}}$ . Согласно закону сохранения энергии (другими словами — первому закону термодинамики),

$$E_1 = E_2 + E_{\text{п}}. \quad (139)$$

При этом предполагается отсутствие подвода или отвода тепла к потоку.

Согласно второму закону термодинамики,  $E_{\text{п}}$  — это та часть механической энергии, которая вследствие вязкости необратимо перешла в тепловую форму энергии. Таким образом, с энергетической точки зрения действие вязкости, имеющее характер внутренних сил трения в жидкости, выражается в эффекте *рассеяния* (диссипации) энергии. Другими словами,  $E_{\text{п}}$  — это та часть энергии, которая израсходована на преодоление гидравлических сопротивлений.

Аналогичным образом трактуется вопрос о гидравлических сопротивлениях в условиях *внешней задачи*.

Тепловой эффект потерь энергии (гидравлических сопротивлений) во многих случаях мало заметен, в частности, в водопроводных линиях, что в известной степени объясняется относительно большой теплоемкостью воды. Чтобы нагреть 1 кг воды на 1° С, нужно затратить 4200 Дж, что соответствует падению давления на 4200 кПа.

На практике падение давления в водопроводных линиях намного меньше. Кроме того, температура жидкости в трубопроводах мало изменяется благодаря балансу между теплом, которое выделяется при диссипации, и теплоотдачей наружу. Если этот баланс нарушается (например, при работе центробежного насоса вхолостую с закрытой задвижкой или при работе гидросистем с циркуляцией масла), эффект нагрева жидкости может стать весьма ощутимым.

Слабо проявляется также тепловой эффект потерь энергии в воздухо- и газопроводах. Однако при течении насыщенного пара в паропроводах он может вследствие теплового эффекта перейти в перегретое состояние.

В условиях внешней задачи тепловой эффект гидравлических сопротивлений весьма заметен при космических скоростях (сгорание падающих на землю метеоритов, нагрев корпуса космического корабля при входе в земную атмосферу и пр.).

Важно отметить принципиальное различие в оценке теплового эффекта несжимаемых и сжимаемых жидкостей (газов). В первом случае внутренняя энергия жидкости в про-

цессе течения считается неизменной, между тем как при течении газов с учетом их сжимаемости необходимо принимать во внимание изменение внутренней энергии газа вследствие диссипации энергии.

### § 30

#### Уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости и три формы его представления

Основное уравнение. Напишем уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости для двух живых сечений, исходя из уравнений (134) и (139):

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2} + E_n. \quad (140)$$

Это уравнение называется *основным уравнением Бернулли*.

На практике при выполнении инженерных расчетов обычно применяют две другие формы представления уравнения Бернулли.

**Уравнение Бернулли в форме напоров и его геометрический смысл.** Разделим почленно уравнение (140) на ускорение свободного падения  $g$  и обозначим

$$h_n = E_n/g. \quad (141)$$

Вычтем из обеих частей уравнения (140) величину  $\frac{p_a}{\rho g}$ , т. е. перейдем от абсолютного давления к манометрическому. Тогда уравнение (140) примет вид

$$z_1 + \frac{p_{1\text{ман}}}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_{2\text{ман}}}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_n. \quad (142)$$

Каждый член последнего выражения имеет размерность длины и может быть представлен некоторой высотой. Величина  $z$  представляет собой высоту положения рассматриваемой точки пространства с жидкостью относительно некоторой горизонтальной плоскости, называемой *плоскостью сравнения*, величина  $\frac{p}{\rho g}$  равна пьезометрической высоте, а сумма двух высот  $\left(z + \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g}\right)$  характеризует пьезометрический напор.



Величину  $\frac{v^2}{2g}$  называют *скоростным напором*.

Сумму трех высот

$$z + \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} + \alpha \frac{v^2}{2g} = H \quad (143)$$

называют *полным напором потока жидкости*. Разность полных напоров двух живых сечений потока равна потере напора между этими сечениями, т. е.

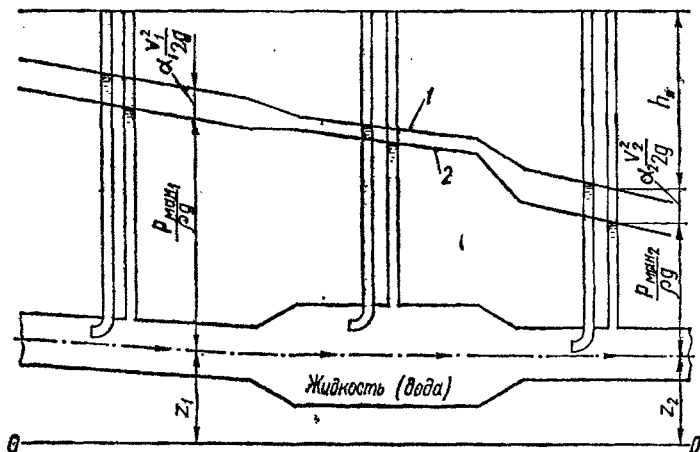
$$h_{\text{п}} = H_1 - H_2. \quad (144)$$

Указанные величины приобретают наглядное геометрическое толкование (рис. 73). Линия, соединяющая пьезометрические отметки вдоль потока, называется *пьезометрической линией*. Уравнение (142) называют *уравнением Бернулли в форме напоров*.

Схему, показанную на рис. 73, нетрудно осуществить в лабораторных условиях. В трубопроводе переменного сечения, внутри которого протекает вода, устанавливают стеклянные пьезометрические трубки и трубки Пито\*. Пер-

Рис. 73. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли (142) в форме напоров:

1 — напорная линия; 2 — пьезометрическая линия.



\* Чтобы показания трубки Пито отвечали полному напорю потока, ее носик нужно расположить примерно на расстоянии четверти радиуса от стенки, где скорость струйки равна средней скорости потока.

вые будут характеризовать пьезометрическую линию, вторые — напорную линию. Вследствие потерь напорная линия обязательно понижается в процессе движения. Разница между напором в начальном и данном сечениях равна потере напора. Пьезометрическая линия на участке трубы постоянного сечения, где скоростной напор не изменяется, параллельна напорной линии; при расширении трубы в связи с уменьшением скоростного напора пьезометрическая линия повышается, а при сужении понижается.

С помощью уравнения Бернулли в форме напоров (142) можно найти высотные отметки жидкости, которые могут быть достигнуты в данной трубопроводной системе. Поэтому уравнение (142) широко используется при проектировании и гидравлических расчетах водопроводов.

С энергетической точки зрения уравнение Бернулли в форме напоров представляет собой энергию жидкости, отнесенную к единице веса.

**Уравнение Бернулли в форме давлений.** Назовем произведение плотности жидкости на удельную потерю энергии потерей давления:

$$p_n = \rho E_n. \quad (145)$$

Тогда уравнение (140) после почленного умножения на плотность  $\rho$  примет вид

$$\rho g z_1 + p_1 + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2} + p_n. \quad (146)$$

Здесь каждый член имеет размерность давления и представляет собой энергию, отнесенную к единице объема. Величину  $p$  называют *статическим давлением* в отличие от величины  $\alpha \frac{\rho v^2}{2}$ , характеризующей *динамическое давление*.

Член, учитывающий влияние сил тяжести, часто называют *гравитационным давлением*. Уравнение (146) назовем *уравнением Бернулли в форме давлений*. Оно применяется в тех случаях, когда пьезометрические отметки (в противоположность уравнению в форме напоров) не являются характерными показателями работы системы, в частности для изучения движения газа (воздуха).

В воздуховодах и газопроводах низкого давления пьезометрические отметки по существу неразличимы, так как пьезометр, подключенный к любой точке системы, вследствие того, что газ (воздух) бесцветен, не дает возможности

определить эту отметку. Характеристикой потенциальной энергии движущегося газа служат в основном показания манометра.

Для выполнения численных расчетов в уравнении (146) давления следует привести к манометрическим. Напишем уравнение гидростатики, которое связывает атмосферное давление для тех же высотных отметок, что и исходное уравнение Бернулли в форме давлений (146):

$$\rho_{\text{н}}gz_1 + p_{a_1} = \rho_{\text{н}}gz_2 + p_{a_2},$$

где  $\rho_{\text{н}}$  — плотность наружного воздуха.

Вычтем из обеих частей уравнения (146) атмосферное давление, например на высоте  $z_1$ :

$$\rho gz_1 + p_1 - p_{a_1} + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho gz_2 + p_2 - p_{a_1} + \alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2} + p_{\text{п}}.$$

Если в правую часть последнего равенства подставить вместо  $p_{a_1}$  его выражение из уравнения гидростатики, то

$$\rho gz_1 + p_1 - p_{a_1} + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho gz_2 + p_2 - p_{a_2} - \rho_{\text{н}}gz_2 + + \rho_{\text{н}}gz_1 + p_{\text{п}}.$$

Обозначив  $p - p_a = p_{\text{ман}}$  и считая  $\rho_{\text{н}} > \rho$ , после перенесения гравитационных членов в левую часть получим:

$$g(\rho_{\text{н}} - \rho)h + p_{1\text{ман}} + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = p_{2\text{ман}} + \alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2} + p_{\text{п}}. \quad (147)$$

Рассмотрим частные случаи уравнения (147):

1. Пренебрегаем гравитационным давлением; тогда

$$p_1 + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2} + p_{\text{п}}. \quad (148)$$

Демонстрация случая, описываемого уравнением (148), в лабораторных условиях осуществляется потоком воздуха, прогоняемого с помощью вентилятора через трубопровод переменного сечения (рис. 74). Жидкостные манометры, подключенные к трубкам Пито и отверстиям в стенке трубы, показывают соответственно полное  $\left(p + \alpha \frac{\rho v^2}{2}\right)$  и статическое давления в разных сечениях. Для удобства сравнения давления отсчитываются от горизонтальной плоскости, проведенной через нули шкал манометров. Давления из-

меняются аналогично пьезометрическим линиям на рис. 73. Разница показаний трубки Пито и статической трубки дает динамическое давление потока в данном сечении, а разность полных давлений в начальном и данном сечениях — потерю давления.

Уравнение (148) применяется для расчета механических систем вентиляции.

2. Пренебрегаем динамическим давлением; тогда

$$g(\rho_n - \rho)h + p_{1\text{ман}} = p_{2\text{ман}} + p_{\text{п}} \quad (149)$$

Для демонстрации случая, описываемого уравнением (149), рекомендуется схема, приведенная на рис. 75, осуществляемая в лабораторных условиях при наличии газопроводной сети низкого давления. Регулируя заслонкой скорость течения, получаем три характерных случая:

а) заслонка закрыта, движение отсутствует и манометрическое давление возрастает по высоте (см. § 12):

$$p_{2\text{ман}} = p_{1\text{ман}} + g(\rho_n - \rho)h;$$

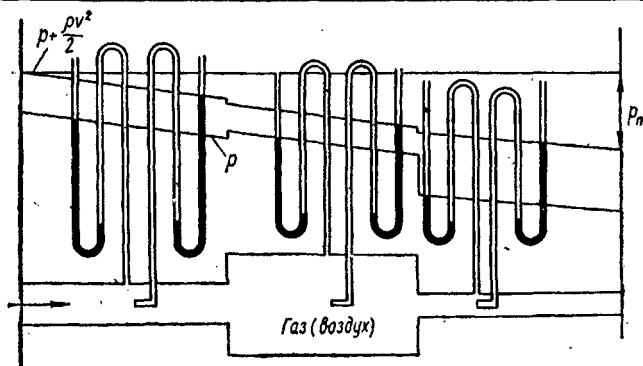
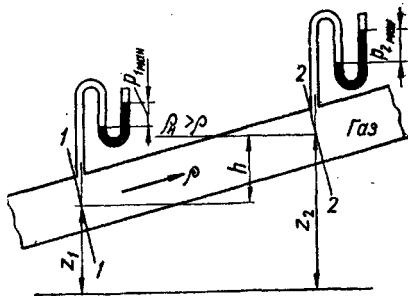


Рис. 74. Иллюстрация к уравнению Бернулли (148) в форме давлений без учета гравитационного члена.

Рис. 75. Схема к демонстрации уравнения Бернулли (149) в форме давлений с учетом гравитационного члена в лабораторных условиях.



б) заслонка открыта так, что потеря давления между рассматриваемыми сечениями  $p_{II}$  равна гравитационному давлению  $g(\rho_H - \rho)h$ , т. е. манометрическое давление одинаково в обоих сечениях:

$$p_{2_{ман}} = p_{1_{ман}};$$

в) заслонка открыта полностью,  $p_{II} > g(\rho_H - \rho)h$ , а манометрическое давление

$$p_{2_{ман}} < p_{1_{ман}}.$$

Уравнение (149) применяется для расчета газовых стояков внутри здания и гравитационных систем вентиляции.

Приведенные схемы движения на рис. 73, 74 и 75 убедительно показывают, почему для капельных жидкостей удобно применять уравнение Бернулли в форме напоров, а для газов — в форме давлений.

Представленные три формы уравнения Бернулли с энергетической точки зрения характеризуют удельную энергию жидкости, отнесенную соответственно к единице массы, веса и объема. Поэтому в дальнейшем уравнение Бернулли для потока жидкости будем также называть *уравнением энергии*, подчеркивая тем самым его энергетический смысл.

### § 31

#### **Уравнение Бернулли для потока вязкой сжимаемой жидкости**

Если при составлении уравнений движения потока несжимаемой жидкости приходилось осреднять по сечению скорости отдельных струек (коэффициент  $\alpha$ ), то при составлении уравнений движения сжимаемой жидкости следует учитывать, что не только скорости, но и плотности, температуры и давления отдельных струек в пределах живых сечений неодинаковы, однако это значительно усложняет исследование. Поэтому при одномерном представлении плавноизменяющегося движения сжимаемой жидкости распространяют уравнение для струйки на весь поток; иначе говоря, поток конечных размеров рассматривают как одну струйку.

Заменяв в уравнениях (119), (120) скорость струйки  $u$  на среднюю скорость потока  $v$ , можно сразу написать *уравнение Бернулли для потока сжимаемой невязкой жидкости*:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const} \quad (150)$$

или

$$\frac{k}{k-1} RT + \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (151)$$

Составим теперь уравнение Бернулли для вязкой сжимаемой жидкости.

Написав уравнение (140) для несжимаемой жидкости в разностной форме (без первого члена, при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ) и переходя к двум близлежащим сечениям, получаем дифференциальное уравнение движения

$$\frac{dp}{\rho} + vdv + dE_n = 0, \quad (152)$$

интегрирование которого для сжимаемой жидкости зависит от конкретных условий движения и закона изменения состояния газа.

Уравнение (152) иногда называют *уравнением энергии в механической форме*.

При адиабатическом течении, где отсутствует обмен тепла со средой вне границ потока, можно получить уравнение движения в конечном виде следующим образом. В термодинамике применяется функция состояния газа, называемая *энтальпией* ( $i$ ). Ее изменение записывается так:

$$di = dq + \frac{dp}{\rho}, \quad (153)$$

где  $q$  — количество тепла, передаваемое 1 кг газа.

Подставив в уравнение (153) уравнение (152), получим:

$$di - dq + vdv + dE_n = 0.$$

При адиабатическом течении энергия, потерянная в результате вязкости, переходит во внутреннее тепло ( $dE_n = -dq$ ), т. е.

$$di + vdv = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$i + \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (154)$$

Уравнение (154) называют *основным уравнением адиабаты*.

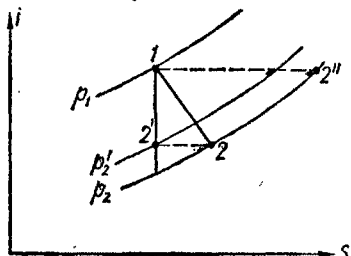


Рис. 76. Процесс течения сжимаемой жидкости на  $i$ - $s$ -диаграмме.

*тического течения газа*, согласно которому сумма удельной кинетической энергии и энтальпии остается неизменной в процессе движения. Важно отметить, что эта сумма остается постоянной независимо от того, рассматривается ли движение невязкого газа или учитывается энергия, затрачиваемая на преодоление сопротивлений вследствие вязкости. Последняя, переходя в тепловую, изменяет внутреннюю энергию, перераспределяя тем самым соотношение между кинетической и потенциальной энергией потока.

Рассмотрим процесс течения на  $i-s$ -диаграмме (рис. 76), которая широко применяется для анализа работы сопл паровых и газовых турбин. По оси абсцисс откладывается энтропия  $s$ , которая характеризует энергию, необратимо перешедшую в тепло. Для вязкого газа энтропия учитывает работу сил сопротивления. Движение невязкого газа происходит при постоянной энтропии, поэтому такой процесс называют *изоэнтропическим*. На рис. 76 он изображен вертикальной прямой  $1-2'$ .

*Адиабатический процесс* движения вязкого газа показан линией  $1-2$ , которая отклоняется вправо вследствие увеличения энтропии из-за потерь механической энергии. При одинаковой разности энтальпий  $i_1 - i_2$  и  $i_1 - i_2'$  скорости  $v_2 = v_2'$ , а давление  $p_2$  вязкого газа меньше по сравнению с невязким. Следовательно, при адиабатическом течении вязкого газа уравнения (150), (151) применять нельзя.

В случае *изотермического течения* газа, происходящего при постоянной температуре (для идеального газа — при постоянной энтальпии), процесс изобразится горизонтальным отрезком  $1-2''$  на рис. 76. Изменения давления и скорости связаны с теплообменом между потоком и окружающей его средой (подробнее см. § 62).

## § 32

### **Уравнение количества движения для установившегося потока несжимаемой жидкости**

Теорема об изменении количества движения системы материальных точек формулируется следующим образом. Производная от количества движения системы  $K$  по времени равна главному вектору внешних сил, действующих на эту

систему:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\Sigma F}. \quad (155)$$

При установившемся движении несжимаемой жидкости, как показал еще Эйлер, изменение количества движения выделенной системы при ее перемещении за время  $\Delta t$  может быть заменено изменением количества движения жидкости, протекающей за тот же промежуток времени между двумя сечениями.

Обратимся к схеме элементарной струйки (рис. 77). При установившемся характере движения при перемещении объема  $1-2$  достаточно рассмотреть изменение характеристик элементарных объемов  $1-1'$  и  $2-2'$ , причем в соответствии с условием неразрывности массы этих элементарных объемов одинаковы. Изменение проекции количества движения на ось струйки за единицу времени при перемещении объема  $1-2$  может быть представлено разностью  $\frac{\Delta m}{\Delta t} (u_2 - u_1)$  или (для несжимаемой жидкости)  $\frac{\rho (\Delta\omega_2 \Delta l_2 u_2 - \Delta\omega_1 \Delta l_1 u_1)}{\Delta t}$ . Но  $\Delta l_2 = u_2 \Delta t$  и  $\Delta l_1 = u_1 \Delta t$ , поэтому

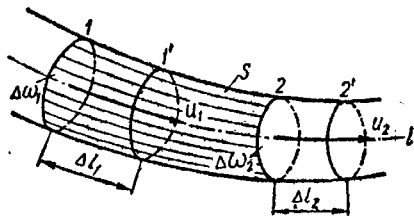
$$\frac{\Delta m}{\Delta t} (u_2 - u_1) = \rho (u_2^2 \Delta\omega_2 - u_1^2 \Delta\omega_1).$$

Это выражение представляет собой изменение секундного количества движения жидкости, проходящей через сечения  $\Delta\omega_1$  и  $\Delta\omega_2$ .

Этот результат можно сформулировать и иначе. Рассмотрим неподвижную поверхность  $S$ , ограничивающую в момент  $\Delta t$  выделенный объем жидкости в струйке между сечениями  $\Delta\omega_1$  и  $\Delta\omega_2$  (рис. 77). Изменение количества движения объема жидкости  $1-2$  в элементарной струйке за время  $\Delta t$  равно разности количества движения жидкости, протекающей через сечения  $1$  и  $2$ , а вся поверхность  $S$  называется *контрольной*.

Выделим поток конечных размеров, ограниченный стенками произ-

Рис. 77. К применению закона количества движения для установившегося потока жидкости.





вольной формы (рис. 78, а), а в нем контрольную поверхность, ограниченную сечениями 1—1 и 2—2, ось потока  $l$  и произвольное направление  $n$ .

Составим выражение для секундного количества движения (КД) массы жидкости, проходящей через данное живое сечение потока. Поскольку эта величина векторная, необходимо указать ее направление. Для плавноизменяющегося движения, где живое сечение считается плоским, направление вектора КД совпадает с направлением местных скоростей и оси потока  $l$ . Следовательно, для несжимаемой жидкости

$$\text{КД} = \rho \int_{\omega} u^2 d\omega.$$

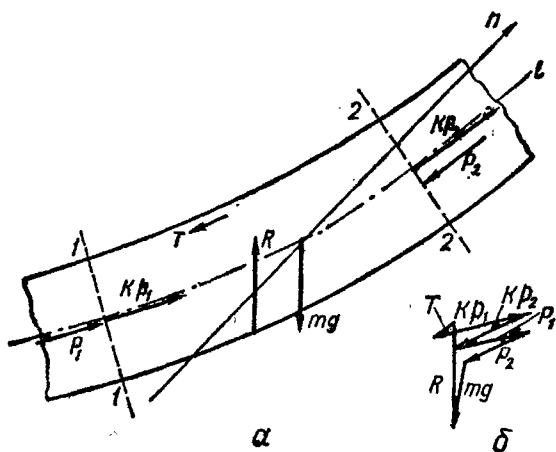
Вводя среднюю скорость  $v$ , получим

$$\text{КД} = \rho v^2 \omega \frac{\int u^2 d\omega}{v^2 \omega} = \beta \rho v^2 \omega, \quad (156)$$

где  $\beta$  — коэффициент количества движения (коэффициент Буссинеска). Он связан с коэффициентом Кориолиса простым соотношением:

$$\beta = \frac{\alpha + 2}{3}. \quad (157)$$

Рис. 78. К выводу уравнения количества движения для потока несжимаемой жидкости.



Эта формула выводится так. Заменяя в выражении для КД скорость струйки  $u$  алгебраической суммой  $v \pm \Delta u$ , получаем

$$\rho \int_{\omega} u^2 d\omega = \rho \int_{\omega} (v \pm \Delta u)^2 d\omega = \rho v^2 \int_{\omega} d\omega \pm 2\rho v \int_{\omega} \Delta u d\omega + \rho \int_{\omega} \Delta u^2 d\omega.$$

Вспомнив вывод формулы (132), констатируем, что средний интеграл правой части равенства равен нулю. Тогда

$$\begin{aligned} \rho \int_{\omega} u^2 d\omega &= \rho v^2 + \rho \int_{\omega} \Delta u^2 d\omega = \rho v^2 \omega \left( 1 + \frac{\rho \int_{\omega} \Delta u d\omega}{v^2 \omega} \right) = \\ &= \rho v^2 \omega (1 + \xi) = \beta \rho v^2 \omega, \end{aligned}$$

откуда  $\xi = \beta - 1$ .

$$\text{Из уравнения (132) } \xi = \frac{\alpha - 1}{3}.$$

Сопоставив два последних равенства, находим условие (157).

На данную контрольную поверхность действуют внешние силы: силы давления  $P$  на живые сечения 1—1 и 2—2, силы тяжести  $G_1 = mg$  объема жидкости, ограниченной контрольной поверхностью, силы реакции боковых стенок на жидкость  $R$  и силы сопротивления  $T$  (для вязкой жидкости). Векторы всех указанных сил и КД образуют замкнутый многоугольник (см. рис. 78, б).

Закон количества движения в проекциях на заданное направление  $n$  для установившегося потока несжимаемой жидкости можно записать так:

$$\begin{aligned} \beta_1 \rho v_1^2 \cos(l, n) - \beta_2 \rho v_2^2 \cos(l, n) &= P_{n_1} + P_{n_2} + \\ &+ R_n + T_n + G_n. \end{aligned} \quad (158)$$

Рассмотрим течение на повороте трубы (рис. 79). Выделим объем жидкости, ограниченный контрольной поверхностью 1—1 — 2—2. Пренебрегая силами тяжести и сопротивления, абсолютные значения сил давления  $P_1$  и  $P_2$  можно считать равными. Проектируем эти силы на вертикальное направление.

Уравнение (158) в данном случае запишется так:

$$\beta \rho v^2 \omega \sin \frac{\theta}{2} - \left( -\beta \rho v^2 \omega \sin \frac{\theta}{2} \right) = P \sin \frac{\theta}{2} + R \sin \frac{\theta}{2} + R,$$

откуда сила реакции стенки на жидкость (или одинаковая, но противоположная по знаку сила реакции жидкости на

стенку)

$$F = 2 \sin \frac{\Theta}{2} (P - \beta \rho v^2 \omega) = 2 \sin \frac{\Theta}{2} \omega (p - \beta \rho v^2).$$

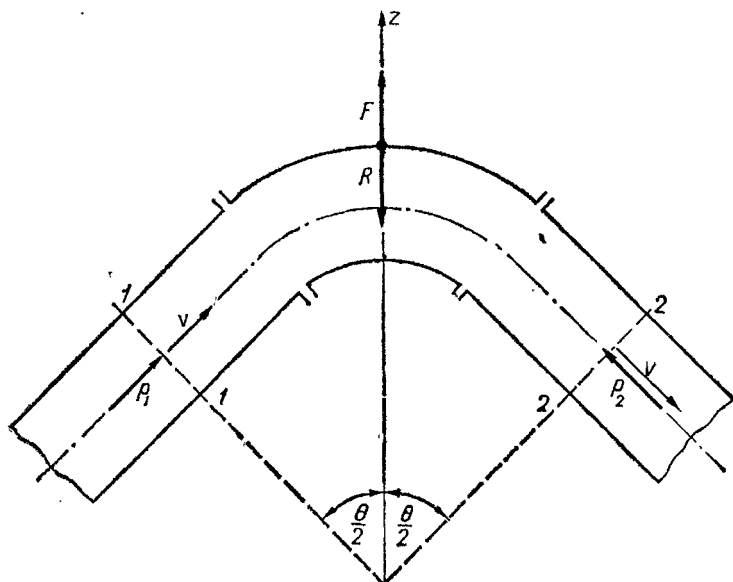
Во многих случаях произведение  $\beta \rho v^2$  намного меньше  $p$ . Если им пренебречь, то

$$F = 2 p \omega \sin \frac{\Theta}{2}.$$

Сила реакции жидкости на стенку при повороте трубы может оказаться весьма значительной и ее действие необходимо учитывать при проектировании трубопроводных систем.

В заключение напомним, что важной особенностью закона количества движения является исключение из рассмотрения внутренних сил, действующих в жидкости, ограниченной контрольной поверхностью. Это дает возможность применять закон количества движения для анализа местных потерь энергии.

Рис. 79. Применение закона количества движения для определения реакции жидкости на стенку на повороте трубы.



## Глава V

### ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

#### § 33

#### Общие сведения

Получение конкретных зависимостей для расчета потерь энергии при движении жидкости в трубах и каналах является основным содержанием внутренней задачи гидроаэродинамики.

Начнем с изучения наиболее простого, но вместе с тем очень распространенного случая движения, — равномерного движения.

Основная задача при изучении равномерного движения состоит в определении потерь энергии на единицу длины трубопровода, идущих на преодоление гидравлических сопротивлений.

*Равномерным* называется установившееся течение жидкости, при котором скорость каждой струйки в потоке не изменяется по длине. Иначе говоря, при равномерном потоке живое сечение, величина и распределение скоростей остаются неизменными. Равномерное движение происходит в цилиндрических трубах и призматических каналах достаточной длины при условии, что жидкость в процессе движения несжимаема (рис. 80).

*Неравномерным* называется движение, при котором скорости струек изменяются (либо по длине изменяется живое сечение потока, либо при неизменном живом сечении изменяется распределение скоростей, либо изменяется и то и другое). Неравномерное движение возникает в трубах конусообразной формы и после препятствий по пути движения (рис. 81), а также в случае сжимаемой жидкости.

**Потери по длине и местные потери энергии.**  
Рассмотрим движение

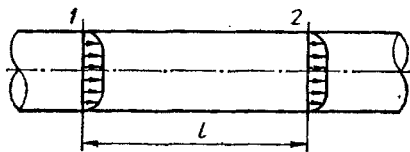


Рис. 80. Равномерное движение.

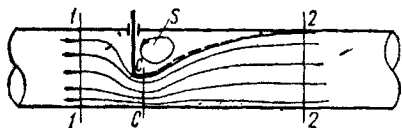


Рис. 81. Неравномерное движение.

жидкости в горизонтальном трубопроводе постоянного сечения с неизменной эпюрой скоростей, т. е. равномерное движение (рис. 80). Напишем уравнение Бернулли (146) для двух сечений в форме давлений:

$$\rho g z_1 + p_1 + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} + p_{\pi}.$$

Поскольку в данном примере  $z_1 = z_2$ , средняя скорость  $v_1 = v_2$  и  $\alpha_1 = \alpha_2$ ; тогда

$$p_1 - p_2 = p_{\pi}.$$

Так как  $p_{\pi} = \rho E_{\pi}$ , потеря энергии при равномерном движении пропорциональна разности давлений между рассматриваемыми сечениями. Если предположить, что потерь нет ( $E_{\pi} = 0$ ), то  $p_1 = p_2$ ; в действительности при равномерном движении давление в последующем сечении всегда меньше, чем в предыдущем ( $p_2 < p_1$ ).

Работа сил давления  $p_{\pi}$  расходуется на преодоление сил сопротивления, что и обуславливает потери механической энергии. Эти потери прямо пропорциональны длине пути движения, поэтому их называют *потерями удельной энергии по длине*. Если потери выражены в единицах давления, их называют *потерями давления по длине* и обозначают  $p_l$ . Если потери энергии выражены в линейных единицах ( $E_{\pi}/g$ ), их называют *потерями напора по длине* и обозначают  $h_l$ .

Различают еще *местные потери энергии*, которые образуются в результате изменения структуры потока по пути движения жидкости (более подробно см. в § 42).

Рассмотрим движение жидкости через частично открытую задвижку в трубопроводе (см. рис. 81). В отверстии (точнее, в суженном сечении С—С) скорости увеличиваются, а давления уменьшаются. В сечении 2—2 на некотором расстоянии после задвижки скорости принимают значения, равные скоростям в сечении 1—1 перед задвижкой. При отсутствии местных потерь давление в сечении 2—2 за счет уменьшения скорости на участке С—2 и преобразования кинетической энергии в потенциальную (если пренебречь на этом участке потерями по длине) достигло бы своего первоначального значения  $p_1$ . Опыт, однако, показывает, что давление  $p_2$  намного меньше, чем давление  $p_1$ . Уравнение энергии в форме давлений (146) для сечений 1—1 и 2—2 запишется так:

$$p_1 = p_2 + p_{\pi},$$

где местная потеря давления  $p_m = p_{\Pi}$  (соответственно местная потеря напора обозначается  $h_m$ ).

Чтобы объяснить возникновение местных потерь, нужно непосредственно наблюдать явление. Как видно из рис. 81, на участке С—2 наряду с основным течением четко различается область вихревого движения (на рис. 81 она обозначена S). Скорости движения частиц в этой зоне значительно меньше, чем в основном потоке. Это и обуславливает в соответствии с формулой (6) появление значительных касательных напряжений и отвечающих им сил сопротивлений. Работа этих сил осуществляется за счет кинетической энергии суженной части потока, которая вследствие действия вязкости необратимо переходит в тепло. Поэтому давление в сечении 2—2 за местным сопротивлением полностью не восстанавливается (хотя скорости в этом сечении такие же, как и в сечении 1—1) и меньше давления  $p_1$ .

**Удельная потеря давления.** Гидравлический и пьезометрический уклоны. *Удельной* называют потерю давления, отнесенную к единице длины трубопровода:

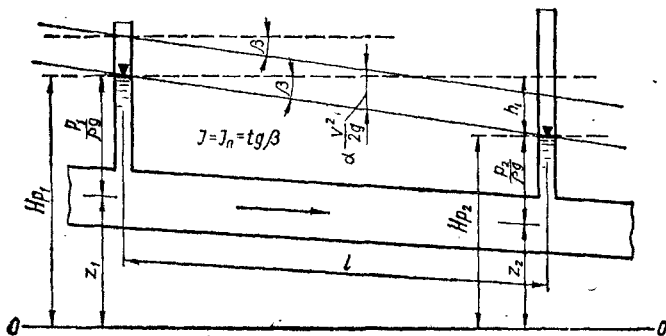
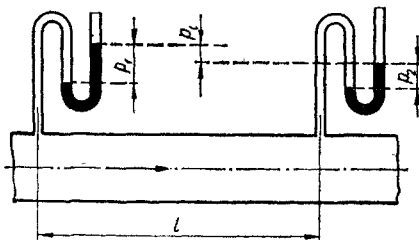
$$R_l = p_l/l. \quad (159)$$

При равномерном движении, пренебрегая силами тяжести, потеря давления по длине (рис. 82)

$$p_l = p_1 - p_2. \quad (160)$$

Рис. 82. К понятию потери давления по длине.

Рис. 83. К понятию гидравлического и пьезометрического уклоны.



Следовательно, удельная потеря давления

$$R_l = (p_1 - p_2)/l. \quad (161)$$

Понятие удельной потери давления широко используется при расчетах вентиляционных систем и газопроводов низкого давления.

Потерю напора по длине на основании уравнения (142) можно записать как разность полных напоров первого и второго сечений участка трубопровода:

$$h_l = \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} \right).$$

Потерю напора, отнесенную к единице длины, называют *гидравлическим уклоном*  $I$ :

$$I = \frac{h_l}{l} = \frac{\left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} \right)}{l}. \quad (162)$$

Гидравлический уклон для данной точки оси трубопровода в дифференциальной форме выражается так:

$$I = - \frac{d}{dl} \left( z + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{v^2}{2g} \right). \quad (163)$$

Знак «минус» подчеркивает, что напорная линия вдоль трубы в процессе движения может только понижаться.

При равномерном движении и прямолинейной оси трубы напорная линия также представляет собой прямую (рис. 83), а гидравлический уклон характеризуется тангенсом угла наклона этой прямой по отношению к горизонту; при этом средний гидравлический уклон равен уклону в точке ( $I_{cp} = I$ ).

Изменение пьезометрической линии на единицу длины называют *пьезометрическим уклоном*  $I_{п}$ :

$$I_{п} = - \frac{d}{dl} \left( z + \frac{p}{\rho g} \right). \quad (164)$$

При равномерном движении, когда  $d \left( \alpha \frac{v^2}{2g} \right) = 0$ , гидравлический уклон равен пьезометрическому ( $I = I_{п}$ ), пьезометрическая линия проходит параллельно напорной на расстоянии (по вертикали) скоростного напора (см. рис. 83), а сама потеря напора выражается разностью пьезо-

метрических отметок (напоров):

$$h_l = \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = H_{p_1} - H_{p_2}. \quad (165)$$

В горизонтальной трубе потеря напора по длине равна разности пьезометрических высот между рассматриваемыми сечениями:

$$h_l = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}. \quad (166)$$

При неравномерном движении пьезометрический уклон не совпадает с гидравлическим. В замедленном потоке (при расширении трубы) пьезометрический уклон в некоторых случаях может оказаться положительным, т. е. пьезометрическая линия не понижается, а повышается в процессе движения.

### § 34

#### Уравнение равномерного движения и его характеристики

Составим уравнение равномерного движения жидкости. Для такого движения характерным является отсутствие ускорений и сил инерции. Поэтому механическая трактовка равномерного движения весьма проста.

Выделим объем жидкости 1—2 в трубе (рис. 84). Поскольку тут ускорения равны нулю, к такому отсеку можно применить уравнение статики. На выделенный объем жидкости действуют такие внешние силы: нормальные к живым сечениям силы давления  $P_1 = p_1 \omega$  и  $P_2 = p_2 \omega$  и касательные силы сопротивления  $T$ , приложенные к боковой поверхности. Силы сопротивления направлены против движения.

Обозначим касательные напряжения, действующие по поверхности раздела между неподвижными стенками трубы и потоком,  $\tau_0$ , а смоченный периметр\* живого сечения —  $\chi$ . Тогда площадь поверхности, где проявляются эти силы сопротивления, равна  $\chi l$ , а сила  $T = \tau_0 \chi l$ .

\* Под *смоченным периметром* понимают линию контакта между жидкостью и стенкой. Не всегда периметр сечения трубы совпадает со смоченным периметром. Например, в безнапорных трубах, применяющихся в канализации, поток не доходит до верха трубы. В трубах, заполненных жидкостью, смоченный периметр совпадает с периметром сечения трубы.



Спроектируем указанные силы на направление движения:

$$P_1 = P_2 + T, \quad \text{или} \quad \rho_1 \omega = \rho_2 \omega + \tau_0 \chi l.$$

Потеря давления

$$p_l = p_1 - p_2 = \frac{\tau_0 \chi l}{\omega} = \frac{\tau_0 l}{R}, \quad (167)$$

а удельная потеря давления

$$R_l = \frac{p_l}{l} = \frac{\tau_0}{R}. \quad (168)$$

В этих формулах отношение площади живого сечения к смоченному периметру

$$R = \omega / \chi \quad (169)$$

называют *гидравлическим радиусом*.

Гидравлический радиус не равен геометрическому радиусу. Например, для круглой трубы гидравлический радиус

$$R = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4} = \frac{r_0}{2}, \quad (170)$$

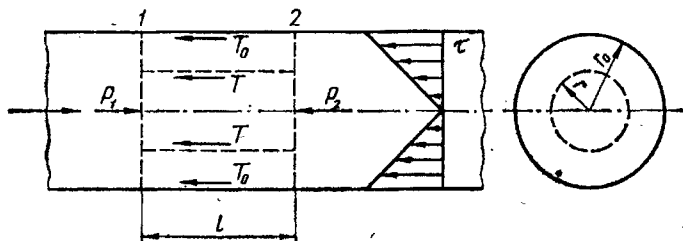
т. е. равен 1/4 диаметра или 1/2 геометрического радиуса  $r_0$ .

Подставив последнее соотношение в уравнение (168), получим удельную потерю давления в круглой трубе:

$$R_l = \frac{4\tau_0}{d} = \frac{2\tau_0}{r_0}. \quad (171)$$

Так как при равномерном движении гидравлический уклон равен удельной потере давления, деленной на плот-

Рис. 84. К выводу уравнения равномерного движения.



ность и ускорение силы тяжести, то

$$I = \frac{R_l}{\rho g} = \frac{\tau_0}{\rho g l}. \quad (172)$$

При выводе указанных уравнений мы не учитывали влияние сил тяжести, рассматривая движение жидкости в горизонтальной трубе. Читатель может убедиться, что эти формулы справедливы и для случаев, когда труба имеет геометрический уклон и силы тяжести проектируются на направление движения.

Уравнения равномерного движения являются исходными для составления формул гидравлического расчета трубопроводов.

Подобно изложенному выше, можно вывести уравнение динамического равновесия для выделенного отсека внутри трубы, радиус которого  $r$  меньше радиуса трубы  $r_0$  (штриховая линия на рис. 84), подставив в уравнение равномерного движения (171) вместо напряжения вблизи стенки  $\tau_0$  напряжение сил сопротивления между соприкасающимися поверхностями жидкости  $\tau$ , действующее на цилиндрическую поверхность радиусом  $r$ , т. е.

$$R_l = 2\tau r.$$

Сопоставив последнее соотношение с Уравнением (171), находим

$$\tau/\tau_0 = r/r_0. \quad (173)$$

Следовательно, касательные напряжения в сечении круглой трубы обратно пропорциональны расстоянию от стенки (см. рис. 84). Аналогичную зависимость получим и для трубопроводов некруглого сечения.

Уравнения равномерного движения подтверждают, что падение давления в трубе обусловлено касательными напряжениями. Однако чтобы определить величину касательных напряжений, необходимо прежде всего познакомиться с вопросом о режимах движения жидкости.

### § 35

#### **Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкости. Число Рейнольдса**

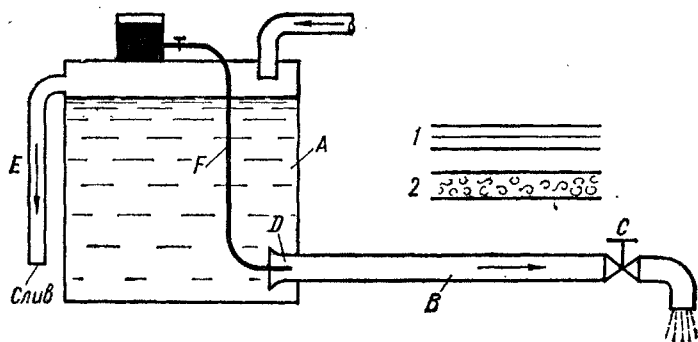
Наблюдения показывают, что в жидкости возможны две совершенно различные формы движения. Наиболее четко эти формы проявляются при равномерном течении в трубах.

Прделаем следующий опыт. К резервуару *A*, наполненному водой, присоединим стеклянную трубку *B*, скорость течения в которой регулируется краном *C* (рис. 85). Раструб *D* в начале трубы служит для ликвидации возмущений, которые возникают в потоке при неплавном входе. Переливная труба *E* устраивается для поддержания постоянного уровня в резервуаре *A*. Чтобы движение жидкости можно было наблюдать визуально, в трубу с помощью капиллярной трубки *F* подается раствор краски (например, марганцовокислый калий).

Когда кран открыт незначительно и скорость течения воды в трубе *B* невелика, струйка раствора краски, вытекающей из трубки *F*, принимает форму нити. Это говорит о том, что отдельные частицы жидкости в трубе перемещаются по прямолинейным траекториям параллельно стенкам трубы и друг другу. Никаких поперечных перемещений частиц не происходит. Иначе говоря, жидкость в круглой трубе движется как бы концентрическими кольцевыми слоями, которые не перемешиваются между собой. Такое движение называют *ламинарным* (от латинского слова *lamina* — слой).

Если кран *C* сильно открыт, скорость течения в трубе окажется значительной и струйка раствора краски будет размываться, равномерно окрашивая всю массу жидкости, что указывает на непрерывное и интенсивное перемешивание ее слоев. Отдельные частицы жидкости или целые группы частиц конечных размеров («жидкие комки») ведут себя приблизительно как молекулы по представлениям кинети-

Рис. 85. Прибор Рейнольдса для определения режимов течения:  
1 — ламинарный режим; 2 — турбулентный режим.



ческой теории газов, т. е. пребывают в состоянии хаотичного (беспорядочного) движения. Поскольку поток в целом движется прямолинейно, жидкие комки наряду с общим поступательным движением имеют и случайные поперечные перемещения; во всем потоке происходит процесс непрерывного перемешивания частиц жидкости. Такое движение называется *турбулентным* (от латинского слова *turbulentus* — неупорядоченный, бурный).

Таким образом, приведенный опыт показывает, что одна и та же жидкость может иметь два разных режима течения: ламинарный и турбулентный.

Турбулентный поток по своим свойствам резко отличается от ламинарного. Как мы убедимся в дальнейшем, при ламинарном режиме потери энергии по длине пропорциональны первой степени скорости, при турбулентном — пропорциональны приблизительно квадрату скорости.

Отличны процессы передачи тепла при ламинарном и турбулентном режимах течения. В первом случае теплообмен происходит только за счет теплопроводности жидкости; при турбулентном режиме в результате непрерывного поперечного перемещения частиц решающую роль играет теплообмен путем конвекции. Поэтому эффективность теплообмена при турбулентном режиме намного больше, чем при ламинарном.

Наконец, вопрос о двух режимах течения тесно связан с *эффектом турбулентной диффузии*, когда поперечные перемещения масс жидкости способствуют переносу твердых частиц.

Условия перехода от ламинарного течения капельной жидкости к турбулентному и, наоборот, от турбулентного к ламинарному в круглых трубах впервые в 1883—1885 гг. изучил английский исследователь О. Рейнольдс. Проведя большое число опытов на установке, схема которой приведена на рис. 85, Рейнольдс установил, что этот переход определяется такими четырьмя физическими величинами: средней скоростью течения  $v$ , диаметром трубы  $d$ , вязкостью жидкости  $\mu$  и ее плотностью  $\rho$ .

С помощью этих четырех величин составим выражение, которое характеризовало бы режим течения жидкости. Чтобы это выражение можно было применить для жидкостей любой вязкости и плотности, движущихся с разными скоростями в трубах разного диаметра, оно должно быть безразмерным, т. е. представлять собой абстрактное число.

Из указанных величин ( $v$ ,  $d$ ,  $\mu$  и  $\rho$ ) можно составить такую комбинацию:

$$Re = v d \rho / \mu. \quad (174)$$

С учетом зависимости (7) между динамическим и кинематическим коэффициентом вязкости выражение (174) принимает вид:

$$Re = v d / \nu. \quad (175)$$

Безразмерное число, определяемое выражениями (174), (175), получило название *числа Рейнольдса*.

В своих исследованиях Рейнольдс пришел к выводу, что существует некоторое критическое значение  $Re_{кр}$ , являющееся границей между ламинарным и турбулентным режимами течения, и нашел его:

$$Re_{кр} = 2300. \quad (176)$$

При  $Re > 2300$  движение будет турбулентным, а при  $Re < 2300$  — ламинарным.

Критическое число  $Re_{кр} = 2300$  проверялось неоднократно многими исследователями для разных жидкостей, а также и для газов. В частности, для воздуха оно было получено Стантоном в 1914 г.

Более тонкие исследования показывают, что в пределах изменения числа Рейнольдса от 2000 до 4000 происходит периодическая смена турбулентного и ламинарного режимов (так называемая *перемежающаяся турбулентность*). Поэтому более точными условиями ламинарного и турбулентного режимов течения в трубах следует считать следующие:

$$\left. \begin{array}{l} Re < 2000 \text{ — ламинарный режим;} \\ Re > 4000 \text{ — турбулентный режим.} \end{array} \right\} \quad (177)$$

Указанные условия критического режима отвечают так называемой нижней границе перехода от одного режима к другому, т. е. границе перехода от турбулентного движения к ламинарному. Если же наблюдать обратный переход (от ламинарного движения к турбулентному), оказывается, что эта верхняя граница зависит от многих случайных причин (условия входа в трубу, наличия возмущений в резервуаре, откуда происходит истечение, и пр.). При выполнении специальных опытов удавалось довести верхнюю границу до значения  $Re_{кр} = 20\,000$  и более. Разумеется, что в практических условиях, где всегда есть источники случайных возмущений, следует считаться только с нижней границей.

Приведенные данные относятся к равномерному течению

жидкости и газа в трубах. При неравномерном движении значение  $Re_{кр}$  существенно зависит от характера изменения скоростей вдоль течения. Например, в сужающихся трубах, где скорость возрастает по течению и само течение более устойчиво, нижнее значение  $Re_{кр}$  резко возрастает (до 20 000 для труб круглого сечения). Наоборот, в расширяющихся трубах, где скорости уменьшаются по течению, переход от турбулентного режима движения к ламинарному происходит при  $Re_{кр} < 2000$ .

Учитывая важность определения критического числа Рейнольдса, исследователи уже давно пытались решить эту задачу теоретически.

С механической точки зрения возникновение двух режимов обусловлено степенью устойчивости движения. При турбулентном режиме всякие случайные возмущения имеют тенденцию роста; наоборот, при ламинарном режиме они угасают. В жидкости, представляющей собой непрерывную среду, состоящую из бесконечно большого количества движущихся частиц, скорость их движения является фактором, который стремится нарушить упорядоченный процесс течения в целом. С другой стороны, вязкость жидкости можно рассматривать как систему внутренних связей, которые действуют в качестве стабилизирующего фактора.

Итак, при преобладании сил инерции, которые зависят от скорости (иначе говоря, при больших значениях  $Re$ ) возникает турбулентный режим движения, а при преобладании сил вязкости (при малых значениях  $Re$ ) — ламинарный. Однако описанный метод исследования, ясный по своей идее, пока еще не дал количественных решений для течения жидкости в трубах.

Образование турбулентного движения можно обосновать еще исходя из общих законов физики, в частности из второго закона термодинамики в формулировке С. Больцмана: «Во всякой изолированной системе происходят такие изменения, которые приводят систему в ее наиболее вероятное состояние». С этой точки зрения хаотичное движение отдельных частиц в потоке жидкости, свойственное турбулентному движению, является более вероятным, чем другие, более упорядоченные формы движения. Параллельно-струйное ламинарное течение может возникнуть только в условиях, которые не дают возможности частицам жидкости двигаться беспорядочно (из-за большой вязкости жидкости при малых скоростях).

Отметим, что число Рейнольдса, как и вообще любой безразмерный параметр, носит универсальный характер; оно пригодно для любых жидкостей (газов), для больших установок и малых моделей.

Напомним, что при изучении сопротивлений, теплопередачи, переноса тепла и пассивных примесей, транспортирования твердых частиц в жидкости и во многих других случаях число Рейнольдса является исходным для построения расчетных зависимостей.

**Пример 18.** Определить режим течения жидкости в трубах при следующих условиях:

а) жидкость — вода, средняя скорость течения  $v = 1$  м/с, диаметр трубы  $d = 100$  мм, кинематическая вязкость при  $t = 20^\circ \text{C}$   $\nu = 0,01$  см<sup>2</sup>/с;

б) жидкость — газ,  $v = 4$  м/с,  $d = 15$  мм,  $\nu = 0,165$  см<sup>2</sup>/с;

в) жидкость — горячая вода,  $v = 0,1$  м/с,  $d = 32$  мм,  $\nu = 0,0037$  см<sup>2</sup>/с при  $t = 80^\circ \text{C}$ ;

г) жидкость — воздух,  $v = 6$  м/с,  $d = 200$  мм,  $\nu = 0,16$  см<sup>2</sup>/с.

По формуле (175) сначала находим число Рейнольдса, а затем, пользуясь условием (176), определяем режим течения:

$$\text{а) } Re = \frac{1 \cdot 0,1}{0,01 \cdot 10^4} = 10\,000 > 2300;$$

$$\text{б) } Re = \frac{4 \cdot 0,015}{0,165 \cdot 10^4} = 3670 > 2300;$$

$$\text{в) } Re = \frac{0,1 \cdot 0,032}{0,0037 \cdot 10^4} = 8650 > 2300;$$

$$\text{г) } Re = \frac{6 \cdot 0,2}{0,16 \cdot 10^4} = 75\,000 > 2300.$$

Режим турбулентный

Результаты расчетов свидетельствуют, что в большинстве случаев движение жидкости в трубах турбулентное.

## § 36

### Ламинарное течение в круглых трубах и его характеристики

Ламинарное течение в круглой цилиндрической трубе происходит без поперечных перемещений частиц жидкости, т.е. параллельными слоями. В данном случае можно представить, что эти слои свернуты в концентрические трубки, которые движутся поступательно вдоль оси трубы, скользят одна относительно другой, причем каждая такая трубка (слой) полностью сохраняет свою форму.

Чтобы рассчитать рассматриваемое течение, можно вос-

пользоваться формулой (6) для касательного напряжения между двумя слоями жидкости. Поскольку цилиндрические слои имеют общий центр по оси трубы,  $dn = dr$  и формула (6) в данном случае принимает вид:

$$\tau = \mu \frac{du}{dn} = -\mu \frac{du}{dr}.$$

Касательное напряжение всегда считается положительной величиной. Поэтому знак перед  $\mu \frac{du}{dr}$  зависит от градиента скорости  $\frac{du}{dr}$ . В данном случае градиент скорости отрицательный, так как скорость уменьшается в направлении оси  $r$ .

Подставив в последнее уравнение вместо  $\tau$  его выражение из формулы (173), получим:

$$\tau_0 \frac{r}{r_0} = -\mu \frac{du}{dr},$$

откуда

$$du = -\frac{\tau_0}{\mu r_0} r dr,$$

или

$$u = -\frac{\tau_0}{2\mu r_0} r^2 + \text{const.} \quad (178)$$

Константу находим из граничного условия: на стенке ( $r = r_0$ ) скорость равна нулю. Тогда

$$\text{const} = \frac{\tau_0 r_0}{2\mu}$$

и

$$u = \frac{\tau_0 r_0}{2\mu} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

По оси трубы, где  $r = 0$ , скорость должна быть максимальной.

Согласно условию (178)

$$u_{\text{макс}} = \frac{\tau_0 r_0}{2\mu}, \quad (179)$$

откуда

$$u = u_{\text{макс}} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right). \quad (180)$$



Полученная формула показывает, что при ламинарном течении скорости в сечении трубы распределяются по закону параболы (рис. 86).

Вычислим среднюю скорость ламинарного течения, используя формулы (123), (127) и (180) расхода, средней скорости и скорости каждой струйки:

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int_{\omega} u d\omega}{\omega} = \frac{\int_0^{r_0} u_{\text{макс}} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) 2\pi r dr}{\pi r_0^2} = \frac{u_{\text{макс}}}{2}. \quad (181)$$

Таким образом, средняя скорость потока при ламинарном течении в круглой трубе равна половине максимальной.

На основе выражения (130) и формулы (180) определяется коэффициент Кориолиса, равный в данном случае 2.

Из уравнений (179) и (181) следует, что касательное напряжение у стенки определяется средней скоростью и радиусом трубы:

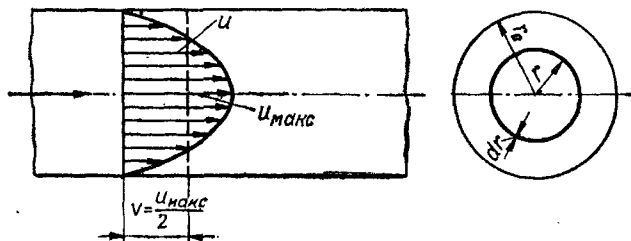
$$\tau_0 = \frac{4\mu v}{r_0^2}.$$

Наконец, подставив это выражение в уравнение равномерного движения (171), получаем зависимость для удельной потери давления:

$$R_l = \frac{2\tau_0}{r_0} = \frac{8\mu v}{r_0^2} = \frac{32\mu v}{d^3}. \quad (182)$$

Зная, что  $\mu = \nu\rho$ , из формулы (182) найдем выражения

Рис. 86. Эпюра скоростей при ламинарном течении в цилиндрической трубе.



для потери давления и напора по длине:

$$\left. \begin{aligned} p_l &= \frac{32\nu\rho vl}{d^2}; \\ h_l &= \frac{32\nu vl}{gd^2}. \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

Формулы (183) впервые были получены экспериментально Пуазейлем в 1841 г., а теоретически обоснованы 20 лет спустя. Полное соответствие экспериментальных данных теории подтвердили правильность гипотезы Ньютона о природе жидкостного трения.

С помощью формул (183) можно определить коэффициент вязкости различных капельных жидкостей. Для этого достаточно измерить потерю напора между двумя сечениями капиллярной трубки (ибо в капиллярных трубках вследствие малых диаметров практически обеспечивается ламинарный режим течения) и расход, если известны диаметр трубки и расстояние между сечениями. Схема прибора приведена на рис. 87.

Уравнение Бернулли в форме напоров (142) для сечений 1—1 и 2—2

$$H = \alpha \frac{v^2}{2g} + h_l.$$

Выразив скорость через расход и учитывая, что для ламинарного течения коэффициент кинетической энергии (Кориолиса)  $\alpha = 2$ , находим

$$H = 2 \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4} + \frac{128\nu Ql}{g\pi d^4}.$$

Величины  $H$ ,  $l$ ,  $d$  известны и для определения  $v$  достаточно только измерить расход  $Q$ .

Ламинарный режим течения характерен, главным образом, для вязких жидкостей (нефть, мазут, минеральные масла и пр.). В санитарно-технической практике ламинарное течение иногда приходится наблюдать на малых объектах водяного отопления и внутридомового газопровода.

Кроме того, течение в ламинарном режиме происходит через пористую среду, например при инфильтрации воздуха через строительные ограждения или при движении воды в некоторых фильтрах очистных сооружений.

**Пример 19.** Нагревательная печь (рис. 88) расходует 400 кг мазута в час ( $M = 400$  кг/ч). Плотность мазута  $\rho = 900$  кг/м<sup>3</sup>, его кинетическая вязкость  $\nu = 0,27$  см<sup>2</sup>/с. Определить, на какой высоте следует

расположить напорный бак относительно оси форсунки, если давление перед ней должно быть не менее 50 кПа при длине подводящей трубы  $l = 25$  м и диаметре  $d = 20$  мм.

Массовый секундный расход мазута

$$M = \frac{400}{3600} = 0,11 \text{ кг/с.}$$

Средняя скорость течения мазута в трубопроводе

$$v = \frac{M}{\rho\omega} = \frac{0,11}{900 \cdot 0,785 \cdot 0,02^2} = 0,39 \text{ м/с.}$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{0,39 \cdot 0,02}{0,27 \cdot 10^{-4}} = 290 < 2300 \text{ (режим ламинарный).}$$

Пренебрегая кинетической энергией движения, т. е. членом  $\alpha \frac{v^2}{2g}$  в уравнении Бернулли (142), для сечения по уровню мазута в баке и сечения перед форсункой

$$h = \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} + h_l,$$

или, с учетом формулы (183), для потери напора по длине

$$h = \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} + \frac{32\nu vl}{gd^2} = \frac{50 \cdot 10^3}{900 \cdot 9,8} + \frac{32 \cdot 0,27 \cdot 10^{-4} \cdot 0,39 \cdot 25}{9,8 \cdot 0,02^2} = 7,8 \text{ м.}$$

Рис. 87. Схема прибора для определения кинематической (или динамической) вязкости капельной жидкости.

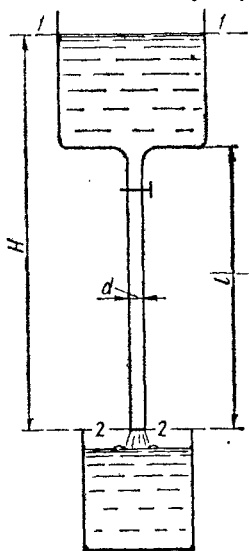
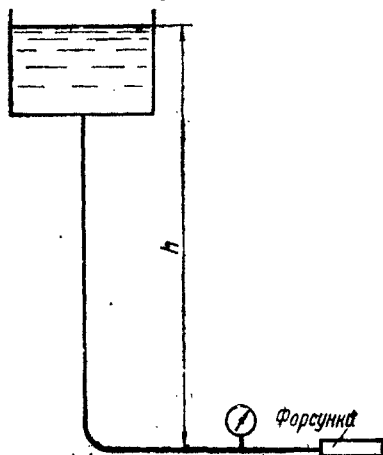


Рис. 88. К примеру 19.



В заключение необходимо отметить, что при рассмотрении ламинарного режима течения в трубах некруглого сечения нетрудно получить соответствующие характеристики, применив метод исследования, аналогичный приведенному выше.

## § 37

### **Основные характеристики турбулентного движения**

Подавляющее число движений, встречающихся в технике, являются турбулентными, а не ламинарными. Турбулентные течения происходят в трубах, потоках атмосферного воздуха, помещениях, в таких устройствах, как форсунки, газовые горелки, струйные аппараты, при обтекании тел и пр.

Турбулентные течения значительно сложнее ламинарных. Для изучения турбулентности нужны методы, существенно отличающиеся от тех, которые применяются для изучения ламинарного движения. Беспорядочный характер движения отдельных частиц (жидких комков) жидкости в турбулентном потоке требует применения методов статистической механики. Между статистической механикой молекулярного движения и статистической гидроаэромеханикой вязкой жидкости, несмотря на то что они кажутся на первый взгляд аналогичными, существует принципиальное отличие. Оно выражается прежде всего в том, что суммарная кинетическая энергия молекул не меняется со временем (по кинетической теории газов), тогда как в турбулентном потоке кинетическая энергия жидкости всегда в той или иной мере рассеивается, переходя вследствие вязкости в тепло.

Приведем краткие сведения по турбулентности, необходимые для усвоения дальнейшего материала.

**Мгновенная, осредненная и пульсационная скорости.** Хаотичность турбулентного движения с кинематической точки зрения означает, что скорости жидкости в отдельных точках пространства, через которые она протекает, непрерывно изменяются как по величине, так и по направлению.

Скорость в данной точке турбулентного потока, измеренную в данный момент времени, называют *мгновенной* (обозначают  $u'$ ).

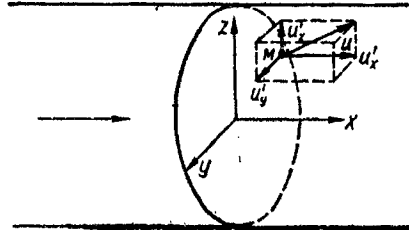
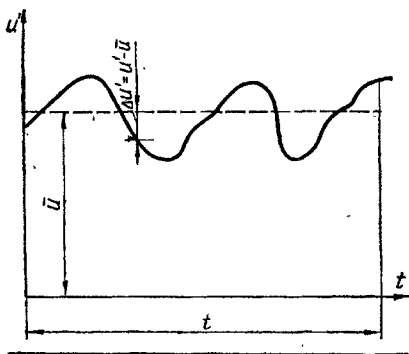
Для измерения мгновенной скорости необходимы приборы с очень малой инерцией. Таким свойством обладает, например, термоанемометр. Принцип действия прибора состоит в том, что электрическое сопротивление проводника, помещенного в движущуюся жидкость, которая подогревается электрическим током, изменяется при изменении скорости течения вследствие повышения температуры; особенно удобен этот способ измерения для воздушных потоков [3]. Для водяных потоков, где электрическое сопротивление воды зависит не только от скорости течения, конструкция термоанемометра существенно усложняется. В таких случаях часто предпочитают в качестве первичного прибора тензометрический датчик. Мгновенную скорость можно измерять также методом визуализации потока с последующей его съемкой на киноплёнку или фотографированием с малой экспозицией; этот способ достаточно точен, но весьма громоздок.

Типичная картина изменения мгновенной скорости со временем приведена на рис. 89: изменение скорости, как видно, носит случайный характер.

При изучении турбулентного потока вводят понятие осредненной скорости. *Осредненной* называют среднюю за некоторый промежуток времени скорость в данной точке:

$$\bar{u} = \frac{1}{t} \int_0^t u' dt, \quad (184)$$

где  $t$  — достаточно длинный интервал времени.



Замена поля мгновенных скоростей на поле осредненных скоростей дает возможность применить для турбулентного потока понятие элементарной струйки и разделить на неустановившееся и установившееся движение.

Рис. 89. Характер изменения мгновенной скорости в данной точке турбулентного потока с течением времени.

Рис. 90. Разложение мгновенной скорости на составляющие по трем взаимно перпендикулярным направлениям, одно из которых совпадает с направлением осредненной скорости.

Рассмотрим равномерное течение в трубе с постоянным расходом. Разложим мгновенную скорость, измеренную в данной точке, на три составляющие по координатным осям:  $u'_x$ ,  $u'_y$ ,  $u'_z$ , причем пусть ось  $x$  совпадает с осью трубы (рис. 90). Каждая из составляющих скоростей изменяется со временем, однако для установившегося движения за достаточный промежуток времени, несмотря на случайный характер отдельных значений мгновенной скорости, осредненные во времени значения поперечных составляющих равны нулю, т. е.

$$\bar{u}_y = \frac{1}{t} \int_0^t u'_y dt = 0 \quad \text{и} \quad \bar{u}_z = \frac{1}{t} \int_0^t u'_z dt = 0,$$

а продольная составляющая скорости

$$\bar{u}_x = \frac{1}{t} \int_0^t u'_x dt = \bar{u}$$

будет иметь конечное значение. На рис. 89 это значение соответствует высоте прямоугольника, равновеликого площади диаграммы скорости.

Если подобным способом определить осредненные скорости нескольких точек поперек трубы, получим эпюру осредненных скоростей по сечению трубы, представленную на рис. 65 (или на рис. 92). Осреднение же последних дает среднюю скорость. Следовательно, не следует смешивать осредненную скорость  $\bar{u}$  со средней скоростью потока  $v$ : первая дает осреднение во времени в данной точке, вторая — результат осреднения по сечению. Осредненная скорость измеряется приборами с большой инерцией, например трубкой Пито — Прандтля (см. рис. 55).

Осредненную скорость можно рассматривать как скорость струйки. При неизменном расходе жидкости, протекающей через трубу, эпюра осредненных продольных скоростей в данном живом сечении не изменяется с течением времени, что и является признаком установившегося движения.

Понятие осредненной скорости впервые было предложено Буссинеском (1867 г.) и развито Рейнольдсом. С помощью этого понятия действительный турбулентный поток с его беспорядочно движущимися массами жидкости заменяют воображаемой моделью потока, представляющей совокуп-

ность элементарных струек, скорости которых как по величине, так и по направлению равны осредненным скоростям. А это значит, что к турбулентному потоку можно применить те представления одномерной гидравлики, которые были развиты в предыдущей главе.

Отклонение мгновенной скорости от ее осредненного значения

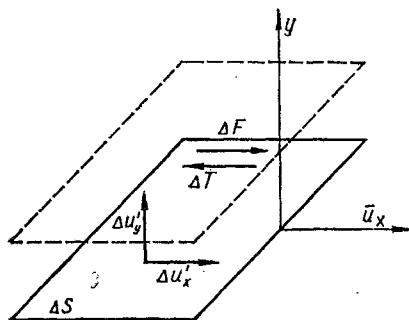
$$\Delta u' = u' - \bar{u} \quad (185)$$

называют *пульсационной скоростью*, или просто *пульсацией*.

Для установившегося движения пульсации изменяют свою величину и знак так, что эффект их осреднения во времени (при условии достаточного интервала времени  $t$ ) равняется нулю. На рис. 89 абсолютные значения пульсаций изображены вертикалями, отсчитываемыми от штриховой горизонтальной линии осредненной скорости.

**Механизм возникновения касательных напряжений.** Замена действительных беспорядочных движений жидких комков на фиктивное струйное движение требует введения некоторых фиктивных сил взаимодействия между воображаемыми струйками. Благодаря этому появляется новый вид поверхностных сил и соответствующих касательных напряжений.

Рассмотрим, что происходит в турбулентном потоке, если действительную хаотичную картину заменить струйчатой моделью движения, учитывая при этом действие пульсаций. Выделим элементарный слой жидкости, движущийся в направлении оси  $x$  с осредненной скоростью  $\bar{u}_x$  (рис. 91). За время  $dt$  (меньшее периода осреднения) в силу наличия поперечной пульсационной добавки  $\Delta u'_y$  через площадку  $\Delta S$  пройдет элементарная масса жидкости  $\rho \Delta S u'_y dt$ .



Для определения количества движения этой массы жидкости ее нужно умножить на скорость, которая в данном случае равна пульсационной добавке  $\Delta u'_x$ .

Рис. 91. Схема, иллюстрирующая обмен количества движения между двумя соседними слоями жидкости в турбулентном потоке.

Следовательно, количество движения равно  $\rho \Delta S \Delta u_x' \Delta u_y' dt$ . Внедряясь в слой, находящийся вблизи (на рис. 91 он показан штрихами), элементарная масса теряет свое количество движения, вследствие чего возникает импульс силы

$$\Delta F dt = \rho \Delta S \Delta u_x' \Delta u_y' dt.$$

Сила  $\Delta F$  имеет одинаковое направление со слоем и стремится подтянуть площадку, лежащую вблизи и обозначенную штриховой линией. Однако в соответствии с третьим законом Ньютона возникает сила сопротивления  $\Delta T$ , тормозящая движение этой площадки, равная по величине силе  $\Delta F$  и противоположная ей по направлению\*.

$$\Delta T dt = -\rho \Delta S \Delta u_x' \Delta u_y' dt.$$

Поделив обе части последнего уравнения на  $\Delta S dt$ , получим выражение для касательного напряжения:

$$\tau_{xy} = -\rho \Delta u_x' \Delta u_y'.$$

Итак, касательные напряжения в турбулентном потоке обуславливаются пульсациями, или обменом количества движения между соседними слоями жидкости. Слой, движущийся с большей скоростью, подтягивает за собой отстающий и, наоборот, слой, который движется медленнее, тормозит опережающий. Знак «минус» подчеркивает, что сила сопротивления имеет направление, противоположное продольной пульсации. Индексы  $x$  и  $y$  показывают направление движения слоя и поперечных пульсаций:  $x$  — направление осредненного движения, а  $y$  — направление поперечных пульсаций.

Осредненные касательные напряжения

$$\tau_{\text{турб}} = -\rho \overline{\Delta u_x' \Delta u_y'}. \quad (186)$$

Подчеркнем, что в последнем соотношении осреднение значения произведения пульсаций не равно нулю, хотя осреднение пульсаций отдельно по  $x$  и  $y$  для установившегося движения даст нуль. Действительно, если положительным

\* Этот результат можно иллюстрировать более грубым, но наглядным примером о двух платформах, движущихся по рельсам параллельно друг другу и нагруженных мешками с песком: перебрасывая мешки с одной платформы на другую, можно одновременно затормозить движение данной платформы и ускорить движение соседней.



пульсациям  $\Delta u'_x$  соответствуют главным образом положительные пульсации  $\Delta u'_y$ , а отрицательным пульсациям  $\Delta u'_x$  — отрицательные  $\Delta u'_y$ , то превалирующее число произведений  $\Delta u'_x \Delta u'_y$  положительно. Если же, наоборот, положительным  $\Delta u'_x$  соответствуют главным образом отрицательные пульсации  $\Delta u'_y$ , а отрицательным пульсациям  $\Delta u'_x$  — положительные  $\Delta u'_y$ , превалирующее число произведений  $\Delta u'_x \Delta u'_y$  отрицательно. Следовательно, в обоих случаях среднее от произведений  $\Delta u'_x \Delta u'_y$  не равно нулю, причем знак касательного напряжения как реакции силы соответствующего импульса будет обратным.

На современном уровне знаний мы еще не научились рассчитывать пульсации. Однако, как показывает зависимость (186), касательные напряжения турбулентных пульсаций пропорциональны квадрату скорости.

Этот результат очень важен для понимания закона сопротивления при турбулентном течении.

В схематизированном турбулентном потоке, кроме указанных сил турбулентного обмена вследствие пульсаций, еще проявляются (главным образом вблизи стенки) силы внутреннего трения, или вязкости, определяемые по формуле (6). Полное касательное напряжение от турбулентных пульсаций  $\tau_{\text{турб}}$  и сил вязкости  $\tau_{\text{вязк}}$

$$\tau = \tau_{\text{турб}} + \tau_{\text{вязк}},$$

или, с учетом уравнений (186) и (6),

$$\tau = -\rho \overline{\Delta u'_x \Delta u'_y} + \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy}. \quad (187)$$

Коэффициенты турбулентного обмена, теплопроводности и диффузии. Первый член уравнения (187), характеризующий напряжение от турбулентных пульсаций, можно записать в форме уравнения (6) для внутреннего трения:

$$\tau_{\text{турб}} = -\rho \overline{\Delta u'_x \Delta u'_y} = \varepsilon \frac{d\bar{u}_x}{dy}, \quad (188)$$

где

$$\varepsilon = \frac{-\rho \overline{\Delta u'_x \Delta u'_y}}{\frac{d\bar{u}_x}{dy}} \quad (189)$$

называют *турбулентной вязкостью*.

Выражение (188) было предложено Буссинеском в 1867 г. В отличие от динамического коэффициента вязкости  $\mu$  в формуле (6) коэффициент  $\varepsilon$  учитывает не молекулярную структуру жидкости, а особенности турбулентного движения. Из формулы (189) следует, что величина  $\varepsilon$  не является константой для данной жидкости, а изменяется при переходе от одной точки к другой в зависимости от кинематических характеристик потока в этих точках. Только при изучении турбулентности земной атмосферы можно считать коэффициент турбулентной вязкости постоянным для всех ее слоев.

Коэффициент  $\varepsilon$  для турбулентного потока в трубе зависит от формы ее поперечного сечения и от расстояния между данной точкой и стенкой трубы.

Измеряя осредненные скорости и пульсации потока, можно с помощью выражения (189) определить коэффициент  $\varepsilon$  в данной точке. Установлено, что коэффициент турбулентной вязкости в сотни и даже в тысячи раз больше молекулярной вязкости  $\mu$ .

Турбулентное перемешивание является причиной возникновения не только добавочных касательных напряжений вследствие переноса количества движения, но также переноса тепла и твердых частиц.

Если в разных точках потока температура неодинакова, частицы жидкости, перемещающиеся с мест с более высокой температурой, забирают оттуда больше тепла, чем туда приходится с частицами, перемещающимися с мест с низкой температурой. В результате происходит перенос тепла из зон с высокой температурой в области с низкой температурой, т. е. явление, которое можно характеризовать как *турбулентную теплопроводность*. По аналогии с уравнением (188) можно написать

$$Q = c_p \varepsilon_Q \frac{dt}{dy}, \quad (190)$$

где  $Q$  — перенос тепла при турбулентном перемешивании, приходящийся на единицу времени и площади;  $c_p$  — теплоемкость жидкости при постоянном давлении;  $\frac{dt}{dy}$  — градиент температур;  $\varepsilon_Q$  — коэффициент турбулентной теплопроводности.

Если в потоке есть пассивная примесь твердых частиц с концентрацией  $c$ , при турбулентном перемешивании за

единицу времени на единицу площади переносится масса примесей

$$M = \varepsilon_M \frac{dc}{dy}. \quad (191)$$

Механизм переноса тепла или примесей не вполне тождествен переносу количества движения. Поэтому числовые значения коэффициентов  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_Q$  и  $\varepsilon_M$ , входящих в формулы (188), (190), (191), неодинаковы и зависят от условий движения. Исследования показывают, что  $\varepsilon_Q/\varepsilon = 1,4 \div 2$ , а  $\varepsilon_M/\varepsilon = 1,2 \div 1,4$ .

**Масштаб турбулентности и диссипация энергии.** Статистическая теория турбулентности пока еще не дает возможности рассчитывать турбулентные пульсации в зависимости от конкретных условий движения. Иначе говоря, мы еще не умеем связать пульсации с осредненными скоростями в формулах (186), (187) без широкого использования данных экспериментальных исследований. Эти формулы также не раскрывают физического содержания явления, поскольку диссипация (рассеяние) энергии происходит в конце концов не вследствие фиктивной турбулентной вязкости  $\varepsilon$ , а в результате действия молекулярной вязкости при беспорядочном движении отдельных частиц жидкости.

По А. Н. Колмогорову [22] механизм диссипации состоит в следующем. В турбулентном потоке существуют пульсации разных масштабов. Под масштабом пульсаций понимают порядок величины расстояний, пройденных «жидкими комками» при их беспорядочном движении в турбулентном потоке. Наибольший масштаб пульсаций определяется размерами установки. Например, для трубы максимальный масштаб пульсации близок к диаметру трубы.

В число Рейнольдса  $Re$ , которое определяет свойства данного течения в целом, входит линейная характеристика  $l$  [для трубы это диаметр  $d$  — см. формулу (175)]. Наряду с таким числом Рейнольдса можно ввести качественное понятие о числах Рейнольдса, которые имеются в турбулентном потоке пульсаций разных масштабов.

Если  $l$  характеризует порядок величины масштаба данного движения, а  $u_l$  — порядок величины его скорости, то соответствующее число Рейнольдса определится как  $Re_l = \frac{u_l l}{\nu}$ . Это число тем меньше, чем меньше масштаб движения.

При больших значениях  $Re$  велики также и значения  $Re_c$  крупномасштабных пульсаций. Однако большие числа Рейнольдса эквивалентны малым вязкостям. Следовательно, вязкость жидкости становится существенной только для мелкомасштабных пульсаций, где значения  $Re_c$  имеют порядок, равный, приблизительно 1. Именно в этих мелкомасштабных пульсациях, незначительных с точки зрения общей картины движения в турбулентном потоке, и происходит диссипация энергии. Поэтому пульсации, входящие в формулу (186), относятся к мелкомасштабным. Большие завихрения, которые образуются за препятствием (см., например, рис. 81 и рис. 102), являются крупномасштабными пульсациями. Их кинетическая энергия переходит в пульсации меньшего масштаба практически без рассеивания энергии, пока они не станут достаточно малы. Так возникает своеобразный «каскадный» процесс, при котором энергия осредненного движения последовательно передается все меньшим пульсациям вплоть до движений минимального масштаба, где превалирует влияние вязкости.

### § 38

#### **Формула Дарси для расчета потерь энергии по длине трубы. Формула Шези**

В предыдущем параграфе было установлено, что касательные напряжения в турбулентном потоке пропорциональны квадрату скорости [см. формулу (186)]. Однако полученная зависимость носила только качественный характер, поскольку до настоящего времени еще не найдены способы расчета пульсаций.

Для получения расчетной формулы потерь энергии по длине трубы следует исходить из уравнения равномерного движения (168).

На основании уравнения (186) можно утверждать, что существует связь между средней (расчетной) скоростью потока  $v$  и касательным напряжением у стенки  $\tau_0$  такого вида:

$$\tau_0 = k\rho v^2, \quad (192)$$

где  $k$  — некоторый коэффициент, определяемый из опыта.

Подставив эту зависимость в формулу (168), а затем (172), получаем выражения гидравлического уклона и

удельной потери давления для круглой трубы

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}; \\ R_l &= \frac{4\tau_0}{d} = \frac{4k\rho v^2}{d} = \frac{8k\rho v^2}{2d} = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{\rho v^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

Отсюда потери напора и давления по длине

$$\left. \begin{aligned} h_l &= \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}; \\ p_l &= \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho v^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

В этих формулах безразмерный эмпирический коэффициент  $\lambda$  называют *коэффициентом гидравлического трения*.

Последнее выражение в литературе получило название формулы Дарси. Эта формула весьма удобна для практического пользования и является основной при расчете потерь по длине в трубах.

Французский инженер А. Дарси (1803—1858) проводил опыты по определению потерь напора в новых и бывших в эксплуатации трубах из различных материалов. Он впервые предложил эмпирическую формулу пропорциональной зависимости гидравлического уклона от квадрата скорости и установил влияние состояния внутренней поверхности труб на сопротивление.

До Дарси скорость равномерного течения воды в открытых каналах определяли по *формуле Шези*

$$v = C\sqrt{Ri}, \quad (195)$$

где  $C$  — эмпирический коэффициент, называемый коэффициентом Шези;  $i$  — геометрический уклон дна русла;  $R$  — гидравлический радиус живого сечения потока.

Если эту формулу записывать в виде  $i = v^2/(C^2R)$ , то становится очевидно, что она, как и формула Дарси (193), показывает квадратичный закон сопротивления.

Для равномерного течения в открытом русле гидравлический уклон равен геометрическому:  $I = i$ . Это следует из уравнения (162), если учесть, что в открытом потоке  $p_1 = p_2 = p_a$  (давление на поверхности воды равно атмосферному). Тогда  $I = \frac{z_1 - z_2}{l}$ , но разность геометрических отметок живых сечений, поделенная на расстояние между ними, равна приблизительно уклону дна русла  $i$ , значит, формулу (195) можно записать так:

$$v = C\sqrt{RI},$$

откуда  $I = \frac{v^2}{C^2R}$ .

Сравнивая последнее выражение с выражением (193) и учитывая, что для круглых труб  $R = d/4$ , получаем зависимость между коэффициентом гидравлического трения и скоростным множителем:

$$\lambda = 8g/C^2. \quad (196)$$

Формулы Шези и Дарси подтверждают справедливость вывода, полученного в § 37 при анализе механизма трения, что в турбулентном потоке сопротивление в первом приближении пропорционально квадрату скорости. Более детальный анализ с учетом молекулярного трения дает закон пропорциональности в степени, меньшей 2.

Коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  в формулах Дарси легко определяется опытным путем. Для этого достаточно измерить разность пьезометрических отметок (для газов — разность давлений) в двух сечениях испытываемого трубопровода и среднюю скорость течения. В результате обобщения огромного экспериментального материала удалось установить, что  $\lambda$  в конечном итоге является функцией двух безразмерных параметров: числа Рейнольдса  $Re$ , учитывающего влияние скорости и вязкости жидкости, а также размеры самого трубопровода, и относительной шероховатости  $\frac{k}{d}$ , где  $k$  — линейная величина, характеризующая влияние стенок. Таким образом,

$$\lambda = f\left(Re, \frac{k}{d}\right). \quad (197)$$

## § 39

### Распределение скоростей по сечению трубы и полуэмпирические теории турбулентного движения

На рис. 92 показана типичная эпюра осредненных скоростей по сечению трубы, полученная путем измерения скоростей трубкой Пито — Прандтля в турбулентном потоке. Для сравнения штриховой линией показано распределение скоростей при ламинарном течении по формуле (180). Выравниванию осредненной скорости содействуют поперечные перемещения частиц жидкости. Скорости незначительно изменяются в основной толще потока, но резко уменьшаются вблизи стенки. Средняя скорость течения составляет приблизительно 0,8 максимальной против 0,5 при ламинарном течении.

Соотношения (187), (188) показывают, что касательные напряжения в турбулентном потоке зависят от градиента осредненных скоростей  $du/dy$  и, следовательно, от харак-

тера эпюры осредненных скоростей. На рис. 92 видно, что наибольшие касательные напряжения вблизи стенки, где градиент скорости велик.

**Теория Прандтля. Опыты Никурадзе.** Трудности, возникающие при попытках математического описания турбулентного движения, привели к возникновению полуэмпирических теорий турбулентного движения.

Рассмотрим вкратце наиболее простую теорию Л. Прандтля (1933 г.), идеи которой во многом сохранили свое значение и до настоящего времени.

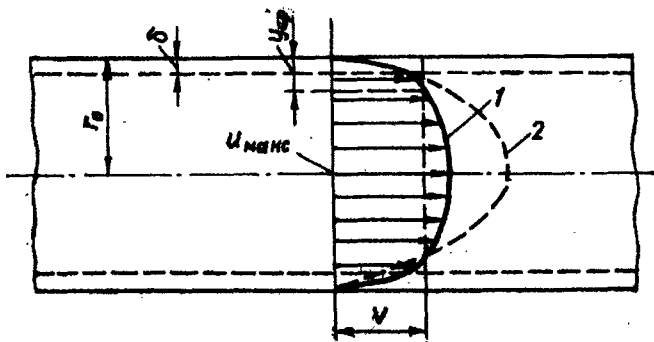
Как уже указывалось, эпюра осредненных скоростей по живому сечению связана с эффектом сопротивления. Поэтому вывод расчетных зависимостей следует начинать с попыток теоретически получить профиль скоростей. Решение задачи может идти по следующему пути. Нужно выдвинуть гипотезу, пусть хотя бы самую грубую, о связи между пульсациями и осредненными скоростями, построить на этой основе эпюру осредненных скоростей и сопоставить затем ее с опытом.

Центральным в теории Прандтля является допущение, что продольные и поперечные пульсации в формуле (186) пропорциональны в соответствующих точках градиенту осредненной скорости:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u'_x &\sim l_{\text{пер}} \frac{d\bar{u}}{dy} ; \\ \Delta u'_y &\sim l_{\text{пер}} \frac{d\bar{u}}{dy} , \end{aligned} \right\} \quad (199)$$

Рис. 92. Эпюры скоростей по сечению трубы при равномерном движении:

1 — осредненные скорости при турбулентном режиме; 2 — скорости при ламинарном режиме.



где  $y$  — расстояние от стенки;  $l_{\text{пер}}$  — некоторый параметр, имеющий размерность длины.

Физически параметр  $l_{\text{пер}}$  связан с масштабом турбулентных пульсаций: это расстояние, на которое «жидкий комок» может двигаться в продольном или поперечном направлении в виде неразрывного целого, т. е. с сохранением своего количества движения; Прандтль назвал  $l_{\text{пер}}$  «длиной пути перемешивания».

Подставив выражения (199) в уравнение (186), получим формулу Прандтля для турбулентного трения:

$$\tau = \rho l_{\text{пер}}^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \rho l_{\text{пер}}^2 \frac{d\bar{u}}{dy} \frac{d\bar{u}}{dy} = \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (200)$$

где коэффициент турбулентной вязкости

$$\varepsilon = \rho l_{\text{пер}}^2 \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (201)$$

Очевидно, возможный масштаб пульсаций тем меньше, чем ближе данная струйка осредненного движения к стенке. Прандтль принял, что длина пути перемешивания прямо пропорциональна расстоянию от стенки  $y$ , т. е.

$$l_{\text{пер}} = \kappa y, \quad (202)$$

где  $\kappa$  — некоторая константа.

Подставив уравнение (202) в (200), находим

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \kappa y \frac{d\bar{u}}{dy},$$

откуда

$$d\bar{u} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{dy}{y}. \quad (203)$$

Следующим в теории Прандтля является допущение, что в основной толще потока касательное напряжение постоянно и приблизительно равно касательному напряжению на стенке, т. е.

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \text{const.} \quad (204)$$

Это допущение вытекает непосредственно из характера эпюры осредненных скоростей (рис. 92): в турбулентном ядре градиент скорости незначителен и напряжения трения по существу определяются градиентом скоростей у стенки, откуда и следует  $\tau \approx \tau_0$ .



Величину  $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$  называют динамической скоростью  $v_*$ :

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}. \quad (205)$$

Динамическая скорость  $v_*$  выражается через среднюю скорость течения  $v$  и коэффициент гидравлического трения  $\lambda$ . Действительно, сравнив выражения (171) и (193), получим

$$\frac{4\tau_0}{d} = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{\rho v^2}{2},$$

откуда, учитывая уравнение (205),

$$v_* = v \sqrt{\frac{\lambda}{8}}, \quad \text{или} \quad \frac{v}{v_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}. \quad (206)$$

Подставив уравнение (205) в уравнение (204) и допустив, что  $\tau = \tau_0$ , после интегрирования получим

$$\bar{u} = \frac{v_*}{\lambda} \ln y + C. \quad (207)$$

На оси трубы  $y = r_0$  и  $u = u_{\text{макс}}$ . Тогда последнее равенство примет вид

$$\frac{\bar{u}_{\text{макс}} - \bar{u}}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{r_0}{y} = \frac{2,3}{\kappa} \cdot \lg \frac{r_0}{y} = A \lg \frac{r_0}{y}. \quad (208)$$

Широко известны эксперименты И. Никурадзе (1932), проведенные под руководством Л. Прандтля, с латунными трубами, поверхность которых можно считать гладкой, и с трубами, имеющими равномерно-зернистую шероховатость. Искусственная равномерно-зернистая шероховатость создавалась песчинками одинаковой крупности, наклеенными с помощью лака на внутреннюю поверхность трубы. Относительная искусственная шероховатость при диаметре зёрен песка  $\Delta$  и диаметре трубы  $d$  в опытах изменялась в пределах  $\frac{\Delta}{d} = 0,001 \div 0,033$ , а относительная гладкость  $\frac{r_0}{\Delta} = \frac{d}{2\Delta} = 15 \div 500$ . Опыты проводились в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса. Кроме перепада давлений и средней скорости, необходимых для определения  $\lambda$  и  $v_*$ , во время опытов снимались также эпюры осредненных скоростей.

На рис. 93 нанесены измеренные на различных расстояниях от стенки скорости в безразмерных координатах  $\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}}{v_*}$ ,  $\frac{y}{\Gamma_0}$ . Все они, несмотря на различные значения  $\frac{\Gamma_0}{\Delta}$  и  $Re$ , укладываются на одну кривую при значении константы

$$\kappa = 0,4 \text{ и } A = \frac{2,3}{0,4} = 5,75. \quad (209)$$

Этот результат прекрасно подтверждает гипотезу Прандтля. Правда, дальнейшие исследования показали, что вели-

Рис. 93. График к уравнению (208).

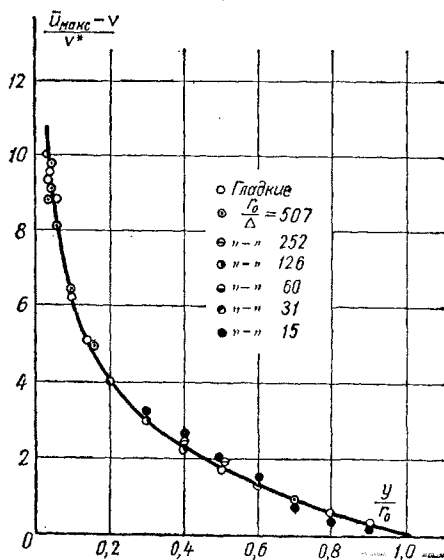
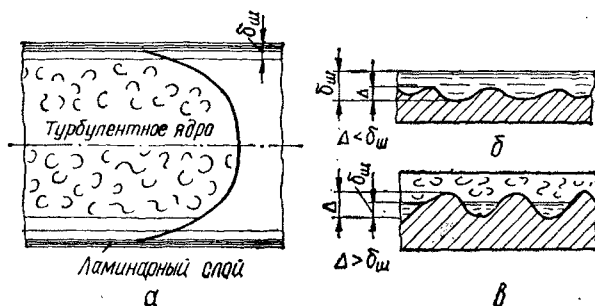


Рис. 94. Схема течения турбулентного потока по Прандтлю:

$a$  — схема потока;  $b$  — толщина ламинарной пленки больше выступов шероховатости;  $\delta$  — толщина ламинарной пленки меньше выступов шероховатости.



чина  $\kappa$  не является постоянной. Тем не менее, в целом это не снижает ценности данной теории.

Уравнения (207), (208) указывают на логарифмический закон распределения осредненных скоростей по сечению. Многочисленные измерения эпюр скоростей в трубках и каналах, выполненные различными исследователями, также подтверждают справедливость этих зависимостей.

Уравнение (208) можно записать для средней скорости:

$$\frac{\bar{u}_{\max} - v}{v_*} = A \lg \frac{r_0}{y_{\text{ср}}} = D, \quad (210)$$

где  $y_{\text{ср}}$  — расстояние от стенки, где местная скорость равна средней ( $\bar{u} = v$ ).

По опытам Никурадзе

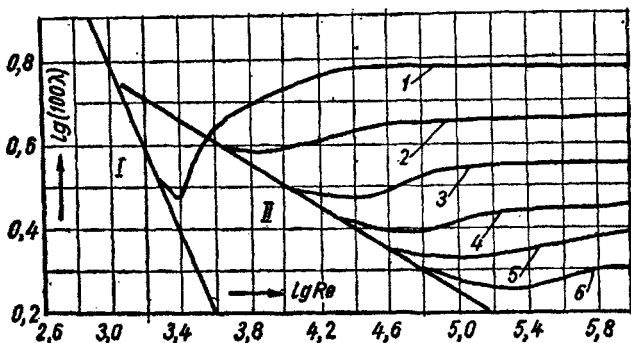
$$D = 3,75 \quad \text{и} \quad \frac{y_{\text{ср}}}{r_0} = 0,223. \quad (211)$$

Исходное уравнение (208) не удовлетворяет граничным условиям на стенке (при  $y \rightarrow 0$  и  $u \rightarrow \infty$ , между тем как должно выполняться условие  $u \rightarrow 0$ ). По теории Прандтля следует искусственно разделить поток в трубе на две области: турбулентное ядро и ламинарный подслой.

Согласно последней гипотезе возле стенки в очень тонком слое течение носит ламинарный характер, а в основном потоке (ядре), где стенки не препятствуют поперечным пульсациям, движение турбулентное (рис. 94). При этом следует

Рис. 95. График зависимости коэффициента гидравлического трения от числа Рейнольдса для искусственной равномерно-зернистой шероховатости в трубах (по Никурадзе):

1 —  $r_0/\Delta = 15$ ; 2 —  $r_0/\Delta = 30$ ; 3 —  $r_0/\Delta = 60$ ; 4 —  $r_0/\Delta = 126$ ; 5 —  $r_0/\Delta = 252$ ; 6 —  $r_0/\Delta = 507$ .



различать гладкую и шероховатую поверхности стенок трубы.

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, которые можно найти в более подробных курсах [2], [5], [8], и используя зависимость (206), в конечном итоге можно вывести следующие полуэмпирические формулы Прандтля — Никурадзе.

Для гладких труб

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{гг}}} = 2 \lg \operatorname{Re} \sqrt{\lambda_{гг}} - 0,8. \quad (212)$$

Для шероховатых труб

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{ш}}} = 2 \lg \frac{r_0}{\Delta} + 1,74 = 2 \lg \frac{d}{\Delta} + 1,14. \quad (213)$$

На рис. 95 представлены экспериментальные данные о коэффициенте гидравлического трения. По оси ординат отложены значения  $\lg(100 \lambda)$ , а по оси абсцисс —  $\lg \operatorname{Re}$ .

Рассмотрев рис. 95, можно сделать такие выводы. При турбулентном режиме ( $\lg \operatorname{Re} > 3,6$ ,  $\operatorname{Re} > 4000$ ) каждая кривая справа отвечает своему значению относительной шероховатости и при больших значениях  $\Delta/r_0$  почти параллельна оси абсцисс. Иначе говоря, в этой области  $\lambda$  не зависит от  $\operatorname{Re}$  и определяется только относительной шероховатостью. Указанная область кривых на рис. 95 хорошо описывается формулой (213).

С уменьшением  $\operatorname{Re}$  кривые коэффициента гидравлического трения шероховатых труб сначала понижаются, а затем опять несколько повышаются, сливаясь с прямой II, на которую укладываются точки с различной шероховатостью. Эта область, где коэффициент гидравлического трения не зависит от шероховатости, а является только функцией числа Рейнольдса, отвечает гидравлически гладким трубам. Прямая II также хорошо описывается полуэмпирической формулой (212).

В области ламинарного режима ( $\lg \operatorname{Re} < 3,3$ ,  $\operatorname{Re} < 2000$ ) все опытные точки независимо от шероховатости укладываются на одну прямую I в левой части чертежа. Уравнение этой прямой

$$\lambda = \frac{64}{\operatorname{Re}} \quad (214)$$

можно также получить теоретически непосредственным сравнением формул Пуазейля (183) и Дарси (194). В самом деле,

$$\rho l = \frac{32\nu\rho l}{d^2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2},$$

откуда

$$\lambda = \frac{64\nu}{vd} = \frac{64}{\text{Re}}.$$

При значениях  $\text{Re} = 2000 \div 4000$  ( $\lg \text{Re} = -3,3 \div 3,6$ ) в области перемежающейся турбулентности наблюдается большой разброс опытных точек и кривая на рис. 95 здесь проведена условно.

Полученные закономерности для  $\lambda$  объясняются теорией Прандтля так. Толщина ламинарного подслоя обратно пропорциональна числу Рейнольдса, ибо с увеличением  $\text{Re}$  возрастают турбулентные пульсации и ширина основного ядра течения. При относительно малых значениях  $\text{Re}$  и малой шероховатости стенок (см. рис. 94, а) ламинарный подслей как бы покрывает шероховатость ( $\delta_{\text{сл}} > \Delta$ ). В этом случае шероховатость стенок не влияет на сопротивление, поскольку в ламинарном подслое возмущения, вызванные шероховатостью, сразу же угасают. Это и есть область гидравлически гладких труб. При больших значениях  $\text{Re}$  и большой шероховатости (см. рис. 94, б) толщина ламинарного подслоя меньше величины выступов шероховатости стенок ( $\delta_{\text{сл}} < \Delta$ ), и завихрения, образующиеся за выступами шероховатости, решающим образом влияют на эффект перемешивания, а следовательно, на сопротивления. Последняя область и отвечает шероховатым трубам. Наконец, при ламинарном режиме подслей заполняет все сечение трубы.

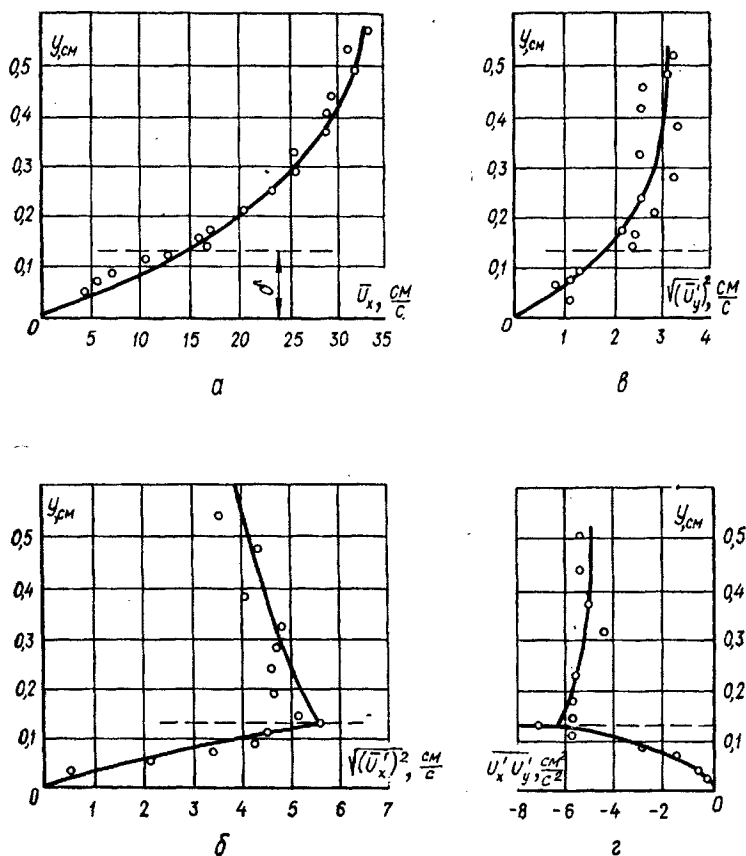
Полуэмпирическая теория Прандтля дала возможность качественно и количественно описать закономерности турбулентного течения для гладких и шероховатых труб. В то же время следует отметить, что эта теория не отражает особенностей сопротивления в промежуточной области между гладкими и шероховатыми трубами, которая, как будет видно из дальнейшего, имеет большое практическое значение.

**Новые исследования и теория А. Д. Альтшуля.** Дальнейшие исследования не подтвердили гипотезу Прандтля

о наличии у стенки подслоя с ламинарным течением. Еще Л. Д. Ландау высказал мысль, что турбулентные пульсации возле стенки не исчезают внезапно, а угасают постепенно [8]. Сходство с ламинарным течением проявляется только в характере распределения осредненных скоростей возле стенки. Это предположение обосновывалось результатами опытов с переносом тепла от жидкости к твердой стенке. Затем гипотеза подтвердилась экспериментами ряда зарубежных исследователей, а также весьма тщательными

Рис. 96. Кинематические характеристики плоского турбулентного потока по И. К. Никитину:

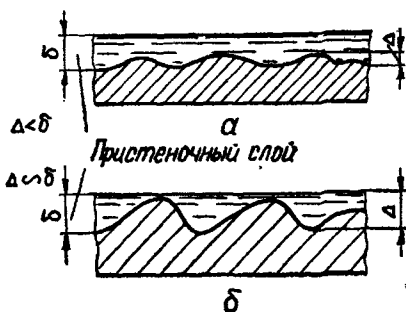
*a* — эпюра осредненных скоростей; *b* — эпюра продольных пульсаций; *в* — эпюра поперечных пульсаций; *г* — эпюра произведения пульсаций.



опытами И. К. Никитина [23], где измерения проводились в плоском потоке в гидравлическом лотке с помощью фотометода. Эти опыты более точны по сравнению с зарубежными для области вблизи стенки, поскольку при выполнении измерений не вносились возмущения в поток датчиками.

Характерные результаты опытов И. К. Никитина представлены на рис. 96. Поперечные пульсации плавно угасают по мере приближения к стенке (рис. 96, в). Однако распределение продольных пульсаций (рис. 94, б) имеет резкий излом на некотором расстоянии от стенки. Эта особенность четко прослеживается и в распределении произведения пульсаций  $\Delta u_x \Delta u_y$  (рис. 96, з), от которых зависит турбулентная вязкость  $\epsilon$ . Приведенные данные свидетельствуют о том, что характер движения в области вблизи стенки и в основном потоке разный, хотя турбулентный режим сохраняется для всего потока в целом.

Слой жидкости вблизи стенки, где распределение продольных пульсаций и произведение продольных и поперечных пульсаций резко отличается от движения в основном потоке, можно назвать *пристеночным*. Внешняя граница пристеночного слоя четко определяется указанным изломом. Грубо его толщина  $\delta_{пр}$  может быть найдена по профилю осредненных скоростей, где прямолинейный участок вблизи стенки переходит в криволинейный (рис. 96, а). При малой шероховатости турбулентная вязкость  $\epsilon$ , определяемая по формуле (189), в пристеночном слое близка к молекулярной вязкости  $\mu$ ; при большой шероховатости числовое значение  $\epsilon$  увеличивается, что и определяет квадратичный закон сопротивления. В промежуточной области имеют значение оба фактора: вязкостное трение и трение, обусловленное турбулентными пульсациями. Схематически течение вблизи стенки по И. К. Никитину при малой и большой



шероховатости показано на рис. 97. Важно отметить, что в обоих случаях толщина пристеноч-

Рис. 97. Схема течения турбулентного потока вблизи стенки по И. К. Никитину: а — толщина пристеночного слоя больше выступов шероховатости; б — толщина пристеночного слоя примерно равна выступам шероховатости.

ного слоя всегда больше выступов шероховатости (в противоположность гипотезе Прандтля).

Учитывая новые результаты экспериментальных исследований турбулентного течения, А. Д. Альтшуль предложил полуэмпирическую теорию [2], согласно которой поток в трубе рассматривается как единое целое без искусственно-го разделения на ядро и ламинарный подслой.

Полное касательное напряжение в турбулентном потоке с учетом турбулентной вязкости [см. формулы (187) и (188)]

$$\tau = (\mu + \varepsilon) \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (215)$$

Разделим все члены этого уравнения на плотность  $\rho$ :

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu_*^2 (\nu + \psi) \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (216)$$

где  $\psi = \frac{\varepsilon}{\rho}$  — кинематический коэффициент турбулентной вязкости.

В теории А. Д. Альтшуля принято допущение, что значение  $\psi$  зависит от расстояния от стенки  $y$  и изменяется согласно закону

$$\psi = \kappa \nu_* y. \quad (217)$$

Линейный характер распределения турбулентных пульсаций вблизи стенки (см. рис. 96, з) обосновывает допущение (217).

Подставив уравнение (217) в уравнение (216), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\nu_*^2}{\nu \left(1 + \frac{\kappa \nu_* y}{\nu}\right)},$$

которое после интегрирования дает логарифмический закон распределения скоростей:

$$\frac{\bar{u}}{\nu_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa \nu_* y}{\nu}\right) + C. \quad (218)$$

Далее, рассуждая аналогично Прандтлю, Альтшуль в конечном итоге нашел выражение для скорости

$$\frac{\bar{u}}{\nu_*} = 7,8 + 5,75 \lg \left(\frac{2,5\nu}{\nu_* y} + \frac{k}{y}\right) \quad (219)$$



и для коэффициента гидравлического трения

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left( \frac{2,5}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{2,8d} \right), \quad (220)$$

где постоянные берутся по данным опытов Никурадзе, а  $k$  — средняя высота выступов шероховатости.

Полученные зависимости (219), (220), в отличие от формул Прандтля — Никурадзе, справедливы для всех областей сопротивления при турбулентном течении в трубах: гладкой, шероховатой и переходной. Последнюю, как уже отмечалось, Прандтль не рассматривал.

**Степенная зависимость распределения скоростей.** Логарифмический закон распределения скоростей, получаемый на основе полуэмпирических теорий, хорошо подтверждается опытами, но неудобен для численных расчетов. С достаточной для практики точностью этот закон аппроксимируется степенной функцией вида

$$\frac{\bar{u}}{u_{\text{макс}}} = \left( \frac{y}{r_0} \right)^n, \quad (221)$$

где показатель степени  $n$  зависит от  $\lambda$ .

В первом приближении

$$n \approx \sqrt{\lambda}. \quad (222)$$

С помощью зависимости (221) и выражений для расхода и средней скорости (123), (126) легко вычислить важные характеристики осредненного турбулентного потока в трубе: отношение средней скорости к максимальной  $\frac{v}{u_{\text{макс}}}$  и относительное расстояние от стенки  $\frac{y_{\text{ср}}}{r_0}$ , где местная скорость равна средней. Используя выражение (222), найдем эти характеристики в зависимости от коэффициента гидравлического трения:

$$\begin{aligned} \frac{v}{u_{\text{макс}}} &= \frac{\int_{\omega} u d\omega}{u_{\text{макс}}} = \frac{\int_0^{r_0} \bar{u}_{\text{макс}} \left( \frac{y}{r_0} \right)^n 2\pi (r_0 - y) dy}{u_{\text{макс}} \pi r_0^2} = \\ &= \frac{2}{(2+n)(1+n)} \approx 1 - 1,2 \sqrt{\lambda}; \quad (223) \end{aligned}$$

$$\frac{y_{\text{ср}}}{r_0} = \left[ \frac{2}{(2+n)(1+n)} \right]^{\frac{1}{n}} \approx 0,224 + 0,4\lambda. \quad (224)$$

Вспомнив выражение (130) для коэффициента кинетической энергии (Кориолиса) и используя формулы (221), (222), получим:

$$\alpha = \frac{\int_{\omega} u^3 d\omega}{v^3 \omega} = \frac{\int_0^{r_0} (2+n)^3 (1+n)^3 v^3 \left(\frac{y}{r_0}\right)^{3n} 2\pi (r_0 - y) dy}{8v^3 \pi r_0^3 \left(\frac{y}{r_0}\right)} = \frac{(2+n)^3 (1+n)^3}{4(2+3n)(1+3n)} \approx 1 + 2,7\lambda. \quad (225)$$

Вычисленные приблизительные значения осредненных характеристик в зависимости от  $\lambda$  и  $n$  представлены ниже:

$\lambda$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06
$n$	1/10	1/7	1/6	1/5	1/4
$v/\bar{u}_{\text{макс}}$	0,86	0,82	0,79	0,76	0,71
$y_{\text{ср}}/r_0$	0,223	0,232	0,236	0,243	0,25
$\alpha$	1,03	1,05	1,08	1,12	1,16

Данные четвертой строчки таблицы представляют значительный практический интерес, так как они дают указание, на каком расстоянии от стенки трубы местная скорость равна средней. Зная это расстояние, достаточно в этом месте установить трубку Пито — Прандтля, чтобы по ее показаниям определить расход как произведение скорости на сечение трубы. Видно, что это расстояние составляет приблизительно четверть радиуса трубы. По опытам Никурадзе  $y_{\text{ср}}/r_0 = 0,223$ .

## § 40

### Коэффициент гидравлического трения технических трубопроводов

**График Г. А. Мурина.** Опыты Никурадзе с трубами, имеющими стенки с искусственной шероховатостью (см. рис. 95), показали наличие двух областей сопротивления при турбулентном режиме: шероховатой и гладкой. Переходная зона между шероховатым и гладким трением, где одновременно влияет как вязкость жидкости, так и шероховатость стенки, Прандтлем и Никурадзе не исследовалась.

В дальнейшем, однако, в результате многочисленных опытов различных исследователей с техническими трубо-

проводами, т. е. с трубами, шероховатость стенок которых обуславливалась естественными условиями (материалом и технологией производства, а также эксплуатацией), было обнаружено следующее. Во-первых, рабочей для технических трубопроводов является главным образом переходная область сопротивления. Во-вторых, закономерность изменения сопротивления в переходной области по сравнению с трубами, имеющими искусственную шероховатость, носит совсем другой характер (рис. 98): для технических трубопроводов  $\lambda$  возрастает с уменьшением  $Re$ , причем  $\lambda$  имеет большие абсолютные значения. Таким образом, определение  $\lambda$  в переходной области по формуле (213) приводит не к запасу, а к преуменьшению потерь энергии, что недопустимо.

Остановимся подробнее на результатах опытов, выполненных во Всесоюзном теплотехническом институте им. Ф. Э. Дзержинского и обработанных Г. А. Муриным [1], применяемых в инженерной практике теплогазоснабжения и вентиляции.

Было испытано 49 стальных труб разных сортов (цельнотянутые, газопроводные и сварные дымогарные), новых и бывших в эксплуатации, диаметрами от 40 до 160 мм. Кроме того, определялось сопротивление латунной трубы, у которой физическая шероховатость была минимальна и ее можно было считать гидравлически гладкой. Опыты проводились на холодной и горячей воде. Подогрев воды давал возможность существенно уменьшить кинематическую вязкость и тем самым довести значения чисел Рейнольдса до весьма больших ( $10^7$ ).

Результаты опытов представлены на рис. 99 при  $Re = 4 \cdot 10^3 \div 4 \cdot 10^7$ . Здесь четко различаются три области сопротивления при турбулентном режиме: *I*, *II*, *III*.

Область шероховатых труб ограничена слева штриховой линией. Линии  $\lambda = \lambda(Re)$  параллельны оси абсцисс и коэффициент гидравлического трения определяется только шероховатостью стенок трубы.

Переходная область сопротивления ограничивается справа штриховой кривой линией, а слева — огибающей кривой *I*. Значение  $\lambda$  зависит не только от шероховатости, но и существенно возрастает с уменьшением  $Re$ .

В области гидравлически гладких труб  $\lambda$  однозначно определяется  $Re$ : на рисунке она характеризуется указанной кривой *I*.

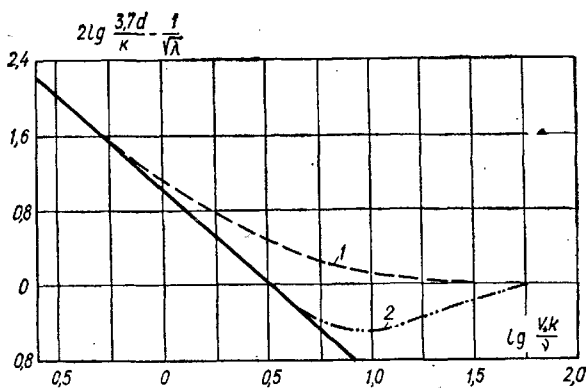


Рис. 98. Переходная область сопротивления:

1 — технические трубопроводы; 2 — трубы с искусственной равномерно-зернистой шероховатостью.

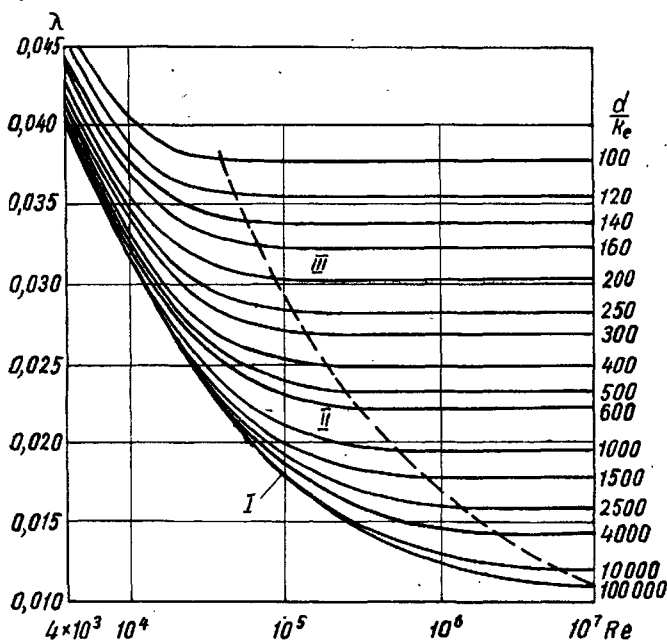


Рис. 99. График зависимости коэффициента гидравлического трения от числа Рейнольдса стальных технических трубопроводов (по Г. А. Мурину):

**Эквивалентная шероховатость.** Шероховатость зависит от технологии изготовления, условий эксплуатации и материала изготовления трубопроводов. Исследованиями установлено, что средняя высота выступов шероховатости стенок трубы  $\Delta$  не может полностью характеризовать влияние шероховатости на сопротивление. Поэтому вводится понятие *эквивалентной*, или *эффективной*, *шероховатости*  $k_s$ , под которой понимают такую высоту выступов равномерно-зернистой (искусственной) шероховатости, которая создает эффект сопротивления, равный действительному сопротивлению испытываемого трубопровода, определенному по формуле Никурадзе (213) для шероховатых труб.

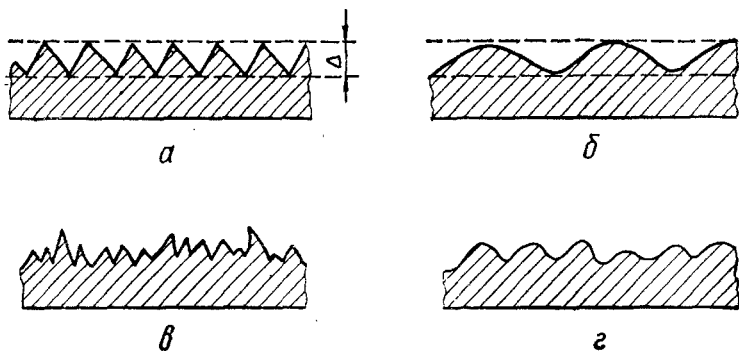
Таким образом, эквивалентная шероховатость  $k_s$  устанавливается не измерением высоты выступов физической шероховатости, а данными гидравлических испытаний трубы. Величина  $k_s$  характеризует не только среднюю высоту выступов, но также их форму, распределение по поверхности и другие особенности. На рис. 100 в качестве иллюстрации представлены 4 типа шероховатости.

Каждая кривая  $\lambda = f(\text{Re})$  для технических трубопроводов отвечает определенному значению эквивалентной шероховатости или, как на рис. 99 — величине относительной эквивалентной гладкости  $d/k_s$ , рассчитанной по уравнению Никурадзе (213). Если принять  $\Delta = k_s$  и решить уравнение (213) относительно  $d/k_s$ , получим

$$d/k_s = 10^{0,57 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{\text{ш}}}}} \quad (226)$$

Рис. 100. Разные формы шероховатости стенок:

*a* — равномерно-зернистая; *б* — равномерно-волнистая;  
*в* — неравномерно-зернистая; *г* — неравномерно-волнистая.



Различие между  $k_s$  и  $\Delta$  определяется в первую очередь дисперсией  $\sigma$ , т. е. среднеквадратичным отклонением от средней величины выступов шероховатости.

По М. Д. Миллиончикову [22] при малых значениях  $\sigma$  изменение  $\lambda$  определяется только величиной  $\Delta$  и не зависит от значения  $Re$  (искусственная шероховатость). При большой дисперсии значение  $\lambda$  зависит не только от величины  $\Delta$ , но и от значения  $Re$ . Отсюда следует, что для технических трубопроводов, где значение  $\sigma$  велико, эквивалентная шероховатость  $k_s$  больше физической. Этим же объясняется плавный рост  $\lambda$  с уменьшением  $Re$  при увеличении толщины пристеночного слоя (рис. 100, в). Наоборот, для искусственной шероховатости, где  $\sigma$  мало, увеличение толщины пристеночного слоя с уменьшением  $Re$  резко проявляется на характере вихреобразований и, следовательно, на  $\lambda$  (рис. 100, а).

**Определение коэффициента гидравлического трения.** Приведем некоторые формулы для определения  $\lambda$ , наиболее распространенные в сантехнике.

Коэффициент гидравлического трения гладких труб вычисляют по формуле Блазиуса

$$\lambda_{г.л} = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}, \quad (227)$$

которая практически совпадает с формулой Никурадзе (213). Она справедлива для значений

$$Re_{II} < 20 \frac{d}{k_s}. \quad (228)$$

При большой шероховатости, определяемой условием

$$\frac{d}{k_s} > 250, \quad (229)$$

трубы как гидравлически гладкие работать не могут.

Отметим, что данные, взятые на рис. 99 с огибающей кривой II, практически совпадают с вычисленными по формуле (227).

Применив формулу (227), нетрудно показать, что потери энергии, подсчитанные по формулам Дарси (194), пропорциональны скорости в степени 1,75.

Для переходной области сопротивления коэффициент гидравлического трения определяют по формуле Б. Н. Ло-

баева [20]

$$\lambda_{\text{пер}} = \frac{1,42}{\left(\lg \operatorname{Re} \frac{d}{k_3}\right)^2}, \quad (230)$$

границы применения которой таковы:

$$\left. \begin{aligned} 4000 < \operatorname{Re} < 400 \frac{d}{k_3} & \quad \text{при} \quad \frac{d}{k_3} < 250; \\ 20 \frac{d}{k_3} < \operatorname{Re} < 500 \frac{d}{k_3} & \quad \text{при} \quad \frac{d}{k_3} > 250. \end{aligned} \right\} \quad (231)$$

Формула (230) практически соответствует области между штриховой кривой III и огибающей кривой II на рис. 99.

Для шероховатых труб удовлетворительные результаты дает формула Б. Л. Шифринсона

$$\lambda_{\text{ш}} = 0,11 \left(\frac{k_3}{d}\right)^{0,25}. \quad (232)$$

Область шероховатых труб с некоторым приближением характеризуется условием

$$\operatorname{Re}_{\text{III}} > 500 \frac{d}{k_3}. \quad (233)$$

Поскольку в этой области шероховатых труб потери пропорциональны квадрату скорости, область часто называют также *квадратичной*.

Одной формулой отразить все особенности областей сопротивления трудно. Тем не менее, имеются попытки составить универсальную формулу для трех областей сопротивления при турбулентном режиме: гладкой, переходной и шероховатой.

За рубежом широко известна формула Кольбука

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left( \frac{k_3}{3,7d} + \frac{2,51}{\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}} \right), \quad (234)$$

которая удачно описывает закон сопротивления в трубах с технической шероховатостью. Формула получена путем объединения формул Никурадзе (211), (213) для шероховатых и гладких труб [1]. Ее теоретическое обоснование для переходной области сделано А. Д. Альтшулем [см. уравнение (219)].

Наибольшее распространение в отечественной практике получила универсальная формула Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{68}{\operatorname{Re}} + \frac{k_3}{d} \right)^{0,25}. \quad (235)$$

При  $\frac{Re}{d/k_3} < 20$  она практически совпадает с формулой (227) для гидравлически гладких труб, а при условии  $\frac{Re}{d/k_3} > 500$  — с зависимостью (232) для шероховатых труб.

Для применения формул (230), (232), (234), (235) необходимо задать эквивалентную шероховатость  $k_3$  данного трубопровода. Ниже приведены ориентировочные значения  $k_3$  для труб из различных материалов (более подробные рекомендации даны в специальной литературе [1], [2] и пр.):

Трубы	$k_3$ , мм
Стальные:	
для водопроводов	0,5—1,5
для газопроводов	0,1—0,2
для систем теплоснабжения	0,2—0,5
Чугунные	0,5—1,5
Оцинкованные стальные	0,2—0,5
Асбестоцементные	0,1—0,2
Бетонные	1—3
Алюминиевые	0,05
Пластмассовые и латунные	0
Воздухопроводы:	
из листовой стали	0,1
из фанеры	0,2
из шлакогипса	1,0
из шлакобетона	1,5
Кирпичная кладка	3—5

Наибольший диапазон изменения значений  $k_3$  относится к водопроводным трубам. Это объясняется тем, что качество воды весьма влияет на состояние поверхности стенок. С течением времени вследствие коррозии стенок их шероховатость возрастает. К воде, предназначенной для водоснабжения, предъявляются специальные требования. Технологический процесс очистки воды обычно связан с ее хлорированием и введением ряда химических реагентов, которые увеличивают агрессивность воды и ее коррозирующее действие. Опыт эксплуатации больших водопроводов показывает, что шероховатость труб за 10—15 лет возрастает в 2—3 и более раз. Если водозабор осуществляется из подземного источника, прибавляется еще фактор отложения солей, увеличивающий шероховатость стенок. В системах теплоснабжения, где вода специально обрабатывается с целью ее умягчения, коррозионные процессы и отложения солей происходят не так интенсивно и шероховатость труб с течением времени изменяется мало. В газопроводах газ



при течении как бы шлифует стенки и, если бы не пере­рывы в работе газопровода, его шероховатость со временем не увеличивалась бы, а уменьшалась.

В практике проектирования систем водоснабжения пользуются рекомендациями Ф. А. Шевелева [28]. В отличие от вышеприведенных формул, где необходимо задавать эквивалентную шероховатость, Шевелев предложил зависимости коэффициента сопротивления от вида материала и технологии производства труб, а также продолжительности их работы.

Для стальных и чугунных водопроводных труб, находящихся более 5 лет в эксплуатации и работающих в квадратичной области,

$$\lambda = 0,021/d^{0,3}, \quad (236)$$

где  $d$  — диаметр трубы, м, изменяющийся в пределах 50—1000 мм.

В переходной области сопротивления

$$\lambda = (0,37 \cdot 10^{-6}/d + 1/\text{Re})^{0,13}. \quad (237)$$

Для определения гидравлического уклона водопроводных труб по формулам (236), (237) составлены специальные таблицы [41]. Недостатком этих эмпирических формул является то, что они не выдерживают с точки зрения размерности и применимы только для тех условий, при которых получены.

Анализ возможных значений коэффициента гидравлического трения для различных условий показывает, что трубопроводы для систем теплогазоснабжения и вентиляции работают преимущественно в переходной области сопротивления. Водопроводные линии чаще всего относятся к области шероховатых труб. Как гидравлически гладкие работают пластмассовые, алюминиевые, латунные и другие трубы с очень малой физической шероховатостью, а также стальные трубы для некоторых режимов водяного отопления и газопроводов низкого давления.

Расчеты  $\lambda$ , выполненные по различным формулам, дают расхождение менее 10%. Их значения для различных условий изменяются в основном от  $\lambda = 0,02$  до  $\lambda = 0,04$ . Большие величины относятся к более шероховатым трубам меньшего диаметра, меньшие — соответствуют более гладким трубам большего диаметра. Для ориентировочных расчетов можно принимать  $\lambda \approx 0,03$ . Отметим, что пластмассовые трубы имеют значения  $\lambda$  примерно вдвое меньше, чем стальные.

Значение  $\lambda$  можно непосредственно брать из основного графика типа приведенного на рис. 99, но выполненного в соответствующем масштабе, или по специальным номограммам [2], [11].

## § 41

### Движение жидкости в трубах и каналах некруглого сечения

Изложенный материал касался течения в трубах круглого сечения. Однако в сантехнике часто применяются вентиляционные каналы прямоугольного или квадратного сечения, нагревательные приборы эллиптического сечения и другие устройства и сооружения, где живые сечения потока имеют некруглую форму (рис. 101).

При рассмотрении равномерного движения в руслах произвольной формы (§ 34) было введено понятие гидравлического радиуса — линейного параметра, определяемого отношением площади живого сечения потока  $\omega$  к его периметру  $\chi$ :

$$R = \omega/\chi.$$

Сопротивление обратно пропорционально гидравлическому радиусу  $R$  [см. уравнения (167), (168)]. Следовательно, при заданном живом сечении  $\omega$  сопротивление трубопровода может быть различным в зависимости от величин смоченного периметра  $\chi$  и гидравлического радиуса  $R$ . Гидравлически наиболее выгоднейшей формой сечения трубы является круглая, ибо круглое сечение обладает наименьшим периметром и наибольшим гидравлическим радиусом при заданной площади. Другие сечения при неизменном  $\omega$  имеют большее сопротивление.

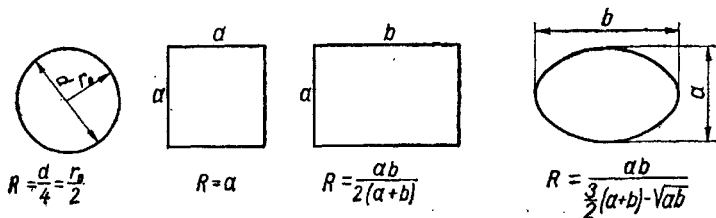
Сопоставим круглое сечение диаметром  $d$  с квадратным, имеющим стороны  $a$ . Так как по условию сечения равны, то

$$\omega = \pi d^2/4 = a^2, \text{ откуда } d = \sqrt{4/\pi} a = 1,13a.$$

Соответствующие значения гидравлического радиуса:

$$R_d = \pi d^2/(4\pi d) = d/4 \text{ и } R_a = a^2/(4a) = a/4.$$

Рис. 101. Значение гидравлического радиуса для разных форм поперечного сечения трубопроводов и каналов.



Следовательно,

$$R_d = 1,13R_a.$$

Таким образом, сопротивление квадратного сечения при прочих равных условиях на 13% больше круглого.

Для расчета трубопроводов некруглого сечения применяют понятие *эквивалентного диаметра*, равного учетверенному значению гидравлического радиуса:

$$d_3 = 4R = 4\omega/\chi.$$

С помощью величины  $d_3$  определяют потери энергии, а также другие характеристики движения, как для круглых труб. Другими словами, трубопровод произвольной формы заменяется круглым, обладающим тем же гидравлическим сопротивлением.

Для указанных на рис. 101 сечений значения гидравлических радиусов и соответствующих им эквивалентных диаметров таковы:

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{d}{4}; \quad d_3 = d \text{ — круглое сечение;} \\ R &= \frac{a}{4}; \quad d_3 = a \text{ — квадратное;} \\ R &= \frac{ab}{2(a+b)}; \quad d_3 = \frac{2ab}{a+b} \text{ — прямоугольное;} \\ d_3 &= \frac{4ab}{\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}} \text{ — эллиптическое.} \end{aligned} \right\} (238)$$

**Пример 20.** Определить потерю давления в вентиляционном канале из шлакобетона общей длиной 12 м; сечение прямоугольное со сторонами  $a \times b = 200 \times 400$  мм; массовый расход  $M = 700$  кг/ч; плотность воздуха  $\rho = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>, кинематическая вязкость воздуха  $\nu = 0,15$  см<sup>2</sup>/с.

Средняя скорость течения в канале

$$v = \frac{M}{3600\rho\omega} = \frac{700}{3600 \cdot 1,2 \cdot 0,2 \cdot 0,4} = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Эквивалентный диаметр по формуле (238)

$$d_3 = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot 0,4}{0,2 + 0,4} = 0,27 \text{ м.}$$

Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{vd_3}{\nu} = \frac{2 \cdot 0,27}{0,15 \cdot 10^{-4}} = 36 \text{ 000.}$$

Эквивалентная шероховатость по данным, приведенным на с. 175, для шлакобетона  $k_3 = 1,5$  мм;

$$\frac{d_3}{k_3} = \frac{270}{1,5} = 180 < 250;$$

$$400 \frac{d_3}{k_3} = 400 \cdot 180 = 72\,000 > 36\,000,$$

т. е. имеем переходную область сопротивления.

Коэффициент гидравлического трения

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{1,5}{270} + \frac{68}{36\,000} \right)^{0,25} = 0,032.$$

Искомая потеря давления по формуле (194)

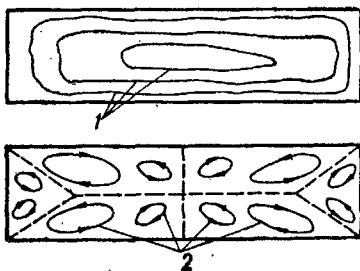
$$p_l = \lambda \frac{l}{d_3} \cdot \frac{\rho v^2}{2} = 0,032 \frac{12}{0,27} \cdot \frac{1,2 \cdot 2^2}{2} = 3,4 \text{ Па.}$$

Следует отметить, что кинематическая структура потока в некруглых трубах имеет свои особенности. На рис. 102 показаны циркуляционные течения, возникающие в прямоугольных трубах. Эти движения в плоскостях, нормальных к оси потока, называют *поперечной циркуляцией*. В прямых круглых трубах достаточной длины поперечная циркуляция не возникает. Причина таких вторичных течений еще до сих пор четко не выяснена. Можно допустить, что из тех мест, где касательные напряжения больше, жидкость вследствие механизма турбулентности переносится в середину трубы (канала), а оттуда течет к местам с меньшими касательными напряжениями, в частности, в углы рассматриваемых сечений. Это приводит к тому, что в местах с большими касательными напряжениями скорость немного уменьшается, а в местах с меньшими касательными напряжениями, наоборот, немного увеличивается. В результате касательные напряжения у стенок выравниваются. Иначе говоря, динамическая структура потока в прямоугольных трубах в целом не отличается от осесимметричного течения в круглых трубах.

Сказанное является обоснованием для формул сопротив-

Рис. 102. Вторичные течения в каналах прямоугольного сечения:

1 — линии постоянных скоростей (изотакхи); 2 — вторичные течения.



ления, в которые входит эквивалентный диаметр. Детальные исследования показывают, что форма живого сечения потока (при данном значении  $d_э$ ) все же до некоторой степени влияет на сопротивление. Тем не менее в инженерных расчетах этим обычно пренебрегают.

Следует подчеркнуть, что в отличие от турбулентного режима при ламинарном течении форма живого сечения оказывает заметное влияние на сопротивление.

## § 42

### **Причины возникновения местных сопротивлений**

Напомним, что местные потери энергии при движении жидкости по трубам и каналам возникают в местах изменения структуры потока по пути движения. Эти участки называют *местными сопротивлениями*. К ним, в частности, относятся всякого рода запорные приспособления (вентили, задвижки, краны, клапаны), фасонные части трубопроводов (колена, раструбы, переходы, тройники, крестовины), сетки, фильтры.

Учет местных сопротивлений имеет большое значение в так называемых *гидравлически коротких трубопроводах*, где местные потери имеют величину такого же порядка, что и потери по длине. К коротким трубопроводам и каналам относят воздухопроводы, вентиляционные и дымовые каналы, всасывающие линии насосных установок и т. п.

Какие основные причины возникновения потерь энергии в местных сопротивлениях? Неправильное представление о явлении иногда приводит к ошибкам при проектировании устройств и сооружений, связанных с движением жидкости.

При рассмотрении различных видов местных сопротивлений прежде всего обращает на себя внимание резкое изменение спектра течения на участках местных сопротивлений. С кинематической точки зрения это означает *большие изменения местных скоростей* как по величине, так и по направлению.

Скачкообразное изменение скоростей связано с образованием поверхностей раздела, которые распадаются на вихри с последующим каскадным процессом диссипации энергии вязкой жидкости (см. § 17).

В турбулентном течении за преградой эти вихри обра-

зуют отрывную область движения с крупномасштабными пульсациями, кинетическая энергия которых переходит в пульсации более мелкого масштаба, где и происходит в конечном счете *диссипация энергии*.

Этими же причинами обуславливаются потери энергии при слиянии и разделении потоков.

В некоторых случаях причинами возникновения местных сопротивлений являются *вторичные течения*.

Рассмотрим указанные явления подробнее.

**Обтекание острого угла.** След поверхности раздела при обтекании острого угла показан штриховой линией *АК* на рис. 103. Вследствие инерции струйки не могут сразу обогнуть угол *А*, поэтому за ним образуется застойная область, а основное движение происходит выше линии *АК*. Частицы жидкости в застойной области в результате действия вязкости и турбулентного перемешивания вытягиваются в зону основного потока в направлении движения. Благодаря расширению основного потока за углом *А* и соответственно уменьшению скоростей на участке *АК* давление незначительно повышается, что способствует возникновению обратного течения вблизи стенки. Так образуется *вращательное движение*, охватывающее значительную область (на рис. 103 она обозначена буквой *S*), направление циркуляции которого показано стрелками. Наблюдения показывают, что отдельные вихри, образующиеся на поверхности раздела, непрерывно перемещаются и одни массы жидкости заменяются другими в рассматриваемой области, хотя явление в целом

Рис. 103. К образованию отрывного течения за препятствием.

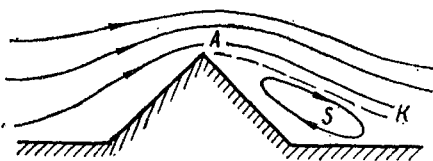
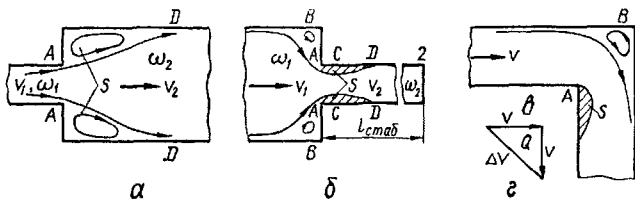


Рис. 104. Образование отрывных течений при:

*а* — внезапном расширении; *б* — внезапном сужении; *в* — повороте трубы; *г* — треугольнике скоростей при течении на повороте.



можно считать установившимся. Описанное течение в области  $S$  называют отрывным [26].

Кинетическая энергия отрывного течения черпается из энергии основного потока. Несмотря на сравнительно незначительные осредненные скорости, эта энергия существенна благодаря большим пульсациям скорости, которая, как уже указывалось, в результате «каскадного процесса» в значительной степени необратимо диссипируется в тепловую форму энергии.

Такова суть происхождения потерь энергии после местного сопротивления, создающего отрывные течения. Если по линии  $AK$  поверхности раздела на рис. 103 установить жесткую стенку, то местные потери резко уменьшатся, так как в этом случае ликвидируется область отрывного течения.

Описанные отрывные течения возникают при внезапном расширении или сужении трубы или канала, а также при повороте под углом. В первом случае (рис. 104, а) область отрывного течения  $S$  образуется после сечения  $A-A$  и ее величина в основном зависит от степени расширения потока. В другом случае (рис. 104, б) эта область возникает на участке  $ACD$  сужения потока с последующим его расширением. Наконец, на повороте (рис. 104, в) область  $S$  образуется за углом  $A$ . Роль отрывных течений наиболее проявляется в задвижках (см. рис. 80) и отверстиях (см. рис. 112).

Следует подчеркнуть, что отрывные течения возникают только после угла, вызвавшего отрывное течение, но не перед ним. В углу  $B$  перед препятствием (рис. 104, б) возникают также вихревые движения. Однако интенсивность этих движений незначительна, так как скорость основного потока вблизи угла  $B$  мала. Поэтому практически потери энергии перед углом не учитывают.

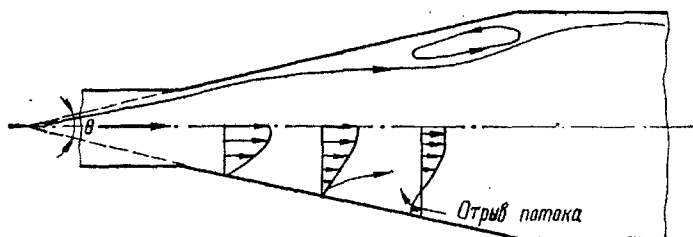
**Постепенное расширение и сужение потока.** В устройствах, сечения которых постепенно увеличиваются (диффузоры, раструбы), скорости течения потока в процессе движения уменьшаются, а давление возрастает (рис. 105). Иначе говоря, *кинетическая энергия жидкости преобразуется в потенциальную*. На первый взгляд при таком движении нет условия для образования отрывных течений. Однако, как показывает опыт, при угле конусности диффузора  $\Theta \approx 14^\circ$  поток отрывается от стенки и образуется вихревая область, обычно возле одной стороны (какой именно — зависит от случайных причин).

Чтобы объяснить это явление, обратимся к эпюрам осредненных скоростей по сечению (на рис. 105 такие эпюры показаны для двух сечений). Нетрудно заметить, что условия движения для струек в основной толще потока и вблизи стенки неодинаковы. В основной толще потока струйки обладают значительной кинетической энергией, за счет которой и происходит указанный переход части кинетической энергии в потенциальную. Струйки же вблизи стенки вследствие малой скорости имеют весьма малую кинетическую энергию\*, поэтому движение частиц здесь вообще затруднено в направлении положительного градиента давления, т. е. в сторону от меньших давлений к большим. Может наступить момент, когда частицы в этих струйках остановятся и начнут двигаться в обратном направлении, несмотря на то что в основном потоке частицы продолжают двигаться вперед. Количество заторможенной жидкости между стенкой и основным потоком быстро увеличивается и область возвратного течения все больше расширяется, пока совсем не вытесняет транзитный поток от стенки. Так возникает указанный выше отрыв потока от стенки.

На практике, когда необходимо эффективно преобразовать кинетическую энергию потока в потенциальную, угол конусности диффузора должен быть менее  $14^\circ$ . При этом отрыв потока от стенки не происходит. Такие устройства широко используются в насосных и вентиляционных установках.

Важно отметить, что в конфузоре, когда сечения трубы (канала) постепенно уменьшаются, а скорости в процессе движения возрастают и давление понижается (течение с отрицательным градиентом давления), отрыв потока от стенок

Рис. 105. Схема течения в диффузоре.



\* Кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости и поэтому имеет более высокий порядок малости, чем величина самой скорости.



не происходит, поскольку при таком движении направление сил давления по живым сечениям совпадает с направлением скоростей частиц жидкости. Это, однако, не означает, что течение в конфузоре происходит без местных потерь энергии. Обычно конфузор соединяется с участком трубы постоянного сечения (рис. 106). В месте перехода в результате стеснения потока и последующего его расширения образуются уже известные нам отрывные течения  $S$ .

**Вторичные течения (поперечная циркуляция).** Изменение направления потока связано с искривлением отдельных его струек. Это обуславливает возникновение центробежных сил, которые создают разность давлений потока по живым сечениям. Такая разность давлений и создает условия для возникновения *вторичных течений, или явления поперечной циркуляции* (см. § 41).

Рассмотрим течение на плавном закруглении трубопровода (рис. 107). Центробежные силы, действующие от центра к периферии, оттесняют поток от выпуклой стенки трубы к вогнутой. Однако в пристеночном слое, где скорости малы, центробежные силы, пропорциональные квадрату скорости, практически отсутствуют. Таким образом, возникают условия для движения по поверхностям живых сечений в направлениях, показанных стрелками на рис. 107 справа. Эта поперечная циркуляция, складываясь с основным потоком, образует винтовое движение, которое вследствие вязкости затухает на некотором расстоянии от поворота.

Описанные винтовые движения возникают не только на повороте трубы (канала), а и в других случаях изменения направления течения, в частности, при делении потока в тройниках, вентилях и т. п.

**Слияние потоков.** Как уже указывалось, устройство, где соединяются два или более потоков, является местным

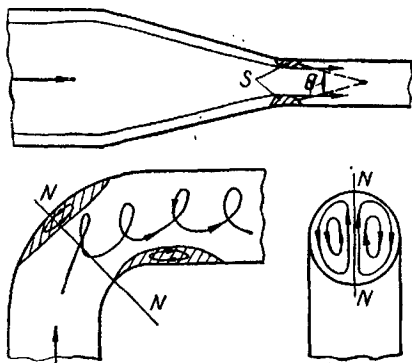


Рис. 106. Схема течения в конфузоре.

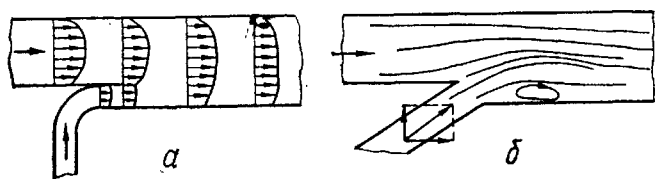
Рис. 107. Схема течения на плавном закруглении трубопровода.

сопротивлением. Например, во всасывающих тройниках вентиляционных систем или в струйных аппаратах соединяются два потока. Механизм вихреобразования в случае, когда соединяющиеся потоки имеют одно направление (рис. 108, а), уже разбирался в § 37. Если два потока соединяются под углом (рис. 108, б), местные потери возрастают. Разность осредненные скорости присоединяемого потока на поперечную и продольную составляющие относительно направления основного потока, можно, применяя закон количества движения (подобно тому, как это было сделано при рассмотрении касательных напряжений от турбулентных пульсаций в § 37), получить величину добавочных касательных напряжений, пропорциональных произведению этих скоростей. Поскольку осредненные скорости присоединяемого потока в несколько раз больше турбулентных пульсаций, потери энергии, отвечающие этим касательным напряжениям, могут быть весьма значительными.

**Фильтры.** Для очистки жидкости от твердых частиц широко применяются устройства (решетки, сетки, ткань, пористые материалы и др.) с равномерно распределенными по сечению отверстиями диаметром от нескольких миллиметров до нескольких микрометров, удерживающими самые малые примеси. Здесь поток расщепляется на множество поверхностей раздела, каждой из которых сопутствуют явления, описанные в § 17. В целом такая конструкция является местным сопротивлением и при малых размерах отверстий дает значительные потери энергии.

**Участок стабилизации.** Любое местное сопротивление в той или иной степени деформирует поток, что связано с увеличением пульсаций и перераспределением осредненных скоростей. На некотором расстоянии от местного сопротивления эти добавочные явления угасают, эпюра скоростей выравнивается и течение становится таким же, каким оно было перед местным сопротивлением. Прямолинейный учас-

Рис. 108. Слияние потоков:  
а — в одном направлении; б — под углом.



ток трубопровода, на котором происходит процесс выравнивания потока, называется *участком стабилизации* (см. на рис. 109 —  $l_{\text{стаб}}$ ). Для некоторых видов местных сопротивлений длина участка стабилизации достигает 50 и даже больше диаметров трубы. Потери энергии на таком участке, конечно, больше, чем в трубопроводе той же длины в условиях равномерного движения жидкости. Часто эти добавочные потери суммируют с данным местным сопротивлением.

В заключение необходимо напомнить, что приведенная трактовка местных явлений относится к *турбулентному* потоку. При ламинарном режиме отрывные течения и вихри не возникают, поскольку инерция движущихся частиц оказывается недостаточной для преодоления влияния вязкости. Однако это не означает, что местные препятствия по пути движения не создают потери энергии. При ламинарном режиме потери являются результатом значительных градиентов скорости, диктуемых геометрией данного местного препятствия.

### § 43

#### **Формула Вейсбаха для расчета местных потерь энергии**

Изложенный материал свидетельствует о сложности гидравлических явлений, способствующих возникновению местных потерь энергии. Однако можно утверждать, что эти потери при турбулентном режиме *пропорциональны кинетической энергии*, поскольку отрывные и вторичные течения, а также вихреобразования — явления инерционного происхождения, интенсивность которых зависит от квадрата скорости. Таким образом, местные потери напора и давления соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} h_m &= \zeta \frac{v^2}{2g} ; \\ p_m &= \zeta \frac{\rho v^2}{2} , \end{aligned} \right\} \quad (239)$$

где неизвестный коэффициент пропорциональности  $\zeta$  называется *коэффициентом сопротивления*.

Формулы вида (239) были предложены Вейсбахом в 1840 г., когда еще отсутствовали экспериментальные данные, позволяющие раскрыть природу местных сопротивлений, но

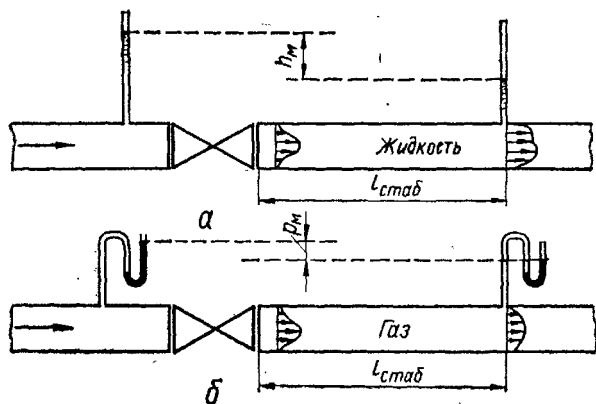
и до настоящего времени она является основной для расчета местных потерь.

В формулах (239) средняя скорость течения  $v$  относится к характерному живому сечению данного местного сопротивления либо самого трубопровода. Безразмерный коэффициент сопротивления  $\zeta$  нетрудно определить экспериментально для каждого типа местного сопротивления. Например, чтобы найти значение  $\zeta$  задвижки относительно скорости в трубе, достаточно измерить расход и разность пьезометрических отметок до задвижки и после нее для воды (рис. 109, а) или разность давлений для газа (рис. 109, б). При этом важно напомнить, что второе сечение для измерения напора или давления должно находиться на расстоянии  $l_{\text{стаб}}$  от самого местного сопротивления.

Формулы Вейсбаха постулируют, что коэффициент  $\zeta$  для данного вида местного сопротивления является постоянной величиной, которая не зависит от скорости течения и вязкости жидкости, т. е. от числа Рейнольдса. Многочисленные экспериментальные исследования показывают, что условие  $\zeta = \text{const}$  для данного вида местного сопротивления полностью оправдывается только при больших числах Рейнольдса ( $Re > 2 \cdot 10^4 \div 4 \cdot 10^4$ ). При меньших значениях  $Re$ , в особенности при ламинарном или близком к нему режиме течения, влияние числа Рейнольдса на  $\zeta$  становится заметным. В справочниках значения  $\zeta$  обычно дают без учета влияния  $Re$ , поскольку на практике последние,

Рис. 109. К определению местных потерь:

а — потеря напора; б — потеря давления.



как правило, больше указанных величин. Однако не надо забывать, что в отдельных случаях движения при малых значениях  $Re$  необходимо учитывать зависимость  $\zeta$  от  $Re$  (см. § 47).

#### § 44

#### Теоретический подход к определению местных потерь энергии

Рассмотрим прежде всего случай внезапного расширения потока (рис. 110). Выделим контрольную поверхность, ограниченную контурными линиями  $1-A-B-2$ ,  $2-B-A-1$ . В сечении  $2-2$  поток уже стабилизировался. Количество движения жидкости, протекающей за 1 с сквозь сечение  $1-1$ ,

$$КД_1 = \rho Q v_1 = \beta_1 \rho \omega_1 v_1 v_1 = \beta_1 \rho \omega_1 v_1^2.$$

Соответственно, секундное количество движения в сечении  $2-2$

$$КД_2 = \beta_2 \rho \omega_2 v_2^2.$$

Силы гидравлического давления в сечениях  $1-1$  и  $2-2$

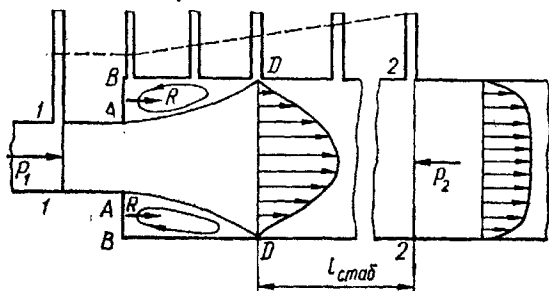
$$P_1 = p_1 \omega_1; \quad P_2 = p_2 \omega_2.$$

В сечении  $B-A-A-B$  поток еще не успел расшириться, поэтому можно принять давление в этом кольцевом (для круглой трубы) сечении постоянным и равным  $p_1$ . Тогда силы реакции стенок  $BAAB$  на жидкость

$$R = p_1 (\omega_2 - \omega_1).$$

Силами вязкостного трения жидкости о стенки на участке внезапного расширения пренебрегаем, а силы тяжести на горизонтальном участке трубы равны нулю.

Рис. 110. К выводу теоремы Борда.



Итак, уравнение количества движения в направлении оси потока для выделенной контрольной поверхности

$$P_1 + R + КД_1 = P_2 + КД_2.$$

Учитывая выведенные соотношения для сил и количества движения, а также приняв  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , можем написать:

$$\rho_1 \omega_1 + \rho_1 (\omega_2 - \omega_1) + \rho \omega_1 v_1^2 = \rho_2 \omega_2 + \rho \omega_2 v_2^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получаем:

$$\rho_2 - \rho_1 = \rho \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} v_1^2 - v_2^2 \right).$$

Приняв во внимание условие неразрывности  $\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2$ , последнее уравнение переписывается так:

$$\rho_2 - \rho_1 = \rho (v_1 v_2 - v_2^2). \quad (240)$$

Уравнение (240) дает возможность рассчитать *повышение давления при внезапном расширении*, если известны скорости до и после него.

Поскольку внутренние силы, действующие внутри контрольной поверхности, не рассматриваются, а внешние силы известны, достигается количественная оценка явления; при этом само содержание явления не раскрывается.

Перейдем к определению величины потерь при внезапном расширении потока и соответствующего коэффициента сопротивления в формулах (239). Прежде всего напомним уравнение Бернулли для сечений 1—1 и 2—2 с учетом местных потерь давления  $p_{\text{расш}}$ :

$$\rho_1 + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho_2 + \alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2} + p_{\text{расш}}.$$

Отсюда, приняв  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1^*$ ,

$$p_{\text{расш}} = \rho_1 - \rho_2 + \frac{\rho (v_1^2 - v_2^2)}{2}.$$

\* В сечении 1—1 в условиях равномерного движения коэффициент  $\alpha$  близок к единице. Значение  $\alpha$  в сечении 2—2 существенно зависит от его расстояния до сечения В—В внезапного расширения. Например, для сечения D—D (рис. 110), где поток заполняет все сечение, но еще не стабилизировался,  $\alpha = 1,4 \div 1,6$ . Для сечения 2—2, находящегося на расстоянии  $l_{\text{стаб}} = 20 d$ , можно считать  $\alpha_2 \approx 1$ .

Подставим в последнее уравнение вместо разности  $p_1 - p_2$  его выражение из формулы (240). Тогда

$$p_{\text{расш}} = \frac{\rho (v_1 - v_2)^2}{2}. \quad (241)$$

Полученную зависимость (241) называют формулой Борда, которая словами формулируется так: *потеря давления при внезапном расширении потока равна динамическому давлению, подсчитанному по разности скоростей перед расширением и после него.*

Формула (241) была выведена Борда в 1766 г., исходя из теории удара неупругих шаров, т. е. на основе предположения, что быстро движущиеся частицы до расширения сталкиваются с частицами жидкости, движущимися медленно после расширения. Однако такая трактовка явления неверна. В действительности, как это следует из свойств самой жидкости, отдельные ее частицы находятся в постоянном контакте между собой и никаких соударений между ними не происходит. Сходство формулы (241) с формулой потери кинетической энергии при ударе неупругих тел чисто внешнее. Правильно явление впервые было объяснено Беланже в 1840 г. Однако во многих руководствах по гидравлике еще до сих пор встречается неудачный термин «потеря на удар».

В тех случаях, когда расширение потока не внезапное, очевидно, можно написать

$$p_{\text{расш}} = k \frac{\rho (v_1 - v_2)^2}{2}, \quad (242)$$

где  $k < 1$  — коэффициент «смягчения», значение которого зависит от конструкции расширения.

Представим формулу Борда (241) так:

$$p_{\text{расш}} = \frac{\rho v_1^2}{2} \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{\rho v_1^2}{2} (1 - n)^2,$$

где степень расширения потока

$$n = v_2/v_1 = \omega_1/\omega_2. \quad (243)$$

Для труб круглого сечения

$$n = (d_1/d_2)^2. \quad (244)$$

Тогда коэффициент сопротивления при внезапном расширении [см. формулу (239)]

$$\zeta_{\text{расш}_1} = (1 - n)^2. \quad (245)$$

Эта формула, полученная теоретическим путем, хорошо согласуется с опытными данными.

Заметим, что индекс 1 при  $\zeta$  означает, что в формуле (245) коэффициент сопротивления отнесен к большей скорости перед расширением. Чтобы избежать ошибок при пользовании справочниками, очень важно обращать внимание на то, к какой скорости (большей или меньшей) отнесен коэффициент  $\zeta$  в каждом конкретном случае.

Обратимся теперь к случаю внезапного сужения потока (рис. 111).

Применяя методику исследования, аналогичную случаю внезапного расширения, выделим контрольную поверхность 1—A—B—2—2—B—A. Уравнение количества движения в направлении горизонтальной оси движения

$$\rho_1 \omega_1 + \rho \omega_1 v_1^2 = \rho_2 \omega_2 + R + \rho \omega_2 v_2^2.$$

При вычислении реакции стенок логично принять, что давление  $p_R$ , действующее на площадь A—B—B—A, как при обтекании преграды, равно

$$p_R = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \quad (246)$$

и, соответственно, сама реакция

$$R = p_R (\omega_1 - \omega_2) = \left( p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \right) (\omega_1 - \omega_2).$$

Подставив последнее выражение в уравнение количества движения, после некоторых преобразований получим

$$p_1 - p_2 = \rho v_2 (v_2 - v_1) + \frac{\rho v_1^2}{2} \left( 1 - \frac{v_1}{v_2} \right).$$

Уравнение Бернулли для сечений 1—1 и 2—2

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} &= \\ &= p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + p_{\text{суж.}} \end{aligned}$$

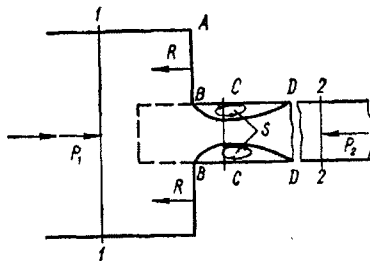


Рис. 111. К определению местных потерь при внезапном сужении.



При совместном решении уравнений количества движения и уравнения Бернулли получаем

$$\rho_{\text{суж}} = \frac{\rho v_2^2}{2} (1 - n), \text{ где } n = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Отсюда коэффициент сопротивления

$$\zeta_{\text{суж}_2} = 1 - n. \quad (247)$$

Результаты расчетов по полученным зависимостям почти совпадают с опытными данными, когда труба меньшего сечения выдвинута по отношению к торцевой стенке (штриховая линия на рис. 111). Для основного случая сужения без выступа хорошие результаты дает формула (247), если в нее ввести поправочный коэффициент 0,5.

Полученное расхождение между опытом и теорией объясняется неточностью оценки реакции. Использование формулы (246) для подпора перед преградой при расчете реакции полностью оправдывается только при выдвинутой трубе.

Возможен и другой теоретический подход к изучению сопротивления при внезапном сужении потока. Основным источником потерь здесь (см. рис. 111) является область отрывного течения  $S$ , возникающая вследствие сжатия потока при входе в трубу (канал) меньшего сечения с последующим расширением струи. Для изучения явления прежде всего необходимо выяснить эффект сжатия. Под действием центробежных сил искривленных струек поток сжимается при внезапном сужении; на небольшом расстоянии от входной кромки (стенки  $AB$ ) живое сечение потока становится минимальным (сечение  $C-C$ ). Отношение площади этого сечения  $\omega_c$  к сечению трубы  $\omega_2$  характеризуется коэффициентом сжатия

$$\varepsilon = \omega_c / \omega_2. \quad (248)$$

Очевидно, что величина  $\varepsilon$  зависит от степени стеснения потока в сужении, т. е. от отношения  $n = \omega_2 / \omega_1$ .

Эффект стеснения можно исследовать теоретически с помощью приемов гидромеханики невязкой жидкости, что было сделано Кирхгоффом и Н. Е. Жуковским. Приведем значения коэффициента  $\varepsilon$  в зависимости от степени стеснения  $n$ :

$n$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\varepsilon$	0,611	0,612	0,616	0,622	0,633	0,644	0,662	0,687	0,722

Как видно, при изменении  $n$  в широких пределах ( $0 \div 0,5$ ) величина  $\varepsilon$  почти не изменяется и в среднем равна 0,62. Эти данные получены для плоских щелей, однако справедливы и для круглых сечений.

За сжатым сечением  $C-C$  поток начинает расширяться и на некотором расстоянии заполняет все сечение ( $D-D$ ). Участок расширения  $CD$  аналогичен рассмотренному участку расширения при выводе формулы Борда. Если пренебречь потерями до сжатого сечения, то, применив формулу Борда (241), можем написать для потери давления при внезапном сужении потока такое выражение:

$$\rho_{\text{суж}} = \frac{\rho(v_C - v_2)^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2} \left( \frac{v_C}{v_2} - 1 \right)^2,$$

где  $v_C$  — средняя скорость в сжатом сечении  $C-C$ ;  $v_2$  — средняя скорость в суженной части трубы.

На основании условий неразрывности (129) и (248) можем написать

$$\frac{v_C}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_C} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Теперь

$$\rho_{\text{суж}} = \frac{\rho v_2^2}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2$$

и коэффициент сопротивления внезапного сужения относительно скорости  $v_2$

$$\zeta_{\text{суж}_2} = \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2. \quad (249)$$

Рассмотрим потери при протекании жидкости через отверстия в трубопроводе (рис. 112). Картина течения напоминает только что рассмотренную схему сужения потока. Различие состоит лишь в том, что расширение потока после отверстия происходит не по сечению  $\omega$ , равному сечению отверстия, а по сечению трубопровода  $\Omega$ . Если здесь величиной  $n$  обозначить отношение

$$n = \omega/\Omega, \quad (250)$$

то опять, применив формулу (241), получим выражение для потери давления в отверстии

$$\rho_{\text{отв}} = \frac{\rho v^2}{2} \left( \frac{v_C}{v_2} - 1 \right)^2.$$

Однако  $\frac{v_c}{v_2} = \frac{1}{n\epsilon}$ . Таким образом, коэффициент сопротивления относительно скорости в трубопроводе

$$\zeta_{отв_2} = \left( \frac{1}{n\epsilon} - 1 \right)^2, \quad (251)$$

где значения  $\epsilon$  берутся из данных, приведенных на с. 192.

Наконец, обратимся к случаю поворота под углом (рис. 104, в). По теореме Борда, представив уравнение (241) в векторной форме,

$$\rho_{пов} = \frac{\rho (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2} = \frac{\rho \Delta v^2}{2},$$

где  $\Delta v$  — геометрическая разность скоростей перед поворотом и после него.

Из треугольника скоростей (рис. 104, в)

$$\rho_{пов} = \frac{\rho (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \theta)}{2}, \quad (252)$$

откуда коэффициент сопротивления, определенный по скорости перед поворотом,

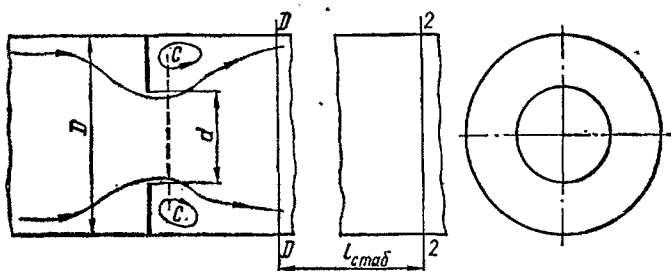
$$\zeta_{пов_1} = 1 + \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 - 2 \frac{v_2}{v_1} \cos \theta. \quad (253)$$

Для поворота постоянного сечения  $v_1 = v_2$ , поэтому

$$\zeta_{пов} = 2(1 - \cos \theta) = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (254)$$

Эта формула дает хорошие результаты, если в нее ввести поправочный коэффициент 0,6. Расхождения между опыт-

Рис. 112. Схема течения через круглое отверстие в трубе.



ными и теоретическими данными получаются за счет пренебрежения реакцией стенок, которая несомненно существует при повороте.

Ввиду сложности оценки реакции стенок теоретические уравнения не дают достаточно точного количественного результата, зато правильно указывают на характер получаемых зависимостей.

## § 45

### **Значения коэффициентов сопротивления для различных случаев**

Можно выделить такие основные виды местных сопротивлений.

1. Сопротивления, связанные с изменением величины средней скорости (живых сечений) потока. Сюда следует отнести случаи внезапного, а также постепенного расширения или сужения потока (переходы, раструбы, диффузоры, конфузоры, отверстия и пр.).

2. Сопротивления, связанные с изменением направления скоростей (изогнутые участки труб — колена, отводы, повороты и др.).

3. Сопротивления, связанные со слиянием и разделением потока (тройники, крестовины).

4. Сопротивления, связанные с течением через трубопроводную арматуру (например, вентили, задвижки, клапаны).

5. Сопротивления на участке выравнивания (стабилизации) потока.

Сопротивления, связанные со слиянием и разделением потока, а также с протеканием через арматуру, включают в себя элементы первых двух видов сопротивлений.

Сопротивление на участке стабилизации чаще всего рассматривают как часть данного местного сопротивления.

Приводимые ниже экспериментальные и частично теоретические данные относятся к наиболее важным случаям местных сопротивлений. При этом основное внимание обращается на выявление тех факторов, от которых зависит значение коэффициентов сопротивления. При выполнении детальных расчетов следует обращаться к специальной справочной литературе [7].

**Сопротивления, связанные с изменением скоростей. Внезапное расширение.** Значение коэффициен-

тов сопротивления определяются по формуле (245) в зависимости от степени расширения  $n = \omega_1/\omega_2$ . Характер изменения  $\zeta_{\text{расш}}$  при этом виден из следующих данных:

$n$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\zeta_{\text{расш}}$	1	0,64	0,36	0,15	0,04	0

Сопротивление быстро уменьшается с увеличением  $n$ , что понятно, поскольку отрывные течения (области  $S$  на рис. 110) резко уменьшаются с уменьшением степени расширения потока. При  $n > 0,6$  (что соответствует отношению диаметров  $d_1/d_2 = \sqrt{0,6} \approx 0,8$ ) сопротивление становится совсем незначительным. При  $n = 0,25$  ( $d_1/d_2 = 0,5$ )  $\zeta_1 = (1 - 0,25)^2 = 0,56$ . В граничном случае истечения в большой резервуар ( $\omega_2 \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow 0$ ) максимальное значение  $\zeta_1 \rightarrow 1$ , т. е. кинетическая энергия потока полностью рассеивается.

Анализируя явления, связанные со внезапным расширением потока, необходимо помнить о длине участка стабилизации, которая составляет здесь приблизительно  $20d$ . Характер изменения пьезометрического напора вдоль участка стабилизации показан на рис. 110.

**Внезапное сужение.** Как уже указывалось в предыдущем параграфе, коэффициент сопротивления внезапного сужения потока может быть представлен формулой

$$\zeta_{\text{суж}_2} = 0,5(1 - n). \quad (255)$$

В данном случае величина  $\zeta_{\text{суж}_2}$  линейно уменьшается с увеличением степени сужения  $n = \omega_2/\omega_1$ . Из сопоставления формулы (245) для случая внезапного расширения и формулы (255) для внезапного сужения видно, что во втором случае сопротивление изменяется не так резко, как в первом; если при малых значениях степени сужения  $\zeta_{\text{расш}} > \zeta_{\text{суж}}$ , то при  $n > 0,5$ , наоборот,  $\zeta_{\text{расш}} < \zeta_{\text{суж}}$ .

Приведенные значения  $\zeta_{\text{суж}}$  относятся к нескругленной кромке входа, что обычно и имеет место на практике в сварных и нарезных соединениях. При наличии скругления или скоса входной кромки эффект сопротивления значительно уменьшается. Это происходит вследствие резкого уменьшения области отрывных течений. Например, для большой степени сужения (вход в трубу, когда  $n \rightarrow 0$  и  $\zeta_{\text{суж}} = 0,5$ ) при относительном радиусе скругления входной кромки  $r/d = 0,2$  значение  $\zeta_{\text{суж}}$  уменьшается до 0,03, т. е. в 17 раз.

Отверстия применяют для регулирования трубопроводных систем и управления ими. От размеров отверстия зависят его сопротивление и давление после него. К таким устройствам, в частности, относятся шайбы для увязки давлений в ответвлениях вентиляционных сетей и систем отопления, а также дроссели в системах гидропневмоавтоматики. Любое запорное приспособление (вентиль, задвижка, кран и др.) по существу является отверстием с переменным проходным сечением. Отверстия служат также для измерения расхода (см. § 51). Совокупность равномерно распределенных по сечению отверстий образует систему для выравнивания потока (решетки, жалюзи) или его очистки от твердой фазы (фильтры).

Теоретический подход к изучению явления привел нас к выводу зависимости (249), которая может быть также выражена формулой И. Е. Идельчика

$$\zeta_{отв_2} = (1 + 0,707 \sqrt{1 - n} - n^2) \frac{1}{n^2}. \quad (256)$$

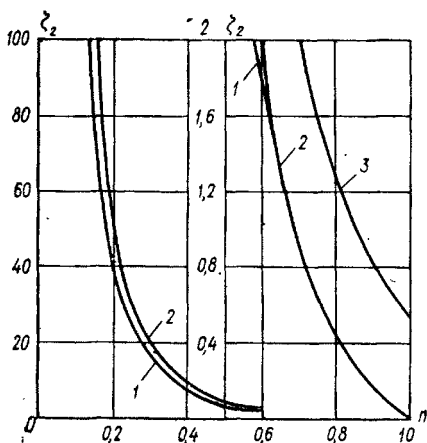
В результате тщательных экспериментальных исследований сопротивления отверстий на водопроводящих линиях, выполненных под руководством Л. Ф. Мошнина, была получена эмпирическая формула

$$\zeta_{отв_2} = 2,3 \left( \frac{1}{n} - 0,8 \right)^2. \quad (257)$$

На рис. 113 представлены кривые  $\zeta = f(n)$ , полученные по формулам (249), (256) и (257). Эти формулы дают близкие между собой результаты. Обращает внимание ярко выраженная нелинейность изменения коэффициента сопротивления в зависимости от относительной величины отверстия. При малых проходных сечениях самые незначительные их

Рис. 113. Зависимость коэффициента сопротивления отверстия от относительной величины отверстия:

1 — по формуле (249); 2 — по формуле (256); 3 — по формуле (257).



изменения ведут к резким изменениям сопротивления. Наоборот, при больших отверстиях сопротивление их совсем незначительно. Отсюда, в частности, следует, что при закрытии задвижки ее влияние сначала почти не сказывается и лишь когда она закрыта больше чем наполовину, становится заметным эффект сопротивления; наконец, когда задвижка закрыта более чем на  $2/3$ , малейшее изменение ее положения вызывает значительное изменение сопротивления, что необходимо знать проектировщикам регулирующих и управляющих устройств, а также эксплуатационному персоналу при манипулировании с запорными приспособлениями.

Участок стабилизации после отверстия получается весьма значительным. В сжатом сечении  $C-C$  (рис. 112) давление минимально, затем вследствие расширения потока оно частично восстанавливается до значения  $p_2 < p_1$ . Таким образом, потеря давления в отверстии определяется разностью

$$p_{\text{отв}} = p_1 - p_2.$$

Длина участка стабилизации зависит от относительной величины отверстия и при малых  $n$  достигает значений  $l_{\text{стаб}} = (50 \div 80) D$ .

Как уже указывалось, отверстия часто применяются как добавочные сопротивления для «увязки» работы ответвления по отношению к магистральному трубопроводу.

**Пример 21.** Подобрать диаметр шайбы (отверстия) в ответвлении воздухопровода для обеспечения в нем скорости  $v = 6$  м/с при длине ответвления  $l = 20$  м, его диаметре  $D = 200$  мм, начальном давлении (давлении в магистрали)  $p = 80$  Па.

Определяем потерю давления по длине в ответвлении по формуле (194), приняв  $\lambda = 0,02$ :

$$p_l = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{\rho v^2}{2} = 0,02 \frac{20}{0,2} \cdot \frac{1,2 \cdot 6^2}{2} = 43 \text{ Па.}$$

Для увязки работы ответвления необходимо, чтобы падение давления в нем равнялось давлению в магистрали в месте присоединения. Получающийся избыток давления

$$p_{\text{ш}} = p - p_l = 80 - 43 = 37 \text{ Па}$$

должна погасить шайба.

Применив формулу (239), вычисляем потерю давления в шайбе

$$p_{\text{ш}} = \zeta_{\text{отв}_2} \frac{\rho v^2}{2},$$

откуда

$$\zeta_{\text{отв}_2} = \frac{2 \cdot 37}{1,2 \cdot 6^2} = 1,7.$$

По формуле (257) находим, что для найденного значения  $\zeta_{\text{отв}_2} = 1,7$

$$n = \frac{1}{\sqrt{1,7/2,3 + 0,8}} = 0,6,$$

откуда искомый диаметр шайбы

$$d = D \sqrt{n} = 200 \sqrt{0,6} = 155 \text{ мм.}$$

Дросселирование сжимаемой жидкости. Рассмотрим течение газа через отверстие, полагая падение давления при этом столь значительным, что необходимо учитывать сжимаемость газа. Такой процесс называют *дросселированием*. Если считать течение адиабатичным, для анализа явления применимо уравнение (154). Пренебрегая энергией скорости до и после отверстия, имеем  $i_1 = i_2$ , т. е. конечная энтальпия в данном процессе равна начальной и точка 2 на  $i-S$ -диаграмме (рис. 76) находится на одной изотерме с начальной точкой 1. Однако было бы совершенно неправильно трактовать процесс дросселирования как

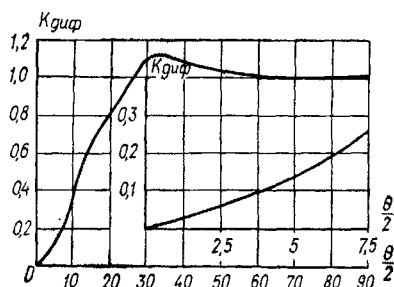
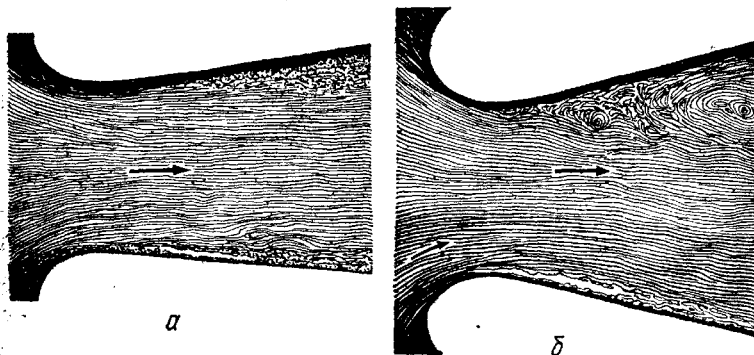


Рис. 114. Зависимость коэффициента смягчения  $k_{\text{диф}}$  диффузора от угла его раскрытия.

Рис. 115. Картина течения в диффузоре:

$a - \theta/2 = 5^\circ$ ;  $б - \theta/2 = 15^\circ$ .





изотермический. В действительности явление происходит следующим образом. В сечении струи  $C-C$  (рис. 112) скорость максимальна, а давление минимально; процесс течения от сечения  $1-1$  до сечения  $C-C$  ввиду незначительности потерь на этом участке можно считать приблизительно изоэнтальпическим, т. е. он изобразится отрезком  $1-C$ , немного отклоняющимся вправо на рис. 76. На участке течения  $C-2$ , где струя расширяется, давление повышается от  $p_c$  до  $p_2$ , меньшего  $p_1$ . На этом участке и происходит диссипация энергии, вследствие чего энтропия возрастает и на рис. 76 течение представляется линией  $C-2$ .

Таким образом, в целом процесс дросселирования на рис. 76 изображается ломаной линией  $1-C-2$ .

Д и ф ф у з о р. Потери при расширении потока могут быть намного уменьшены, если переход от меньшего сечения трубы (канала) к большему осуществить постепенно с помощью расширяющейся трубы — диффузора (рис. 105).

При малых углах конусности диффузора ( $\Theta/2 < 7^\circ$ ) поток заполняет все сечение, отрыв не возникает и сопротивление диффузора незначительно. При  $\Theta/2 = 7 \div 30^\circ$  происходит отрыв потока от одной из стенок; при этом он носит обычно нестабильный характер, перебрасываясь с одной стороны на другую. Сопротивление диффузора при наличии отрыва потока резко возрастает. При  $\Theta/2 = 30 \div 45^\circ$  поток в диффузоре отрывается от обеих стенок и сопротивление достигает максимума. С дальнейшим увеличением угла сопротивление несколько уменьшается. Общий характер зависимости коэффициента смягчения  $k_{\text{диф}}^*$  от угла конусности диффузора круглого сечения виден из рис. 114. Соответствующие числовые значения  $k_{\text{диф}}$  приведены ниже:

$\Theta/2$	2,5	5	7,5	10	20	30	40	60	90
$k_{\text{диф}}$	0,06	0,13	0,25	0,35	0,8	1,1	1,05	1,02	1

Картина течения в диффузорах без отрыва и с отрывом показана на рис. 115.

Обращаясь еще раз к графику на рис. 114, замечаем, что при углах  $\Theta/2 = 30 \div 40^\circ$  потери в диффузоре оказываются даже большими, чем при внезапном расширении. На

\* Эффективность работы диффузора обычно принято характеризовать не коэффициентом сопротивления  $\zeta_{\text{диф}}$ , а коэффициентом  $k_{\text{диф}}$ . Из уравнений (241), (242) следует, что  $\zeta_{\text{диф}} = k_{\text{диф}} \zeta_{\text{расш}}$

практике, как правило, принимают для круглого и квадратного диффузоров  $\Theta/2 = 5 \div 7^\circ$ , для плоского — до  $8^\circ$ .

Если габариты помещения не позволяют применить диффузоры с углом конусности  $\Theta/2$ , близким к оптимальному, то при  $\Theta/2 < 30^\circ$  целесообразно принять специальную конструкцию *ступенчатого диффузора* (рис. 116), который состоит из обычного диффузора с оптимальным углом раскрытия и расположенного за ним внезапного расширения. Последнее в этом случае не дает значительных потерь, поскольку кинетическая энергия потока в конечном сечении перед расширением мала.

**Пример 22.** Начальный диаметр диффузора  $d_1 = 0,2$  м, скорость воздуха  $v_1 = 20$  м/с. Требуется уменьшить скорость в 4 раза ( $v_2 = 5$  м/с), причем по местным условиям длина диффузора не должна превышать  $l = 0,5$  м, и определить потери давления при обычном и ступенчатом диффузорах.

**Обычный диффузор.** Определяем конечный диаметр из условия неразрывности потока:

$$v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4},$$

откуда

$$d_2 = d_1 \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} = 0,2 \sqrt{4} = 0,4 \text{ м.}$$

Угол конусности диффузора находим из геометрического соотношения, связывающего его длину с начальными и конечными диаметрами (рис. 116):

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = \frac{d_2 - d_1}{2l} = \frac{0,4 - 0,2}{2 \cdot 0,5} = 0,2,$$

отсюда  $\Theta/2 \approx 11^\circ$ .

Из графика на рис. 114 находим, что для  $\Theta/2 = 11^\circ$  коэффициент смягчения  $k_{\text{диф}} = 0,5$ . Тогда потеря давления по формуле (242) при  $n = 1/4$

$$p_{\text{диф}} = 0,5 (1 - 0,25)^2 \frac{1,2 \cdot 20^2}{2} = 67 \text{ Па.}$$

**Ступенчатый диффузор.** Принимаем оптимальный угол раскрытия на одну сторону  $\Theta/2 = 4^\circ$ . Концевой диаметр диффузорной части  $d'_2 = d_1 + 2l \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = 0,2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,07 = 0,27$  м.

Из рис. 114  $k_{\text{диф}} = 0,14$ . Потеря давления в диффузорной части

$$p'_{\text{диф}} = 0,14 \left(1 - \frac{0,20^2}{0,27^2}\right)^2 \frac{1,2 \cdot 20^2}{2} = 15 \text{ Па.}$$

Скорость течения в конце диффузорной части

$$v_2' = v_1 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 = 20 \left( \frac{0,20}{0,27} \right)^2 = 11 \text{ м/с.}$$

Потеря давления при внезапном расширении по формуле (252)

$$p_{\text{расш}}' = \frac{\rho (v_2' - v_2)^2}{2} = \frac{1,2 (11 - 5)^2}{2} = 22 \text{ Па.}$$

Наконец, полная потеря давления в ступенчатом диффузоре

$$p' = p_{\text{диф}}' + p_{\text{расш}}' = 15 + 22 = 37 \text{ Па.}$$

Сравнив оба варианта, убеждаемся, что во втором случае потери оказались почти вдвое меньшими.

**К о н ф у з о р.** При постепенном переходе от больших сечений трубы (канала) к меньшим — в конфузоре — потери уменьшаются по сравнению со случаем внезапного сужения потока. Как уже указывалось в § 42, основной причиной потерь в конфузоре является отрывное течение, возникающее после сжатого сечения  $C-C$  на участке соединения конфузора с цилиндрической частью трубы. Очевидно, эффект сопротивления зависит от угла конусности конфузора  $\theta/2$ . Вводя аналогично случаю расширения потока коэффициент смягчения, можем написать

$$\zeta_{\text{конф}} = k_{\text{конф}} 0,5 (1 - n), \quad (258)$$

где  $k_{\text{конф}}$  зависит от угла  $\theta/2$ :

$\theta/2$	10	20	30	40	60	90
$k_{\text{конф}}$	0,23	0,18	0,2	0,27	0,5	1

Угол конусности конфузора можно принимать до  $\theta/2 = 30^\circ$  (на одну сторону).

**Сопротивления, связанные с изменением направления скорости. Поворот под углом.** Основной причиной потерь при повороте под углом является поджатие потока с последующим его расширением за поворотом и образование отрывного течения  $S$  (рис. 104, в). Вихреобразования в углу  $B$  незначительны и не оказывают существенного влияния на величину потерь. Полуэмпирическая формула (см. § 44)

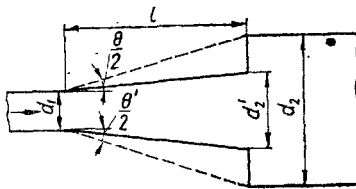


Рис. 116. Ступенчатый диффузор.

дает такую зависимость коэффициента сопротивления от угла поворота:

$$\zeta_{\text{пов}} = 2,4 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (259)$$

Из этой формулы следует, что при  $\theta/2 < 30^\circ$  сопротивление поворота совсем незначительно; при  $\theta > 45^\circ$  начинается быстрое возрастание  $\zeta_{\text{пов}}$  и при  $\theta = 90^\circ$   $\zeta_{\text{пов}} = 1,2$ .

П л а в н ы й п о в о р о т часто называют также отводом. Плавный поворот в значительной степени уменьшает интенсивность отрывных течений, показанных на рис. 103, в. Однако здесь приобретает значение эффект поперечной циркуляции (рис. 106), зависящий от угла поворота  $\theta$ , относительного радиуса закругления  $r/d$  и формы поперечного сечения отвода. Поэтому коэффициент сопротивления отвода является функцией ряда факторов:

$$\zeta'_{\text{пов}} = f(\theta, r/d, \text{форма}).$$

Кроме того, для плавного поворота заметно сказывается влияние гидравлического трения  $\lambda_{\text{тр}}$ . Ввиду сказанного, в целом

$$\zeta_{\text{пов}} = \zeta'_{\text{пов}} + \zeta_{\text{тр}}, \quad (260)$$

где  $\zeta_{\text{тр}} = \lambda l/d = \lambda \theta r/d$ .

Для отводов круглого сечения под углом  $90^\circ$   $\zeta'_{\text{пов}}$  можно определить по формуле Б. Б. Некрасова [9]

$$\zeta'_{\text{пов}} = 0,05 + 0,2d/r. \quad (261)$$

Тогда коэффициент сопротивления отвода круглого сечения под углом  $90^\circ$  [см. формулу (260)]

$$\zeta_{\text{пов}} = 0,05 + 0,2d/r + 1,57\lambda r/d. \quad (262)$$

При значении  $\lambda = 0,025$  получаем такие данные:

$r/d$	0,5	1	2	4
$\zeta_{\text{пов}}$	0,47	0,29	0,23	0,26

По сравнению с неплавным поворотом ( $\zeta_{\text{пов } 90^\circ} = 1,2$ ) сопротивление уменьшается в несколько раз. Приведенные данные свидетельствуют также о том, что значительное увеличение относительного радиуса закругления не дает положительного результата из-за увеличения гидравлического трения. Существует определенное оптимальное соотношение

между радиусом закругления и диаметром трубы, которое в данном случае составляет  $r/d = 2,5$ , причем  $\zeta_{\text{отт}} = 0,23$ .

Зависимость между углом поворота круглого сечения при относительном радиусе закругления  $r/d = 2,5$  и  $\zeta_{\text{пов}}$  такова:

$\theta^\circ$	30	45	60	90	120	150	180
$\zeta_{\text{пов}}$	0,1	0,15	0,18	0,23	0,28	0,32	0,37

Величина  $\zeta_{\text{пов}}$  существенно зависит от формы поперечного сечения. По данным Г. А. Абрамовича [9] для прямоугольного сечения с соотношением сторон  $a \times b = 2,5 \times 1$  (большая сторона параллельна оси поворота) коэффициент сопротивления отвода уменьшается в 2,5 раза по сравнению с круглым отводом. Это объясняется уменьшением интенсивности «парного вихря», т. е. поперечной циркуляции (рис. 106).

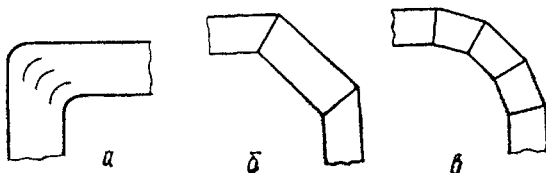
Сопротивление отвода зависит также от числа Рейнольдса (при  $Re < 2 \cdot 10^6$ ) и от начального профиля скоростей.

Длина участка стабилизации после поворота достаточно велика. Образующееся винтовое движение затухает медленно и может распространяться до  $40d$ . В вентиляционных системах, где прямолинейные участки каналов между отводами часто меньше указанной длины участка стабилизации, сопротивление поворота зависит от условий течения на смежных участках системы.

Можно существенно уменьшить сопротивление отвода устройством *поворотных лопаток* (рис. 117, а), которые препятствуют возникновению поперечной циркуляции (что является основной причиной сопротивления отвода). Однако применение лопаток эффективно лишь для отводов с малым радиусом закругления. Например, для прямого угла ( $r/d = 0$ )  $\zeta_{\text{пов}}$  уменьшается с 1,2 до 0,33, т. е. почти в

Рис. 117. Поворот под углом:

а — колено с поворотными лопатками; б — колено, состоящее из трех звеньев; в — колено, состоящее из пяти звеньев.



4 раза, тогда как при  $r/d = 0,5$  сопротивление отвода с лопатками и без них почти одинаково. В основном поворотные лопатки применяют в крупных вентиляционных установках и аэродинамических трубах.

Если выполнить плавный поворот нельзя, можно уменьшить сопротивление с помощью *составного колена* (рис. 117, б). При наличии двух звеньев коэффициент сопротивления уменьшается с 1,2 до 0,5, а при четырех — до 0,35.

Подытоживая сказанное, приходим к выводу, что достаточно точную оценку величины  $\zeta_{\text{пов}}$  можно сделать лишь на основании детального анализа геометрических размеров и характера работы данного отвода.

**Сопротивления, связанные с делением и слиянием потоков (тройники).** Движение жидкости на участке деления и слияния потоков — в т р о й н и к а х — носит сложный характер. Возникающие при этом сопротивления приходится учитывать, например, при гидравлических расчетах систем отопления и вентиляционных сетей. Тройник, в котором происходит деление потока, называют *прточным* (или тройником на нагнетании), а тройник, где потоки сливаются, — *вытяжным* (или тройником на всасывании).

Различают *коэффициент сопротивления тройника на проход*  $\zeta_{\text{п}}$  для потока в направлении основного течения и *коэффициент сопротивления тройника на ответвление* ( $\zeta_0$ ) для потока, отделяющегося от основного течения, или потока, сливающегося с основным течением. При этом коэффициенты сопротивления относят либо к скорости полного потока (т. е. к скорости перед делением или после слияния), либо к скорости отделяемого или присоединяемого потока.

Пользуясь таблицами и справочными материалами, нужно обращать внимание на то, к какой скорости отнесен данный коэффициент сопротивления, так как значения  $\zeta$  в зависимости от того, определены ли они по скорости до разделения (после слияния) или по скорости в ответвлении, будут различны для одного и того же вида сопротивления. Поэтому далее соответствующим индексом указывается номер сечения, к скорости которого отнесена данная величина  $\zeta$ . Сечения всегда берут по направлению потока: в случае деления (рис. 118) цифра 1 относится к полному, 2 — отделяемому и 3 — проходящему потоку. В случае слияния сечение 1 относится к проходящему, 2 — присоединенному и 3 — полному потоку. Например,  $\zeta_0$ , означает коэффициент сопротивления ответвления, отне-

сенный к скорости в ответвлении,  $\zeta_{пз}$  — коэффициент сопротивления на проход, определяемый по скорости прохода в случае деления и по полной скорости при слиянии потоков.

Исследования показывают, что сопротивление тройника зависит от его геометрической формы, соотношения скоростей и сечений, а также от направления течения.

Как уже указывалось в § 42, характер местных явлений различный при делении и слиянии потоков. Поэтому целесообразно эти сопротивления рассмотреть отдельно.

**Деление потоков.** На рис. 119, а показан случай, когда расход в ответвлении  $Q_0$  меньше расхода на проходе  $Q_n$  ( $Q_0 < Q_n$ ). В ответвлении образуется отрывное течение значительно большей интенсивности, чем при повороте под углом. Этому способствует диффузорный эффект вследствие резкого увеличения площади сечения ( $\omega_2 + \omega_3 > \omega_1$ ). Положительный градиент давления содействует также образованию области отрывного течения возле противоположной стенки прямого прохода. Вместе эти отрывные течения способствуют местному поджатию потока с последующим его расширением как в ответвлении, так и на проходе.

На рис. 119, б представлен случай, когда расход на ответвление значительно превосходит расход на проходе ( $Q_0 > Q_n$ ). Вследствие значительного диффузорного эффекта на проходе образуется интенсивный вихрь.

На рис. 119, в показан предельный случай, когда расход в ответвлении  $Q_0 = 0$ . Вихревая зона, образующаяся в ответвлении, является местным сопротивлением для прохода.

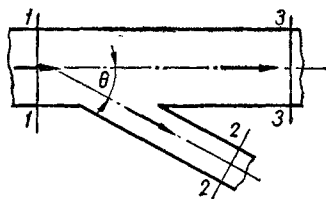
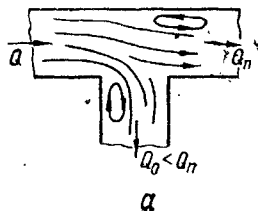
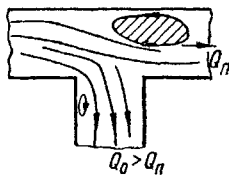


Рис. 118. Деление потока.

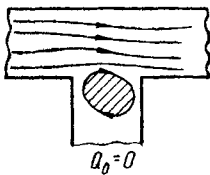
Рис. 119. Схема течения при делении потока.



а



б



в

Следовательно, эта схема, несмотря на отсутствие течения в ответвлении, не эквивалентна движению на прямом участке трубопровода.

Итак, сопротивление тройников при делении потока складывается в основном из потерь на внезапное расширение части потока, движущегося по прямой, и потерь на поворот для части потока в ответвлении.

Потеря давления на проход, согласно формуле Борда (241), может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} p_{\pi} &= k_{\pi} \frac{\rho (v_1 - v_2)^2}{2} = k_{\pi} \frac{\rho v_1^2}{2} \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \\ &= k_{\pi} \frac{\rho v_3^2}{2} \left(\frac{v_1}{v_3} - 1\right)^2, \end{aligned}$$

где  $k_{\pi} \approx 0,4$  — коэффициент смягчения. Тогда коэффициент сопротивления приточного тройника на проход, определенный по скорости до и после деления потока, соответственно

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{\pi_1} &= 0,4 \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2, \\ \zeta_{\pi_2} &= 0,4 \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (263)$$

Потеря давления в ответвлении на основании выражения (252) для потерь на повороте под углом

$$p_o = k_o \frac{\rho (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \theta)}{2},$$

где  $\theta$  — угол ответвления относительно оси основного потока (рис. 118);  $k_o \approx 0,8$  — опытный коэффициент.

Таким образом, коэффициент сопротивления в ответвлении относительно скорости до деления потока и в ответвлении

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{o_1} &= 0,8 \left[1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 2 \frac{v_2}{v_1} \cos \theta\right]; \\ \zeta_{o_2} &= 0,8 \left[\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 + 1 - 2 \frac{v_1}{v_2} \cos \theta\right]. \end{aligned} \right\} \quad (264)$$



Приведем значения коэффициентов сопротивления при точного тройника под прямым углом на проход и в ответвлении в зависимости от соотношения скоростей:

$v_3/v_1$	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0
$\zeta_{п_1}$	0	0,01	0,06	0,14	0,26	0,4
$\zeta_{п_3}$	0	0,02	0,18	0,9	0,4	—
$v_2/v_1$	0	0,02	0,4	0,6	0,8	1
$\zeta_{o_1}$	0,8	0,84	0,93	1,08	1,3	1,6
$\zeta_{o_2}$	—	20,6	5,8	3,1	2	1

Как видно из таблицы, сопротивление на проход в целом незначительно и в приближенных расчетах его можно не учитывать. Наоборот, потеря в ответвлении значительна и имеет величину порядка динамического давления перед делением ( $\zeta_{o_1} = 1$ ). При расчете же по скорости в ответвлении  $\zeta_{o_2}$  достигает весьма больших значений.

**С л и я н и е п о т о к о в.** Основные потери при слиянии потоков возникают в результате перемешивания соединяемых турбулентных потоков. Кроме того, есть потери на поворот и на поджатие потока с последующим его расширением (рис. 120).

Используя закон количества движения, можно получить такие формулы.

Коэффициент сопротивления на ответвление и на проход

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{o_1} &= k_o \left[ 1 + \left( \frac{v_2}{v_3} \right)^2 - 2 \frac{v_2}{v_3} \frac{Q_o}{Q} \cos \theta - 2 \frac{v_1}{v_3} \frac{Q_n}{Q} \right]; \\ \zeta_{п_3} &= \zeta_{o_1} + k_o \left[ \left( \frac{v_1}{v_3} \right)^2 - \left( \frac{v_2}{v_3} \right)^2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (265)$$

где поправочный коэффициент  $k_o$  меняется в широких пределах (0,3 ÷ 1). В первом приближении можно принять  $k_o \approx 0,7$ . Однако в ответственных расчетах следует руководствоваться более точными данными [7].

Коэффициенты  $\zeta$  в формулах (265) рассчитаны по скорости суммарного потока после слияния. Если же вычислить эти коэффициенты по скоростям перед слиянием, то

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{o_2} &= \zeta_{o_1} \left( \frac{v_3}{v_2} \right)^2; \\ \zeta_{п_1} &= \zeta_{п_3} \left( \frac{v_3}{v_1} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (266)$$

Из зависимости (265) следует, что, в отличие от случая деления потоков, сопротивления при слиянии потоков зависят не только от соотношения скоростей, но и от соотношения сечений, т. е. от соотношения расходов, поскольку

$$\frac{Q_0}{Q} = \frac{v_2 \omega_2}{v_3 \omega_3}$$

Ниже приведены значения  $\zeta_{\Pi}$  и  $\zeta_0$  для вытяжного тройника при  $\theta = 90^\circ$ ,  $\frac{\omega_2}{\omega_3} = 1$  и  $\frac{\omega_2}{\omega_3} = 0,34$ , найденные по формулам (266):

$\frac{Q_0}{Q} = \frac{v_2 \omega_2}{v_3 \omega_3}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\frac{\omega_2}{\omega_3} = 1$ } $\zeta_{0_2}$	-0,7	-0,17	0,31	0,73	1,1	1,4
	0	0,25	0,45	0,60	0,67	0,7
$\frac{\omega_2}{\omega_3} = 0,34$ } $\zeta_{0_3}$	0,07	0,5	1,2	2,6	4,6	6,8
	0	0,25	0,48	0,56	0,76	0,7

Отрицательные значения  $\zeta_{0_2}$  при малых расходах объясняются всасывающим действием более мощного потока на проходе.

Как видно из таблицы, в целом сопротивление вытяжных тройников намного больше, чем приточных.

**Сопротивление арматуры.** Сопротивление различной арматуры состоит из рассмотренных выше видов сопротивлений. Коэффициент сопротивления изменяется в самых широких пределах в зависимости от конструктивных особенностей арматуры.

На рис. 121 приведены значения коэффициента сопро-

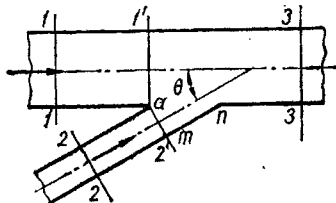
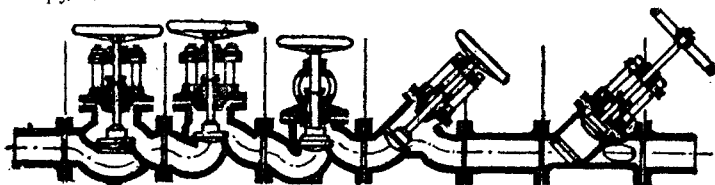


Рис. 120. Слияние потоков.

Рис. 121. Значения коэффициентов сопротивления вентилях различной конструкции.



$\zeta = 3,9$

$\zeta = 3,4$

$\zeta = 2,7$

$\zeta = 2,5$

$\zeta = 0,6$

тивления вентиля диаметром 100 мм для нескольких его конструкций. Как видим, прямооточный вентиль имеет сопротивление в 6 раз меньше, чем стандартный вентиль ( $\zeta = 3,9$ ). При полностью открытом вентиле его сопротивление существенно зависит от диаметра условного прохода  $d$ . Например, для стандартного вентиля с делительными стенками под углом  $45^\circ$  зависимость между диаметром условного прохода и коэффициентом сопротивления такова:

$d$ , мм	13	20	40	100
$\zeta$	10,8	8	4,9	3,9

С уменьшением диаметра от 100 до 13 мм сопротивление вентиля увеличивается почти в три раза.

Приведем данные о сопротивлении дроссельной заслонки в круглой трубе при разной степени ее открытия  $s/d$ , иллюстрирующие ярко выраженную нелинейность увеличения сопротивления с уменьшением отверстия:

$s/d$	1	3/4	1/2	1/3	1/4	1/6
$\zeta$	0	0,26	2,06	5,52	17	98

Покажем зависимость между углом поворота и коэффициентом сопротивления пробкового крана:

$\theta$	10	20	30	40	50	55
$\zeta$	0,31	1,34	6,13	20,7	95	273

Для вентиляционных среднеподвешенных створок эта же зависимость такова:

$\theta$	90	60	45	30	20	15
$\zeta$	1,6	3,3	5,2	9,2	18	31

Зависимость между сопротивлением приемных сеток с обратными клапанами разных диаметров, устанавливаемых на всасывающих линиях насосов:

$d$ , мм	40	70	100	150	200
$\zeta$	12	8,5	7	6	5,2

Ниже приведены данные о сопротивлении сеток из круглой металлической проволоки в зависимости от  $n = \Sigma\omega/\Omega$ , где  $\Sigma\omega$  — сечение отверстий сетки,  $\Omega$  — сечение трубы:

$n$	0,2	0,4	0,6	0,8
$\zeta$	10	2,7	0,9	0,3

Для ориентировочных расчетов можно пользоваться осредненными значениями коэффициентов местных сопротивлений:

Местное сопротивление	$\xi$
Вход в трубу (кромка нескругленная)	0,5
Выход из трубы (кромка нескругленная)	1
Внезапное расширение ( $n = 0,2 + 0,4$ )	0,6—0,4
Внезапное сужение ( $n = 0,2 + 0,4$ )	0,4—0,2
Диффузор ( $\theta < 14^\circ$ )	0,1
Конфузор ( $\theta < 30^\circ$ )	0,1
Плавный поворот ( $r/d > 3$ )	0,2—0,3
Угольник	1,2
Жалюзийная решетка	1,6
Симметричный тройник при делении потока	1—1,5
То же, при слиянии потока	2—3

Подробные сведения о величине коэффициентов сопротивлений для различных случаев можно найти в специальной литературе.

## § 46

### Участок стабилизации и взаимное влияние местных сопротивлений

Отрывные течения и вихреобразования непосредственно за местным сопротивлением деформируют эпюру осредненных скоростей турбулентного потока несмотря на то, что средняя скорость течения в цилиндрической (призматической) трубе остается неизменной. Выравнивание эпюры осредненных скоростей до вида, характерного для равномерного турбулентного потока в длинной трубе, происходит на *участке стабилизации потока*, длина которого может быть достаточно значительной.

Потери энергии на участке стабилизации являются составной частью местного сопротивления. В некоторых случаях необходимо определить потери, связанные с выравниванием потока.

Рассмотрим участок течения после внезапного расширения потока (рис. 110). Непосредственно за вихревой зоной (сечение  $D-D$ ), хотя поток занимает уже все сечение трубы, распределение скоростей в его толще весьма неравномерно. Стабилизация происходит лишь возле сечения 2—2, где эпюра осредненных скоростей принимает вид, нормальный для равномерного турбулентного потока. Несмотря на

то, что средние скорости в обоих сечениях одинаковы ( $v_D = v_2$ ), кинетическая энергия потока, а также количество движения в них будут разными.

Уравнение Бернулли и уравнение количества движения для сечений  $D-D$  и  $2-2$  при условии  $v_2 = v_D = v$ :

$$p_D + \alpha \frac{\rho v^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v^2}{2} + p_{\text{стаб}};$$

$$\rho_D \omega + \beta \rho \omega v^2 = \rho_2 \omega + \rho \omega v^2.$$

Решая совместно оба уравнения, находим

$$p_{\text{стаб}} = \rho v^2 (1 - \beta) + (\alpha - 1) \frac{\rho v^2}{2},$$

откуда коэффициент сопротивления рассматриваемого участка стабилизации

$$\zeta_{\text{стаб}} = \frac{p_{\text{стаб}}}{\rho v^2 / 2} = 1 + \alpha - 2\beta.$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент Кориолиса, а  $\beta$  — коэффициент Буссинеска для нестабилизированного сечения  $D-D$ ; в сечении  $2-2$  эти коэффициенты приняты равными единице.

Пользуясь соотношением (157) между коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$ , находим

$$\zeta_{\text{стаб}} = (\alpha - 1)/3. \quad (267)$$

Например, при степени внезапного расширения  $n = 0,25$  коэффициент сопротивления по формуле (245)  $\zeta_{\text{расш}} = 0,56$ . В сечении  $D-D$  для этого случая  $\alpha = 1,4$ . Следовательно, коэффициент сопротивления участка стабилизации согласно формуле (267)  $\zeta_{\text{стаб}} = \frac{1,4 - 1}{3} = 0,13$  или  $\frac{0,13}{0,56} \cdot 100 = 24\%$  всего рассматриваемого местного сопротивления\*.

Длину участка стабилизации теоретически определить трудно. Очевидно, она в первую очередь диктуется видом местного сопротивления. Имеет значение шероховатость стенок трубопровода, не учитываемая уравнением (267),

\* В приведенном расчете не определяются потери по длине, которые на участке стабилизации должны учитываться отдельно. В данном примере при  $l_{\text{стаб}}/d = 10$  и  $\lambda = 0,04$  эти потери составят  $\zeta_l = \lambda/d = 0,04 \cdot 10 = 0,4$ , т. е. величину, большую в 3 раза по сравнению с  $\zeta_{\text{стаб}} = 0,13$ .

а также число Рейнольдса. Согласно экспериментальным данным  $l_{\text{стаб}}/d \approx 10 \div 50$ .

В коротких трубопроводах, где местные сопротивления расположены близко друг от друга, поток подходит к следующему сопротивлению еще не стабилизированным, вследствие чего потери здесь, а также их сумма отличаются от получаемых при сопротивлениях, расположенных на большом расстоянии друг от друга. Приведем опытные данные А. М. Грабовского:

Местное сопротивление	$\zeta$
Колено № 1	1
Колено № 2	0,85
Два колена в горизонтальной плоскости	1,52
Два колена в вертикальной плоскости	1,63
Вентиль № 1	9,4
Вентиль № 2	9,7
Два вентиля рядом	17,6
Два вентиля на расстоянии 10 диаметров	19,2

Итак, можно сделать вывод, что суммарный коэффициент комплексного сопротивления в большинстве случаев меньше арифметической суммы коэффициентов сопротивлений, входящих в данный комплекс.

Уменьшение суммарного сопротивления при близком расположении отдельных местных сопротивлений справедливо только при неизменном характере местных сопротивлений. В противном случае может получиться даже обратный результат: общее сопротивление больше суммы отдельных сопротивлений.

Рассмотрим, например, сопротивление двух поворотов под прямым углом, имеющих разную длину прямолинейной вставки (рис. 122). Если относительная длина вставки  $l/d > 4$ , суммарное значение  $\zeta$  составляет 0,5, что приблизительно равно

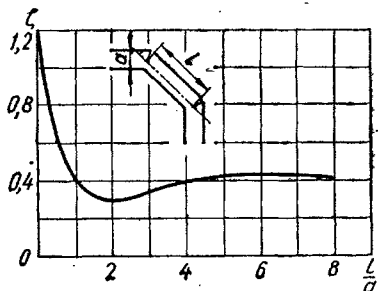


Рис. 122. Влияние относительной длины прямолинейной вставки на повороте.

арифметической сумме сопротивлений этих поворотов. С уменьшением длины вставки суммарное значение  $\zeta$  уменьшается. Однако при  $l/d < 1$  сопротивление быстро возрастает, достигая при  $l/d \approx 0$  величины  $\zeta = 1,2$ . Это объясняется тем, что в граничном случае ( $l/d = 0$ ) мы уже имеем поворот под углом  $90^\circ$ , при котором интенсивность вихреобразований значительно больше, чем в двух поворотах под углом  $45^\circ$ .

В вентиляционных системах, где прямолинейные участки труб (каналов) относительно невелики, нельзя говорить о полностью стабилизированном течении, так как тут имеется большее или меньшее взаимное влияние местных сопротивлений. Однако в практике инженерных расчетов местные сопротивления складывают арифметически, что дает в целом некоторое преувеличение эффекта сопротивлений, иначе говоря, расчет ведется с некоторым запасом.

Подытоживая сказанное, необходимо констатировать чрезвычайную сложность явлений, связанных с возникновением местных сопротивлений и разнообразием факторов, влияющих на величину  $\zeta$  для тех или иных конкретных случаев. Поэтому читатель должен помнить, что данные о величине  $\zeta$ , приводимые в справочниках и в специальной литературе, следует считать ориентировочными. Если требуется точно определить местные сопротивления, необходимо выполнить соответствующие экспериментальные исследования на моделях, придерживаясь правил гидроаэродинамического моделирования (см. гл. IX).

## § 47

### **Влияние числа Рейнольдса на коэффициенты местных сопротивлений**

Приведенные данные о коэффициентах местных сопротивлений относятся к турбулентному режиму движения с большими числами Рейнольдса, где влияние молекулярной вязкости проявляет себя незначительно. При ламинарном или близком к нему течении коэффициенты местных сопротивлений в той или иной степени зависят от числа Рейнольдса.

При очень малых значениях  $Re$  эффект сопротивления вызван непосредственным действием сил вязкости и пропорционален первой степени скорости. Коэффициент сопротивления в этом случае изменяется обратно пропорционально

числу Рейнольдса по закону

$$\zeta = A/Re, \quad (268)$$

где  $A$  — постоянная, зависящая от вида местного сопротивления и степени стеснения потока (табл. 3).

Такая закономерность была получена теоретически при выводе формулы коэффициента гидравлического трения  $\lambda$  для ламинарного режима в круглой цилиндрической трубе [формула (214)].

Однако экспериментальные исследования показывают [2], что с увеличением числа Рейнольдса, еще отвечающему ламинарному режиму в условиях равномерного течения, значения  $\zeta$  возрастают. Это явление объясняется возникновением вихреобразований в местных сопротивлениях.

При достаточно больших числах Рейнольдса формируются отрывные течения, которые и являются основной причиной местных сопротивлений при больших значениях  $Re$ . Это область квадратичного сопротивления, где  $\zeta = \text{const}$  для данного вида местного сопротивления.

Наличие острых кромок и углов в местных сопротивлениях способствует возникновению вихреобразований при малых значениях  $Re$ . При более плавных очертаниях стенок процесс вихреобразования запаздывает и влияние числа Рейнольдса начинает сказываться при больших его значениях. В первом приближении можно сказать, что при резких переходах в местных сопротивлениях коэффициент

Таблица 3. Коэффициенты  $A$  и  $\zeta_{\text{кв}}$  для некоторых местных сопротивлений

Сопротивление	$A$	$\zeta_{\text{кв}}$	Сопротивление	$A$	$\zeta_{\text{кв}}$	
Пробочный кран	150	0,4	Задвижка при значениях $l$ :			
Вентиль	3000	4		1		
Шаровой клапан	5000	45		0,75	75	0,15
Угольник	400	1,4		0,5	350	0,2
Плавный поворот (колена)	130	0,2	0,25	1300	2	
			Тройник	150	0,3	3000
			Диафрагма при значениях $l$ :			
				0,64	70	1
				0,4	120	7
				0,16	500	70
			0,05	3200	800	



$\zeta$  не зависит от значения  $Re$  при  $Re \geq 3000$ , а при плавных очертаниях — при  $Re > 10\,000$ .

Ориентировочно определить коэффициент сопротивления при небольших числах Рейнольдса можно по формуле А. Д. Альтшуля [1], [2]

$$\zeta = \frac{A}{Re} + \zeta_{\text{кв}}, \quad (269)$$

где  $\zeta_{\text{кв}}$  — коэффициент сопротивления для квадратичной области;  $A$  — постоянная для данного вида местного сопротивления (табл. 3).

## § 48

### Уравнение Бернулли в развернутом виде в форме напоров и в форме давлений

Зная основное уравнение энергии (Бернулли) для установившегося потока вязкой несжимаемой жидкости (140) и причины возникновения потерь энергии, а также способы их расчета, можно решать задачи о движении несжимаемой жидкости в трубах и каналах. Составим исходные уравнения и изложим общую методику решения таких задач.

Система трубопроводов или каналов, по которым движется жидкость или газ, представляет собой совокупность различного рода гидравлических сопротивлений. Сам трубопровод может состоять из участков разной длины и диаметров (каналов разных калибров \*). На этих участках смонтированы запорные и регулирующие приспособления, фильтры, расходомеры и т. д. При определении общей потери удельной энергии в гидравлических расчетах исходят из принципа наложения потерь, согласно которому полная удельная потеря энергии складывается из алгебраической суммы потерь каждого сопротивления в отдельности. Этот способ не совсем точен, если местные сопротивления расположены близко друг от друга (§ 46).

Развернутые зависимости для технических расчетов можно написать, используя уравнения энергии (142), (146) и формулы Дарси (194) и Вейсбаха (234) для определения потерь по длине и местных потерь.

Развернутое уравнение энергии в форме напоров и в

---

\* Под калибром канала некруглого сечения обычно понимают его эквивалентный диаметр (см. § 41).

форме давлений:

$$\left. \begin{aligned}
 z_1 + \frac{p_{1\text{ман}}}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_1^2}{2g} &= z_2 + \frac{p_{2\text{ман}}}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \\
 + \sum_1^n \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum_2^n \zeta \frac{v^2}{2g}; & \\
 \rho g z_1 + p_1 + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} &= \rho g z_2 + p_2 + \alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2} + \\
 + \sum_1^n \lambda \frac{1}{d} \frac{\rho v^2}{2} + \sum_2^n \zeta \frac{\rho v^2}{2}. &
 \end{aligned} \right\} (270)$$

Знак  $\Sigma_1$  при четвертых членах правой части этих уравнений указывает на сумму потерь по длине  $n$  последовательно соединенных участков труб разных диаметров, а  $\Sigma_2$  — на сумму  $n$  местных сопротивлений по пути движения. Скоростной напор  $\alpha \frac{v^2}{2g}$  и динамическое давление  $\alpha \frac{\rho v^2}{2}$ , которые входят как сомножители в указанные члены потерь уравнений (270), относятся не к первому или второму живому сечению, для которых написаны эти уравнения, а к тем сечениям труб, где рассчитываются потери.

Приведенные уравнения Бернулли наряду с уравнениями объемного и массового расхода (125), (126) или неразрывности (129) дают возможность решать разные задачи, связанные с установившимся движением жидкости или несжимаемого газа в трубах и каналах. При этом уравнение в форме напоров применяют преимущественно для капельных жидкостей, в частности для водопроводных линий, а уравнение в форме давлений — для газа (воздуха) без учета его сжимаемости (газопроводы низкого давления и газовые тракты котельных установок, вентиляционные системы).

Решая уравнение Бернулли, следует руководствоваться следующими правилами.

1. Если учитываются силы тяжести (первый член уравнения Бернулли), прежде всего необходимо провести плоскость сравнения (удобнее всего через наинизшую отметку системы). Для горизонтальных участков трубопроводов за плоскость сравнения принимается ось наиболее низко расположенной трубы, а при наличии резервуаров с жидкостью — уровень более низкого резервуара.

При незначительном влиянии сил тяжести первыми членами уравнения (270) пренебрегают и вопрос о плоскости сравнения отпадает.

2. Нужно выбрать два живых сечения: первое там, где следует определить скорость или давление, второе — где эти величины заданы. Для жидкости вторым сечением часто служит уровень в открытых резервуарах, где пьезометрическая высота  $p_{\text{ман}} / (\rho g) = 0$ , а скоростным напором можно пренебречь; для воздуха таким сечением является окружающая атмосфера, где  $p_{\text{ман}} = p - p_a = 0$  и динамическое давление  $\alpha \rho v^2 / 2 = 0$ .

3. Нумерация сечения должна следовать в направлении движения. При этом безразлично, в каком сечении характеристики движения заданы, а в каком они подлежат определению.

4. При учете сил тяжести координата  $z$  отсчитывается от плоскости сравнения до центра тяжести рассматриваемого живого сечения.

5. Выбранные сечения должны удовлетворять требованиям плавноизменяющегося движения (см. § 27).

6. Потери энергии приписываются только к правой части уравнений (270).

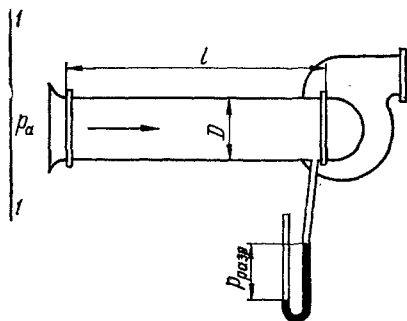
7. Для выбора коэффициентов  $\lambda$  и  $\zeta$ , входящих в уравнения (270), следует руководствоваться данными § 40, 45.

## § 49

### Примеры применения уравнения Бернулли

**Разрежение перед вентилятором.** Всасывающая линия вентилятора (рис. 123) длиной  $l$  имеет плавный вход и местное сопротивление в виде сетки.

Применяем уравнение энергии в форме давлений без гравитационных членов. За первое сечение принимаем наружное пространство с атмосферным воздухом, за второе — место присоединения жидкостного вакуумметра, где определяется разрежение. Манометрическое давление в первом сечении  $p_{\text{ман}_1} = p_1 - p_a = 0$ ; динамическое давление



$\alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = 0$ . Тогда уравнение

(270) примет вид

$$0 = p_{\text{ман}_2} + \alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2} + \\ + \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v_2^2}{2} + \\ + (\zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{с}}) \frac{v_2^2}{2}.$$

Рис. 123. К определению разрежения перед вентилятором.

где  $\zeta_{вх}$  и  $\zeta_c$  — коэффициенты сопротивления входа и сетки.

Зная, что разрежение есть отрицательное манометрическое давление ( $p_{разр} = -p_{ман}$ ), последнее равенство перепишется так:

$$p_{разр} = \frac{\rho v^2}{2} \left( \alpha_2 + \lambda \frac{l}{d} + \zeta_{вх} + \zeta_c \right).$$

Полученное уравнение показывает, что разрежение перед вентилятором определяется динамическим давлением и сопротивлениями во всасывающей линии.

**Пример 23.** Определить разрежение перед вентилятором, если его производительность  $Q = 0,35 \text{ м}^3/\text{с}$ , длина всасывающей линии  $l = 5 \text{ м}$  и ее диаметр  $d = 200 \text{ мм}$  (рис. 123).

Прежде всего по уравнению расхода (126) находим среднюю скорость течения воздуха во всасывающей линии; при постоянном диаметре она одинакова для всех сечений трубопровода:

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{0,35}{0,785 \cdot 0,2^2} = 11,2 \text{ м/с}.$$

При плотности воздуха в стандартных условиях  $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$  динамическое давление

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{1,2 \cdot 11,2^2}{2} = 75,5 \text{ Па}.$$

Выбираем значения коэффициентов, входящих в уравнение энергии:  $\lambda = 0,02$  (§ 40),  $\alpha_2 = 1,05$  [формула (225)],  $\zeta_{вх} = 0,02$  (плавный вход),  $\zeta_c = 0,9$  при  $n = 0,6$  (§ 45).

Тогда искомое разрежение

$$p_{разр} = 75,5 \left( 1,05 + 0,02 \frac{5}{0,2} + 0,9 + 0,02 \right) = 150 \text{ Па}.$$

**Вакуум перед насосом.** На рис. 124 представлена всасывающая линия центробежного насоса.

Проводим плоскость сравнения  $O-O$  по поверхности уровня воды в колоде. Сечение  $1-1$  берем по этому же уровню;

$$\text{для него } z_1 = \frac{p_{ман_1}}{\rho g} =$$

$$= 0; \quad \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} \approx 0.$$

Второе сечение принимаем по месту присоединения вакуумметра; для этого сечения

$$z_2 = h, \quad \frac{p_{ман}}{\rho g} = -h_{вак}.$$

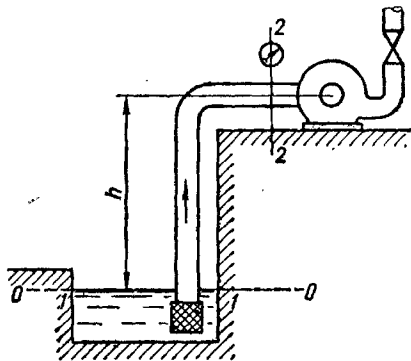


Рис. 124. К определению вакуума перед насосом.

Величина  $h_{\text{вак}}$ , отвечающая показаниям вакуумметра в метрах столба подаваемой жидкости, называется *вакуумметрической высотой всасывания*. Теоретически эта высота для воды на уровне моря  $h_{\text{вак}} = 10,8$  м; практически допустимую вакуумметрическую высоту принимают равной 6—7 м\* (см. § 10).

Теперь уравнение энергии в форме напоров для данной задачи примет вид

$$0 = h - h_{\text{вак}} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + (\zeta_c + \zeta_{\text{пов}}) \frac{v_2^2}{2g},$$

откуда

$$h_{\text{вак}} = h + \frac{v^2}{2g} \left( \alpha + \lambda \frac{l}{d} + \zeta_c + \zeta_{\text{пов}} \right),$$

где  $\zeta_c$  — коэффициент сопротивления сетки с приемным клапаном;  $\zeta_{\text{пов}}$  — коэффициент сопротивления поворота (иногда их может быть несколько).

Из последнего уравнения следует, что вакуумметрическая высота всасывания равна сумме геометрической высоты, скоростного напора и потерь напора во всасывающем трубопроводе. Вакуумметрическая высота  $h_{\text{вак}}$  всегда больше геометрической высоты всасывания  $h$ ; лишь в покоящейся жидкости [ $v^2/(2g) = 0$  — случай, когда закрыта задвижка на нагнетательной линии] имеет место равенство  $h_{\text{вак}} = h$ .

**Пример 24.** Определить высоту расположения насоса над уровнем воды в колоде, т. е. геометрическую высоту всасывания  $h$  (рис. 124), если подача насоса  $Q = 10$  л/с, длина всасывающей линии  $l = 10$  м и ее диаметр  $d = 100$  мм, допустимая вакуумметрическая высота всасывания  $h_{\text{вак}} \leq 6$  м вод. ст.

Из предыдущего уравнения энергии

$$h = h_{\text{вак}} - \frac{v^2}{2g} \left( \alpha + \lambda \frac{l}{d} + \zeta_c + \zeta_{\text{пов}} \right).$$

Скорость во всасывающей линии

$$v = \frac{0,01}{0,785 \cdot 0,1^2} = 1,28 \text{ м/с.}$$

Коэффициент гидравлического трения водопроводной трубы согласно данным § 40  $\lambda = 0,04$ ; при этом по уравнению (225)  $\alpha = 1,1$ . Коэффициенты местных сопротивлений  $\zeta_c = 7,0$  и  $\zeta_{\text{пов}} = 0,5$  (см. § 45). Тогда

$$h = 6 - \frac{1,28^2}{2 \cdot 9,8} \left( 1,1 + 0,04 \frac{10}{0,1} + 7 + 0,5 \right) = 5 \text{ м.}$$

\* В теплофикационных насосах, работающих на горячей воде, парообразование возникает при меньших вакуумах. В таком случае часто принимают вакуумметрическую высоту отрицательной. Другими словами, теплофикационные насосы работают при избыточном (манометрическом) давлении на всасывании.

Таким образом, в данном примере геометрическая высота всасывания меньше вакуумметрической на  $6 - 5 = 1$  м.

Если уменьшить диаметр всасывающей трубы до 75 мм, то

$$v = \frac{0,01}{0,785 \cdot 0,075^2} = 2,3 \text{ м/с}$$

и

$$h = 6 - \frac{2,3^2}{2 \cdot 9,8} \left( 1,1 + 0,04 \frac{10}{0,075} + 8,5 + 0,5 \right) = 1,8 \text{ м,}$$

т. е. в этом случае геометрическая высота всасывания меньше вакуумметрической на  $h_{\text{вак}} - h = 6 - 1,8 = 4,2$  м и по сравнению с предыдущим случаем уменьшилась на  $4,2 - 1 = 3,2$  м.

**Переливная труба.** Во избежание переполнения резервуара при закрытом вентиле *A* (рис. 125) устраивается переливная труба *B*. Для подбора диаметра при пропуске заданного расхода скорость в трубе определяется с помощью уравнения энергии в форме напоров для сечений 1—1 и 2—2 относительно плоскости сравнения, проведенной через сечение 2—2:

$$h = \frac{v^2}{2g} \left( \alpha + \lambda \frac{l}{d} + \zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{пов}} \right),$$

где  $\zeta_{\text{вх}}$  — коэффициент сопротивления при входе в трубу.

Из этого уравнения следует, что с увеличением высоты переливной трубы  $h$  вследствие увеличения скорости возрастает и ее пропускная способность. С увеличением же длины  $l$  уменьшаются скорость  $v$  и ее пропускная способность. Перед коленом в сечении *C—C* образуется вакуум. Уравнение энергии для сечений 1—1 и *C—C*, если пренебречь разностью отметок этих сечений,

$$0 = -h_{\text{вак}} + \frac{v^2}{2g} \left( \alpha + \lambda \frac{l_1}{d} + \zeta_{\text{вх}} \right),$$

откуда вакуум в сечении *C—C*

$$h_{\text{вак}} = \frac{v^2}{2g} \left( \alpha + \lambda \frac{l_1}{d} + \zeta_{\text{вх}} \right).$$

Таким образом, вакуум за поворотом переливной трубы тем больше, чем больше при той же скорости сопротивления до рассматриваемого сечения. Поэтому длину горизонтального участка трубы следует принимать минимальной.

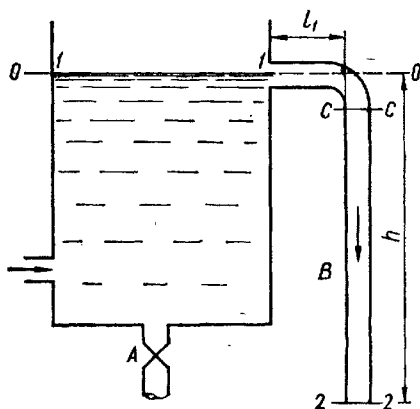


Рис. 125. Переливная труба.

**Пример 25.** Подобрать диаметр переливной трубы при расходе  $Q = 6$  л/с, высоте трубы  $h = 5$  м, общей ее длине  $l = 9$  м, а длине до поворота  $l_1 = 4$  м.

Находим скорость в трубе, используя полученное уравнение для высоты трубы и задав ее диаметр  $d = 50$  мм. При этом принимаем:  $\lambda = 0,05$ ,  $\alpha = 1,14$ ,  $\zeta_{\text{вх}} = 0,5$ ,  $\zeta_{\text{пов}} = 0,3$ .

$$5 = \frac{v^2}{2g} \left( 1,14 + 0,05 \frac{9}{0,05} + 0,5 + 0,3 \right),$$

откуда скоростной напор  $\frac{v^2}{2g} = 0,46$  м, а скорость  $v = 3$  м/с. Теперь

$$Q = 3 \cdot 0,785 \cdot 0,05^2 = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с} = 6 \text{ л/с},$$

т. е. можно считать, что принятый диаметр удовлетворяет заданным условиям.

Проверяем вакуум после поворота. Подставив данные в уравнение для вакуума, находим

$$h_{\text{вак}} = \frac{3^2}{19,6} \left( 1,14 + 0,05 \frac{4}{0,05} + 0,5 + 0,3 \right) = 2,7 < 7 \text{ м}.$$

**Сифон.** Трубопровод для транспортировки жидкости, в одном из сечений которого образуется вакуум, называется *сифоном*. По схеме сифона могут работать переливные трубы, водоводы между резервуарами, имеющими разность уровней, всасывающие водоводы насосных станций и пр.

Чтобы сифон работал бесперебойно, его вакуум не должен превосходить допустимых пределов. Таким образом, расчет сифона сводится к определению его пропускной способности и проверке наибольшего образующегося вакуума.

На рис. 126 показана схема сифона. Наибольший вакуум создается в сечении *A*, которое расположено на наивысшей отметке и наиболее удалено от начала движения. Напишем уравнение энергии в форме напоров для сечения верхнего резервуара и сечения *A* относительно

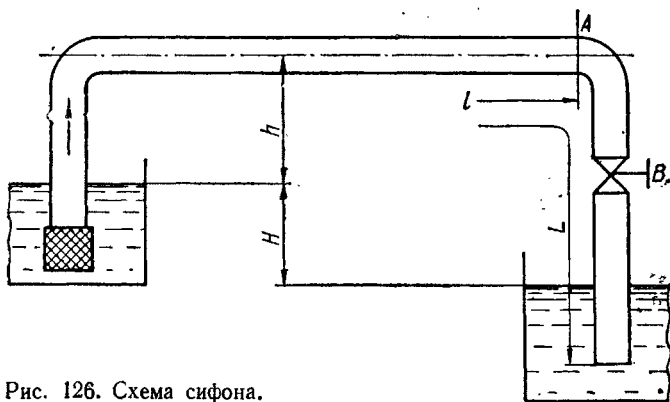


Рис. 126. Схема сифона.

плоскости сравнения, проведенной через уровень верхнего резервуара:

$$0 = h - h_{\text{вак}} + \alpha \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \zeta_c \frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$h_{\text{вак}} = h + \frac{v^2}{2g} \left( \alpha + \lambda \frac{l}{d} + \zeta_c \right),$$

где  $l$  — длина сифона до сечения с наибольшим вакуумом;  $\zeta_c$  — коэффициент сопротивления сетки при входе (сопротивлением на повороте пренебрегаем).

Скорость течения жидкости в сифоне определится из уравнения энергии, написанного для сечений верхнего и нижнего резервуаров,

$$H = \frac{v^2}{2g} \left( \zeta_c + \lambda \frac{L}{d} + \zeta_{\text{в}} + \zeta_{\text{вых}} \right),$$

где  $\zeta_{\text{в}}$  — коэффициент сопротивления запорного приспособления  $B$ , расположенного на сливной линии;  $\zeta_{\text{вых}}$  — коэффициент сопротивления на выходе из трубы в нижний резервуар;  $L$  — полная длина сифона.

Зная скорость течения  $v$  и диаметр сифона  $d$ , по формуле (126) находим расход сифона.

Задвижкой  $B$  на сливной линии можно регулировать не только расход, но и величину вакуума; с ее прикрытием уменьшается расход и вакуум.

Для приведения сифона в действие необходимо его предварительно залить водой, чтобы удалить воздух.

**Пример 26.** Сифон соединяет два резервуара с водой, имеющих разность уровней  $H = 4$  м (см. рис. 126); превышение отметки сечения  $A$  над уровнем верхнего резервуара  $h = 4,5$  м; диаметр трубы  $d = 100$  мм; длина до сечения с наибольшим вакуумом  $l = 50$ , а вся длина сифона  $L = 70$  м;  $\alpha = 1,1$ ;  $\lambda = 0,04$ ;  $\zeta_c = 5$ ;  $\zeta_{\text{вых}} = 1$ .

Необходимо определить такое сопротивление задвижки  $B$  и пропускную способность сифона, при котором наибольший вакуум в сечении  $A$  не превышает  $h_{\text{вак}} = 7$  м вод. ст.

Определяем из уравнения для вакуума допустимый скоростной напор в сифоне:

$$7 = 4,5 + \frac{v^2}{2g} \left( 1,1 + 0,04 \frac{50}{0,1} + 5 \right),$$

откуда

$$\frac{v^2}{2g} = 0,096 \text{ м.}$$

Подставив найденное значение  $\frac{v^2}{2g}$  в уравнение для напора  $H$ , находим искомое сопротивление задвижки:

$$4 = 0,096 \left( 5 + 0,04 \frac{70}{0,1} + 1,1 + \zeta_{\text{в}} \right),$$

откуда  $\zeta_{\text{в}} = 9$ .



Сравнив полученное значение коэффициента сопротивления за-  
движки со справочными данными, убеждаемся, что она должна быть  
закрыта примерно на 3/5.

Скорость течения

$$v = \sqrt{2g \cdot 0,096} = 4,43 \sqrt{0,096} = 1,37 \text{ м/с.}$$

Пропускная способность, т. е. расход при данных условиях

$$Q = 0,785 \cdot 0,1^2 \cdot 1,37 = 10,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с} = 10,8 \text{ л/с.}$$

**Построение напорной и пьезометрических линий.** Напомним, что  
полный напор жидкости

$$H = z + \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} + \alpha \frac{v^2}{2g},$$

а пьезометрический напор

$$H_p = z + \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g}.$$

Рассмотрим построение напорной и пьезометрической линий для  
горизонтального трубопровода, состоящего из двух участков разной  
длины и диаметров, на одном из которых имеется вентиль (рис. 127).

Прежде всего определим пьезометрический напор сразу после  
входа в трубу и перед самым выходом из трубы (рис. 127 справа вверху).

В первом случае из уравнения (270) в форме напоров

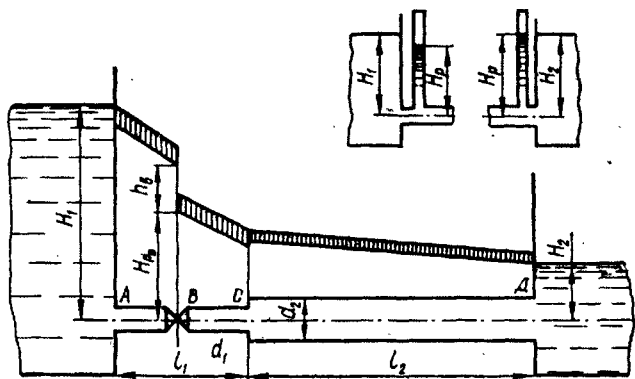
$$H_1 = H_p + \alpha \frac{v^2}{2g} + \zeta_{\text{вх}} \frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$H_p = H_1 - \frac{v^2}{2g} (\alpha + \zeta_{\text{вх}}),$$

т. е. пьезометрический напор в сечении 2—2 понизится на величину по-  
терь при входе и скоростного напора в трубе.

Рис. 127. К построению пьезометрической и напорной линий.



Во втором случае

$$H_D + \alpha \frac{v^2}{2g} = H_2 + \zeta_{\text{вых}} \frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$H_D = H_2 + \frac{v^2}{2g} (\zeta_{\text{вых}} - \alpha) \approx H_2.$$

Поскольку  $\zeta_{\text{вых}} = 1$  и  $\alpha \approx 1$ . Следовательно, в этом случае пьезометрическая отметка в сечении 1—1 трубы перед резервуаром равна уровню жидкости в резервуаре, т. е. является *водомерным стеклом*.

Чтобы найти характеристики движения в любом сечении трубопровода, сначала определяется скоростной напор. Для этого напишем уравнение энергии для сечений поверхности уровней резервуаров  $O_1 - O_1$  и  $O_2 - O_2$ .

$$H_1 = H_2 + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_{\text{в}} \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_{\text{расш}} \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_{\text{вых}}.$$

Заменив скорость  $v_2$  в трубе большего сечения скоростью  $v_1$  [из уравнения неразрывности  $v_2^2 = v_1^2 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$ ], получим

$$H_1 - H_2 = \frac{v_1^2}{2g} \left[ \zeta_{\text{вх}} + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \zeta_{\text{в}} + \zeta_{\text{расш}} + \left( \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \zeta_{\text{вых}} \right) \frac{d_1^4}{d_2^2} \right],$$

где  $\zeta_{\text{вх}}$ ,  $\zeta_{\text{в}}$ ,  $\zeta_{\text{расш}}$ ,  $\zeta_{\text{вых}}$  — соответственно коэффициенты сопротивления при входе, вентиле, расширении и на выходе.

Зная  $\frac{v_1^2}{2g}$ , находим  $\frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$  и затем последовательно определяем пьезометрические напоры в данных сечениях трубопровода. Напрямер, для сечения D

$$H_{pD} = H_1 - \frac{v_1^2}{2g} \left( \lambda_1 \frac{l_1}{2d_1} + \zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{в}} \right).$$

Построив пьезометрическую линию, получаем напорную путем прибавления скоростного напора (вертикальная штриховка).

**Пример 27.** Построить пьезометрическую и напорную линии для схемы рис. 127 при следующих данных:  $H_1 = 1,5$  м;  $H_2 = 0,5$  м;  $l_1 = 2$  м;  $d_1 = 20$  мм;  $l_2 = 4$  м;  $d_2 = 40$  мм;  $\lambda_1 = 0,06$ ;  $\lambda_2 = 0,05$ ;  $\zeta_{\text{вх}} =$

$$= 0,5; \zeta_{\text{вых}} = 1; \zeta_{\text{расш}} = 1 - \frac{d_1^2}{d_2^2} = 0,56; \zeta_{\text{в}} = 8.$$

Скоростной напор в первой трубе

$$1,5 - 0,5 = \frac{v_1^2}{2g} \left[ 0,5 + 0,06 \frac{2}{0,02} + 8 + 0,56 + \left( 0,05 \frac{4}{0,04} + 1 \right) \frac{2^4}{4^2} \right],$$

откуда  $\frac{v_1^2}{2} = 0,06 \text{ м.}$

Скоростной напор во второй трубе

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 = 0,06 \frac{1}{16} = 0,004 \text{ м.}$$

Вычисляем соответствующие слагаемые потери напора:

$$h_{\text{вх}} = 0,5 \cdot 0,065 = 0,032;$$

$$h_{\text{в1}} = 0,06 \frac{2}{0,02} \cdot 0,065 = 0,39;$$

$$\zeta_{\text{в}} = 8 \cdot 0,065 = 0,52;$$

$$\zeta_{\text{расш}} = 0,56 \cdot 0,065 = 0,036;$$

$$h_{\text{т}} = 0,05 \frac{4}{0,04} \cdot 0,004 = 0,02;$$

$$\zeta_{\text{вых}} = 0,004.$$

Выполняем проверку:

$$H_1 - H_2 = \sum h_{\text{п}};$$

$$1 = 0,032 + 0,39 + 0,52 + 0,036 + 0,02 + 0,004 \approx 1.$$

По полученным данным вычисляем пьезометрические напоры в соответствующих сечениях:

$$H_{pA} = 1,5 - 0,032 - 0,065 = 1,4;$$

$$H_{pB} = 1,4 - 0,19 = 1,21 \text{ м;}$$

$$H_{pB} = 1,21 - 0,52 = 0,69;$$

$$H_{pC} = 0,69 - 0,19 = 0,5;$$

$$H_{pC} = 0,5 + 0,065 - 0,006 - 0,036 = 0,523;$$

$$H_{pD} = 0,523 - 0,02 = 0,5 \text{ м.}$$

Прибавив к пьезометрическим отметкам скоростные напоры (вертикальная штриховка на рис. 127), получаем напорную линию.

**Пример 28.** Газ по домовому газопроводу подается на высоту  $H$  к горелке  $\Gamma_B$  и на нулевую отметку к горелке  $\Gamma_H$  (рис. 128). Определить массовый расход газа в обоих случаях при следующих данных: длина газопровода к горелке  $\Gamma_B$  с учетом местных сопротивлений  $l = 37$  м, его диаметр  $d = 25$  мм, высота  $H = 20$  м, коэффициент сопротивления горелки  $\zeta_{\Gamma} = 20$ ,  $\lambda = 0,04$ , начальное давление  $p_{\text{ман}_1} = 20$  Па, плотность наружного воздуха  $\rho_n = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>, плотность газа  $\rho_g = 0,7$  кг/м<sup>3</sup>.

А. В первом случае следует использовать уравнение энергии в форме давлений, но с выделением гравитационного члена при переходе к манометрическим давлениям [см. § 30, уравнение (149)]. Для условий данной задачи и вообще в большинстве практических случаев, где гравитационный член имеет значение, динамическим давлением  $\rho v^2/2$  можно пренебречь. Кроме того, в выходном сечении 2—2 после горелки давление атмосферное, значит  $p_{\text{ман}_2} = 0$ .

С учетом изложенного уравнение энергии (270) примет вид

$$g(\rho_n - \rho_{\text{BH}})H + p_{\text{ман}_1} = \lambda \frac{1}{d} \frac{\rho_{\text{BH}} v^2}{2} + \zeta_{\Gamma} \frac{\rho_{\text{BH}} v^2}{2}; \quad (271)$$

$$9,8(1,2 - 0,7)20 + 20 = \left(0,04 \frac{37}{0,025} + 20\right) \frac{0,7v^2}{2},$$

откуда  $v = 2,37$  м/с.

Массовый расход

$$M = \rho_{\text{BH}} v \omega = 0,7 \cdot 2,37 \cdot 19,6 \cdot 10^{-4} = 31 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с} = 11 \text{ кг/ч.}$$

Б. На нулевой отметке гравитационный член не имеет значения. Пренебрегая сопротивлениями в линии, уравнение энергии в данном случае будет

$$p_{\text{ман}_1} = \zeta_{\Gamma} \frac{\rho_{\text{BH}} v^2}{2},$$

или

$$20 = 20 \frac{0,7v^2}{2},$$

откуда  $v = 1,7$  м/с.

Рис. 128. К примеру 28.

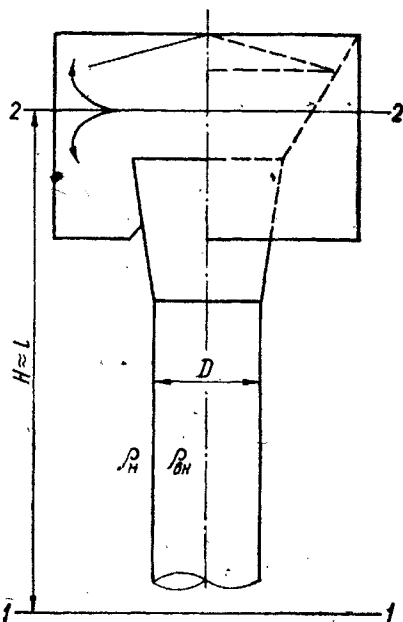
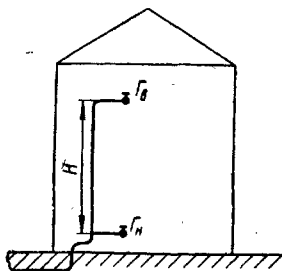


Рис. 129. Схема дефлектора.

### Массовый расход

$$M = 0,7 \cdot 1,7 \cdot 19,6 \cdot 10^{-4} = 22 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с} = 7,9 \text{ кг/ч.}$$

Сопоставив случаи А и Б, убеждаемся, что расход через верхнюю горелку будет в  $\frac{11}{7,9} = 1,4$  раза больше. Чтобы обеспечить равномерную работу горелок, необходимо краником прикрыть верхнюю горелку, увеличив тем самым ее коэффициент сопротивления с  $\zeta_r = 20$  до  $\zeta_r = 68$ .

✓ **Пример 29.** Подобрать диаметр круглого дефлектора (рис. 129) для вытяжки смеси воздуха и дымовых газов ( $\rho_{\text{вн}} = 0,9 \text{ кг/м}^3$ ) в количестве  $M = 1200 \text{ кг/ч}$ . Высота вытяжной трубы  $H = 4 \text{ м}$ . Разрежение, создаваемое дефлектором при ветровом воздействии в сечении 2—2,  $p_{\text{разр}} = 10 \text{ Па}$ . Манометрическое давление в помещении, откуда происходит вытяжка,  $p_{\text{ман}_1} = 0$ . Плотность наружного воздуха  $\rho_n = 1,2 \text{ кг/м}^3$ . Принять:  $\lambda = 0,02$ , коэффициенты местных сопротивлений при входе  $\zeta_{\text{вх}} = 0,5$  и дефлектора  $\zeta_d = 1,2$ .

Применяем уравнение энергии в форме давлений с выделением гравитационного члена (271). Первое сечение берем перед трубой, где  $p_{\text{ман}_1} = 0$ , а второе — в месте выхода газа из дефлектора, где создается разрежение, т. е. отрицательное манометрическое давление. Уравнение энергии для данной задачи примет вид

$$g(\rho_n - \rho_{\text{вн}})H + p_{\text{разр}} = \frac{\rho_{\text{вн}} v^2}{2} \left( \zeta_{\text{вх}} + \lambda \frac{H}{D} + \zeta_d \right). \quad (272)$$

Такую задачу целесообразно решать методом подбора. Задавшись рядом значений диаметра  $D$ , определяем скорость и динамическое давление из уравнения расхода. Подставив последнюю величину в правую часть уравнения (272), сравниваем полученный результат с левой частью этого уравнения. Необходимо, чтобы обе части уравнения (272) были равны.

При  $D = 300 \text{ мм}$

$$v = \frac{M}{\rho \omega} = \frac{1200}{3600 \cdot 0,9 \cdot 0,785 \cdot 0,3^2} = 5,3 \text{ м/с;}$$

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{0,9 \cdot 5,3^2}{2} = 12,6 \text{ Па.}$$

Подставив эти данные в уравнение (272), убеждаемся, что выбранный диаметр недостаточен:

$$g(\rho_n - \rho_{\text{вн}})H + p_{\text{разр}} = 11,8 + 10 = 21,8;$$

$$\frac{\rho_{\text{вн}} v^2}{2} \left( \zeta_{\text{вх}} + \lambda \frac{H}{D} + \zeta_d \right) = 12,6 \left( 0,02 \frac{4}{0,03} + 0,5 + 1,2 \right) = 25.$$

Расчет необходимо повторить ( $21,8 < 25$ ).

Повторив расчет, находим, что условиям задачи удовлетворяет  $D = 350 \text{ мм}$ .

## ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

### § 50

#### Истечение несжимаемой жидкости из малого отверстия в тонкой стенке

*Отверстием* в тонкой стенке называется такое круглое отверстие, толщина стенок которого составляет не более четверти его диаметра, а входная кромка скошена (не скруглена).

Рассмотрим сначала простейший случай истечения через незатопленное отверстие, когда капельная жидкость вытекает под напором в атмосферу (рис. 130). При этом движение считается *установившимся*: количество поступающей в резервуар жидкости равно расходу ее через отверстие, другими словами, истечение происходит при постоянном напоре (давлении). Приводимые ниже формулы и зависимости не являются принципиально новыми, они базируются на основных уравнениях гидравлики, т. е. на материалах гл. IV, V.

Напишем уравнение энергии (270) в форме напоров для сечения  $O-O$  по уровню свободной поверхности жидкости в открытом резервуаре (рис. 130) и для сжатого сечения  $C-C$  вытекающей струи, где отдельные струйки приблизительно параллельны и движение можно считать плавноизменяющимся. Для плоскости сравнения, проведенной относительно оси отверстия,

$$H + \frac{p_{\text{ман}O}}{\rho g} + \frac{v_O^2}{2g} = \frac{p_{\text{ман}C}}{\rho g} + \alpha \frac{v_C^2}{2g} + \zeta \frac{v_C^2}{2g},$$

где  $\zeta$  — коэффициент сопротивления отверстия.

Так как манометрическое давление в рассматриваемых

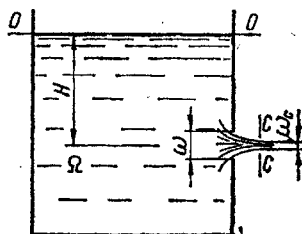


Рис. 130. Истечение капельной жидкости через незатопленное отверстие в тонкой стенке.

сечениях равно нулю ( $p_{\text{ман}O} = p_{\text{ман}C} = 0$ ), то

$$H + \frac{v_O^2}{2g} = (\alpha + \zeta) \frac{v_C^2}{2g}.$$

Обозначим площадь сечения резервуара по плоскости  $O-O$  через  $\Omega$ , а стесненного сечения струи —  $\omega_C$ . Тогда

$$v_O \Omega = v_C \omega_C.$$

Мы уже знаем (см. § 44), что сжатое сечение потока значительно меньше сечения самого отверстия, т. е.

$$v_C = \varepsilon \omega \text{ и } v_O = \frac{\varepsilon \omega}{\Omega} v_C = \varepsilon n v_C,$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент сжатия, зависящий от отношения  $n = \omega/\Omega$ .

Эффект сжатия струи особенно четко наблюдается при истечении через *незаполненное отверстие* (рис. 130).

Скоростной напор в сечении  $O-O$  можно представить так:

$$\frac{v_O^2}{2g} = \varepsilon^2 n^2 \frac{v_C^2}{2g}.$$

При  $n < 0,5$  ( $\varepsilon < 0,644$ , см. с. 192) произведение  $\varepsilon^2 n^2 < (0,5 \cdot 0,644)^2 \approx 0,1$ . Следовательно, скоростной напор  $\frac{v_O^2}{2g}$  составляет менее 10% скоростного напора  $\frac{v_C^2}{2g}$  в сжатом сечении и им можно пренебречь. Отверстия, соответствующие этим условиям, называют *малыми*.

Для малых отверстий уравнение энергии запишется так:

$$H = (\alpha + \zeta) \frac{v_C^2}{2g},$$

откуда скорость вытекающей струи

$$v_C = v = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}, \quad (273)$$

где коэффициент скорости

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}}. \quad (274)$$

В идеализированном случае, когда скорости отдельных струек в сечении  $C-C$  одинаковы ( $\alpha = 1$ ) и потери отсутствуют ( $\zeta = 0$ ), коэффициент скорости  $\varphi = 1$  и

$$v = \sqrt{2gH}. \quad (275)$$

Последняя формула была получена Торричелли в 1643 г. на основе непосредственных наблюдений над скоростью истечения через отверстие при разных напорах  $H$ .

Следует подчеркнуть, что формула (273), имеющая широкое распространение, на практике представляет собой уравнение энергии, разрешенное относительно скорости во втором сечении.

Соотношение (274) показывает, что коэффициент скорости учитывает уменьшение скорости истечения вследствие потерь и неравномерного распределения скоростей в сжатом сечении. Для рассматриваемой схемы истечения можно принять  $\xi = 0$ , т. е. пренебречь потерями. Однако неравномерность распределения скоростей в сечении  $C-C$  существенна. Согласно опытам Базена  $\alpha = 1,06$ . Тогда

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1,06 + 0}} = 0,97.$$

Выведем теперь формулу для расхода, представив ее как произведение сечения отверстия (с учетом сжатия струи) на скорость истечения:

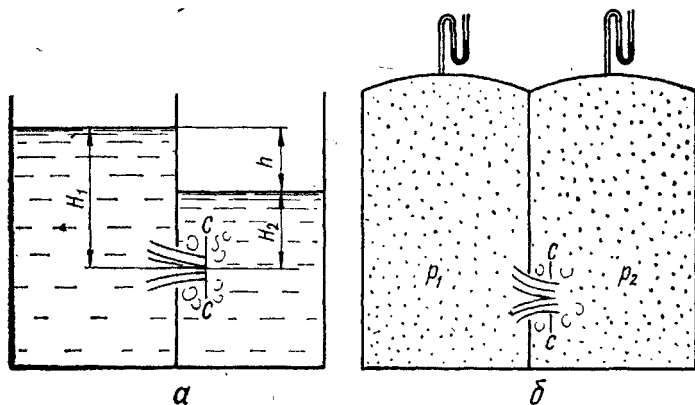
$$Q = \omega_c v_c = \varepsilon \omega v_c.$$

Подставим сюда скорость вытекающей струи  $v_c$  из выражения (273):

$$Q = \varepsilon \omega \varphi \sqrt{2gH} = \mu \omega \sqrt{2gH}, \quad (276)$$

Рис. 131. Истечение через затопленное отверстие:

$a$  — капельная жидкость;  $b$  — газ при малой разности давлений





где коэффициент расхода

$$\mu = \varepsilon\varphi. \quad (277)$$

Величину этого коэффициента для малых отверстий в среднем принимают равной  $\mu = 0,64 \cdot 0,97 = 0,62$ .

Рассмотрим теперь случай, когда жидкость перетекает через малое отверстие из одного резервуара в другой вследствие разности давлений  $h = H_1 - H_2$  (рис. 131, а). Здесь вытекающая струя перемещивается с окружающей покоящейся жидкостью, и отверстие называется *затопленным*.

Напишем, как и в предыдущем случае с незатопленным отверстием, уравнение энергии для сечений  $I-I$  и  $C-C$  относительно плоскости сравнения, проведенной по оси отверстия:

$$H_1 = \frac{p_{\text{ман}C}}{\rho g} + \alpha \frac{v_C^2}{2g} + \zeta \frac{v_C^2}{2g}.$$

Высоту давления в сжатом сечении  $C-C$  можно считать с некоторым приближением равной геометрической высоте  $H_2$ . Тогда

$$H_1 = H_2 + \frac{v_C^2}{2g} (\alpha + \zeta).$$

Отсюда скорость истечения

$$v_C = v = \varphi \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \varphi \sqrt{2gh}. \quad (278)$$

Подставив в формулу (278) вместо  $v_C$  его значение  $\frac{Q}{\varepsilon\omega}$ , получим формулу расхода:

$$Q = \mu\omega \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \mu\omega \sqrt{2gh}, \quad (279)$$

где коэффициенты  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  считают такими же, как и для незатопленного отверстия.

Аналогичная схема истечения через затопленное отверстие и для газа (воздуха), перетекающего из пространства под давлением  $p_1$  в ту же среду с меньшим давлением  $p_2$  (рис. 131, б). Уравнение энергии (270) в форме давлений для сечения  $I-I$ , достаточно удаленного от отверстия, где

$\alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} \approx 0$ , и для сжатого сечения  $C-C$

$$p_1 = p_C + \alpha \frac{\rho v_C^2}{2} + \zeta \frac{\rho v_C^2}{2}.$$

Давление в струе  $p_c$  считаем равным давлению окружающей среды ( $p_c = p_2$ ). Тогда

$$p_1 = p_2 + \frac{\rho v_c^2}{2} (\alpha + \zeta).$$

Отсюда

$$v = \varphi \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho}} = \varphi \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}}; \quad (280)$$

$$Q = \mu \omega \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho}} = \mu \omega \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}}, \quad (281)$$

где  $\Delta p = p_1 - p_2$ .

Необходимо подчеркнуть, что формулы (279), (281) для истечения газа (воздуха) применяют лишь при малых перепадах давлений, когда газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость (см. § 55).

## § 51

### Нормальная диафрагма для измерения расхода

Коэффициент расхода отверстий в тонкой стенке — величина мало изменяющаяся. Это дает возможность широко использовать такие отверстия для измерения расходов жидкости и газа. Отверстия, выполненные по определенным правилам [21], называются нормальными диафрагмами.

*Нормальная диафрагма* — это круглое отверстие с достаточно острой кромкой, но без заусенцев (рис. 132). С тыльной стороны отверстие имеет расточку под углом  $45^\circ$ . Перепад давления, возникающий при течении жидкости через диафрагму, измеряется дифференциальным манометром (рис. 133). Напишем уравнение энергии (270) в форме давлений для сечения  $1-1$  перед диафрагмой и сжатого сечения  $C-C$  после диафрагмы:

$$p_1 + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = p_c + \alpha_c \frac{\rho v_c^2}{2} + \zeta_c \frac{\rho v_c^2}{2}.$$

На рис. 134 показана кривая изменения давления вдоль трубы на участке расположения диафрагмы. Видно, что давление сразу уменьшается после диафрагмы, достигая минимального значения в сжатом сечении  $C-C$ , где скорости наибольшие, а затем постепенно повышается за счет

частичного преобразования кинетической энергии потока в потенциальную. В сечении 3—3 поток уже стабилизировался и давление  $p_n$  существенно больше  $p_c$ , но меньше  $p_1$ . Разность давления  $p_1 - p_n$  равна потере давления в диафрагме, механизм которой рассматривался в § 45. Из конструктивных соображений отбор давлений в нормальной диафрагме производят непосредственно перед и за ней, где давления несколько отличаются от  $p_1$  и  $p_c$ . Поэтому перепад давления, измеренный дифференциальным манометром,

$$\Delta p = k(p_1 - p_c),$$

где  $k$  — коэффициент, учитывающий изменение расположения мест отбора давлений по сравнению с сечениями 1—1 и С—С.

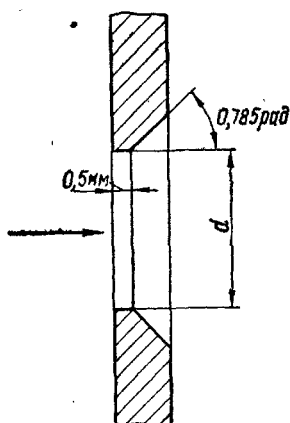
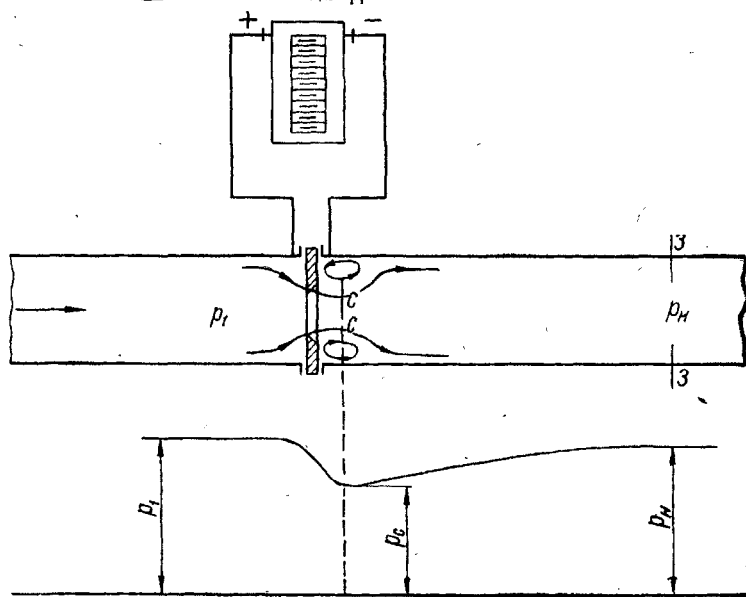


Рис. 132. Нормальная диафрагма для измерения расхода.

Рис. 133. Измерение расхода с помощью диафрагмы.



В отличие от рассмотренных в § 50 случаев истечения через затопленное отверстие, диафрагму обычно выполняют при  $n > 0,4$ , т. е. диафрагму нельзя считать малым отверстием (при  $n < 0,4$  она будет оказывать слишком большое сопротивление). Поэтому в данном случае динамическое давление перед диафрагмой  $\alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2}$ .

Выразив скорость через расход  $v_1 = \frac{4Q}{\pi D^2}$ ,  $v_c = \frac{4Q}{\pi d^2 \varepsilon}$  и введя отношение  $n = \left(\frac{d}{D}\right)^2$ , переписываем выражение для перепада давлений с учетом уравнения энергии так:

$$\Delta p = k \frac{\rho}{2} \left( \frac{4Q}{\varepsilon \pi d^2} \right)^2 (\alpha_c + \zeta_c - \alpha_1 \varepsilon^2 n^2),$$

откуда

$$Q = \mu \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}}, \quad (282)$$

где коэффициент расхода

$$\mu = \varepsilon \sqrt{\frac{k}{\alpha_c + \zeta_c - \alpha_1 \varepsilon^2 n^2}}. \quad (283)$$

Как следует из выражения (283), коэффициент расхода диафрагмы является сложной функцией ряда факторов. Тем не менее решающим является степень сужения трубы отверстием диафрагмы  $n = \left(\frac{d}{D}\right)^2$ . Для нормальной диафрагмы рекомендуется брать такие значения  $\mu$  в зависимости от  $n$  [21]:

$n = \left(\frac{d}{D}\right)^2$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$\mu$	0,6	0,615	0,633	0,66	0,69	0,74	0,8

Итак, имея показания дифференциального манометра  $h$  и определив по формулам (33) или (34) соответствующий перепад давлений  $\Delta p$ , приняв согласно приведенной таблице коэффициент расхода  $\mu$  для данного отношения  $n$  и зная, наконец, диаметр диафрагмы  $d$ , по формуле (282) определяем расход.

**Пример 30. А.** Определить расход воды через нормальную диафрагму, если ее диаметр  $d = 50$  мм, диаметр трубы  $D = 100$  мм, перепад давления по дифференциальному манометру  $h = 100$  мм рт. ст.

По формуле (33)

$$\Delta p = 9,8 (13,6 - 1) \cdot 10^3 \cdot 0,1 = 12\,300 \text{ Па.}$$

При  $n = 0,25$  коэффициент  $\mu = 0,622$  (с. 235).

По формуле (282) искомый расход

$$Q = 0,622 \cdot 0,785 \cdot 0,05^2 \sqrt{2 \frac{12\,300}{1000}} = 0,00614 \text{ м}^3/\text{с} = 6,14 \text{ л/с.}$$

**Б.** Определить расход газа через нормальную диафрагму, если ее диаметр  $d = 200$  мм, диаметр трубы  $D = 300$  мм и перепад давления по дифференциальному манометру  $h = 100$  мм вод. ст. (плотность газа  $\rho = 0,7 \text{ кг/м}^3$ ).

Перепад давлений по формуле (34)

$$\Delta p = 100 \cdot 9,8 = 980 \text{ Па.}$$

При  $n = 0,44$  коэффициент  $\mu = 0,68$  (с. 235).

Искомый расход

$$Q = 0,68 \cdot 0,785 \cdot 0,2^2 \sqrt{2 \frac{980}{0,7}} = 0,394 \text{ м}^3/\text{с} = 990 \text{ кг/ч.}$$

Массовый расход

$$M = \rho Q = 0,7 \cdot 0,394 = 0,275 \text{ кг/с} = 990 \text{ кг/ч.}$$

Напомним, что формула (282) справедлива для газов только в том случае, если перепад давления в диафрагме невелик — менее 3000 Па, или 300 мм вод. ст. (см. § 25).

Нормальная диафрагма имеет малые габариты по сравнению с другими сужающими устройствами для измерения расхода (соплами или трубами типа Вентури). Это преимущество, несмотря на большее сопротивление, и обуславливает широкое распространение измерительных диафрагм.

Более подробные сведения об измерении расхода жидкости с помощью нормальных диафрагм и других аналогичных приборов можно найти в специальной литературе [21].

## § 52

### Расчет отверстий для аэрации зданий

*Аэрацией* называется организованная естественная вентиляция зданий. Наибольшее практическое значение аэрация имеет в промышленных помещениях, где преимущественной вредностью является тепло (в котельных, кузницах, литейных цехах и т. д.).

Верхней границей скорости истечения считают скорость  $v_{\text{макс}} = 12$  м/с (это значение ограничивает вычислить шум).

Воспользовавшись формулой (280), легко вычислить необходимую разность давлений  $\Delta p_{\text{макс}}$  для создания указанной скорости. Приняв  $\rho = 1,2$  кг/м<sup>3</sup> и  $\phi = 0,9$ , получим

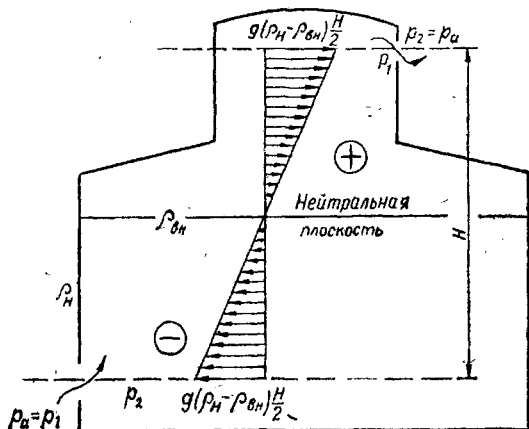
$$12 = 0,9 \sqrt{2 \frac{\Delta p_{\text{макс}}}{1,2}},$$

откуда  $\Delta p = 106$  Па  $\Rightarrow$  10 мм вод. ст.

Приведенный расчет подтверждает, что в вентиляционных системах разности давлений малы, что и позволяет здесь рассматривать воздух как несжимаемую жидкость.

Разберем простейшую схему аэрации здания с избыточным теплом, когда плотность воздуха внутри здания ( $\rho_{\text{вн}}$ ) меньше плотности наружного воздуха ( $\rho_{\text{н}}$ ). Обозначим расстояние между отверстиями  $H$  (рис. 134). Столб наружного воздуха высотой  $H$  тяжелее такого же столба внутри помещения. Поэтому, если открыть створки отверстий, воздух должен входить в нижнее отверстие и выходить через верхнее, как показано стрелками на рисунке. При этом, как только что было доказано, для создания заметной скорости истечения достаточно ничтожной разности давлений, что подтверждается и непосредственными наблюдениями.

Рис. 134. Схема расположения аэрационных отверстий в промышленном здании.



Давление перед входным отверстием равно атмосферному. Для создания же движения воздуха необходим перепад давления. Следовательно, после входного отверстия внутри помещения образуется давление меньше атмосферного относительно оси этого отверстия. Перепад давления

$$\Delta p_{\text{вх}} = p_1 - p_2 = p_a - p = p_{\text{разр}},$$

т. е. равен разрежению.

Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что перед выходным отверстием устанавливается давление больше атмосферного и перепад давления равен манометрическому давлению относительно оси верхнего отверстия:

$$\Delta p_{\text{вых}} = p_1 - p_2 = p - p_a = p_{\text{ман}}.$$

При расчете воздухообмена важно знать не объемный, а массовый расход воздуха. В связи с этим перепишем формулу (281) так:

$$M = \rho Q = \mu \omega \rho \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}} = \mu \omega \sqrt{2 \rho \Delta p}. \quad (284)$$

Это и есть формула для расчета аэрационных отверстий, где перепад  $\Delta p$  определяется конкретными условиями. В частном случае схемы рис. 134 для входного отверстия

$$M_{\text{вх}} = \mu \omega_{\text{вх}} \sqrt{2 \rho_{\text{н}} p_{\text{разр}}},$$

а для выходного

$$M_{\text{вых}} = \mu \omega_{\text{вых}} \sqrt{2 \rho_{\text{вн}} p_{\text{ман}}}.$$

Расход для обоих отверстий одинаков ( $M_{\text{вх}} = M_{\text{вых}}$ ), поэтому

$$\mu \omega_{\text{вх}} \sqrt{2 \rho_{\text{н}} p_{\text{разр}}} = \mu \omega_{\text{вых}} \sqrt{2 \rho_{\text{вн}} p_{\text{ман}}}.$$

Сократив на  $\mu$  и полагая  $\rho_{\text{н}}/\rho_{\text{вн}} \approx 1$ , получаем

$$p_{\text{разр}} \omega_{\text{вх}}^2 = p_{\text{ман}} \omega_{\text{вых}}^2.$$

Последнее соотношение показывает, что манометрическое давление в верхнем отверстии и разрежение в нижнем зависит от площади сечения самих отверстий. Если они одинаковы, то

$$\omega_{\text{вх}} = \omega_{\text{вых}} \text{ и } p_{\text{разр}} = p_{\text{ман}},$$

т. е. манометрическое давление перед выходным отверстием равно разрежению после входного отверстия.

В самом помещении движение воздуха происходит с

очень малыми скоростями. Поэтому без большой ошибки можно рассчитывать распределение давления по высоте по гидростатическому закону. В рассматриваемом случае, когда верхнее и нижнее отверстия одинаковы, получаем эпюру распределения манометрического давления, показанную на рис. 134. Линия атмосферного давления (так называемая нейтральная плоскость) проходит посередине. Рассуждая, как и при определении тяги в вытяжной трубе (§ 12), находим

$$p_{\text{разр}} = p_{\text{ман}} = g(\rho_n - \rho_{\text{вн}}) \frac{H}{2}. \quad (285)$$

Если сечения входного и выходного отверстий не равны между собой, то  $p_{\text{разр}} \neq p_{\text{ман}}$ . При  $\omega_{\text{вх}} > \omega_{\text{вых}}$  величина  $p_{\text{ман}} > p_{\text{разр}}$ . Наоборот, при  $\omega_{\text{вх}} < \omega_{\text{вых}}$   $p_{\text{разр}} > p_{\text{ман}}$ . Таким образом, регулируя сечения входного и выходного отверстий, можно изменять эпюру распределения давления по высоте и расположение нейтральной плоскости.

Эпюра распределения давления, приведенная на рис. 134, показывает, что манометрическое давление внутри помещения при наличии тепловых избытков возрастает по высоте (разрежение в нижней части графика характеризует отрицательное манометрическое давление — см. § 10). Аналогичное явление увеличения манометрического давления по высоте, когда  $\rho_{\text{вн}} < \rho_n$ , мы уже рассматривали при распределении давления в газовом стояке (см. § 12).

**Пример 31.** Определить воздухообмен в помещении (рис. 134) при следующих условиях: расстояние между отверстиями по вертикали  $H = 8$  м; плотность наружного воздуха  $\rho_n = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>; плотность воздуха внутри помещения  $\rho_{\text{вн}} = 1,15$  кг/м<sup>3</sup>; размеры отверстий одинаковы и равны  $\omega = 2 \times 2 = 4$  м<sup>2</sup>.

Согласно условию (285), определяем манометрическое давление перед выходным или разрежение после входного отверстия:

$$p_{\text{ман}} = p_{\text{разр}} = 9,8(1,2 - 1,15) 4 = 1,96 \text{ Па.}$$

Для данной схемы эти давления равны перепаду давления в отверстии. Применяв формулу (284), находим искомый массовый расход (коэффициент расхода здесь принимают обычно равным  $\mu = 0,7$ ):

$$M = 0,7 \cdot 4 \sqrt{2 \cdot 1,2 \cdot 1,96} = 6,1 \text{ кг/с} = 22\,000 \text{ кг/ч.}$$

Рассмотренная схема аэрации не учитывает действия ветра. В последнем случае давления перед входным отверстием и после выходного отверстия отличаются от атмосферного и перепад давления в отверстии соответствующим образом изменяется (расчет такого случая см. § 65).



Количество раздаваемого и засасываемого воздуха через щели также рассчитывается по формуле (284). При этом в случае раздачи воздуха  $\Delta p$  равно манометрическому давлению, а при засасывании — разрежению в воздухопроводе.

## § 53

### Истечение через насадки

Короткая труба длиной от 3 до 8 ее диаметров называется *насадком*.

Выведенные в § 50 формулы скорости и расхода при истечении через отверстия пригодны и для насадков, однако коэффициенты при этом будут другие. В насадке струя сначала сжимается, как в отверстии, а потом расширяется, заполняя все сечение (см., например, рис. 135, б). Расчетным тут является не сжатое сечение  $C-C$ , а сечение 2—2 на выходе, для которого коэффициент сжатия  $\varepsilon = 1$ . Поэтому для насадков

$$\mu = \varepsilon \varphi \approx \varphi.$$

**Внешний цилиндрический насадок** представляет собой отрезок трубы, присоединенный к отверстию. Такие насадки часто встречаются на практике. Например, нагнетательные патрубки в системах вентиляции работают как внешние цилиндрические насадки.

Чтобы обеспечить заполнение сечения на выходе жидкостью (воздухом) такого насадка, его длина должна быть не менее трех диаметров. Картина явления здесь аналогична входу в трубу (рис. 135, б). Заштрихованная вихревая зона является источником существенных местных потерь энергии, вследствие чего коэффициент скорости  $\varphi$  (определенный по скорости на выходе) оказывается значительно меньшим 1. Если принять коэффициент сопротивления, как при входе в трубу,  $\zeta = 0,5$  и коэффициент Кориолиса на выходе  $\alpha_2 = 1$ , по формуле (274) получим

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,5}} = 0,82.$$

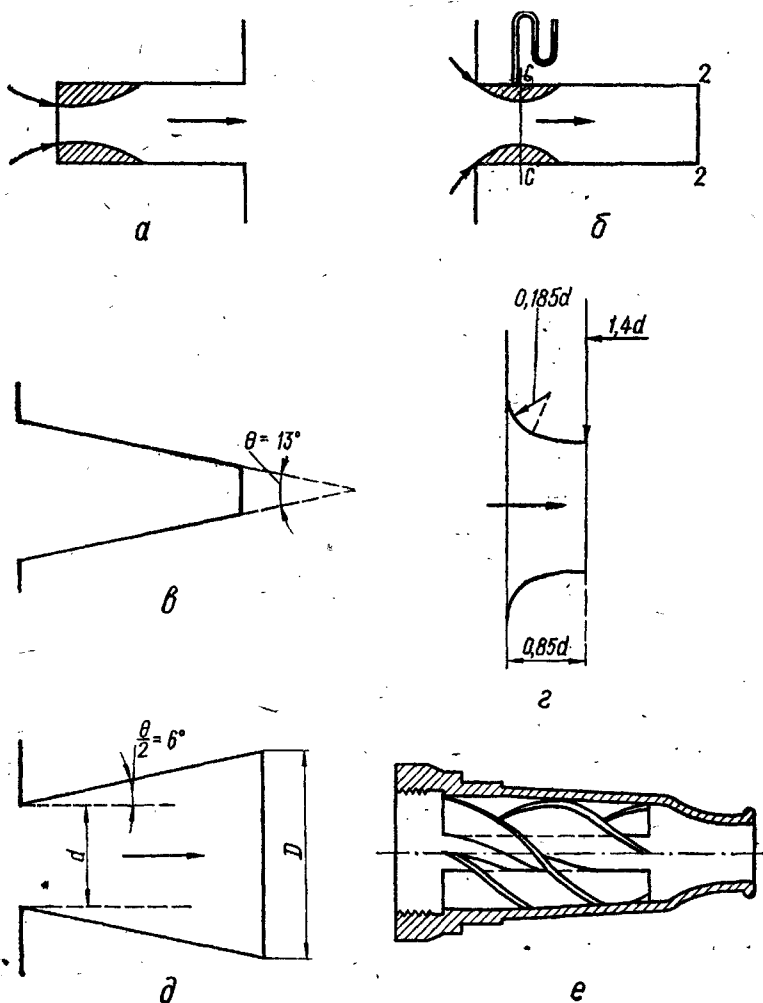
Так как  $\mu = \varphi$ , то и  $\mu = 0,82$ .

Таким образом, цилиндрический насадок, несмотря на большие потери, увеличивает расход по сравнению с отверстием в  $\frac{0,82}{0,62} = 1,3$  раза. Объясняется это тем, что уве-

личение  $\varepsilon$  (от 0,64 до 1) перекрывает уменьшение  $\varphi$  (от 0,97 до 0,82). Если рассматривать сжатое сечение  $C-C$ , то большая скорость в этом сечении по сравнению со скоростью в отверстии (при прочих равных условиях) обусловлена

Рис. 135. Типы насадков:

*a* — внутренний цилиндрический; *b* — внешний цилиндрический; *в* — конически-сходящийся; *г* — коноидальный; *д* — конически-расходящийся; *е* — винтовой.



образованием вакуума в сечении  $C-C$ . Насадок как бы под-сасывает жидкость из резервуара.

С увеличением длины насадка он переходит в короткий трубопровод, в котором в той или иной степени сказывается влияние потерь по длине (рис. 136). В этом случае формула коэффициента скорости или расхода принимает вид

$$\varphi = \mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \zeta_{\text{вх}} + \lambda l/d}} \quad (286)$$

Определим, при какой длине трубы ее коэффициент расхода будет иметь значение  $\mu = 0,62$ , т. е. такое, как при истечении через отверстие такого же диаметра. Приняв  $\lambda = 0,03$  и  $\zeta_{\text{вх}} = 0,5$ , находим

$$0,62 = \frac{1}{1 + 0,5 + 0,03l/d},$$

откуда  $ld = 36$ . Таким образом, труба длиной  $36d$  пропускает такой же расход, что и отверстие равного диаметра.

Движение капельной жидкости в цилиндрическом насадке ограничивается минимальным давлением, или наибольшим вакуумом в сжатом сечении  $C-C$  (рис. 135, б), при котором упругость паров, насыщающих пространство, меньше этого давления. Величина же указанного давления (вакуума) в конечном итоге зависит от напора в резервуаре  $H$ . Поэтому существует определенный предел для напора, выше которого работа насадка нарушается, струйки уже не расширяются до стенок и истечение происходит как через отверстие.

Определим предельный напор  $H_{\text{пр}}$ . Для этого напишем уравнение энергии (270) в форме напоров для сжатого сече-

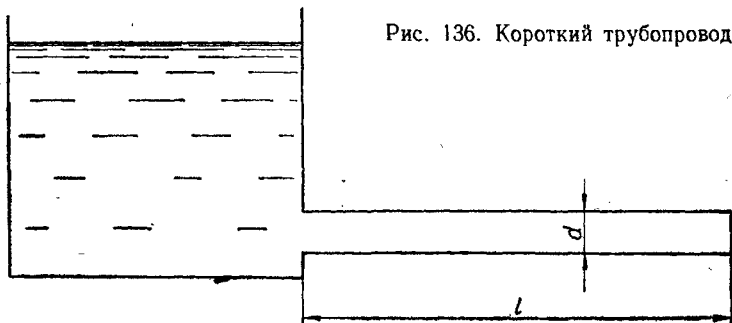


Рис. 136. Короткий трубопровод.

ния С—С и выходного сечения 2—2 (рис. 135, б):

$$\frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} + \frac{v_C^2}{2g} = 0 + \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_{\text{нас}} \frac{v_2^2}{2g},$$

где  $\zeta_{\text{нас}}$  — коэффициент сопротивления насадка.

Заменив  $v_C = \frac{v_2}{\varepsilon}$  и  $v_2 = \varphi \sqrt{2gH}$ , получим выражение для вакуумметрической высоты в сечении С—С:

$$\begin{aligned} h_{\text{вак}} &= -\frac{p_{\text{манС}}}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} - (1 + \zeta_{\text{нас}}) \right] = \\ &= \varphi^2 H \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 - \zeta_{\text{нас}} \right). \end{aligned}$$

Поставим значения  $\varepsilon = 0,64$ ,  $\varphi = 0,82$  и  $\zeta_{\text{нас}} = 0,5$ . Тогда

$$h_{\text{вак}} = 0,82^2 H \left( \frac{1}{0,64^2} - 1 - 0,5 \right) \approx 0,67H.$$

Если принять величину допустимого вакуума  $h_{\text{вак}} = 9$  м,

$$H_{\text{пр}} = 9/0,67 = 13,5 \text{ м.}$$

Приведенные данные относились к насадкам, края которых не скошены. При достаточном скруглении входной кромки ( $r/d > 0,2$ ) можно избежать вихревых зон и образования сжатого сечения при входе, благодаря чему значения коэффициентов  $\mu$  и  $\varphi$  возрастают до 0,95.

**Внутренний цилиндрический насадок** представляет собой выдвинутый во внутрь пространства, откуда происходит истечение, отрезок трубы (рис. 135, а).

Применим закон количества движения. При данном расположении насадка реакции стенок не проектируются на направление движения. Поэтому (при коэффициенте Буассинеска  $\beta = 1$ )

$$P = \rho \omega v^2.$$

Сила давления  $P$  определяется гидростатическим давлением столба жидкости высотой  $H$ , т. е.  $P = \rho g H \omega$ . Тогда

$$gH = v^2, \text{ откуда } v = \sqrt{gH}.$$

С другой стороны, по формуле (273)

$$v = \varphi \sqrt{2gH}.$$

Сравнив оба выражения скорости, получим

$$\varphi = 1/\sqrt{2} = 0,71;$$

следовательно,  $\mu = 0,71$ .

Полученные значения вполне согласуются с опытными данными. Меньшие значения  $\varphi$  и  $\mu$  для внутреннего насадка по сравнению с внешним объясняются большим эффектом сжатия струи и связанным с этим увеличением вихревых зон, что ведет к увеличению потерь.

По схеме внутреннего насадка рассчитывают всасывающую патрубку вытяжных вентиляционных устройств.

**Пример 32.** Определить массовый расход воздуха через всасывающий патрубок диаметром  $D = 200$  мм при разрежении в коллекторе  $p_{\text{разр}} = 100$  Па и плотности засасываемого воздуха  $\rho = 1,1$  кг/м<sup>3</sup> при значении  $\mu = 0,7$ .

По формуле (284)

$$M = 0,7 \cdot 0,785 \cdot 0,2^2 \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 1,1} = 0,47 \text{ кг/с} = 1700 \text{ кг/ч}.$$

**Конически-сходящийся насадок** (рис. 135, в) дает компактную струю и незначительное рассеивание ее кинетической энергии. Поэтому такие насадки применяют там, где по условиям работы важны указанные свойства струи: в гидромониторах для разработки грунтов и горных пород способом гидромеханизации, в специальных наконечниках на брандспойтах (спрысках), в струйных аппаратах (гидроэлеваторах и эжекторах).

Картина истечения из конически-сходящегося насадка в значительной степени зависит от угла его конусности  $\Theta$ . При малых значениях  $\Theta$  сразу за входным сечением образуются отрывные течения и такой насадок работает почти как цилиндрический. Наоборот, при больших значениях  $\Theta$  на входе течение почти безотрывно, зато на выходе из насадка образуется сжатое сечение, как при истечении из отверстия. Существует определенное оптимальное значение угла конусности сужающихся насадков:  $\Theta = 10 \div 15^\circ$ . В этом случае  $\varphi = 0,96$ ,  $\varepsilon = 0,98$ ,  $\mu = 0,94$ .

**Конически-расходящийся насадок** (рис. 135, д) вследствие добавочного расширения струи обуславливает возрастание потерь энергии и уменьшение коэффициентов  $\varphi$  и  $\mu$  до 0,45.

Однако пропускная способность расходящегося насад-

ка больше пропускной способности цилиндрического при одинаковых размерах входа. Например, если степень расширения  $(D/d)^2 = 2$ , отношение расходов через эти насадки  $2 \frac{0,45}{0,82} = 1,1$ . Чтобы поток не отрывался от стенок, угол конусности насадка не должен превышать  $12^\circ$ .

В расходящемся насадке вакуум во входном сечении возрастает по сравнению с цилиндрическим, что уменьшает предельный напор, необходимый для его работы.

**Коноидальный насадок** — это насадок, спрофилированный по контуру вытекающей из отверстия струи (рис. 135, *з*). При соблюдении размеров, указанных на рисунке, и тщательной обработке поверхности  $\varphi = \mu = 0,98$ .

Коноидальные насадки применяют в лабораториях, а также как устройство для измерения расхода (нормальное сопло).

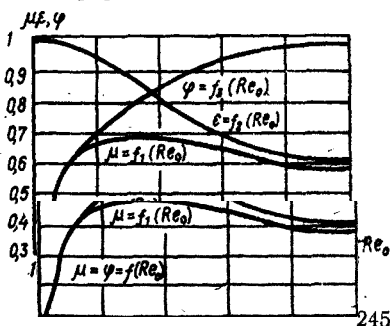
**Винтовой насадок.** Для охлаждения воды в брызгальных бассейнах промышленных предприятий и тепловых электростанций применяют специальные насадки, которые в противоположность конически-сходящимся должны как можно интенсивнее разбрызгивать вытекающую струю. Наибольшее распространение получили винтовые насадки (рис. 136, *е*). Они обеспечивают вращательное движение струи, которая под действием центробежных сил выбрасывается из насадка в виде рассеивающего факела, способствующего быстрому охлаждению жидкости. Для такого насадка  $\varphi = \mu = 0,95$ .

## § 54

### Зависимость коэффициентов истечения от числа Рейнольдса

Приведенные выше значения коэффициентов истечения для отверстий и насадков различной формы относятся к достаточно большим числам Рейнольдса, когда влияние вязкости на истечение не проявляет себя в сколь угодно заметной степени.

Рис. 137. Зависимость коэффициентов истечения из малых отверстий в тонкой стенке от числа Рейнольдса (по А. Д. Альтшулю).



Однако при истечении жидкостей повышенной вязкости (например, при подаче смазочных масел, при подаче топлива в форсунках, в гидросистемах), а также в некоторых других случаях, когда числа Рейнольдса невелики, обнаруживается влияние последних на коэффициенты истечения.

На рис. 137 приведены (по А. Д. Альтшулю) зависимости коэффициентов  $\varphi$ ,  $\epsilon$  и  $\mu$  от числа Рейнольдса  $Re_0 = \frac{\sqrt{2gHd}}{v}$  для случая истечения из малого отверстия в тонкой стенке. По рисунку видно, что значения  $\varphi$  монотонно возрастают с увеличением  $Re_0$ , приближаясь при  $Re_0 \approx 100\ 000$  к  $\varphi = 0,97$ . Коэффициент сжатия  $\epsilon$  монотонно уменьшается от 1 до 0,6 с увеличением  $Re_0$ . Коэффициент расхода  $\mu$  изменяется по более сложному закону, достигая максимума в пределах  $Re_0 = 500 \div 1000$ . Для  $Re_0 < 10\ 000$  коэффициент расхода можно подсчитать по формуле

$$\mu = 0,592 + 5,5/\sqrt{Re_0}. \quad (287)$$

Для внешних цилиндрических насадков Б. Б. Некрасов рекомендует [9] формулу

$$\mu = \frac{1}{1,23 + \frac{58}{Re_0} \cdot \frac{l}{d}}, \quad (288)$$

где  $\frac{l}{d}$  — относительная длина насадка.

Согласно этой формуле при  $Re \rightarrow \infty$   $\mu = \mu_{\max} = 0,813$ .

## § 55

### Истечение сжимаемой жидкости (газа) из отверстий

Рассмотрим явления истечения при большой разности давлений, когда газ нельзя рассматривать как несжимаемую жидкость.

Прежде всего условимся считать изменение состояния газа при истечении адиабатическим. Это допущение достаточно обоснованно, поскольку при значительной разности давлений за счет преобразования потенциальной энергии в кинетическую в отверстии возникает столь большая скорость, что поток не успевает отдать свое тепло стенкам и окружающей среде, куда он вытекает. Для такого процесса приме-

нимо уравнение Бернулли (154). Обозначим характеристики среды в резервуаре, откуда происходит истечение (рис. 138), с индексом 0, а параметры вытекающей струи без индекса. Тогда

$$i_0 = i + v^2/2,$$

откуда скорость истечения

$$v = \sqrt{2(i_0 - i)}. \quad (289)$$

Решение последнего уравнения требует дополнительных условий, поскольку состояние газа в вытекающей струе заранее неизвестно. При рассмотрении адиабатического процесса течения на  $i-s$ -диаграмме параметры вытекающей струи отвечают точке 2 на кривой 1—2, отклоняющейся вправо (рис. 76, § 31).

**Формула Сен-Венана.** Если в первом приближении пренебречь влиянием сопротивлений (которые здесь невелики), процесс истечения можно считать изоэнтропическим. На рис. 76 он представлен вертикальным отрезком 1—2'.

Применяем уравнение Бернулли для невязкой сжимаемой жидкости (150):

$$\frac{p_0}{\rho_0} \frac{k}{k-1} = \frac{p}{\rho} \frac{k}{k-1} + \frac{v^2}{2}.$$

Разрешив его относительно скорости, находим

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right)}.$$

Согласно уравнению состояния (9),

$$v = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R (T_0 - T)}. \quad (290)$$

Используя термодинамическое соотношение  $\frac{T}{T_0} =$

$$= \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}, \text{ получим}$$

$$v = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (291)$$

Это и есть формула Сен-Венана для скорости истечения газа. При скоростях истечения  $v \leq 70$  м/с эта формула



приводится к формуле Торричелли для несжимаемой жидкости (§ 25)

$$v = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}}$$

Максимально возможная скорость истечения газа, согласно формуле (291), будет при давлении  $p = 0$ :

$$v_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0}. \quad (292)$$

Это гипотетический случай, когда истечение происходит в среду с абсолютным вакуумом и потенциальная энергия сжатого газа полностью переходит в кинетическую. В условиях космического полета этот случай вполне реален.

**Критические параметры истечения.** Анализ и эксперимент показывают, что в отверстии максимально возможная скорость истечения не может быть достигнута. Граничной является *критическая скорость истечения*, равная местной скорости звука:

$$v_{\text{кр}} = a. \quad (293)$$

Чтобы понять это очень важное обстоятельство, обратимся к схеме рис. 138. Скорость в отверстии образуется за счет энергии давления в резервуаре. Давление в вытекающей струе равно давлению окружающей среды и управляется им, поскольку влияние среды распространяется на струю (сечение  $K-K$ ) с местной скоростью звука. Вследствие того, что сами частицы газа движутся из резервуара наружу со скоростью истечения  $v$ , скорость распространения влияния окружающей среды против движения относительно отверстия составит  $a - v$ . Однако

указанное внешнее влияние среды действует на процесс истечения до тех пор, пока скорость истечения меньше  $a$ .

Допустим, что при постоянном давлении в резервуаре  $p_0$  давление среды  $p$ , куда происходит истечение, уменьша-

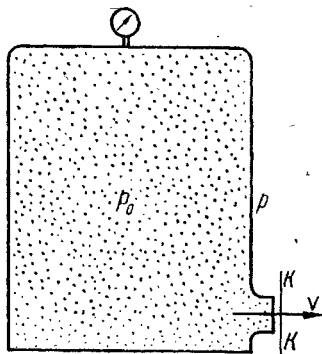


Рис. 138. Истечение газа (воздуха) при большой разности давлений.

ется. При этом увеличивается перепад давления и скорость истечения возрастает. При достижении скорости своего критического значения ( $v = a$ ) сечение  $K-K$  становится препятствием для влияния извне (так называемым звуковым барьером) и давление внешней среды  $p$  тогда уже не может распространяться на сечение  $K-K$ . В этом случае при  $v = a$  на струю уже влияет не давление окружающей среды, а параметры газа в резервуаре. При дальнейшем уменьшении давления окружающей среды  $p$  характеристики струи остаются без изменения (поскольку параметры газа в резервуаре постоянны), т. е. сохраняют свои критические значения.

Найдем выражение для критической скорости. Квадрат скорости распространения возмущений (звука) при условии изоэнтропического процесса согласно уравнению (121)

$$a^2 = k \frac{p}{\rho}.$$

Заменив отношение  $\frac{p}{\rho}$  произведением  $RT$  и извлекая квадратный корень, получаем

$$a = \sqrt{kRT}. \quad (294)$$

Теперь на основе условия (293)

$$v_{кр} = \sqrt{kRT_{кр}}. \quad (295)$$

Однако критическая температура вытекающей струи  $T_{кр}$  пока еще неизвестна. Ее нетрудно определить, воспользовавшись соотношениями (290), (295):

$$\frac{2k}{k-1} RT_0 \left(1 - \frac{T_{кр}}{T_0}\right) = kRT_{кр},$$

или

$$2(T_0 - T_{кр}) = (k-1)T_{кр},$$

откуда

$$\frac{T_{кр}}{T_0} = \frac{2}{k+1}. \quad (296)$$

Следовательно, критическая температура истечения составляет  $2/(k+1)$  от начальной температуры среды  $T_0$  в резервуаре. Например, для воздуха при  $t_0 = 20^\circ \text{C}$ ,  $k = 1,4$   $T_{кр} = \frac{2}{1,4+1} (273 + 20) = 244 \text{ K} = -29^\circ \text{C}$ .

Подставив соотношение (296) в формулу (295), находим окончательно выражение для критической скорости в зависимости от начальной (заданной) температуры истечения  $T_0$ :

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_0}. \quad (297)$$

Критическая скорость истечения, например воздуха при  $t = 20^\circ \text{C}$

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{2}{1,4+1} 287 \cdot 293} = 314 \text{ м/с},$$

в то время как местная скорость звука при той же температуре по формуле (295)

$$a = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 293} = 343 \text{ м/с}.$$

Значение критической скорости получилось меньшим скорости звука при той же температуре вследствие того, что в вытекающей струе температура намного меньше, чем начальная в резервуаре.

Поделив выражение (292) на (297), находим отношение максимальной скорости к критической:

$$\frac{v_{\max}}{v_{кр}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \quad (298)$$

Следовательно, для воздуха критическая скорость меньше максимально возможной.

Имея соотношение (296) для критической температуры, можем получить формулы и для других критических параметров.

Подставив уравнение (296) в соотношение для изоэнтروпического процесса  $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ , находим критическое отношение давлений

$$\frac{p_{кр}}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (299)$$

Это отношение для воздуха составляет  $\frac{p_{кр}}{p_0} = 0,53$ , а для природного газа ( $k = 1,3$ ) — 0,55. Таким образом, при истечении газа в атмосферу, если начальное давление

в резервуаре  $p_0 = \frac{101\,325}{0,55} = 185\,000 \text{ Па} = 185 \text{ кПа}$  и соответственно манометрическое давление  $p_{\text{ман}} = 185 - 101 = 84 \text{ кПа}$ , в отверстии возникают условия для критического режима истечения.

Учитывая еще, что  $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k$ , находим критическое отношение плотностей

$$\frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (300)$$

**Критический расход.** Массовый расход, выраженный с помощью критических параметров,

$$M_{\text{кр}} = \omega \rho_{\text{кр}} v_{\text{кр}}.$$

С учетом выражений (296), (300) критический расход представляется через начальные параметры:

$$M_{\text{кр}} = \omega \rho_0 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_0}.$$

Заменяя  $T_0 = \frac{p_0}{\rho_0 R}$ , получаем

$$M_{\text{кр}} = \omega \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2k}{k+1}} \sqrt{p_0 \rho_0} = \Psi_{\text{кр}} \omega \sqrt{p_0 \rho_0}, \quad (301)$$

$$\text{где } \Psi_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2k}{k+1}}. \quad (302)$$

Для воздуха  $\Psi_{\text{кр}} = 0,68$ , для природного газа — 0,66.

Формула (302) для критического расхода применяется в тех случаях, когда отношение  $p/p_0$  меньше критического  $p_{\text{кр}}/p_0$ .

При  $p/p_0 > p_{\text{кр}}/p_0$  скорость истечения меньше критической и ее значение вычисляется по уравнению Сен-Венана (291). Массовый расход в этом случае

$$M = \omega \rho v = \omega \rho \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \omega p_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} = \\
 &= \omega \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_0 \rho_0 \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}.
 \end{aligned}$$

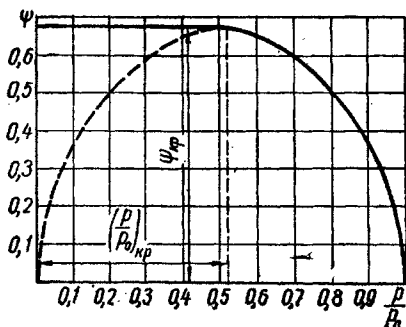
Последняя формула неудобна для пользования. Поэтому ее переписывают так:

$$M = \Psi \omega \sqrt{p_0 \rho_0}, \quad (303)$$

где

$$\Psi = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (304)$$

График этой зависимости для воздуха ( $k = 1,4$ ) приведен на рис. 139. С увеличением перепада давлений, т. е. с уменьшением отношения  $\frac{p}{p_0}$  значения  $\Psi$  возрастают. При критическом отношении давлений ( $p/p_{кр} = 0,53$ ) величина  $\Psi$  достигает своего максимального значения (0,68). С дальнейшим уменьшением  $p/p_0$  (т. е. при увеличении перепада давлений), согласно уравнению (304), величина  $\Psi$  также должна уменьшаться (штриховая линия на рис. 139). В том, что при  $p/p_0 = p_{кр}/p_0$  величина  $\Psi = \Psi_{\max}$ , т. е. уравнение (304) переходит в формулу (302), можно убедиться, исследуя уравнение (304) на максимум и минимум функции. Однако трудно представить, чтобы расход уменьшался



с увеличением перепада давлений. Остается предположить, что при  $p/p_0 < p_{кр}/p_0$ , т. е. при сверхкритическом перепаде давлений, расход сохраняет постоянное значение, равное критическому (горизонтальная пря-

Рис. 139. График для определения коэффициента  $\Psi$  в формуле (304).

мая на рис. 139). Такое предположение вполне оправдывается опытом. Физическая трактовка рассмотренного явления была дана выше на с. 249.

Напомним, что при малых перепадах давлений применимы обычные формулы гидравлики. Если ограничиться точностью определения расхода до 5%, то формулами гидравлики можно пользоваться в диапазоне  $p/p_0 = 1 \div 0,9$ .

**Коэффициент расхода.** Приведенные соотношения получены в предположении идеального изэнтропического процесса истечения. Особенности действительного истечения по аналогии со случаем несжимаемой жидкости учитываются соответствующими коэффициентами.

Коэффициент расхода (см. § 50) равен  $\varphi \epsilon$ . Коэффициент сжатия для отверстий в тонкой стенке и несжимаемой жидкости  $\epsilon = 0,64$ , однако с увеличением перепада давлений и влияния сжимаемости величина  $\epsilon$  возрастает:

$p/p_0$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,55
$\epsilon$	0,61	0,62	0,64	0,67	0,71	0,74

Заметно увеличивается  $\epsilon$  вблизи критического режима и при критическом перепаде давлений  $\epsilon^* = 0,74$ .

Коэффициент скорости для отверстий близок к 1 и его можно принимать, как и в случае несжимаемой жидкости, равным 0,97.

Итак, общая формула для массового расхода газа (воздуха) при истечении через отверстия принимает вид

$$M = \mu^* \omega \sqrt{p_0 \rho_0}, \quad (305)$$

где  $\mu^* = \varphi \epsilon \Psi$  — приведенный коэффициент расхода для случая истечения сжимаемой жидкости.

При критическом режиме величина  $\Psi_{кр}$  вычисляется по формуле (302): для воздуха  $\Psi_{кр} = 0,68$ , для природного газа — 0,66; коэффициент сжатия  $\epsilon_{кр} = 0,74$  и  $\varphi = 0,97$ . Таким образом,  $\mu^* = 0,97 \cdot 0,74 \cdot 0,68 = 0,49$  для воздуха и  $\mu^* = 0,48$  для природного газа.

При докритическом режиме  $\Psi$  вычисляют по формуле (304) либо принимают по графику рис. 139:  $\epsilon$  выбирают в зависимости от перепада давлений  $p/p_0$  согласно приведенным данным.

**Пример 33.** Определить расход газа через предохранительный клапан, установленный на выхлопном устройстве газораспределительного пункта. Давление в системе  $p_{ман_0} = 600$  кПа; температура  $t = 20^\circ \text{C}$ ;

рабочее сечение клапана  $\omega = 20 \text{ см}^2$ ; газ природный [газовая постоянная  $R = 520 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ , показатель адиабаты  $k = 1,3$ ].

Газ вытекает в атмосферу, поэтому отношение давлений

$$\frac{p}{p_0} = \frac{101}{600 + 101} = 0,143$$

тут намного меньше критического (0,55) и значение приведенного коэффициента расхода составит  $\mu_{\text{кр}} = 0,48$ .

Начальная плотность газа определяется из уравнения состояния (9):

$$p_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{(600 + 101) \cdot 10^3}{520 (273 + 20)} = 4,6 \text{ кг/м}^3.$$

Теперь искомый массовый расход по формуле (305)

$$M_{\text{кр}} = 0,48 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \sqrt{701 \cdot 10^3 \cdot 4,6} = 1,74 \text{ кг/с.}$$

Объемный расход, приведенный к нормальным условиям ( $p_a = 101 \text{ кПа}$ ,  $t = 0^\circ \text{С}$ ,  $\rho = 0,71 \text{ кг/м}^3$ ),

$$Q_0 = \frac{M}{\rho} = \frac{1,74}{0,71} = 2,4 \text{ м}^3/\text{с} = 8800 \text{ кг/ч.}$$

**Истечение через цилиндрическую трубу.** При истечении через трубу происходит значительная потеря давления, что связано с уменьшением плотности и, следовательно, с увеличением скорости вдоль течения. Действительно, массовый расход

$$M = \rho v \omega = \text{const},$$

но для цилиндрической трубы  $\omega = \text{const}$ , откуда  $\rho v = \text{const}$ .

В конечном сечении трубы скорость наибольшая. Рассуждая как и в случае истечения через отверстие, приходим к выводу, что скорость в конце трубы не может превзойти критическую. Однако вследствие уменьшения плотности расход, т. е. пропускная способность трубы, уменьшается по сравнению с отверстием того же диаметра.

Задачи о расчете таких выхлопных труб решаются интегрированием дифференциального уравнения энергии в механической форме (152) в сочетании с уравнением состояния (9), расхода (124) и при условии критического состояния газа на выходе. Степень уменьшения критического расхода по сравнению с формулой (301) для отверстий приближенно может быть определена по формуле [25]

$$m = \frac{1}{\left(1 + \lambda \frac{l_{\text{нр}}}{d}\right)^{\frac{1}{k+1}}},$$

где  $l_{пр}$  — приведенная длина трубы с учетом местных сопротивлений.

Если эту поправку рассчитать по формуле (281) для коротких труб (без учета сжимаемости), то получим ошибку в сторону преуменьшения расхода до 30%.

## § 56

### Сопло Лавала

#### [сверхзвуковое сопло]

Выше было показано, что при истечении из отверстий нельзя достигнуть скорости больше критической. Между тем для эффективной работы паровых и газовых турбин очень важно получить как можно большую скорость истечения. В практике теплогасоснабжения такого рода задача возникает при конструировании газовых эжекционных горелок высокого давления, форсунок воздушного распыливания жидкого и пылевидного топлива и в других случаях.

Условие (298) показывает, что с энергетической точки зрения возможно получение *скорости, значительно большей критической*. Вопрос состоит лишь в том, каким образом этой скорости достигнуть.

Для ответа на поставленный вопрос исследуем изоэнтропическое течение в трубе переменного сечения. Напишем уже известные нам зависимости:

уравнение Бернулли в дифференциальной форме

$$\frac{dp}{\rho} + vdv = 0; \quad (306)$$

дифференциальное уравнение неразрывности\*

$$\frac{d\omega}{\omega} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0 \quad (307)$$

и выражение для скорости звука

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Составим уравнение движения как комбинацию написанных уравнений. Для этого прежде всего преобразуем первый член уравнения (306), используя формулу скорости

\* Это уравнение получается дифференцированием уравнения  $M = \rho v \omega = \text{const.}$



звука:

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = a^2 \frac{d\rho}{\rho}.$$

Подставим полученное соотношение в уравнение (306):

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} + v dv = 0, \text{ или } \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{v dv}{a^2},$$

а последнее равенство — в уравнение (307). Тогда

$$\frac{d\omega}{\omega} - \frac{v dv}{a^2} + \frac{dv}{v} = 0,$$

откуда

$$\frac{d\omega}{\omega} = \left( \frac{v^2}{a^2} - 1 \right) \frac{dv}{v} = (Ma^2 - 1) \frac{dv}{v}, \quad (308)$$

где  $\frac{v}{a} = Ma$  — число Маха.

Рассмотрим три характерных случая.

1. Дозвуковой поток: скорость течения *меньше* скорости звука ( $v < a$ ,  $Ma < 1$ ). Для этого случая выражение в скобках правой части уравнения (308) отрицательно. Следовательно, в расширяющейся трубе ( $\frac{d\omega}{\omega} > 0$ ) скорость уменьшается по течению ( $\frac{dv}{v} < 0$ ). В сужающейся

же трубе  $\frac{d\omega}{\omega} < 0$  и  $\frac{dv}{v} > 0$ , т. е. скорость возрастает по течению. Таким образом, здесь характер течения качественно не отличается от движения несжимаемой жидкости.

2. Сверхзвуковой поток:  $v > a$  и  $Ma > 1$ . Для такого течения выражение в скобках правой части

(308) положительно. В этом случае при расширении трубы скорость *возрастает* ( $\frac{dv}{v} > 0$ ), а при сужении — уменьшается ( $\frac{dv}{v} < 0$ ) по течению.

Следовательно, сверхзвуковой

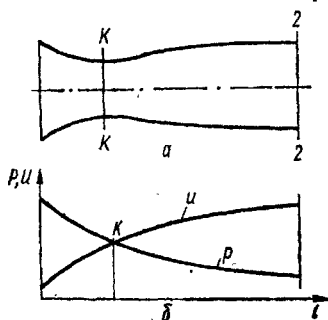


Рис. 140. Сопло Лавали.

поток по своим свойствам прямо противоположен несжимаемой жидкости. Различие между дозвуковыми и сверхзвуковыми потоками с физической точки зрения объясняется тем, что в первом случае при изменении сечения трубы плотность газа изменяется незначительно по сравнению со скоростью, между тем как во втором случае изменение плотности при изменении сечения трубы опережает изменение скорости.

3. Поток в критическом состоянии:  $v = a$ ,  $Ma = 1$ . Тут выражение в скобках уравнения (308) обращается в нуль. Исходя из физической картины неразрывного процесса течения, можно утверждать, что  $\frac{dv}{v} = 0$ , т. е. критический режим возможен только в *наиболее узком сечении* трубы.

Итак, разобранные случаи движения потока приводят к схеме сопла для создания сверхзвуковой скорости (рис. 140).

*Сопло Лаваля* состоит из короткой сужающейся и относительно длинной расширяющейся частей. В сужающейся части поток дозвуковой и скорость возрастает по течению до наиболее узкого сечения — горла сопла  $K-K$ . Если перепад давлений до и после сопла невелик, то наибольшая скорость в сечении  $K-K$  не достигает своего критического значения и поток в расширяющейся части сопла остается дозвуковым: скорость при этом все время уменьшается, а давление возрастает. При значительном перепаде давлений скорость в сечении  $K-K$  достигает своей критической величины и поток в расширяющейся части сопла становится сверхзвуковым: скорость при этом продолжает возрастать, а давление — уменьшаться.

Расчет сопла Лаваля сводится главным образом к определению сечения горла  $K-K$  и выходного сечения  $2-2$  при заданном перепаде давлений. Конструктивное выполнение входной части может быть до некоторой степени произвольным: важно сохранить лишь плавное очертание стенок. Выходной участок должен быть таким, чтобы в конечном сечении  $2-2$  обеспечить параллельность вытекающих струек: такое требование обуславливается наилучшим использованием струи. Важно отметить, что никаких вихрей в противоположность обычному диффузору на участке

расширения сопла не образуется (ибо давление уменьшается, а не возрастает вдоль течения). Поэтому законы профилирования участка  $K-2$  совсем другие, чем в обычном диффузоре: сразу после горла угол конусности берется большим (до  $30^\circ$ ), но затем для обеспечения параллельности струек конусная поверхность плавно переходит в цилиндрическую, что значительно удлиняет расширяющийся участок сопла.

**Пример 34.** Определить основные размеры сопла Лаваля для эжекционной газовой горелки среднего давления, если начальное давление воздуха  $p_{\text{ман}_0} = 200$  кПа, температура  $t_0 = 20^\circ \text{C}$ , конечное давление — атмосферное. Расход воздуха  $Q = 240$  м<sup>3</sup>/ч.

Плотность воздуха, приведенная к нормальным условиям ( $p_a = 101$  кПа,  $t = 0^\circ \text{C}$ ),

$$\rho = \frac{101 \cdot 10^3}{287 \cdot 273} = 1,29 \text{ кг/м}^3.$$

Секундный массовый расход

$$M = \frac{Q\rho}{3600} = \frac{240 \cdot 1,29}{3600} = 860 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с.}$$

Начальная плотность воздуха

$$\rho_0 = \frac{(200 + 101) 10^3}{287 \cdot 293} = 3,5 \text{ кг/м}^3.$$

Из формулы (301) определяем сечение горла сопла:

$$\begin{aligned} \omega_K &= \frac{M}{\Psi_{\text{кр}} \sqrt{\rho_0 \rho_0}} = \frac{860 \cdot 10^{-4}}{0,68 \cdot 10^2 \sqrt{30,1 \cdot 3,5}} = 12,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = \\ &= 12,4 \text{ см}^2, \end{aligned}$$

откуда диаметр горла  $d_K \approx 12$  мм.

Скорость в выходном сечении 2—2 по формуле Сен-Венана (291)  
(для воздуха  $\frac{k}{k-1} = 3,5$ )

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 3,5 \frac{30,1 \cdot 10^4}{3,5} \left[ 1 - \left( \frac{101}{30,1} \right)^{\frac{1}{3,5}} \right]} = 404 \text{ м/с.}$$

Для выходного сечения при  $\rho_2 = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>

$$\omega_2 = \frac{M}{\rho_2 v_2} = \frac{860 \cdot 10^{-4}}{1,2 \cdot 404} = 1,76 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,76 \text{ см}^2,$$

выходной диаметр  $d_2 = 15$  мм.

В приведенном примере не учтены сопротивления, которые при расчетном режиме в сопле Лаваля невелики.

Если действительный перепад давления меньше заданного, но больше критического, возникает скачок уплотнения, связанный с заметной потерей механической энергии и отклонением от изоэнтропического процесса течения.

## § 57

### Затопленные воздушные струи

*Струей* называется поток жидкости, не ограниченный жесткими стенками. Если струя движется в среде, обладающей теми же свойствами, что и сама струя (например, водяная струя в воде, воздушная струя в воздухе), она называется *затопленной*. Затопленная струя может быть *свободной* или *несвободной* в зависимости от того, вытекает ли она в практически безграничное пространство, или в пространство, ограниченное жесткими стенками.

Изучение свойств струй имеет большое значение. В частности, закономерности воздушных затопленных струй используются в вентиляции, при расчете систем отопления с сосредоточенным выпуском воздуха, систем кондиционирования воздуха, воздушных душей и завес, форсунок для сжигания пылевидного и жидкого топлива.

*Свободная затопленная струя*, вытекающая из круглого отверстия или плоской щели. Внешний вид струи хорошо наблюдается в виде клубов дыма, выходящих из трубы в безветренную погоду. Будем считать жидкость несжимаемой (для вентиляционных струй это условие выполняется полностью), а режим течения — турбулентным.

Схема струи, полученная на основании обработки большого числа экспериментальных данных, представлена на рис. 141. Благодаря турбулентному перемешиванию движущихся частиц воздуха с окружающей средой, струя постепенно расширяется, а ее скорости уменьшаются; при этом в процессе турбулентного обмена струя захватывает большую массу воздуха и ее расход возрастает.

Движение свободной затопленной струи, в отличие от случая расширяющейся трубы (диффузора), происходит при *постоянном давлении*, равном давлению окружающей среды. Это означает, что импульс внешних сил на границах струи равен нулю, а секундное количество движения остается неизменным.

Различают два участка струи: *начальный* и *основной*. По оси начального участка скорость неизменна и равна начальной скорости  $u_0$ , а по оси основного участка она непрерывно уменьшается вдоль движения.

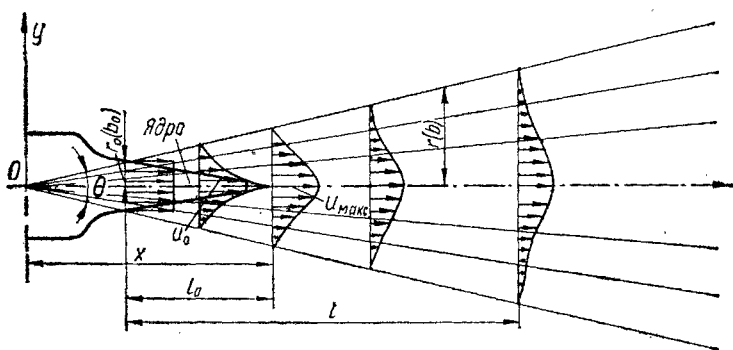
Зона постоянных скоростей на начальном участке образует *ядро* струи (рис. 141). Область возле ядра, где продольные составляющие осредненных скоростей  $u$  уменьшаются от значений  $u_0$  до 0, образует *пограничный слой* (§ 63). Эпюры скоростей на начальном участке имеют форму трапеции. Длина начального участка  $l_{\text{нач}}$  невелика, она составляет приблизительно 10 калибров (для круглой струи под калибром понимают начальный радиус струи  $r_0$ , а для плоской — ее полуширину  $b$ ).

Основной участок струи — это область, где с внутренней стороны пограничный слой смыкается и осевая скорость  $u_{\text{макс}}$  уменьшается вдоль оси.

Граница струи образуется внешней стороной пограничного слоя. Точнее можно сказать, что под внешней границей струи понимается поверхность, во всех точках которой продольная составляющая скорости  $u_x$  пренебрежимо мала. При этом поперечная пульсация  $u_y'$  достаточно велика, так как за ее счет происходит увеличение массы и расширение струи. Угол расширения струи согласно указанной условной границы составляет примерно  $12^\circ$  на одну сторону.

На рис. 142 приведены опытные данные по измерению продольных осредненных скоростей в разных сечениях основного участка струи. Как видно, в разных сечениях поле скоростей непрерывно деформируется: чем дальше сечение

Рис. 141. Схема свободной затопленной струи.



от начала струи, тем ниже и шире эпюра скоростей. Иначе говоря, подтверждается общая картина постепенного расширения струи и уменьшение ее скоростей.

Если эти же данные представить в безразмерных координатах  $\bar{u}/\bar{u}_{\max} = f(y/r)$  для круглой и  $\bar{u}/\bar{u}_{\max} = f(y/b)$  для плоской струи, обнаруживается следующее интересное обстоятельство: все опытные точки для любых сечений основного участка струи укладываются на одну общую кривую (рис. 143). Таким образом, отношение скорости  $u$  к максимальной  $u_{\max}$  в точке, расположенной на относительном расстоянии  $y/r$  ( $y/b$ ) от оси, одинаково для всей струи, т. е. скорости в подобных точках разных сечений струи подобны между собой. Другими словами, закономерность распределения скоростей  $u$ , в частности, эпюры продольных осредненных скоростей имеют одинаковый характер для всех сечений основного участка струи.

Если построить изотахи (линии равных скоростей  $\bar{u}/\bar{u}_{\max}$ ), то получим пучок прямых в области основного участка струи, исходящих из центра  $O$ , называемого полюсом струи (рис. 141). Таким образом, ширина струи увеличивается по длине по линейному закону.

Так как в струе давление постоянное, секундное количество движения массы воздуха во всех сечениях остается

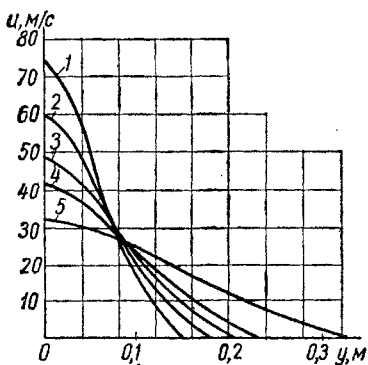
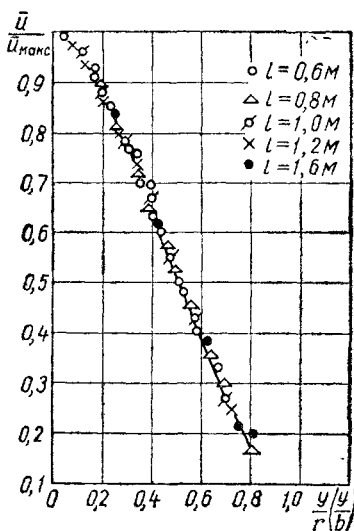


Рис. 142. Эпюры продольных скоростей в разных сечениях струи: 1 —  $l = 0,6$ ; 2 —  $l = 0,8$ ; 3 —  $l = 1$ ; 4 —  $l = 1,2$ ; 5 —  $l = 1,6$  м.

Рис. 143. Безразмерная эпюра осредненных продольных скоростей струи.



без изменения, т. е.

$$\text{КД} = \int_0^{r(b)} \rho \bar{u}^2 d\omega = \text{const.} \quad (309)$$

Вследствие универсальности закона распределения скоростей предыдущее выражение для круглой струи приводится к виду

$$\rho \bar{u}_{\text{макс}}^2 x^2 = \text{const}, \quad (310)$$

а для плоской струи

$$\rho \bar{u}_{\text{макс}}^2 x = \text{const}. \quad (311)$$

В справедливости соотношений (310), (311) легко убедиться, конкретизируя закон распределения скоростей.

Для круглой струи эпюра скоростей хорошо аппроксимируется функцией ошибок, т. е. выражением вида

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_{\text{макс}}} = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{y}{cx} \right)^2}, \quad (312)$$

где  $c$  — некоторая постоянная.

Подставив выражение (312) в уравнение (309), находим

$$\text{КД} = 2\pi \rho \bar{u}_{\text{макс}}^2 cx \int_0^{\infty} e^{-\left( \frac{y}{cx} \right)^2} \frac{1}{2} d \left( \frac{y}{cx} \right)^2 = \pi \rho \bar{u}_{\text{макс}}^2 c^2 x^2,$$

т. е. получаем условие (310).

Для плоской струи хорошие результаты дает функция

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_{\text{макс}}} = \text{ch}^{-2} \left( \frac{y}{cx} \right). \quad (313)$$

Подставив выражение (313) в уравнение (309),

$$\text{КД} = \rho \bar{u}_{\text{макс}}^2 cx \int_0^{\infty} \frac{d \left( \frac{y}{cx} \right)}{\text{ch}^4 \left( \frac{y}{cx} \right)} = \frac{4}{3} \rho \bar{u}_{\text{макс}}^2 c^2 x,$$

т. е. условие (311).

Из уравнений (310) и (311) получаем соответственно для круглой и плоской струй

$$\bar{u}_{\text{макс}} = \text{const}/x; \quad (314)$$

$$\bar{u}_{\text{макс}} = \text{const}/\sqrt{x}. \quad (315)$$

Таким образом, осевая скорость основного участка струи изменяется обратно пропорционально расстоянию (в первой степени для круглой и в степени 1/2 для плоской струи) от полюса.

Выполненный анализ показывает, что характеристики струи могут быть получены с помощью одной константы, определяемой из опыта.

Предложено много способов решения поставленной задачи. Наибольшее распространение получила теория Г. Н. Абрамовича [18], который вывел формулы расчета струи на основе константы  $a$ , названной коэффициентом турбулентной структуры струи. В табл. 4 приведены основные расчетные формулы по Г. Н. Абрамовичу для круглой и плоской струи.

Значение коэффициента турбулентной структуры струи  $a$  зависит от характеристик потока в начальном сечении струи, которые в свою очередь определяются конфигурацией

Таблица 4. Расчетные формулы для круглой и плоской свободной струи по Г. Н. Абрамовичу

Параметры струи	Обозначения	Расчетные формулы струи	
		круглой	плоской
Угол наклона (на одну сторону) условной внешней границы	$\frac{\theta}{2}$	$3,4a$	$2,4a$
Относительная длина начального участка	$\frac{l_0}{r_0}; \frac{l_0}{b_0}$	$\frac{0,67}{a}$	$\frac{1,03}{a}$
Относительный радиус (полуширина)	$\frac{r}{r_0}; \frac{b}{b_0}$	$3,4 \left(0,29 + \frac{al}{r_0}\right)$	$2,4 \left(0,41 + \frac{al}{b_0}\right)$
Относительная осевая скорость на основном участке	$\frac{u_{\max}}{u_0}$	$\frac{0,96}{0,29 + \frac{al}{r_0}}$	$\frac{1,2}{\sqrt{0,41 + \frac{al}{b_0}}}$
Относительный расход на основном участке	$\frac{Q}{Q_0}$	$2,18 \left(0,29 + \frac{al}{r_0}\right)$	$1,2 \sqrt{0,41 + \frac{al}{b_0}}$

Примечание. В этих формулах длина  $l$  означает расстояние от начала струи, которая в общем случае не совпадает с расстоянием  $x$  от полюса  $O$ .



начального поля осредненных скоростей. В равномерном начальном поле скоростей (рис. 140)  $a = 0,066$  для круглой и  $a = 0,09$  — для плоской струи. При этом угол наклона внешней условной границы  $\Theta/2$  соответственно равен  $13^\circ$  и  $15^\circ$  для круглой и плоской струи. Соответственно длина начального участка  $l_0$  равна  $10r_0$  и  $15b_0$ . При развитой начальной эпюре скоростей, свойственной равномерному турбулентному потоку в цилиндрической трубе,  $a = 0,07$ .

Искусственной турбулизацией потока в начальном сечении (с помощью специальных лопаток или решеток) можно добиться значительного увеличения коэффициента  $a$ .

В ряде случаев, например при расчете струй для кондиционирования воздуха, необходимо определить скорости на таком относительном расстоянии от начального сечения, при котором длина начального участка не имеет значения. Тогда формулы значительно упрощаются. Для круглой и плоской струи относительные осевые скорости соответственно равны:

$$\frac{\bar{u}_{\max}}{u_0} = \frac{0,96r_0}{al} = \frac{0,48d_0}{al};$$

$$\frac{\bar{u}_{\max}}{u_0} = \frac{1,2}{\sqrt{al/b_0}}.$$

При  $a = 0,07$  применяемые в инженерной практике формулы примут вид:

для круглой струи

$$\frac{\bar{u}_{\max}}{u_0} = 6,8 \frac{d_0}{l};$$

для плоской струи

$$\frac{\bar{u}_{\max}}{u_0} = 4,5 \sqrt{\frac{b_0}{l}} = 3,2 \sqrt{\frac{2b_0}{l}}.$$

Эти формулы дают ошибку менее 10% при  $l/d_0 > 20$  и  $2b_0/l > 15$ .

**Пример 35.** Определить отношение осевой и начальной скорости воздушной струи, вытекающей из трубы диаметром  $d_0 = 50$  мм, на расстоянии  $l = 2$  м от ее начала.

Относительное расстояние

$$\frac{l}{d_0} = \frac{2}{0,05} = 40 > 20.$$

$$\frac{\bar{u}_{\text{макс}}}{u_0} = 6,8 \frac{d_0}{l} = 6,8 \frac{0,05}{2} = 0,169.$$

По полной формуле (табл. 4), учитывая, что  $r_0 = 0,025 \text{ м}$ ,

$$\frac{\bar{u}_{\text{макс}}}{u_0} = \frac{0,96}{0,29 + 0,07 \frac{2}{0,025}} = 0,163.$$

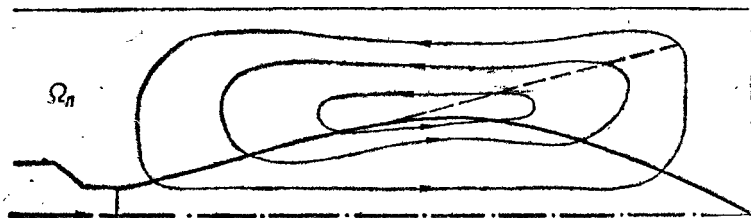
Расхождение составляет  $\frac{0,169 - 0,163}{0,163} \cdot 100 \approx 2\%$ .

Рассмотренное движение свободной струи предусматривает достаточно большую область растекания. В вентилируемых помещениях, когда размеры струи сопоставимы с самим помещением (иначе говоря, когда струя и объем помещения есть величины одного порядка), струя не свободна.

Движение струи в ограниченном пространстве существенно отличается от движения свободной струи.

Несвободная струя, в отличие от свободной, приводит в движение частицы окружающей среды, образуя два противоположно направленных потока: внутренний поток (или собственно струю) и внешний встречный поток. Схематически движение струи в ограниченном пространстве, вытекающей в тупик, показано на рис. 144. Струя развивается по закону свободной только в непосредственной близости от начала, где ее сечения малы по сравнению с размерами самого пространства. Затем струя изменяет свой характер: замедляется приращение площади ее поперечного сечения и расхода. Активная часть струи увеличивается, пока не займет примерно 40% площади поперечного сечения самого пространства. После этого струя начинает угасать: умень-

Рис. 144. Схема затопленной струи в ограниченном пространстве.



шаются количество движения, расход, площадь поперечного сечения и скорость. Развитие такой струи в основном определяется параметром  $\sqrt{\Omega}$ , где  $\Omega$  — площадь поперечного сечения помещения. При  $x/\sqrt{\Omega} = 0,2$  сечение струи достигает максимальных размеров, при  $x/\sqrt{\Omega} = 0,4 \div 0,5$  струя практически угасает.

Если температура струи и окружающей среды одинакова, струя называется *изотермической*. Такие струи и рассматривались выше. Однако, когда в вентилируемое помещение подается нагретый или охлажденный воздух, мы сталкиваемся с распределением поля температур и его влиянием на саму струю.

В *слабонейзотермических струях* поля температур, как и поля скоростей, подобны и описываются зависимостями, аналогичными приведенным выше в табл. 4. Условием, определяющим *нейзотермичность* струи, служит критерий Архимеда  $Ag$  (см. гл. IX), характеризующий соотношение между силами инерции и выталкивающими силами, которые проявляются вследствие разности плотности самой струи и окружающей среды. Исследованиями установлено, что при  $Ag < 0,001$  влияние архимедовых сил совсем мало и кинематика такой струи практически не отличается от *изотермической*. Поэтому такая струя и называется *слабонейзотермической*. Подобие поля температур, как и распределение концентрации примесей, тут обусловлено аналогией выражений для коэффициентов турбулентного обмена, теплопроводности и диффузии (188), (190), (191).

В *сильнонейзотермических струях*, когда разность температур приточного воздуха и воздуха в помещении значительна, вследствие заметного действия архимедовых сил струя отклоняется от своего первоначального направления, причем по мере ее расширения величина отклонения возрастает. Нагретая струя, плотность которой меньше, вытесняется вверх более холодным воздухом помещения. Холодная струя в теплом окружающем пространстве, наоборот, опускается вниз. Такие струи также называют *воздушными фонтанами*. Расчет фонтанов рассматривается в курсах вентиляции.

## Глава VII

### ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ

#### § 58

#### Общие положения

Трубопроводы служат для транспортирования различных жидкостей и газов на большие и малые расстояния и нашли исключительно широкое применение. Гидравлический расчет трубопроводов базируется на основных уравнениях гидравлики.

Сначала разберем некоторые общие положения, а затем остановимся на особенностях расчета водопроводных, газопроводных и воздухопроводных систем.

**Основные зависимости.** Для последующего анализа упростим исходное уравнение энергии (Бернулли) в форме напоров (270).

Прежде всего местное сопротивление будем характеризовать некоторой эквивалентной длиной трубопровода  $l_3$ . Из формул Дарси (194) и Вейсбаха (239) для определения потерь энергии по длине и местных потерь

$$\lambda \frac{l_3}{d} = \zeta,$$

откуда

$$l_3 = d \frac{\zeta}{\lambda}.$$

Таким образом, при необходимости можно определить  $l_3$ , если известны  $\zeta$ ,  $\lambda$  и  $d$ . В некоторых справочниках приводятся значения эквивалентных длин для отдельных видов местных сопротивлений.

Используя понятие приведенной длины трубопровода, можно написать

$$l_{пр} = l + \Sigma l_3 = \left(1 + \frac{\Sigma l_3}{l}\right) l = bl, \quad (316)$$

где  $b = 1 + \frac{\Sigma l_3}{l}$  — надбавка к потерям по длине; в зависимости от назначения трубопроводов эта величина может изменяться в широких пределах. Для длинных трубопроводов, где основное значение имеют потери по длине,  $b = 1,3 \div 1,1$ . Для коротких трубопроводов, где потери по длине и местные потери одного порядка, ориентировочно  $b > 1,5$ .

Преобразуем формулу Дарси (194), заменив скорость расходом, поделённым на площадь поперечного сечения трубы:

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{Q^2}{2g \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)^2} = A Q^2 l, \quad (317)$$

где *удельное сопротивление трубопровода*

$$A = \frac{16\lambda}{2g\pi^2 d^5} \text{ с}^2/\text{М}^6. \quad (318)$$

Смысл введения понятия удельного сопротивления сводится прежде всего к упрощению вычислительных операций. Кроме того, формула для потерь по длине (317) по своей структуре аналогична закону Ома для электрической цепи, что дает возможность рассчитывать трубопроводные сети методом электро моделирования. Наконец, эта формула удобна для анализа работы сети совместно с гидравлическими машинами, приводящими жидкость в движение.

Выражение удельного сопротивления (318) показывает, что потеря энергии по длине изменяется приблизительно обратно пропорционально пятой степени диаметра трубы.

С учетом выражений (316) и (317), а также пренебрегая скоростным напором  $\frac{v^2}{2g}$ , уравнение энергии (270) примет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \Sigma A Q^2 \cdot l_{\text{пр.}}$$

Вспоминая из § 11, что сумма  $z + \frac{p}{\rho g}$  обозначает пьезометрический напор  $H_p$ , последнее уравнение перепишем так:

$$H_{p_1} = H_{p_2} + \Sigma A Q^2 \cdot l_{\text{пр.}}$$

или

$$H_{p_1} - H_{p_2} = \Sigma A Q^2 \cdot l_{\text{пр.}} \quad (319)$$

Последнюю зависимость можно сформулировать следующим образом: *разность пьезометрических напоров двух точек трубопровода равна сумме потерь напора между этими точками.*

Если известно удельное сопротивление  $A$  (т. е.  $d$  и  $\lambda$ ) и приведенная длина трубопровода  $l_{\text{пр.}}$ , то из уравнения (319)

непосредственно определяется расход при заданном  $\Delta H = H_{p_1} - H_{p_2}$  или перепад  $\Delta H$  при заданном расходе  $Q$ . При проектировании ставится другая задача: расход представляет собой технологическую величину, которая задана, а определению подлежат две величины — проходное сечение трубопровода (для круглой трубы — диаметр) и требуемая разность пьезометрических напоров (давлений).

Для решения второй задачи уравнения (319) недостаточно, необходимо еще одно условие. Таким добавочным условием в первую очередь являются технико-экономические соображения, а также некоторые другие факторы, специфические для данного вида трубопроводов. Как показывает опыт проектирования трубопроводных систем, скорость течения жидкости в них не может изменяться в широких пределах. При малых скоростях неоправданно возрастают размеры трубопровода и связанный с этим перерасход материала, а большие скорости лимитируются большими потерями энергии, что ведет к излишним затратам на электроэнергию. Для каждой системы существует оптимальное решение задачи, т. е. такая скорость, при которой получаются минимальные затраты на строительство и эксплуатацию системы.

Перепишем уравнение расхода (126) в виде

$$\omega = Q/v, \quad (320)$$

или, учитывая, что для круглой трубы  $\omega = \pi d^2/4$ ,

$$d = \sqrt{4/\pi} \sqrt{Q/v} = 1,13 \sqrt{Q/v}, \quad (321)$$

где  $v$  — скорость течения, обусловленная экономическими или другими факторами.

Зная технологическую величину расхода  $Q$  и задавая скорость  $v$ , находим по формуле (321) значение диаметра  $d$  и подбираем его ближайшее стандартное значение. Для каналов некруглого сечения согласно уравнению (320) таким же образом подбираем стандартные размеры проходного сечения. Далее, получив размеры трубопровода, по уравнению (319) находим требуемую разность пьезометрических напоров (давлений).

**Простой трубопровод.** *Простым* называется трубопровод, не имеющий ответвлений или присоединений; всякие другие трубопроводы относят к категории *сложных*.

Для простого трубопровода, состоящего из нескольких последовательно соединенных участков разного диаметра,

но с постоянным расходом, уравнение (319) запишется так:

$$H_{p_1} - H_{p_2} = Q^2 \Sigma A l.$$

Для одиночной линии, имеющей один диаметр,

$$H_{p_1} - H_{p_2} = A Q^2 l. \quad (322)$$

**Последовательное и параллельное соединение.** При *последовательном соединении* сложный трубопровод состоит из одной линии, но его участки имеют разные расходы и диаметры. Расчетным здесь будет основное уравнение (319).

При *параллельном соединении* (рис. 145) пьезометрический напор в узловых точках *A* и *B* одинаков для всех участков. Поэтому для каждого участка можно написать

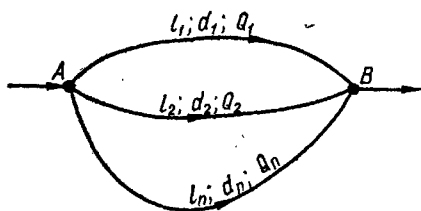
$$\Delta H_{AB} = A_1 Q_1^2 l_1; \quad \Delta H_{AB} = A_2 Q_2^2 l_2; \quad \Delta H_{AB} = A_n Q_n^2 l_n.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q_1}{Q_2} &= \sqrt{\frac{A_2 l_2}{A_1 l_1}}; \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \frac{Q_1}{Q_n} &= \sqrt{\frac{A_n l_n}{A_1 l_1}} \end{aligned} \right\} \quad (323)$$

т. е. расходы на участках распределяются обратно пропорционально корню квадратному из их сопротивлений.

Кроме этого, расход до разветвления (или после соединения) равен сумме расходов отдельных участков:



$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n. \quad (324)$$

Совместное решение уравнений (322), (323) дает возможность найти расходы на участках при заданных их размерах и общем расходе.

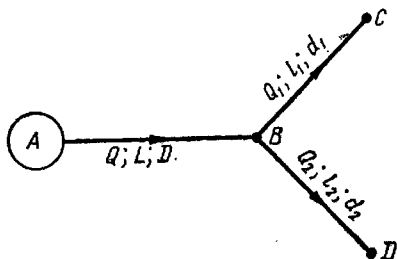


Рис. 145. Параллельное соединение трубопроводов.

Рис. 146. Разветвление.

**Простое разветвление** представляет собой схему так называемой «вилки» (рис. 146). В отличие от параллельного соединения напоры в конечных точках  $C$  и  $D$  могут быть неодинаковы. Такая задача решается системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} H_A - H_B &= A Q^2 l; \\ H_B - H_C &= A_1 Q_1^2 l_1; \\ H_B - H_D &= A_2 Q_2^2 l_2; \\ Q &= Q_1 + Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (325)$$

Если заданы размеры трубопроводов и начальный и конечные напоры, с помощью системы (325) методом подбора определяются расходы на участках и напор в точке  $B$ .

Однако при проектировании системы заданы расходы, а подлежат определению проходные сечения трубопроводов. Расчет ведут следующим образом.

Одна из трасс системы (например,  $ABC$ ) считается главной и ее расчет производится как для случая последовательного соединения. Проходное сечение участка  $BD$  подбирается в соответствии с известным напором (давлением) в точке  $B$ .

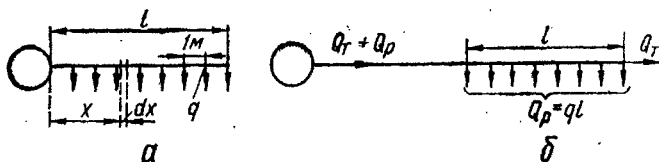
Дальнейшее развитие схемы «вилки» с большим числом ответвлений приводит к *тупиковому* трубопроводу. Расчет ведется методом выбора магистрали с последующей увязкой остальных участков (ответвлений). Пример такого расчета см. в § 61.

Параллельное соединение, состоящее из двух участков, является примером простейшей *кольцевой* сети, которая обеспечивает надежность работы системы. Расчет многокольцевой сети сводится к решению большого числа нелинейных уравнений (в частности, квадратных), что требует применения ЭВМ или использования специальных приемов расчета. Этот вопрос разбирается в специальных курсах.

**Непрерывная раздача по пути.** Предположим, что расход равномерно разбирается по пути движения (рис. 147).

Рис. 147. Трубопровод с непрерывной раздачей вдоль пути:

$a$  — без транзитного участка;  $b$  — с транзитным участком.





К такой схеме приближается работа магистрали газовой сети низкого давления вдоль улицы города при правильной планировке поперечных улиц (переулков), а также наружного водопровода.

Возьмем элементарный участок  $dx$  на расстоянии  $x$  от начала трубопровода. Пусть разбор расхода, приходящийся на 1 м длины,  $q = Q/l$ . Тогда расход через элементарный участок

$$Q_x = Q - qx,$$

а потеря напора на этом участке

$$dh_l = A Q_x^2 dx = A (Q - qx)^2 dx,$$

откуда потеря напора по всей длине трубопровода

$$\begin{aligned} h_l &= \int_0^l dh_l = A \int_0^l (Q - qx)^2 dx = \\ &= A (Q^2 l - Qql^2 + q^2 l^3/3) = A Q^2 l/3. \end{aligned} \quad (326)$$

Сравнив полученный результат с формулой (317), убеждаемся, что при равномерной раздаче *потеря энергии в трубопроводе в три раза меньше*, чем в случае транзитного расхода.

На практике обычно встречается смешанный случай, когда часть расхода ( $Q_T$ ) проходит транзитом, а другая ( $Q_p$ ) отбирается вдоль пути (рис. 147, б). В этом случае потеря энергии определяется по формуле

$$h_l = A Q_{\text{расч}}^2 l, \quad (327)$$

где расчетный расход

$$Q_{\text{расч}} = \sqrt{Q_T^2 + Q_p Q_T + Q_p^2/3}. \quad (328)$$

**Изменение пропускной способности трубопровода при эксплуатации.** При проектировании трубопроводов гидравлическое сопротивление считается неизменным в течение их работы. Однако в действительных условиях эксплуатации сопротивление трубопроводов в большинстве случаев возрастает, что ведет к увеличению потерь энергии и при данном перепаде напоров (давлений) к уменьшению расхода, т. е. к уменьшению пропускной способности. Это связано с увеличением шероховатости стенок вследствие коррозии и инкрустации.

Увеличение шероховатости трубопроводов в процессе

их эксплуатации можно оценить [1] формулой

$$k_t = k_0 + \alpha t,$$

где  $k_0$  — эквивалентная шероховатость, мм, для новых труб;  $k_t$  — эквивалентная шероховатость через  $t$  лет эксплуатации;  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий степень возрастания шероховатости, мм/год.

Значение коэффициента  $\alpha$  зависит от материала трубы, рода жидкости и условий работы системы.

По данным работы [1] для стальных труб, транспортирующих природную воду, в зависимости от степени минерализации  $\alpha = 0,02 \div 1$ . Для воздухопроводов в зависимости от условий производства эта величина изменяется в пределах  $0,4 \div 6$ . Для газопроводов можно принимать  $\alpha = 0,05$ .

## § 59

### Гидравлический удар

Под гидравлическим ударом понимают резкое повышение (или понижение) давления жидкости в трубопроводе, вызванное внезапным изменением скорости течения. Явление гидравлического удара свойственно только каплевым жидкостям, которые обладают малой деформацией сжатия. В газах резкое изменение скорости также вызывает изменение давления, однако вследствие значительной сжимаемости и отличия молекулярной структуры газа явление носит другой характер.

Гидравлический удар в водопроводных линиях возникает при быстром закрытии (или открытии) запорных приспособлений, например крана, обратного клапана при выключении электродвигателя насоса. Его легко обнаружить непосредственно по глухому звуку и сотрясению трубы. Повышение давления при гидравлическом ударе иногда приводит даже к разрыву стенок трубопровода. Физическое явление объясняется инерционными усилиями массы жидкости в трубе при резком изменении скорости во времени.

Рассмотрим гидравлический удар на примере простейшей схемы (рис. 148, а). Пусть в резервуаре  $A$  напор воды будет постоянным независимо от изменения скорости течения в трубе. При полностью открытом кране  $B$  в трубопроводе устанавливается скорость  $v$ . Закроем быстро кран  $B$ . Тогда течение воды в трубе прекратится и самопишущий с малой инерцией манометр  $P$  зарегистрирует в данной точке

сечения трубы скачок давления, который затухает с течением времени в виде некоторого колебательного процесса (рис. 148, б). Гидравлический удар — это явление, быстро протекающее во времени, и, согласно определению, данному в § 17, относится к категории неустановившегося движения, для изучения которого обычное уравнение Бернулли неприменимо.

Теоретическое обоснование явления гидравлического удара и метод его расчета впервые был дан Н. Е. Жуковским в 1898 г.

Предположим, что кран *B* (рис. 148, а) закрывается мгновенно. Движение воды, очевидно, при этом прекратится, а давление повысится. Однако переход от движения к покою и повышение давления в трубе произойдет по всей массе жидкости не мгновенно, а через некоторый промежуток времени. Этот процесс произошел бы внезапно по всей массе жидкости лишь в том случае, если жидкость была бы абсолютно несжимаема, а стенки трубы абсолютно недеформирующимися. В рассматриваемом случае незначительная сжимаемость воды и малая деформация стенок трубы имеет

существенное значение.

Обозначим скорость распространения перехода от движения к покою, т. е. волны повышения давления (ударной волны), возникающей в момент закрытия крана в конце трубы, через *c*. За элементарный промежуток времени *dt* повышение давления распространится на длину *c dt* (рис. 148, в). Повышение давления легко можно рассчитать по за-

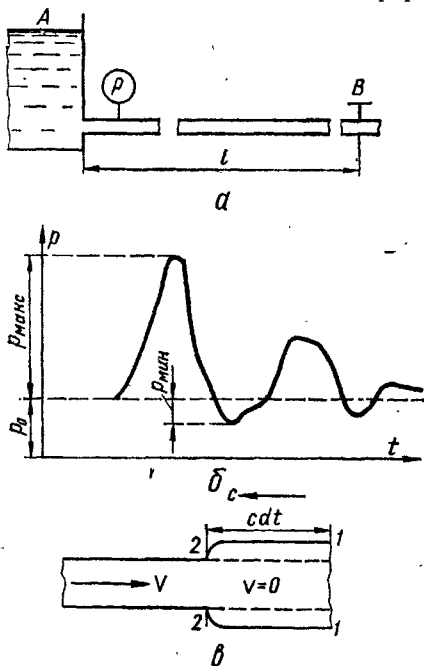


Рис. 148. К изучению гидравлического удара:

*a* — схема установки; *b* — изменение давления во времени при гидравлическом ударе; *c* — к выводу формулы для скорости распространения гидравлического удара.

кону сохранения количества движения, применительно к отсеку жидкости, заключенной в объеме 1—2. Количество движения в этом объеме до прохождения волны повышения давления равно  $\rho c dt \omega$ , где  $\rho c dt \omega$  — масса жидкости в объеме 1—2, а  $v$  — скорость установившегося течения в трубе до закрытия крана. После прохождения ударной волны скорость в выделенном отсеке падает до нуля; соответствующий импульс силы будет  $\Delta p dt \omega$ . Таким образом,

$$\Delta p dt \omega = \rho c dt \omega v,$$

откуда

$$\Delta p = \rho c v. \quad (329)$$

Формула (329) позволяет определить *повышение давления* в трубопроводе при мгновенном закрытии запорного приспособления, если известна скорость распространения гидравлического удара  $c$ .

Выведем выражение *скорости гидравлического удара*. На участке трубы длиной  $c dt$  (рис. 148, в) масса жидкости до прохождения волны гидравлического удара составит  $c dt \rho \omega$ , а после прохождения волны благодаря сжатию жидкости и расширению трубы —  $c dt (\rho + d\rho) (\omega + d\omega)$ . Их разность, очевидно, равна массе жидкости  $\rho v \omega dt$ , протекающей в трубе до гидравлического удара за тот же элементарный промежуток времени. Следовательно,

$$(\rho + d\rho) (\omega + d\omega) c dt + \rho \omega c dt = \rho v \omega dt.$$

Раскрыв скобки, приведя подобные члены и опустив члены третьего порядка малости, находим

$$\rho v \omega = \rho c d\omega + \omega c d\rho,$$

или после деления на  $\rho \omega$

$$v = c \left( \frac{d\omega}{\omega} + \frac{d\rho}{\rho} \right).$$

Полученное выражение характеризует собой закон сохранения массы при гидравлическом ударе. Приведем его к конечному виду, учитывая соотношения механики упругих тел.

На основании закона Гука для объемной деформации жидкости можно написать

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{E_{ж}},$$

где  $\Delta p$  — повышение давления при гидравлическом ударе;  
 $E_{ж}$  — модуль упругости жидкости.

Аналогично при линейной деформации трубы

$$\frac{dD}{D} = \frac{\Delta\sigma}{E_{тр}},$$

где  $E_{тр}$  — модуль упругости материала трубы;  $dD$  — линейная деформация стенок трубы;  $\Delta\sigma$  — напряжения.

Линейную деформацию стенок можно выразить через деформацию площади поперечного сечения трубы:

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{d(\pi D^2/4)}{\pi D^2/4} = \frac{2dD}{D}.$$

Исходя из двух последних выражений и учитывая формулу (51) для определения напряжений в стенках цилиндрических резервуаров, находящихся под внутренним давлением, получаем

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{2dD}{D} = \frac{2\Delta\sigma}{E_{тр}} = \frac{2\Delta p D}{2\delta E_{тр}} = \frac{\Delta p D}{E_{тр} \delta}.$$

Подставив полученные выражения в уравнение скорости, находим

$$v = c \left( \frac{\Delta p}{E_{ж}} + \frac{\Delta p D}{E_{тр} \delta} \right) = c \Delta p \left( \frac{1}{E_{ж}} + \frac{D}{\delta} \cdot \frac{1}{E_{тр}} \right).$$

Окончательное выражение скорости распространения ударной волны

$$c = \frac{\sqrt{E_{ж}/\rho}}{\sqrt{1 + (D/\delta)(E_{ж}/E_{тр})}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + (D/\delta)(E_{ж}/E_{тр})}}, \quad (330)$$

где  $c_0 = \sqrt{E_{ж}/\rho}$  — скорость распространения звука в жидкости; для воды  $c_0 = 1450$  м/с.

Отношение  $E_{ж}/E_{тр}$  существенно зависит от упругих свойств материала водопроводных труб, а это соответственным образом отражается на величине  $c$ :

Трубы	Стальные	Чугунные	Асбестоцементные	Пластмассовые
Приблизительное отношение $E_{ж}/E_{тр}$	0,01	0,02	0,11	0,54
Скорость $c$ при $D/\delta = 10$ м/с	1340	1300	1000	570

Как видим, скорость распространения ударной волны в стали и чугуне мало отличается от скорости распростра-

нения звука в воде; в пластмассовых трубах, для которых  $E_{\text{тр}}$  мало, эта скорость резко снижается.

Мы рассмотрели так называемый *прямой гидравлический удар*, когда время закрытия крана  $T$  меньше времени, в течение которого ударная волна, возникшая у крана, достигнет напорного резервуара, отразится от него и вернется назад; это время

$$t = 2l/c,$$

где  $l$  — длина трубопровода, называемая *фазой удара*. Следовательно, для прямого удара  $T < t$ .

Если время закрытия запорного приспособления больше фазы удара, т. е.  $T > t$ , возникает *непрямой гидравлический удар*, сила которого меньше прямого.

Повышение давления при непрямом гидравлическом ударе может быть оценено приближенно, если считать, что его сила уменьшается пропорционально увеличению времени закрытия запорного органа  $T$  по сравнению с фазой удара  $t = 2l/c$ , т. е.

$$\Delta p_{\text{непр}} = \Delta p_{\text{пр}} \frac{t}{T} = \Delta p_{\text{пр}} \frac{2l}{cT}.$$

Подставив в последнее соотношение вместо  $\rho_{\text{пр}}$  его выражение из уравнения (329), находим\*

$$\Delta p_{\text{непр}} = \frac{\rho c v \cdot 2l}{cT} = \frac{2\rho v l}{T}. \quad (331)$$

Итак, анализируя формулы (329), (330), (331), приходим к выводу, что эффект гидравлического удара зависит от упругих свойств жидкости и материала, относительной толщины стенок, длины трубопровода, времени закрытия запорного органа и скорости установившегося течения до гидравлического удара.

**Пример 36.** Определить повышение давления в водопроводной линии длиной  $l = 1000$  м при продолжительности закрытия запорного приспособления  $T_1 = 1$  и  $T_2 = 5$  с. Диаметр трубы  $D = 100$  мм, толщина стенок  $\delta = 7$  мм, материал — сталь. Скорость течения до гидравлического удара  $v = 1$  м/с.

\* Формула (331) справедлива при условии, что изменение проходного сечения запорного органа во времени происходит по линейному закону.

Прежде всего определяем скорость распространения ударной волны по формуле (330):

$$c = \frac{1450}{\sqrt{1 + \frac{100}{7} \cdot 0,01}} = 1330 \text{ м/с.}$$

Вычисляем фазу удара:

$$t = \frac{2 \cdot 1000}{1330} \approx 1,5 \text{ с.}$$

При закрытии запорного приспособления за 1 с удар прямой; в этом случае повышение давления по формуле (329)

$$\Delta p_{\text{пр}} = 1000 \cdot 1330 \cdot 1 = 1,33 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,33 \text{ МПа.}$$

Во втором случае при  $T = 5$  с удар не прямой. По формуле (331)

$$\Delta p_{\text{непр}} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 1 \cdot 1000}{5} = 4 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,4 \text{ МПа.}$$

Таким образом, сила удара во втором случае уменьшилась в 4 раза.

Приведенный пример подчеркивает влияние времени закрытия запорного органа на величину гидравлического удара. Поэтому самым простым и действенным средством против гидравлического удара является медленное закрытие (открытие) запорного органа. Этому требованию вполне удовлетворяют вентили различных конструкций и задвижки, менее всего — краны и клапаны. На насосных станциях, где имеется опасность возникновения гидравлического удара при отключении насосного агрегата в связи с аварией электросети, необходимы специальные мероприятия по борьбе с гидравлическим ударом.

В водопроводах внутри зданий, где длины участков невелики и фаза удара незначительна, но есть быстродействующие запорные приспособления (краны), возможно образование непрямого гидравлического удара. Поскольку сила его прямо пропорциональна скорости течения до удара, последнюю здесь ограничивают значением 2,5 м/с.

## § 60

### Расчет трубопроводов в квадратичной области сопротивления

Расчет трубопроводов в квадратичной области сопротивления рассмотрим на примере расчета водопроводных линий.

Работа водопроводных линий в большинстве случаев

приближается к шероховатой (квадратичной) области сопротивления. Для таких трубопроводов при данных диаметре, материале, технологии изготовления и условиях эксплуатации значения коэффициента гидравлического трения  $\lambda$  и удельного сопротивления  $A$  являются вполне определенными. Для водопроводных линий с различными трубами составлены таблицы значений удельного сопротивления  $A$ . Приведем полученные по формуле Ф. А. Шевелева (236) значения удельного сопротивления стальных труб (ГОСТ 3262—75), используемых для водопровода внутри здания:

Диаметр трубы $d$ , мм	10	15	20	25	32	40	50
$A$ , $\text{с}^2/\text{дм}^5$	31,4	8,97	1,66	0,428	0,092	0,045	0,011
Диаметр трубы $d$ , мм	70	80	90	100	125	150	
$A$ , $\text{с}^2/\text{дм}^5$	0,003	0,00117	$529 \cdot 10^{-6}$	$281 \cdot 10^{-6}$	$86 \cdot 10^{-6}$	$34 \cdot 10^{-6}$	

Обращает внимание резкое увеличение значений  $A$  с уменьшением диаметра, что вытекает из характера формулы (318) для удельного сопротивления.

Согласно СНиП II-31-74, водопроводные трубы могут работать не только в шероховатой, но и в переходной области сопротивления, где значение  $A$  зависит не только от шероховатости, но и от числа Рейнольдса, т. е. от скорости. При скоростях  $v < 1,2$  м/с и температуре воды  $t = 10^\circ \text{C}$  рекомендуется вводить такие поправки, увеличивающие значения  $A$  и подсчитанные на основе формул Ф. А. Шевелева (236), (237):

Скорость, м/с	1,2	1	0,8	0,6	0,4	0,2
Поправка $k$	1	1,03	1,06	1,11	1,2	1,41

Скорости в водопроводных линиях обычно берут в пределах  $1 \div 1,5$  м/с. Следовательно, поправка на отклонение сопротивления стальных водопроводных труб от квадратичного закона совсем незначительна. Можно сказать, что практически эти трубы работают в шероховатой области сопротивления.

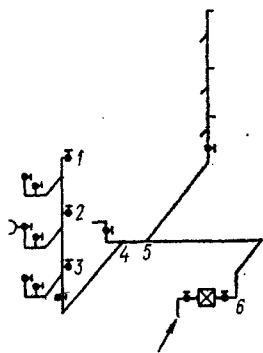


Рис. 149. Схема водопровода внутри здания.



Для асбестоцементных труб, работающих в переходной области сопротивления, или пластмассовых труб, относящихся к гидравлически гладким, величина  $A$  существенно зависит от скорости течения и для ее определения нужны развернутые таблицы или специальные номограммы.

Расчет водопроводных линий производится непосредственно по формулам, приведенным в предыдущем параграфе, поскольку они записаны в форме напоров и необходимые значения  $A$  берутся из табл. 3.

**Пример 37.** Подобрать диаметры водопроводной линии 1—2—3—4—5—6 внутри здания (рис. 149), если заданы расходы на ответвлениях и известны длины участков. Высота стояка  $h = 10$  м. Рабочий напор, обеспечивающий минимально допустимый расход прибора (свободный напор),  $h_0 = 2$  м. Напор магистрали наружного водовода  $H_0 = 18$  м.

Для данной схемы сложного трубопровода с последовательным соединением участков уравнение (319) запишется так:

$$\Delta H \geq b \Sigma A Q^2 l + h_{\text{вод}},$$

где  $\Delta H = H_0 - (h + h_0) = 18 - (10 + 2) = 6$  м — разность пьезометрических напоров между начальной точкой  $b$  (перед водомером) и последней точкой  $l$ ;  $b$  — надбавка на местные сопротивления, ее значение принимается одинаковым для всех участков:  $b = 1,3$ ;  $h_{\text{вод}}$  — сопротивление водомера, принятое равным 1 м.

Таким образом, расчетное условие для данного примера примет вид

$$6 > 1,3 \Sigma A Q^2 l - 1, \text{ или } \Sigma A Q^2 l < 3,8 \text{ м.}$$

При назначении диаметров в первом приближении пользуемся формулой (321), задав скорость по нижнему пределу, т. е. порядка 1 м/с, поскольку заданная разность пьезометрических отметок невелика.

Расчет ведем с конца линии. Результаты расчета сведены в табл. 5.

**Таблица 5.** Расчет последовательного соединения водопровода внутри здания

Расходы на ответвлениях $Q_{от}$ , л/с	Расчетный участок	Длина участка $l$ , м	Расход на участке $Q$ , л/с	Диаметр трубы $d$ , мм	Скорость $v$ , м/с	Удельное сопротивление $A$ , с <sup>2</sup> /л <sup>2</sup>	Потеря напора на участке $h_l$ , м
0,08	1—2	2	0,08	10	1,02	31,4	0,63
0,1	2—3	2	0,18	15	1,02	8,97	0,58
0,12	3—4	3	0,3	20	0,96	1,66	0,75
0,2	4—5	8	0,5	25	1,02	0,428	0,86
0,3	5—6	12	0,8	32	1	0,092	0,7

Как следует из таблицы, выбранные диаметры удовлетворяют требованиям, поставленным в задаче, так как суммарная потеря напора на линии  $\Sigma h_l = 3,52$  м оказалась меньше заданной 3,8 м.

## § 61

### Расчет трубопроводов в неквадратичной области сопротивления

Для трубопроводов, работающих в неквадратичной (переходной) области сопротивления, применение понятия удельного сопротивления  $A$  нецелесообразно, поскольку в этом случае требуется существенная поправка на скорость течения. Соответственно изменяется методика расчета. Разберем эту методику на примере газопроводов низкого давления и воздухопроводов.

**Газопроводы низкого давления** служат для транспортирования газа от городских распределительных пунктов (ГРП) к потребителям и его раздачи внутри зданий. Манометрическое давление здесь не более 2—3 кПа (200—300 мм вод. ст.). Поэтому газопроводы работают при малых перепадах давлений и движущийся в них газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость и применять уравнение энергии (Бернулли) в форме давлений (270).

Газопроводы, как и водопроводы, относятся к категории длинных трубопроводов, где местные потери учитываются соответствующей надбавкой к потерям по длине.

Плотность газа принимается при нормальных условиях ( $p_a = 101\,325$  Па,  $t = 0^\circ$  С). Для природного газа по уравнению состояния (9)

$$\rho_0 = \frac{p_a}{RT_0} = \frac{101\,325}{520 \cdot 273} = 0,71 \text{ кг/м}^3. \quad (332)$$

Пренебрегая динамическим давлением, которое здесь весьма незначительно, исходное уравнение энергии (270) переходит в уравнение такого вида:

$$\rho_0 g z_1 + p_1 = \rho_0 g z_2 + p_2 + \sum \lambda \frac{l_{\text{пр}}}{d} \frac{\rho_0 v^2}{2}, \quad (333)$$

или, вспоминая прием перехода к манометрическим давлениям [см. уравнение (271)],

$$g(\rho_n - \rho_0)H + p_{1\text{ман}} = p_{2\text{ман}} + \sum \lambda \frac{l_{\text{пр}}}{d} \frac{\rho_0 v^2}{2}. \quad (334)$$

Первый член левой части уравнения, учитывающий гравитационное давление вследствие разности плотностей

наружного воздуха  $\rho_n$  и более легкого природного газа  $\rho_0$ , принимают во внимание только при расчете газовых стояков высотных зданий и при резко выраженном переменном рельефе местности. Без этого члена уравнение (334) запишется так:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \sum \lambda \frac{l_{\text{пр}}}{d} \frac{\rho_0 v^2}{2}, \quad (335)$$

т. е. аналогично уравнению (319) в форме напоров.

Для простого трубопровода

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho_0 v^2}{2}. \quad (336)$$

В газопроводных линиях низкого давления перепад давления обычно задан. Поэтому при известном технологическом расходе и заданной длине линии задача гидравлического расчета простого трубопровода однозначно решается с помощью уравнения (336). Для облегчения расчетов СНиПом рекомендуется номограмма, приведенная на рис. 150, где по оси ординат отложены расходы  $Q$ , м<sup>3</sup>/ч, а по оси абсцисс — потеря давления на единицу длины  $R_l = \Delta p/l$ , Па/м, построенная на основе формулы Дарси для удельной потери давления:

$$R_l = \frac{\Delta p}{l} = \frac{\lambda}{d} \frac{\rho_0 v^2}{2}. \quad (337)$$

Если заменить скорость через расход, поделенный на сечение трубы, формула примет вид

$$R_l = \lambda \frac{b}{d} \frac{16\rho_0 Q_0^2}{2\pi^2 d^4} = 0,81 \frac{Q_0^2}{d^5} \rho_0. \quad (338)$$

При этом  $\lambda$  рассчитывается по А. Д. Альтшулю [см. формулу (235)] при эквивалентной шероховатости для стальных труб  $k_s = 0,1$  мм и кинематической вязкости природного газа  $\nu = 0,143 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с.

С помощью номограммы на рис. 150 подбор диаметра газопроводной линии весьма прост.

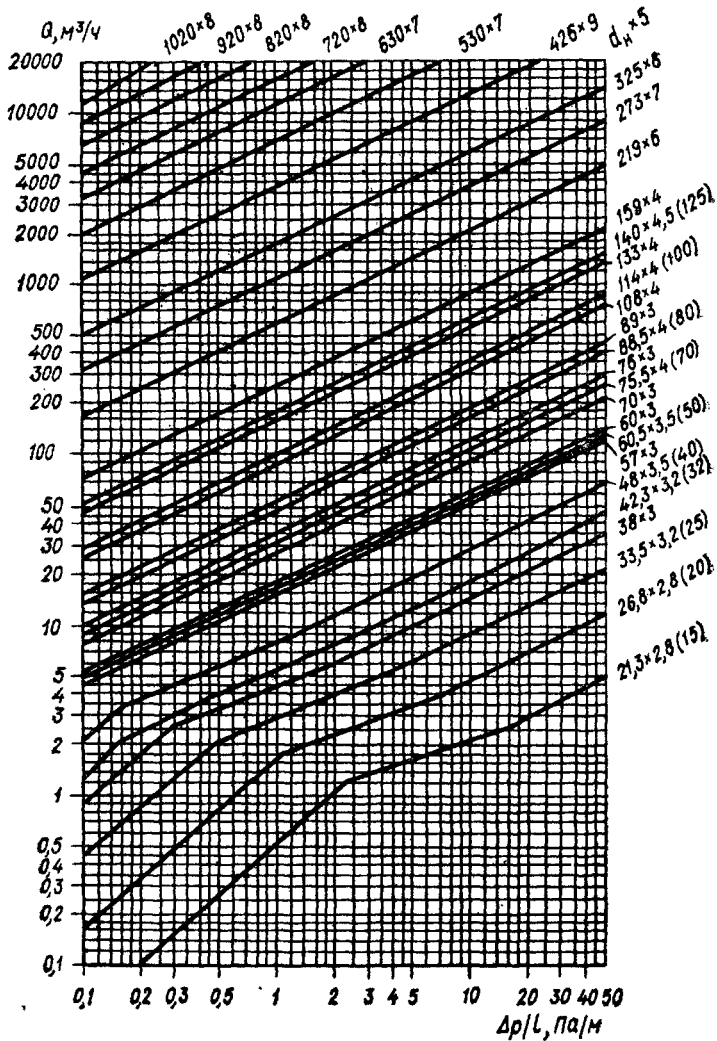
**Пример 38.** Подобрать диаметр газопровода длиной  $l = 100$  м при заданном перепаде давления  $\Delta p = 100$  Па и расходе  $Q_0 = 100$  м<sup>3</sup>/ч. Удельная потеря давления

$$R_l = \frac{\Delta p}{l} = \frac{100}{100} = 1 \text{ Па/м.}$$

По номограмме на рис. 150 находим  $d = 100$  мм,

При отсутствии номограммы расчет можно выполнить таким образом. Подбираем диаметр в первом приближении по формуле (321) и при изменении скоростей для газопроводов низкого давления в пределах  $2 \div 5$  м/с.

Рис. 150. Номограмма для определения потерь давления в газопроводе низкого давления (до 5 кПа). Природный газ плотностью  $\rho_0 = 0,73 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 0,143 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ .



Подставив среднее значение  $v = 3,5$  м/с в формулу (321), находим

$$d \doteq 1,13 \sqrt{\frac{100}{3600 \cdot 3,5}} = 0,101 \text{ м,}$$

откуда ближайший стандартный диаметр  $d = 100$  мм,

Теперь проверяем удельную потерю давления:

$$v = \frac{Q_0}{\omega} = \frac{100}{3600} = 3,54 \text{ м/с;}$$

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{3,54 \cdot 0,1}{14,3 \cdot 10^{-4}} = 25 \text{ 000;}$$

по формуле (235) при  $k_3 = 0,1$  мм

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{0,1}{100} + \frac{65}{25 \text{ 000}} \right)^{0,25} = 0,026.$$

Наконец, удельная потеря давления согласно уравнению (337)

$$R_l = \frac{0,026}{0,1} \cdot \frac{0,71 \cdot 3,54^2}{2} = 1,15 \text{ Па,}$$

что дает потерю давления на участке

$$\Delta p = 1,15 \cdot 100 = 115 \text{ Па,}$$

несколько большую заданной.

Различие в результате по номограмме и расчету объясняется тем, что при построении номограммы взяты не условные проходы в свету, а внутренние диаметры труб (в данном случае не  $d = 100$ , а  $d_{\text{вн}} = 104$  мм).

**Воздухопроводы** также работают при небольших давлениях, поэтому и здесь применимо уравнение энергии (270).

В отличие от водопроводных и газопроводных линий воздухопроводы относятся к категории *коротких трубопроводов*. При этом большое значение приобретает по возможности точный учет местных потерь, в связи с чем в расчетных уравнениях обязательно вводится член  $\sum \zeta \frac{\rho v^2}{2}$ .

Различают системы вентиляции с естественным и механическим побуждением. В первом случае движение воздуха осуществляется за счет гравитационного давления и ветрового воздействия, а во втором — с помощью вентилятора.

Для систем вентиляции с *естественным побуждением воздуха* ввиду небольших скоростей динамическим давлением  $\rho v^2/2$  можно пренебречь. Тогда исходное уравнение энергии в форме давлений примет вид, аналогичный уравнению (334) для газопроводов низкого давления, но с учетом местных потерь, т. е.

$$g(\rho_n - \rho_{вн})H - p_{1_{ман}} = p_{2_{ман}} + \sum \lambda \frac{l}{d_3} \frac{\rho v^2}{2} + \sum \zeta \frac{\rho v^2}{2}, \quad (339)$$

где  $\rho_n$  — плотность наружного воздуха;  $\rho_{вн}$  — плотность воздуха внутри помещения;  $d_3$  — эквивалентный диаметр (см. § 41).

Для систем без учета ветрового воздействия манометрическое давление воздуха в начальном и конечном сечениях равно нулю и уравнение (339) переходит в уравнение вида

$$g(\rho_n - \rho_{вн})H = \sum \lambda \frac{l}{d_3} \frac{\rho v^2}{2} + \sum \zeta \frac{\rho v^2}{2}. \quad (340)$$

В последнем случае давление, создаваемое разностью весов столба наружного и внутреннего воздуха высотой  $H$ , тратится на преодоление путевых и местных сопротивлений.

Поскольку такие системы работают с заданным перепадом давлений, необходимые сечения каналов однозначно подбираются на основе уравнений (339), (340).

В системах вентиляции с механическим побуждением гравитационное давление не имеет значения, но динамическим давлением не пренебрегают. Тогда расчетное уравнение примет вид

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \sum \lambda \frac{l}{d_3} \frac{\rho v^2}{2} + \sum \zeta \frac{\rho v^2}{2}.$$

Обозначим сумму статического и динамического давления, т. е. полное давление, через

$$p_{полн} = p + \frac{\rho v^2}{2}.$$

Тогда

$$\Delta p = p_{1_{полн}} - p_{2_{полн}} = \sum \lambda \frac{l}{d_3} \frac{\rho v^2}{2} + \sum \zeta \frac{\rho v^2}{2}, \quad (341)$$

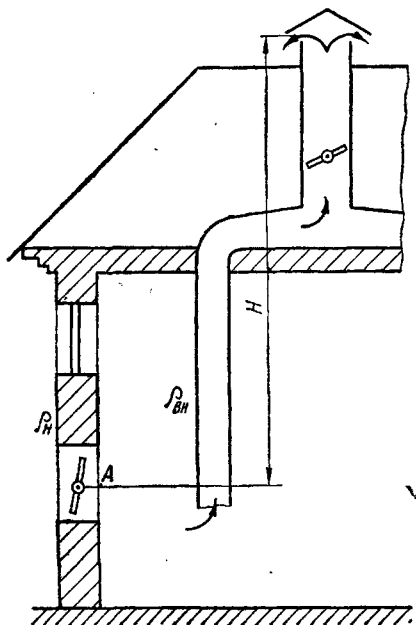
т. е. разность полных давлений между двумя точками системы расходуется на преодоление сопротивлений между этими точками.

В системах вентиляции с механическим побуждением, как и в напорных водоводах, уравнение (341) не решает однозначно задачу подбора проходных сечений каналов. Для этого необходимо выбрать скорость исходя из экономических факторов. Кроме того, имеют значение также

конструктивные и эстетические соображения. Обычно для таких систем принимают  $v = 5 \div 12$  м/с, где верхнее значение скорости ограничивается условием шума.

Определение потери давления на единицу длины в воздуховодах сложнее, чем в газопроводах. Во-первых, воздуховоды бывают не только круглого сечения (из листового железа); часто они устраиваются в виде каналов прямоугольного или квадратного сечения из шлакогипсовых или шлакобетонных плит, а также в кирпичной кладке. Каждая из этих конструкций имеет весьма различную шероховатость стенок и стандартные размеры. Во-вторых, при определении эквивалентного диаметра  $d_e$  [формула (238)] нормализованные размеры прямоугольных каналов дают различные не округленные значения. Наконец, системы с естественным и механическим побуждением воздуха работают в различных диапазонах скоростей. Это приводит к тому, что при расчете воздуховодов нельзя ограничиться одной номограммой типа рис. 150.

Приведем расчет рассматриваемых систем на двух конкретных примерах.



**Пример 39.** Подобрать размеры каналов в системе с естественным побуждением воздуха (рис. 151) при следующих данных: требуемый воздухообмен  $Q_0 = 240$  м<sup>3</sup>/ч;  $H = 16$  м; общая длина каналов  $l = 24$  м; материал — кирпич ( $k_z = 3$  мм); плотность наружного воздуха  $\rho_n = 1,2$  кг/м<sup>3</sup> и внутри помещения  $\rho_{вн} = 1,15$  кг/м<sup>3</sup>; дефлектор на выходе создает за счет действия ветра разрежение  $p_{разр} = -10$  Па; сечение входной (приточной) створки  $400 \times 200$  мм; ее коэффициент сопротивления при открытии на  $45^\circ \zeta_{ст} = 4$ . Кинематическая вязкость воздуха  $\nu = 0,15 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с.

Задача решается методом подбора.

Минимальные размеры вентиляционных каналов, ус-

Рис. 151. К примеру 39.

траиваемых во внутренних кирпичных стенах,  $140 \times 140$  мм. При этом скорость

$$v = \frac{240}{3600 \cdot 0,14 \cdot 0,14} = 3,4 \text{ м/с}$$

оказывается слишком большой. Поэтому берем сечение каналов  $140 \times 280$  мм, для которых скорость  $v = 1,7$  м/с.

Эквивалентный диаметр

$$d_э = \frac{2 \cdot 0,14 \cdot 0,28}{0,14 + 0,28} = 0,187 \text{ м.}$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{1,7 \cdot 0,187}{0,15 \cdot 10} = 21 \text{ 200.}$$

Коэффициент гидравлического трения по формуле (235) при  $k_э = 3$  мм

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{3}{167} + \frac{68}{21 \text{ 200}} \right)^{0,25} = 0,042.$$

Динамическое давление

$$p_d = \frac{1,2 \cdot 1,7^2}{2} = 1,74 \text{ Па.}$$

Потеря давления по длине согласно формуле (194)

$$p_l = 1,74 \frac{0,042}{0,187} 24 = 9,4 \text{ Па.}$$

Местными сопротивлениями служат:

приточная камера со створкой: с учетом того, что ее проходное сечение  $\omega'$  больше сечения канала  $\omega$ ,

$$\zeta'_{ст} = \zeta_{ст} \frac{\omega^2}{(\omega')^2} = 4 \frac{0,14 \cdot 0,28}{0,2 \cdot 0,4} \approx 1;$$

дефлектор:  $\zeta_d = 1,2$ ;

вход в канал:  $\zeta_{вх} = 1$ ;

два поворота под углом  $90^\circ$ :  $\zeta_{пов} = 2 \cdot 1,2 = 2,4$ .

Таким образом, суммарный коэффициент сопротивления системы

$$\Sigma \zeta = 1 + 1 + 2,4 + 1,2 = 5,6.$$

Местные потери давления

$$p_m = \Sigma p_d = 5,6 \cdot 1,74 = 9,7 \text{ Па.}$$

Полная потеря давления

$$p_l + p_m = 9,4 + 9,7 = 19,1 \text{ Па.}$$

Располагаемый перепад давления

$$g(\rho_n - \rho_{вн})H + p_{разр} = 9,8(1,2 - 1,15) \cdot 16 + 12 = 20 \text{ Па.}$$



Для выполнения условия задачи необходимо [см. уравнение (339)], чтобы располагаемый перепад давления был больше потерь давления. В данном случае это условие выполняется:  $20 > 19,1$ .

**Пример 40.** Определить перепад давлений (для подбора вентилятора) вентиляционной сети, схема которой представлена на рис. 152. Расходы и длины участков заданы. Каналы слева — прямоугольные из шлакогипсовых плит, справа — круглые из листового железа.

Задача решается в следующей последовательности. Данная сеть разветвленная (тупиковая). Поэтому сначала выбираем магистраль, которая отвечает наиболее длинному и сложному пути движения воздуха. В данном случае это будут участки 1—2—3—4. Задаем стандартные сечения каналов так, чтобы скорости в них не выходили за допустимые пределы, возрастая по мере приближения к вентилятору. Уточнив скорости по уравнению расхода для выбранных сечений, вычисляем динамическое давление и другие параметры, необходимые для расчета потерь давления в магистрали.

Расчет ведется с конца магистрали.

При расчете очень важно выполнить по возможности точную увязку ответвлений. Иначе говоря, сечение ответвлений необходимо подобрать так, чтобы перепад давления в них не более чем на 10% отличался от соответствующего перепада в магистрали. Большое значение имеет конфигурация и характер местных сопротивлений, изменением которых можно удовлетворить условиям увязки. В отдельных случаях приходится ставить добавочное сопротивление (шайбу).

Расчет ведется в табличной форме за исключением подсчета суммарного коэффициента сопротивления участка, который определяют на основании тщательной оценки местных сопротивлений по данным § 45, а также по специальным справочникам (например, [9]).

*Участок 3—4.* Сопротивлениями служат приточная створка при полном ее открытии —  $\zeta_{ст} = 2,6$ ; поворот под прямым углом —  $\zeta_{пов} = 1,2$ ; прямой проход через тройник — по формуле (263)

$$\zeta_{пр} = 0,4 \left( \frac{v_1}{v_3} - 1 \right)^2 = 0,4 \left( \frac{9,3}{6} - 1 \right)^2 = 0,12.$$

Рис. 152. К примеру 40.

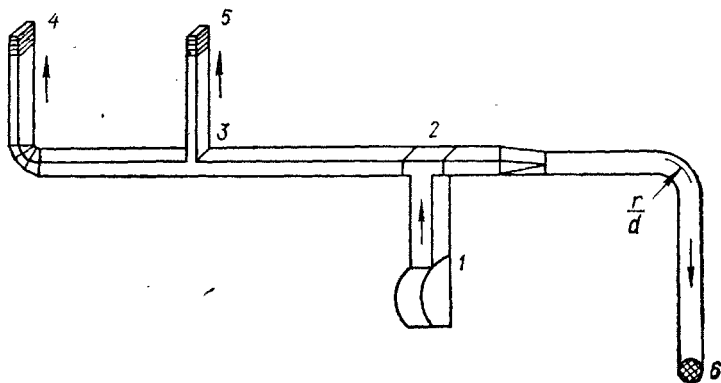


Таблица 6. Расчет разветвленной вентиляционной сети

Наименование параметра	Обозначение	Единица	Магистраль				Ответвление		
			3-4	2-3	1-2	3-5	2-6		
Заданный расход воздуха в конце участка	$Q_{\text{зад}}$	м <sup>3</sup> /с	0,7	—	—	—	0,4	0,3	
Расход воздуха на участке	$Q$	м <sup>3</sup> /с	0,7	1,1	1,4	280 × 280	0,4	0,3	
Выбранное сечение или диаметр	$a \times b, d$	мм	—	280 × 420	—	—	280 × 280	200	
Средняя скорость	$v$	м/с	6	9,3	11,9	—	5,1	9,5	
Эквивалентный диаметр	$d_3$	мм	—	385	—	—	280	200	
Число Рейнольдса	Re	—	$131 \cdot 10^3$	$182 \cdot 10^3$	$280 \cdot 10^3$	—	$95 \cdot 10^3$	$82 \cdot 10^3$	
Эквивалентная шероховатость	$k_3$	мм	1	1	1	—	1	0,1	
Коэффициент гидравлического трения [формула (235)]	$\lambda$	—	0,0265	0,026	0,0255	—	0,0275	0,02	
Динамическое давление	$\rho d$	Па	21,6	52	84	—	15,5	54	
Длина участка	$l$	м	30	25	4	—	10	20	
Потеря давления по длине на участке [формула (194)]	$p_l$	Па	52	104	260	—	15	108	
Суммарный коэффициент сопротивления участка	$\Sigma \zeta$	—	3,9	1,3	—	—	8,4	3,5	
Местные потери давления	$p_m$	Па	84	68	—	—	130	188	
Потеря давления на участке	$p_p$	Па	136	172	260	—	145	296	
Потеря давления на магистрали	$\Sigma p_p$	Па	136 + 172 + 260 = 568				—	—	—

Таким образом,

$$\Sigma_{3-4} = 2,6 + 1,2 + 0,12 = 3,92.$$

*Участок 2—3.* Местным сопротивлением является симметричный тройник. По данным с. 211  $\zeta = 1,3$ ;

$$\Sigma \zeta_{2-3} = 1,3.$$

*Участок 2—1.* Местных сопротивлений нет.

*Ответвление 3—5.* Коэффициент сопротивления, отнесенный к скорости после ответвления, по формуле (264)

$$\zeta_{ст} = 0,8 \left[ \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 + 1 \right] = 0,8 \left[ \left( \frac{9,3}{6} \right)^2 + 1 \right] = 2,7.$$

Концевое сопротивление в виде приточной створки при открытии ее для увязки с основным участком 3—4 только на  $30^\circ \zeta_{ст} = 5,7$  (см. с. 210).

Таким образом, суммарный коэффициент сопротивления на участке 3—5

$$\Sigma \zeta_{3-5} = 2,7 + 5,7 = 8,4.$$

*Ответвление 2—6.* Местные сопротивления: симметричный тройник (аналогично участку 2—3) —  $\zeta = 1,3$ ; переход от прямоугольного сечения к круглому при отношении сечений  $n = \frac{0,785 \cdot 0,2^2}{0,28 \cdot 0,42} = 0,27$  —  $\zeta_{суж} = 0,36$  [формула (255)]; плавный поворот под углом  $\Theta = 90^\circ$  при  $r/d = 0,7$  —  $\zeta_{пов} = 0,6$ ; выхлоп с сеткой —  $\zeta_b = 1,2$ .

$$\Sigma \zeta_{2-6} = 1,3 + 0,36 + 0,60 + 1,2 = 3,5.$$

Как следует из табл. 6, ответвления увязаны с магистралью:

$$\Delta p_{3-4} \approx \Delta p_{3-5} (136 \approx 145);$$

$$\Delta p_{3-4} + \Delta p_{2-3} \approx \Delta p_{2-6} (136 + 172 \approx 296).$$

Это достигнуто соответствующим углом поворота створки на ответвлении 3—5 и отношением радиуса закругления к диаметру на повороте участка 2—6.

## § 62

### Расчет газопроводов при больших разностях давлений

Кроме рассмотренных газопроводов низкого давления, городские системы газоснабжения имеют газопроводы среднего (от 5 до 300 кПа) и высокого (от 300 кПа до 1,2 МПа) давления. Они являются основными артериями, по которым газ подается к газораспределительным пунктам (ГРП), питающим сеть низкого давления, и к отдельным объектам промышленного и коммунально-бытового назначения.

Газопроводы среднего и высокого давления, в отличие

от газопроводов низкого давления, работают при значительных перепадах давлений, что обуславливает *необходимость учета сжимаемости газа* в процессе движения. Для расчета таких газопроводов используют уравнение движения сжимаемой жидкости, в частности, дифференциальное уравнение движения в механической форме (152).

На элементарном участке трубопровода потери удельной энергии, согласно формуле Дарси, можно записать так:

$$dE_{\pi} = \lambda \frac{dl}{D} \frac{v^2}{2}.$$

Тогда уравнение (152) примет вид

$$\frac{dp}{\rho} + vdv + \lambda \frac{dl}{D} \frac{v^2}{2},$$

или

$$dp + \rho vdv + \lambda \frac{dl}{D} \frac{\rho v^2}{2} = 0. \quad (342)$$

Для интегрирования уравнения (342) необходимо задаться законом изменения состояния газа в процессе движения. В данном случае предполагается *изотермический* процесс, т. е. течение при постоянной температуре ( $T = \text{const}$ ). Это допущение базируется на опытных данных: в длинных трубопроводах благодаря эффекту теплообмена температура газа практически равна температуре окружающей среды.

Используя уравнения состояния (9) и расхода (127), получаем зависимости

$$dv = -\frac{M}{\omega} \frac{RT dp}{p^2};$$

$$\rho v = \frac{M}{\omega};$$

$$\rho vdv = -\frac{M^2}{\omega^2} RT \frac{dp}{p^2}.$$

Подставив эти величины в дифференциальное уравнение движения газа в трубопроводе, находим

$$dp - \frac{M^2}{\omega^2} RT \frac{dp}{p^2} + \lambda \frac{dl}{D} \frac{M^2}{2\omega^2} \frac{RT}{p} = 0,$$

или

$$-pdp = \left( \lambda \frac{dl}{D} + 2 \frac{dp}{p} \right) \frac{M^2}{2\omega^2} RT.$$

Интегрируя последнее уравнение при постоянных  $\lambda^*$ ,  $M$  и  $T$  в пределах от начального давления  $p_1$ , где  $l = 0$ , до конечного давления  $p_2$ , где  $l = L$ , получаем

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \left( \lambda \frac{L}{D} + 2 \ln \frac{p_1}{p_2} \right) \frac{M^2}{2\omega^2} RT. \quad (343)$$

Полученное уравнение изотермического течения газа в цилиндрических трубопроводах можно существенно упростить, считая второй член выражения в скобках правой части (343) достаточно малым по сравнению с параметром  $\lambda \frac{l}{D}^{**}$ .

Тогда

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{L}{D} \frac{M^2}{2\omega^2} RT,$$

или

$$p_1^2 - p_2^2 = \lambda \frac{L}{D} \frac{M^2}{\omega^2} RT. \quad (344)$$

Это и есть основное уравнение для расчета газопроводов при большой разности давлений. Необходимо подчеркнуть, что в уравнения (343), (344) входят квадраты абсолютных давлений, тогда как в формулах для несжимаемой жидкости (газопроводов низкого давления и воздухопроводов) разность  $\Delta p = p_1 - p_2$  не зависит от того, берем ли мы абсолютные или манометрические давления.

При расчетах обычно задан массовый расход  $M$  (или объемный расход, отнесенный к нормальным условиям  $Q_0$ ), а также конечное давление  $p_2$ . Тогда для выбранного диаметра  $D$  по уравнению (344) находим квадрат начального давления  $p_1^2$ , затем  $p_2$  и перепад  $\Delta p = p_1 - p_2$ .

\* Строго говоря, величина  $\lambda$  здесь не является постоянной, поскольку плотность падает, а скорость возрастает вдоль течения; в переходной области сопротивления это означает уменьшение  $\lambda$ . Однако при больших числах Рейнольдса, которые имеют место в таких газопроводах, это изменение совсем незначительно.

\*\* Это становится ясным при конкретном сопоставлении величин. Например, для  $\lambda = 0,02$ ,  $l = 500$  м и  $D = 200$  мм параметр  $\lambda \frac{l}{D} = 50$ ; при  $p_1 = 600$  кПа и  $p_2 = 300$  кПа величина  $2 \ln \frac{p_1}{p_2} = 1,4$ , т. е. составляет всего около 3% параметра  $\lambda \frac{l}{D}$ .

**Пример 41.** Определить перепад давления в газопроводе длиной  $L = 5$  км, диаметром  $D = 200$  мм при расходе  $Q_0 = 14\,400$  м<sup>3</sup>/ч ( $\rho_0 = 0,7$  кг/м<sup>3</sup>,  $R = 520$  Дж/кг) и конечном манометрическом давлении  $p_{2\text{ман}} = 600$  кПа. Принять температуру  $T = 273 + 7 = 280$  К и  $\alpha = 0,017$ .

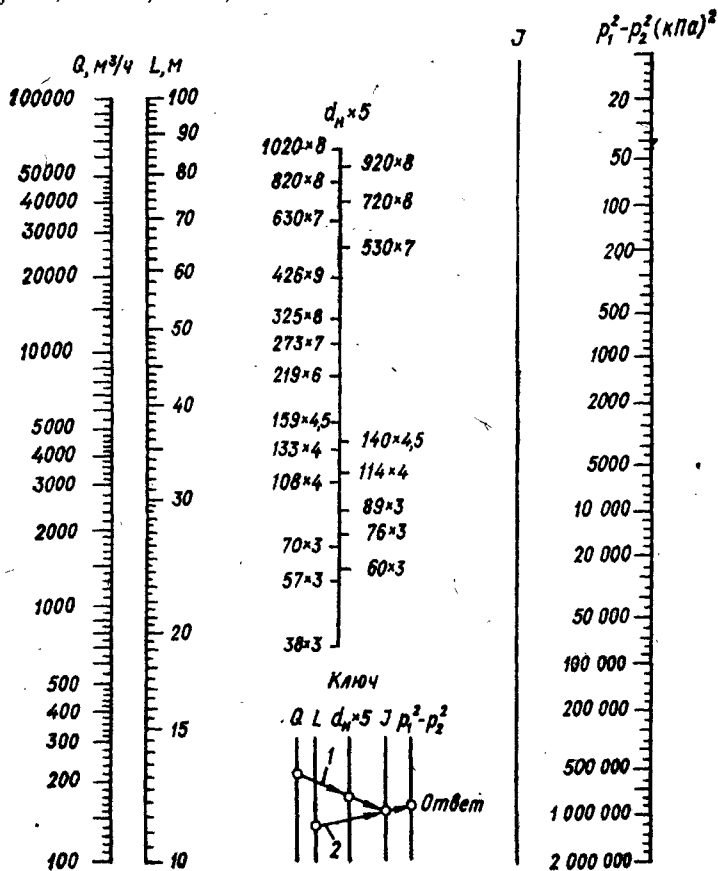
Массовый секундный расход

$$M = \frac{Q_0 \rho_0}{3600} = \frac{14\,400 \cdot 0,7}{3600} = 2,8 \text{ кг/с.}$$

Абсолютное конечное давление

$$p_2 = p_{2\text{ман}} + p_a = 600 + 101 = 701 \text{ кПа.}$$

Рис. 153. Номограмма для определения потерь давления в газопроводах среднего и высокого давления (до 1,2 МПа). Природный газ плотностью  $\rho_0 = 0,73$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0,143 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с.



Площадь поперечного сечения трубы

$$\omega = 0,785 \cdot 0,2^2 = 314 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Согласно уравнению (344)

$$p_1^2 - p_2^2 = 0,017 \frac{5000}{0,2} \left( \frac{2,8}{314 \cdot 10} \right)^2 520 \cdot 280 = 0,5 \cdot 10^{12} (\text{Па})^2 = \\ = 0,5 \cdot 10^6 (\text{кПа})^2;$$

$$p_1^2 = 0,5 \cdot 10^6 + 0,7^2 \cdot 10^6 = (0,5 + 0,5) 10^6 = 10^6 (\text{кПа})^2.$$

Теперь  $p_1 = \sqrt{10^6} = 10^3$  кПа и  $\Delta p = p_1 - p_2 = 1000 - 701 \approx 300$  кПа.

Как видно из примера, несмотря на простую структуру формулы (344), расчет получается довольно громоздким. Поэтому на практике применяют специальные номограммы.

Заменяв  $M = Q_0 \rho_0$ ,  $RT_0 = \frac{p_0}{\rho}$ ,  $\omega^2 = \left( \frac{\pi D^2}{4} \right)^2$ , формула (344)

приводится к виду

$$p_1^2 - p_2^2 = 1,62\lambda \frac{Q_0^2}{D^5} \rho_0 \rho_0 l. \quad (345)$$

По этой формуле построена номограмма, представленная на рис. 153. По ней можно сразу найти разность квадратов абсолютных давлений.

## Глава VIII

### ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

#### § 63

#### Пограничный слой и начальный участок течения

В гл. VIII рассматривается обтекание тел с учетом влияния вязкости — *внешняя задача гидроаэродинамики*.

Пусть равномерный поток с помещенной в него тонкой пластинкой, ось которой совпадает с направлением течения (рис. 154), движется со скоростью  $u_\infty$ .

С точки зрения кинематики невязкой жидкости помещенное тело не вносит заметных изменений в условия исследуемого течения. Между тем, как показывает опыт, в непосредственной близости от пластинки картина течения существенно меняется. Скорость на самой пластинке вследствие эффекта вязкости равна нулю. С увеличением расстоя-

яния от стенки она быстро увеличивается до значения скорости невозмущенного потока  $u_\infty$ . Область течения, где происходит переход от нулевой скорости у стенки до скорости невозмущенного потока, называется пограничным слоем (рис. 155).

Впервые мысль о том, что влияние вязкости проявляется не во всей среде, а лишь в слое возле поверхности обтекаемого тела, была высказана Д. И. Менделеевым в 1880 г. и развита Н. Е. Жуковским. Начало обоснованной теории пограничного слоя положил Л. Прандтль в 1904 г.

С помощью понятия пограничного слоя течение жидкости вдоль твердого тела как бы раскладывается на течение внутри тонкого слоя вблизи стенки, где проявляется влияние вязкости, и на внешнее движение, в котором действие вязкости незаметно. Вот почему внешнее течение можно изучать методами теории невязкой жидкости (§ 19), тогда как к пограничному слою эти методы применить нельзя.

Понятие о пограничном слое тесно связано с сопротивлением и теплопередачей при обтекании тел потоком или при движении тел в жидкой (воздушной) среде.

Пограничный слой может быть ламинарным и турбулентным, причем переход от одного режима к другому происходит иначе, чем в трубе.

В начале обтекаемого тела толщина пограничного слоя мала и движение в нем носит ламинарный характер. В про-

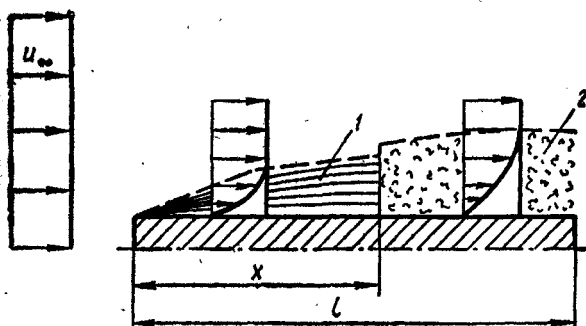


Рис. 154. Схема обтекания пластинки:

1 — пограничный слой ламинарный;  
2 — то же, турбулентный.

Рис. 155. Картина течения при обтекании пластинки.





цессе движения, как видно из рис. 154, толщина пограничного слоя увеличивается и на некотором расстоянии  $x$  после небольшого переходного участка ламинарный режим сменяется *турбулентным*. При этом в месте перехода толщина пограничного слоя резко возрастает.

Условия перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный зависят от режима обтекания, определяемого числом Рейнольдса, от степени турбулентности набегающего потока и от формы тела. Если за характерный линейный параметр взять толщину пограничного слоя  $\delta$ , то согласно экспериментальным данным критическое число Рейнольдса для пластинки, при котором происходит указанный переход, составляет  $Re_{кр} = 2750 \div 3500$ , т. е. величину, близкую к критическому числу в трубе (см. § 35). Если же за характерный линейный параметр взять расстояние  $x$ , то для той же самой пластинки

$$Re_{кр} = u_{\infty}x/\nu = 3 \cdot 10^5. \quad (346)$$

Зная  $Re_{кр}$  и задавшись скоростью невозмущенного потока  $u_{\infty}$ , легко найти расстояние  $x$ , где ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный. Для рассматриваемой пластинки при  $u_{\infty} = 10$  м/с и кинематической вязкости воздуха  $\nu = 0,15 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с

$$x = 3 \cdot 10^5 \cdot 0,15 \cdot 10^{-4} / 10 = 0,45 \text{ м.}$$

Если режим обтекания характеризовать числом Рейнольдса, отнесенным к длине тела ( $Re = u_{\infty}l/\nu$ ), относительное расстояние места перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный составит  $x/l = Re_x/Re_l$ . При больших значениях  $Re_l$  отношение  $x/l$  настолько мало, что пограничный слой на всем протяжении тела можно считать турбулентным.

Толщина пограничного слоя  $\delta$  является достаточно условной, так как нет резкой границы между внешним течением и движением вблизи стенки. Можно принять, например, за толщину слоя такое расстояние от твердой границы тела, при котором местная скорость отличается от скорости невозмущенного потока не более, чем на 1%.

Теоретические и экспериментальные исследования обтекания пластинки показывают, что относительная толщина пограничного слоя для ламинарного и турбулентного режимов может быть соответственно представлена выражениями:

$$\delta/x = 5/Re_x^{1/2}; \quad (347)$$

$$\delta/x = 0,37/Re_x^{1/4}. \quad (348)$$

Приведенные формулы дают возможность определить толщину пограничного слоя при обтекании пластинки. Например, при  $u_\infty = 10$  м/с и  $\nu = 0,15 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с на расстоянии  $x = 0,4$  м  $Re_x = \frac{10 \cdot 0,4}{0,15 \cdot 10^{-4}} = 2,67 \cdot 10^5$ , следовательно, слой еще ламинарный. По формуле (347) толщина

$$\delta = 0,4 \frac{5}{\sqrt{2,67 \cdot 10^5}} = 0,0039 \text{ м} = 3,9 \text{ мм.}$$

Возьмем теперь расстояние  $x = 1$  м; для него  $Re_x = \frac{10}{0,15 \cdot 10^{-4}} = 6,7 \cdot 10^5$ , т. е. слой турбулентный и его толщина в этом месте по формуле (348)

$$\delta = \frac{0,37 \cdot 1}{(6,7 \cdot 10^5)^{1/5}} = 0,025 \text{ м} = 25 \text{ мм.}$$

Выполненный расчет убеждает, что толщина пограничного слоя вообще незначительна, а толщина турбулентного слоя намного больше ламинарного.

Важно подчеркнуть, что давление в пограничном слое диктуется не самим слоем, а внешним течением. В данном случае при обтекании пластинки, расположенной по направлению течения, внешнее давление не изменяется (градиент давления  $dp/dx = 0$ ), что создает условия для устойчивости самого слоя.

Формулы (347), (348) для относительной толщины пограничного слоя в упрощенном изложении получают следующим образом.

Для анализа движения используется закон количества движения. Причем, в отличие от предыдущих случаев применения этого закона (§ 44), здесь рассматривается контрольная поверхность для двух близлежащих сечений пограничного слоя вдоль плоской пластинки (рис. 156).

Жидкость втекает в левую и верхнюю грани контрольной поверхности, а вытекает через правую грань. Элементарная секундная масса жидкости, приходящаяся на единицу ширины пластинки толщиной  $dy$ , равна  $\rho u dy$ .

Обозначим интегральные значения секундного количества движения через указанные грани соответственно  $KД_1$ ,  $KД_{1-2}$  и  $KД_2$ . Знаки этих величин по правилу положительного и отрицательного направления для внутренней и внешней нормали потока вектора [см. § 17, формула (67)] будут «плюс» для правой и «минус» для левой и верхней граней. Изменение секундного количества движения при переходе от сечения 1 к сечению 2 для боковых граней

$$KД_2 - KД_1 = d \int_0^\delta \rho u^2 dy,$$

для верхней грани

$$d(\text{КД}_{1-2}) = -d \int_0^{\delta} \rho u_{\infty} u dy = -u_{\infty} d \int_0^{\delta} \rho u dy,$$

где  $u_{\infty}$  — скорость на границе пограничного слоя, которая считается в данном случае неизменной вдоль течения.

Полное изменение секундного количества движения плоского пограничного слоя при переходе от сечения 1 к сечению 2

$$d \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - u_{\infty} d \int_0^{\delta} \rho u dy.$$

При безградиентном обтекании пластинки ( $dp/dx = 0$ ) внешней силой будет только сила трения  $T$ , которая направлена влево, т. е. будет отрицательна, и равна касательному напряжению на стенке  $\tau_0$ , умноженному на площадку трения  $dx \cdot 1$ . Следовательно,

$$T = -\tau_0 dx.$$

Тогда уравнение количества движения для рассматриваемой контрольной поверхности представится выражением

$$d \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - u_{\infty} d \int_0^{\delta} \rho u dy = -\tau_0 dx.$$

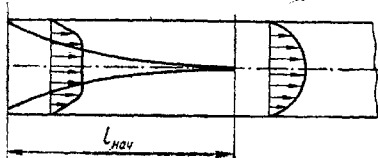
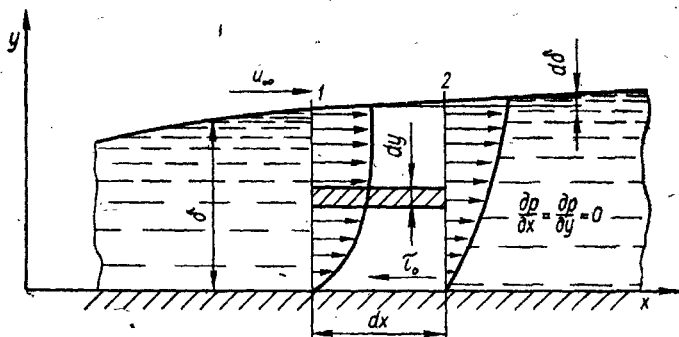


Рис. 156. К выводу интегрального соотношения Кармана.

Рис. 157. Начальный участок течения в трубе.

Для несжимаемой жидкости

$$\rho u_{\infty} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u dy - \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy = \tau_0.$$

Полученное выражение можно еще записать так:

$$\rho u_{\infty}^2 \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{u}{u_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \tau_0. \quad (349)$$

Это выражение называют *интегральным соотношением Кармана*. Оно справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного пограничного слоя.

При ламинарном режиме распределение скоростей по толщине пограничного слоя  $\delta$  можно представить зависимостью

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^2.$$

Подставив ее в уравнение (349), после интегрирования получим

$$\frac{2}{15} u_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = \tau_0.$$

Касательное напряжение на поверхности пластинки при ламинарном течении выразится через скорость на границе слоя, его толщину и молекулярную вязкость формулой (6), т. е.

$$\tau_0 = \mu \frac{u_{\infty}}{\delta}.$$

Таким образом, соотношение (349) примет вид дифференциального уравнения:

$$\frac{2}{15} u_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = \mu \frac{u_{\infty}}{\delta}.$$

или

$$\delta d\delta = \frac{2}{15} \frac{\mu}{\rho u_{\infty}} dx.$$

Интегрируя последнее уравнение по  $x$ , т. е. вдоль пластинки, находим

$$\delta/x = 3,9/\text{Re}_x^{1/2}.$$

Подробные исследования показывают [36], что результаты более точны, если в числителе поставить цифру 5, откуда и приходим к формуле (347).

При турбулентном режиме воспользуемся степенным законом распределения скорости в виде

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}.$$

Это так называемый «закон одной седьмой», который подходит для гладкой поверхности пластинки. Для этого закона распределения скоростей интегральное соотношение (349) после интегрирования по  $y$  будет

$$\frac{7}{12} \rho u_{\infty}^2 \frac{d\rho}{dx} = \tau_0.$$

Касательное напряжение на стенке для турбулентного движения в трубе, согласно уравнению (204),

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho v^2,$$

где коэффициент гидравлического трения для гладких труб берется по формуле Блазиуса (227), т. е.

$$\lambda = 0,3164/Re^{0,25}.$$

Тогда

$$\tau_0 = \frac{0,3164}{8} \rho v^2 \left( \frac{v}{vd} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Применение последней формулы для рассматриваемого случая требует перехода от средней скорости в трубе  $v$  к максимальной  $u_{\text{макс}}$ , которая для пограничного слоя соответствует  $u_{\infty}$ . Для «закона одной седьмой»  $v = 0,82u_{\text{макс}} = 0,82u_{\infty}$  (см. § 39). Кроме того, надо изменить диаметр трубы толщиной пограничного слоя ( $d = 2\delta$ ).

С учетом сказанного выражение для касательного напряжения примет вид

$$\tau_0 = \frac{0,82^2 \cdot 0,316}{8} \rho u_{\infty}^2 \left( \frac{v}{0,82u_{\infty} \cdot 2\delta} \right)^{\frac{1}{4}} = 0,023 \rho u_{\infty}^{\frac{7}{4}} \left( \frac{v}{\delta} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Теперь интегральное соотношение (349) запишется так:

$$\frac{7}{12} \rho u_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = 0,023 \rho u_{\infty}^{\frac{7}{4}} \left( \frac{v}{\delta} \right)^{\frac{1}{4}},$$

откуда после интегрирования по  $x$  в конечном итоге получаем

$$\delta/x = 0,37/(Re_x)^{\frac{1}{5}},$$

т. е. формулу (348).

Рассмотрим теперь течение на начальных участках труб (каналов), где происходит как бы переход от внешней задачи к внутренней. В начале трубы развивается пограничный слой, а затем, когда он смыкается (рис. 157), образуется течение, ничем не отличающееся от равномерного в трубе, характер которого был разобран в § 39.

Длину начального участка  $l_{\text{нач}}$  для гладких труб можно приближенно определить по формуле (348) для толщины турбулентного пограничного слоя, подставив вместо  $\delta$  радиус  $r = d/2$ . Тогда

$$\frac{d}{2l_{\text{нач}}} = \frac{0,37}{\text{Re}_{l_{\text{нач}}}^{1/5}}, \quad \text{или} \quad \frac{l_{\text{нач}}}{d} = 1,35 \text{Re}_{l_{\text{нач}}}^{1/5}. \quad (350)$$

Далее условно примем, что переход от ламинарного пограничного слоя к турбулентному проходит на расстоянии  $x/d \approx 1$ . В этом случае с учетом условия (346)

$$\text{Re}_{l_{\text{нач}}} = \text{Re}_{\text{кр}} \frac{l_{\text{нач}}}{d} = 3 \cdot 10^5 \frac{l_{\text{нач}}}{d}.$$

Наконец, подставив полученное соотношение в уравнение (350), получим

$$l_{\text{нач}}/d = 1,35 \cdot 12,5 (l_{\text{нач}}/d)^{1/5} = 16,9 (l_{\text{нач}}/d)^{1/5},$$

откуда  $l_{\text{нач}}/d = 16,9^{5/4} = 35$ .

Согласно опытным данным, для плавного входа в трубу  $l_{\text{нач}}/d = 40 \div 50$ ; в случае острой кромки или выпрямляющей решетки длина начального участка уменьшается до  $l_{\text{нач}}/d \approx 20$ . Длина начального участка также уменьшается с увеличением шероховатости стенок.

Сопротивление начального участка, с одной стороны, меньше, чем сопротивление такого же участка трубы с развитой эпюрой скоростей, так как действие вязкости распространяется не на весь поток, а только на пограничный слой. С другой стороны, сопротивление больше за счет большего градиента скоростей и, соответственно, большего касательного напряжения у стенки  $\tau_0$ . Поэтому в целом сопротивление начального участка трубы, как показывают специальные опыты [1], мало отличается от сопротивления такой же трубы в условиях равномерного движения с нормальной эпюрой скоростей. На практике этой разницей обычно пренебрегают.

В заключение следует подчеркнуть, что нельзя смешивать понятие пограничного слоя и пристеночного слоя, о котором речь шла в § 39, когда рассматривалось явление вблизи стенок трубы. Там по всей толщине потока течение формируется по законам турбулентности, свойственной внутренней задаче, а граница пристеночного слоя определяется особенностями распределения продольных пульса-

ций (см. рис. 97, в). В данном же случае границей пограничного слоя служит внешнее течение без заметного эффекта трения, которое можно рассматривать как потенциальное, а пристеночный слой существует в пределах пограничного слоя.

## § 64

### Отрыв пограничного слоя и формирование отрывных течений

Явление отрыва и связанное с ним формирование отрывных течений — одна из важнейших проблем динамики вязкой жидкости, имеющая значение для решения задач аэрации жилой застройки и промышленных зданий.

Началом отрывного течения следует считать точку отрыва пограничного слоя от стенки. Отрыв может произойти от угловатой (рис. 158, а) или от гладкой поверхности (рис. 158, б).

Механизм отрыва при обтекании угла может быть объяснен свойством инерции пограничного слоя. Этот «инерционный» срыв в точке С (рис. 158, а) с последующим распадом на вихри уже рассматривался в § 17 с позиций динамики невязкой жидкости (поверхности раздела). На рис. 159 представлена картина обтекания угловатого тела, где хорошо видны отрывные течения за углами.

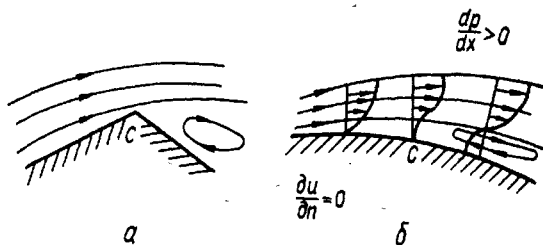


Рис. 158. Отрыв пограничного слоя: а — от поверхности, имеющей излом; б — от гладкой поверхности.

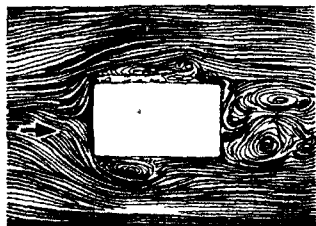


Рис. 159. Картина обтекания угловатого тела.

Отрыв пограничного слоя от плавной поверхности требует более детального рассмотрения. Обращаясь к схеме рис. 158, б, необходимо подчеркнуть, что необходимым условием образования точки отрыва  $C$  является *положительный градиент давления*, т. е. движение в сторону увеличивающегося давления ( $dp/dx > 0$ ). С подобным явлением мы уже сталкивались при изучении движения в диффузоре в условиях внутренней задачи (§ 42). В данном случае положительный градиент давления создается потоком вне пограничного слоя, который считается потенциальным. Для частиц среды, находящихся во внешнем потоке, полная энергия вдоль течения не изменяется, происходит только преобразование кинетической энергии в потенциальную. Иначе ведут себя частицы, движущиеся вблизи стенки, т. е. в пределах пограничного слоя. Вследствие

Рис. 160. Обтекание цилиндра.

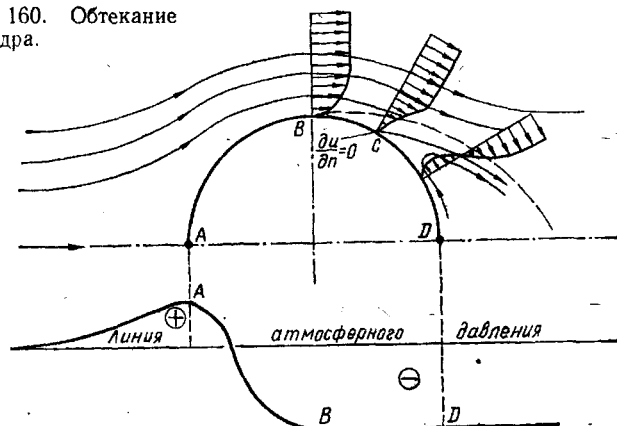


Рис. 161. Картина обтекания цилиндра.

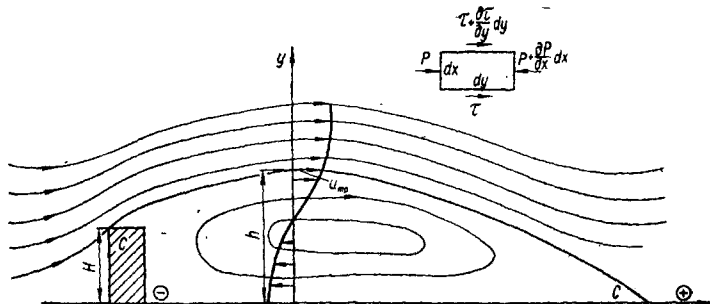


эффекта вязкости кинетическая энергия частиц уменьшается по мере приближения к стенке. На участке течения до точки  $C$  энергии частиц еще хватает для преодоления положительного градиента давления. Однако в некоторой критической точке  $C$  частицы уже не могут дальше двигаться. Математически точка отрыва определяется как условие  $\frac{du}{dn} \Big|_{n=0} = 0$ , т. е. на стенке касательное напряжение обращается в нуль. На участке же за точкой  $C$  под действием положительного градиента давления возникает *возвратное движение*, как показано на рис. 158, б.

В сечении  $C$  поток отходит от стенки, а пограничный слой трансформируется в *отрывное течение*. Границей отрывного течения и внешнего потока является условная линия раздела (в двухмерном представлении), хорошо прослеживаемая, например, для случая обтекания цилиндра (рис. 160, 161). Обратные скорости отрывного течения убывают с увеличением расстояния от стенки, и можно наметить линию нулевых скоростей, вокруг которой происходит циркуляция частиц. Это течение носит неустойчивый характер. Возникающие вихри, отрываясь от тела, уплывают вниз по течению; на их месте возникают новые и т. д. Таким образом, несмотря на общий установившийся характер движения, в области отрывного течения скорости в отдельных точках пространства периодически колеблются.

Область отрывного циркуляционного течения не является изолированной от внешнего потока благодаря механизму турбулентного перемешивания. Тем не менее, массообмен тут относительно невелик, что весьма существенно при оценке таких течений с точки зрения аэрации.

Рис. 162. Обтекание ветровым потоком преграды (одиночного здания прямоугольной формы).



Обратимся теперь к самому простому случаю обтекания ветровым потоком одиночного здания прямоугольного сечения высотой  $H$  (рис. 162). Критической точкой отрыва является наветренный угол  $C$ . Наблюдая за таким течением непосредственно в гидротомке или на аэродинамической модели, а также по материалам фото- и киносъемок получаем следующую картину течения. Основной поток обтекает как бы некоторое тело овальной формы; это движение можно считать потенциальным. Соответствующий спектр течения получают методами гидроаэродинамики невязкой жидкости, в частности, как комбинацию плоскопараллельного потока, источника и двух стоков (§ 18). Границей указанного воображаемого тела является некоторая поверхность раздела, которая на рис. 162 показана линией  $C - C$ . Эта линия сначала поднимается от точки отрыва, достигая приблизительно двойной высоты на расстоянии порядка  $2,5H$ , а затем постепенно опускается, пересекая плоскость отметки преграды на расстоянии около  $8H$ .

Граница транзитного течения  $C - C$  может быть определена теоретически на основе второго закона термодинамики: при наличии нескольких вариантов процесса в действительности осуществляется такое движение, при котором рассеяние (диссипация) энергии будет максимальной [12].

В области ниже линии  $C - C$  образуется отрывное течение, где линии тока осредненного движения получают замкнутыми; другими словами, движение носит циркуляционный характер\*. Это водоворотное течение возникает в результате взаимодействия силы турбулентного трения, направленной вдоль транзитного потока, и положительного градиента давления, создающего силу давления в обратном направлении. Сила турбулентного трения будет наибольшей на поверхности раздела  $C - C$  и наименьшей по поверхности основания преграды. Поэтому в верхних слоях зоны сила трения превышает силу давления и частицы жидкости движутся вперед, в ту же сторону, что и транзитный поток. В нижней части зоны сила давления больше, чем

---

\* В действительности в результате турбулентного обмена, хотя и незначительного, происходит непрерывная смена частиц между транзитным потоком и зоной отрыва. Однако в условиях стационарного процесса (установившегося движения) линии тока осредненного движения остаются неизменными.

сила трения, поэтому частицы движутся в обратном направлении. Эпюры скоростей в водоворотной зоне имеют вид, представленный на рис. 163 [24]. Обратные скорости в плоскости основания преграды значительны.

Распределение скоростей в центральной части водоворотной зоны можно получить следующим образом.

Выделим в потоке, считая его плоским, элемент  $dx dy$  и рассмотрим действующие на него силы в направлении оси  $x$  (рис. 162 справа). Если касательное напряжение, действующее на нижнюю грань элемента, обозначить  $\tau$ , то на верхнюю грань действует напряжение  $\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$ ; следовательно, результирующая сила трения, действующая на элемент,

$$T = \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx \cdot 1 - \tau dx \cdot 1 = \frac{\partial \tau}{\partial y} dx dy.$$

Эта сила, если пренебречь силами инерции, уравнивается силой давления  $P$ , которая изменяется вдоль оси  $x$ , но по вертикали ее можно считать постоянной. Значит,

$$P = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \cdot 1 - p dy \cdot 1 = \frac{\partial p}{\partial x} dx dy.$$

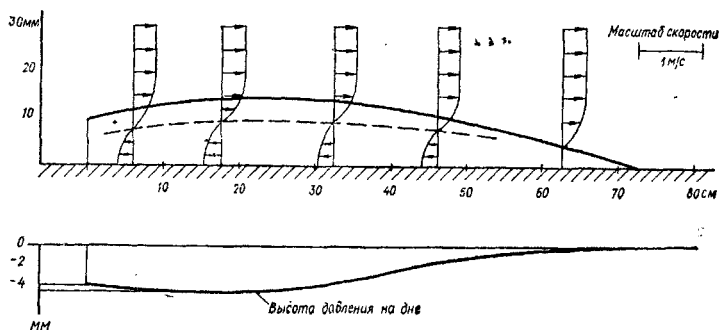
Теперь

$$T = P; \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} dy dz = \frac{\partial p}{\partial x} dx dy, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

Касательное напряжение может быть представлено выражением (188), т. е.

$$\tau = \varepsilon \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Рис. 163. Эпюры скоростей в зоне отрывного течения за преградой.



Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}.$$

Выполняя интегрирование по  $y$  при  $\frac{\partial p}{\partial x}$  и  $\varepsilon = \text{const}$  и граничном условии  $y = h$ ,  $u_x = u_{\text{гр}}$ , получаем

$$u_x = u_{\text{гр}} - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} (h^2 - y^2).$$

В пределах водоворотной зоны расходы прямого и обратного течения равны друг другу. Отсюда получаем условие

$$\int_0^h u_x dy = 0,$$

которое после подстановки предыдущего выражения и интегрирования дает

$$u_{\text{гр}} = \frac{1}{3\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} h^2, \text{ или } \varepsilon = \frac{h^2}{3u_{\text{гр}}} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Подставив последнее соотношение для турбулентной вязкости в уравнение скорости, в конечном итоге находим закон распределения скоростей по вертикали отрывного плоского течения:

$$u_x = u_{\text{гр}} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{y}{h} \right)^2 - \frac{1}{3} \right]. \quad (351)$$

Отсюда скорость у дна

$$u_{x(y=0)} = -\frac{1}{2} u_{\text{гр}}$$

и линия нулевой скорости

$$y_{0(u_x=0)} = \sqrt{1/3} h = 58h.$$

На графике рис. 163 данные опытов [35] подтверждают приведенные выкладки для центральной части отрывного течения.

Описанную область отрывного течения в вентиляции называют *аэродинамической тенью*. Важно подчеркнуть, что несмотря на наличие пульсаций, турбулентный обмен с внешней средой в этой области оказывается недостаточным. Поэтому в пределах аэродинамической тени недопустим выброс загрязненного воздуха.

При взаимодействии ветрового потока с группой зданий различного очертания задача весьма усложняется и решается путем модельных исследований в каждом конкретном случае.

Из изложенного становится ясным, что описанный механизм образования отрывных течений во многом сходен с причинами образования вихрей при протекании жидкости через местные сопротивления (см. § 42). Различие состоит лишь в характере транзитного потока: здесь он практически не отличается от потенциального, а там он турбулентный.

## § 65

### **Распределение давлений и аэродинамический коэффициент**

Рассмотрим вопрос о распределении давления вокруг обтекаемого тела. Имея спектр течения, можно определить давление в любой точке тела.

Обратимся сначала к случаю обтекания цилиндра бесконечной ширины, где течение можно считать двухмерным (плоским). Если явление изучать методами гидроаэродинамики невязкой жидкости (§ 18), спектр течения получается симметричным и имеет вид, представленный на рис. 53. На боковых поверхностях цилиндра поток ускоряется, а на лобовой и тыльной — замедляется. В критических точках  $A, D$  скорость равна нулю, а в точках  $B$  она вдвое больше скорости невозмущенного потока ( $u_b = 2u_\infty$ ). Соответственно давление между точками  $A$  и  $B$  понижается, а на тыльной поверхности по мере приближения к точке  $D$  давление увеличивается. Таким образом, получается, что цилиндр не оказывает сопротивления движущейся жидкости, что явно противоречит опыту (так называемый парадокс Эйлера — Даламбера).

Разберем теперь случай обтекания цилиндра с учетом действия вязкости при наличии пограничного слоя. В результате образования отрывного течения (рис. 160) основной поток за цилиндром почти не расширяется, что обуславливает незначительное восстановление давления по сравнению с уменьшенным давлением в точках  $B$  и в результате в точке  $D$  давление остается пониженным. Между точками  $A$  и  $D$  возникает разность давлений, т. е. эффект сопротивления. С энергетической точки зрения этот эффект вызван рассеянием энергии отрывного течения, получаемой от основного потока.

Давление в данной точке характеризуется безразмерным коэффициентом давления

$$k_p = \frac{p - p_a}{\rho u_\infty^2 / 2}, \quad (352)$$

равным отношению избыточного давления к динамическому давлению невозмущенного потока. На рис. 160 внизу представлен график изменения коэффициента давления вдоль контура цилиндра.

Перейдем теперь к распределению давления от действия ветрового потока на здания и сооружения. Этот вопрос особенно важен при проектировании высотных зданий, так как скорость ветра  $u_\infty$  растет с увеличением расстояния от поверхности земли.

В случае простейшей схемы обтекания здания в виде прямоугольника (рис. 162) спектр течения качественно не отличается от рассмотренного выше спектра при обтекании цилиндра. Механизм образования подпора на наветренной стороне и разрежения над крышей за точкой отрыва  $O$  был уже выяснен ранее (§ 21). Отрывное же течение на заветренной стороне (зона аэродинамической тени) разбиралось в предыдущем параграфе. Как и в случае обтекания цилиндра, в последней зоне давление остается пониженным.

Для расчета распределения давления от действия ветра по контуру зданий и сооружений пользуются коэффициентом давления, который в вентиляции называют *аэродинамическим коэффициентом*:

$$k = \frac{p_{\text{ман}}}{\rho u_\infty^2 / 2}, \quad (353)$$

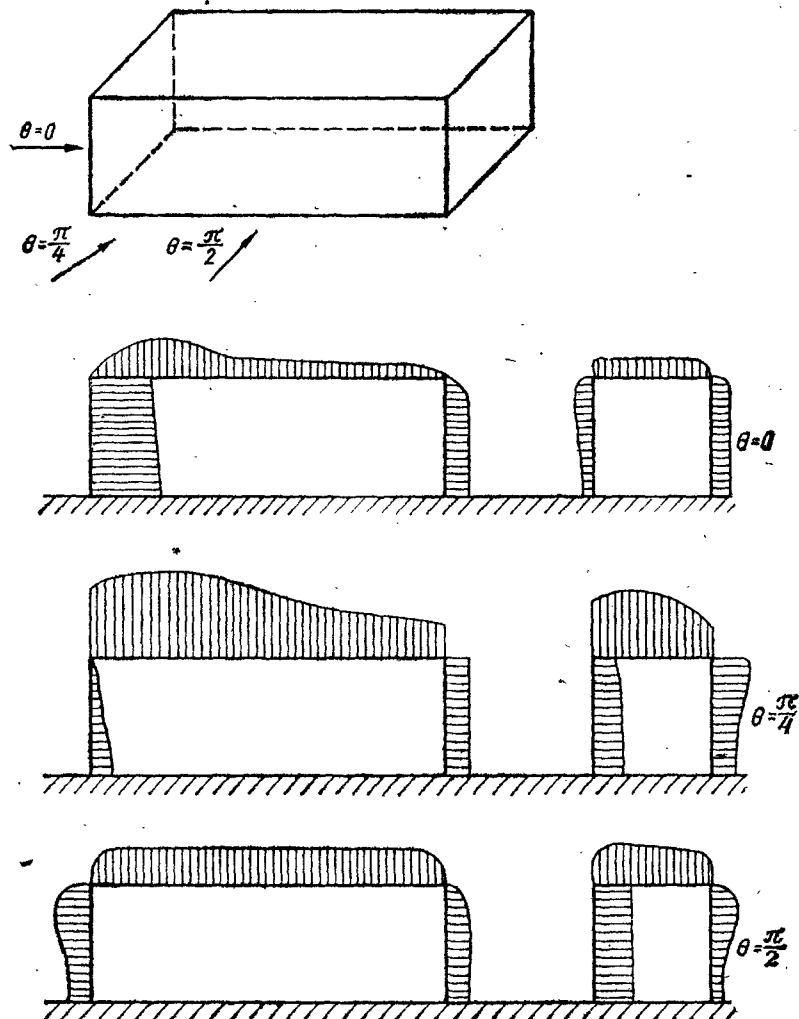
где  $p_{\text{ман}}$  — манометрическое давление в данной точке (в случае разрежения значение  $k$  получается отрицательным).

Аэродинамический коэффициент для различных конфигураций обтекаемых тел определяют на аэродинамических моделях и полученные данные откладывают в определенном масштабе в виде отрезков, нормальных к линии контура тела в данной точке. При этом положительное значение  $k$  откладывается внутри контура, а отрицательное — вне его. На рис. 164 показаны эпюры  $k$  при обтекании тела в форме параллелепипеда при трех направлениях ветра. При  $\theta = 0$  на лобовой (наветренной) стороне  $k = + (0,7 \div 0,8)$ , а на тыльной (заветренной)  $k = - (0,2 \div 0,3)$ .

Видно, что все грани за исключением наветренной стороны находятся в зоне разрежения.

Зная скорость ветра  $u_\infty$  и значение  $k$ , легко по формуле (353) подсчитать давление в данной точке контура.

Рис. 164. Эпюры аэродинамических коэффициентов при обтекании тела, имеющего форму параллелепипеда.



**Пример 42.** Определить разрежение, создаваемое дефлектором (рис. 130), при скорости ветра  $u_\infty = 10$  м/с и аэродинамическом коэффициенте  $k = -0,4$  ( $\rho = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>).

По формуле (353)

$$p_{\text{разр}} = 0,4 \frac{1,2 \cdot 10^2}{2} = 24 \text{ Па} \approx 2,4 \text{ мм вод. ст.}$$

## § 66

### Сопrotивление обтекаемых тел

Под сопротивлением тела понимается сила, с которой жидкая среда действует на равномерно движущееся в ней тело. Однако задачу можно рассматривать и в обратном движении, когда тело неподвижно, а жидкость обтекает его с равной, но противоположной скоростью. В этом случае тело оказывает сопротивление движущейся жидкости, на преодоление которого затрачивается часть энергии потока.

Проблема сопротивления движению тела в жидкости является фундаментальной в ряде областей техники (авиации, подводном плавании и пр.). Применительно к данному курсу задача сводится главным образом к расчету силы давления ветра на здания, сооружения и ограждающие конструкции, а также к определению взвешивающей способности потока воздуха для перемещения твердых материалов.

Впервые задача определения сил сопротивления была решена Ньютоном на основе следующих рассуждений.

Тело при своем движении за  $t$  с вытесняет со своего пути массу жидкости (рис. 165, а)

$$m/t = \rho \omega_y u,$$

где  $\omega_y$  — проекция тела на плоскость, нормальную к направлению движения (так называемое «миделево» сечение тела). При этом тело сообщает каждой частице жидкости скорость, пропорциональную скорости тела  $u$ . Применяв закон количества движения, получим выражение силы сопротивления

$$F = \frac{m}{t} u = c \rho \omega_y u^2, \quad (354)$$

где  $c$  — коэффициент пропорциональности.



Тот же результат получится при рассмотрении явления в обратном движении, когда тело неподвижно, а на него набегают поток со скоростью  $u_\infty$  (рис. 165, б).

Физически эта зависимость исходит из представления, что среда, в которой движется тело, состоит из мельчайших частиц с определенной массой, не связанных друг с другом. При столкновении частиц с телом они отражаются от него по закону удара, что и приводит к возникновению силы сопротивления.

Однако эта теория неверна. Сопротивление жидкости движущемуся в ней телу является результатом разности давлений между лобовой и тыльной его частью и касательных напряжений в пограничном слое. По Ньютону учитывается только лобовая часть поверхности тела, между тем как в действительности главной причиной сопротивления являются процессы, происходящие позади тела. Например, сопротивление клиновидного тела, обращенного острым концом навстречу потоку (рис. 166, а), будет больше сопротивления того же тела, обращенного навстречу потоку тупой стороной. Аналогично сопротивление полусферы,

обращенной выпуклостью навстречу потоку, будет больше сопротивления полусферы, обращенной выпуклостью по течению (рис. 166, б). Поэтому для уменьшения сопротивления обтекаемого тела нужно придать ему плавные очертания, при которых уменьшается интенсивность отрывных течений и, значит, сопротивление давлению.

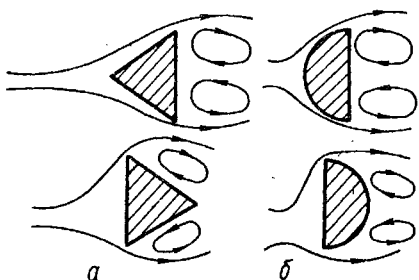
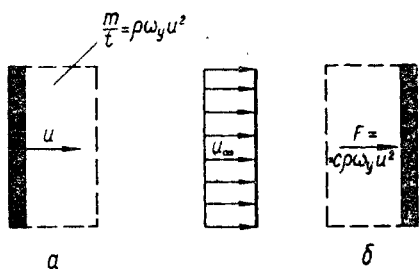


Рис. 165. К определению силы сопротивления:

а — тело движется в покоящейся жидкой среде; б — тело неподвижно, а поток набегают на него.

Рис. 166. Сопротивление:

а — клиновидного тела; б — полусферы.

Итак, сила сопротивления тела складывается из сопротивления давлению, возникающего в результате обтекания тела на лобовой и образования отрывных течений на тыльной стороне, и сопротивления трению, обусловленного пограничным слоем.

Рассчитывать силу сопротивления можно по формуле Ньютона (354), если коэффициент пропорциональности  $c$  учитывает указанные факторы. Поскольку сопротивление давлению зависит от формы тела, а сопротивление трению — от числа Рейнольдса, коэффициент сопротивления

$$c_f = f(\text{форма}, Re). \quad (355)$$

В случае сжимаемой жидкости  $c_f$  зависит еще от числа Маха ( $Ma$ ).

Для неподвижного тела и набегающего на него потока

$$F = c_f \omega_y \frac{\rho u_\infty^2}{2}. \quad (356)$$

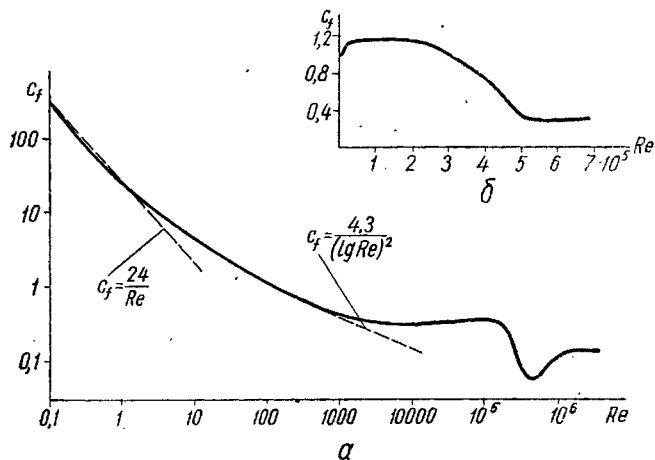
Знаменатель в этой формуле взят по аналогии с формулой Вейсбаха (239).

Коэффициент сопротивления  $c_f$  определяется экспериментально в каждом конкретном случае.

На рис. 167, а представлена зависимость  $c_f = f(Re)$  для шара. При  $Re < 1$  применима теоретическая формула

Рис. 167. Зависимость коэффициента сопротивления  $c_f$  от числа Рейнольдса:

а — для шара; б — для круглого цилиндра бесконечной ширины.



Стокса для ламинарного режима обтекания

$$c_f = 24/Re. \quad (357)$$

В диапазоне  $Re = 10 \div 2000$  можно пользоваться формулой Б. Н. Лобаева [29]

$$c_f = \frac{4,3}{(\lg Re)^2}. \quad (358)$$

При  $Re = 2000 \div 2 \cdot 10^5$  коэффициент сопротивления шара изменяется незначительно и примерно равен  $c_f = 0,5$ . В этих пределах происходит отрыв пограничного слоя при угле обтекания  $0,4\pi$ . При  $Re = 2 \cdot 10^5$  значение  $c_f$  резко уменьшается (от  $0,47$  до  $0,22$ ), что объясняется переходом ламинарного пограничного слоя в турбулентный и увеличением угла обтекания вследствие поперечных пульсаций до  $0,6\pi$ . Это явление называют *кризисом сопротивления*.

Аналогичную закономерность получаем для цилиндра (рис. 167, б) и некоторых других плавно очерченных тел, где при определенных значениях  $Re$  происходит отрыв пограничного слоя. Однако для тел весьма плавного очертания (крыло самолета, каплеобразный профиль и др.), при обтекании которых вообще не происходит отрыва, коэффициент сопротивления постепенно уменьшается с увеличением  $Re$ .

Для угловатых тел с инерционным отрывом коэффициент сопротивления практически не зависит от числа Рейнольдса и представляет собой постоянную величину. Ниже приведены некоторые значения коэффициента сопротивления  $c_f$ :

Форма тела	$c_f$
Шар:	
$Re < 10$	$\frac{24}{Re}$
$Re = 10 \div 2000$	$\frac{4,3}{(\lg Re)^2}$
$Re = 2000 \div 2 \cdot 10^5$	$0,47$
$Re > 2 \cdot 10^5$	$0,22$
Круглый цилиндр бесконечной длины:	
$Re = (0,3 \div 1,5) 10^5$	$1,2$
$Re = 5 \cdot 10^5$	$0,3$
Полусфера, обращенная выпуклостью навстречу потоку	$1,1$
Полусфера, обращенная выпуклостью по течению	$0,33$
Куб	$1,2$
Пластина круглой формы, установленная поперек потока	$1,1$

Прямоугольная пластинка с отношением сторон:

0	1,12
1	0,91
2	0,85
4	0,87
7	0,99

В заключение следует заметить, что скорость ветра не является постоянной величиной; она минимальна у поверхности земли и возрастает с высотой. Поэтому особенно большим ветровым давлениям подвергаются высотные здания и сооружения. Из-за ветрового воздействия на здание в зимний период возникает инфильтрация холодного воздуха в помещении, что приводит к увеличению теплопотерь.

Характер изменения скорости с высотой приближается (без учета влияния изменения температуры с высотой) к закону распределения скоростей в пограничном слое. Для оценки этого влияния можно воспользоваться формулой

$$u = u_{\infty} \left( \frac{y}{H} \right)^{1/10}, \quad (359)$$

где  $u$  — скорость ветра на расстоянии  $y$  от поверхности.

## § 67

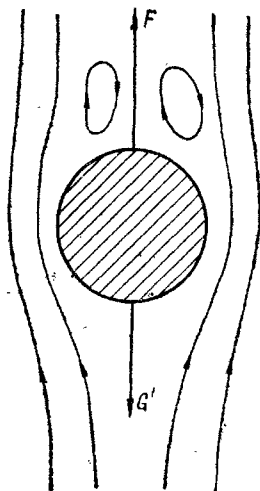
### Падение твердых тел в жидкости.

#### Скорость витания

При свободном падении твердой частицы в жидкой или газовой среде, находящейся в покое, только в первый момент наблюдается ускоренное движение; в дальнейшем возникающая сила сопротивления уравнивается действием силы тяжести и частица падает равномерно, с постоянной скоростью. Эта скорость называется *гидравлической крупностью*. Это понятие имеет большое значение при изучении процессов взвешивания и отстаивания в жидкости, а также для расчета трубопроводов для гидротранспорта частиц.

При изучении аналогичных процессов в воздушной среде используется понятие *скорости витания*.

Рис. 168. К выводу формулы скорости витания.



Под последней понимают скорость восходящего потока воздуха (в вертикальной трубе), при которой твердые частицы, находящиеся в этом потоке, будут совершать колебательные движения приблизительно на одном уровне (как бы витать), т. е. будут находиться во взвешенном состоянии. Иначе говоря, это понятие эквивалентно гидравлической крупности применительно к воздушной среде.

Выведем формулу скорости витания частицы шарообразной формы (рис. 168). Сила тяжести частицы, или ее вес

$$G = mg = \rho_{\text{ч}} g \frac{\pi D^3}{6},$$

где  $\rho_{\text{ч}}$  — плотность частицы.

В воздушной среде частица падает под действием силы  $G'$ , меньшей, чем  $G$ , вследствие влияния архимедовой силы

$$A = - \rho_{\text{в}} g \frac{\pi D^3}{6},$$

где  $\rho_{\text{в}}$  — плотность воздуха.

Таким образом, сила падения

$$G' = G + A = g (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{в}}) \frac{\pi D^3}{6}.$$

Сила сопротивления при падении частицы в воздухе согласно формуле (356)

$$F = c_f \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho_{\text{в}} v_{\text{вит}}^2}{2}.$$

Так как эти силы уравниваются при равномерном падении, то

$$g (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{в}}) \frac{\pi D^3}{6} = c_f \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho_{\text{в}} v_{\text{вит}}^2}{2},$$

откуда

$$v_{\text{вит}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{\frac{gD}{c_f} \frac{\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}}} = \frac{1,15}{\sqrt{c_f}} \sqrt{gD \frac{\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}}}. \quad (360)$$

Поскольку плотность воздуха  $\rho_{\text{в}}$  значительно меньше плотности транспортируемого материала, разность  $\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{в}}$  без большой ошибки можно заменить  $\rho_{\text{ч}}$ . Тогда формула для скорости витания шарообразной частицы принимает вид

$$v_{\text{вит}} = \frac{1,15}{\sqrt{c_f}} \sqrt{gD \frac{\rho_{\text{ч}}}{\rho_{\text{в}}}} = \frac{3 \cdot 62}{\sqrt{c_f}} \sqrt{D \frac{\rho_{\text{ч}}}{\rho_{\text{в}}}}. \quad (361)$$

Итак, зная коэффициент сопротивления частицы  $c_f$ , нетрудно по формуле (360) определить скорость витания. Данные для шаровидной частицы приведены на рис. 167, а также рассчитываются по формулам (357), (358). Так как значения  $c_f$  в свою очередь зависят от скорости, задача решается методом подбора.

**Пример 43.** Определить скорость витания шаровидной частицы, если  $D = 1$  мм и  $\rho_{\text{ч}} = 1200$  кг/м<sup>3</sup>.

Задаем скорость витания  $v_{\text{вит}} = 3$  м/с. Тогда

$$\text{Re} = \frac{v_{\text{вит}} \cdot D}{\nu} = \frac{3 \cdot 0,001}{0,15 \cdot 10^{-4}} = 200.$$

По формуле (358)

$$c_f = 4,3 / (\lg 200)^2 = 0,8.$$

По формуле (361)

$$v_{\text{вит}} = \frac{3,62}{\sqrt{0,8}} \sqrt{0,001 \frac{1200}{1,2}} = 4 \text{ м/с,}$$

т. е. скорость больше заданной.

Задаем  $v_{\text{вит}} = 4,1$  м/с. Тогда  $\text{Re} = 234$ ;  $c_f = 0,77$  и

$$v_{\text{вит}} = \frac{3,62}{\sqrt{0,77}} \sqrt{1} = 4,1 \text{ м/с,}$$

т. е. найденная скорость совпадает с заданной.

В практических условиях форма твердых частиц транспортируемого материала, концентрация и характер материала различны. Поэтому, чтобы получить конкретные данные для расчета, скорость витания разных материалов определяют экспериментальным путем в специальной трубе витания. Она изменяется в широких пределах — от 2 до 12 м/с.

Для обеспечения пневмотранспорта твердых материалов среднюю скорость движения воздуха в трубопроводе берут несколько большей (в зависимости от формы частиц и концентрации материала) скорости витания, определенной для шаровидной частицы по формуле (360).

Из изложенного ясно, что понятие скорости витания по существу относится к вертикальным участкам трубопроводов пневмотранспорта. На горизонтальных участках условия для перемещения твердых частиц иные.

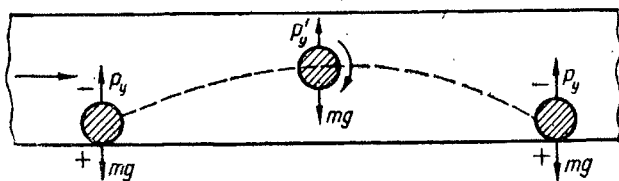
Рассмотрим механизм перемещения твердых частиц в горизонтальной трубе (рис. 169). Возьмем шаровидную

частицу, расположенную на дне трубы. При обтекании шара, как и при обтекании цилиндра, сверху частицы вследствие увеличения скорости образуется область пониженного давления и возникает подъемная сила  $P$ , которая при достаточной скорости поднимает частицу. Сила сопротивления  $F$  перемещает частицу в направлении движения воздуха в трубе, а сама частица начинает вращаться (в данном случае по часовой стрелке) в результате эффекта вязкостного трения. В дальнейшем, когда частица поднялась, действие подъемной силы  $P$  прекращается, но вращение частицы благодаря инерции и наличию поперечного градиента осредненных скоростей сохраняется. Последнее образует циркуляцию и соответствующую ей подъемную силу  $P_y$  (см. эффект Магнуса на с. 91). Эта сила, как правило, недостаточна для поддержания частицы во взвешенном состоянии. Поэтому частица, описав некоторую траекторию, падает на дно трубы и описанное явление повторяется.

В результате частицы движутся в воздушном потоке, описывая сложные, а после поворота трубы — винтовые траектории. Средняя скорость потока воздуха, при которой частицы начинают двигаться указанным образом в горизонтальной трубе, называется *скоростью веяния*.

Если весьма увеличить скорость течения воздуха, то можно добиться того, что твердые частицы будут перемещаться в горизонтальном трубопроводе, не падая на дно, т. е. будут находиться во взвешенном состоянии. Такая способность турбулентного потока объясняется наличием в нем поперечных пульсаций. Однако осуществлять пневмотранспорт таким образом вследствие большой разницы плотностей воздуха и материала экономически нецелесообразно, а в некоторых случаях даже невозможно. Наоборот, гидротранспорт, где разность плотностей материала и воды в большинстве случаев незначительна, осуществляется при

Рис. 169. К механизму перемещения твердых частиц потоком воздуха в горизонтальном направлении.



таких скоростях течения воды, когда частицы находятся во взвешенном состоянии.

Скорость веяния по абсолютной величине мало отличается от скорости витания. Поэтому на практике расчет пневмотранспорта ведут по скорости витания.

## Глава IX

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОАЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

#### § 68

#### Гидроаэродинамическое подобие

**Общие сведения.** При изучении гидроаэродинамических явлений необходимо широкое применение эксперимента. По существу ни один из вопросов, касающихся турбулентного движения жидкости, не может быть решен теоретически. С помощью эксперимента определяются условия, при которых возникает турбулентный режим течения: Все виды гидравлических сопротивлений, возникающих при турбулентном течении в трубах и каналах, и соответствующие им коэффициенты определяются опытным путем. Явления, связанные с обтеканием вязкой жидкостью твердых тел, также не могут быть выяснены без эксперимента и т. д.

Перед постановкой исследования экспериментатор должен знать, как должен быть поставлен эксперимент, как составить программу исследований и каким требованиям должна удовлетворять модель, какие величины надо измерять в опытах и какие приборы при этом надо использовать, как следует обрабатывать результаты опытов и на какие явления их можно распространить, как обобщать и анализировать данные экспериментов.

Ответить на все эти вопросы призваны методы подобия и размерностей, к рассмотрению которых и перейдем.

Опыты практически проводят на *моделях* натуральных объектов. Они просты в изготовлении, их малые размеры позволяют осуществлять в лаборатории разнообразные условия опытов и выявлять искомые закономерности.

Обоснование моделирования и использование в натуре результатов экспериментов на модели связано с *подобием* движения в натуре и на модели. Кроме того, подобие имеет значение и для некоторых теоретических исследований.



Общие принципы подобия для широкого класса физических явлений были сформулированы М. В. Кирпичевым. Начало теории гидроаэродинамического подобия было положено Н. Е. Жуковским. Моделирование вентиляционных систем разрабатывалось Е. В. Кудрявцевым.

Подобными называют явления, происходящие в геометрически подобных системах одинаковой физической природы, когда одноименные величины (например, скорости течения или силы, которые действуют в подобных точках\*) имеют между собой постоянные отношения, которые называются *масштабами*.

Каждая физическая величина имеет свой масштаб, причем для подобных механических величин (в частности, для несжимаемой жидкости и в отдельных случаях для сжимаемой) все масштабы можно выразить *тремя основными масштабами*: геометрическим, кинематическим и масштабом сил.

Если же рассматриваются явления, в которых принимают участие не только механические величины, для установления подобия необходимо еще знать соотношения между основными масштабами и масштабами других величин (например, при подобии тепловых процессов — соотношения между механическими и тепловыми величинами).

Итак, для установления подобия гидроаэродинамических явлений между натурой и моделью следует использовать правила механического подобия, т. е. должно быть выполнено одинаковое соотношение: линейных размеров (геометрическое подобие); скоростей и ускорений (кинематическое подобие) и действующих сил (динамическое подобие).

Два потока будут *геометрически подобными*, если между их соответствующими линейными размерами существует постоянное соотношение

$$l_n/l_m = k_l, \quad (362)$$

где  $k_l$  — линейный масштаб, показывающий, во сколько раз размеры модели  $l_m$  уменьшены по сравнению с размерами природы  $l_n$ .

---

\* *Подобными* называют точки подобных систем, которые одинаково расположены относительно их границ. Подобными могут быть точки пространства и моменты времени. Для установившегося движения (которое и рассматривается в данном курсе) подобными являются точки пространства.

Другие элементы геометрического подобия также выражают через линейный масштаб, например, отношение площадей

$$S_n/S_m = k_l^2 \quad (363)$$

и отношение объемов

$$V_n/V_m = k_l^3. \quad (364)$$

Два потока будут *кинематически подобны*, если спектры линии токов (поля скоростей) на модели и в натуре в подобных точках пространства (для установившегося движения) связаны масштабом

$$u_n/u_m = k_u. \quad (365)$$

Соответствующий масштаб ускорений выражается через масштабы скоростей и длин:

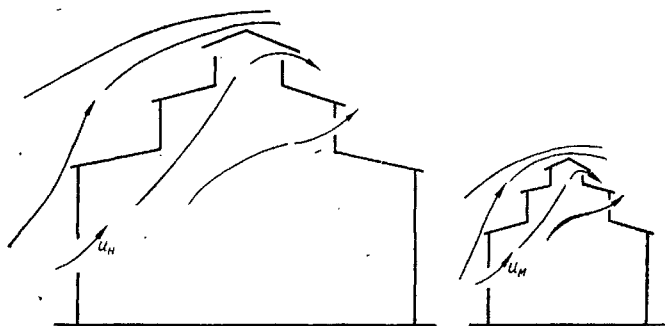
$$k_w = \omega_n/\omega_m = k_u^2/k_l. \quad (366)$$

На рис. 170 показаны подобные поля скоростей осредненного движения в виде линий тока при обтекании здания ветровым потоком. Масштабы турбулентных пульсаций отвечают условию геометрического подобия.

Для *динамического подобия* необходимо, чтобы все силы одинаковой природы, действующие в подобных точках модели и природы на частицы жидкости, отличались между собой только постоянными масштабами. Если на некоторый поток в натуре действует сила  $F_n$ , а на подобный элемент потока на модели действует сила  $F_m$ , одинаковая по природе с силой  $F_n$ , то

$$F_n/F_m = k_F. \quad (367)$$

Рис. 170. Пример подобного поля скоростей.



Выбор масштабных множителей  $k_l$ ,  $k_u$ ,  $k_F$  не является произвольным. Между ними имеется определенная связь. Силу, действующую на элемент потока согласно второму закону Ньютона, можно выразить как произведение массы на ускорение:

$$F = m\omega = \rho V\omega,$$

откуда масштаб сил

$$k_F = k_\rho k_l^3 k_\omega = k_\rho k_l^3 \frac{k_u^2}{k_t} = k_\rho k_l^2 k_u^2, \quad (368)$$

где  $k_\rho$  — масштаб плотности.

Полученное соотношение устанавливает искомую *связь между масштабными множителями*. Если отношение между действующими силами на модели и в природе известно, т. е. известен масштаб  $k_F$ , то при выбранном масштабе  $k_l$  и при заданных плотностях потоков (масштаб  $k_\rho$ ) можно найти  $k_u$  и другие множители.

Условие (368) можно трактовать и иначе. Жидкость рассматривается как сплошная среда, поэтому в ней при движении обязательно проявляются силы инерции  $I$ . Масштаб этой силы, как и всякий другой, по соотношению (368)

$$k_I = k_\rho k_l^2 k_u^2.$$

Следовательно, условие (368) можно записать еще так:

$$k_F = k_I, \quad \text{или} \quad k_l/k_F = 1, \quad (369)$$

т. е. для выполнения условий динамического подобия отношение между силами, определяющими явление на модели и в природе, и силами инерции должно быть одинаково.

**Критерии гидроаэродинамического подобия.** Условие гидроаэродинамического подобия требует равенства на модели и в природе отношения всех сил, под действием которых происходит явление. Однако практически невозможно создать условия подобия всех сил. Поэтому устанавливают частные условия подобия сил, определяющих явление, или *критерии подобия*.

Несжимаемая жидкость движется в результате действия основных сил (давления, тяжести и внутреннего трения, или вязкости) и сил инерции. При установлении критериев подобия определяют условия, обеспечивающие пропорциональность силам инерции тех действующих сил, которые считаются главными в данном явлении.

**Критерий Эйлера.** При рассмотрении гидроаэродинамических явлений мы прежде всего сталкиваемся с силами давления. Поэтому первый критерий динамического подобия получают, сравнивая масштабы сил давления и сил инерции. Сила давления равна произведению давления на площадь действия. Следовательно, масштаб этой силы

$$k_p = k_p k_l^2,$$

но  $k_p = k_l$ , поэтому  $k_p k_l^2 = k_p k_l k_u^2$ , откуда

$$\frac{k_p}{k_p k_u^2} = 1.$$

Заменяв масштабы соответствующими отношениями величин в натуре и на модели, находим

$$\frac{p_n}{\rho_n u_n^2} = \frac{p_m}{\rho_m u_m^2}.$$

Обозначив это соотношение через  $Eu$ , получаем

$$Eu = \frac{p}{\rho u^2} = \text{idem}, \quad (370)$$

где термин *idem* означает, что условия, определяемые данным соотношением, должны быть одинаковы на модели и в натуре. Полученный критерий называют *числом Эйлера*.

Нас обычно интересуют не абсолютные давления, а разность давлений  $\Delta p$  в двух точках системы. Величину  $p$  в условии (370) можно заменить на  $\Delta p$  и критерий Эйлера примет вид

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho u^2}.$$

Обращаясь к формулам (239) Вейсбаха для гидравлических сопротивлений, с учетом последнего соотношения можно написать

$$Eu = \zeta/2.$$

Следовательно, при квадратичном законе сопротивления числа Эйлера на модели и в натуре равны. Однако, как увидим ниже, критерий Эйлера не является определяющим.

**Критерий Рейнольдса.** Выясним условия динамического подобия потоков, когда определяющими

являются силы внутреннего трения (вязкости). Масштаб касательных сил получаем из формулы (6):

$$k_T = k_l^2 k_\mu \frac{k_u}{k_l} = k_l k_\mu k_u.$$

Приравнивая этот масштаб к масштабу сил инерции, находим

$$k_l k_\mu k_u = k_p k_l^2 k_u^2,$$

откуда

$$\frac{k_l k_u k_p}{k_p} = 1.$$

Заменив масштабы соответствующими отношениями величин в натуре и на модели, получим

$$\frac{u_n l_n \rho_n}{\mu_n} = \frac{u_m l_m \rho_m}{\mu_m}.$$

Обозначив это отношение через  $Re$ , получаем критерий Рейнольдса

$$Re = \frac{ul\rho}{\mu} = \frac{ul}{\nu} = \text{idem.} \quad (371)$$

Критерий Рейнольдса является важнейшей характеристикой исследуемого явления, так как от соотношения между силами инерции и силами вязкости зависят основные свойства движущейся жидкости (см. § 35).

Обратим внимание на следующее очень важное обстоятельство. При соблюдении критерия Рейнольдса на модели и в натуре критерий Эйлера выполняется автоматически. Действительно, геометрическая сумма действующих сил и сил инерции равна нулю и поэтому при действии сил давления  $P$ , сил вязкости  $T$  и инерции  $I$  можно написать, что

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{I} = 0,$$

откуда

$$\frac{\vec{I}_n}{\vec{I}_m} = - \frac{\vec{P}_n + \vec{T}_n}{\vec{P}_m + \vec{T}_m}.$$

По условию  $\frac{\vec{T}_n}{\vec{T}_m} = \frac{\vec{I}_n}{\vec{I}_m} = k_l$ , следовательно, и  $k_p = \frac{\vec{P}_n}{\vec{P}_m} = k_l$ , т. е. равенство указанных масштабов и озна-

чает выполнение критерия  $Eu$  при  $Re_m = Re_n$ .

Если жидкости на модели и в натуре одинаковы ( $k_\rho = 1$ ), то при равенстве  $Re_n = Re_m$ , как следует из уравнения (371),

$$u_n l_n = u_m l_m, \text{ или } k_l = l/k_u. \quad (372)$$

Последняя зависимость показывает, что моделирование по Рейнольдсу требует увеличения скорости на модели по сравнению с натурой в  $k_l$  раз. Такое условие практически трудно выполнить. В некоторых случаях это затруднение удается устранить, если на модели применить жидкость с меньшей кинематической вязкостью  $\nu$ . Тогда

$$\frac{l_n}{l_m} = \frac{u_m \nu_n}{u_n \nu_m},$$

откуда

$$k_l = k_\nu / k_u. \quad (373)$$

Следовательно, необходимое увеличение скорости на модели уменьшается пропорционально уменьшению вязкости данной жидкости, т. е. в  $k_\nu$  раз.

Например, при исследовании движения воздуха на модели с водой в гидравлическом лотке, учитывая, что для воздуха при температуре  $2^\circ\text{C}$  кинематическая вязкость приблизительно в 15 раз больше, чем для воды (см. табл. 1), можно при условии равенства скоростей на модели и в натуре ( $k_u = 1$ ) добиться одинаковых значений  $Re$  на модели и в натуре при линейном масштабе  $k_l = 15$ . Но для большинства аэродинамических исследований этот масштаб оказывается недостаточным.

Моделирование со строгим соблюдением подобия сил вязкости встречается редко.

Проанализируем на некоторых примерах, насколько существенно сказывается на оценке явления несоблюдение условия равенства чисел Рейнольдса на модели и в натуре. Обратимся к графикам зависимости (рис. 95, 99) коэффициента гидравлического трения от  $Re$  при разной шероховатости. Видно, что для шероховатых труб значения  $\lambda$  в широком диапазоне изменения не зависят от числа Рейнольдса. Такая же закономерность получается для коэффициента сопротивления  $c_f$  при обтекании угловых тел. Наконец, коэффициенты местных сопротивлений  $\zeta$  считаются практически не зависящими от  $Re$ .

Приведенные примеры показывают, что при достаточно больших значениях  $Re$  для ряда явлений изменение числа Рейнольдса не влияет на сам характер явления. О таких явлениях говорят, что они *автомоделны* по отношению к

числу Рейнольдса, т. е. явления качественно не изменяются, несмотря на уменьшение  $Re$ .

С точки зрения динамического подобия этот результат можно объяснить так. Число Рейнольдса характеризует отношение сил инерции к силам вязкости. Независимость указанных явлений от величины этого отношения означает, что силы вязкости по сравнению с силами инерции в определенном диапазоне изменения  $Re$  не оказывают существенного влияния на механизм явления. Иначе говоря, мы имеем дело с крупномасштабными турбулентными пульсациями, интенсивность которых практически не зависит от вязкости и числа Рейнольдса (см. с.154). Следовательно, и эффект гидравлических сопротивлений, которые происходят в результате перехода кинетической энергии крупномасштабных пульсаций в мелкомасштабные, где она и рассеивается, также не зависит от  $Re$ .

Условие автомодельности значительно облегчает экспериментальные исследования, давая возможность ставить опыты на моделях с соблюдением только геометрического и кинематического подобия. Например, в опытах Ф. А. Серебровского при аэродинамических испытаниях жилой застройки на модели с линейным масштабом  $k_l = 200$  и соответствующими значениями  $Re_n = 2,3 \cdot 10^6$  и  $Re_m = 7,5 \cdot 10^4$  относительные скорости воздушных потоков в пространстве между зданиями, на модели и в натуре были практически одинаковы.

Следует отметить, что условие автомодельности по Рейнольдсу эквивалентно соблюдению критерия Эйлера (см. с. 325)

**К р и т е р и й Ф р у д а.** Рассмотрим условия подобия сил тяжести. Масштаб сил тяжести (веса)

$$k_G = k_p k_g k_l^3.$$

Этот масштаб равен масштабу сил инерции:

$$k_p k_g k_l^3 = k_p k_l^2 k_u^2,$$

откуда

$$\frac{k_u^2}{k_g k_l} = 1,$$

или

$$Fr = \frac{u^2}{gl} = \text{idem.} \quad (374)$$

Это число называют *критерием Фруда*, или критерием гравитационного подобия. При моделировании по Фруду (при масштабе ускорения сил тяжести  $k_g = 1$ )

$$k_u = \sqrt{k_l}. \quad (375)$$

Следовательно, скорости на модели уменьшаются прямо пропорционально квадратному корню из линейного масштаба модели. Такое соотношение весьма удобно для исследований.

Сопоставив уравнения (372) и (375), видим, что одновременно нельзя удовлетворить равенству критериев Рейнольдса и Фруда для одной и той же жидкости на модели и в натуре.

Моделирование по Фруду имеет большое значение при исследовании работы гидротехнических сооружений.

**К р и т е р и й А р х и м е д а.** При исследовании гравитационных систем воздушного отопления и вентиляции, где силы тяжести действуют как архимедовы силы, возникающие вследствие разности плотностей  $\rho - \rho_0$  двух сред (течение струи в среде другой плотности), применяется критерий Архимеда. Он представляет собой отношение выталкивающей силы к силам инерции, т. е. величину, обратную  $F_g$ . Ускорение, вызванное действием этой силы, равно  $\frac{\rho - \rho_0}{\rho} g$ . В результате получаем

$$Ar = \frac{gl}{u^2} \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = \text{idem}. \quad (376)$$

При изучении движения воздуха путем конвекции пользуются критерием, получаемым перемножением числа Архимеда на квадрат числа Рейнольдса. Этот критерий называется *критерием Грасгофа*:

$$Gr = Ar Re^2 = \frac{gl^3}{\nu^2} \frac{\rho - \rho_0}{\rho}. \quad (377)$$

При исследовании некоторых задач вентиляции возникает вопрос о моделировании турбулентности наружной атмосферы. Турбулентность можно характеризовать коэффициентом турбулентного обмена [формула (189)]. Тогда аналогично числу Рейнольдса получается критерий подобия

$$\frac{u_H l_H}{\varepsilon_H} = \frac{u_M l_M}{\varepsilon_M},$$

откуда

$$\frac{\varepsilon_H}{\varepsilon_M} = \frac{l_H}{l_M} \frac{u_H}{u_M} = k_l \frac{u_H}{u_M}.$$



При моделировании по Архимеду, как и по Фруду,

$$u_n/u_m = \sqrt{k_l}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_n/\varepsilon_m = k_l^{3/2}. \quad (378)$$

Например, при линейном масштабе  $k_l = 200$  коэффициент турбулентной вязкости в среде, окружающей модель,

$$\varepsilon_m = \varepsilon_n/20^{3/2} = \varepsilon_n/90,$$

т. е. ничтожно мал. Полученный результат свидетельствует, что для малых моделей очень большое значение имеет ликвидация всяких случайных возмущений окружающей атмосферы.

**К р и т е р и й М а х а.** При моделировании движения сжимаемой жидкости прибавляется еще один критерий подобия. Если исходить из адиабатического закона изменения состояния, масштаб давления согласно формуле (121) для скорости распределения звука в упругой среде может быть представлен зависимостью

$$k_p = k_\rho k_a^2.$$

Тогда масштаб сил давления

$$k_p = k_\rho k_l^2 = k_\rho k_a^2 k_l^2.$$

Приравнивая этот масштаб к масштабу сил инерции

$$k_l^2 k_a^2 k_\rho = k_l^2 k_u^2 k_\rho,$$

находим, что

$$k_u^2/k_a^2 = 1, \text{ или } k_u/k_a = 1,$$

откуда

$$Ma = u/a = \text{idem}, \quad (379)$$

т. е. мы получили уже известное нам число Маха.

## § 69

### Метод анализа размерностей

Метод анализа размерностей используют для изучения явления, где аналитические уравнения задачи неизвестны, но известны физические факторы, от которых зависит изучаемое явление. С помощью этого метода обрабатывают данные опытов и делают последующие обобщения.

Начало методу анализа размерностей положил Ж. Фурье, а в дальнейшем его развивали О. Рейнольдс, Н. Е. Жуковский, Р. Букингэм, акад. Л. Н. Седов и др.

Метод анализа размерностей основывается на следующих основных положениях.

Формулу размерностей производных единиц можно представить в виде степенного комплекса основных единиц. Если обозначить физическую (механическую) величину через  $W$ , ее размерность в системе СИ можно записать так:

$$\dim W = (L)^\alpha (M)^\beta (T)^\gamma. \quad (380)$$

**Пи-теорема**, впервые сформулированная Н. Е. Жуковским и развитая в дальнейшем Р. Букингэмом, гласит: *уравнение, связывающее между собой  $n$  размерных величин, характеризующих изучаемое явление, может быть представлено в виде зависимости между  $n - k$  безразмерными комбинациями (комплексами) этих величин, где  $k$  — число основных единиц.*

Пусть величина  $W$  является функцией  $n$  размерных величин:

$$W = f(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (381)$$

Можно доказать, что эта зависимость заменится уравнением

$$\Pi = f(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}), \quad (382)$$

где роль размерных величин играет  $n - k$  безразмерных величин. В гидроаэродинамических исследованиях основная система состоит из трех единиц (кг, м, с), значит  $k = 3$ , и вместо  $n$  величин изучаемое явление представляется в виде зависимости между  $n - 3$  безразмерными комплексами этих величин.

Зависимость (382) — то критериальное уравнение, которое исследователь должен установить, анализируя опытные данные в виде комбинаций безразмерных комплексов.

Иллюстрируем построение критериальных уравнений с помощью анализа размерностей следующими двумя классическими примерами.

**Два режима течения жидкости.** В опытах Рейнольдса (§ 35) режим течения жидкости (т. е. исследуемое явление) определялся следующими величинами, которые мы считали известными: средней скоростью течения  $v$ , вязкостью и плотностью жидкости ( $\mu$  и  $\rho$ ), а также диаметром трубы  $d$ . Таким образом, для данного случая общая функциональная зависимость (381) выражается четырьмя переменными величинами, т. е.

$$\Pi = f(v, \mu, \rho, d).$$

В данном случае искомый режим течения жидкости не является размерной величиной  $W$ , а представляет собой безразмерную величину  $\Pi$  —

функцию четырех переменных. В соответствии с Пи-теоремой эту функцию можно выразить безразмерным комплексом из  $n - 3 = 4 - 3 = 1$ , т. е. из одной величины  $\pi$ .

Для определения  $\pi$  напишем

$$\pi = v^\alpha \mu^\beta \rho^\gamma d^\delta,$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  — показатели, подлежащие определению.

Заменим величины в последнем уравнении размерностями этих величин:

$$M^0 L^0 T^0 = (LT^{-1})^\alpha (ML^{-1}T^{-1})^\beta (ML^{-1})^\gamma (L)^\delta.$$

В левой части безразмерная величина  $\pi$  выражена через размерность основных величин в нулевой степени. Приравнявая показатели степени при основных единицах слева и справа, получаем систему трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \beta - 3\gamma + \delta &= 0; \\ \beta + \gamma &= 0; \\ -\alpha - \beta &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда, разрешая все неизвестные относительно одной величины, например,  $\alpha$ , находим, что

$$\alpha = -\beta; \quad \alpha = \gamma; \quad \alpha = \delta.$$

Таким образом, искомый безразмерный комплекс принимает вид

$$\pi = (v\rho d/\mu)^\alpha,$$

где неизвестный показатель степени  $\alpha$  может иметь любое значение, отличное от нуля, поскольку безразмерное число в любой степени остается безразмерным. Проще всего принять  $\alpha = 1$ ; тогда получаем

$$\pi = Re = v\rho d/\mu = vd/v.$$

Теперь становится ясным, каким образом исследователь, изучая закономерности изменения коэффициента гидравлического трения в зависимости от скорости течения, вязкости жидкости, диаметра и материала труб, применяя метод анализа размерностей, пришли к обобщенной зависимости  $\lambda = f\left(Re, \frac{k}{d}\right)$ .

**Сила сопротивления при движении твердого тела в жидкости.** Опытами установлено, что сила сопротивления  $F$ , возникающая при обтекании жидкостью твердого тела (например шара), зависит от скорости набегающего потока  $u_\infty$ , свойств жидкости ( $\mu$  и  $\rho$ ), геометрических размеров тела (для шара от его диаметра  $D$ ).

Напишем искомую зависимость в виде степенного комплекса

$$F = c\rho^\alpha u_\infty^\beta D^\gamma \mu^\delta,$$

где  $c$  — безразмерный коэффициент.

В данном случае имеем пять размерных величин. Следовательно, в соответствии с Пи-теоремой в безразмерном виде эту зависимость можно выразить двумя величинами.

Применим формулу размерности (380), учитывая размерность силы —  $MLT^{-2}$ :

$$MLT^{-2} = (ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta (ML^{-1}T^{-1})^\delta.$$

Приравнивая показатели степени в левой и правой частях, получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \alpha + \delta; \\ 1 &= \beta + \gamma - 3\alpha - \delta; \\ 2 &= \beta + \delta. \end{aligned} \right\}$$

Представим теперь  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  в виде функции от  $\delta$ :

$$\alpha = 1 - \delta;$$

$$\beta = 2 - \delta;$$

$$\gamma = 2 - \delta,$$

после чего формула силы сопротивления при обтекании шара принимает вид

$$F = c\rho^{1-\delta}u_{\infty}^{2-\delta}D^{2-\delta}\mu^{\delta} = c_1 \frac{\rho u_{\infty}^2}{2} \frac{\pi D^2}{4} \left( \frac{\mu}{\rho u_{\infty} D} \right)^{\delta},$$

откуда

$$\frac{F}{\frac{\rho u_{\infty}^2}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4}} = c_1 \left( \frac{1}{\text{Re}} \right)^{\delta},$$

где  $c_1 = \frac{8}{\pi} \cdot c$ ;  $\text{Re} = \frac{\rho u_{\infty} D}{\mu}$  — безразмерный комплекс.

Безразмерный комплекс в левой части последнего равенства характеризует отношение искомой силы сопротивления к динамическому давлению, скорости набегающего потока  $u_{\infty}$  и площади проекции обтекаемого тела на направление движения (миделево сечение  $\omega$ ). Этот комплекс и называют коэффициентом сопротивления  $c_f$ .

Итак,

$$\frac{F}{\frac{\rho u_{\infty}^2}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4}} = c_1 \frac{1}{\text{Re}^{\delta}} = c_f,$$

откуда

$$F = c_f \frac{\rho u_{\infty}^2}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4},$$

т. е. получена формула (356).

Методы подобия и размерностей тесно связаны между собой. В то же время имеется и различие. Оба требуют отчетливого представления о механизме рассматриваемого явления. Однако для применения теории подобия нужны уравнения, определяющие процесс, а метод анализа размерностей становится необходимым, когда уравнения процесса неизвестны.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альтшуль А. Д. Гидравлические сопротивления. М., Недра, 1970.
2. Альтшуль А. Д., Киселев П. Г. Гидравлика и аэродинамика. М., Стройиздат, 1975.
3. Брэдишоу П. Введение в турбулентность и ее измерение. М., Мир, 1974.
4. Дейли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости. М., Энергия, 1971.
5. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика. М., Высшая школа, 1978.
6. Золотарев С. С. Аэродинамика судовой вентиляции. Л., Судостроение, 1967.
7. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М., Машиностроение, 1975.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1978.
9. Некрасов Б. Б. Гидравлика и ее применение на летательных аппаратах. М., Машиностроение, 1967.
10. Повх И. Л. Техническая гидромеханика. Л., Машиностроение, 1976.
11. Примеры расчетов по гидравлике / Под ред. А. Д. Альтшуля. М., Стройиздат, 1976.
12. Ретгер Э. И., Стриженов С. И. Аэродинамика зданий. М., Стройиздат, 1968.
13. Седов Д. И. Методы подобия и размерности. М., Наука, 1974.
14. Справочник по гидравлике / Под ред. В. А. Большакова. Киев, Вища школа, Головное изд-во, 1977.
15. Справочник по гидравлическим расчетам / Под ред. П. Г. Киселева. М., Энергия, 1977.
16. Тадеиз В. Н. Аэродинамика вентиляции. М., Стройиздат, 1979.
17. Чугаев Р. Р. Гидравлика. Л., Энергия, 1975.
18. Батурин В. В. Основы промышленной вентиляции. М., Профиздат, 1965.
19. Комитет технической терминологии АН СССР. Гидромеханика. М., изд-е АН СССР, 1962.
20. Лобаев Б. Н. Расчет воздухопроводов. Киев, Госстройиздат УССР, 1956.
21. Лобачев П. В., Шевелев Ф. А. Расходомеры для систем водоснабжения и канализации. М., Стройиздат, 1976.
22. Миллионщиков М. Д. Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. М., Наука, 1969.
23. Никитин И. К. Турбулентный русловой поток и процессы в придонной области. Киев, изд-е АН УССР, 1963.
24. Розовский И. Л., Дейнека В. Н. Влияние донных порогов на кинематику течения в каналах.— В сб.: Гидравлика и гидротехника, 1976, вып. 23, с. 16—21.
25. Смыслов В. В. Расчет пропускной способности трубопроводов при большой скорости течения газа.— В сб.: Санитарная техника, вып. 9. Киев, Госстройиздат УССР, 1956, с. 48—35.
26. Чжен П. Отрывные течения, т. 1. М., Мир, 1972.
27. Чугаев Р. Р. Гидравлические термины. М., Высшая школа, 1974.
28. Шевелев Ф. А. Таблицы для гидравлического расчета стальных, чугунных, асбестоцементных и пластмассовых труб, М., Стройиздат, 1970.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава I. Общие сведения</b>	
§ 1. Предмет гидравлики и аэродинамики. Методы их изучения . . . . .	5
§ 2. Основные величины . . . . .	8
§ 3. Основные физические свойства жидкостей . . . . .	11
§ 4. Обозначения, единицы и размерности величин . . . . .	18
<b>Глава II. Гидростатика</b>	
§ 5. Гидростатическое давление и его свойства . . . . .	20
§ 6. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера) . . . . .	22
§ 7. Интегрирование уравнений Эйлера. Поверхности уровня . . . . .	24
§ 8. Основное уравнение гидростатики в поле сил тяжести . . . . .	25
§ 9. Закон Паскаля и его практическое приложение . . . . .	28
§ 10. Абсолютное и манометрическое давление, вакуум . . . . .	30
§ 11. Пьезометрическая высота и пьезометрический напор . . . . .	36
§ 12. Примеры применения основного уравнения гидростатики . . . . .	40
§ 13. Сила давления жидкости на плоские стенки . . . . .	44
§ 14. Сила давления жидкости на цилиндрические поверхности . . . . .	50
§ 15. Закон Архимеда . . . . .	54
§ 16. Равновесие газа с учетом его сжимаемости . . . . .	56
<b>Глава III. Движение невязкой жидкости (элементы гидроаэродинамики)</b>	
§ 17. Основные понятия кинематики жидкости . . . . .	58
§ 18. Кинематика плоских потенциальных течений . . . . .	69
§ 19. Примеры плоских потенциальных течений . . . . .	73
§ 20. Основные уравнения динамики жидкости . . . . .	83
§ 21. Уравнение Д. Бернулли . . . . .	86
<b>Глава IV. Основные уравнения гидравлики (одномерное течение жидкости)</b>	
§ 22. Метод гидравлики и понятие элементарной струйки . . . . .	93
§ 23. Уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкой несжимаемой жидкости . . . . .	95
§ 24. Уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкой сжимаемой жидкости . . . . .	98

§ 25. Влияние сжимаемости газа на его течение . . . . .	100
§ 26. Основные характеристики потока жидкости . . . . .	103
§ 27. Удельная энергия потока несжимаемой жидкости . . . . .	107
§ 28. Уравнение Бернулли для потока несжимаемой жидкости без учета потерь энергии . . . . .	111
§ 29. Общие сведения о потерях энергии (гидравлических сопротивлениях) . . . . .	117
§ 30. Уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости и три формы его представления . . . . .	119
§ 31. Уравнение Бернулли для потока вязкой сжимаемой жидкости . . . . .	124
§ 32. Уравнение количества движения для установившегося потока несжимаемой жидкости . . . . .	126

## Глава V. Потери энергии при движении жидкости

§ 33. Общие сведения . . . . .	131
§ 34. Уравнение равномерного движения и его характеристики . . . . .	135
§ 35. Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкости. Число Рейнольдса . . . . .	137
§ 36. Ламинарное течение в круглых трубах и его характеристики . . . . .	142
§ 37. Основные характеристики турбулентного движения . . . . .	147
§ 38. Формула Дарси для расчета потерь энергии по длине трубы. Формула Шези . . . . .	155
§ 39. Распределение скоростей по сечению трубы и полуэмпирические теории турбулентного движения . . . . .	157
§ 40. Коэффициент гидравлического трения технических трубопроводов . . . . .	169
§ 41. Движение жидкости в трубах и каналах некруглого сечения . . . . .	177
§ 42. Причины возникновения местных сопротивлений . . . . .	180
§ 43. Формула Вейсбаха для расчета местных потерь энергии . . . . .	186
§ 44. Теоретический подход к определению местных потерь энергии . . . . .	188
§ 45. Значения коэффициентов сопротивления для различных случаев . . . . .	195
§ 46. Участок стабилизации и взаимное влияние местных сопротивлений . . . . .	211
§ 47. Влияние числа Рейнольдса на коэффициенты местных сопротивлений . . . . .	214
§ 48. Уравнение Бернулли в развернутом виде в форме напоров и в форме давлений . . . . .	216
§ 49. Примеры применения уравнения Бернулли . . . . .	218

## Глава VI. Истечение жидкости из отверстий и насадков

§ 50. Истечение несжимаемой жидкости из малого отверстия в тонкой стенке . . . . .	229
§ 51. Нормальная диафрагма для измерения расхода . . . . .	233
§ 52. Расчет отверстий для аэрации зданий . . . . .	236
§ 53. Истечение через насадки . . . . .	240
§ 54. Зависимость коэффициентов истечения от числа Рейнольдса . . . . .	245
§ 55. Истечение сжимаемой жидкости (газа) из отверстий . . . . .	246
§ 56. Сопло Лавала (сверхзвуковое сопло) . . . . .	255
§ 57. Затопленные воздушные струи . . . . .	259

## Глава VII. Гидравлический расчет трубопроводов

§ 58. Общие положения . . . . .	267
§ 59. Гидравлический удар . . . . .	273
§ 60. Расчет трубопроводов в квадратичной области сопротивления . . . . .	278
§ 61. Расчет трубопроводов в неквадратичной области сопротивления . . . . .	281
§ 62. Расчет газопроводов при больших разностях давлений . . . . .	290

## Глава VIII. Обтекание тел потоком жидкости

§ 63. Пограничный слой и начальный участок течения . . . . .	294
§ 64. Отрыв пограничного слоя и формирование отрывных течений . . . . .	302
§ 65. Распределение давлений и аэродинамический коэффициент . . . . .	308
§ 66. Сопротивление обтекаемых тел . . . . .	311
§ 67. Падение твердых тел в жидкости. Скорость витания . . . . .	315

## Глава IX. Моделирование гидроаэродинамических явлений

§ 68. Гидроаэродинамическое подобие . . . . .	319
§ 69. Метод анализа размерностей . . . . .	328
Список литературы . . . . .	332



**Виктор Викторович Смыслов**

**ГИДРАВЛИКА  
И АЭРОДИНАМИКА**

Редактор Н. А. Логинова  
Переплет художника Д. С. Бродского  
Художественный редактор А. Е. Кононов  
Технические редакторы Т. И. Трофимова,  
С. Л. Светлова  
Корректор Т. А. Левицкая

---

Информ. бланк № 2200

Сдано в набор 30.11.78. Подп. в печать 7.06.79. БФ 08663. Формат 84×108<sup>1/32</sup>. Бумага типогр. № 9. Лит. гарн. Выс. печать, 17,64 усл. печ. л. 17,03 уч.-изд. л. Тираж 6000 экз. Изд. № 3985. Зак. № 9—204. Цена 75 к.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа», 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, г. Киев, Довженко, 3, в Харьковской городской типографии № 16, Харьков-3, Университетская, 16, Зак. 1137.

75 к.



**В. В. Смыслов**

**ГИДРАВЛИКА И АЭРОДИНАМИКА**