

Гидроаэромеханика

издательство харьковского университета

выпуск

1

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
СБОРНИК

ГИДРОАЭРОМЕХАНИКА

Выпуск 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Х а р ь к о в 1965

В сборнике помещены статьи, содержащие новые результаты теоретических и экспериментальных исследований в области аэрогидромеханики, газовой динамики, теории упругости, теплопередач. Рассматриваются вопросы фильтрации грунтовых вод, исследования потока газа в трубах, регулирования гидромеханических систем движения твердых тел с полостями, заполненными жидкостью, колебания канатов и др.

Сборник рассчитан на инженеров, аспирантов и научных работников, занимающихся вопросами аэрогидромеханики и теории упругости.

Сборник подготовлен Днепропетровским государственным университетом
Министерства высшего и среднего специального образования
УССР

Редакционная коллегия: докт. техн. наук, проф. *Ю. А. Шевляков* (отв. редактор), докт. техн. наук, проф. *Ф. А. Абрамов*, канд. физико-матем. наук *П. Х. Деркач*, докт. техн. наук, проф. *В. М. Ковтуненко*, инж. *Ф. И. Кондратенко*, докт. техн. наук, проф. *А. Б. Моргавский*, проф. *А. М. Мхитарян*, член-корр. АН УССР *И. П. Повх* (зам. отв. редактора), канд. физико-матем. наук *А. К. Приварников* (отв. секретарь).

РАСЧЕТ ПРОЦЕССА ОПОРОЖНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ЕМКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Н. П. Белик, Н. М. Беляев, Г. С. Шандоров

Днепропетровский университет

При решении многих инженерных задач возникает необходимость в расчете процесса опорожнения газовой емкости. Имеется ряд работ, в которых предлагаются расчетные соотношения для случая опорожнения газовой емкости через отверстие постоянного сечения [1, 2, 3, 4, 5]. В работе [6] рассмотрено истечение газа из резервуара постоянного объема через сопло с переменной по времени площадью критического сечения при изотермическом и адиабатическом изменении параметров газа в резервуаре.

Действительный процесс изменения параметров газа в емкости вследствие теплообмена протекает при переменном показателе политропы. Покажем, что процесс опорожнения газовой емкости с учетом теплообмена может быть рассчитан без определения среднего показателя политропы.

Рассмотрим истечение газа из емкости постоянного объема при сверхкритическом перепаде давлений в емкости и в среде, в которую истекает газ.

Изменение параметров газа в емкости при ее опорожнении описывается уравнениями [7]:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{k-1}{V} \left[E \frac{dQ}{d\tau} - iG \right]; \quad (1)$$

$$\frac{dp}{d\tau} = - \frac{k-1}{G} \left(E \frac{dQ}{d\tau} - iG \right). \quad (2)$$

Выражения энтальпии и текущего расхода имеют вид:

$$i = \frac{k}{k-1} RT, \quad (3)$$

$$G = \mu m f(\tau) \frac{p}{\sqrt{T}}, \quad (4)$$

где

$$m = \sqrt{k g \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{1}{R}}.$$

Величина теплового потока от стенки емкости к газу определяется выражением

$$\frac{dQ}{d\tau} = \alpha (T_0 - T) F. \quad (5)$$

Примем, что теплообмен между стенками и газом происходит за счет свободной конвекции. Тогда для значений $Pr Gr > 2 \cdot 10^7$ коэффициент теплоотдачи определяется из выражения [8]:

$$\alpha = A (T_0 - T)^{1/3},$$

где

$$A = A_0 \rho^{2/3}.$$

Вес емкости всегда существенно больше веса газа, заключенного в ней. Учитывая это обстоятельство, а также большую теплопроводность металла и наличие подвода тепла от окружающей среды, можно принять, что температура внутренней стенки емкости остается практически постоянной при достаточно большой длительности процесса опорожнения.

Принимая температуру стенки емкости постоянной, имеем

$$\frac{dQ}{d\tau} = A_0 \rho^{2/3} (T_0 - T)^{4/3} F. \quad (6)$$

Аппроксимируем давление и температурный напор методом наименьших квадратов следующими линейными зависимостями:

$$p^{2/3} = \varepsilon p = \frac{9}{8} \frac{p}{p_0^{1/3}}, \quad (7)$$

при изменении давления от 0 до p_0 ;

$$(T_0 - T)^{4/3} = \beta (T_0 - T) = \frac{18}{20} T_0^{1/3} (T_0 - T), \quad (8)$$

при изменении температурного напора от 0 до T_0 .

С учетом (6), (7), (8) уравнение (5) примет вид:

$$\frac{dQ}{d\tau} = 1,01 A_0 \left(\frac{T_0}{p_0} \right)^{1/3} p (T_0 - T) F. \quad (9)$$

Дополним (1) и (2) уравнением состояния, продифференцированным по γ :

$$\frac{dp}{d\gamma} = R\gamma \frac{dT}{d\gamma} + RT. \quad (10)$$

Из (2) и (10), используя (3) и (9), после несложных преобразований получим

$$\gamma \frac{dT}{d\gamma} + (k-1) \left[\frac{B}{R} (T_0 - T) - T \right] = 0, \quad (11)$$

где

$$B = B(\tau) = \frac{C}{f(\tau)},$$

$$C = \frac{1,01 E F A_0 \sqrt{T}}{\mu m} \left(\frac{T_0}{p_0} \right)^{1/3}.$$

Величина A_0 возрастает с понижением температуры. Используя данные работы [8], можно принять $A_0 \sqrt{T} = \text{const}$, тогда и $C = \text{const}$.

Интегрируя (11), получим уравнение термодинамического процесса

$$\frac{T}{T_0} = \frac{R}{R+B} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{(k-1) \left(1 + \frac{B}{R} \right)} + \frac{B}{R} \right] \quad (12)$$

или

$$\frac{p}{p_0} = \frac{R}{R+B} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{(k-1)\left(1+\frac{B}{R}\right)} + \frac{B}{R} \right] \frac{\gamma}{\gamma_0}. \quad (13)$$

Уравнение для определения удельного веса газа в емкости получим, разделив (1) на (2):

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{G}{V}. \quad (14)$$

Используя (4) и (12), выражение (14) можно привести к виду

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{2}{k-1} N f(\tau) \gamma \sqrt{\frac{R}{R+B} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{(k-1)\left(1+\frac{B}{R}\right)} + \frac{B}{R} \right]}, \quad (15)$$

где

$$N = \frac{k-1}{2} \frac{\mu m R \sqrt{T_0}}{V} = \text{const.}$$

Покажем, что при некоторых параметрах процесса опорожнения газовой емкости уравнение (12) приводится к выражениям, соответствующим адиабатическому и изотермическому процессам.

Нетрудно видеть, что при $B = 0$ из (12) имеем уравнение адиабаты

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{k-1}.$$

Из уравнения (15) при $B = 0$ имеем

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{2}{k-1} N f(\tau) \gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{\frac{k-1}{2}}. \quad (16)$$

Интегрируя (16) при переменной площади $f(\tau)$, получим формулы, аналогичные формулам работы [6]*

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \left[\frac{1}{1 + N \int_0^\tau f(\tau) d\tau} \right]^{\frac{2}{k-1}}; \quad \frac{p}{p_0} = \left[\frac{1}{1 + N \int_0^\tau f(\tau) d\tau} \right]^{\frac{2k}{k-1}}. \quad (17)$$

При постоянной площади $f = \text{const}$ из (17) имеем формулы работы [5]:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \left[\frac{1}{1 + N f \tau} \right]^{\frac{2}{k-1}}; \quad \frac{p}{p_0} = \left[\frac{1}{1 + N f \tau} \right]^{\frac{2k}{k-1}}. \quad (18)$$

При $\frac{B}{B+R} = 1$, что равносильно условию $B \gg R$, уравнение процесса (12) обращается в уравнение изотермического процесса $\frac{T}{T_0} = 1$.

Подставив значение $\frac{B}{B+R} = 1$ в (15), будем иметь

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = -\frac{2}{k-1} N f(\tau) d\tau. \quad (19)$$

* В [6] при выводе формул для адиабатического процесса допущена ошибка: значение постоянной N в два раза больше истинного.

Интегрируя (19), получим формулы работы [6]:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{2}{k-1} N \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau\right), \quad (20)$$

а при постоянной площади $f = \text{const}$ — формулы работы [4]:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{2}{k-1} N f \tau\right). \quad (21)$$

Для значений $0 < \frac{B}{B+R} < 1$ можно получить приближенное решение уравнения (15), если разложить в ряд Тейлора квадратный корень правой части этого уравнения и ограничиться первыми двумя членами ряда

$$\sqrt{\frac{R}{R+B} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{(k-1)\left(1+\frac{B}{R}\right)} + \frac{B}{R} \right]} \approx 1 + \frac{1}{2} (k-1) \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0}.$$

При такой замене (15) принимает вид

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{2}{k-1} N f(\tau) \gamma \left[1 + \frac{1}{2} (k-1) \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0} \right]. \quad (22)$$

Интегрируя (22), получим

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{k+1}{1 - k + 2k \exp\left[\frac{k+1}{k-1} N \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau\right]}. \quad (23)$$

Используя (23), (12) и уравнение состояния, получим

$$\frac{T}{T_0} = \frac{R}{R+B} \left\{ \frac{k+1}{1 - k + 2k \exp\left[\frac{k+1}{k-1} N \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau\right]} \right\}^{(k-1)\left(1+\frac{B}{R}\right)} + \frac{B}{R} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_0} = \frac{R}{R+B} & \left\{ \frac{k+1}{1 - k + 2k \exp\left[\frac{k+1}{k-1} N \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau\right]} \right\}^{(k-1)\left(1+\frac{B}{R}\right)+1} + \\ & + \frac{B}{R} \frac{k+1}{1 - k + 2k \exp\left[\frac{k+1}{k-1} N \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau\right]} \quad (25) \end{aligned}$$

ВЫВОДЫ

Разработана методика расчета опорожнения газовой емкости через отверстие переменной по времени площади, основанная на использовании уравнений термодинамики тел переменной массы и допущениях о постоянстве температуры внутренней поверхности емкости и передаче тепла от этой поверхности к газу путем свободной конвекции.

Показано, что из формул (12) и (15) могут быть получены формулы других авторов для адиабатического и изотермического процессов.

Отмечается ошибочность формул работы [6] для адиабатического процесса.

Обозначения:

p, T, γ, i — давление, температура, удельный вес и энтальпия газа; k, R — показатель адиабаты и газовая постоянная; G — секундный весовой расход газа из емкости; $f(\tau)$ — площадь отверстия, через которое истекает газ; μ — коэффициент расхода, принятый постоянным при сверхкритическом режиме истечения; Q — тепло, подведенное к газу; α — коэффициент теплоотдачи от стенки емкости к газу; T_0, F — температура и площадь внутренней поверхности емкости; τ — время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Маркевич. Ученые зап. ЛГУ, № 27, серия матем. наук, вып. 31, 1957.
2. Б. Н. Бежанов. Пневматические механизмы. Машгиз, 1957.
3. Г. Б. Синярев, М. В. Добровольский. Жидкостные ракетные двигатели. Оборонгиз, 1960.
4. Е. М. Цейров. Труды ВЭИ, 1960.
5. И. И. Морозов. Инженерно-физический журнал, № 12, 1959.
6. И. В. Моисеев, В. Ф. Степанчук. Изв. высш. учебн. заведений. Энергетика, № 4, 1963.
7. М. А. Мамонтов. Некоторые случаи течения газа. Оборонгиз, 1951.
8. С. С. Кутателадзе, В. М. Боршанский. Справочник по теплопередаче. ГЭИ, 1959.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЕЛ СТРУХАЛЯ ДЛЯ ТЕЛ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ В ПЛОСКОМ ПОТОКЕ

В. С. Гонткевич, А. В. Колодяжный

Институт механики АН УССР
(г. Харьков)

Вихревые дорожки, возникающие при обтекании тел различной формы плоским потоком жидкости или газа, существуют при $Re \approx 30 \div 10^5$, т. е. встречаются в реальных условиях весьма часто. Срыв вихревой дорожки с обтекаемого тела служит источником колебаний, особенно опасных, когда частота срыва вихрей совпадает с одной из собственных частот конструкции. Поэтому определение частоты срыва вихрей (числа Струхали) для данного тела является весьма актуальной задачей.

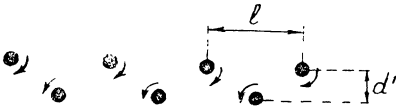


Рис. 1. Схема дорожки.

Свойства вихревых дорожек в настоящее время исследованы достаточно полно [2, 3, 7, 10]. Установлено, в частности, что конфигурация дорожки за различными телами одинакова (рис. 1), при этом число Струхали дорожки

$$St^* = \frac{fd'}{v_s}, \quad (1)$$

где v_s — скорость в вихревом следе за телом; f — частота срыва вихрей с тела.

По экспериментальным измерениям [6] $St^* \approx 0,16$. Из теории Кармана [3] вытекает, что число Струхали вихревой дорожки $St^* \approx 0,14$.

Установлено также, что частота срыва вихрей с обтекаемого тела определяется не шириной тела в направлении, перпендикулярном потоку (d), а шириной вихревой дорожки d' , и обратно пропорциональна ей [6]. Число Струхали препятствия связано с числом Струхали вихревой дорожки соотношением

$$St = St^* \frac{v_s d}{v_\infty d'}, \quad (2)$$

где v_∞ — скорость невозмущенного потока.

Другие свойства вихревых дорожек подробно описаны в работах [2, 3, 7, 10]. Определение величины $\frac{v_s}{v_\infty}$ является весьма трудной задачей

(2), однако для наших целей достаточно указать, что $\frac{v_s}{v_\infty}$ близко к единице и мало меняется для различных препятствий. Таким образом, число

Струхалия препятствия можно оценить по неизменной величине — числу Струхалия вихревой дорожки и отношению ширины препятствия к ширине вихревой дорожки $\frac{d}{d'}$. Используя результаты теории струй, можно во многих случаях качественно оценить отношение ширины препятствия и вихревой дорожки $\frac{d}{d'}$, хотя, по-видимому, количественные результаты, доставляемые теорией струй, не обладают достаточной точностью [6]. Легко видеть, что для плохообтекаемых тел ширина вихревой дорожки

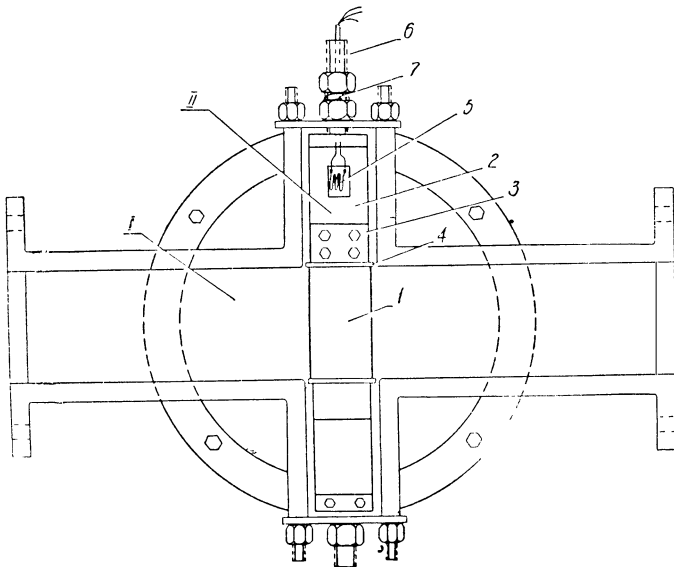


Рис. 2. Схема рабочей камеры.

1 — канал; II — шахта; 1 — образец; 2 — пластинчатая пружина; 3 — зажим, 4 — шайба, закрывающая вход в шахту. 5 — фланец; 6 — растягивающий винт; 7 — шайба пружинная.

больше ширины препятствия и число Струхалия препятствия меньше числа Струхалия дорожки. Для хорошообтекаемых тел ширина препятствия больше ширины вихревой дорожки и число Струхалия препятствия больше числа Струхалия дорожки.

Разумеется, величина чисел Струхалия препятствия в настоящее время может быть найдена только из достаточно аккуратно поставленных экспериментов. При этом в первую очередь представляет интерес определение граничных значений чисел Струхалия препятствия для весьма хорошо и весьма плохообтекаемых тел, а также значений чисел Струхалия препятствия для наиболее распространенных на практике тел.

Величины чисел Струхалия препятствия были определены экспериментально на гидродинамической трубе Харьковского филиала института механики АН УССР. Эксперименты проводились на малой гидродинамической трубе с поперечным сечением рабочей части трубы $F = 48 \text{ см}^2$. Рабочая камера представляет канал с параллельными стенками. Расстояние между стенками $B = 60 \text{ мм}$, высота сечения $H = 75 \text{ мм}$.

В процессе экспериментов можно было плавно изменять скорость в пределах от 1 до 16 м/сек. Экспериментальные образцы представляли собой цилиндры различного профиля, пластинки с различным отношением

толщины к длине и симметричные профили (табл. 1). Длина всех образцов ~ 75 мм.

Образцы упруго крепились в рабочей камере пластинчатыми пружинами (см. рис. 2). Все крепежные элементы и пружины находились в шахтах, закрытых со стороны потока круглыми дисками. Диски крепились на торцах образцов для улучшения условий отбегания препятствия.

При помощи набора пружин различной жесткости можно было в широких пределах менять собственные частоты системы. Можно было также менять жесткость системы, увеличивая натяжение пружин растягивающими винтами (рис. 2).

Скорость невозмущенного потока измерялась шаровым зондом и расходомерной шайбой, соединенными с ртутными дифференциальными манометрами.

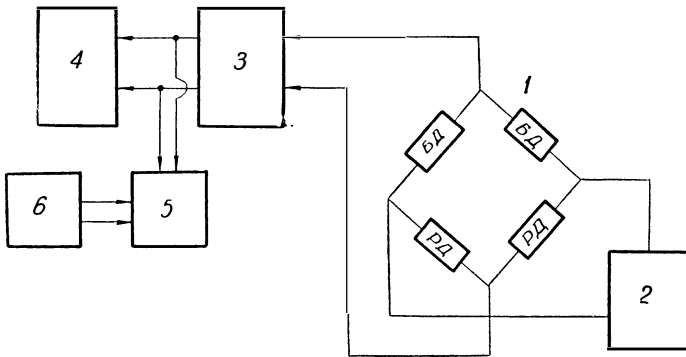


Рис. 3.

БД — балансировочные датчики; *РД* — рабочие датчики; *1* — измерительный мост; *2* — блок питания моста (переменный ток); *3* — четырехканальный усилитель тензометрических сигналов; *4* — шлейфный осциллограф МПО-2; *5* — катодный осциллограф ЭО-7; *6* — звуковой генератор ЗГ-10.

метрами. Шаровой зонд устанавливался на расстоянии 7 см перед препятствием. При расчете скорости учитывалась загруженность сечения (по теореме сохранения расхода)

$$\bar{v}_\infty = \frac{B-d}{B} v_\infty,$$

где

B — расстояние между стенками канала;

d — поперечный размер препятствия.

В процессе исследования частота отрыва вихрей определялась по частоте колебаний образца, возникающих при совпадении частоты отрыва вихрей с одной из собственных частот (практически с наименьшей частотой). Схема измерения частоты приведена на рис. 3. Для регистрации колебаний тензометрические датчики наклеивались на пластинчатые пружины, после чего производилась гидроизоляция датчиков и монтажных проводов эпоксидным клеем. Усиленные электрические колебания записывались на шлейфном осциллографе МПО-2. Частота колебаний определялась также на катодном осциллографе по фигурам Лиссажу при помощи звукового генератора колебаний ЗГ-10. Зная частоту отрыва вихрей, скорость невозмущенного потока v_∞ и ширину препятствия, можно рассчитать по формуле (2) число Струхала препятствия St .

Использованная в работе методика измерения частоты отрыва вихрей дает числа Струхаля St несколько меньше, чем для неподвижного препятствия, так как колебания образца несомненно приводят к расширению вихревого следа за телом. Однако, если амплитуда колебаний мала по сравнению с поперечным размером препятствия, влияние колебаний на

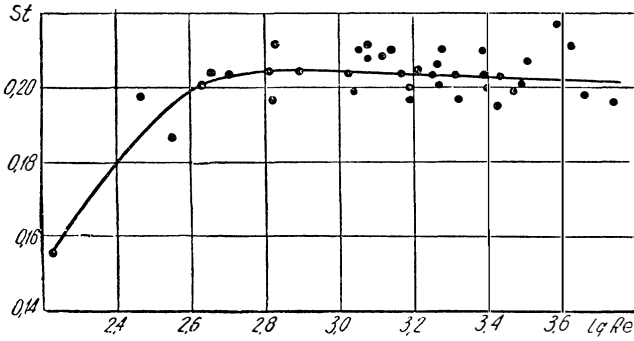


Рис. 4. Зависимость $St = f(Re)$ для круглых цилиндров.

числа Струхаля St незначительно. Это легко видеть также из сравнения результатов для колеблющегося круглого цилиндра, приведенных на рис. 4 с данными [2, 3].

Таким образом, проводимые опыты можно разделить на две группы. В первой группе экспериментов были исследованы числа Струхаля St для кругового цилиндра и тел, близких к круговому цилиндру (овальный

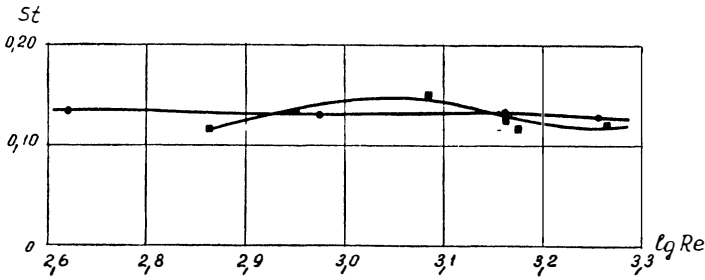


Рис. 5. Зависимость $St = f(Re)$ для усеченного (\square) и овального (\circ) цилиндров.

и усеченный цилиндры). Исследование этой группы достаточно хорошо обтекаемых тел представляет интерес в связи с широко распространенными на практике колебаниями тел, имеющих форму кругового цилиндра и близкую к ней, в потоке жидкости или газа [4]. Опыты с круговыми цилиндрами (табл. 1) были поставлены в самом начале работы для того, чтобы выяснить соответствие результатов, которые дает имевшаяся в нашем распоряжении экспериментальная техника с многочисленными данными [2, 3] по исследованию колебаний круговых цилиндров в различных гидродинамических трубах. Результаты опытов (рис. 4) достаточно хорошо совпадают с литературными данными. Зависимости $St(Re)$ для овального и усеченного цилиндра приведены на рис. 5. Эти результаты показывают, что ухудшение обтекаемости, вызванное данным искажением формы

цилиндра, вызывает значительное снижение числа Струхала препятствия St .

К другой группе относятся опыты с хорошо обтекаемыми телами — пластинками и профилями, установленными в направлении потока. Для

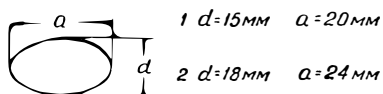
Таблица 1

А Цилиндры.

- 1 $d = 8 \text{ мм}$.
- 2 $d = 12 \text{ мм}$
- 3 $d = 14 \text{ мм}$
- 4 $d = 16 \text{ мм}$
- 5 $d = 18 \text{ мм}$
- 6 $d = 20 \text{ мм}$
- 7 $d = 25 \text{ мм}$
- 8 $d = 30 \text{ мм}$
- 9 $d = 40 \text{ мм}$

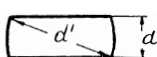
В Плохообтекаемые тела

i Овал



- 1 $d = 15 \text{ мм}$ $a = 20 \text{ мм}$
- 2 $d = 18 \text{ мм}$ $a = 24 \text{ мм}$

ii Усеченный цилиндр



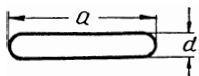
- 1 $d = 24 \text{ мм}$ $d' = 30 \text{ мм}$
- 2 $d = 16 \text{ мм}$ $d' = 20 \text{ мм}$

iii Прямоугольник $12,4 \times 24$ iv Пластинки под углом α

- 1 $4,2 \times 40$, $\alpha = 5^\circ$
- 2 10×40 , $\alpha = 5^\circ$
- 3 $4,2 \times 40$, $\alpha = 25^\circ$

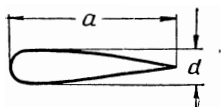
С. Хорошообтекаемые тела

i Пластины



- 1 $d = 10 \text{ мм}$ $a = 30 \text{ мм}$
- 2 $d = 10 \text{ мм}$ $a = 40 \text{ мм}$
- 3 $d = 10 \text{ мм}$ $a = 48 \text{ мм}$
4. $d = 4,2 \text{ мм}$ $a = 40 \text{ мм}$

ii Симметричный профиль Жуковского



1. $d = 8,8 \text{ мм}$ $a = 41,2 \text{ мм}$
- 2 $d = 9,2 \text{ мм}$ $a = 41,3 \text{ мм}$
- 3 $d = 10 \text{ мм}$ $a = 30 \text{ мм}$

исследования были взяты пластинки с различным отношением ширины к толщине (табл. 1). Зависимости $St(Re)$ для этой серии пластинок, полученные экспериментально, приведены на рис. 6. Очевидно, улучшение условий обтекания для пластинок, установленных по потоку, приводит к значительному увеличению числа Струхала препятствия (до $St = 0,25 \div 0,3$). Представляется целесообразным проследить процесс изменения чисел Струхала препятствия для достаточно тонких пластинок

$\left(\frac{d}{h} \geq 5 \div 10\right)$ при их повороте относительно потока. Такое исследование было проведено в ряде работ при изменении угла атаки пластинки от 90° до приблизительно 30° . При этом установлено, что если в качестве ширины препятствия взять величину

$$a = b \sin \alpha,$$

где b — ширина пластинки, α — угол атаки, то число Струхала препятствия не изменяется и равно приблизительно $St = 0,14 - 0,15$.

В работе [5] обнаружено некоторое увеличение числа Струхала пластинки $St = 0,13$ ($\alpha = 90^\circ$), $0,19$ ($\alpha = 45^\circ$), $0,21$ ($\alpha = 20^\circ$). Очевидно, это следует отнести за счет улучшения условий обтекания и уменьшения ширины вихревой дорожки. С целью получения результатов, промежуточных между данными работы [5] и рис. 6, были проведены опыты с пластинками прямоугольного сечения $2/1$ (табл. 1), причем при установке пластинки по потоку получено $St (\lg Re \approx 3,2) = 0,23$, перпендикулярно потоку $St (\lg Re \approx 2,73) = 0,182$.

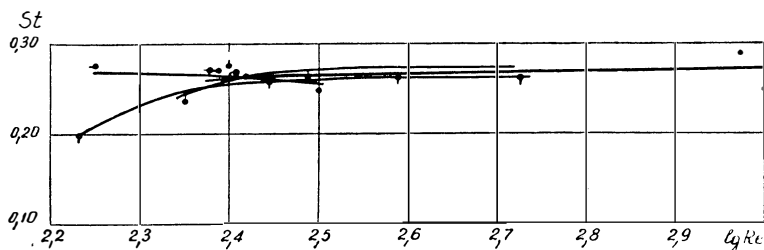


Рис. 6. Зависимость $St = f(Re)$ для пластинок (Δ — $4,2 \times 40$, \triangle — 10×48 , \square — 10×40 , \circ — 10×30).

С использованием этих результатов процесс изменения чисел Струхала пластинки при изменении угла атаки становится ясным. При $\alpha = 90^\circ$ имеем $St = 0,14$; уменьшение угла атаки до 0° приводит к росту St до $0,25 - 0,3$ для исследованных пластинок. Для более тонких пластинок вихревая дорожка становится весьма узкой, величина вихрей и интенсивность колебаний сильно уменьшается. Необходимо здесь отметить, что интенсивность колебаний под действием вихревой дорожки пропорциональна импульсу давления, возникающему при отрыве вихря. Импульс давления пропорционален величине вихря и, следовательно, ширине вихревой дорожки. Отсюда ясно, почему для хорошо обтекаемых тел, когда ширина вихревого следа (дорожки) весьма мала, колебания незначительны, а также почему изменение формы края пластинки, увеличивающее ширину дорожки, усиливает колебания [8, 11]. Для профилей, установленных под малыми углами атаки к потоку, имеются данные [1], полученные при натурных испытаниях за крылом самолета. При $Re \approx 10^5 - 10^7$ были получены значения числа Струхала для препятствия $St = 0,11 - 0,12$, т. е. для весьма плохо обтекаемого тела.

В данной работе для симметричного крылового профиля (табл. 1) была получена зависимость $St(Re)$, приведенная на рис. 7, причем было установлено, что данным значениям числа Рейнольдса соответствует срыв вихревой дорожки с зоны миделевого сечения профиля. В этих условиях профиль действительно является плохо обтекаемым телом, особенно если учесть действие хвоста профиля, увеличивающее ширину дорожки. Необ-

ходимо отметить, что хвост колеблющегося профиля не может препятствовать возникновению дорожки, как это имело место в опытах [6] с неподвижным цилиндром и разделительной пластинкой. Регулирующее действие импульсов давления, которыми сопровождается отрыв вихрей, для колеблющегося препятствия имеет место, а для неподвижной системы цилиндр—разделительная пластинка такого действия не наблюдалось. Результаты работ по исследованию колебаний пластинок с заостренным краем [8, 11] также свидетельствуют о наличии вихревой дорожки. Ликвидировать вихревую дорожку за колеблющимся препятствием при помощи разделительной пластинки, по-видимому, невозможно.

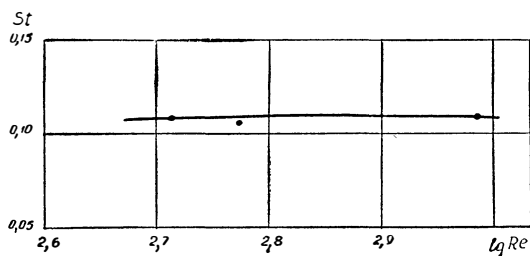


Рис. 7. Зависимость $St = f(Re)$ для симметричного профиля.

Наконец, необходимо подчеркнуть, что дальнейшая работа по накоплению данных о числах Струхала препятствия для различных тел весьма важна для завершения исследования проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Абдрашитов. К вопросу о бафтинге хвостового оперения. Труды ЦАГИ, № 399, 1939.
2. Р. Вилле. Вихревые дорожки Кармана. Сб. «Проблемы механики», вып. IV. Изд-во иностр. лит., 1963.
3. С. Гольдштейн (редактор). Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. 1, 2. Изд-во иностран. лит., 1948.
4. Дж. Ден—Гартог. Механические колебания. Физматгиз, 1962.
5. Г. И. Петров, Р. И. Штейнберг. Исследование потока за плохообтекаемыми телами. Труды ЦАГИ, № 482, 1940.
6. А. Рожко. О вихревом следе и сопротивлении плохообтекаемых тел, Сб. переводов «Механики», 1956, № 1.
7. Л. Розенхед. Вихревые системы в следах, Сб. «Проблемы механики», вып. 1. Изд-во иностр. лит., 1955.
8. R. M. Donaldson. Hydraulic turbine runner vibration, Trans. ASME, 1956, № 78, № 5, 1141.
9. A. Fage, F. Johansen. On the flow of air about an inclined flat plate of infinite span, Proc. Roy Soc., London, 1927, ser. A, v. 116, 170.
10. M. Z. Krzywoblocki. Vortex streets in incompressible media, App. Mech. Reviews, 1953, v. 6, № 9, 393.
11. G. H. Tobeas, P. S. Eagleson. Hydroelastic vibrations of flat plates, related to trailing edge geometry, Trans. ASME, ser. D. J. of Basic Engng., 1961, v. 83, № 4, 671.

ОБ ОДНОМ ХАРАКТЕРНОМ СВОЙСТВЕ ПРОФИЛЯ СКОРОСТЕЙ ПРИ ТЕЧЕНИИ ГАЗА В ТРУБЕ

М. М. Назарчук

Институт технической теплофизики АН УССР
(г. Киев)

Как известно, течение несжимаемой жидкости в трубе можно разделить на два участка: начальный, в котором происходит деформация профиля скоростей, и участок развитого течения, где профиль скоростей практически не изменяется.

В работе [1] экспериментально обнаружено, что при достаточно больших дозвуковых скоростях профиль скоростей существенно деформируется: он заполняется по мере приближения к выходному сечению длинной трубы, работающей на максимальном режиме. Отсюда следует, что при изучении течений газа с большими скоростями деление трубы на два участка уже недостаточно.

Ниже показано, что эффект заполнения профиля скоростей является характерным для течений газа в трубах, и произведена оценка величины скорости, при которой заведомо должен начинаться названный эффект. При этом приняты следующие упрощающие предположения:

- а) давление является функцией только продольной координаты;
- б) зависимость между среднemasсовой скоростью, средней плотностью и давлением описывается одномерной моделью.

Рассмотрим изменение энтропии на оси трубы (ниже значения величин на оси отмечены индексом 1) при дозвуковом установившемся адиабатном течении газа. Имеем

$$\frac{1}{R} \frac{ds_1}{dx} = - \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} + \frac{k}{k-1} \frac{1}{T_1} \frac{dT_1}{dx}. \quad (1)$$

Здесь x — продольная координата в калибрах.

Так как

$$\frac{T_1}{\theta} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2,$$

где θ — температура торможения, λ — приведенная скорость, то

$$\frac{k}{k-1} \frac{1}{T_1} \frac{dT_1}{dx} = - \frac{2k}{k+1} \frac{\lambda_1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \frac{d\lambda_1}{dx}. \quad (2)$$

Введя в рассмотрение степень заполненности профиля скоростей

$$\omega = \frac{\lambda}{\lambda_1},$$

перепишем равенство (2) так:

$$\frac{k}{k-1} \frac{1}{T_1} \frac{dT_1}{dx} = -\frac{2k}{k+1} \frac{\lambda}{\omega^2 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2} \frac{d\lambda}{dx} + \frac{2k}{k+1} \frac{\lambda_1 \lambda \theta}{\omega^2 T_1} \frac{d\omega}{dx}. \quad (3)$$

Используя полученное равенство (3), соотношение принципа обращения воздействий [2] для приведенной скорости

$$\frac{1 - \lambda^2}{\lambda^3} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{k}{k+1} \zeta$$

и для давления

$$\frac{1 - \lambda^2}{p} \frac{dp}{dx} = -\frac{k}{k+1} \zeta \frac{\lambda^2 \left(1 + \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2},$$

нетрудно после несложных преобразований привести (1) к виду

$$\frac{1}{R} \frac{ds_1}{dx} = \frac{k}{k+1} \zeta \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} F_\omega(\lambda) + \frac{2k}{k+1} \frac{\lambda_1 \lambda \theta}{\omega^2 T_1} \frac{d\omega}{dx}, \quad (4)$$

где

$$F_\omega(\lambda) = \frac{1 + \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2} - \frac{2k}{k+1} \frac{\lambda^2}{\omega^2 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что в случае дозвуковых скоростей ($\lambda \leq 1$) при каждом фиксированном значении ω существует такое $\lambda = \lambda_\omega$, что $F_\omega(\lambda_\omega) = 0$, причем $F_\omega(\lambda) > 0$ для всех $\lambda < \lambda_\omega$ и $F_\omega(\lambda) < 0$ — для всех $\lambda > \lambda_\omega$.

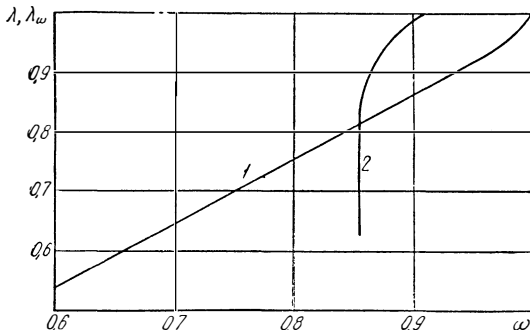


Рис. 1. Зависимость λ_ω от ω и ω от λ . 1 — λ_ω ; 2 — ω .

Так как согласно второму началу термодинамики $\frac{ds_1}{dx} \geq 0$, то из (4) получим следующий вывод. Течение с постоянной степенью заполненности профиля скоростей ($\frac{d\omega}{dx} = 0$) не может продолжаться дальше, чем до значений $\lambda = \lambda_\omega$. При $\lambda > \lambda_\omega$ течение возможно лишь при условии заполнения профиля скоростей ($\frac{d\omega}{dx} > 0$). Величину λ_ω

нетрудно найти из (5), полагая $F_\omega(\lambda_\omega) = 0$. Произведя небольшие преобразования, получим

$$\lambda_\omega^4 - \left(\frac{3k-1}{k-1} - \omega^2\right) \lambda_\omega^2 + \frac{k+1}{k-1} \omega^2 = 0.$$

Для воздуха ($k = 1,4$) найдем

$$\lambda_\omega^4 - (8 - \omega^2) \lambda_\omega^2 + 6\omega^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda_\omega^2 = 4 - \frac{\omega^2}{2} - \sqrt{\left(4 - \frac{\omega^2}{2}\right)^2 - 6\omega^2}.$$

Зависимость λ_ω от степени заполненности профиля скоростей ω приведена на рис. 1 (кривая 1).

Если на тот же рисунок условно* нанести результаты опытов [1] в виде зависимости ω от λ , получим кривую 2.

На участке развитого течения, как найдено в [1], профиль скоростей можно аппроксимировать степенной зависимостью с показателем $\frac{1}{8,5}$, что соответствует $\omega = 0,855$. В конце трубы при $\lambda \approx 1$ показатель равен $\frac{1}{15}$ ($\omega = 0,91$). При $\lambda < \lambda_\omega$ условно принято $\omega = \text{const}$. При $\lambda > \lambda_\omega$ профиль скоростей заполняется.

Интенсивность заполнения профиля по длине, которая характеризуется величиной производной $\frac{d\omega}{dx}$, как видно из (4), должна возрасти по мере увеличения λ , причем при $\lambda \rightarrow 1$ имеем $\frac{d\omega}{dx} \rightarrow \infty$. Этот эффект хорошо согласуется с экспериментальными данными [1].

Отметим, что, как следует из рис. 1, профиль скоростей начинает заполняться тем раньше, чем меньше его степень заполненности.

Полученные здесь выводы более оправданы для турбулентных течений газа, когда степень заполненности профиля достаточно близка к единице.

Покажем, что равенство (4) дает возможность найти приближенную зависимость между ω и λ при $\lambda \geq \lambda_\omega$.

Для этого примем, как обычно, что на участке развитого течения (при $\lambda < \lambda_\omega$) степень заполненности профиля скоростей постоянна ($\omega = \omega_p$). Из (4) следует, что на этом участке по мере роста λ энтропия на оси канала возрастает, достигая максимума при $\lambda = \lambda_\omega$.

Дальнейшее течение при $\lambda > \lambda_\omega$ можно представить происходящим с постоянной величиной энтропии на оси ($\frac{ds_1}{dx} = 0$), но с изменяющейся величиной ω .

Таким образом участок, который можно назвать предкризисным, в некотором смысле аналогичен начальному участку.

Вводя в (4) величину $\frac{\theta}{T_1}$, получим зависимость между ω и λ на предкризисном участке

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx} F_\omega(\lambda) + \frac{2k}{k+1} \frac{\lambda^2 \frac{d\omega}{dx}}{\omega \left(\omega^2 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)} = 0,$$

или, после несложных преобразований,

$$\frac{d\omega^2}{d\lambda^2} = - \frac{k+1}{2k} \frac{\omega^2}{\lambda^2} \left(\frac{\omega^2}{\lambda^2} - \frac{k-1}{k+1} \right) \frac{1 + \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2} + \frac{\omega^2}{\lambda^2}.$$

Полученное уравнение легко интегрируется, если в качестве зависимой переменной принять $\frac{\omega^2}{\lambda^2}$.

* В работе [1] нет данных по изменению ω в зависимости от λ , поэтому можно говорить лишь о качественном совпадении результатов [1] с теоретическими выводами.

Принимая для воздуха $k = 1,4$ и учитывая, что при $\lambda = \lambda_\omega$ известно $\omega = \omega_p$, получим

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{6}{\lambda^2} \left\{ 1 - \left[\frac{\lambda_\omega^2}{\lambda^2} \left(\frac{1 - \frac{\lambda^2}{6}}{\frac{\lambda_\omega^2}{6}} \right)^2 \right]^2 \frac{\omega_p^2 - \frac{\lambda^2}{6}}{\omega_p^2} \right\},$$

где λ_ω определяется по величине ω_p .

Если в качестве ω_p принять согласно данным [1] значение 0,855, то при $\lambda = 1$ (выхлоп на максимальном режиме) получим $\omega = 0,905$ вместо опытного значения 0,91. Это свидетельствует, что предлагаемый приближенный метод достаточно хорошо отражает существо явлений в предкризисном участке.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Santon, R. Depassel. C. r. Acad. sci. t 273, № 5, Paris, 1953.
2. Л. А. Вулис. Термодинамика газовых потоков. Госэнергоиздат, М.—Л., 1950.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТЕЙ И ДАВЛЕНИЙ В РАСПЛАВЕ ПОЛИМЕРА, ДВИЖУЩЕМСЯ В КРУГЛОМ КАНАЛЕ

Г. А. Ван Фо Фы, В. Г. Литвинов

Институт механики АН УССР
(Киев)

В статье предлагается приближенный метод расчета профиля скоростей и давлений в расплаве полимера, движущемся в круглом канале в условиях теплообмена с окружающей средой.

Если в первом приближении принять, что вектор скоростей частиц среды параллелен оси канала*, то задачу можно свести [1] к совместному интегрированию системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{dv}{dr} \right)^n \right] + \frac{1}{r} \mu \left(\frac{dv}{dr} \right)^n; \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{dv}{dr} \right)^n \right], \quad (1)$$

$$v \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho c_v} \left| \frac{dv}{dr} \right|^{n+1} + a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (2)$$

Здесь r, z — координаты точек среды; v — скорость движения частиц полимера; p — гидростатическое давление; T — температура среды; ρ — плотность среды; c_v — удельная теплоемкость материала при постоянном объеме; a — коэффициент теплопроводности; n — параметр уравнения состояния, не зависящий от температуры; μ — параметр уравнения состояния, зависящий от температуры, эта зависимость может быть представлена в виде

$$\mu = A e^{\frac{U}{kT}},$$

где A, U, k — постоянные.

Оговоримся, что здесь и ниже выражения $\left(\frac{dv}{dr} \right)^n$ и им подобные следует понимать как $\left| \frac{dv}{dr} \right|^n \operatorname{sign} \left(\frac{dv}{dr} \right)^n$.

Краевые условия имеют вид

при $r = R$ $v = 0$;

при $r = R$ ($z \geq 0$) $T = T_1(z)$;

при $z = 0$ ($r \leq R$) $T = T_0(r)$.

Здесь R — радиус канала

* Для практически применяемых скоростей переработки полимеров и температур радиальная составляющая вектора скорости значительно меньше осевой. Поэтому указанное допущение не приводит к существенным погрешностям и допустимо в первом приближении.

Кроме того, задаемся средней скоростью движения полимера v_c .

Метод расчета температурных полей в рассматриваемом случае был предложен в работе [2].

Имея для температуры полимера выражение $T = T(r, z)$ и соотношение $\mu = \mu(T)$, нетрудно найти зависимость $\mu(r, z)$.

В настоящей статье, используя зависимость $\mu(r, z)$, определяют приближенный профиль скоростей и гидростатические давления в расплаве полимера, движущемся в круглом канале.

§ 1. Продифференцируем обе части первого из уравнений (1) по r , а второго — по z и вычитая их почленно друг из друга, исключим гидростатическое давление p . В результате, вводя новые переменные $r_1 = \frac{r}{R}$; $z_1 = \frac{z}{R}$; $u = \left(\frac{dv}{dr_1}\right)^n$, получим:

$$\begin{aligned} & \mu(r_1, z_1) \frac{d^2 u}{dr_1^2} + \left[2 \frac{\partial \mu(r_1, z_1)}{\partial r_1} + \frac{\mu(r_1, z_1)}{r_1} \right] \frac{du}{dr_1} + \\ & + \left[\frac{\partial^2 \mu(r_1, z_1)}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \mu(r_1, z_1)}{\partial r_1} - \frac{1}{r_1^2} \mu(r_1, z_1) - \frac{\partial^2 \mu(r_1, z_1)}{\partial z_1^2} \right] u = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее, зависимость $\mu(r_1, z_1)$ будем аппроксимировать следующей функцией:

$$\mu \approx \sum_{m=0}^k a_m r_1^m e^{\nu z_1} \quad (4)$$

Подставив в левую часть уравнения (3) значение μ из (4) и определенные из него выражения для $\frac{\partial \mu}{\partial r_1}$; $\frac{\partial^2 \mu}{\partial r_1^2}$ и $\frac{\partial^2 \mu}{\partial z_1^2}$, придем к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^k a_m r_1^{m+2} \frac{d^2 u}{dr_1^2} + \sum_{m=0}^k a_m (2m+1) r_1^{m+1} \frac{du}{dr_1} + \\ & + \{ -a_0 + \sum_{m=2}^k [(m^2 - 1) a_m - \nu^2 a_{m-2}] r_1^m \} u = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Так как $a_0 \neq 0$, решение этого уравнения можно искать в виде обобщенных степенных рядов [3], которые будут сходиться в интересующей нас области $0 \leq r_1 \leq 1$

$$u = r_1^\beta \sum_{s=0}^{\infty} \dot{\gamma}_s r_1^s. \quad (6)$$

Определяющее уравнение будет иметь вид

$$\beta(\beta - 1) a_0 + \beta a_0 - a_0 = 0.$$

Отсюда $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = -1$.

Для первого корня, подставив в (5) выражение (6) и определенные из него значения $\frac{du}{dr_1}$ и $\frac{d^2 u}{dr_1^2}$, собрав подобные члены и приравняв нулю

коэффициенты при различных степенях r_1 , получим ряд алгебраических уравнений, из которых найдем рекуррентные формулы для коэффициентов γ_s

$$\gamma_s = - \frac{\gamma_{s-1}a_1 + \gamma_{s-2}a_2 + \gamma_{s-3}a_3 + \dots}{a_0} + \frac{v^2}{[(s+1)^2 - 1]a_0} (a_0\gamma_{s-2} + a_1\gamma_{s-3} + a_2\gamma_{s-4} + a_3\gamma_{s-5} + \dots). \quad (7)$$

γ_0 играет роль произвольного множителя, можно положить $\gamma_0 = 1$. Таким образом имеем

$$u = C_1 \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s r_1^{s+1} \quad (8)$$

Заметим, что второе решение (5) мы не принимаем во внимание, так как скорость среды на оси канала должна быть конечной.

Так как $u = \left(\frac{dv}{dr_1}\right)^n$, то, используя (8), получим:

$$v = C_1^{\frac{1}{n}} \int \left(\sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s r_1^{s+1} \right)^{\frac{1}{n}} dr_1. \quad (9)$$

Для расплавов полимеров $1 \leq \frac{1}{n} \leq 5$. Если $\frac{1}{n}$ — целое число, то вычисление интеграла в (9) не представляет трудностей. Если $\frac{1}{n}$ не целое число, то интеграл (9) может быть вычислен либо разложением подынтегральной функции в ряд Маклорена, либо аппроксимацией ее полиномом.

Таким образом, будем считать, что подынтегральная функция в (9) представляется в виде ряда $\sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s r_1^s$.

Тогда вместо (9) будем иметь

$$v = C_1^{\frac{1}{n}} \int \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s r_1^s dr_1.$$

Отсюда

$$v = C_1^{\frac{1}{n}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi_s r_1^{s+1}}{s+1} + C_2. \quad (10)$$

Из условия прилипания следует, что при $r_1 = 1$ $v = 0$.

Следовательно,

$$C_1^{\frac{1}{n}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi_s}{s+1} + C_2 = 0. \quad (11)$$

Введем в (10) среднюю скорость v_c , определяемую формулой

$$v_c = 2 \int_0^1 v r_1 dr_1.$$

Подставляя сюда вместо v его значение из (10) и интегрируя, найдем

$$v_c = 2C_1^{\frac{1}{n}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi_s}{(s+1)(s+3)} + C_2. \quad (12)$$

Введем обозначения

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi_s}{s+1} = F; \quad 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi_s}{(s+1)(s+3)} = H.$$

Решая совместно (11) и (12), получим:

$$C_1^n = \frac{v_c}{H-F}, \quad (13)$$

$$C_2 = -\frac{v_c F}{H-F}. \quad (14)$$

В результате найдем из (10) следующий закон изменения скорости вдоль радиуса канала

$$v = \frac{v_c}{H-F} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi_s r_1^{s+1}}{s+1} - F \right). \quad (15)$$

§ 2. Перейдем теперь к определению гидростатического давления. Из формул (8) и (13) имеем

$$\left(\frac{dv}{dr} \right)^n = \left[\frac{v_c}{R(H-F)} \right]^n \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s r_1^{s+1}. \quad (16)$$

Заменяя в первом из уравнений (1) $\left(\frac{dv}{dr} \right)^n$ его значением из (16), а μ — его значением из (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} = & \left[\frac{v_c}{R(H-F)} \right]^n e^{\nu z_1} \left[\left(\sum_{m=1}^k \frac{m a_m r_1^{m-1}}{R} \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s r_1^{s+1} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\sum_{m=0}^k a_m r_1^m \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{s+1}{R} \gamma_s r_1^s \right) + \left(\sum_{m=0}^k a_m r_1^m \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s r_1^s \right) \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

Как видно, величина падения давления вдоль оси канала является функцией от координат r_1 и z_1 , в то время как при изотермическом течении она является постоянной [4].

Введем в (17) вместо p его среднее значение p_c , определяемое формулой

$$p_c = 2 \int_0^1 p r_1 dr_1.$$

Умножив обе части (17) на $2r_1 dr_1$ и проинтегрировав в пределах от 0 до 1, найдем

$$\frac{dp_c}{dz} = 2N \left[\frac{v_c}{R(H-F)} \right]^n e^{\nu \frac{z}{R}}, \quad (18)$$

где

$$N = \sum_{m=1}^k \frac{a_m m}{R} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma_s}{s+m+2} + \sum_{m=0}^k a_m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1) \gamma_s}{R(s+m+2)} + \sum_{m=0}^k a_m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma_s}{s+m+2};$$

Интегрируя выражение (18) и полагая, что при $z = l$; $p_c = p_1$, найдем среднее гидростатическое давление, которое надо создать во входном сечении, т. е. при $z_1 = 0$, для получения данной производительности

$$p_0 = 2N \frac{R}{v} \left[\frac{v_c}{R(H-F)} \right]^n (1 - e^{-\frac{l}{R}}) + p_1. \quad (19)$$

Определим теперь гидростатическое давление в движущейся среде, не вводя среднее в данном сечении давление.

Подставляя во второе из уравнений (1) выражения (4) и (16), получим

$$\frac{\partial p}{\partial r_1} = \left[\frac{v_c}{R(H-F)} \right]^n v e^{v z_1} \sum_{m=0}^k a_m \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s r_1^{m+s+1}.$$

Интегрируя это выражение по r_1 , найдем

$$p = \left[\frac{v_c}{R(H-F)} \right]^n v e^{v z_1} \sum_{m=0}^k a_m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma_s r_1^{m+s+2}}{m+s+2} + C.$$

В полученном выражении взята произвольная постоянная C , а не некоторая функция от z , в связи с тем, что производная от этого выражения по z должна соответствовать первому из уравнений (1) при зависимости $\mu(r_1, z_1)$, определяемой формулой (4).

Определив постоянную C из условия: при $z = l$ и $r = R$. $p = p_2$, получим окончательно следующее выражение для распределения гидростатического давления в среде:

$$p = \left[\frac{v_c}{R(H-F)} \right]^n v \left[e^{v z_1} \sum_{m=0}^k a_m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma_s r_1^{m+s+2}}{m+s+2} - e^{-\frac{l}{R}} \sum_{m=0}^k a_m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma_s}{m+s+2} \right] + p_2. \quad (20)$$

§ 3. В качестве примера рассмотрим случай неизотермического течения полиэтилена в канале радиусом $R = 0,5$ см со средней скоростью $v_c = 4$ см/сек.

При расчетах будем пользоваться следующими данными [5, 6]:

$$a = 1,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}, \quad \rho = 0,83 \frac{\text{г}}{\text{см}^3},$$

$$c_v = 2,5 \frac{\text{дж}}{\text{г} \cdot \text{град}}, \quad n = 0,25.$$

Полученная экспериментально [5] зависимость $\mu(T)$ представлена на рис. 1.

Методом, указанным в работе [2], задаваясь распределением температуры среды при $z_1 = 0$ соответственно кривой 1 на рис. 2 и полагая температуру стенки цилиндра постоянной, вычисляем температурное поле в среде. Кривые 2 и 3 на рис. 2 определяют температуру среды соответственно при $z_1 = 20$ и $z_1 = 40$.

Как видно из рис. 2, можно приближенно считать, что в данном случае (когда канал имеет длину $z_1 = 40$) $T = T(r_1)$. Тогда имеем

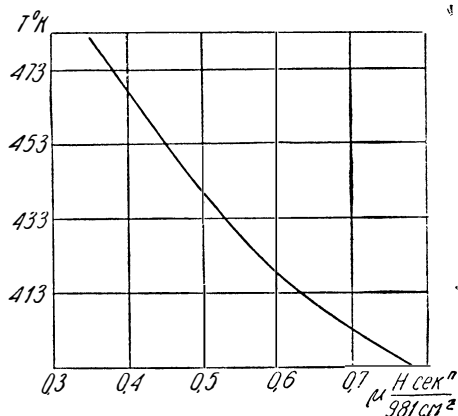


Рис. 1.

зависимость $\mu(r_1)$, которая представлена кривой 1 на рис. 3. Кривая 2 на том же рисунке является аппроксимирующей и описывается уравнением

$$\mu = 0,52 + 0,0733r_1 - 0,2333r_1^2.$$

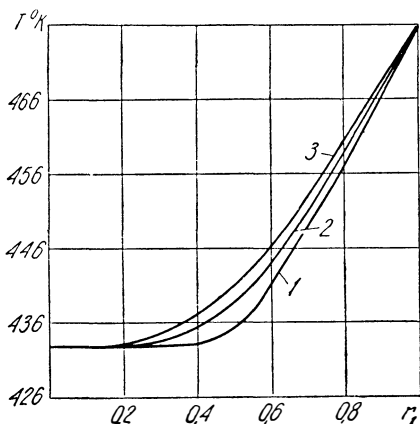


Рис. 2.

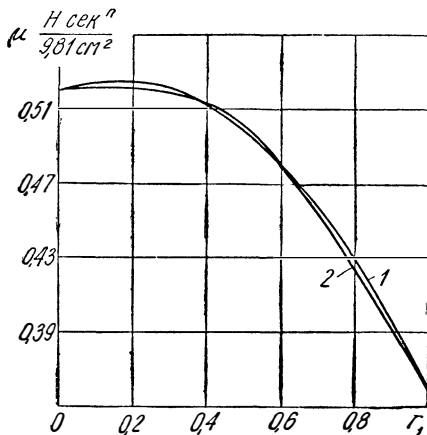


Рис. 3.

Вычисленный для данной зависимости $\mu(r_1)$ профиль скоростей изображает кривая 1 на рис. 4. Кривая 2 на рис. 4 соответствует изотермическому профилю скоростей, определяемому формулой [4]:

$$v = \frac{v_c}{1 - \frac{2n}{3n+1}} \left(1 - r_1^{\frac{n+1}{n}}\right).$$

Как видно из рис. 4, в данном случае, когда температура среды у стенки выше, чем в центральной части, по сравнению с изотермиче-

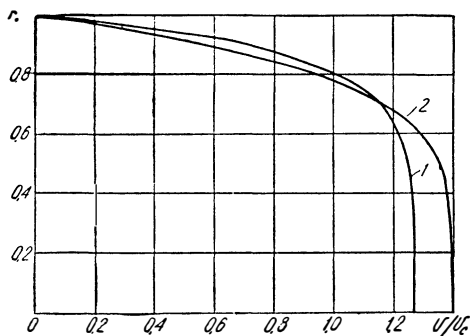


Рис. 4.

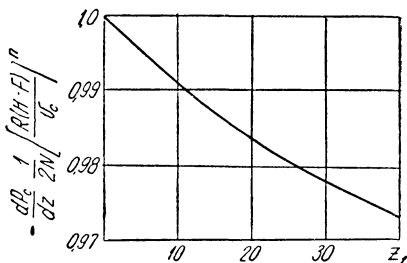


Рис. 5.

ским случаем, при одной и той же средней скорости течения уменьшается скорость среды в центральной части и увеличивается у стенки канала.

Характер изменения $\frac{dp_c}{dz}$ в зависимости от координаты z_1 при вводе средней температуры в сечении представлен на рис. 5. Как видно, в дан-

ном случае $\left| \frac{dp_c}{dz} \right|$ уменьшается с ростом z_1 , в то время как при изотермическом течении эта величина является постоянной.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Литвинов. До задачі про рух розплавів полімерів у круглих каналах. «Прикладна механіка», т. IX, вип. 3, 1963.
 2. В. Г. Литвинов. Температурне поле у розплаві полімеру, який рухається в круглій трубі. «Прикладна механіка», т. X, вип. 2, 1964.
 3. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа, т. 1. Физматгиз, 1963.
 4. В. Г. Литвинов. Течіння розплавів термопластів в циліндричній трубі. «Прикладна механіка», т. IX, вип. 5, 1963.
 5. Э. Бернхардт. Переработка термопластичных материалов. Госхимиздат, 1962.
 6. W. Holz müller. Erwärmungs — und Abkühlungs — Vorgänge von Plasten., Plaste und Kautschuk, v. 9, № 6, 1962.
-

О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ОГРАНИЧЕННОМ НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ОРОШЕНИИ

В. К. Рудаков

Днепропетровский университет

Местная усиленная инфильтрация поливных вод, возникающая при орошении земель, вызывает подпор грунтового потока, сформировавшегося в естественных условиях. Количественная оценка предстоящего подъема грунтовых вод во времени необходима для проектирования ирригационных сооружений и мероприятий по защите земель от заболачивания и засоления.

Аналитические решения ряда задач неустановившейся безнапорной фильтрации в связи с ирригацией земель получены для однородного пласта Н. Н. Веригиным [2], П. Я. Полубариновой-Кочиной [4],

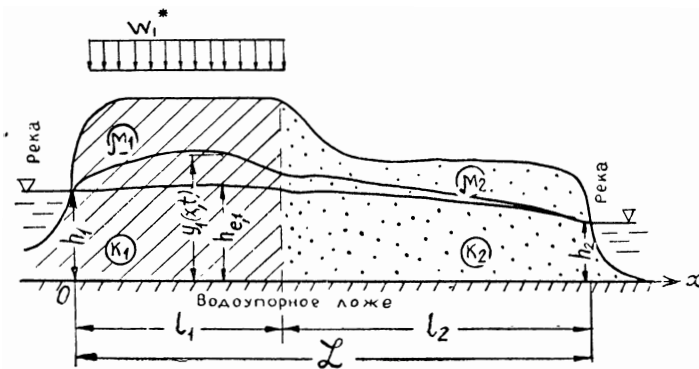


Рис. 1.

С. Ф. Аверьяновым [1] и другими исследователями. Гораздо менее изучены аналогичные течения грунтовых вод в неоднородных пластах, которые наиболее часто встречаются в природных условиях.

Значительный интерес представляет такая расчетная схема, когда водопроницаемость пористой среды принимается кусочно-постоянной по длине пласта.

Рассмотрим пласт конечной длины L с одной границей раздела грунтов различной водопроницаемости, слагающих участки длиной l_1 и l_2 (рис. 1). Коэффициент фильтрации k и коэффициент недостатка насыщения грунта в зоне аэрации μ имеют значения соответственно k_1, μ_1 и k_2, μ_2 . Водоупор горизонтальный B в пределах первого участка пласта вследствие орошения возникает дополнительная инфильтрация интенсив-

ностью w_1^* . На внешних границах потока $x = 0$ и $x = Z$ поддерживаются постоянные глубины (напоры) грунтовой воды h_1 и h_2 . Глубина установившегося в естественных условиях грунтового потока h_e известна по данным наблюдений.

Уравнение Буссинеска для одномерной неустановившейся безнапорной фильтрации при горизонтальном водоупоре, линеаризованное по способу Н. А. Багрова — Н. Н. Веригина, совпадает с уравнением теплопроводности или диффузии и имеет вид [2]

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

где

$$u = \frac{h^2}{2}, \quad a^2 = \frac{kh_{\text{ср}}}{\mu}, \quad b = \frac{w h_{\text{ср}}}{\mu}. \quad (2)$$

Здесь h — переменная глубина (напор) грунтовой воды;

t — время;

a^2 — коэффициент урвнeпрoвoднoсти;

w — интенсивность питания грунтовых вод сверху;

$h_{\text{ср}}$ — некоторая средняя глубина потока.

Исходя из принципа суперпозиции, будем искать решение задачи в следующем виде:

$$y_1^2(x, t) = h_{e,1}^2 + 2u_1(x, t), \quad (0 \leq x \leq l_1), \quad (3a)$$

$$y_2^2(x, t) = h_{e,2}^2 + 2u_2(x, t), \quad (l_1 \leq x \leq L). \quad (3б)$$

Здесь $y(x, t)$ — глубина неустановившегося грунтового потока при наличии местной усиленной инфильтрации. Полагаем, что последняя мгновенно возникает в момент времени $t = 0$ и в дальнейшем поддерживается постоянной.

Индексами 1 и 2 обозначаются номера участков пласта.

В соответствии с формулами (1) — (2) функции u_1 и u_2 определяются системой уравнений

$$a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad (0 \leq x \leq l_1), \quad (4a)$$

$$a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \quad (l_1 \leq x \leq L), \quad (4б)$$

где

$$a_1^2 = \frac{k_1 h_{\text{ср},1}}{\mu_1}, \quad a_2^2 = \frac{k_2 h_{\text{ср},2}}{\mu_2}, \quad b_1 = \frac{w_1^* h_{\text{ср},1}}{\mu_1} = \frac{w_1^*}{k_1} a_1^2. \quad (4в)$$

Начальное условие: $u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = 0$.

Условия на внешних границах пласта:

$$u_1(0, t) = 0, \quad u_2(L, t) = 0.$$

Условия на границе раздела грунтов различной водопроницаемости:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=l_1} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{x=l_1}, \quad k_1 \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=l_1} = k_2 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=l_1}. \quad (4г)$$

Приведенная система уравнений описывает не весь фильтрационный поток, а лишь добавочное неустановившееся течение, обусловленное дополнительным питанием на первом участке пласта. Указанное течение согласно (3a) — (3б) накладывается на естественный установившийся поток грунтовых вод.

Отметим, что поскольку дополнительное питание на втором участке пласта отсутствует, свободный член в уравнении (4б) равен нулю.

Решим систему линейных уравнений в частных производных второго порядка (4) с помощью операционного метода [3, 5]. В результате преобразования Лапласа получаем систему вспомогательных уравнений

$$a_1^2 \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx^2} - p \bar{u}_1 + \frac{b_1}{p} = 0 \quad (0 \leq x \leq l_1), \quad (5a)$$

$$a_2^2 \frac{d^2 \bar{u}_2}{dx^2} - p \bar{u}_2 = 0 \quad (l_1 \leq x \leq L) \quad (5б)$$

с условиями

$$\bar{u}_1(0) = 0, \quad \bar{u}_2(L) = 0, \quad \bar{u}_1(l_1) = \bar{u}_2(l_1), \quad k_1 \frac{d\bar{u}_1}{dx} \Big|_{x=l_1} = k_2 \frac{d\bar{u}_2}{dx} \Big|_{x=l_1}. \quad (5в)$$

Интегрируя уравнения (5а) и (5б), находим

$$\bar{u}_1 = \frac{b_1}{p^2} + C_1 \operatorname{ch} \frac{x \sqrt{p}}{a_1} + C_2 \operatorname{sh} \frac{x \sqrt{p}}{a_1},$$

$$\bar{u}_2 = C_3 \operatorname{ch} \frac{x \sqrt{p}}{a_2} + C_4 \operatorname{sh} \frac{x \sqrt{p}}{a_2},$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

Используя условия (5в), получим

$$C_1 = -\frac{b_1}{p^2}, \quad C_2 = \frac{b_1}{p^2} \cdot \frac{1 - \operatorname{sch} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} \cdot \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}}{\operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}},$$

$$C_3 = \frac{b_1}{p^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{L \sqrt{p}}{a_2} \cdot \left(1 - \operatorname{ch} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1}\right)}{\operatorname{sh} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}} +$$

$$+ \frac{b_1}{p^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{L \sqrt{p}}{a_2} \cdot \left(1 - \operatorname{sch} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} \cdot \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}\right)}{\operatorname{sh} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2} \cdot \left(\operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}\right)},$$

$$C_4 = -\frac{b_1}{p^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{L \sqrt{p}}{a_2} \cdot \left(1 - \operatorname{ch} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1}\right)}{\operatorname{sh} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}} -$$

$$- \frac{b_1}{p^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{L \sqrt{p}}{a_2} \cdot \left(1 - \operatorname{sch} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} \cdot \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}\right)}{\operatorname{sh} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2} \cdot \left(\operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}\right)}.$$

Здесь $\sigma = \frac{k_1 a_2}{k_2 a_1}$.

После соответствующих подстановок найдем L — изображения иско-
мых функций

$$\bar{u}_1 = \frac{b_1}{p^2} \cdot \left(1 - \operatorname{ch} \frac{x \sqrt{p}}{a_1}\right) + \frac{b_1}{p^2} \operatorname{sh} \frac{x \sqrt{p}}{a_1} \cdot \frac{1 - \operatorname{sch} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} \cdot \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}}{\operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 = & \frac{b_1}{p^2} \operatorname{sh} \frac{L-x}{a_2} \sqrt{p} \cdot \frac{1 - \operatorname{ch} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1}}{\operatorname{sh} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}} + \\ & + \frac{b_1}{p^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{L-x}{a_2} \sqrt{p} \cdot \operatorname{sh} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} \cdot \left(1 - \operatorname{sch} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} \cdot \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2} \cdot \left(\operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2} \right)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Оригинал изображения (6) по формуле обращения Римана — Меллина [3, 5] будет

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{b_1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \cdot \frac{1 - \operatorname{ch} \frac{x \sqrt{p}}{a_1}}{p^2} dp + \\ & + \frac{b_1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \cdot \operatorname{sh} \frac{x \sqrt{p}}{a_1} \cdot \frac{1 - \operatorname{sch} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} \cdot \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}}{\left(\operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2} \right) p^2} dp. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти интегралы можно вычислить посредством перехода к замкнутому контуру и применения теории вычетов. Обе подынтегральные функции однозначны, причем первая имеет один простой полюс в начале координат, а вторая, кроме того, простые полюсы, отвечающие корням трансцендентного уравнения

$$\operatorname{th} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2} = 0 \quad (\text{при } p \neq 0). \quad (9)$$

Поскольку коэффициент σ всегда положителен, легко заключить, что уравнение (9) может иметь место лишь при условии, когда \sqrt{p} является мнимым, т. е. $\sqrt{p} = i\alpha$, где α — действительное число. Отсюда вытекает $p = -\alpha^2$. Следовательно, искомые полюсы — вещественные отрицательные числа.

Заменяя в уравнении (9) гиперболический тангенс на круговой и учитывая свойство периодичности последнего, получим

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha l_1}{a_1} + \pi m \right) + \sigma \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha l_2}{a_2} + \pi s \right) = 0, \quad (10)$$

где m и s — любые целые числа.

Корни (10) могут быть найдены графически в точках пересечения кривых

$$\begin{aligned} \beta &= \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha l_1}{a_1} + \pi m \right), \\ \beta &= -\sigma \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha l_2}{a_2} + \pi s \right). \end{aligned}$$

Уравнение (10) имеет бесконечное множество действительных корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$, которые располагаются симметрично относительно начала координат и не повторяются.

Из изложенного выше следует, что во всякой конечной части плоскости находится конечное число полюсов рассматриваемой функции $\bar{u}_1(x, p)$. Берем за контур интегрирования окружность с центром в начале координат и выбираем для ее радиуса последовательность значений R_n так, чтобы ни одна из этих окружностей не проходила через какой-нибудь полюс. В соответствии с теоремой Коши искомым оригинал (8), выраженный через контурные интегралы, равен пределу при $n \rightarrow \infty$ суммы вычетов подынтегральной функции относительно ее полюсов, находящихся внутри окружности радиуса R_n .

Вычисляем вычет в начале координат; при этом получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую раскрываем по правилу Лопиталья.

$$\text{Res}[e^{pt} \cdot \bar{u}_1(x, p)]_{p=0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_1^*}{k_1} \cdot \left(\frac{2k_1 l_1 l_2 + k_2 l_1^2}{k_1 l_2 + k_2 l_1} x - x^2 \right).$$

Сумма вычетов в остальных полюсах равна

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}[e^{pt} \cdot \bar{u}_1(x, p)]_{p_n = -\alpha_n^2} = \\ & = -2 \frac{\omega_1^*}{k_1} a_1^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t}}{a_n^3} \sin \frac{\alpha_n x}{a_1} \cdot \frac{1 - \sec \frac{\alpha_n l_1}{a_1} - \sigma \text{tg} \frac{\alpha_n l_1}{a_1} \cdot \text{tg} \frac{\alpha_n l_2}{a_2}}{l_1 \sec^2 \frac{\alpha_n l_1}{a_1} + \frac{k_1}{k_2} l_2 \sec^2 \frac{\alpha_n l_2}{a_2}}. \end{aligned}$$

Складываем оба выражения и подставляем полученный оригинал u_1 в исходную запись решения (3а). Принимая во внимание формулу глупины установившегося грунтового потока для данного случая

$$y_{k,1}^2 = h_{e,1}^2 + \frac{\omega_1^*}{k_1} \left(\frac{2k_1 l_1 l_2 + k_2 l_1^2}{k_1 l_2 + k_2 l_1} x - x^2 \right), \quad (11)$$

а также (10), имеем следующий вид искомого решения:

$$y_1^2(x, t) = y_{k,1}^2 - 4 \frac{\omega_1^*}{k_1} a_1^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t}}{a_n^3} \cdot \sin \frac{\alpha_n x}{a_1} \cdot \frac{\sec^2 \frac{\alpha_n l_1}{a_1} - \sec \frac{\alpha_n l_1}{a_1}}{l_1 \sec^2 \frac{\alpha_n l_1}{a_1} + \frac{k_1}{k_2} l_2 \sec^2 \frac{\alpha_n l_2}{a_2}}. \quad (12)$$

Формулу (11) легко найти, проинтегрировав систему уравнений (4) при $\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial u_2}{\partial t} = 0$.

Найденное решение (12) представляет уравнение кривой депрессии грунтовых вод на первом участке пласта, где происходит дополнительная инфильтрация. При большой продолжительности этого процесса ($t \rightarrow \infty$) глубина потока $y_1(x, t)$ асимптотически приближается к $y_{k,1}$. Подставляя в (12) $x = 0$, получаем, как и следовало ожидать, $y_1(0, t) = h_1$.

Оригинал изображения (7) по формуле обращения Римана — Меллина записывается таким образом:

$$u_2 = \frac{b_1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} \cdot \frac{\text{sh} \frac{L-x}{a_2} \sqrt{p} \cdot \left(1 - \text{ch} \frac{l_1 \sqrt{p}}{a_1} \right)}{p^2 \cdot \text{sh} \frac{l_2 \sqrt{p}}{a_2}} dp +$$

$$+ \frac{b_1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{L-x}{a_2} V\bar{\rho} \cdot \operatorname{sh} \frac{l_1 V\bar{\rho}}{a_1} \cdot \left(1 - \operatorname{sch} \frac{l_1 V\bar{\rho}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_1 V\bar{\rho}}{a_1} \cdot \operatorname{th} \frac{l_2 V\bar{\rho}}{a_2}\right)}{\rho^2 \cdot \operatorname{sh} \frac{l_2 V\bar{\rho}}{a_2} \left(\operatorname{th} \frac{l_1 V\bar{\rho}}{a_1} + \sigma \operatorname{th} \frac{l_2 V\bar{\rho}}{a_2}\right)} d\rho. \quad (13)$$

Кроме полюсов, указанных выше, в данном случае обе подынтегральные функции имеют бесконечное множество простых полюсов

$$\rho_n = -\frac{\pi^2 n^2 a_2^2}{l_2^2},$$

отвечающих корням уравнения $\operatorname{sh} \frac{l_2 V\bar{\rho}}{a_2} = 0$. Однако сумма вычетов относительно этих полюсов, как нетрудно убедиться, равна нулю.

Проделав те же операции, что и в предыдущем случае, получим уравнение кривой депрессии грунтовых вод на втором участке пласта, где дополнительное питание (орошение) отсутствует,

$$y_{2,2}^2(x, t) = y_{k,2}^2 - 4 \frac{\omega_1^*}{k_1} a_1^3 \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t}}{\alpha_n^3} \times \\ \times \frac{\sin \frac{\alpha_n(L-x)}{a_2} \left(1 - \sec \frac{\alpha_n l_1}{a_1}\right)}{\cos \frac{\alpha_n l_2}{a_2} \cdot \left(l_1 \sec^2 \frac{\alpha_n l_1}{a_1} + \frac{k_1}{k_2} l_2 \sec^2 \frac{\alpha_n l_2}{a_2}\right)}. \quad (14)$$

Здесь

$$y_{k,2}^2 = h_{e,2}^2 + \omega_1^* \cdot \frac{(L-x) l_1^2}{k_1 l_2 + k_2 l_1}. \quad (15)$$

При $t \rightarrow \infty$ глубина $y_1(x, t)$ стремится к глубине конечного установившегося потока $y_{k,2}$. В результате подстановки $x = L$ в (14) получаем $y_2(L, t) = h_{e,2}$, что соответствует заданному условию на этой границе.

Согласно закону Дарси, единичный расход в любом сечении грунтового потока для любого момента времени равен

$$q(x, t) = -ky(x, t) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}. \quad (16)$$

В условиях конечного установившегося движения

$$q_k = -ky_k \frac{dy_k}{dx}. \quad (17)$$

Дифференцируя (12) по x и умножая полученный результат на $-\frac{1}{2} k_1$, найдем выражение расхода грунтовых вод на орошаемом участке пласта

$$q_1(x, t) = q_{k,1} + 2\omega_1^* a_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t}}{\alpha_n^2} \cdot \cos \frac{\alpha_n x}{a_1} \times \\ \times \frac{\sec^2 \frac{\alpha_n l_1}{a_1} - \sec \frac{\alpha_n l_1}{a_1}}{l_1 \sec^2 \frac{\alpha_n l_1}{a_1} + \frac{k_1}{k_2} l_2 \sec^2 \frac{\alpha_n l_2}{a_2}}, \quad (18)$$

где

$$q_{k,1} = q_{e,1} + \omega_1^* \left(x - \frac{1}{2} \cdot \frac{2k_1 l_1 l_2 + k_2 l_1^2}{k_1 l_2 + k_2 l_1} \right), \quad (19)$$

$q_{e,1}$ — расход установившегося в естественных условиях потока грунтовых вод на данном участке.

Величина q_e определяется обычно по данным натуральных наблюдений.

Аналогичным образом получаем для неорошаемого участка

$$q_2(x, t) = q_{k,2} - 2\omega_1^* a_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t}}{\alpha_n^2} \times \\ \times \frac{\cos \frac{\alpha_n (L-x)}{a_2} \left(1 - \sec \frac{\alpha_n l_1}{a_1} \right)}{\cos \frac{\alpha_n l_2}{a_2} \left(l_1 \sec^2 \frac{\alpha_n l_1}{a_1} + \frac{k_1}{k_2} l_2 \sec^2 \frac{\alpha_n l_2}{a_2} \right)}. \quad (20)$$

Здесь

$$q_{k,2} = q_{e,2} + \omega_1^* \frac{k_2 l_1^2}{2(k_1 l_2 + k_2 l_1)}. \quad (21)$$

Найденные уравнения неустановившейся фильтрации существенно упрощаются в частном случае $\sigma = 1$. При этом из (10) следует

$$\alpha_n = \frac{\pi n a_1}{L_{np}}, \quad (22)$$

где

$$L_{np} = l_1 + \frac{k_1}{k_2} l_2.$$

Подставив (22) в (12) и (14) и выполнив тригонометрические преобразования, имеем следующие уравнения кривой депрессии: при $0 \leq x \leq l_1$

$$y_1^2(x, t) = y_{k,1}^2 - \\ - 2 \frac{\omega_1^*}{k_1} L_{np}^2 \cdot \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-\pi^2 n^2 \tau} \cdot \left[2 \sin \pi n \frac{x}{L_{np}} - \sin \pi n \frac{l_1 + x}{L_{np}} + \sin \pi n \frac{l_1 - x}{L_{np}} \right], \quad (23)$$

при $l_1 \leq x \leq L$

$$y_2^2(x, t) = y_{k,2}^2 - 2 \frac{\omega_1^*}{k_1} L_{np}^2 \cdot \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} e^{-\pi^2 n^2 \tau} \cdot \left[2 \sin \pi n \frac{\frac{k_1}{k_2} (L-x)}{L_{np}} - \right. \\ \left. - \sin \pi n \frac{l_1 + \frac{k_1}{k_2} (L-x)}{L_{np}} + \sin \pi n \frac{l_1 - \frac{k_1}{k_2} (L-x)}{L_{np}} \right], \quad (24)$$

где $\tau = \frac{a_1^2 t}{L_{np}}$ — критерий Фурье, безразмерное время.

Полагая $k_1 = k_2$ (тогда $a_1 = a_2$, $L_{np} = L$), получаем из (23) — (24) уравнение кривой депрессии грунтовых вод в однородном пласте при рассматриваемой схеме орошения

$$y^2(x, t) = y_k^2 - 2 \frac{\omega_1^*}{k} L^2 \cdot \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-\pi^2 n^2 \tau} \times \\ \times \left[2 \sin \pi n \frac{x}{L} - \sin \pi n \frac{x + l_1}{L} - \sin \pi n \frac{x - l_1}{L} \right]. \quad (25)$$

Таким образом, в случае $\sigma = 1$ допустимо виртуальное приведение данного неоднородного пласта к однородному посредством растяжения или укорачивания пути фильтрации в соответствии с отношением $\frac{k_1}{k^2}$.

График специальной функции $P\left(\tau, \frac{x}{L}\right) = \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-\pi^2 n^2 \tau} \cdot \sin \pi n \frac{x}{L}$

представлен на рис. 2. При значениях $\tau > 0,3$ вполне достаточно ограничиваться первым членом ряда.

Расход грунтового потока $\rho^3 \cdot \rho\left(\tau, \frac{x}{L}\right)$ в случае $\sigma = 1$ при $0 \leq x \leq l_1$

$$q_1(x, t) = q_{k, 1} + \omega_1^* L_{np} \cdot \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\pi^2 n^2 \tau} \times \left[2 \cos \pi n \frac{x}{L_{np}} - \cos \pi n \frac{l_1 + x}{L_{np}} - \cos \pi n \frac{l_1 - x}{L_{np}} \right], \quad (26)$$

а при $l_1 \leq x \leq L$

$$q_2(x, t) = q_{k, 2} - \omega_1^* L_{np} \times \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot e^{-\pi^2 n^2 \tau} \times \left[2 \cos \pi n \frac{\frac{k_1}{k_2}(L-x)}{L_{np}} - \cos \pi n \frac{l_1 + \frac{k_1}{k_2}(L-x)}{L_{np}} - \cos \pi n \frac{l_1 - \frac{k_1}{k_2}(L-x)}{L_{np}} \right]. \quad (27)$$

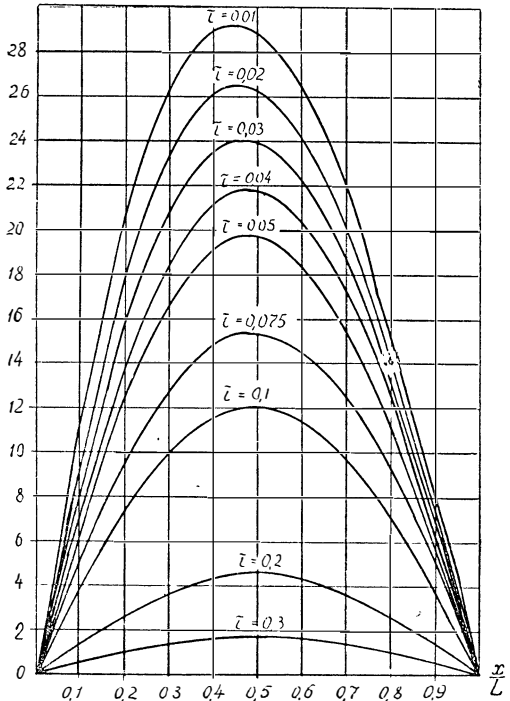


Рис. 2.

Если орошение производится не на первом, а на втором участке пласта (интенсивность дополнительного питания грунтовых вод ω_2^*), то, применяя вышеизложенный метод решения задачи, найдем такие уравнения кривой депрессии (σ — любое положительное число):

1-й участок ($0 \leq x \leq l_1$)

$$y_1^2(x, t) = y_{k, 1}^2 - 4 \frac{\omega_2^*}{k_2} a_2^2 \cdot a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t}}{\alpha_n^3} \cdot \sin \frac{\alpha_n x}{a_1} \times \frac{1 - \sec \frac{\alpha_n l_2}{a_2}}{\cos \frac{\alpha_n l_1}{a_1} \left(l_1 \sec^2 \frac{\alpha_n l_1}{a_1} + \frac{k_1}{k_2} l_2 \sec^2 \frac{\alpha_n l_2}{a_2} \right)}, \quad (28)$$

2-й участок ($l_1 \leq x \leq L$)

$$y_2^2(x, t) = y_{k, 2}^2 - 4 \frac{\omega_2^*}{k_2} a_2^2 \cdot a_1 \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n t}}{a_n^3} \times \\ \times \frac{\sin \frac{a_n(L-x)}{a_2} \cdot \left(\sec \frac{a_n l_2}{a_2} - 1 \right)}{\cos \frac{a_n l_2}{a_2} \cdot \left(l_1 \sec^2 \frac{a_n l_1}{a_1} + \frac{k_1}{k_2} l_2 \sec^2 \frac{a_n l_2}{a_2} \right)}. \quad (29)$$

Здесь

$$y_{k, 1}^2 = h_{e, 1}^2 + \omega_2^* \frac{l_2^2 x}{k_1 l_2 + k_2 l_1}, \quad (30)$$

$$y_{k, 2}^2 = h_{e, 2}^2 + \frac{\omega_2^*}{k_2} \left\{ \frac{l_2^2 [k_2 l_1 + k_1 (x - l_1)]}{k_1 l_2 + k_2 l_1} - (x - l_1)^2 \right\}. \quad (31)$$

При $\sigma = 1$ имеем:

1-й участок ($0 \leq x \leq l_1$)

$$y_1^2(x, t) = y_{k, 1}^2 - 2 \frac{\omega_2^*}{k_2} \left(l_2 + \frac{k_2}{k_1} l_1 \right)^2 \cdot \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-\pi^2 n^2 \tau} \times \\ \times \left[2 \sin \pi n \frac{L_{\text{пр}} - x}{L_{\text{пр}}} + \sin \pi n \frac{l_1 + x}{L_{\text{пр}}} - \sin \pi n \frac{l_1 - x}{L_{\text{пр}}} \right]. \quad (32)$$

2-й участок ($l_1 \leq x \leq L$)

$$y_2^2(x, t) = y_{k, 2}^2 - 2 \frac{\omega_2^*}{k_2} \left(l_2 + \frac{k_2}{k_1} l_1 \right)^2 \cdot \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^3} e^{-\pi^2 n^2 \tau} \times \\ \times \left[2 \sin \pi n \frac{\frac{k_1}{k_2}(L-x)}{L_{\text{пр}}} - \sin \pi n \frac{\frac{k_1}{k_2}(L-x+l_2)}{L_{\text{пр}}} + \sin \pi n \frac{\frac{k_1}{k_2}(x-l_1)}{L_{\text{пр}}} \right], \quad (33)$$

где $L_{\text{пр}} = l_1 + \frac{k_1}{k_2} l_2$.

Заметим, что система исходных уравнений, соответствующая данной схеме орошения, отличается от (4) только отсутствием свободного члена b_1 в (4а) и наличием свободного члена

$$b_2 = \frac{\omega_2^* h_{\text{ср}, 2}}{\mu_2} = \frac{\omega_2^*}{k_2} \cdot a_2^2 \quad (34)$$

в (4б).

При орошении на обоих участках пласта ($b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$) влияние дополнительной инфильтрации на грунтовый поток может быть учтено с помощью суперпозиции полученных выше решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Ф. Аверьянов. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. В сб. «Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод». М., Изд-во АН СССР, 1956.
2. Н. Н. Веригин. О течениях грунтовых вод при местной усиленной инфильтрации. «Докл. АН СССР», т. 70, № 5, 1950.
3. Х. Карслоу и Д. Егер. Операционные методы в прикладной математике (перевод с англ.). Изд-во иностр. лит., 1948.
4. П. Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. Гостехтеориздат, М., 1952.
5. А. М. Эфрос и А. М. Данилевский. Операционное исчисление и контурные интегралы. ДНТВУ, Харьков, 1937.

ПОНЯТИЕ О РАБОТОСПОСОБНОСТИ ПОТОКА ГАЗА И ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЕГО ПРИ АНАЛИЗЕ РАБОТЫ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

В. А. Мурзин

Днепропетровский горный институт

При составлении баланса энергии отдельных узлов пневматической установки (компрессора, сети, потребителя сжатого воздуха) возникают затруднения в установлении к. п. д. их, так как «это на первый взгляд странное обстоятельство объясняется невозможностью выделить полезную работу в случае охлаждаемых машин» [1].

При оценке экономичности работы этих узлов используются так называемые адиабатный, политропный и изотермический к. п. д., которые по сути дела являются поправочными множителями, учитывающими различие между величинами расчетной и фактической работы воздуха.

Эту неопределенность можно устранить, если ввести понятие работоспособности покоящегося газа и работоспособности потока газа.

§ 1. Общие положения

Рассматривая вопрос о работоспособности газа, ограничимся процессами, в которых работа производится газом за счет изменения только физического состояния его (химический состав газа не изменяется), так как именно это имеет место в пневматических установках, где сжатый газ (воздух) играет роль энергоносителя. Кроме этого, будем считать, что газ полностью следует классическим газовым законам, то есть является идеальным газом.

Обычно в энергетических пневматических установках давление не превышает $1 \frac{MN}{M^2}$ и это допущение не дает большой погрешности. При использовании газа в качестве энергоносителя различают два характерных случая:

1. Изменение состояния газа происходит при неизменном положении или при незначительном перемещении его относительно стенок сосуда, в котором газ заключен. При этом мы будем говорить о покоящемся газе и рассматривать работу покоящегося газа (для сокращения просто «работа газа»).

2. Изменение состояния газа происходит в процессе перемещения его относительно стенок канала, ограничивающих поток газа. При этом мы будем говорить о работе потока газа.

Работа, совершаемая газом в этих двух случаях, существенно различна, поэтому они будут рассмотрены отдельно.

§ 2. Работоспособность газа

Покоящийся газ может производить работу только в том случае, если он находится в неравновесном состоянии с другим объемом газа, с которым происходит взаимодействие данного объема. Неравновесное состояние может быть механическим и термическим. Под механическим неравновесным состоянием будем понимать состояние, при котором давления газа во взаимодействующих объемах различны, а температуры одинаковы.

Под термическим неравновесным состоянием подразумевается состояние, при котором давления во взаимодействующих объемах одинаковы, а температуры различны.

В общем случае два взаимодействующих объема газа могут находиться как в механически, так и термически неравновесном состоянии.

В энергетических пневматических установках возможность производства работы данным объемом газа рассматривается обычно в зависимости от неравновесности его состояния относительно окружающей среды, то есть атмосферы, причем атмосфера принимается за бесконечно большой объем и состояние ее не изменяется при любых изменениях состояния данного объема газа.

При изложении материала, под вторым объемом газа, с которым будет взаимодействовать данный объем, будет также приниматься атмосфера (окружающая среда) и будет рассматриваться равновесное или неравновесное состояние его относительно окружающей среды. Под «работоспособностью газа» следует понимать энергию, которую можно использовать по своему усмотрению: для производства работы, преобразования в другой вид энергии и т. д., т. е., по сути дела, механическую энергию.

Работоспособностью газа называется то наибольшее количество энергии, которое можно использовать для производства работы при переходе данного объема газа из неравновесного состояния его относительно окружающей среды к равновесному состоянию при условии, что в процессе перехода к газу не будет подводиться или отводиться тепло, которое может быть преобразовано в механическую энергию.

Наибольшую работу при переходе газа из данного состояния в равновесное можно получить в том случае, если процессы перехода будут происходить без потерь (должно отсутствовать трение и простой теплообмен при конечной разности температур), т. е. эти процессы должны быть обратимыми. Таким образом, при переходе газа из неравновесного состояния относительно окружающей среды в равновесное могут быть использованы изотермический и адиабатный процессы.

Исходя из вышесказанного, задачу определения величины работоспособности данного объема газа, находящегося в неравновесном состоянии относительно окружающей среды, сводят к следующему: имеется какой-то объем газа, температура и давление которого в общем случае отличны от температуры и давления окружающей среды; необходимо определить ту максимальную работу, которую можно получить от газа при переходе его в равновесное с окружающей средой состояние при использовании изотермического и адиабатного процессов.

Очевидно, сначала нужно решить, какая должна быть последовательность использования адиабатного и изотермического процессов при переходе газа в равновесное состояние. Если газ находится в термически неравновесном состоянии относительно окружающей среды, то для проведения изотермического изменения его состояния необходимо иметь подогреватель (или холодильник) с температурой, бесконечно мало отличаю-

щейся от температуры газа и в то же время отличной от температуры окружающей среды. Значит, подогреватель (или холодильник) можно было бы использовать для получения механической работы в тепловом двигателе, работающем по циклу Карно за счет переноса тепла от подогревателя к окружающей среде (или от окружающей среды к холодильнику). Это равносильно подводу к газу или отводу от него механической энергии, что по формулировке понятия «работоспособность газа» должно быть исключено.

Таким образом, единственно возможная последовательность перевода газа в равновесное состояние с окружающей средой заключается в адиабатном приведении его к термическому равновесию и затем изотермическому приведению к механическому равновесию с окружающей средой. Как известно, закон сохранения энергии для покоящегося газа устанавливается первым законом термодинамики, который для единицы массы газа запишется в виде

$$dq = du + dl, \quad (1)$$

где dq — тепло, подводимое к газу в процессе изменения состояния;

du — изменение внутренней энергии газа;

dl — работа, совершаемая газом.

Из сказанного выше следует, что

$$dq = T_a \cdot dS, \quad (2)$$

где T_a — температура окружающей среды;

ds — изменение энтропии газа.

Согласно формулам (1) и (2), работа, совершаемая газом,

$$dl = T_a \cdot ds - du; \quad (3)$$

в конечном виде, при изменении состояния газа от неравновесного до равновесного с окружающей средой состояния

$$l = T_a (s_a - s_1) - (u_a - u_1) \quad (4)$$

или

$$l = c_v (T_1 - T_a) + T_a (s_a - s_1), \quad (5)$$

где u_1 ; s_1 и T_1 — соответственно внутренняя энергия, энтропия и температура газа в неравновесном состоянии;

u_a ; s_a и T_a — внутренняя энергия, энтропия и температура газа в равновесном состоянии с окружающей средой.

Формула (5) устанавливает зависимость наибольшей полной работы, совершаемой единицей массы газа от значения начальных и конечных параметров его. Однако не вся эта работа может быть нами использована — часть её теряется на взаимодействие с окружающей средой. Эта часть равна

$$\Delta l = p_a (v_a - v_1), \quad (6)$$

v_1 — удельный объем газа в начальном состоянии его;

p_a и v_a — давление и объем газа при равновесном состоянии с окружающей средой.

Таким образом, наибольшая работа, которую может совершить единица массы газа, если привести ее в равновесное состояние с окружающей средой, и которую мы можем использовать по своему усмотрению, т. е. удельная работоспособность газа, равна

$$l_p = l - \Delta l = C_v (T_1 - T_a) + T_a (s_a - s_1) - p_a (v_a - v_1). \quad (7)$$

Чтобы показать величину удельной работоспособности газа, в координатах Ts произведем следующие преобразования:

$$p_a v_a = RT_a = (c_p - c_v) T_a, \quad (8)$$

$$p_a v_1 = RT_3 = (c_p - c_v) T_3, \quad (9)$$

T_3 — температура газа, которую он имел бы при параметрах состояния p_a и v_1 .

Подставляя эти величины в (7), получим

$$l_p = c_v (T_1 - T_a) + T_a (s_a - s_1) - (c_p - c_v) T_a + (c_p - c_v) T_3. \quad (10)$$

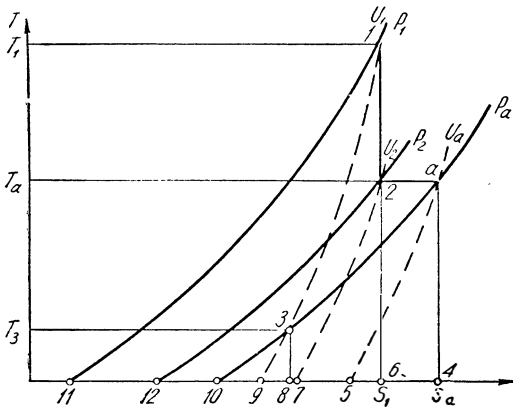


Рис. 1.

$l_p = \text{пл. } 3-1-2-a-3$, причем линия $1-2$ представляет собой адиабату, по которой газ приводится в термическое равновесие с окружающей средой, а линия $2-a$ — изотерма, по которой газ приводится в механическое равновесие с окружающей средой.

Таким образом, в координатах Ts удельная работоспособность газа эквивалентна площади, заключенной между адиабатой, проведенной из точки начального состояния газа, изотермой, проведенной из точки равновесного с окружающей средой состояния газа, изобарой, соответствующей давлению окружающей среды, и изохорой начального состояния газа.

Величину удельной работоспособности можно определить по формуле (7), однако эта величина неудобна для расчетов, так как в нее входит энтропия, не поддающаяся непосредственному измерению. Для получения более приемлемой при расчетах формы, воспользуемся соотношением

$$s_a - s_1 = c_v \ln \frac{p_a v_a^k}{p_1 v_1^k} = c_p \ln \left[\frac{T_a}{T_1} \left(\frac{p_1}{p_a} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]. \quad (11)$$

Подставляя это значение в (7) после некоторых преобразований, получим

$$l_p = c_v (T_1 - T_a) + c_p T_a \ln \left[\frac{T_a}{T_1} \left(\frac{p_1}{p_a} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] - R \left(T_a - T_1 \frac{p_a}{p_1} \right). \quad (12)$$

В координатах Ts (рис. 1)

$c_v (T_1 - T_a) = \text{пл. } 9-1-2-7-9$

$T_a (s_a - s_1) = \text{пл. } 6-2-a-4-6 = \text{пл. } 7-2-a-5-7$ как площади криволинейных параллелограммов с одинаковым основанием и одинаковой высотой;

$(c_p - c_v) T_a = p_a v_a = \text{пл. } 10-a-4-10 - \text{пл. } 5-a-4-5 = \text{пл. } 10-a-5-10$;

$(c_p - c_v) T_3 = p_a v_1 = \text{пл. } 10-3-8-10 - \text{пл. } 9-3-8-9 = \text{пл. } 10-3-9-10$. Следовательно:

$l_p = \text{пл. } 9-1-2-7-9 + \text{пл. } 7-2-a-5-7 - \text{пл. } 10-a-5-10 + \text{пл. } 10-3-9-10$,
т. е.

§ 3. Работоспособность потока газа

В отличие от рассмотренного случая, под работоспособностью потока газа следует понимать ту наибольшую работу, которую может совершить поток газа (т. е. газ, движущийся по какому-либо каналу) при условии, что в процессе работы газ достигает равновесного состояния с окружающей средой и к нему не будет подводиться или отводиться от него тепло, которое может быть преобразовано в механическую работу.

Закон сохранения энергии для единицы массы газа в потоке в дифференциальной форме имеет вид

$$dq = du + d(pv) + d\frac{c^2}{2} + dl_{\text{тех}} + dl_{\text{тр}} + g \cdot dz, \quad (13)$$

где

dq — тепло, подводимое в потоке к газу или отводимое от него;

du — изменение внутренней энергии газа в потоке;

$d(pv)$ — элементарная работа перемещения потока;

$d\frac{c^2}{2}$ — изменение кинетической энергии потока (видимого движения газа как целого тела);

$dl_{\text{тех}}$ — элементарная работа, передаваемая потоком каналу, или каналом потоку газа, если канал подвижен (например, в турбине или газодувке);

$dl_{\text{тр}}$ — потери энергии на трение потока о стенки канала;

gdz — изменение потенциальной энергии единицы массы газа в потоке.

Для получения наибольшей величины работы от потока газа так же, как и для покоящегося газа, необходимо, чтобы процессы изменения газа в потоке происходили без потерь, т. е. были обратимыми.

Рассуждая так же, как и при определении работоспособности покоящегося газа, можно сделать следующие выводы:

а) для получения наибольшей работы газ в потоке должен быть сначала приведен в термически равновесное состояние с окружающей средой по адиабатному процессу и затем в механически равновесное состояние по изотермическому процессу;

б) в процессе приведения газа в равновесное состояние с окружающей средой к нему не должно подводиться или отводиться от него тепло, которое может быть преобразовано в механическую работу, т. е. в формуле (13)

$$dq = T_a \cdot ds; \quad (14)$$

в) потери на трение потока о стенки канала должны отсутствовать, т. е.

$$dl_{\text{тр}} = 0. \quad (15)$$

Учитывая эти выводы, выражение (13) запишется в виде

$$T_a \cdot ds = du + d(pv) + d\frac{c^2}{2} + dl_{\text{тех}} + g \cdot dz. \quad (16)$$

В этой формуле суммой трех членов $d\frac{c^2}{2} + dl_{\text{тех}} + g \cdot dz$ выражается механическая работа, совершаемая единицей массы газа в потоке; и так как нами выполнены условия, поставленные в определении работоспособности потока газа, то эта величина является элементарной удельной работоспособностью потока газа.

Следовательно,

$$dl_{p, n} = T_a ds - du - d(pv). \quad (17)$$

Величина удельной работоспособности потока газа, очевидно, будет равна сумме элементарных работ на пути протекания потока от начального сечения, где газ в потоке находится в неравновесном состоянии с окружающей средой, до сечения, в котором газ будет находиться в равновесном состоянии с окружающей средой, т. е.

$$l_{p, n} = T_a (s_a - s_1) - (u_a - u_1) - (p_a v_a - p_1 v_1). \quad (18)$$

Используя известные соотношения, это выражение можно привести к виду

$$l_{p, n} = c_p (T_1 - T_a) + T_a (s_a - s_1). \quad (19)$$

В координатах Ts (рис. 1) удельная работоспособность потока газа будет эквивалентна площади $11-1-2-a-10-11$, так как $c_p (T_1 - T_a) =$ пл. $11-1-2-12-11$ и $T_a (s_a - s_1) =$ пл. $6-2-a-4-6 =$ пл. $12-2-a-10-12$, как у криволинейных параллелограммов с одинаковыми основаниями и высотами. Формулу (18) можно записать в таком виде:

$$l_{p, n} = T_a (s_a - s_1) + (u_1 - u_a) - p_a (v_a - v_1) + v_1 (p_1 - p_a), \quad (20)$$

но

$$T_a (s_a - s_1) + (u_1 - u_a) - p_a (v_a - v_1) = l_p,$$

т. е. удельной работоспособности газа, а выражение $v_1 (p_1 - p_a)$ — равно работе перемещения удельного объема из среды с давлением p_1 в среду с давлением p_a . Тогда

$$l_{p, n} = l_p + v_1 (p_1 - p_a), \quad (21)$$

т. е. удельная работоспособность потока газа равна сумме удельной работоспособности газа (пл. $3-1-2-a-3$, рис. 1) и удельной работы перемещения потока газа (пл. $11-1-3-10-11$).

Резюмируя все сказанное, можно заключить, что величина удельной работоспособности потока газа в координатах Ts эквивалентна площади, заключенной между изобарой начального состояния газа в потоке, адиабатой, проведенной через точку начального состояния газа, изотермой, проведенной из точки равновесного с окружающей средой состояния газа, изобарой, соответствующей давлению окружающей среды, и осью энтропии.

Величина удельной работоспособности потока газа может быть рассчитана по формуле (19), однако, используя (11), можно получить более удобное для расчетов выражение

$$l_{p, n} = c_p (T_1 - T_a) + c_p T_a \ln \left[\frac{T_a}{T_1} \left(\frac{p_1}{p_a} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]. \quad (22)$$

§ 4. Использование понятия о работоспособности газа для анализа экономичности отдельных узлов пневматических установок

Для примера использования понятий работоспособности газа и потока газа при анализе работы отдельных узлов пневматических установок рассмотрим экономичность работы пневматической сети, в оценке к. п. д. которой до сих пор вообще нет определенного мнения.

Не рассматривая причин и способов расчета потерь энергии при транспортировании сжатого воздуха по трубопроводу, поставим такую задачу: в начальное сечение трубопровода подается сжатый воздух в количестве M_n кг/мин с параметрами p_n и T_n . В результате охлаждения воздуха

в трубопроводе и потерь на аэродинамические сопротивления параметры его в конечном сечении стали соответственно p_k и T_k . Кроме того, в результате утечек к потребителям было доставлено меньшее, чем в начальном сечении, количество воздуха M_k .

Необходимо определить к. п. д. пневматической сети. К. п. д. пневматической сети будет равен отношению работоспособности потока воздуха в конечном сечении трубопровода $L_{p. п. к}$ к работоспособности потока воздуха в начальном сечении $L_{p. п. н}$

$$\eta_{тр} = \frac{L_{p. п. к}}{L_{p. п. н}} = \frac{M_k}{M_n} \cdot \frac{l'_{p. п. к}}{l'_{p. п. н}} \quad (23)$$

Обозначим

$\eta_y = \frac{M_k}{M_n}$ — коэффициент утечек, учитывающий потери энергии потока вследствие утечек сжатого воздуха в сети;

$$\eta_{p. п} = \frac{l'_{p. п. к}}{l'_{p. п. н}} = \frac{T_k - T_a + T_a \ln \left[\frac{T_a \left(\frac{p_k}{p_a} \right)^{\frac{k-1}{k}}}{T_n - T_a + T_a \ln \left[\frac{T_a \left(\frac{p_n}{p_a} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \right]}{T_n - T_a + T_a \ln \left[\frac{T_a \left(\frac{p_n}{p_a} \right)^{\frac{k-1}{k}}}{T_n - T_a + T_a \ln \left[\frac{T_a \left(\frac{p_n}{p_a} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \right]} \quad \text{— коэффициент потери удель-$$

ной работоспособности потока вследствие охлаждения и дросселирования воздуха в потоке.

Тогда

$$\eta_{тр} = \eta_y \cdot \eta_{p. п} \quad (24)$$

Способ изображения удельной работоспособности в координатах Ts позволяет дифференцировать потерю удельной работоспособности на потерю вследствие дросселирования и потерю вследствие охлаждения воздуха в потоке (рис. 2).

Для простоты рассуждений представим себе, что воздух в сети сначала охлаждается до конечной температуры, но без потерь на трение (линия 1—12), а затем происходит дросселирование воздуха в результате трения (линия 12—2). Потеря удельной работоспособности в результате охлаждения воздуха

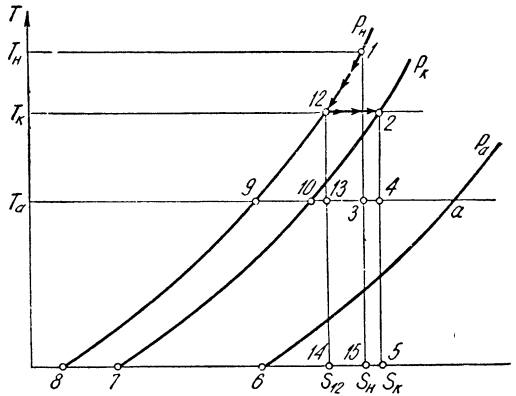


Рис. 2.

в результате охлаждения воздуха

$$\Delta l_1 = l_{p. п. н} - l'_{p. п}, \quad (25)$$

$l_{p. п. н} = c_p (T_n - T_a) + T_a (s_a - s_n)$ — удельная работоспособность потока в начале трубопровода;

$l'_{p. п} = c_p (T_k - T_a) + T_a (s_a - s_{12})$ — удельная работоспособность потока воздуха после охлаждения его.

Тогда

$$\Delta l_1 = c_p (T_n - T_k) - T_a (s_n - s_{12}), \quad (26)$$

$c_p (T_n - T_k)$ — тепло, отводимое от единицы массы воздуха при охлаждении, соответствующее пл. 14—12—1—15—14;

$T_a (s_n - s_{12})$ — пл. 14—13—3—15—14.

Таким образом, потеря удельной работоспособности потока воздуха вследствие охлаждения в координатах Ts эквивалентна пл. 13—12—1—3—12.

При дросселировании воздуха происходит повышение энтропии его, и, следовательно, снижение удельной работоспособности потока, потери которой могут быть определены по формуле

$$\Delta l_2 = l'_{р. п. н} - l_{р. п. к}, \quad (27)$$

где

$l_{р. п. к} = c_p (T_{к} - T_a) + T_a (s_a - s_k)$ — удельная работоспособность потока в конце трубопровода.

Тогда

$$\Delta l_2 = T_a (s_k - s_{12}). \quad (28)$$

Эта величина в координатах Ts соответствует пл. 14—13—4—5—14 = пл. 8—9—10—7—8.

Удельная работоспособность потока воздуха в конечном сечении

$$l_{р. п. к} = l_{р. п. н} - \Delta l_1 - \Delta l_2 = c_p (T_k - T_a) + T_a (s_a - s_k). \quad (29)$$

Как видно из рис. 2,

$l_{р. п. к} = \text{пл. } 8-1-3-a-6-8 - \text{пл. } 13-12-1-3-13 - \text{пл. } 8-9-10-7-8 = \text{пл. } 7-2-4-a-6-7.$

Так как пл. 13—9—12—13 равна пл. 10—2—4—10.

Этот же результат может быть получен из анализа формулы (29), выражающей зависимость удельной работоспособности потока в конечном сечении от параметров воздуха.

Использование понятий о работоспособности газа и работоспособности потока газа дает возможность установить к. п. д. любого элемента пневматической установки и в координатах Ts показать величину потерь удельной работоспособности.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. К. Ш е р с т ю к. Компрессоры. Госэнергоиздат, 1959.
2. В. В. С у ш к о в. Техническая термодинамика. Госэнергоиздат, 1960.

К РАСЧЕТУ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ПРЯМЫХ РЕБРАХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В. А. Махин, Н. П. Белик, Д. А. Косарев

Днепропетровский государственный университет

Широкое внедрение в современную технику процессов, сопровождающихся выделением большого количества тепла, требует тщательного изучения методов его отвода. Задача правильного конструирования ребер теплообменных аппаратов состоит в том, чтобы получить при данном расходе охлаждающего агента максимальный отвод тепла при минимальном весе и габарите самого аппарата, а также достаточную прочность и простоту изготовления.

В настоящей статье рассматривается уточненный расчет теплопередачи через прямые ребра треугольного и трапециевидного сечения и решается задача о наиболее выгоднейшем профиле ребра.

Указанные теоретические исследования проводились Е. Шмидтом [3], а затем в работах [1, 3] и др. При решении указанной задачи авторами (при составлении исходного уравнения) допущена неточность: теплоотдача с ребра отнесена не к действительной площади омываемой поверхности, а к ее проекции на вертикальную плоскость, т. е. полагая $ds = dx$ (см. рис. 1). Однако следует отметить, что в работе [2] эта неточность в исходных уравнениях учтена, но сами уравнения остались прежними.

Для некоторых ребер переменной толщины, у которых площадь поверхности ребра значительно отличается от ее проекции на вертикальную плоскость ($ds \neq dx$), такая неточность приводит к значительным погрешностям при расчете теплообмена через ребристые поверхности.

При стационарном режиме изменение количества тепла, проходящего через сечения x и $x + dx$, определяется теплопередачей с боковой поверхности рассматриваемого элемента (см. рис. 1), поэтому

$$d\left(\lambda F \frac{dt}{dx}\right) = \alpha \Pi ds (t - t_0), \quad (1)$$

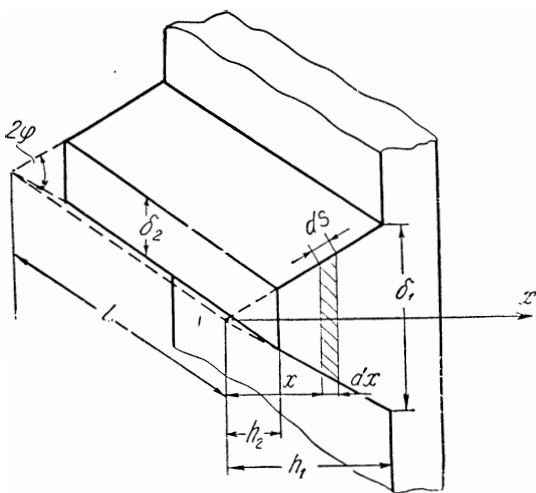


Рис. 1.

где t — температура в произвольном сечении ребра;

t_0 — температура окружающей среды;

F — площадь поперечного сечения ребра;

Π — охлаждаемый периметр ребра;

α — коэффициент теплоотдачи от ребра к окружающей среде;

λ — коэффициент теплопроводности материала ребра;

ds — дифференциал криволинейной координаты, направленной по поверхности ребра вдоль оси x .

Имея в виду, что $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$, а $f(x) = x \operatorname{tg} \varphi$, и произведя дифференцирование (1), получим для трапециевидного ребра

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} - \frac{1}{z} \theta = 0, \quad (2)$$

где

$$z = \frac{\alpha}{\lambda \sin \varphi} x;$$

$$\theta = t - t_0.$$

Уравнение (2) по виду не отличается от уравнений, приведенных в [3, 5] но в выражении для z_1 входит не $\operatorname{tg} \varphi$, а $\sin \varphi$.

Окончательные интересующие нас расчетные формулы для θ и Q очень сложны. Но если теплоотдачей с торца трапециевидного ребра пренебречь, они несколько упрощаются и имеют вид

$$\theta = \theta_1 \frac{I_0(2\sqrt{z}) K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}) K_0(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_1}) K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}) K_0(2\sqrt{z_1})}, \quad (3)$$

$$Q = \frac{\alpha \cdot \delta_1 \cdot L \theta_1}{\sqrt{z_1} \cdot \sin \varphi} \cdot \psi,$$

где

$$\psi = \frac{I_1(2\sqrt{z_1}) K_1(2\sqrt{z_2}) - I_1(2\sqrt{z_2}) \cdot K_1(2\sqrt{z_1})}{I_0(2\sqrt{z_1}) K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}) \cdot K_0(2\sqrt{z_1})}. \quad (4)$$

В формуле (3) теплообмен с торца ребра не учитывается, так как согласно [1] теплоотдача с торца довольно точно учитывается путем условного увеличения высоты ребра на половину толщины его торца.

Если ребро имеет треугольное сечение, то расчетные формулы принимают вид

$$\theta = \theta_1 \cdot \frac{I_0(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_1})}; \quad (5)$$

$$Q = \lambda F_1 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{|x=h_1} = \frac{\alpha \cdot \delta_1 \cdot l \cdot \theta_1 \cdot I_1(2\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1} \cdot \sin \varphi \cdot I_0(2\sqrt{z_1})}. \quad (6)$$

В формулах (4) и (6):

I_0, I_1, K_0, K_1 — Бесселевы функции первого и второго порядка мнимого аргумента;

L — длина ребра;

F — площадь основания ребра;

δ_1 — толщина ребра.

Полученные формулы (4) и (6) отличаются от формул в [1, 3, 5] не только выражением для z_1 , но и общим видом, т. е. вместо $\operatorname{tg} \varphi$ имеем $\sin \varphi$.

При малых значениях угла φ ($\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$) результаты расчета по формулам (4), (6) и применяемым в работе [1, 3, 5] практически не отличаются, однако с увеличением угла φ расчет по [1, 3, 5] дает ощутимую погрешность.

Формулы (4), (6) довольно сложны для практических расчетов. В [1] расход тепла через ребро треугольного и трапециевидного профиля определялся по формуле для ребра прямоугольного сечения с введением поправочного коэффициента на суженность ребра.

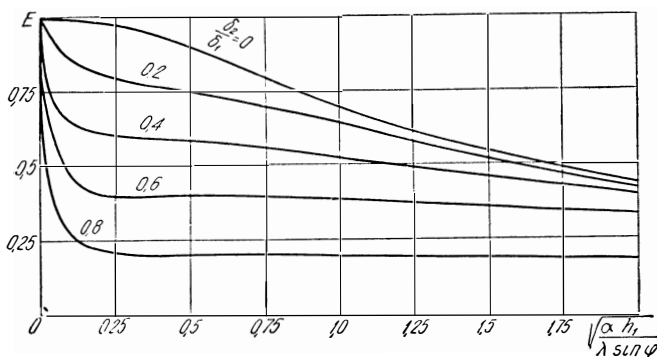


Рис. 2.

Однако такой метод расчета достаточно сложный, поэтому целесообразно расход тепла через ребро определять по упрощенной общепризнанной формуле:

$$Q_p = \alpha F_p (t_1 - t_0) E, \quad (7)$$

где

F_p — теплообменная поверхность ребра;

t_1 — температура основания ребра;

t_0 — температура охлаждающего агента;

E — коэффициент эффективности ребра.

Используя формулы (4) и (6), предлагаем график для определения величины E (см. рис. 2).

О невыгоднейшей форме прямого ребра

Прямое ребро с утонением от основания к торцу теплотехнически обосновывается теми соображениями, что по мере удаления ребра к торцу уменьшение расхода тепла при постоянном поперечном сечении ведет к уменьшению температурного градиента.

Поэтому, стремясь получить постоянный температурный градиент по высоте ребра, последнему придают трапециевидное или треугольное сечение.

Решая задачу о невыгоднейшей форме ребра, Е. Шмидт [3] пришел к выводу, что наиболее выгодным является ребро, ограниченное двумя параболой. Такой вывод получен из неверного исходного уравнения, которое имеет такой же вид как и (1) при $ds = dx$. Но в общем случае $ds \neq dx$, поэтому и результат решения поставленной задачи будет отличаться от полученного Шмидтом и в [3].

При $\frac{dt}{dx} = b = \text{const}$, $F = 2Lf(x)$, $\Pi = 2L$, $\lambda = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$ уравнение (2) будет иметь вид:

$$f'(x) \cdot b = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} (bx + A). \quad (8)$$

После несложных преобразований уравнения (8) получим

$$f'(x) = \frac{\frac{\alpha}{\lambda} \left(x + \frac{A}{b}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 \left(x + \frac{A}{b}\right)^2}}, \quad (9)$$

откуда, интегрируя найдем, что

$$f(x) = -\frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 \left(x + \frac{A}{b}\right)^2} + B = y, \quad (10)$$

или иначе

$$(y - B)^2 + \left(x + \frac{A}{b}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2, \quad (11)$$

A, B — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Значит, теплотехнически наивыгоднейшая форма ребра получается ограничением дугами окружности радиуса R , где $R = \frac{\lambda}{\alpha}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Ильин и М. А. Стырикович. Упрощенный расчет теплопередачи в прямых ребрах. «Советское котлотурбостроение», 1939, № 12 и № 2, 1940.
2. С. С. Кутателадзе. Основы теории теплообмена. Машгиз, 1962.
3. П. Шнейдер. Инженерные проблемы теплопроводности. Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Э. Р. Эккерт и Р. М. Дрейк. Теория тепла и массообмена. Госэнергоиздат, 1961.
5. М. А. Михеев. Основы теплопередачи. Госэнергоиздат, 1949.

ПЕРЕХОДНЫЕ РЕЖИМЫ СИСТЕМЫ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС: КОРПУС СУДНА — ВИНТ — ДВИГАТЕЛЬ И РЕГУЛЯТОР СКОРОСТИ СУДНА

А. Ф. Черныш

Днепропетровский университет

Для проектирования и эксплуатации новых судов, для разработки систем автоматического регулирования скорости судна важное значение имеет решение задач о переходных процессах в элементах комплекса: корпус — винт — двигатель, а также в системе гидромеханический комплекс — автоматический регулятор скорости судна. Исследование динамических свойств гидромеханического комплекса: корпус судна — винт — двигатель без учета влияния автоматического регулятора выполнено в работах [1, 2] и др.

В данной статье впервые проведено исследование переходных режимов системы гидромеханический комплекс: корпус судна — винт — двигатель и регулятор скорости судна.

Результаты работы применялись нами вместе с сотрудниками Института гидромеханики АН УССР и Института кибернетики АН УССР при разработке, изготовлении и испытании высокоэффективных систем автоматического регулирования скорости движения речных судов [3, 6].

Исследования проведены применительно к конкретному речному судну.

Пусть динамика системы, структурная схема которой приведена на рис. 1, описывается такими уравнениями:

1. Гидромеханический комплекс ГК. Уравнение комплекса: корпус судна — винт — двигатель после приведения основного возмущения — глубины судового хода ко входу релейного элемента имеет вид

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) \varphi = k_{д.с} (T_e p + 1) \mu'. \quad (1)$$

2. Регулятор скорости (на рис. 1 обведен пунктирной линией). Уравнение центробежного регулятора ЦР

$$(T_3^2 p^2 + T_4 p + 1) \mu' = a \cdot \varphi - b \cdot \mu. \quad (2)$$

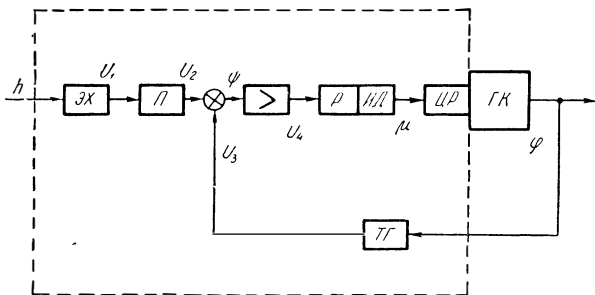


Рис. 1. Структурная схема систем гидромеханический комплекс: корпус судна — винт — двигатель и регулятор скорости судна.

Уравнение тахогенератора ТГ

$$U_3 = k_3 \varphi. \quad (3)$$

Уравнение узла сравнения

$$\psi = U_2 - U_3. \quad (4)$$

Уравнение электронного усилителя

$$U_4 = k_4 \cdot \psi. \quad (5)$$

Уравнение реле и исполнительного двигателя Р и ИД

$$(T_5 \cdot p^2 + p) \mu = F(U_4). \quad (6)$$

Уравнение преобразователя П

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) U_2 = k_2 \cdot U_1. \quad (7)$$

Уравнение датчика глубины судового хода

$$U_1 = k_1 h. \quad (8)$$

Здесь

φ — изменение числа оборотов двигателя судна;

μ — изменение положения рычага управления центробежного регулятора;

$U_1 - U_4$ — изменения напряжений на выходе, соответственно, датчика глубины, преобразователя, тахогенератора и электронного усилителя;

$T_1 - T_5, T_c$ — постоянные времени;

$k_1 - k_4, k_{д.с}, a$ и b — коэффициенты передачи соответствующих элементов системы;

μ' — изменение промежуточной переменной;

h — изменение глубины судового хода;

$F(U_4)$ — нелинейная функция.

Уравнение динамики всей системы получим, решив уравнения (1)–(8) совместно, в таком виде:

$$Q(p) U_4 + R(p) F(U_4) = S(p) h,$$

где

$Q(p), R(p)$ и $S(p)$ — некоторые полиномы от p .

Свободные движения системы будут описываться дифференциальными уравнениями

$$Q(p) U_4 + R(p) F(U_4) = 0 \quad (9)$$

или

$$\Phi(p) U_4 + F(U_4) = 0, \quad (9a)$$

где

$$\Phi(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}.$$

Применяя гармоническую или статическую линеаризацию [4, 5]*, можно нелинейное уравнение (9) заменить некоторыми эквивалентными линейными дифференциальными уравнениями

$$\Phi(p) U_4 + q(A) U_4 = 0 \quad (9б)$$

или

$$\Phi(p) U_4 + q(U_4) U_4 = 0. \quad (9в)$$

* Обобщенное свойство фильтра [4] для данной системы выполняется.

Исследование устойчивости системы

Условие устойчивости системы гидромеханический комплекс — автоматический регулятор скорости речных судов с заданным типом нелинейности (в данном случае зона нечувствительности второго рода) будет иметь вид [5]:

$$\frac{\eta}{s} > \frac{2}{\pi q^*}, \quad (10)$$

где

$$q^* = -\operatorname{Re}\Phi(j\omega_0) = \frac{(\beta - T_1^2)(T_5 - T_c) + a(T_c T_5 + 1)}{k_3 k_4 k_{д.с} b (T_c^2 \omega_0^2 + 1)}, \quad (11)$$

$$a = T_2 + a k_{д.с} T_c; \quad \beta = 1 + a k_{д.с}.$$

Так как обычно T_3 и $T_4 \ll T_1$ и T_2 , то в (10) и дальнейшем постоянными T_3 и T_4 пренебрегаем.

Частота автоколебаний ω_0 находится из условия

$$I_m \Phi(j\omega_0) = 0. \quad (12)$$

В последующих расчетах будут использованы следующие численные значения коэффициентов дифференциальных уравнений, определенные по статическим характеристикам отдельных элементов системы для базового режима $n = 1000$ об/мин*.

$$T_c = 10 \text{ сек.}; \quad T_{д.с} = 1 \text{ сек.}; \quad T_5 = 0,2 \text{ сек.};$$

$$k_{д.с} = 150 \frac{\text{об}}{\text{мин} \cdot \text{мм}}; \quad k_4 = 4,63; \quad k_3 = 0,01 \frac{\text{в} \cdot \text{мин}}{\text{об}};$$

$$b = 0,096 \frac{\text{мм}}{\text{град}}; \quad a = 0,002 \frac{\text{мм} \cdot \text{мин}}{\text{об}}; \quad k_1 = 0,18 \frac{\text{в}}{\text{м}};$$

$$k_2 = 12; \quad s = 1 \frac{\text{об}}{\text{мин}}; \quad \eta = 1 \text{ в}.$$

Подставив значения коэффициентов в (11) и (12), находим

$$\omega_0 = 2,55 \text{ и } q^* = 2,05.$$

Условие устойчивости (10) примет вид

$$\frac{\eta}{s} > \frac{2}{\pi \cdot 2,05} \text{ или } 9,55 > 0,31. \quad (13)$$

Таким образом, система будет устойчивой с большим запасом при данном выборе значений коэффициентов дифференциального уравнения (9в).

Полученное условие устойчивости (10) и (11) позволяет определить влияние отдельных параметров системы на устойчивость. Она ухудшается при уменьшении η (при повышении чувствительности регулятора), увеличении скорости исполнительного двигателя s , увеличении коэффициентов передачи k_3 , k_4 , b и постоянной времени судна T_c .

При нарушении условия (10) в системе возникнут автоколебания с частотой ω_0 и амплитудой A , где

$$A^2 = \frac{M}{2} + \sqrt{\frac{M^2}{4} - M\eta^2} \text{ и } M = \left[\frac{4s}{\lambda q^*} \right]^2.$$

* Коэффициенты уравнения центробежного регулятора двигателя судна заимствованы из работы: В. И. Крутов. Устойчивость работы транспортного дизеля, снабженного всережимным механическим регулятором. Отчет НАМИ, 1948.

Исследование переходных процессов системы

Применяя гармоническую или статическую линеализацию, нелинейное уравнение (9) можно заменить соответствующим линейным уравнением вида (9б) или (9в), часть коэффициентов которого является медленно меняющимися функциями отклонения U_4 или амплитуды гармонических колебаний A .

Практически для построения переходного процесса достаточно задаться тремя—четырьмя начальными отклонениями U_4 (или амплитудами A) и для каждого случая решить дифференциальное уравнение (9б) или (9в). Кривая переходного процесса строится методом сшивания отдельных участков.

По виду кривых переходных процессов, построенных для целого ряда значений коэффициентов уравнения (9б) или (9в), можно оценить качество регулирования и выбрать требуемые значения параметров системы, обеспечивающих нужное качество регулирования.

При исследовании было выполнено решение уравнения (9) с дальнейшим построением переходных процессов для целого ряда возможных значений параметров системы.

Опишем кратко некоторые характерные примеры теоретических расчетов.

1. Аперiodические процессы

Характеристическое уравнение исследуемой системы имеет вид

$$\Phi(p) + q(U_4) = 0. \quad (14)$$

При начальном отклонении $U_{40} = 5\eta$ и численных значениях коэффициентов для режима $n = 1000$ об/мин после приближенного решения уравнения (14) получим такие корни:

$$p_1 = -0,1; \quad p_2 = -0,071; \quad p_3 = -1,208; \quad p_4 = -5,025.$$

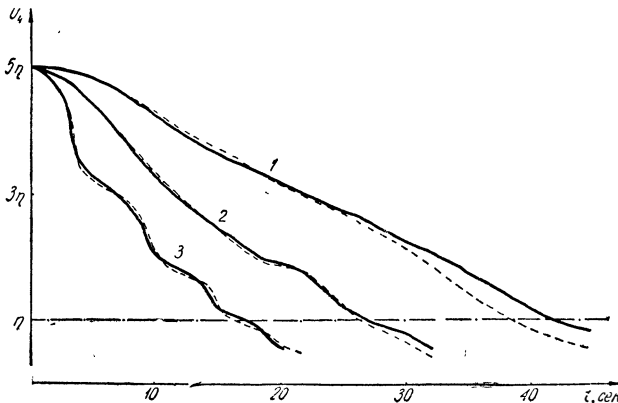


Рис. 2. Кривые переходных процессов системы гидромеханический комплекс — регулятор: ——— расчет; - - - - моделирование.

Решение дифференциального уравнения (9в) будем искать в виде

$$U_4 = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + C_3 e^{p_3 t} + C_4 e^{p_4 t}. \quad (15)$$

Постоянные $C_1 - C_4$ могут быть определены из начальных условий:

$$t = 0; \quad U_{40} = 5\eta; \quad \dot{U}_{40} = \dot{U}_{40} = \ddot{U}_{40} = 0.$$

После вычислений постоянных $C_1 - C_4$ и подстановки их в уравнение (15), получим

$$U_4 = 5\eta (-2,725e^{-0,1t} + 3,718e^{-0,071t} + 0,0075e^{-1,208t} - 0,00009e^{-5,025t}). \quad (15a)$$

Выполнив подобные расчеты для начальных отклонений 4η , 3η и $1,2\eta$, получим необходимые уравнения для построения кривой переходного процесса по участкам. Результаты таких построений показаны на рис. 2, кривая 1.

Проведенные теоретические расчеты показывают, что нельзя получить аperiodические процессы короче 40—42 сек., изменяя параметры системы.

2. Быстрозатухающие колебательные процессы

Для получения быстрозатухающих колебательных процессов полагаем $k_4 = 9,26$, $s = 3$ и $6 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$, остальные параметры определены режимом $n = 1000 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$.

Характеристическое уравнение исследуемой системы (при гармонической линеаризации нелинейности) будет

$$\Phi(p) + q(A) = 0. \quad (16)$$

При начальной амплитуде колебаний $A = 5\eta$ получим следующие корни характеристического уравнения (16):

$$p_1 = -0,1; \quad p_{2,3} = -u \pm j\omega = -0,5 \pm j 0,9635; \quad p_4 = -5,295.$$

Пренебрегая корнем p_4 , решение уравнения (9б) будем искать в виде

$$U_4 = U_{40} \left\{ e^{-ut} \frac{p_1}{\omega} \sqrt{\frac{u^2 + \omega^2}{\omega^2 + (p_1 - u)^2}} \sin \left[\omega t + \arctg \frac{\omega (p_1 - 2u)}{\omega^2 + u (p_1 - u)} \right] + \frac{u^2 + \omega^2}{\omega^2 + (p_1 - u)^2} e^{-p_1 t} \right\}. \quad (17)$$

После соответствующих расчетов для ряда начальных отклонений $U_{41} = 5\eta$; 4η ; 3η ; $1,2\eta$ получим уравнения для построения переходных процессов. Результаты таких построений приведены на рис. 2, кривые 2 и 3.

Анализ результатов теоретических расчетов показывает, что техническим требованиям, предъявляемым к системам: гидромеханический комплекс — корпус судна — винт — двигатель — регулятор, на речном транспорте практически удовлетворяют и быстрозатухающие колебательные — почти аperiodические процессы (см. рис. 2, кривые 2 и 3). Однако преимуществом их является то, что они позволяют сократить длительность переходного процесса до 15—20 секунд.

Таким образом, окончательный выбор рациональных значений параметров исследуемой системы определяется видом кривой переходного процесса. Так, для получения устойчивых аperiodических процессов небольшой длительности желательно выбирать коэффициенты системы такими:

$$s = (0,5 - 1) \frac{\text{об}}{\text{мин}}; \quad k_3 = 0,01 \frac{\text{в} \cdot \text{мин}}{\text{об}}; \quad k_4 = 4,63;$$

$$k_{д.с} = (100 - 200) \frac{\text{об}}{\text{мин} \cdot \text{мм}}; \quad b = (0,04 - 0,1) \frac{\text{мм}}{\text{град}};$$

$$a = (0,002 - 0,003) \frac{\text{мм} \cdot \text{мин}}{\text{об}}.$$

Для получения устойчивых быстрозатухающих процессов коэффициенты системы следует выбирать в таких пределах:

$$s = (1 - 6) \frac{\text{об}}{\text{мин}}; \quad k_3 = (0,01 - 0,015) \frac{\text{в} \cdot \text{мин}}{\text{об}};$$

$$k_4 = 4,63 - 9,26; \quad k_{д.с} = (150 - 300) \frac{\text{об}}{\text{мин} \cdot \text{мм}};$$

$$b = (0,06 - 0,1) \frac{\text{мм}}{\text{град}}; \quad a = (0,003 - 0,004) \frac{\text{мм} \cdot \text{мин}}{\text{об}}.$$

Ход приведенных выше теоретических расчетов корректировался сравнительными исследованиями переходных режимов системы гидромеханический комплекс — регулятор на электронной модели МН-7.

Применение электронной модели в исследованиях позволило резко сократить объем громоздких теоретических расчетов и получить надежные результаты по выбору оптимальных параметров, обеспечивающих требуемое качество устойчивых переходных процессов системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Зуев, В. И. Небеснов, Е. М. Сурков. Переходные режимы системы корпус судна — винты — двигатели, «Изв. АН СССР, ОТН, энергетика и автоматика», 1962, № 3.
2. В. И. Небеснов. Динамика двигателя в системе корпус судна — винты — двигатели, Судпромгиз, 1961.
3. О. Ф. Черныш. Регулятор оптимальной скорости руху річкових суден, «Автоматика», 1962, № 2.
4. Е. П. Попов, И. П. Пальтов. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1960.
5. И. И. Кринецкий. Расчет нелинейных автоматических систем, Гостехиздат УССР, 1963.
6. А. Ф. Черныш. Системы автоматического судовождения на реках. Изд-во АН УССР, 1963.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, РАЗДЕЛЕННЫМИ РАДИАЛЬНЫМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ И ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ

И. А. Луковский

Институт математики АН УССР
(г. Киев)

1. Предварительные замечания и постановка задачи

Под возмущенным движением тела с полостью, частично заполненной жидкостью, будем понимать движение системы координат $Oxyz$, жестко связанной с телом, относительно другой системы координат $O^*x^*y^*z^*$, совершающей заданное движение в потенциальном поле массовых сил. Объем жидкости Q ограничен свободной поверхностью жидкости Σ , двумя радиальными перегородками S_1 и S_2 и поверхностью полости вращения S_0 (см. рисунок). Двугранный угол, образованный плоскостями S_1 и S_2 , обозначим через 2α , а полярный угол η будем отсчитывать от оси Oz в сторону отрицательного направления оси Oy .

Возмущенное движение характеризуется вектором малого смещения \vec{u} и вектором малого поворота $\vec{\omega}$ системы координат $Oxyz$ относительно системы координат $O^*x^*y^*z^*$.

Как известно, потенциал смещений частиц жидкости можно представить в виде

$$X = (\vec{u}, \vec{\Phi}) + (\vec{\omega}, \vec{\Psi}) + \sum_{n=1}^{\infty} (\vec{r}_n, \vec{\varphi}_n), \quad (1.1)$$

где

r_{ni} — обобщенные координаты, характеризующие волновые движения жидкости;

$\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi}$ и $\vec{\varphi}_n$ — гармонические векторные функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \nu} &= \vec{v} \text{ на } \Sigma + S, \\ \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \nu} &= \vec{R} \times \vec{v} \text{ на } S, \end{aligned} \quad (1.2)$$

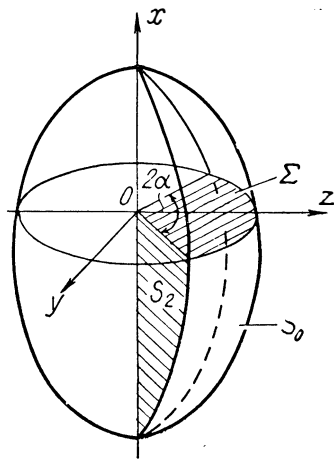


Рис. 1.

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \vec{\varphi}_n}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \vec{\varphi}_n}{\partial \nu} = \lambda_n \vec{\varphi}_n \text{ на } \Sigma,$$

где

$\vec{\nu}$ — орт внешней нормали к поверхности, ограничивающей объем жидкости Q ;

$$S = S_1 + S_2 + S_0.$$

В дальнейшем мы займемся решением краевых задач (1.2), (1.3), (1.4) и определением гидродинамических коэффициентов уравнений возмущенного движения тела с жидкостью при движении в плоскостях Oxy и Oxz , а также при движении относительно оси симметрии полости. Заметим, что решение краевой задачи для $\vec{\Phi}$ в силу (1.2) имеет вид $\vec{\Phi} \equiv \vec{R}$, т. е.

$$\Phi_1 = x, \quad \Phi_2 = y, \quad \Phi_3 = z. \quad (1.5)$$

§ 2. Определение гидродинамических коэффициентов при движении тела с жидкостью в плоскостях Oxy и Oxz

Пусть вектор \vec{u} составляет с направлением оси Oz угол β . Тогда имеют место соотношения

$$\vec{u} = u (\vec{k}_2 \sin \beta + \vec{k}_3 \cos \beta), \quad \vec{\omega} = \omega (\vec{k}_2 \cos \beta - \vec{k}_3 \sin \beta).$$

Уравнения возмущенного движения тела с полостью, разделенной на l геометрически подобных секторов, в направлении вектора \vec{u} имеют вид

$$\begin{aligned} (m^0 + l m^{(l)}) \ddot{u} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{2} (m_{n2\nu} \ddot{p}_{n\nu} + m_{n3\nu} \ddot{q}_{n\nu}) &= P^0, \\ \left(I^0 + \frac{l}{2} I^{(l)} \right) \ddot{\omega} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{2} (M_{n3\nu} \ddot{q}_{n\nu} - M_{n2\nu} \ddot{p}_{n\nu}) &= M_G^0, \\ \mu_{n2\nu} (\ddot{p}_{n\nu} + \sigma_{n2\nu}^2 p_{n\nu}) + m_{n2\nu} \ddot{u} - M_{n2\nu} \ddot{\omega} &= 0, \\ \mu_{n3\nu} (\ddot{q}_{n\nu} + \sigma_{n3\nu}^2 q_{n\nu}) + m_{n3\nu} \ddot{u} + M_{n3\nu} \ddot{\omega} &= 0, \\ (\nu = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

m^0 — масса твердого тела;

$m^{(l)}$ — масса жидкости в секторе;

I^0 — момент инерции твердого тела относительно метацентра системы тело — жидкость G ;

$\sigma_{n2\nu}$ и $\sigma_{n3\nu}$ — частоты колебаний жидкости в плоскости Oxy и Oxz соответственно;

$l = \frac{\pi}{\alpha}$ — число радиальных перегородок в полости;

$p_{n\nu}$ и $q_{n\nu}$ — обобщенные координаты волновых движений жидкости, связанные с $r_{n2\nu}$ и $r_{n3\nu}$ соотношениями $r_{n2\nu} = p_{n\nu} \sin \beta$, $r_{n3\nu} = q_{n\nu} \cos \beta$;

P^0 и M_G^0 — проекции главного вектора и главного момента внешних сил.

Гидродинамические коэффициенты уравнений возмущенного движения определяются следующим образом:

$$m_{n\nu} = \rho_0 \iint_{\Sigma} \Phi_i \frac{\partial \varphi_{n\nu}}{\partial x} dS, \quad M_{n(5-i)\nu} = \rho_0 \iint_{\Sigma} \Psi_i \frac{\partial \varphi_{n(5-i)\nu}}{\partial x} dS,$$

$$\mu_{n\nu} = \rho_0 \lambda_{n\nu} \iint_{\Sigma} \varphi_{n\nu}^2 dS, \quad I_i = \rho_0 \iint_S \Psi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \nu} dS, \quad (2.2)$$

$$I^{(l)} = I_3^{(l)} \cos^2 \beta + I_2^{(l)} \sin^2 \beta, \quad \sigma_{n\nu}^2 = \lambda_{n\nu} j,$$

где

j — ускорение массовых сил;

$\lambda_{n\nu}$ — частотный параметр.

Уравнения (2.1) были получены Л. В. Докучаевым путем естественного обобщения уравнений работы [1]. Явные выражения коэффициентов уравнений возмущенного движения для кругового цилиндра со сплошными радиальными перегородками были получены методом, изложенным в работе Г. С. Нариманова [2]. Решения краевых задач для других форм полостей сопряжены со значительными математическими трудностями.

Рассмотрим решение краевой задачи (1.4). Гармоническую векторную функцию $\vec{\varphi}_n$ представим в виде

$$\vec{\varphi}_n = \sum_{k=2}^3 \vec{k}_i \varphi_{ni}(x, y, z), \quad (2.3)$$

где

φ_{n2} и φ_{n3} — функции, характеризующие волновые движения жидкости в плоскости Oxy и Oxz соответственно.

Функции φ_{ni} будем искать в виде

$$\varphi_{ni} = f_i(\eta) \psi_{ni}(x, \xi). \quad (2.3)$$

Для ψ_{ni} и $f_i(\eta)$ получим краевые задачи

$$\xi^2 \frac{\partial^2 \psi_{ni}}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial \psi_{ni}}{\partial \xi} + \xi^2 \frac{\partial^2 \psi_{ni}}{\partial \xi^2} - s_i^2 \psi_{ni} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \psi_{ni}}{\partial x} = \lambda_{ni} \psi_{ni} \text{ на } L_1,$$

$$\frac{\partial \psi_{ni}}{\partial x} = 0 \text{ на } L, \quad \psi_{ni} = 0 \text{ при } \xi = 0. \quad (2.5)$$

$$f_i''(\eta) + s_i^2 f_i(\eta) = 0.$$

$$\frac{df_i}{d\eta} = 0 \text{ при } \eta = \pm \alpha, \quad (2.6)$$

где

L_1 и L — линии пересечения меридионального сечения полости с поверхностями Σ и S_0 .

Очевидно, что решениями краевой задачи (2.6) являются функции

$$f_i = \cos \left[\frac{\pi}{2\alpha} m (\eta + \alpha) \right], \quad (2.7)$$

где

m — целое натуральное число.

Четные m соответствуют индексу $i = 3$, нечетные $i = 2$.

Решая краевую задачу (2.4), (2.5), получим для каждого s набор собственных функций ψ_{ni} и собственных значений λ_{ni} . Таким образом, имеем

$$\varphi_{niv} = \psi_{niv} \cos [s_{iv} (\eta + \alpha)], \quad (2.8)$$

где

$$s_{2v} = \frac{\pi(2v+1)}{2\alpha}, \quad s_{3v} = \frac{\pi v}{\alpha} \quad (v = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.9)$$

Краевая задача (2.4), (2.5) может быть решена вариационным методом. При этом функционал, который необходимо исследовать на экстремум, имеет вид

$$I(\psi_{iv}) = \iint_G \left[\xi (\psi_{ivx}^2 + \psi_{iv\xi}^2) + \frac{s_{iv}^2}{\xi} \psi_{iv}^2 \right] dx d\xi - \lambda_{iv} \int_{L_1} \xi \psi_{iv}^2 d\xi. \quad (2.10)$$

Решение представим в виде

$$\psi_{niv} = \sum_{k=1}^m a_k^{(n)} w_k^{(s_{iv})}(x, \xi), \quad (2.11)$$

где

$a_k^{(n)}$ — произвольные постоянные,

$a w_k^{(s_{iv})}$ — линейно независимые решения уравнения (2.4).

Из условия минимума функционала (2.10) получим для определения $a_k^{(n)}$ систему линейных однородных алгебраических уравнений, которая имеет нетривиальное решение при условии

$$D(\lambda_{iv}) = \text{Det} | \alpha_{kj}^{(s_{iv})} - \lambda_{iv} \beta_{kj}^{(s_{iv})} | = 0, \quad (2.12)$$

где

$$\alpha_{kj}^{(s_{iv})} = \int_{\Gamma} \xi \frac{\partial w_k^{(s_{iv})}}{\partial v} w_j^{(s_{iv})} ds,$$

$$\beta_{kj}^{(s_{iv})} = \int_{L_1} \xi w_k^{(s_{iv})} w_j^{(s_{iv})} d\xi.$$

Система координатных функций $w_k^{(s)}$ определяется следующим образом:

$$w_k^{(s)}(x, \xi) = \frac{2^s s! (k-s)!}{(k+s)!} r^k P_k^{(s)}(\mu), \quad (2.13)$$

где

$P_k^{(s)}$ — присоединенные полиномы Лежандра первого рода,

$$r = \sqrt{x^2 + \xi^2}, \quad \mu = \cos \theta.$$

Например, для $s = 0$ и $s = 1$ система функций $\omega_k^{(s)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_0^{(0)} = 1, \quad \omega_1^{(0)} = x, \quad \omega_2^{(0)} = x^2 - \frac{1}{2} \xi^2, \quad \dots, \quad (s = 0), \\ \omega_1^{(1)} = \xi, \quad \omega_2^{(1)} = x\xi, \quad \omega_3^{(1)} = x^2\xi - \frac{1}{4} \xi^3, \quad \dots, \quad (s = 1). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Между функциями $\omega_k^{(s)}$ легко установить следующие рекуррентные соотношения:

$$\frac{\partial \omega_k^{(s)}}{\partial x} = (k - s) \omega_{k-1}^{(s)}, \quad (2.15)$$

$$(k + s + 1) \omega_{k+1}^{(s)} = (2k + 1) x \omega_k^{(s)} - (k - s) (x^2 + \xi^2) \omega_{k-1}^{(s)}, \quad (2.16)$$

$$(k + s + 1) \xi \omega_k^{(s+1)} = 2(s + 1) [(x^2 + \xi^2) \omega_{k-1}^{(s)} - x \omega_k^{(s)}]. \quad (2.17)$$

Рекуррентное соотношение (2.15) позволяет построить удобное для практических приложений решение краевой задачи (2.4), (2.5), основанное на предположении, что спектр частот колебаний жидкости задан [5]. Используя первое граничное условие (2.5) и представление функции ψ_{niv} (2.11), получим следующую зависимость между постоянными $a_k^{(n)}$ и параметрами λ_{niv} :

$$a_k^{(n)} = \frac{\lambda_{niv}^{k-s_{iv}}}{(k - s_{iv})!} a_{s_{iv}}^{(n)}. \quad (2.18)$$

Условие нормировки для ψ_{niv}

$$\left. \frac{\partial \psi_{niv}(x, R_0)}{\partial x} \right|_{x=0} = 1 \quad (2.19)$$

и соотношение (2.18) позволяют получить приближенное выражение для функции φ_{niv} в виде

$$\varphi_{niv} = \frac{e^{\lambda_{niv} x} J_{s_{iv}}(\lambda_{niv} \xi)}{\lambda_{niv} J_{s_{iv}}(\zeta_{niv})} \cos[s_{iv}(\eta + \alpha)], \quad (2.20)$$

где

$J_{s_{iv}}$ — функция Бесселя первого рода;

$\zeta_{niv} = \lambda_{niv} R_0$.

Решение для функции φ_{niv} является близким к точному вблизи свободной поверхности жидкости, что приводит к хорошим числовым результатам при определении коэффициентов уравнений возмущенного движения по формулам (2.2).

Перейдем к решению краевых задач для функций Ψ_2 и Ψ_3 . Следуя Н. Е. Жуковскому, введем в рассмотрение функции

$$F_2 = \Psi_2 + xz, \quad F_3 = \Psi_3 - xy. \quad (2.21)$$

Тогда для F_2 и F_3 получим краевые задачи

$$\begin{aligned} \Delta F_2 &= 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= z \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \nu} = 2z \cos(\nu, x) \text{ на } S_0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial \nu} &= 0 \text{ на } S_1 + S_2, \\ \Delta F_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3}{\partial x} = -y \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial F_3}{\partial \nu} = -2y \cos(\nu, x) \text{ на } S_0, \\ \frac{\partial F_3}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Сформулируем, далее, вспомогательную краевую задачу с параметром в граничных условиях

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{ni}^* = 0, \\ \frac{\partial \varphi_{ni}^*}{\partial x} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \varphi_{ni}^*}{\partial \nu} = \lambda_{ni}^* \varphi_{ni}^* \text{ на } S_0, \\ \frac{\partial \varphi_{ni}^*}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Краевая задача (2.24) легко решается изложенным вариационным методом. Мы получим систему собственных функций вида

$$\varphi_{niv}^* = \psi_{niv}^* \cos[s_{iv}(\eta + \alpha)]. \quad (2.25)$$

Решения для функций Ψ_2 и Ψ_3 представим теперь в виде разложений по собственным функциям краевых задач (1.4) и (2.24). Имеем

$$\Psi_2 = -xz + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{n3\nu} \varphi_{n3\nu}(x, y, z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{n3\nu}^* \varphi_{n3\nu}^*(x, y, z), \quad (2.26)$$

$$\Psi_3 = xy + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{n2\nu} \varphi_{n2\nu}(x, y, z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{n2\nu}^* \varphi_{n2\nu}^*(x, y, z). \quad (2.27)$$

Используя граничные условия для F_2 и F_3 и граничные условия для φ_{ni} и φ_{ni}^* , получим для коэффициентов разложений (2.26) и (2.27) выражения вида:

$$C_{n3\nu} = \frac{m_{n3\nu}}{\lambda_{n3\nu} \mu_{n3\nu}}, \quad C_{n3\nu}^* = \frac{2 \iint_{S_0} z \cos(\nu, x) \varphi_{n3\nu}^* dS}{\lambda_{n3\nu}^* \iint_{S_0} \varphi_{n3\nu}^{*2} dS}, \quad (2.29)$$

$$D_{n2\nu} = -\frac{m_{n2\nu}}{\lambda_{n2\nu} \mu_{n2\nu}}, \quad D_{n2\nu}^* = \frac{-2 \iint_{S_0} y \cos(\nu, x) \varphi_{n2\nu}^* dS}{\lambda_{n2\nu}^* \iint_{S_0} \varphi_{n2\nu}^{*2} dS}. \quad (2.30)$$

При использовании функций Ψ_2 и Ψ_3 в практических расчетах приходится пользоваться их конечными суммами, причем число членов разложений выбирается в соответствии с условиями каждой конкретной задачи.

Выпишем в заключение выражения для коэффициентов уравнений возмущенного движения, которое определяется через функции φ_{niv} (2.20):

$$\begin{aligned} m_{n3\nu} = \frac{2\rho_0 \sin \alpha}{(1 - s_{3\nu}^2) \lambda_{n3\nu}^3 J_{s_{3\nu}}(\zeta_{n3\nu})} [\zeta_{n3\nu}^2 J_{s_{3\nu}+1}(\zeta_{n3\nu}) + (1 - s_{3\nu}) \zeta_{n3\nu} J_{s_{3\nu}}(\zeta_{n3\nu}) - \\ - 2(1 - s_{3\nu}^2) \sum_{k=0}^{\infty} J_{s_{3\nu}+2k+1}(\zeta_{n3\nu})], \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$m_{n2\nu} = \frac{-2\rho_0 \cos \alpha}{(1 - s_{2\nu}^2) \lambda_{n2\nu}^3 J_{s_{2\nu}}(\zeta_{n2\nu})} [\zeta_{n2\nu}^2 J_{s_{2\nu}+1}(\zeta_{n2\nu}) + (1 - s_{2\nu}) \zeta_{n2\nu} J_{s_{2\nu}}(\zeta_{n2\nu}) - 2(1 - s_{2\nu}^2) \sum_{k=0}^{\infty} J_{s_{2\nu}+2k+1}(\zeta_{n2\nu})], \quad (2.32)$$

$$\mu_{niv} = \frac{\rho_0 R_0^2 \delta}{2\lambda_{niv}} \left[1 - \frac{J_{s_{iv}-1}(\zeta_{niv}) J_{s_{iv}+1}(\zeta_{niv})}{J_{s_{iv}}^2(\zeta_{niv})} \right], \quad (2.33)$$

$$M_{n2\nu} = \rho_0 \lambda_{n3\nu} \iint_{\Sigma} \Psi_2 \varphi_{n3\nu} dS, \quad M_{n3\nu} = \rho_0 \lambda_{n2\nu} \iint_{\Sigma} \Psi_3 \varphi_{n2\nu} dS, \quad (2.34)$$

$$I_i^{(l)} = \rho_0 \iint_{\Sigma} \Psi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \nu} dS, \quad \delta = \begin{cases} 2\alpha & \text{при } s_{iv} = 0, \\ \alpha & \text{при } s_{iv} \neq 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

При определении коэффициентов M_{niv} для функций Ψ_i используются выражения (2.26), (2.27), а для φ_{niv} — выражение (2.20). При определении момента инерции $I_i^{(l)}$ (2.35) в разложениях для Ψ_i следует использовать функции φ_{niv} , найденные вариационным методом, так как выражение (2.20) является близким к точному лишь вблизи свободной поверхности жидкости.

§ 3. Решение краевых задач для полости вращения с перегородками в случае движения тела с жидкостью относительно оси симметрии полости

В случае возмущенного движения тела с жидкостью относительно оси симметрии полости, характеризующегося вектором малого поворота $\vec{\omega} = \omega \vec{k}_1$, потенциал смещений имеет вид

$$X(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \omega(t) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) \varphi_n(x, y, z). \quad (3.1)$$

Уравнения возмущенного движения для этого случая записываются следующим образом:

$$(I^0 + I^{(l)}) \ddot{\omega} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} l M_{xn\nu} \ddot{r}_{n\nu} = M_x^0, \\ \mu_{n\nu} (\ddot{r}_{n\nu} + \sigma_{n\nu}^2 r_{n\nu}) + M_{xn\nu} \ddot{\omega} = 0, \quad (3.2) \\ (\nu = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots),$$

где

$$M_{xn\nu} = \rho_0 \iint_{\Sigma} \Psi \frac{\partial \varphi_{n\nu}}{\partial \nu} dS, \quad \mu_{n\nu} = \rho_0 \lambda_{n\nu} \iint_{\Sigma} \varphi_{n\nu}^2 dS, \\ I^{(l)} = \rho_0 \iint_{\Sigma} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} dS, \quad \sigma_{n\nu}^2 = \lambda_{n\nu} j, \quad (3.3)$$

Методом, изложенным в предыдущем параграфе, для $\varphi_{n\nu}$ получим выражение вида

$$\varphi_{n\nu} = \frac{e^{\lambda_{n\nu} x} J_{s_{\nu}}(\lambda_{n\nu} \xi)}{\lambda_{n\nu} J_{s_{\nu}}(\zeta_{n\nu})} \cos [s_{\nu} (\eta + \alpha)], \quad (3.4)$$

где

$$s_{\nu} = \frac{l(2\nu + 1)}{2}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Краевая задача для Ψ формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} &= y \cos(\nu, z) - z \cos(\nu, y) \text{ на } S. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Представив функцию Ψ в виде

$$\Psi = F - c y z, \quad (3.6)$$

где

$$c = \frac{1}{\cos 2\alpha},$$

получим для F краевую задачу

$$\begin{aligned} \Delta F &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial F}{\partial \nu} = -c \xi \sin 2\eta \cos(\nu, \xi) \text{ на } S_0, \\ \frac{\partial F}{\partial \nu} &= 0 \text{ на } S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решение для F будем искать в виде разложения по собственным функциям краевой задачи (2.24):

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n\nu}^* \varphi_{n\nu}^*(x, y, z). \quad (3.8)$$

Используя второе граничное условие (3.7), получим для $A_{n\nu}^*$ выражение

$$A_{n\nu}^* = -\frac{4}{(s_\nu^2 - 4) \lambda_{n\nu}^* \alpha} \frac{\int_L^{\xi^2} \psi_{n\nu}^* dx}{\int_L^{\xi^2} \psi_{n\nu}^{*2} ds}. \quad (3.9)$$

На основании (3.4) и (3.8) коэффициенты уравнений возмущенного движения (3.3) принимают следующий вид:

$$M_{x n \nu} = \rho_0 \lambda_{n\nu} \iint_S F \varphi_{n\nu} dS - \frac{2\rho_0 \lambda_{n\nu}}{(s_\nu^2 - 4) J_{s\nu}(\zeta_{n\nu 0})} \int_0^{R_0} \xi^3 J_{s\nu}(\lambda_{n\nu} \xi) d\xi, \quad (3.10)$$

$$\mu_{n\nu} = \frac{\pi \rho_0 R_0^2}{2\lambda_{n\nu}} \left[1 - \frac{J_{s\nu-1}(\zeta_{n\nu 0}) J_{s\nu+1}(\zeta_{n\nu 0})}{J_{s\nu}^2(\zeta_{n\nu 0})} \right], \quad (3.11)$$

$$I^{(l)} = -2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n\nu}^* \iint_{S_1} \xi \psi_{n\nu}^* dx d\xi + \operatorname{tg} 2\alpha \iint_{S_1} \xi^3 dx d\xi. \quad (3.12)$$

Для случая кругового цилиндра с перегородками изложенный здесь метод решения краевой задачи (3.5) является точным.

Путем разделения переменных получим решение краевой задачи для функции φ_ν^* в виде

$$\varphi_\nu^* = \xi^{s_\nu} \cos[s_\nu(\eta + \alpha)], \quad \lambda_\nu^* = \frac{s_\nu}{R_0}. \quad (3.13)$$

Для момента инерции жидкости получим выражение

$$I = R_0^4 h \left[\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{4} - \frac{8}{\alpha} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{s_v (s_v - 2) (s_v + 2)^2} \right], \quad (3.14)$$

которое совпадает с соответствующей формулой работы [6].

Рассмотренные здесь методы решения краевых задач могут быть применены к исследованию возмущенного движения тела с полостями различной геометрической формы (сфера, конус, эллипсоид вращения и т. п.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Рабинович. Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью, ПММ, т. XX, вып. 1, 1956.
2. Г. С. Нариманов. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью, ПММ, т. XX, вып. 1, 1956.
3. І. О. Луковський. Малі хвильові рухи однорідної нестисливої рідини в посудинах, які мають форму тіл обертання. «Докл. ДАН УРСР», № 8, 1961.
4. Вариационные методы в задачах о колебаниях жидкости и тела с жидкостью. Вычислительный центр АН СССР, 1962.
5. И. А. Луковский. Об одном приближенном методе определения гидродинамических коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью, Ж. «Аэрогидромеханика», Изд-во ДГУ (печатается).
6. Н. Е. Жуковский. О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной капельной жидкостью, Избр. соч., т. 2, Гостехиздат, М.—Л., 1943.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ

И. А. Луковский

Институт математики АН УССР
(г. Киев)

§ 1. Предварительные замечания и постановка задачи

Возмущенное движение тела с жидкостью будем характеризовать движением системы координат $Oxyz$, жестко связанной с телом, относительно системы координат $O^*x^*y^*z^*$, совершающей заданное движение в поле массовых сил (рис. 1).

Как известно [1], уравнения возмущенного движения системы тело — жидкость в главной плоскости симметрии Gxz имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (m^0 + m)\ddot{u} + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ddot{r}_n &= P_G^0, \\ (I^0 + I)\ddot{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{on} \ddot{r}_n &= M_G^0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\mu_n (\ddot{r}_n + \sigma_n^2 r_n) + m_n \ddot{u} + M_{on} \ddot{\omega} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Здесь

m_0 и m — масса твердого тела и масса жидкости соответственно;

I^0 — момент инерции твердого тела относительно оси Gy ;

P_G^0 и M_G^0 — проекции главного вектора и главного момента внешних сил;

u и ω — линейное и угловое смещение тела в рассматриваемой плоскости;

r_n — обобщенные координаты волновых движений жидкости;

σ_n — частота свободных колебаний жидкости.

Точка G называется метацентром системы тело — жидкость. Она обладает тем свойством, что система уравнений возмущенного движения, записанная в системе координат с началом в точке G , принимает канони-

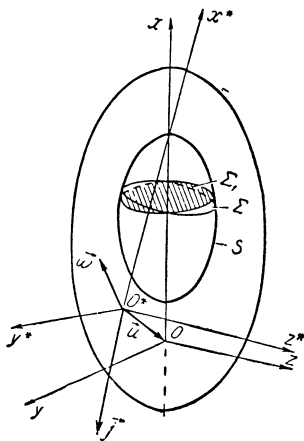


Рис. 1.

ческий вид. Координата точки G связана с координатой центра масс системы G_0 соотношением вида

$$x_G - x_{G_0} = \frac{\pi \rho_0 R_0^4}{4(m + m_0)}, \quad (1.2)$$

где R_0 — радиус свободной поверхности жидкости.

Гидродинамические коэффициенты уравнений возмущенного движения (1) представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} m_n &= \rho_0 \iint_{\Sigma} z \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} dS, \quad M_{on} = \rho_0 \iint_{\Sigma} \Psi \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} dS, \\ \mu_n &= \rho_0 \lambda_n \iint_{\Sigma} \varphi_n^2 dS, \quad I = \rho_0 \iint_{\Sigma} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial v} dS, \quad \sigma_n^2 = \lambda_n j, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

Σ и S — свободная поверхность жидкости и смачиваемая поверхность полости соответственно;

j — ускорение поля массовых сил;

λ_n — частотный параметр.

Система гармонических функций φ_n , определяющих волновые движения жидкости, является полной в области Q , ортогональной на свободной поверхности жидкости Σ , и удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} &= \lambda_n \varphi_n \text{ на } \Sigma, \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} &= 0 \text{ на } S, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где \vec{v} — орт внешней нормали к поверхности области Q .

Гармоническая функция Ψ , характеризующая вращательное движение жидкости, определяется следующей краевой задачей:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v} &= z \cos(v, x) - x \cos(v, z) \text{ на } S. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В определении коэффициентов m_n , M_{on} и μ_n , которые выражаются через интегралы по поверхности Σ , участвуют функции φ_n и Ψ , а в определении момента инерции I участвует только функция Ψ . Поэтому, если мы найдем решение краевой задачи для функции φ_n , близкое к точному вблизи свободной поверхности жидкости, а для функции Ψ — близкое к точному во всей области Q , то есть основание считать, что применение соотношений (1.3) приведет к хорошим результатам.

В дальнейшем мы займемся построением этих функций и анализом полученных с их помощью выражений для коэффициентов уравнений возмущенного движения.

§ 2. Построение приближенного решения задачи о волновых движениях жидкости в сосуде, имеющем форму тела вращения

Введем в рассмотрение систему координат $O'x'y'z'$ с началом, лежащим на невозмущенной свободной поверхности Σ . Ось $O'x'$ совпадает с осью симметрии полости.

Можно показать, что в рассматриваемом нами случае движения системы твердое тело — жидкость в плоскости Gxz функция φ_n имеет вид

$$\varphi_n = \sin \eta \psi_n(x, \xi), \quad (2.1)$$

где функция $\psi_n(x, \xi)$ определяется из следующей краевой задачи:

$$\xi^2 \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi} + \xi^2 \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \xi^2} - \psi_n = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x} = \lambda_n \psi_n \text{ на } L_1,$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} = 0 \text{ на } L, \quad \psi_n = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad (2.3)$$

где

L_1 и L — линии пересечения главного меридионального сечения полости со свободной поверхностью Σ и смачиваемой поверхностью полости S .

Краевую задачу (2.2) и (2.3) можно свести к вариационной, т. е. к исследованию на экстремум функционала вида

$$I(\psi) = \iint_G \left[\xi (\psi_x^2 + \psi_\xi^2) + \frac{1}{\xi} \psi^2 \right] dx d\xi - \lambda \int_{L_1} \xi \psi^2 ds. \quad (2.4)$$

Следуя приближенным методам решения вариационных задач, функцию $\psi_n(x, \xi)$ представим в виде

$$\psi_n(x, \xi) = \sum_{k=1}^m a_k^{(n)} \omega_k(x, \xi), \quad (2.5)$$

где

$a_k^{(n)}$ — произвольные постоянные;

$\omega_k(x, \xi)$ — линейно независимые решения уравнения (2.2).

Координатная система функций может быть построена при помощи сферических функций [2]:

$$\omega_1 = \xi, \quad \omega_2 = x\xi, \quad \omega_3 = x^2\xi - \frac{1}{4}\xi^2, \quad \dots \quad (2.6)$$

Между функциями $\omega_k(x, \xi)$ легко установить рекуррентное соотношение вида

$$(k-1)(x^2 + \xi^2)\omega_{k-1} + (k+2)\omega_{k+1} = (2k+1)x\omega_k, \quad (2.7)$$

которое позволяет легко получать эти функции для сколь угодно больших индексов k .

Наиболее легко вариационным методом определяется частота основного тона колебаний жидкости. Вообще говоря, с физической точки зрения она является легко доступной величиной и легко поддается определению как приближенными теоретическими методами, так и экспериментально [3].

Анализ точных решений для простейших полостей показывает, что волновые движения жидкости носят ярко выраженный поверхностный характер. Амплитуда колебаний частиц жидкости резко затухает с ростом глубины жидкости. Эти факты подтверждены также и экспериментальными исследованиями [5].

Построим приближенное решение краевой задачи для φ_n , основываясь на предположении о том, что спектр частот колебаний жидкости для заданной полости найден каким-нибудь из приближенных методов или экспериментально. Учитывая предыдущие замечания о характере волновых движений жидкости и о частотах свободных колебаний, для этой цели естественно воспользоваться первым из граничных условий (2.3) рассматриваемой краевой задачи. Формы свободных колебаний жидкости, соответствующие заданному спектру частот, будем искать в классе функций (2.5). Заметим, что система координатных функций $w_k(x, \xi)$ удовлетворяет, кроме рекуррентного соотношения (2.7), еще одному рекуррентному соотношению вида

$$\frac{\partial w_k(x, \xi)}{\partial x} = (k - 1) w_{k-1}(x, \xi). \tag{2.8}$$

Подставляя (2.5) в граничное условие на свободной поверхности жидкости с учетом соотношения (2.8), найдем рекуррентное соотношение между постоянными $a_k^{(n)}$, в которое входят известные параметры λ_n

$$a_k^{(n)} = \frac{\lambda_n^{k-1}}{(k-1)!} a_1^{(n)}. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (2.5), получим для соответствующих собственных функций $\psi_n(x, \xi)$ следующее разложение:

$$\begin{aligned} \psi_n(x, \xi) = a_1^{(n)} \left[\xi + \lambda_n x \xi + \frac{\lambda_n^2}{2} \left(x^2 \xi - \frac{1}{4} \xi^3 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_n^3}{6} \left(x^3 \xi - \frac{3}{4} x \xi^3 \right) + \dots \right]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

С помощью непосредственной проверки нетрудно убедиться, что к (2.10) приводит также выражение

$$\psi_n(x, \xi) = \frac{2a_1^{(n)}}{\lambda_n} e^{\lambda_n x} J_1(\lambda_n \xi), \tag{2.11}$$

где

J_1 — функция Бесселя первого рода и первого порядка.

Пользуясь условием нормировки для функций ψ_n вида

$$\frac{\partial \psi_n(x, R_0)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 1, \tag{2.12}$$

найдем для $a_1^{(n)}$ значение

$$a_1^{(n)} = \frac{1}{2J_1(\lambda_n R_0)}. \tag{2.13}$$

Таким образом, искомое приближенное решение краевой задачи (1.4) имеет вид

$$\varphi_n(x, \xi) = \frac{e^{\lambda_n x} J_1(\lambda_n \xi)}{\lambda_n J_1(\zeta_{n0})} \sin \eta, \tag{2.14}$$

где

$$\zeta_{n0} = \lambda_n R_0.$$

Решение (2.14) изменяется в зависимости от геометрии полости в соответствии с изменением частотного параметра λ_n , который определяется этой геометрией.

§ 3. Решение краевой задачи для функции Ψ вариационным методом

Обозначим через Ψ' решение краевой задачи (1.5), найденное в системе координат $O'x'y'z'$. Функция Ψ , определенная в системе координат с произвольным началом на оси симметрии полости, связана с Ψ' соотношением

$$\Psi = \Psi' - lz,$$

где l — координата центра свободной поверхности жидкости.

В силу осевой симметрии полости решение Ψ' представляется в виде

$$\Psi' = \sin \eta F(x', \xi'). \quad (3.1)$$

Для $F(x', \xi')$ получим следующую двумерную краевую задачу (знак $'$ опустим):

$$\xi^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \xi^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - F = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \text{ на } L_1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \xi \cos(v, x) - x \cos(v, \xi) \text{ на } L, \quad F = 0 \text{ при } \xi = 0. \quad (3.3)$$

Она может быть сведена к вариационной [6], т. е. к исследованию на экстремум функционала вида

$$I(F) = \iint_G \left[\xi (F_x^2 + F_\xi^2) + \frac{1}{\xi} F^2 \right] dx d\xi - 2 \int_L \xi [\xi \cos(v, x) - x \cos(v, \xi)] ds, \quad (3.4)$$

где

ds — линейный элемент линии L .

Решение вариационной задачи представляется в виде

$$F(x', \xi') = \sum_{k=1}^n b_k \omega_k(x', \xi'), \quad (3.5)$$

где

b_k — произвольные постоянные;

$\omega_k(x', \xi')$ — введенная ранее система координатных функций. Постоянные b_k будем находить из условия, что функция F должна давать минимум функционалу (3.4).

Для определения постоянных b_k получим систему линейных неоднородных уравнений вида

$$\begin{aligned} \alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \dots + \alpha_{1n}b_n &= \gamma_1, \\ \alpha_{21}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \dots + \alpha_{2n}b_n &= \gamma_2, \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1}b_1 + \alpha_{n2}b_2 + \dots + \alpha_{nn}b_n &= \gamma_n, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \int_{L+L_1} \xi \frac{\partial \omega_i}{\partial v} \omega_j ds, \\ \gamma_i &= \int_L \xi [\xi \cos(v, x) - x \cos(v, \xi)] \omega_i ds. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, окончательное выражение для функции Ψ имеет вид

$$\Psi(x, y, z) = \sin \eta \sum_{k=1}^n b_k \omega_k(x', \xi') - lz. \quad (3.8)$$

§ 4. Определение коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с жидкостью

Подставляя граничное значение функции (2.14) в первое соотношение (1.3), приходим к следующему выражению для коэффициента m_n :

$$m_n = \rho_0 \iint_{\Sigma} z \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS = \rho_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \eta d\eta \int_0^{R_0} \xi^2 \frac{J_1(\lambda_n \xi)}{J_1(\zeta_{n0})} d\xi = \frac{\pi \rho_0 \zeta_{n0}^2}{\lambda_n^3} \frac{J_2(\zeta_{n0})}{J_1(\zeta_{n0})}. \quad (4.1)$$

Подставим функции Ψ (3.8) и φ_n (2.14) во второе уравнение (1.3). Получим

$$\begin{aligned} M_{0n} &= \rho_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \eta d\eta \int_0^{R_0} \left[\sum_{k=1}^m b_k \omega_k(0, \xi) - l\xi \right] \frac{J_1(\lambda_n \xi)}{J_1(\zeta_{n0})} \xi d\xi = \\ &= \frac{\pi \rho_0}{J_1(\zeta_{n0})} \sum_{k=1}^m b_k \int_0^{R_0} \xi \omega_k(0, \xi) J_1(\lambda_n \xi) d\xi - l m_n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Запишем формулу (4.2) для $m = 5$, которая во многих случаях является достаточной для использования в конкретных расчетах:

$$\begin{aligned} M_{0n} &= (b_1 - l) m_n - \frac{\pi \rho_0}{\lambda_n^5} \left\{ b_3 \left[\frac{1}{2} \zeta_{n0}^3 + \left(\frac{1}{4} \zeta_{n0}^4 - 2\zeta_{n0}^2 \right) \frac{J_2(\zeta_{n0})}{J_1(\zeta_{n0})} \right] - \right. \\ &\left. - \frac{b_5}{\lambda_n^2} \left[\left(\frac{1}{2} \zeta_{n0}^5 - 6\zeta_{n0}^3 \right) + \left(\frac{1}{8} \zeta_{n0}^6 - 3\zeta_{n0}^4 + 24\zeta_{n0}^2 \right) \frac{J_2(\zeta_{n0})}{J_1(\zeta_{n0})} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Выражение для коэффициента μ_n (1.3) при подстановке φ_n (2.14) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mu_n &= \rho_0 \lambda_n \iint_{\Sigma} \varphi_n^2 dS = \frac{\pi \rho_0}{\lambda_n J_1^2(\zeta_{n0})} \int_0^{R_0} \xi J_1^2(\lambda_n \xi) d\xi = \\ &= \frac{\pi \rho_0 R_0^2}{2\lambda_n} \left[1 - \frac{J_0(\zeta_{n0}) J_2(\zeta_{n0})}{J_1^2(\zeta_{n0})} \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

При подстановке значения функции Ψ (3.8) в последнюю формулу для момента инерции I (1.3) получим следующее выражение:

$$I = \rho_0 \left[l^2 V - 2\pi l \gamma_1 + \pi \sum_{k=1}^m b_k \gamma_k \right], \quad (4.5)$$

где

V — объем жидкости.

Принимая во внимание, что вторая из формул (3.7) приводит к равенству

$$\gamma_1 = - \left(\frac{V}{\pi} x'_C{}^w + \frac{R_0^4}{4} \right) = -m \left(x'_G{}^w + \frac{\rho_0 I_y}{m} \right) = -m x'_G{}^w, \quad (4.6)$$

и обозначая через $I' = \pi \rho_0 \sum_{k=1}^m b_k \gamma_k$ момент инерции жидкой массы относи-

тельно оси, лежащей на свободной поверхности, придадим формуле (4.5) вид

$$I = ml^2 + 2mlx'_G{}^w + I', \quad (4.7)$$

где

$x'_C{}^w$ и $x'_G{}^w$ — координата центра масс и метацентра жидкой массы в системе координат, связанной со свободной поверхностью жидкости.

Получением выражений (4.1), (4.3), (4.4), (4.7) полностью исчерпывается решение поставленной гидродинамической задачи.

§ 5. Анализ полученных результатов

Анализ будем проводить с учетом только основной частоты и формы колебаний жидкости. При оценке приближенных решений мы будем часто прибегать к использованию существующих точных решений и приближенных, полученных другими методами. О качестве решения, полученного с помощью вариационного метода, будем судить также по характеру процесса сходимости соответствующих коэффициентов уравнений возмущенного движения.

Качественный характер поведения приближенных решений, следуя Н. Е. Жуковскому [7], можно проанализировать путем построения полости по найденному потенциалу смещений. В частности этот метод мы применим к анализу приближенного решения для функции φ_1 .

Согласно второму условию (1.4), уравнение контура меридионального сечения полости, для которого решение φ_1 является точным, имеет следующий вид:

$$x(\xi) = \frac{1}{\lambda} \int_{\zeta_0}^{\xi} \frac{\zeta J_1(\zeta)}{\zeta J_0(\zeta) - J_1(\zeta)} d\zeta. \quad (5.1)$$

Подынтегральная функция $f(\zeta)$ имеет вид, показанный на рис. 2. При $\zeta_0 = 1,8412$ она обладает особенностью. Как известно, решению с $\zeta_0 = 1,8412$ соответствует цилиндрическая полость, для которой тангенс угла α между касательной к контуру полости и осью Ox равен нулю.

Рис. 2.

Для полостей с $\zeta_0 < 1,8412$ имеем $\operatorname{tg} \alpha > 0$, для полостей с $\zeta_0 > 1,8412$ — $\operatorname{tg} \alpha < 0$. В соответствии с этим уравнение линии тока для полостей с $\zeta_0 < 1,8412$ получаем с помощью интегрирования левой ветви подынтегральной функции (рис. 2), для полостей с $\zeta_0 > 1,8412$ — правой ветви при начальных условиях, соответствующих точкам пересечения контура полости с невозмущенной свободной поверхностью. Степень совпадения этих линий тока с контуром рассматриваемой полости является критерием точности используемого приближенного решения краевой задачи. Все упомянутые выше оценки точности приближенных решений являются достаточными.

В качестве необходимых и достаточных условий адекватности найденных решений существованию рассматриваемой механической задачи будем

в дальнейшем использовать условие инвариантности величин $\frac{m_n^2}{\mu_n}$ и $\frac{M_{0n}^2}{\mu_n}$, найденных различными методами. При этом предполагается, что момент инерции жидкости I остается неизменным. Это условие позволяет наиболее объективно судить о границах применимости полученных решений.

1. Анализ числовых результатов для момента инерции жидкости

Для отыскания момента инерции жидкости I используется только решение краевой задачи для функции Ψ . Последняя была определена вариационным методом с использованием сферических функций в качестве координатной системы. Эффективность такого построения можно усмотреть из сравнения с существующими точными решениями, а также из анализа сходимости последовательных приближений соответствующих коэффициентов уравнений возмущенного движения.

Приведем числовые расчеты момента инерции I для некоторых осесимметричных полостей. Момент инерции будем вычислять в системе координат, имеющей начало на невозмущенной свободной поверхности жидкости.

а) Прямой круговой цилиндр с плоским дном

Для случая полости с относительной глубиной жидкости $\bar{h} = 4$ точное решение [1] приводит к значению $I = 59,700$. Приближенные значения, полученные при решении задачи вариационным методом, соответственно равны

$$I_3 = 58,894; \quad I_4 = 59,622; \quad I_5 = 59,651.$$

Индекс при I соответствует числу членов конечной суммы (3.8).

б) Прямой круговой конус со сферическим дном

Для конуса с углом полураствора $\alpha = 35^\circ$, с глубиной жидкости $\bar{h} = 1,2$ и относительным радиусом сферического дна $\bar{R}_c = 2,6$ имеем

$$I_3 = 1,07182; \quad I_4 = 1,07417; \quad I_5 = 1,07417.$$

в) Обратный круговой конус

Для конуса с $\alpha = 45^\circ$ и $\bar{h} = 1$ приближенные значения момента инерции равны

$$I_3 = 0,33113; \quad I_4 = 0,33215; \quad I_5 = 0,33256.$$

Все перечисленные выше примеры показывают, что изложенный вариационный метод определения функции Ψ является достаточно эффективным и может быть использован для широкого класса осесимметричных полостей.

2. Анализ решения краевой задачи для функции φ_1

В соответствии со сказанным выше приведем анализ приближенного решения φ_1 для осесимметричных полостей различной геометрической конфигурации.

а) Сферическая полость.

Для сферической полости числовые результаты, полученные на основании формул (4.1) и (4.4), будем сравнивать с результатами, полученными вариационным методом в работах [8], [9]. Геометрические характеристики полости будем относить к радиусу сферы.

На рис. 3—5 изображены линии тока, полученные путем интегрирования (5.1) для разных относительных глубин жидкости в сферической полости. При малых относительных глубинах жидкости (рис. 3) линии

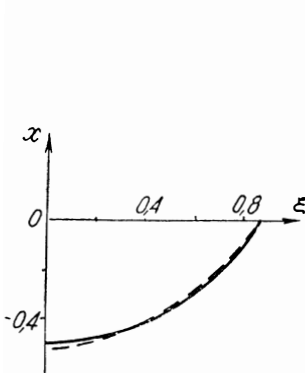


Рис. 3.

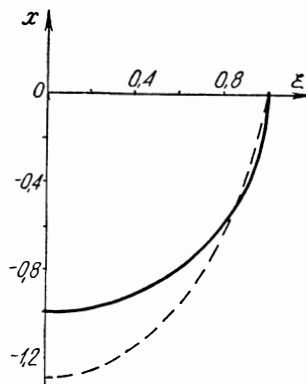


Рис. 4.

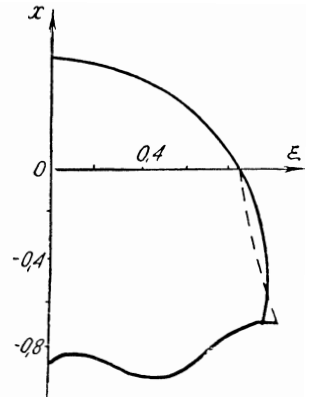


Рис. 5.

тока почти полностью совпадают с диаметральной сечением полости, т. е. найденное решение может считаться практически точным во всей области, занятой жидкостью.

При больших глубинах жидкости (рис. 4, 5) линии тока подходят к контуру тела лишь вблизи свободной поверхности, т. е. полученное решение остается близким к точному в той части области, где в основном происходят колебания жидкости.

Результаты расчета отношения $\frac{m_1^2}{\mu_1}$ по формулам § 4 и вариационным методом приведены в следующей таблице:

\bar{h}	$\frac{m_1^2}{\mu_1}$	$\frac{m_1^{*2}}{\mu_1^*}$
0,5	0,5335	0,5323
0,8	1,004	1,003
1,1	1,273	1,267
1,5	1,022	1,011
1,8	0,3870	0,3822

Значком * будем обозначать результаты, полученные вариационным методом.

б) Конические полости

На рис. 6, 7 изображены обратные конусы с $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 25^\circ$, а также полости, для которых приближенное решение φ_1 является точным. Из рисунков видно, что функция φ_1 хорошо удовлетворяет краевым условиям задачи (1.4) вблизи свободной поверхности жидкости.

Числовые результаты, полученные по формулам § 4, сравнивались с результатами расчета соответствующих коэффициентов другим приближенным методом [10], в котором функция φ_1 представляется линейной комбинацией функций, каждая из которых точно удовлетворяет условию на смачиваемой поверхности полости.

Для конуса с $\alpha = 25^\circ$ имеем

$$\frac{m_1^2}{\mu_1} = 1,0960; \quad \frac{m_1^{*2}}{\mu_1^*} = 1,0982.$$

Для конуса с $\alpha = 45^\circ$ подобное сравнение можно провести, используя точное решение, которое имеет вид

$$\psi_1(x, \xi) = \xi + \lambda_1 x \xi.$$

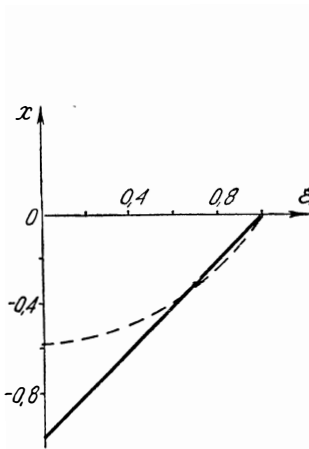


Рис. 6.

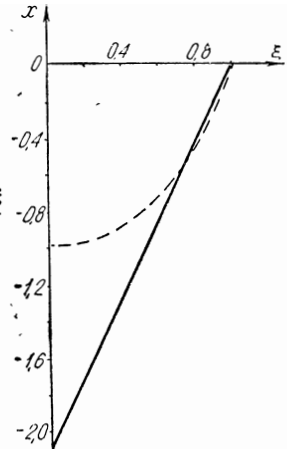


Рис. 7.

С помощью приближенного решения получаем $\frac{m_1^2}{\mu_1} = 0,78462$, а точное решение (6.1) приводит к значению $\frac{m_1^2}{\mu_1} = 0,78539$. Аналогичные результаты приведем и для коэффициента M_{01} , в определении которого участвует функция Ψ . При использовании приближенного решения для φ_1 получим следующие значения:

$$\frac{M_{01}^2}{\mu_1} = 0,28098 \quad (m = 3); \quad \frac{M_{01}^2}{\mu_1} = 0,28133 \quad (m = 4).$$

Индексом m здесь обозначено число членов ряда (3.8). Используя же точное решение для φ_1 , получим

$$\frac{M_{01}^2}{\mu_1} = 0,28274 \quad (m = 3);$$

$$\frac{M_{01}^2}{\mu_1} = 0,28274 \quad (m = 4).$$

Для прямого кругового конуса с $\alpha = 30^\circ$ (рис. 8) при большой относительной глубине жидкости имеем

$$\frac{m_1^2}{\mu_1} = 0,043911; \quad \frac{m_1^{*2}}{\mu_1^*} = 0,043910.$$

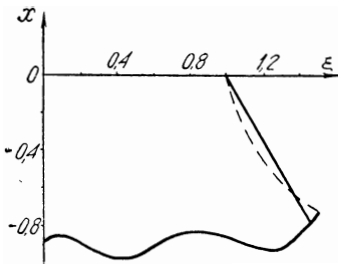


Рис. 8.

Таким образом, из анализа результатов следует, что рассмотренный выше метод решения поставленной гидродинамической задачи может быть применен к достаточно широкому классу полостей, имеющих форму тел вращения.

На основании анализа решений соответствующих краевых задач и полученных выражений для коэффициентов уравнений возмущенного движения можно сделать следующие выводы:

1. Приближенное решение для функции φ_n , построенное на предположении о том, что спектр частот свободных колебаний жидкости для заданной полости известен, в общем случае является близким к точному вблизи свободной поверхности жидкости.

2. Решение краевой задачи для функции Ψ изложенным вариационным методом является достаточно эффективным, что непосредственно усматривается из хорошего совпадения с точными решениями и хорошей сходимости соответствующих коэффициентов уравнений возмущенного движения, определяемых в зависимости от числа m членов ряда (3.8).

3. Выражения для коэффициентов уравнений возмущенного движения, полученные с помощью приближенных решений для функций φ_n и Ψ , выражаются через табулированные функции Бесселя и приводят на практике быстро к цели при применении простых вычислительных средств.

4. Проведенный в § 5 анализ результатов показывает, что выражения (4.1), (4.3), (4.4) и (4.7) могут быть использованы при исследовании возмущенного движения твердого тела с осесимметричными полостями различной геометрической конфигурации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Рабинович. Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью, ПММ, т. XX, вып. 1, 1956.

2. І. О. Луковський. Малі хвильові рухи однорідної нестисливої рідини в посудинах, які мають форму тіл обертання. «Докл. АН УРСР», № 8, 1961.

3. Г. Н. Микишев, Н. Я. Дорожкин. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», № 4, 1961.

4. Вариационные методы в задачах о колебаниях жидкости и тела с жидкостью. Вычислительный центр АН СССР, 1962.

5. H. N. Abramson, G. E. Ransleben. Wall pressure Distributions during Sloshing in rigid tanks, ARS Journal, 31, № 4, 1961.

6. І. О. Луковський. Рівняння збуреного руху твердого тіла з порожниною, яка має форму тіла обертання і частково заповнена рідиною, «Докл. АН УРСР», № 6, 1962.

7. Н. Е. Жуковский. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. 2, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.

8. І. О. Луковський. Збурений рух твердого тіла з сферичною порожниною, частково заповненою рідиною, «Докл. АН УРСР», № 11, 1961.

9. И. Б. Богоряд. К решению задачи о колебаниях жидкости, частично заполняющей полость, вариационным методом, ПММ, т. XXVI, вып. 6, 1962.

10. Л. В. Докучаев. К решению краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях, ПММ, т. 28, вып. 1, 1964.

ОСОБЕННОСТИ МАЛЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАЩЕМЛЕННЫХ СТРУН

К. В. Красильников

Днепропетровский университет

Поперечные колебания защемленной струны сопровождаются ее нелинейным удлинением и изменением продольного натяжения. Вследствие этого колебания защемленной струны носят нелинейный характер. В работе И. К. Мелдер [6] оценено влияние нелинейности на частоту основного тона ненатянутой струны. В монографиях В. В. Болотина [1], Н. В. Мак-Лахлана [5] приводятся результаты по устойчивости колебаний струн и стержней, защемленный конец которых совершает периодические продольные колебания.

Настоящая работа посвящена определению условий, при которых наблюдается независимость отдельных собственных тонов колебаний, а также условий, при которых может происходить перераспределение энергий колебаний собственных тонов из-за нелинейности движения.

Рассмотрим колебания струны, защемленной на концах $x = 0$ и $x = l_0$.

Поперечные отклонения струны от положения равновесия (рис. 1) обозначим через $y(x, t)$. Удлинение струны Δl_0 вследствие ее малых поперечных колебаний $y(x, t)$ будет иметь величину [1]

$$\Delta l_0 = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (1)$$

а продольное ее натяжение $T(t)$ в каждый момент движения будет определяться формулой:

$$T(t) = T_0 + \frac{EF}{2l_0} \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (2)$$

где

EF — продольная жесткость струны;

T_0 — начальное натяжение.

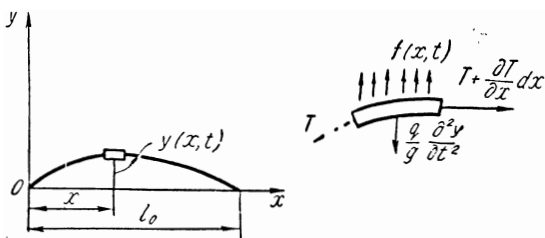


Рис. 1.

Для составления уравнения движения защемленной струны по принципу Даламбера спроектируем на ось oy силы, действующие на ее элемент dx (рис. 1).

После сокращения на dx получим

$$\frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[T(t) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = f(x, t), \quad (3)$$

где

q — вес единицы длины струны;
 $T(t)$ — нелинейное натяжение струны, выраженное формулой (2);
 $f(x, t)$ — распределенная поперечная сила, действующая на единицу длины струны.

Граничные условия для функции $y(x, t)$ будут:

$$y(0, t) = 0; \quad y(l_0, t) = 0. \quad (4)$$

Начальные условия считаются известными функциями

$$y(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x); \quad (5)$$

это прогиб и скорости элементов струны в начальный момент времени $t = 0$.

Подставляя в (3) выражение $T(t)$ из (2) и полагая $f(x, t) = 0$, получим уравнение свободных колебаний защемленной струны в виде

$$\frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left[T_0 + \frac{EF}{2l_0} \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (6)$$

Решение однородного уравнения (6) находим в виде разложения в ряд по собственным функциям соответствующего линейного уравнения

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l_0}, \quad (7)$$

где $\psi_n(t)$ — соответствующие обобщенные координаты.

Нелинейный член уравнения (6) после подстановки в него ряда (7) будет:

$$\int_0^{l_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l_0} \right)^2 \frac{l_0}{2} \psi_k(t). \quad (8)$$

Принимая во внимание ортогональность функций $\sin \frac{n\pi x}{l_0}$ и выражение (8), из уравнения (6) получим следующую бесконечную систему взаимосвязанных уравнений:

$$\ddot{\psi}_n(t) + \omega_n^2 \psi_n(t) = -\omega_n^2 \frac{\pi^2 EF}{4T_0 l_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \psi_k^2 \psi_n, \quad (9)$$

где $\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l_0} \right)^2 \frac{T_0 g}{q}$,

очевидно, что

$$\omega_n = n\omega. \quad (10)$$

Систему (9) положим в основу для исследования устойчивости собственных свободных колебаний защемленной струны.

Как следует из рис. 2, в нашем случае решение уравнения (13) будет устойчивым. Таким образом, переход энергии второго тона собственного колебания заземленной струны в энергию колебаний с частотой первого тона невозможен.

Аналогичная проверка показывает, что вообще для закрепленной струны переход энергии какого-либо тона в энергию колебания более низкого тона невозможен. Переход энергии колебаний какого-либо тона в энергию более высокого тона при определенных условиях оказывается возможным. Например, энергия основного тона может переходить в энергию любого обертона. Возможен переход энергии второго тона в энергию более высоких четных обертонов и т. д. Эти результаты сведены в табл. 1.

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		—	—	—	—	—	—	—
2	+		—	—	—	—	—	—
3	+	—		—	—	—	—	—
4	+	+	—		—	—	—	—
5	+	—	—	—		—	—	—
6	+	+	+	—	—		—	—
7	+	—	—	—	—	—		—
8	+	+	—	+	—	—	—	

В табл. 1 в первой строке расположены номера тонов, энергия которых имеет возможность (+) или не имеет возможности (—) переходить в энергию тонов, номер которых указан в первом столбце.

Уточним условия, при которых энергия первого тона может переходить в энергию колебаний с частотой второго тона. Для этого рассмотрим решение, отвечающее таким начальным условиям, при которых отсутствуют все обертоны выше второго. В этом случае в системе (12) останутся первые два уравнения, которые запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi}_1 + \omega_1^2 (1 + 2\gamma A_2^2) (1 + p_1 \cos 4\omega_1 t) \psi_1 + \gamma \psi_1^3 &= 0 \\ \ddot{\psi}_2 + \omega_2^2 \left(1 + \frac{\gamma A_1^2}{2}\right) (1 + p_2 \cos 2\omega_1 t) \psi_2 + 4\gamma \psi_2^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где A_1 , A_2 — амплитуды первого и второго тонов.

$$\gamma = \frac{\pi^2 EF}{4T_0 l^3}; \quad p_1 = \frac{2\gamma A_2^2}{1 + 2\gamma A_2^2}; \quad p_2 = \frac{\gamma A_1^2}{2 + \gamma A_1^2}.$$

Из (14) мы видим, что за счет нелинейного удлинения струны частоты первых двух тонов несколько возросли, а именно;

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \sqrt{1 + 2\gamma A_2^2}; \quad \bar{\omega}_2 = 2\omega_1 \sqrt{1 + \frac{\gamma A_1^2}{2}}. \quad (15)$$

Подставим (15) во второе уравнение системы (14) и найдем расстройку, т. е. разность частот вблизи параметрического резонанса [2, стр. 210].

$$\Delta = 2\omega_1^2 \gamma (A_1^2 - 4A_2^2). \quad (16)$$

Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским [2, стр. 286] показано, что для наступления параметрического резонанса отношение частот $\frac{2\omega_1}{\omega_2}$ должно находиться в интервале

$$4 + \frac{2}{3} p_2^2 - p_2^2 < \left(\frac{2\omega_1}{\omega_2}\right)^2 < 4 + \frac{2}{3} p_2^2 + p_2^2, \quad (17)$$

т. е. ширина зоны расстройки должна не превышать $2p_2^2$. В таком случае

$$2p_2^2 = \frac{2\gamma A_1^4}{(2 + \gamma A_1^2)^2}. \quad (18)$$

Из (16) и (18) видим, что в нашем случае ширина зоны неустойчивости пропорциональна A_1^2 , где $A_1 \ll 1$ для малых колебаний, т. е. расстройка (16) между частотами первого и второго тона вследствие нелинейности такова, что в общем случае она выходит из зоны параметрического резонанса и переход энергии колебаний с частотой второго тона не осуществляется.

Однако при условии, что разность

$$A_1^2 - 4A_2^2 \rightarrow 0, \quad (19)$$

т. е. при $A_1 \rightarrow 2A_2$ расстройка (16) стремится к нулю и наступает параметрический резонанс и энергия колебаний с частотой первого тона переходит в энергию колебаний более высокого второго тона. Соотношения, аналогичные условию (19) для второго тона, справедливы и для более высоких тонов.

Физически условие (19) означает, что параметрический резонанс между тонами нелинейно колеблющейся струны возможен лишь при амплитудах обертонов, соизмеримых с амплитудой первого тона.

В реальных механических системах и конструкциях, рабочим органом которых является заземленная струна (например, шахтные направляющие органы [3, 4]), высокочастотные возмущения не могут представлять опасности, так как их энергия не способна возбудить колебаний с частотой основного тона.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Болотин. Динамическая устойчивость упругих систем, ГИТТЛ, М., 1956.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ГИТТЛ, 1955.
3. В. Д. Белый. Канатные проводники шахтных подъемных установок, Углетехиздат, М., 1959.
4. О. А. Горошко. О колебаниях гибких проводников под действием движущегося груза, «Докл. АН УССР», № 5, 1958.
5. Н. В. Мак-Лахлан. Теория и приложения функций Матье. Изд-во иностр. лит. 1953.
6. И. К. Мелдер. Влияние переменной продольной силы на частоту свободных поперечных колебаний прямолинейного стержня. Сб. «Вопросы динамики и динамической прочности», АН Латвийской ССР, 1953.
7. М. Стрэтт. Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков, 1935.

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

В. С. Губенко

Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта

В этой работе рассматривается задача о действии кругового штампа на упругий слой, когда поверхность штампа меняет свою форму со временем по специальному закону.

§ 1. Уравнения равновесия для осевой симметрии при отсутствии объемных сил с учетом сил инерции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{F}{\rho^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) &= \rho_0 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) &= \rho_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь λ , μ — постоянные Ламе;

F , ω — радиальные и вертикальные перемещения;

ρ_0 — плотность; $\theta = \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{F}{\rho} + \frac{\partial \omega}{\partial z}$.

Решение системы (1.1) представляем в виде:

$$\begin{aligned}F &= \left[\frac{\partial \varphi(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi(\rho, z)}{\partial \rho \partial z} \right] \chi(t); \\ \omega &= \left[\frac{\partial \varphi(\rho, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi(\rho, z)}{\partial z^2} - q^2 \psi(\rho, z) \right] \chi(t),\end{aligned}\tag{1.2}$$

где φ , ψ , χ удовлетворяют следующим уравнениям [1]

$$\begin{aligned}\Delta \varphi &= \rho^2 \rho, \quad \Delta \psi = q^2 \psi; \quad \chi'' - \omega^2 \chi = 0; \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \rho^2 = \frac{\rho_0 \omega^2}{\lambda + 2\mu}; \quad q^2 = \frac{\rho_0 \cdot \omega^2}{\mu}.\end{aligned}$$

Нормальные и касательные напряжения выражаются через φ , ψ по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \left[2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} - q^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \lambda \rho^2 \rho \right] \chi(t); \\ \tau_{r_z} &= \left[2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial z} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial \rho \partial z^2} \right) - \mu q^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right] \chi(t).\end{aligned}\tag{1.3}$$

§ 2. Рассмотрим следующую задачу. В упругий слой, лежащий на жестком гладком основании, вдавливается круговой штамп, меняющий форму основания по закону:

$$\omega(\rho, 0, t) = f(\rho) \cdot \chi(t).$$

Определим давления под штампом.

Граничные условия:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \tau_{\rho z} = 0; \quad \omega = f(\rho) \chi(t) \rho < a; \quad \sigma_z = 0 \quad \rho > a. \\ z = h: \quad \tau_{\rho z} = 0; \quad \omega = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь a — радиус круга, h — толщина слоя.

Для функций φ , ψ условия (2.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - q^2 \psi = 0; \\ 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} - q^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \lambda p^2 \varphi = 0 \quad \rho > a; \\ \psi = -\frac{2}{q^2} f(\rho); \\ z = h: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пользуясь преобразованиями [2], условия (2.2) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad 2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) - q^2 u_2 = 0; \\ 2\mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial z^3} - q^2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \lambda p^2 v_1 = 0 \quad |x| > a; \\ u_2 = -\frac{2}{q^2} \cdot g(x) \quad |x| < a; \\ z = h: \quad u_2 = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t) t dt}{\sqrt{x^2 - t^2}}.$$

Функции u_i , v_i ($i = 1, 2$), удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta u_1 = p^2 u_1, \quad \Delta u_2 = q^2 u_2, \\ \Delta v_1 = p^2 v_1, \quad \Delta v_2 = q^2 v_2, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

представляем в виде

$$\begin{aligned} u_1(v_1) = \int_0^\infty [A_1(\alpha) \operatorname{ch} z \sqrt{\alpha^2 + p^2} + B_1(\alpha) \operatorname{sh} z \sqrt{\alpha^2 + p^2}] \frac{\sin \alpha x}{\cos \alpha x} d\alpha. \\ u_2(v_2) = \int_0^\infty [A_2(\alpha) \operatorname{ch} z \sqrt{\alpha^2 + q^2} + B_2(\alpha) \operatorname{sh} z \sqrt{\alpha^2 + q^2}] \frac{\sin \alpha x}{\cos \alpha x} d\alpha. \end{aligned} \quad (2.4)$$

После подстановки (2.4) в (2.3) приходим к парным интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A(\alpha) \sin \alpha x d\alpha = g(x) \quad |x| < a, \\ \int_0^\infty \alpha G(\alpha) A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha = 0 \quad |x| > a, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$A = -\frac{q^2}{2} A_2; \quad G(x) = -2\mu \left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right) G_0(x),$$

$$G_0(x) = \frac{2(\varepsilon^2 - 1)x\sqrt{x^2 + 1} [(2x^2 + \varepsilon^2)^2 \operatorname{cth} hp\sqrt{x^2 + 1} + 4x^2\sqrt{(x^2 + \varepsilon^2)(x^2 + 1)} \operatorname{cth} hp\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}]}{|6(\varepsilon^2 - 1)x^6 + 8(3\varepsilon^2 - 2)\varepsilon^2 x^4 + 8\varepsilon^6 \cdot x^2 + \varepsilon^2 + (2x^2 + \varepsilon^2)^2 \operatorname{cosech}^2 hp\sqrt{x^2 + 1} - 16x^4(x^2 + 1) \operatorname{cosech}^2 hp\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}|},$$

$$x = \alpha \cdot p; \quad \varepsilon^2 = \frac{q^2}{p^2} = 4 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu},$$

ν — коэффициент Пуассона.

Уравнения (2.5) легко свести к уравнению Фредгольма II рода:

$$\sigma(x) + \int_{-a}^a K(x-t)\sigma(t)dt = F(x), \quad (2.6)$$

где

$$K(x-t) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda(\alpha) \cos \alpha(x-t) d\alpha, \quad (2.7)$$

$$F(x) = \pi\mu \left(\frac{p^2}{q^2} - 1\right) g(x), \quad (2.8)$$

$$\lambda = 1 - \frac{1}{G_0(\alpha)}, \quad (2.9)$$

При этом давления под штампом вычисляются по формуле

$$\sigma_z = -\frac{\chi(t)}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dp} \int_p^a \frac{\sigma'(x) x dx}{\sqrt{x^2 - p^2}}. \quad (2.10)$$

§ 3. Для решения уравнения (2.6) удобно функцию $\lambda(\alpha)$ аппроксимировать так:

$$\lambda(\alpha) = \begin{cases} 1 - \frac{k}{p} \alpha & 0 \leq \alpha \leq \alpha_0; \\ e - \frac{R}{p} \cdot \alpha & \alpha_0 \leq \alpha < \infty. \end{cases}$$

Так для $\nu = 0,25$ и $hp = 1$

$$k = 0,273; \quad R = 0,333; \quad \alpha_0 = \frac{1,5}{h}.$$

При этом максимальная погрешность составит 2,5%. Для этих численных значений при $\frac{a}{h} \leq 0,1$ получим

$$k(x-t) = -\frac{1}{h} \left[0,917 - 2,88 \left(\frac{x-t}{h}\right)^2 + 2,28 \left(\frac{x-t}{h}\right)^4 \right].$$

Тогда

$$\sigma(x) = F(x) - A_1 x + A_3 x^3,$$

где $A_1 A_3$ находятся из системы

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot A_1 + \alpha_{31} \cdot A_3 = \beta_1 \\ \alpha_{13} A_1 + \alpha_{33} \cdot A_3 = \beta_3, \end{cases}$$

$$\alpha_{11} = 1 + 3,84 \left(\frac{a}{h}\right)^3; \quad \alpha_{31} = 2,31 \cdot a^2 \left(\frac{a}{h}\right)^3;$$

$$\alpha_{13} = -\frac{60,8}{h^2} \left(\frac{a}{h}\right)^3; \quad \alpha_{33} = 1;$$

$$\beta_1 = \int_{-a}^a \left(\frac{5,76}{h^3} t - \frac{91,2}{h^5} t^3 \right) F(t) dt;$$

$$\beta_3 = -\frac{91,2}{h^3} \int_{-a}^a F(t) t dt.$$

Величина напряжений

$$\sigma_z = \chi(t) \left[\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{d}{\rho} \int_{\rho}^a \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t) t dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} + \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \rho^2}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \right],$$

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} [A_1 - 3A_3 a^2]; \quad \alpha_2 = -\frac{9}{\sqrt{\pi}} A_3.$$

Так при $f(t) = c = \text{const}$

$$\sigma_z = -\frac{E \cdot c}{2(1-\nu^2)} \cdot \frac{1 + 673 \left(\frac{a\rho}{h^2}\right)^2}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \chi(t).$$

Заметим в заключение, что изложенный прием может быть применен и для решения задачи, когда поверхность штампа меняет свою форму по закону, отличному от приведенного здесь, но так, чтобы его можно было аппроксимировать суммой функций $f(\rho) \cdot \chi(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Филиппов. Колебания упругих систем. Изд-во АН УССР, Киев, 1956.
2. В. С. Губенко, И. Ф. Филимонов. О связи некоторых осесимметричных и плоских задач для слоя. «Труды ДИИТ'а», вып. 50, 1964.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНОЙ

В. И. Моссаковский, М. Т. Рыбка

Днепропетровский государственный университет

В работе решена задача теории упругости для неоднородной пластины, ослабленной прямолинейной трещиной. Исходя из концепции Гриффитса установлен критерий разрушения.

§ 1. Сведение основной задачи теории упругости к задаче теории потенциала

Рассматривается задача теории упругости о двух полуплоскостях с различными упругими свойствами. На линии соединения имеется прямолинейная трещина длиной $2l$; на бесконечности приложены равномерно распределенные усилия $p = \text{const}$, перпендикулярные к линии трещины. Такая постановка служит упрощенной моделью задачи о распределении напряжений в разнородных материалах, соединенных сваркой, или в соединениях неметаллических материалов, когда оправдывается предположение о наличии плоской деформации или плоского напряженного состояния.

Прямоугольные координаты выбираем таким образом, чтобы граница упругих полуплоскостей совпадала с осью Ox , начало координат поместим в центре трещины.

Решение этой задачи ищем в виде

$$u = \varphi_1 + y \frac{\phi}{\partial x}, \quad v = \varphi_2 + y \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (1.1)$$

Здесь

u, v — проекции упругих перемещений на оси координат;
 $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ — гармонические функции от x, y , связанные условием

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right), \quad (1.2)$$

где λ и μ — коэффициенты Ляме.

Выражая напряжения через деформации и пользуясь формулами (1.1), находим значения компонент напряжений σ_y и τ_{xy} на оси $y = 0$

$$\sigma_y(x, 0) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_2 + \psi) + \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad (1.3)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = \mu \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

Из формул (1.1), положив $y = 0$, получим

$$u(x, 0) = \varphi_1(x, 0), \quad v(x, 0) = \varphi_2(x, 0). \quad (1.4)$$

Будем рассматривать отдельно две упругие полуплоскости.

Пусть среда с упругими характеристиками E_1, ν_1 занимает нижнюю полуплоскость S^- , а среда с упругими характеристиками E_2, ν_2 — верхнюю полуплоскость S^+ . Отрезок $-l < x < l$ оси Ox обозначим L' , остальную часть этой оси обозначим L'' .

Для определения неизвестных функций имеем граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y^-(x, 0) = p \\ \tau_{xy}^+(x, 0) = \tau_{xy}^-(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad \text{на } L' \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} u^+(x, 0) = u^-(x, 0), \quad v^+(x, 0) = v^-(x, 0), \\ \sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y^-(x, 0), \quad \tau_{xy}^+(x, 0) = \tau_{xy}^-(x, 0). \end{aligned} \quad \text{на } L'' \quad (1.6)$$

Здесь, как и в дальнейшем, величины, относящиеся к верхней полуплоскости, обозначим индексом «+», к нижней «-».

Введем гармонические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях функции $\varphi_3^+(x, y)$ и $\varphi_3^-(x, y)$ соотношениями

$$\begin{aligned} \psi^- &= -\frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 3\mu_1} (\varphi_2^- + \varphi_3^-), \\ \psi^+ &= -\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 3\mu_2} (\varphi_2^+ + \varphi_3^+). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из соотношений (1.7) и (1.2) следует, что

$$\frac{\partial \varphi_3^+}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1^+}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_3^-}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1^-}{\partial x}. \quad (1.8)$$

Используя (1.3), (1.2) и (1.8), из первого условия (1.5) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2^-}{\partial y} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_3^-}{\partial y} = C_1, \\ \frac{\partial \varphi_2^+}{\partial y} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \varphi_3^+}{\partial y} = C_2, \end{aligned} \quad \text{на } L' \quad (1.9)$$

где обозначено

$$A_k = \frac{\lambda_k + 2\mu_k}{\mu_k}, \quad C_k = \frac{\lambda_k + 3\mu_k}{2\mu_k(\lambda_k + 2\mu_k)} p \quad (k = 1, 2) \quad (1.10)$$

Дифференцируя второе равенство из (1.3) по x , учитывая, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varphi_2 + \psi) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\varphi_2 + \psi)$$

и принимая во внимание соотношения (1.2) и (1.8), находим

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{2\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - \frac{2\mu^2}{\lambda + 3\mu} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}. \quad (1.11)$$

Тогда второе условие (1.5) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi_2^-}{\partial y^2} - A_1 \frac{\partial^2 \varphi_3^-}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2^+}{\partial y^2} - A_2 \frac{\partial^2 \varphi_3^+}{\partial y^2} = 0. \quad \text{на } L'. \quad (1.12)$$

Аналогично из условий (1.6) получим

$$\begin{aligned} B_2 \frac{\partial \varphi_2^+}{\partial y} - D_2 \frac{\partial \varphi_3^+}{\partial y} = B_1 \frac{\partial \varphi_2^-}{\partial y} - D_1 \frac{\partial \varphi_3^-}{\partial y}, \\ D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2^+}{\partial y^2} - B_2 \frac{\partial^2 \varphi_3^+}{\partial y^2} = D_1 \frac{\partial^2 \varphi_2^-}{\partial y^2} - B_1 \frac{\partial^2 \varphi_3^-}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad \text{на } L'' \quad (1.13)$$

где обозначено

$$B_k = \frac{\mu_k (\lambda_k + 2\mu_k)}{\lambda_k + 3\mu_k}, \quad D_k = \frac{\mu_k^2}{\lambda_k + 3\mu_k}, \quad (k = 1, 2). \quad (1.14)$$

Умножая первое условие (1.9) на B_1 , второе — на B_2 , вычитая и учитывая, что

$$\frac{B_1}{A_1} = D_1, \quad \frac{B_2}{A_2} = D_2, \quad B_1 C_1 - B_2 C_2 = 0,$$

найдем

$$B_2 \frac{\partial \varphi_2^+}{\partial y} - D_2 \frac{\partial \varphi_3^+}{\partial y} - B_1 \frac{\partial \varphi_2^-}{\partial y} + D_1 \frac{\partial \varphi_3^-}{\partial y} = 0. \quad \text{на } L'. \quad (1.15)$$

Аналогично из условий (1.12) находим

$$D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2^+}{\partial y^2} - B_2 \frac{\partial^2 \varphi_3^+}{\partial y^2} - D_1 \frac{\partial^2 \varphi_2^-}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial^2 \varphi_3^-}{\partial y^2} = 0. \quad \text{на } L'. \quad (1.16)$$

Таким образом, граничные условия для определения функций φ_2 и φ_3 получим в следующем виде

$$\frac{\partial \varphi_2^-}{\partial y} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_3^-}{\partial y} = C_1, \quad \varphi_2^- - A_1 \varphi_3^- = K, \quad \text{на } L', \quad (1.17)$$

$$\varphi_2^+ = \varphi_2^-, \quad \frac{\partial \varphi_3^+}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_3^-}{\partial y}, \quad \text{на } L'', \quad (1.18)$$

$$D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2^+}{\partial y^2} - B_2 \frac{\partial^2 \varphi_3^+}{\partial y^2} - D_1 \frac{\partial^2 \varphi_2^-}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial^2 \varphi_3^-}{\partial y^2} = 0 \quad \text{на всей оси } y = 0. \quad (1.19)$$

$$B_2 \frac{\partial \varphi_2^+}{\partial y} - D_2 \frac{\partial \varphi_3^+}{\partial y} - B_1 \frac{\partial \varphi_2^-}{\partial y} + D_1 \frac{\partial \varphi_3^-}{\partial y} = 0$$

где

K_1 — произвольная постоянная.

Введем в рассмотрение функции

$$\varphi_2^*(x, y) = \varphi_2(x, -y), \quad \varphi_3^*(x, y) = \varphi_3(x, -y). \quad (1.20)$$

Тогда условия (1.19) запишутся в виде

$$\begin{aligned} D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2^*}{\partial y^2} - B_2 \frac{\partial^2 \varphi_3^*}{\partial y^2} - D_1 \frac{\partial^2 \varphi_2^-}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial^2 \varphi_3^-}{\partial y^2} &= 0, \\ -B_2 \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial y} + D_2 \frac{\partial \varphi_3^*}{\partial y} - B_1 \frac{\partial \varphi_2^-}{\partial y} + D_1 \frac{\partial \varphi_3^-}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Интегрируя соотношения (1.21), находим

$$\begin{aligned} \varphi_2^*(x, 0) &= K \varphi_2^-(x, 0) - H \varphi_3^-(x, 0), \\ \varphi_3^*(x, 0) &= H \varphi_2^-(x, 0) - K \varphi_3^-(x, 0), \end{aligned} \quad (1.22)$$

где

$$K = \frac{B_1 B_2 + D_1 D_2}{D_2^2 - B_2^2}, \quad H = \frac{B_1 D_1 + B_2 D_2}{D_2^2 - B_2^2}. \quad (1.23)$$

Теперь граничные условия вне трещины (1.18) будут иметь вид

$$\varphi_2^-(x, 0) - A_0 \varphi_3^-(x, 0) = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi_2^-}{\partial y}(x, y) - \frac{1}{A_0} \frac{\partial \varphi_3^-}{\partial y}(x, y) \right]_{y=0} = 0, \quad \text{на } L'', \quad (1.24)$$

здесь

$$A_0 = \frac{H}{K-1}. \tag{1.25}$$

Вводя функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ соотношениями

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \varphi_2^-(x, y) - A_1 \varphi_3^-(x, y), \\ F_2(x, y) &= \varphi_2^-(x, y) - \frac{1}{A_1} \varphi_3^-(x, y), \end{aligned} \tag{1.26}$$

из условий (1.17) и (1.24), получим следующую задачу теории потенциала для этих функций

$$\frac{\partial F_1(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad \left[\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} \right]_{y=0} = C_1, \quad |x| < l \tag{1.27}$$

$$F_1(x, 0) - AF_2(x, 0) = 0,$$

$$\left[\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} - B \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} \right]_{y=0} = 0, \quad |x| > l \tag{1.28}$$

где обозначено

$$A = \frac{A_1 - A_0}{1 - A_0 A_1} A_1, \quad B = \frac{1 - A_0 A_1}{A_1 - A_0} A_1. \tag{1.29}$$

§ 2. Решение плоской задачи теории потенциала

Гармонические в полуплоскости $y < 0$ функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$, удовлетворяющие граничным условиям (1.27) и (1.28), будем рассматривать как действительные части аналитических в этой полуплоскости функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ ($z = x + iy$), т. е.

$$F_k(x, y) = \frac{1}{2} \Phi_k(z) + \frac{1}{2} \overline{\Phi_k(z)}, \quad (k = 1, 2). \tag{2.1}$$

Из соотношения (2.1) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{2} \Phi'_k(z) + \frac{1}{2} \overline{\Phi'_k(z)}, \\ \frac{\partial F_k(x, y)}{\partial y} &= \frac{i}{2} \Phi'_k(z) - \frac{i}{2} \overline{\Phi'_k(z)}. \end{aligned} \quad (k = 1, 2). \tag{2.2}$$

Введем функции $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$, аналитические во всей плоскости z за исключением разреза, совпадающего с L' , посредством соотношений

$$\begin{aligned} \Phi'_1(z) - A \Phi'_2(z) &= \Omega_1(z), \\ \Phi'_1(z) - B \Phi'_2(z) &= \Omega_2(z), \end{aligned} \quad \text{в } S^- \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Phi'_1(z)} - A \overline{\Phi'_2(z)} &= -\Omega_1(z), \\ \overline{\Phi'_1(z)} - B \overline{\Phi'_2(z)} &= \Omega_2(z), \end{aligned} \quad \text{в } S^+. \tag{2.4}$$

Граничные условия для $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$ на L' будут

$$\begin{aligned} \frac{B}{B-A} \Omega_1^-(x) - \frac{A}{B-A} \Omega_2^-(x) - \frac{B}{B-A} \Omega_1^+(x) - \frac{A}{B-A} \Omega_2^+(x) &= 0 \\ \frac{1}{B-A} \Omega_1^-(x) - \frac{1}{B-A} \Omega_2^-(x) + \frac{1}{B-A} \Omega_1^+(x) + \frac{1}{B-A} \Omega_2^+(x) &= -2C_1 i \end{aligned} \quad |x| < l \tag{2.5}$$

Условия на L'' удовлетворены соответствующим выбором функций $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$.

Условия (2.5) приводятся к следующим задачам линейного сопряжения

$$\left[\Omega_1(x) - \frac{A + \sqrt{AB}}{B + \sqrt{AB}} \Omega_2(x) \right]^- - \frac{B - \sqrt{AB}}{B + \sqrt{AB}} \left[\Omega_1(x) - \frac{A + \sqrt{AB}}{B + \sqrt{AB}} \Omega_2(x) \right]^+ =$$

$$= -\frac{2(B-A)\sqrt{AB}}{B + \sqrt{AB}} C_1 i, \quad (2.6)$$

$$\left[\Omega_1(x) - \frac{A - \sqrt{AB}}{B - \sqrt{AB}} \Omega_2(x) \right]^- - \frac{B + \sqrt{AB}}{B - \sqrt{AB}} \left[\Omega_1(x) - \frac{A - \sqrt{AB}}{B - \sqrt{AB}} \Omega_2(x) \right]^+ =$$

$$= \frac{2(B-A)\sqrt{AB}}{B - \sqrt{AB}} C_1 i.$$

Обозначая

$$\Omega_1(z) - \frac{A + \sqrt{AB}}{B + \sqrt{AB}} \Omega_2(z) = \Omega_3(z), \quad (2.7)$$

$$\Omega_1(z) - \frac{A - \sqrt{AB}}{B - \sqrt{AB}} \Omega_2(z) = \Omega_4(z),$$

условия (2.6) запишем в виде

$$\Omega_3^+(x) - \frac{B + \sqrt{AB}}{B - \sqrt{AB}} \Omega_3^-(x) = \frac{2(B-A)}{B - \sqrt{AB}} C_1 i, \quad (2.8)$$

$$\Omega_4^+(x) - \frac{B - \sqrt{AB}}{B + \sqrt{AB}} \Omega_4^-(x) = \frac{2(B-A)}{B + \sqrt{AB}} C_1 i. \quad (2.9)$$

Решением задачи линейного сопряжения (2.8), очевидно, будет

$$\Omega_3(z) = X_0(z) P_0(z) + \frac{1}{1 - \frac{B + \sqrt{AB}}{B - \sqrt{AB}}} \cdot \frac{2(B-A)}{B - \sqrt{AB}} \sqrt{AB} C_1 i$$

или

$$\Omega_3(z) = X_0(z) P_0(z) - (B-A) C_1 i. \quad (2.10)$$

Как известно [1], можно принять

$$X_0(z) = (z+l)^{-\gamma} (z-l)^{\gamma-1}, \quad (2.11)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{B + \sqrt{AB}}{B - \sqrt{AB}} \right| + \frac{1}{2}. \quad (2.12)$$

Полином $P_0(z)$ следует выбирать так, чтобы $\Omega_3(z)$ была голоморфной и исчезла на бесконечности не менее быстро, чем $\frac{1}{z^2}$. Учитывая это, получим

$$\Omega_3(z) = \left\{ \left(\frac{z-l}{z+l} \right)^\gamma \frac{1}{z-l} [(2\gamma-1)l+z] - 1 \right\} (B-A) C_1 i. \quad (2.13)$$

Аналогично строится решение задачи линейного сопряжения (2.9)

$$\Omega_4(z) = \left\{ \left(\frac{z-l}{z+l} \right)^{-\gamma} \frac{1}{z+l} [-(2\gamma-1)l+z] - 1 \right\} (B-A) C_1 i. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.13) и (2.14) в (2.7), получим

$$\Omega_1(z) = \frac{(B-A) C_1 i}{2} \left\{ \left[\left(\frac{z-l}{z+l} \right)^\gamma \frac{1}{z-l} - \left(\frac{z-l}{z+l} \right)^{-\gamma} \frac{1}{z+l} \right] (2\gamma-1)l + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{z-l}{z+l} \right)^\gamma \frac{1}{z-l} + \left(\frac{z-l}{z+l} \right)^{-\gamma} \frac{1}{z+l} \right] z - 2 \right\}, \quad (2.15)$$

$$\Omega_1(z) = \frac{B(B-A)C_1 i}{2\sqrt{AB}} \left\{ \left[\left(\frac{z-l}{z+l} \right)^{-\gamma} \frac{1}{z+l} - \left(\frac{z-l}{z+l} \right)^{\gamma} \frac{1}{z-l} \right] z - \right. \\ \left. - \left[\left(\frac{z-l}{z+l} \right)^{-\gamma} \frac{1}{z+l} + \left(\frac{z-l}{z+l} \right)^{\gamma} \frac{1}{z-l} \right] (2\gamma - 1) l \right\}. \quad (2.16)$$

После того как функции $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$ найдены, граничные значения функций $\frac{\partial F_k}{\partial x}$, $\frac{\partial F_k}{\partial y}$ находятся из формул

$$\frac{\partial F_1(x, 0)}{\partial x} = \frac{1}{2(B-A)} \{ B [\Omega_1^-(x) - \Omega_1^+(x)] - A [\Omega_2^-(x) + \Omega_2^+(x)] \}, \\ \frac{\partial F_2(x, 0)}{\partial x} = \frac{1}{2(B-A)} \{ [\Omega_1^-(x) - \Omega_1^+(x)] - [\Omega_2^-(x) + \Omega_2^+(x)] \}, \quad (2.17) \\ \left[\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right]_{y=0} = \frac{i}{2(B-A)} \{ B [\Omega_1^-(x) + \Omega_1^+(x)] - A [\Omega_2^-(x) - \Omega_2^+(x)] \}, \\ \left[\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} \right]_{y=0} = \frac{i}{2(B-A)} \{ [\Omega_1^-(x) + \Omega_1^+(x)] - [\Omega_2^-(x) - \Omega_2^+(x)] \}.$$

§ 3. Критерий разрушения неоднородной пластины, ослабленной трещиной

В работе Гриффитса [2], посвященной образованию и развитию трещин в хрупком теле, применяется энергетический подход. Основные предположения теории Гриффитса заключаются в том, что на поверхности твердого тела действуют силы натяжения, аналогичные силам, действующим на поверхности жидкости, и что при образовании трещины длиной $2l$ уменьшение потенциальной энергии тела W^* компенсируется поверхностной энергией трещины U . Для развития данной трещины необходимо, чтобы при увеличении размера трещины $2l$ изменение свободной энергии тела $W^* - U$ не возрастало. Таким образом, условие, необходимое для увеличения трещины, заключается в следующем:

$$\frac{\partial}{\partial l} (W^* - U) = 0. \quad (3.1)$$

Из соотношения (3.1) определяются параметры критического равновесного состояния.

Гриффитс получил соотношение, определяющее критическое значение разрушающего напряжения для растяжения бесконечной однородной пластины с прямолинейной трещиной длиной $2l$ силами, перпендикулярными к линии трещины:

$$p_0 = \sqrt{\frac{2ET_0}{\pi l}}, \quad p_0 = \sqrt{\frac{2ET_0}{\pi l(1-\nu^2)}}, \quad (3.2)$$

соответственно для условий плоского напряженного состояния и плоской деформации.

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, T_0 — поверхностное натяжение.

Наличие в плоскости трещины длиной $2l$ понижает потенциальную энергию ее на величину

$$W^* = \frac{1}{2} \int_{-l}^l p(v^+ - v^-) dt, \quad (3.)$$

где v^+ , v^- — перемещения на верхнем и нижнем берегах трещины.

Учитывая формулы (1.4), можно записать

$$W^* = \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} p (\varphi_2^+ - \varphi_2^-) dt. \quad (3.4)$$

Используя (1.26), (1.22); (2.17), (2.15) и (2.16), из (3.4) получим

$$W^* = \frac{\rho C_1}{4} \sqrt{\frac{A-B}{A}} \cdot \frac{A_1}{1-A_1^2} [H - A_1(K-1)] \int_{-l}^l (l-x) \left\{ \left[\frac{l-x}{l+x} \right]^{-\gamma} \frac{1}{l+x} - \left[\frac{l-x}{l+x} \right]^{\gamma} \frac{1}{l-x} \right\} (2\gamma-1)l - \left[\left[\frac{l-x}{l+x} \right]^{-\gamma} \frac{1}{l+x} + \left[\frac{l-x}{l+x} \right]^{\gamma} \frac{1}{l-x} \right] x \right\} dx. \quad (3.5)$$

Вводя замену $x = 2lu - l$ и пользуясь известной формулой

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (3.6)$$

где α и β — комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$Re(\alpha) > 0, \quad Re(\beta) > 0$$

Γ — гамма-функция, из формулы (3.5) находим

$$W^* = \rho C_1 \sqrt{\frac{A-B}{A}} \cdot \frac{A_1}{1-A_1^2} [H - A_1(K-1)] l^2 \left[\gamma \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(2)} - \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(3)} - \gamma \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(2)} + \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(3)} \right]. \quad (3.7)$$

Известно [3], что гамма-функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет функциональному соотношению

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z). \quad (3.8)$$

Кроме этого, имеет место формула

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (3.9)$$

справедливая для всех комплексных z .

Учитывая (3.8), (3.9), из формулы (3.7) получим

$$W^* = \rho C_1 \sqrt{\frac{A-B}{A}} \cdot \frac{A_1}{1-A_1^2} [H - A_1(K-1)] l^2 \gamma (1-\gamma) \frac{\pi}{\sin \pi \gamma}. \quad (3.10)$$

Так как

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{B + \sqrt{AB}}{B - \sqrt{AB}} \right| + \frac{1}{2}, \quad \text{то} \quad \sin \pi \gamma = \sqrt{\frac{A}{A-B}}. \quad (3.11)$$

Учитывая (3.11) и подставляя значения постоянных A_1, C_1, A, B, K, H из формул (1.10), (1.23), (1.29), выражая их через модули упругости E_1, E_2 и коэффициенты Пуассона ν_1 и ν_2 , после некоторых преобразований и упрощений, получим

$$W^* = \pi \rho^2 l^2 \frac{E_1^2(1+\nu_1)^2(3-4\nu_1) + E_2^2(1+\nu_2)^2(3-4\nu_2) + 2E_1E_2(1+\nu_1)(1+\nu_2)[(1-2\nu_1)(1-2\nu_2) + 4(1-\nu_1)(1-\nu_2)]}{2E_1E_2[E_1(1-\nu_2^2) + E_2(1-\nu_1^2)]} (1-\gamma) \gamma, \quad (3.12)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{E_2(1+\nu_1)(3-4\nu_1) + E_1(1+\nu_2)}{E_1(1+\nu_2)(3-4\nu_2) + E_2(1+\nu_1)} + \frac{1}{2}. \quad (3.13)$$

Трещина обладает поверхностной энергией U , равной

$$U = 4lT_0. \quad (3.14)$$

Подставляя в (3.1) значения U и W^* из (3.12) и (3.14), находим величину разрушающего усилия

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{4T_0 E_1 E_2 [E_1(1-\nu_2^2) + E_2(1-\nu_1^2)]}{\pi l \{ E_1^2(1+\nu_1)^2(3-4\nu_1) + E_2^2(1+\nu_2)^2(3-4\nu_2) + 2E_1 E_2(1+\nu_1)(1+\nu_2)[(1-2\nu_1)(1-2\nu_2) + 4(1-\nu_1)(1-\nu_2)] \} \gamma(1-\gamma)}. \quad (3.15)$$

В случае однородной пластины ($E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$) формула (3.15) дает

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{2ET_0}{\pi l(1-\nu^2)}},$$

что совпадает с результатом Гриффитса (3.2).

В частном случае, когда одна из полуплоскостей является абсолютно жесткой ($E_2 = \infty$), то отрыв произойдет при

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{16T_0 E_1(1-\nu_1^2)}{\pi l(1+\nu_2)^2(3-4\nu_2) \left[1 + \frac{1}{\pi^2} \ln^2(3-4\nu_1) \right]}}. \quad (3.16)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
2. A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc., 1920, A. 221, 163—198.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, 1958.

К РАСЧЕТУ БАЛОЧНЫХ ПЛИТ НА МНОГОСЛОЙНЫХ ОСНОВАНИЯХ

Ю. А. Наумов, Ю. А. Шевляков

Днепропетровский государственный университет

§ 1. Рассмотрим задачу об изгибе балки, свободно лежащей на упругом n -слойном пакете [1] в постановке плоской теории упругости. Трением между балкой и пакетом пренебрегаем.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки согласно гипотезе плоских сечений имеет вид:

$$D_0 \frac{d^4 y(x)}{dx^4} = q(x) - p(x); \quad (|x| \leq l), \quad (1.1)$$

где

$$D_0 = \frac{h_0^3 E_0}{12(1 - \nu_0^2)} \text{ — жесткость балки-полоски}; \quad (1.2)$$

l — полудлина балки;

$p(x)$ — неизвестное реактивное давление под балкой;

$q(x)$ — интенсивность заданной распределенной нагрузки.

На основании работы [1] можно показать, что осадка верхней границы пакета определяется выражением

$$v(x, 0) = \frac{2(1 - \nu_1^2)}{\pi E_1} \int_{-l}^{+l} p(t) dt \cdot \int_0^\infty A_n(\xi) \cos \xi(x-t) \frac{d\xi}{\xi}, \quad (|x| < \infty), \quad (1.3)$$

где $A_n(\xi)$ — вполне определенная функция, характеризующая податливость пакета и обладающая свойствами

$$A_n(\xi) = a_0 h_1 \xi \quad \text{при } \xi \rightarrow 0, \quad (1.4)$$

$$A_n(\xi) = 1 - b_0 (h_1 \xi)^2 e^{-2h_1 \xi} \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty, \quad (1.5)$$

E_1, ν_1, h_1 — соответственно упругие постоянные и толщина верхнего слоя пакета;

a_0, b_0 — постоянные, зависящие от упругих констант и толщин слоев пакета.

Рассматриваемая задача заключается в определении реактивного давления $p(x)$ при выполнении условия контакта

$$y(x) \equiv v(x, 0), \quad |x| \leq l \quad (1.6)$$

и условий равновесия балки — полоски.

Решение задачи будем искать среди функций, принадлежащих классу L (класс абсолютно суммируемых функций). Относительно $q(x)$ будем предполагать, что она принадлежит тому же классу функций L .

§ 2. Систему уравнений (1.1) и (1.3) сведем к интегральному уравнению Фредгольма II рода. В указанных уравнениях перейдем к безразмерным координатам

$$x = \bar{l}x; \quad t = \bar{l}t; \quad \xi = \frac{u}{\bar{l}}. \quad (2.1)$$

Учитывая условия контакта (1.6) и оставляя, ради простоты, прежние обозначения переменных и функций, исходную систему уравнений (1.1) и (1.3) преобразуем к виду:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{l^4}{D_0} [q(x) - p(x)] \quad (2.2)$$

$$(|x| \leq 1)$$

$$y(x) = \frac{2l(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \int_{-1}^{+1} p(t) K(x-t) dt, \quad (2.3)$$

где

$$K(x-t) = \int_0^{\infty} A_n(u) \cos(x-t) u \frac{du}{u}. \quad (2.4)$$

Ядро (2.4) интегрального уравнения (2.3) может быть представлено в виде [2]:

$$K(R) = -\ln |R| + F(R), \quad (-2 \leq R = (x-t) \leq +2), \quad (2.5)$$

где

$$F(R) = \ln 2 + \int_0^{\infty} [e^{-2u} - L_n(u) \cos Ru] \frac{du}{u}, \quad (2.6)$$

$$L_n(u) = 1 - A_n(u). \quad (2.7)$$

Интеграл, входящий в правую часть (2.6), сходится равномерно. Продифференцируем m раз функцию:

$$F^{(m)}(R) = \int_0^{\infty} u^{m-1} L_n(u) \sin \left[Ru + \frac{\pi}{2} (m-1) \right] du.$$

На основании признака Коши и свойств (1.4) и (1.5) нетрудно показать равномерную сходимость и этих интегралов. Следовательно, функция $F(R)$ является непрерывной вместе со всеми своими производными.

Подставляя (2.5) в (2.3), получим следующее интегральное уравнение:

$$-\int_{-1}^{+1} p(t) \ln |x-t| dt = \frac{\pi E_1}{2l(1-\nu_1^2)} y(x) - \int_{-1}^{+1} F(x-t) P(t) dt = \gamma(x), \quad (|x| \leq 1), \quad (2.8)$$

решение которого, если считать правую часть $\gamma(x)$ временно известной, имеет вид [3]:

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left\{ p_0 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma'(s)\sqrt{1-s^2}}{s-x} ds \right\}, \quad (|x| < 1) \quad (2.9)$$

где

$$p_0 = \int_{-1}^{+1} p(x) dx. \quad (2.10)$$

Для исключения неизвестной функции $y(x)$ обратимся к уравнению (2.2). Интегрируя его, получим

$$y'(x) = y'(-1) + \frac{l^4}{D_0} \int_{-1}^{+1} G_0(x-t) [q(t) - p(t)] dt, \quad (2.11)$$

где

$$G_0(x-t) = \begin{cases} 3(x-t)^2 & (-1 \leq t \leq x) \\ 0 & (x < t \leq 1). \end{cases} \quad (2.12)$$

В соответствии с принятыми предположениями относительно функций $p(x)$ и $q(x)$, интеграл, входящий в правую часть (2.8), является непрерывной функцией от x , удовлетворяющей условию Дини — Липшица [2].

На основании (2.8), (2.9) и (2.11) будем иметь

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left\{ p_0 + \frac{\pi E_1}{2l(1-\nu_1^2)} y'(-1) \cdot x - \lambda_0 \int_{-1}^{+1} ds \times \right. \\ \left. \times \int_{-1}^{+1} \frac{G_0(s-t)\sqrt{1-s^2}}{s-x} [q(t) - p(t)] dt + \int_{-1}^{+1} ds \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{G_n(s-t)\sqrt{1-s^2}}{s-t} p(t) dt \right\}, \quad (2.13)$$

где введены обозначения

$$G_n(s-t) = \frac{1}{\pi} F'_s(s-t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty L_n(u) \sin(s-t) u du, \quad (2.14)$$

$$\lambda_0 = \frac{l^3 E_1 (1-\nu_0^2)}{h_0^3 E_0 (1-\nu_1^2)}. \quad (2.15)$$

Постоянную $y'(-1)$ выразим через $m_0 = \int_{-1}^{+1} p(x) x dx$. С этой целью уравнение (2.13) умножим на x и проинтегрируем его по x в пределах $(-1, +1)$. Имеем

$$m_0 = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\pi E_1}{2l(1-\nu_1^2)} y'(-1) \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} - \lambda_0 \int_{-1}^{+1} ds \int_{-1}^{+1} G_0(s-t) \sqrt{1-s^2} [q(t) - \right. \\ \left. - p(t)] dt \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{x dx}{(s-x)\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^{+1} ds \cdot \int_{-1}^{+1} G_n(s-t) \sqrt{1-s^2} p(t) dt \times \right. \\ \left. \times \int_{-1}^{+1} \frac{x dx}{(s-x)\sqrt{1-x^2}} \right\}. \quad (2.16)$$

Как известно,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}; \quad \int_{-1}^{+1} \frac{x dx}{(s-x)\sqrt{1-x^2}} = -\pi.$$

Из выражения (2.16) определим $y'(-1)$. Полученный результат подставим в (3.15). После несложных преобразований получим следующее интегральное уравнение с непрерывным ядром:

$$\pi \sqrt{1-x^2} p(x) - \pi \int_{-1}^{+1} [\lambda_0 H_0(x, t) + H_n(x, t)] p(t) dt = f(x), \quad (2.17)$$

($|x| < 1$),

где

$$H_0(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{[1 + 2x(s-x)]\sqrt{1-s^2}}{s-x} G_0(s-t) ds, \quad (2.18)$$

$$H_n(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{[1 + 2x(s-x)]\sqrt{1-s^2}}{s-x} G_n(s-t) ds, \quad (2.19)$$

$$f(x) = p_0 + 2m_0 x - \pi \lambda_0 \int_{-1}^{+1} H_0(x, t) q(t) dt. \quad (2.20)$$

Постоянные p_0 и m_0 легко выражаются через главный вектор P_0 и главный момент M_0 нагрузки, приложенной к балке. Действительно, согласно условиям равновесия балки имеем

$$p_0 = \int_{-1}^{+1} p(x) dx = \int_{-1}^{+1} q(x) dx, \quad (2.21)$$

$$m_0 = \int_{-1}^{+1} p(x) x dx = \int_{-1}^{+1} xq(x) dx. \quad (2.22)$$

Переходя в последних равенствах выражений (2.21) и (2.22) к старой переменной, находим

$$p_0 = \frac{P_0}{l}; \quad m_0 = \frac{M_0}{l^2}. \quad (2.23)$$

Относительно функции $H_0(x, t)$ следует заметить, что ее достаточно определить с точностью до линейной функции $a(x)t + b(x)$, так как согласно условиям равновесия балки

$$\int_{-1}^{+1} [a(x)t + b(x)] [q(t) - p(t)] dt = 0.$$

Из выражения (2.9) следует, что решение интегрального уравнения (2.17) должно иметь вид

$$p(x) = \frac{\varphi(x)}{\pi \sqrt{1-x^2}}, \quad (2.24)$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию Дини — Липшица при самых общих предположениях относительно нагрузки. Подставляя (2.24) в (2.17), приходим к интегральному уравнению относительно $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) - \int_{-1}^{+1} \frac{\lambda_0 H_0(x, t) + H_n(x, t)}{\sqrt{1-t^2}} \varphi(t) dt = f(x), \quad (|x| \leq 1). \quad (2.25)$$

Итак, задача сведена к решению интегрального уравнения типа Фредгольма II рода (2.25).

§ 3. Приближенное решение полученного интегрального уравнения будем искать в виде линейной комбинации полиномов Чебышева I рода

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^N B_j T_j(x); \quad (|x| \leq 1). \quad (3.1)$$

Используя ортогональность функций $T_j(x)$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ на основании (2.25) получим для определения B_j ($j = 0, 1, 2, \dots, N$) систему $N+1$ линейных алгебраических уравнений вида

$$B_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^N \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{T_j(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} \times \right. \\ \left. \times \int_{-1}^{+1} \frac{\lambda_0 H_0(x, t) + H_n(x, t)}{\sqrt{1-x^2}} T_i(x) dx \right\} B_j; \quad (3.2) \\ (i = 0, 1, 2, \dots, N)$$

(при $i = 0$ вместо множителя $\frac{2}{\pi}$ следует писать $\frac{1}{\pi}$).

Подставляя сюда (2.18) — (2.20) и вычисляя интегралы [4], приходим к следующему результату:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 = p_0 \\ B_1 = 2m_0 \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

$$\left\{ B_i = \lambda_0 b_i - \sum_{j=0}^N (\lambda_0 c_{ij}^0 + c_{ij}^{(n)}) B_j; \quad (i = 2, 3, \dots, N), \right. \quad (3.4)$$

где

$$c_{ij}^0 = \frac{576}{\pi} \cdot \frac{[1 + (-1)^{i+j}] \cdot i}{[j^2 - (i+3)^2] \cdot [j^2 - (i+1)^2] \cdot [j^2 - (i-1)^2] \cdot [j^2 - (i-3)^2]}, \quad (3.5) \\ (i = 2, 3, \dots, N; j = 0, 1, \dots, N; \text{ при } j = \pm(i \pm 1), \pm(i \pm 3), \\ -c_{ij}^0 = 0),$$

$$c_{ij}^{(n)} = -2xi \cos \frac{\pi}{2} (i-j) \cdot \int_0^{\infty} L_n(u) J_i(u) \cdot J_j(u) \frac{du}{u}, \quad (3.6) \\ (i = 2, 3, \dots, N; j = 0, 1, \dots, N),$$

$$b_i = -2 \int_{-1}^{+1} q(t) dt \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{H_0(x, t) T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (i = 2, 3, \dots, N), \quad (3.7) \\ \int_{-1}^{+1} \frac{H_0(x, t) T_i(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{3}{4} \sqrt{1-t^2} \left[\frac{4}{3} U_0 + \frac{1}{4} U_2(t) - \frac{1}{60} U_4(t) + 2t \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} \right], & (i=2) \\ -\frac{3}{4} \sqrt{1-t^2} \left[-\frac{3}{8} U_1(t) + \frac{3}{40} U_3(t) - \frac{1}{120} U_5(t) - \frac{1}{2} \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} \right], & (i=3) \\ -\frac{3}{4} \sqrt{1-t^2} \left[\frac{U_{i-4}(t)}{(i-3)(i-2)(i-1)} - \frac{3U_{i-2}(t)}{(i-2)(i^2-1)} + \frac{3U_i(t)}{(i^2-1)(i+2)} - \right. \\ \left. - \frac{U_{i+2}(t)}{(i+1)(i+2)(i+3)} \right], & (i=4, 5, \dots, N). \end{cases} \quad (3.8)$$

Здесь

$$U_i(t) = \frac{\sin[(i+1) \arccos t]}{\sqrt{1-t^2}} - \text{полиномы Чебышева I рода,}$$

$$J_i(u) - \text{функции Бесселя.}$$

Исключая из системы (3.4) известные коэффициенты (3.3), окончательно получим:

$$B_i + \sum_{j=2}^N (\lambda_0 c_{ij}^0 + c_{ij}^{(n)}) B_j = \lambda_0 d_i^0 - d_i^{(n)}; \quad (i=2, 3, \dots, N), \quad (3.9)$$

где

$$d_i^0 = b_i - c_{i0}^0 p_0 - 2c_{i1}^0 m_0, \quad (3.10)$$

$$d_i^{(n)} = c_{i0}^{(n)} p_0 + 2c_{i1}^{(n)} m_0. \quad (3.11)$$

Наиболее простой вид принимает система уравнений (3.9) в случае однородного основания. Действительно, при этом $A_n(u) \equiv 1$ и все $c_{ij}^{(n)}$, как следует из (3.6) и (2.7), равны нулю. Еще более упрощается задача для симметричной нагрузки на балку, когда все коэффициенты и свободные члены (3.9) с нечетными индексами также равны нулю. В этом случае имеем

$$\frac{1}{\lambda_0} B_i + \sum_{j=2}^N c_{ij}^0 B_j = d_i^0; \quad (i=2, 4, 6, \dots, N), \quad (3.12)$$

где

$$d_i^0 = b_i^0 - c_{i0}^0 p_0. \quad (3.13)$$

§ 4. В качестве примеров рассмотрим следующие задачи:

I. Балка на однородной полуплоскости под действием равномерно распределенной нагрузки q_0 .

Из формул (3.13), (3.7) и (3.8) имеем:

$$d_2^0 = q_0 \left(\frac{7}{4} \pi - \frac{2}{\pi} \frac{256}{25} \right); \quad d_4^0 = q_0 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{2}{\pi} \frac{512}{49 \cdot 25} \right),$$

$$d_i^0 = -q_0 \frac{2304}{\pi} \frac{i}{(i^2-9)^2 (i^2-1)^2}, \quad (i=6, 8, \dots, N).$$

Ограничиваясь в системе (3.12) двумя уравнениями с двумя неизвестными, получим

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda_0} + 0,77607 \right) B_2 - 0,051738 B_4 = -1,0212 q_0 \\ -0,10348 B_2 + \left(\frac{1}{\lambda_0} + 0,047035 \right) B_4 = 0,1266 q_0. \end{cases}$$

Определив отсюда B_2 и B_4 , на основании формул (3.3), (3.1) и (2.24), получим решение задачи:

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[2 - \frac{1,332\lambda_0^2 + 32,783\lambda_0}{\lambda_0^2 + 26,424\lambda_0 + 32,103} T_2(x) - \frac{0,238\lambda_0^2 - 4,065\lambda_0}{\lambda_0^2 + 26,424\lambda_0 + 32,103} T_4(x) \right]. \quad (4.1)$$

Для абсолютно жесткой балки ($\lambda_0 = 0$) получаем точное решение

$$p(x) = \frac{2q_0}{\pi\sqrt{1-x^2}}.$$

При $\lambda_0 \rightarrow \infty$ (абсолютно гибкая балка) имеем

$$p(x) = \frac{q_0}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[2 - 1,332T_2(x) - 0,238T_4(x) \right].$$

Но $\pi\sqrt{1-x^2} = 2 - 1,332T_2(x) - 0,267T_4(x) - \dots$. Поэтому $p(x) \simeq q_0$. Погрешность в этом случае, очевидно, будет тем большая, чем точки ближе к краям балки.

Для сравнения приведем решения, полученные другими авторами. П. И. Клубин [5] дает:

$$p(x) = \frac{q_0}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[2 - \frac{1,324\lambda_0^2 + 10,022\lambda_0}{\lambda_0^2 + 8,75\lambda_0 + 10} T_2(x) - \frac{0,183\lambda_0^2 - 1,424\lambda_0}{\lambda_0^2 + 8,75\lambda_0 + 10} T_4(x) \right]. \quad (4.2)$$

Согласно А. С. Сорокину [6]:

$$p(x) = \frac{q_0}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[2 - \frac{1,315\lambda_0}{\lambda_0 + 1,26} T_2(x) \right]. \quad (4.3)$$

Сравнение формул (4.1), (4.2) и (4.3) показывает, что результаты наши и указанных авторов практически совпадают.

II. Балка на однородной полуплоскости под действием сосредоточенной силы P , приложенной в ее середине.

В этом случае в формулах (2.21) и (3.7) следует положить

$$q(x) = \frac{1}{l} P\delta(x),$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака. Тогда формулы (3.13) дадут

$$d_i = \frac{1}{l} P \frac{12i}{(i^2 - 9)(i^2 - 1)} \left[\cos \frac{\pi}{2} i - \frac{48}{\pi} \frac{1 + (-1)^i}{(i^2 - 9)(i^2 - 1)} \right]. \quad (4.4)$$

Система уравнений (3.12) при $N = 4$ получит тот же вид, что и в примере № 1, но со свободными членами (4.4). Таким образом, решение этой задачи будет

$$p(x) = \frac{P}{\pi l \sqrt{1-x^2}} \left[1 - \lambda_0 \frac{1,967\lambda_0 + 53,258}{\lambda_0^2 + 26,424\lambda_0 + 32,103} T_2(x) + \lambda_0 \frac{2,562\lambda_0 + 10,404}{\lambda_0^2 + 26,424\lambda_0 + 32,103} T_4(x) \right]. \quad (4.5)$$

Полученный результат практически совпадает при $\lambda_0 < 1$ с решением А. С. Сорокина [6].

Приведенные примеры указывают на верность метода. Дальнейшие исследования задачи авторы предполагают провести на электронно-цифровой вычислительной машине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Шевляков, А. К. Приварников. До розрахунку шаруватих основ. «Прикладна механіка», т. VIII, вип. 2, 1962.
 2. В. М. Александров. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, т. 26, вип. 5, 1962.
 3. И. Я. Штаерман. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.
 4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1963.
 5. П. И. Клубин. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании. «Инж. сборник», т. 12, 1952.
 6. А. С. Сорокин. Расчет балочных плит на упругом основании. Сб. научн. трудов Днепропетровск. металлургическ. ин-та, вып. 33, 1955.
-

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

1. В межведомственном республиканском научно-техническом сборнике «Гидроаэромеханика» помещаются статьи, содержащие новые результаты теоретических и экспериментальных исследований в области газовой динамики, аэрогидромеханики, теплообмена, аэрогидроупругости и т. д.

2. Периодичность издания сборника — не реже двух-трех раз в год.

3. Объем статьи не должен превышать 10-12 страниц текста, напечатанного на машинке на одной странице стандартного листа (21 × 30 см) через два интервала. Статьи необходимо представлять в двух экземплярах.

4. Формулы и все обозначения вписывать от руки в два раза большими буквами против печатного текста, четко и разборчиво. Под прописными (большими) буквами одинакового со строчным начертания ставить простым карандашом две черточки. При разметке строчных (маленьких) букв две черточки ставить над буквой. Греческие буквы обводить красным карандашом, готические — синим. Индексы и степени располагать строго ниже или выше соответствующих им букв и отмечать знаками понижения или повышения. Подчиненные индексы отмечать вторыми соответствующими знаками.

5. Рекомендуются двойная нумерация формул: первая цифра обозначает номер параграфа, вторая (после точки) — номер формулы.

6. Чертежи и таблицы прилагать на отдельных листах, причем их место указывать в тексте статьи и на левом поле страницы. Чертежи, не более 4 штук, представлять тщательно выполненными черной тушью на кальке или на ватмане, но не на миллиметровке. Фото должны быть контрастными, черных тонов. Надписи на рисунках и графиках допускаются лишь те, без которых нельзя обойтись, все подробности выносить в подписи. Рисунки должны быть последовательно пронумерованы, без повторения номеров с литерами. Подписи к ним давать на отдельных страницах в конце рукописи.

7. Литература дается в конце статьи с сохранением такой последовательности: для книги — инициалы и фамилия автора, название книги, издательство, место и год издания; для журнала — инициалы и фамилия автора, название статьи (без кавычек), наименование журнала, том, выпуск, место, год издания. Не разрешается ссылаться на неопубликованные работы.

8. В конце статьи должны быть указаны имя, отчество и фамилия автора, его адрес и название организации, где проведена работа. К статье прилагается соответствующая документация.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Н. П. Белик, Н. М. Беляев, Г. С. Шандоров. Расчет процесса опорожнения газовой емкости через отверстие переменного сечения.	3
2. В. С. Гонткевич, А. В. Колодяжный. Исследование чисел Струхаля для тел различной формы в плоском потоке.	8
3. М. М. Назарчук. Об одном характерном свойстве профиля скоростей при течении газа в трубе.	15
4. Г. А. Ван Фо Фы, В. Г. Литвинов. О распределении скоростей и давлений в расплаве полимера, движущемся в круглом канале.	19
5. В. К. Рудаков. О неустановившейся безнапорной фильтрации в ограниченном неоднократном пласте при орошении.	26
6. В. А. Мурзин. Понятие о работоспособности потока газа и использовании его при анализе работы пневматических установок.	35
7. В. А. Махин, Н. П. Белик, Д. А. Косарев. К расчету теплопередачи в прямых ребрах переменной толщины.	43
8. А. Ф. Черныш. Переходные режимы системы гидромеханический комплекс: корпус судна — винт — двигатель и регулятор скорости судна.	47
9. И. А. Луковский. Определение гидродинамических характеристик возмущенного движения твердого тела с полостями, разделенными радиальными перегородками и частично заполненными жидкостью.	53
10. И. А. Луковский. Об одном приближенном методе определения гидродинамических коэффициентов управлений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью.	62
11. К. В. Красильников. Особенности малых нелинейных колебаний заземленных струн.	73
12. В. С. Губенко. Об одной динамической задаче.	78
13. В. И. Моссаковский, М. Т. Рыбка. Некоторые задачи теории упругости для неоднородной плоскости, ослабленной прямолинейной трещиной.	82
14. Ю. А. Наумов, Ю. А. Шевляков. К расчету балочных плит на многослойных основаниях.	90
От редколлегии.	97

Редактор *А. Г. Песчанская*
Техредактор *Л. Т. Момот*
Корректор *Г. И. Шинкаренко*

Сдано в набор 11/II 1965 г. Подписано к печати 2/VI 1965 г. БЦ 34155.
Формат 70×108^{1/16}. Объем 6,25 физ. печ. л. 8,5 усл. печ. л., 7,5 уч.-изд. л. Зак. 5-101.
Тираж 1000. Цена 53 коп. КРИ—вып. 5(130)—1965 г. п. 19. БЗ Укр 1965 г. П. 13.

Отпечатано с матриц Книжной фабрики им. Фрунзе в типографии № 16
Областного управления по печати. Харьков-3, Университетская, 16. Зак. 4075.

Цена 53 коп.