ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ НА ОСНОВЕ ПОНЯТИЯ СИММЕТРИИ

Ф. БАХМАН

ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ НА ОСНОВЕ ПОНЯТИЯ СИММЕТРИИ

Ф. БАХМАН

ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ НА ОСНОВЕ ПОНЯТИЯ СИММЕТРИИ

Перевод с немецкого
Р. И. ПИМЕНОВА

Под редакцией
И. М. ЯГЛОМА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

AUFBAU DER GEOMETRIE AUS DEM SPIEGELUNGSBEGRIFF

Eine Vorlesung

von

FRIEDRICH BACHMANN

Dr. Phil., O. Professor an der Universität Kiel

MIT 160 ABBILDUNGEN

Springer-Verlag
Berlin — Göttingen — Heidelberg
1959

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

Предлагаемая ныне вниманию русского читателя книга видного немецкого геометра, профессора университета в г. Киле и главы пользующейся почетной известностью кильской геометрической школы Фридриха Бахмана «Построение геометрии на основе понятия симметрии» представляет интерес в двух отношениях. Прежде всего это есть серьезное научное исследование, которое, бесспорно, можно считать крупнейшим событием в области оснований геометрии за целый ряд десятилетий. Но наряду с чисто научным ее значением книга Ф. Бахмана заслуживает большого внимания и с позиций методических (и методологических) — и об этой последней стороне дела следует, как нам кажется, сказать несколько подробнее.

Наше поколение математиков со студенческих лет сроднилось с мыслью о неразрывной связи вопросов обоснования математики со знаменитой книгой Давида Гильберта [1][1]), — и аксиоматика Гильберта зачастую воспринимается даже не как лучшая из всех возможных систем аксиоматического обоснования (евклидовой) геометрии, а чуть ли не как единственная такая система. Еще совсем недавно аксиоматику Гильберта (и только ее!) в обязательном порядке изучали на всех без исключения математических отделениях педагогических институтов и университетов страны — а для большинства университетов и пединститутов так обстоит дело и сегодня. Также и вопрос о неединственности евклидовой геометрии зачастую считают неразрывно связанным с гильбертовой аксиоматикой и возможностями ее модификации — и из одного недавно изданного школьного учебника геометрии читатель может узнать, что замена аксиомы о параллельных (гильбертовой) аксиоматики постулатом о существовании двух не пересекающих данную прямую a прямых, проходящих через не принадлежащую a точку A, приводит к неевклидовой геометрии Лобачевского, а замена этой же аксиомы утверждением об отсутствии (в плоскости) непересекающихся прямых — к неевклидовой геометрии Римана, хотя хорошо известно, что для обоснования (эллиптической) геометрии Римана гильбертова схема непригодна, и хотя в той же книге автор несколько ранее совершенно строго доказывает существование непересекающихся прямых без использования аксиомы о параллельных. А между тем предложенная Д. Гильбертом аксиоматика евклидовой геометрии, разумеется, ни в коем случае не является единственной возможной — и даже превосходство ее над всеми другими системами аксиоматического построения (евклидовой) геометрии довольно трудно обосновать серьезными аргументами.

Хорошо известно, что вопрос о возможности строго аксиоматического обоснования евклидовой геометрии впервые был серьезно поставлен в конце прошлого века. К периоду, совпадающему с рубежом между двумя столетиями, относятся первые успешные решения задачи о построении полной

[1]) Цифры в квадратных скобках отсылают читателя к списку литературы на стр. 364—375.

системы аксиом, из которых строго дедуктивным путем может быть выведен весь массив теорем евклидовой геометрии. При этом пути аксиоматического обоснования (евклидовой) геометрии были почти одновременно указаны несколькими учеными из разных стран, и предложенные ими системы аксиом не во всем, конечно, совпадали одна с другой, хотя все исследователи базировались на более ранних результатах Амадео Пеано, Морица Паша и других математиков, имена которых прочно вошли в историю учения об основаниях геометрии. Среди первых авторов, предложивших свои варианты аксиоматики евклидовой геометрии, заслуживают упоминания Пиери [1] (основными понятиями геометрии в схеме Пиери являются «точка» и «движение» [1])), Гильберт [1] (основными понятиями здесь — если ограничиться геометрией на плоскости — являются «точка», «прямая», «инцидентность» [2]), «между» и «конгруэнтность»), Каган [1] (основными понятиями здесь являются «точка», «расстояние» и «движение») и другие; предложенные этими учеными системы аксиом были равно достаточны для обоснования евклидовой геометрии. Не ставя своей целью дать полный исторический очерк учения об основаниях геометрии (см по этому поводу, например, цитируемую автором настоящей книги статью Фрейденталя [1], также, впрочем, трактующую историю оснований геометрии как прямой путь «от Евклида до Гильберта» [3])), мы остановимся здесь лишь на вопросе о причинах, приведших к частичной идентификации выражения «Основания геометрии» с единственным именем «Давид Гильберт» [4]), и на дальнейшей эволюции наших представлений об аксиоматике (евклидовой) геометрии.

Историю попыток строгого аксиоматического обоснования всей геометрии обычно справедливо начинают с евклидовских «Начал», усматривая в них исторически первый (или, во всяком случае, самый древний из дошедших до нас) опыт последовательно дедуктивного построения всей геометрии по указанной Аристотелем схеме, начинающейся со списка аксиом, на которых базируются все последующие умозаключения. Разумеется, с нашей сегодняшней точки зрения опыт этот следует признать весьма несовершенным — однако в свое время книга Евклида безусловно казалась вершиной науки, и влияние ее на всю последующую историю геометрии (или даже всей математики) трудно переоценить. При построении своей системы Евклид исходил из общих установок Аристотеля об «индуктивных» и «дедуктивных» («выводных») науках, а также из всей совокупности философских концепций последнего; это явственно сказалось как на трактовке вопросов, которые мы сегодня связываем с понятием «непрерывности», так и на определяемом метафизическими воззрениями Аристотеля стремлении к возможно более полному отказу от использования геометрических преобразований, в частности движений: критика логистов, ныне чаще всего связываемая с именем Зенона, вынудила Аристотеля к заключению о невозможности изучения «процессов» и необхо-

---

[1]) Идею о движении как об одном из основных (неопределяемых) понятий геометрии Пиери заимствовал у своего учителя А. Пеано.

[2]) Гильберт не использовал самого этого термина; однако соответствующее понятие играло в его построениях основную роль.

[3]) Это связано с происхождением указанной статьи, написанной как исторический комментарий к появлению 8-го издания гильбертовых «Оснований геометрии». (См. также статью Фрейденталя [2], в известном смысле служащую продолжением его статьи [1].)

[4]) Разумеется, сказанное относится лишь к учебной, но не к научной литературе (в которой в последние годы наблюдается пробуждение интереса даже к достаточно экзотической аксиоматике Пиери [2], в которой единственными неопределяемыми понятиями геометрии являются «точка» и «равнобедренный треугольник», — см., например, Бет и Тарский [1], Генкин [1]; ср также Скотт [1]).

димости ограничиться рассмотрением (застывших) «состояний». При этом если в области связанных с «непрерывностью» понятий Евклид, бесспорно, полностью стоял на уровне доступных для науки того времени представлений (относящееся к этому кругу идей евклидовское учение об «отношении отрезков» следует признать одной из самых значительных удач «Начал»!), то в своем отказе от использования движений он сделал, в некотором отношении, шаг назад, поскольку в греческой геометрии движения, видимо, составляли одно из мощнейших орудий геометрического анализа еще во времена Фалеса Милетского.

Со времени Евклида прошло несколько тысячелетий — однако влияние этой древней книги явственно ощущается еще и в наши дни Мы давно отказались от метафизики Аристотеля — но по-прежнему говорим «геометрическое место» точек, как бы разделяя тем самым (бесконечное) множество точек и «место» их расположения. Также и полный отказ Гильберта от самого понятия движения следует в первую очередь объяснить стремлением к уточнению именно евклидовского изложения — изложения, пропитанного определенным недоверием к «процессам», к слову сказать, еще со времен Ньютона и Лейбница являющимся для математической науки основным объектом изучения. Именно близость гильбертовых «Оснований геометрии» к евклидовским «Началам» определила колоссальную популярность сочинения Гильберта; если же прибавить сюда выдающиеся научные и методические достоинства «Оснований геометрии», возвышающие замечательное творение Гильберта над всеми другими близкими к этой книге по времени сочинениями на сходную тему, и учесть огромный научный авторитет автора «Оснований геометрии» (в данном случае еще, так сказать, «помноженный» на непререкаемый авторитет Евклида), то станет ясно, почему ни один из современных Гильберту вариантов аксиоматики (евклидовой) геометрии не смог составить серьезной конкуренции книге Гильберта [1].

Впрочем, последнее утверждение нуждается в одном уточнении. существует один вариант аксиоматики, занимающий в учебной литературе по геометрии довольно заметное место. Мы говорим здесь об известной аксиоматике Фридриха Шура [1], с самого своего появления вызвавшей большой интерес Идея Шура состояла в замене гильбертовых аксиом конгруэнтности аксиомами движения, в значительной степени идущими еще от А. Пеано и М. Пиери. При этом оказалось возможным подвергнуть схему Гильберта лишь частичной перестройке, связанной с изменением 3-й группы аксиом, сохранив тем самым принадлежащее Гильберту чрезвычайно удачное членение всей системы аксиом на отдельные части, отвечающие тем или иным категориям свойств евклидовой плоскости или пространства; таким образом, здесь удается, не отказываясь ни от одного из главных достоинств построений Гильберта, ввести в число основных понятий *движения*, выдающееся значение которых для обоснования (евклидовой) геометрии было раскрыто еще Клейном [2]. Схема Шура неоднократно освещалась в нашей учебной и научно-популярной литературе (см., например, Делоне [1]); поэтому вряд ли уместно останавливаться здесь на ней подробно; хочется только подчеркнуть значение соответствующих идей, которые можно считать началом того пути, конечным итогом которого явилась настоящая книга.

Дальнейшая эволюция вопроса об основаниях геометрии, завершившаяся развернутыми построениями Бахмана, связана с основной ролью понятия (осевой и центральной) *симметрии*. Исторически первыми на этом пути являются, видимо, неоднократно цитируемые автором настоящей книги исследования Г. Винера [1], относящиеся еще к «догильбертовому» периоду: в этих работах были внимательно проанализированы свойства (евклидовских) симметрий, некоторые из которых были приняты впоследствии за аксиомы. Идея о возможности объявить само понятие (осевой) симметрии одним из неопределяемых понятий, косвенным образом описываемых системой аксиом, впервые, как будто, была указана Виллерсом [1], предложившим заменить «аксиомы движения» Шура следующими «аксиомами симметрии»:

C_1. *Каждой точке A, принадлежащей одной из двух полуплоскостей, на которые данная прямая a делит плоскость, отвечает точка A′ другой полуплоскости, называемая «симметричной A относительно a».*

C_2. *Указанная в аксиоме C_1 точка A единственна.*

C_3. *Если точка A инцидентна прямой a, то A′ совпадает с A.*

Далее условимся «движениями» называть произведение (т. е. результат последовательного осуществления) конечного числа (осевых) симметрий.

C_4. *Если некоторое движение переводит точку A плоскости в ту же точку, а точку B — в точку B′ такую, что B и B′ принадлежат одному лучу с началом A, то для любой третьей точки C ее образ C′ при том же движении либо совпадает с C, либо симметричен C относительно определяемой этим лучом прямой a.*

C_5. *Для каждых двух точек A и B существует такая прямая a, что B симметрична A относительно a.*

C_6. *Если k и l — два выходящих из одной точки луча, то существует такая прямая a, что каждая точка луча k симметрична относительно a некоторой точке луча l.*

Употребление в этих аксиомах терминов «полуплоскость», «луч», «инцидентность» и т. д. указывает на то, что они рассматриваются как следующие за аксиомами 1-й и 2-й группы аксиоматики Гильберта (за «аксиомами инцидентности» и «аксиомами порядка»); таким образом, предложение Виллерса не идет далее того, чтобы модифицировать соответствующим образом аксиоматику Гильберта или Шура, заменив ее новой системой аксиом, эквивалентной двум первым системам. Сам Виллерс рассматривал свою работу [1] как чисто методическую, считая, что речь в ней идет лишь о некотором варианте изложения евклидовой геометрии; также и в дальнейшем эта работа цитировалась в первую очередь в сочинениях методического плана, из числа которых назовем здесь переведенную и на русский язык книгу Швана [1]. Однако дальнейшее развитие идеи обоснования геометрии на основе понятия симметрии привело, как об этом свидетельствует настоящее сочинение, к совершенно новым концепциям, весьма глубоко отличающимся от установок Гильберта и Шура.

Мы не будем так же подробно характеризовать последующие этапы того пути, который привел в конце концов к составляющим содержание настоящей книги развернутым построениям, характеризующимся тем, что здесь (осевые и центральные) симметрии рассматриваются не как «неопределяемые отношения», связывающие являющиеся основным «материалом» геометрии точки и прямые, а являются самим «материалом» геометрии, заменяющим точки и прямые (с которыми эти симметрии в известной мере отождествляются), — это сделал в тексте книги сам автор. Здесь будет уместно лишь отметить значение предшествующих появлению книги Бахмана работ датчанина Юлиуса Йельмслева (Петерсена) и немца Арнольда Шмидта, роль которых достаточно полно охарактеризована в тех разделах этой книги, где говорится об истории развиваемых здесь идей, а также упомянуть вышедшую в 1933 г. книгу рано умершего гамбургского геометра Герхардта Томсена [3], о которой мы еще скажем ниже.

Таким образом, настоящее сочинение представляет собой новый вариант аксиоматического построения евклидовой геометрии и некоторых других родственных ей геометрий, весьма существенно отличающийся от классической схемы Гильберта. В чисто научном отношении книга Бахмана интересна прежде всего тем, что новые подходы к геометрии Евклида неизбежно ведут к включению в круг интересов геометров совершенно новых геометрических систем, представляющих собой достойный объект для изучения. Мы уже отмечали, что аксиоматика Гильберта легко может быть видоизменена так, чтобы она характеризовала (гиперболическую) геометрию Лобачевского, но не может быть модифицирована так, чтобы оказалось возможным охватить и (эллиптическую) геометрию Римана. В противоположность этому аксиоматика Бахмана легко трансформируется так, чтобы с ее помощью могли быть охарактеризованы и геометрия Евклида, и геометрия Лобачевского, и геометрия Римана — этому специально посвящены главы IV, V и VI настоящего сочинения[1]). Но, более того, схема Бахмана позволяет охарактеризовать и более общий геометрический образ, которому автор, следуя терминологии Бойяи [1], дал название «абсолютной (метрической) геометрии». Терминология Бойяи представляется здесь автору уместной, видимо, потому, что, подобно «абсолютной геометрии Бойяи», также и «абсолютная геометрия Бахмана» не является единственной в том смысле, что соответствующая система аксиом не обладает свойством полноты; кроме того, развиваемая здесь геометрия, подобно «абсолютной геометрии Бойяи», «охватывает» классическую геометрию Евклида (см. «дерево геометрий» на стр. 350). Однако использование одного и того же термина «абсолютная геометрия» в двух совершенно различных смыслах является, разумеется, весьма нежелательным; кроме того, «абсолютную геометрию» Бахмана, конечно, никак нельзя считать всеобъемлющей (что оправдало бы слово «абсолютная»), поскольку она, скажем, охватывает только небольшое число из известных «проективных метрик» Кэли и Клейна (Клейн [1], Саммервиль [1]; см. также Яглом, Розенфельд и Ясинская [1]; по поводу аксиоматической трактовки проективных метрик см. Пименов [1], [2][2])). Поэтому мы позволим себе выразить здесь надежду, что используемый автором книги термин «абсолютная геометрия» окажется недолговечным; гораздо более удачным (и справедливым) кажется нам наименование «(метрическая) плоскость Бахмана»[3]). При этом научная разработка связанных с аксиоматикой Бахмана вопросов приводит к содержательным алгебраическим задачам, достаточно подробно охарактеризованным в тексте книги и в Дополнении к ней и могущих, как нам кажется, заинтересовать многих математиков — как геометров, так и алгебраистов.

Перейдем теперь к вопросу о методическом значении развиваемых здесь построений. Заметим прежде всего, что научное значение идущей от Евклида системы изложения геометрии вряд ли можно сегодня оценить особенно высоко: трудно указать, где в «живой» науке используются в настоящее время рассуждения «евклидовского» типа, базирующиеся на рассмотрении цепочек равных друг другу треугольников — треугольник ABC равен треугольнику DEF, ибо ...; поэтому треугольник UVW равен треугольнику XYZ, поскольку ... и т. д. Напротив, роль (понимаемых в широком смысле) соображений симметрии в последние годы чрезвычайно возросла: достаточно указать на идущую от знаменитых Германа Вейля и Эйгена Вигнера идею использования соображений симметрии для классификации элементарных частиц современной физики и изучения их свойств (см., например, вводную статью автора настоящего предисловия к книге Вейля [2]). Поэтому более широкое использование симметрий в самых основаниях элементарной геометрии представляется безусловно оправданным.

---

[1]) В последние годы предпринимались также попытки приспособления схемы Бахмана к изучению псевдоевклидовой геометрии Минковского (см. Вольф [2]), а также аффинной геометрии (Гюнтер [1]).

[2]) См. также статью Пименова [3], посвященную изучению групп движений, связанных с тремя метризациями аффинной плоскости по схеме Кэли — Клейна.

[3]) В последние годы появились также варианты аксиоматического изучения пространственной геометрии на базе идей Бахмана (см. Аренс [1], Нольте [1]).

Другим серьезнейшим достоинством аксиоматики Бахмана является то, что она чрезвычайно «алгебраична», так как с самого начала приводит к некоторому «исчислению» (вернее сказать — начинается с «исчисления симметрий»), дающему изящный алгоритм «вычислительного» доказательства геометрических теорем (см. по этому поводу вводную гл. I настоящей книги). Но ведь дух современной математики в известной степени как раз и связан с ее «алгебраизацией», с выдвижением на передний план разнообразных алгебраических структур (к числу которых с полным правом может быть отнесена и «плоскость Бахмана») — поэтому алгебраический характер аксиоматики Бахмана заметно повышает ее методическую поучительность. Менее значительное педагогическое значение имеет широкая возможность модификации построенной по схеме Бахмана евклидовой геометрии, близость ее к иным «не евклидовым» геометриям, в том числе столь важным неевклидовым системам, как гиперболическая и эллиптическая геометрия (об этом мы уже говорили выше); однако и это обстоятельство должно учитываться при обсуждении вопроса о целесообразности популяризации изложенных в настоящей книге идей.

Все сказанное выше с неизбежностью привело к попыткам использования идей Бахмана в непосредственном преподавании. Одним из первых учебных изложений геометрии, построенных по этой схеме, является книга известного швейцарского геометра, бессменного секретаря существующей при Международной математической ассоциации Международной комиссии по математическому образованию (Comission Internationale de l'Enseignement Mathématique, сокращенно CIEM) Андре Дельсерта [1] (см. также [2]); впрочем, самую первую попытку построения элементарной геометрии на базе понятия симметрии представляет собой интересная книга Томсена [3], о которой мы уже упоминали выше. Аксиоматика Дельсерта несколько отлична от той, которая строится в настоящей книге; однако глубокая внутренняя связь ее со схемой Бахмана несомненна. Так, например, основными объектами геометрии у Дельсерта являются лишь осевые (но не центральные!) симметрии; эти симметрии отождествляются с прямыми линиями, а точки и «направления» (пучки параллельных прямых) одновременно вводятся в рассмотрение как «пучки» симметрий, где «пучок» $[a, b]$ — это порожденное симметриями a и b множество таких симметрий u, что aub — тоже симметрия. Далее вводится различие между «пучками 1-го рода» (точками) и «пучками 2-го рода» (направлениями), определяемое тем, что в «пучке 1-го рода» имеется симметрия (прямая), принадлежащая любому другому пучку, а для «пучка 2-го рода» это утверждение неверно; при этом, скажем, (евклидова) аксиома параллельности формулируется как утверждение о существовании для каждой осевой симметрии (т. е. прямой) a включающего a «пучка 2-го рода» (направления).

Пропаганде педагогического значения идей Бахмана было посвящено темпераментное выступление Дельсерта [3] на проведенном под эгидой CIEM в 1965 г. в Эстернахе (Люксембург) симпозиуме по вопросам преподавания математики. Другими активными сторонниками использования построений Бахмана в учебных целях являются известный немецкий математик и педагог Ханфрид Ленц (см., в частности, его интересную книгу [6]) и швейцарский геометр Макс Егер [1]—[4]. Так сказать, «методической разработкой» путей применения идей Бахмана в школьном преподавании можно назвать напечатанную в немецком журнале Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht («Преподавание математики и естествознания») статью в двух частях немецкого педагога Шнейдера [1]. Но в первую очередь читателю, заинтересованному в «педагогических применениях» составляющих содержание настоящей книги идей, можно порекомендовать напечатанную в том же журнале Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht статью Бахмана «Точки, векторы, симметрии» [9] и статью

Бахмана, Вольфа и Бауэра «Симметрии» [1], включенную в издаваемый под общим руководством известного немецкого математика и педагога Г. Бенке «немецкий вариант» Энциклопедии элементарной математики (а также книгу Дельсерта [1]).

Таким образом, возглавляемое Бахманом направление в области оснований геометрии культивирует совершенно новый подход к аксиоматике евклидовой плоскости; этот подход имеет серьезное педагогическое значение.

Необходимо, однако, отметить, что наряду с аксиоматическими системами Гильберта и Бахмана существует также и совершенно иной путь строго дедуктивного построения евклидовой геометрии, имеющий чрезвычайно серьезное педагогическое значение. Я имею здесь в виду так называемое *векторное* построение геометрии, впервые проведенное в знаменитой книге Германа Вейля «Пространство, время, материя» [1] и широко известное всем математикам. Этот путь построения связывает евклидово пространство с иной алгебраической структурой — так называемым *векторным пространством*, для элементов которого, называемых *векторами*, определены операции сложения и умножения на число с обычными свойствами (по сложению векторы образуют коммутативную группу; умножение на число обладает двумя дистрибутивными свойствами: $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$ и $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$, где буквами жирного шрифта, как обычно, обозначены векторы, а греческими буквами — числа; ассоциативным свойством: $\alpha(\beta\boldsymbol{a})=(\alpha\beta)\boldsymbol{a}$; таково, что $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ для всех векторов $\boldsymbol{a}$). Так называемые *аксиомы откладывания векторов* (для каждых двух точек A и B определен единственный вектор $\overline{AB}$, причем для каждой точки A и каждого вектора $\boldsymbol{a}$ существует единственная точка B такая, что $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$; кроме того, для любых трех точек A, B и C имеет место соотношение $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$) вводят в рассмотрение наряду с векторами еще одно «неопределяемое понятие» — *точку*; после этого, чтобы превратить полученное множество точек в евклидово пространство (той или иной размерности, определяемой «аксиомой размерности» векторного пространства), достаточно условиться, что каждым двум векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отвечает их «скалярное произведение» — такое число $\boldsymbol{ab}$, что $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$; $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$; $(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\alpha(\boldsymbol{ab})$; число $\boldsymbol{aa}(=\boldsymbol{a}^2)$ неотрицательно и равно нулю лишь при $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — вектор, прибавление которого не меняет ни одного вектора, — и определить «расстояние» d_{AB} между двумя точками A и B как $\sqrt{\overline{AB}^2}$.

Огромная роль векторных пространств в самой математике и во всех буквально разделах науки, использующих математические методы, делает этот путь построения геометрии чрезвычайно важным; легкость «арифметизации» векторного пространства с помощью введения координат и возможность использовать здесь с самого начала развернутый аппарат векторного исчисления делают его также одним из самых простых. В связи с этим в последнее время множатся предложения более широкого использования аксиоматики Вейля и в преподавании, в частности, в преподавании в средней школе; здесь можно сослаться хотя бы на темпераментно написанную книгу знаменитого французского математика Жана Дьёдонне «Линейная алгебра и элементарная геометрия» [1], утверждающую мысль о полном совпадении элементарной геометрии с линейной алгеброй. Этот путь поддерживается также и «бельгийской школой» в области методики математики (см., например, Жорж Папи [1], Вили Серве [1]); так, например, содержащий 442 стр. второй том многотомного учебника Ж. Папи для средней школы «Современная математика» [2] весь посвящен построению понятия «векторная плоскость», на базе чего в третьем томе, имеющем подзаголовок «Евклид» (этот том еще не вышел из печати), и в шестом томе, имеющем подзаголовок «Планиметрия» (этот том содержит 277 стр. и посвящен Жану Дьёдонне), строится евклидова геометрия на плоскости.

В современной научной и методической литературе можно найти и иные построения евклидовой геометрии (см., например, книгу известного французского математика и педагога Густава Шоке [1], в которой можно обнаружить следы влияния как построений Вейля, так и концепций Бахмана); однако основными на сегодняшний день, бесспорно, являются три пути построения геометрии, идущие от Гильберта, Вейля и Бахмана, — и мне кажется, что преподаватель математики в средней и в высшей школе, бесспорно, должен быть знаком со всеми этими путями.

В заключение — несколько слов о лежащей перед вами книге. Ее оригинал восходит к 1958 г. или даже к еще более раннему времени (ср. подстрочное примечание автора на стр. 364) [1]); при редактировании перевода мы не ставили своей целью довести уровень изложения до всех достижений 60-х годов. Приложенная к переводу статья Ф. Бахмана «Модели абсолютной геометрии», напечатанная в 1964 г. в журнале Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, дает хорошее представление о дальнейшем развитии теории; однако читателю, пожелавшему ознакомиться с сегодняшним положением дела в той области, которой посвящена эта книга, неизбежно придется обратиться к последним статьям Г. Вольфа и особенно Р. Лингенберга (см. приложенную к книге библиографию, пополненную редактором перевода; прибавленные при переводе названия отмечены звездочками). К сожалению, не полная адекватность русского и немецкого языка не позволила в полной мере сохранить в переводе играющее заметную роль в изложении автора противопоставление рядовых теорем и особо важных предложений, являющихся фундаментом всей теории; принятое нами различие между арабской и римской нумерацией теорем акцентирует это противопоставление гораздо слабее, чем различие между «обыденным» немецким словом der Satz и звучащим гораздо торжественнее греческим термином das Theorem.

Еще более значительным представляется следующее различие между переводом и оригиналом книги. Ф. Бахман принципиально не нумерует в своей книге чертежи и нигде не ссылается на них. Это связано со стремлением подчеркнуть независимость развиваемых здесь построений от элементарно-геометрической интуиции: чертежи помогают восприятию текста, однако, строго говоря, они не необходимы для его понимания и даже затуманивают «абстрактный» дух развиваемой геометрической системы, не связанной ни с какими наглядными представлениями. Но так как прямые ссылки на чертеж все же несколько облегчают, как нам кажется, чтение книги, то мы решили от них не отказываться; надеемся, что автор книги и те из читателей, которые не нуждаются в подобного рода подсказках, простят нам эту маленькую вольность.

И. М. Яглом

---

[1]) В письме к автору настоящих строк Ф. Бахман сообщил, что он работает сейчас над подготовкой нового переработанного и дополненного варианта своего сочинения; однако это будет, видимо, совершенно новая книга.

КУРТУ РАЙДЕМАЙСТЕРУ
посвящается

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В этой книге проводится такое построение *плоской метрической геометрии*, при котором последовательно применяются *симметрии* и порожденная симметриями *группа движений*.

Для обычной евклидовой плоскости и классических неевклидовых плоскостей легко можно установить, что точки и прямые взаимно однозначно отвечают симметриям и осевым симметриям, т. е. инволютивным элементам группы движений *). Такие геометрические отношения, как инцидентность точек и прямых и ортогональность прямых, могут быть выражены в виде теоретико-групповых отношений между соответствующими симметриями. Следовательно, геометрические теоремы можно перевести на язык предложений, трактующих о симметриях и произведениях симметрий.

Затем сами симметрии делаются предметом геометрического рассмотрения, и в группе движений устанавливается *«геометрия симметрий»*. Как только предметом геометрии становятся сами симметрии, играющие роль новых «точек» и «прямых», для них посредством теоретико-групповых отношений так определяются «инцидентность» и «ортогональность», что новый объект явится точным образом исходных точек и прямых со связывающими их отношениями инцидентности, ортогональности и т. д. Но поскольку мы теперь имеем дело с группой, в нашем распоряжении оказывается аппарат, позволяющий *проводить вычисления, относящиеся к геометрическим объектам*, т. е. мы получаем вспомогательное методическое средство для проведения геометрических доказательств **)

Все эти соображения мы хотим использовать при построении плоской метрической геометрии. Мы начнем аксиоматическое построение с абстрактных теоретико-групповых рассмотрений, а потом поступим следующим образом В качестве *аксиом* мы постулируем некоторые свойства инволютивных элементов группы и рассмотрим те группы, порожденные инволютивными

*) Элемент группы называется *инволютивным*, если он равен своему обратному, но отличен от единицы.

**) Такое исчисление геометрических объектов, не зависящее от понятия числа и от выбора системы координат, можно рассматривать как шаг в направлении реализации поставленных Лейбницем условий, характеризующих «чисто геометрическое» исчисление, которое он имел в виду противопоставить аналитической геометрии Декарта. [Другой реализацией «геометрического исчисления» Лейбница обычно считают векторное исчисление, которое, однако, не совсем удовлетворяет требованиям Лейбница в силу зависимости радиусов-векторов точек от выбора начала отсчета векторов. — [*Прим. ред.*]

элементами, для которых выполняются эти свойства. Потом мы определим *метрическую плоскость*, точками и прямыми которой являются инволютивные элементы группы, а геометрические отношения инцидентности и ортогональности задаются теоретико-групповыми отношениями. Аксиомы, сформулированные на языке теории групп, по существу представляют собой простые геометрические утверждения о точках и прямых метрической плоскости. В результате при выводе теорем из аксиом можно пользоваться преимуществами теоретико-группового исчисления, не теряя путеводной нити наглядности.

Заслуживает внимания то, как мало нам потребуется аксиом. Это говорит о том, что метрическая плоскость, определенная аксиоматически заданной группой, имеет довольно общую природу. Она не обязана быть упорядочиваемой (и тем более непрерывной). В метрической плоскости не обязана иметь место свободная подвижность. Существуют метрические плоскости с конечным числом точек и прямых. Понятие метрической плоскости не содержит никаких утверждений о параллельности, т. е. ответов на вопросы о пересечении или непересечении прямых. Плоская метрическая геометрия, развиваемая нами, содержит в качестве частных случаев плоские евклидову, гиперболическую и эллиптическую геометрии, а поэтому, следуя Я. Бойяи, ее можно назвать также *плоской абсолютной геометрией.*

В первой, вводной главе книги на базе материала элементарной геометрии разъясняется принятая в этой книге точка зрения, лишь весьма конспективно охарактеризованная в настоящем предисловии, § 1 содержит обзор известных свойств симметрий (на обычной евклидовой плоскости). Он носит пропедевтический характер и вместе с § 2, в котором излагаются общие сведения о неевклидовых плоскостях, может быть пропущен подготовленным читателем. Однако «элементарное» введение понятия метрической плоскости во второй части § 2 и проведенное там доказательство того, что метрическая плоскость — если только перейти к рассмотрению симметрий — может быть полностью описана в терминах группы движений, может представить известный интерес как первый шаг в систематическом развитии идей этой книги.

Со второй главы, а именно с § 3, имеющего фундаментальное значение для всего последующего, начинается *аксиоматическое построение.* В § 4 посредством исчисления симметрий доказываются теоремы плоской метрической геометрии (теорема о высотах и т. п.). Обоснование плоской метрической геометрии завершается доказанной в § 6 *основной теоремой*, гласящей, что всякая метрическая плоскость может быть расширена до проективно-метрической плоскости, а ее группа движений — до группы движений этой проективно-метрической плоскости. В § 5 собраны нужные для доказательства основной теоремы понятия и предложения плоской проективной геометрии.

В силу основной теоремы для классификации и изучения метрических плоскостей можно использовать общие идеи о *проективных метриках*, восходящие к Кэли и Клейну. В частности, появляется возможность исследовать метрическую плоскость алгебраическими методами аналитической геометрии. В третьей главе группа движений проективно-метрической плоскости алгебраически трактуется как ортогональная группа метрического векторного пространства. Кроме того, в соответствии с проводимой в книге точкой зрения эти «классические группы», рассматриваемые как абстрактные группы, порожденные своими инволютивными элементами, характеризуются здесь теоретико-групповыми соотношениями, которым удовлетворяют инволютивные элементы групп.

В четвертой, пятой и шестой главах трактуются порознь *плоские евклидовы, гиперболические* и *эллиптические геометрии*, которые в рамках плоской абсолютной геометрии должны задаваться дополнительными аксиомами. Здесь же каждая из этих геометрий строится самостоятельно, причем система аксиом для каждой из них оказывается в чем-то проще общей. В четвертой главе на первом плане стоит вопрос об особенностях исчисления симметрий в евклидовом случае. В пятой главе дается самостоятельное обоснование гиперболической геометрии, основная идея которого заключается в применении исчисления концов*). Шестая глава посвящена эллиптической геометрии, этому простейшему из всех частных случаев плоских метрических геометрий. В этой главе в качестве дополнительного вспомогательного аппарата вводится групповое пространство, и этим геометрия симметрий пополняется до геометрии движений.

Евклидовы, гиперболические и эллиптические плоскости ни в коей мере не исчерпывают всех метрических плоскостей. Основная теорема приводит к обратной проблеме: как определить в проективно-метрической плоскости (заданной, например, аналитически) те *подплоскости*, которые являются метрическими плоскостями; решив ее, мы получили бы возможность обозреть все метрические плоскости. Однако на этот вопрос до сих пор нет общего ответа. В Добавлении трактуются некоторые относящиеся к этому кругу идей задачи и приводятся частные результаты и примеры.

Основополагающие идеи и методы этой работы восходят к Ю. Йельмслеву**), который систематически использовал нечто вроде «исчисления симметрий».

За привлечение интереса к этим проблемам я благодарен К. Райдемайстеру, который в трудцатых годах дал новый толчок развитию плоской метрической геометрии. Степень общности аксиоматического подхода, а также используемая в шестой главе мысль о применении группового пространства для аксиоматического построения плоской метрической геометрии в эллиптическом случае восходят к Райдемайстеру. Ему я посвящаю эту книгу — в память о многих беседах, которые мы вели после того, как я в 1935 г. переехал в Марбург (в этих беседах я почерпнул многие идеи об основаниях

*) Ср. Гильберт [2]. (*Прим. ред.*)

**) Дальнейшие исторические сведения см. в п. 3 § 2.

евклидовой и неевклидовых геометрий), в память о тех проблемах, которые Райдемайстер передо мной поставил, и о том внимании, которое он мне оказывал в годы нашего совместного пребывания в Марбурге.

Далее, я чувствую себя лично обязанным Арнольду Шмидту. Он первый сформулировал чисто теоретико-групповые аксиомы плоской абсолютной геометрии. Его система аксиом (которую я использую в сокращенной редакции) принимает понятие симметрии в качестве исходного понятия абсолютной геометрии. Далее следует указать, что Арнольд Шмидт ввел в число аксиом *теорему о трех симметриях*, которая, с одной стороны, является непосредственно ясным геометрическим высказыванием, а с другой, как стало ясно уже из исследований Гессенберга и Йельмслева, имеет первостепенное значение для операций с симметриями.

Из слушателей моего курса, который я в прошлом неоднократно читал в Кильском университете, многие занялись дальнейшим развитием этих идей. Среди них были Аренс, Беккер-Берке, Бергау, Бочек, Лингенберг, обработавший записи лекций зимнего семестра 1952/53 г., и Вольф, прочитавший корректуру этой книги. Вольф высказал при этом ряд критических замечаний и предложений по улучшению формулировок.

Корректуру читали также Бэр, Дитер, Карцель и Шютте, внесшие ряд улучшений. В частности, очень много замечаний и предложений сделал Р. Бэр.

Задачи проверены Дитером и Вольфом. Они же взяли на себя труд составить указатель. В составлении рисунков сотрудничали Диббери, Беккер-Берке и Вольф.

Всем названным лицам, а также издателям серии*) и издательству Шпрингер я выражаю свою благодарность.

Надеюсь, что мой курс, предлагаемый теперь в виде книги, будет способствовать той цели, к которой были устремлены ведшиеся в этой области работы последнего десятилетия: построению метрической геометрии и установлению ее связей с другими разделами современной математики.

Ле Дьяблере, октябрь 1958 *Ф. Бахман*

*) В немецком оригинале книга вышла в свет в знаменитой серии «Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften» («Желтая серия» издательства Шпрингер), основанной Р. Курантом непосредственно после первой мировой войны. (*Прим. ред.*)

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Симметрии на евклидовой плоскости

Рассмотрим обычную евклидову плоскость. *Движениями* евклидовой плоскости называют взаимно однозначные отображения множеств точек и прямых на себя, сохраняющие отношения инцидентности и порядка и переводящие отрезки и углы в конгруэнтные отрезки и углы. Если принять суперпозицию движений за групповую операцию (умножение движений), то мы придем к группе движений, в которой роль единицы играет тождественное преобразование 1.

Если движение α переводит точку A в точку B (или прямую a в прямую b), то мы пишем $A\alpha=B$ ($a\alpha=b$). Точка A, для которой $A\alpha=A$, называется *неподвижной точкой*, а прямая a, для которой $a\alpha=a$, — *неподвижной прямой* движения α.

Движение α называется *инволютивным*, если оно совпадает со своим обратным α^{-1}, но отлично от тождественного отображения, т. е. $\alpha=\alpha^{-1}$ и $\alpha\neq 1$. Инволютивное движение меняет местами точку и ее образ, прямую и ее образ: из $A\alpha=B$ следует $B\alpha=A$; из $a\alpha=b$ следует $b\alpha=a$.

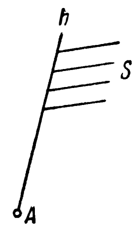


Рис. 1.

В рассуждениях этого вводного параграфа мы опираемся на школьный курс евклидовой планиметрии*). В частности, мы считаем известными следующие простые факты о существовании и однозначности движений:

1. Для всякой прямой g существует *симметрия относительно прямой* g, т. е. инволютивное движение, при котором все точки прямой g являются неподвижными точками.

2. Для всякой точки P существует *симметрия относительно точки* P, т. е. инволютивное движение, при котором все прямые, проходящие через точку P, являются неподвижными.

---

*) От аксиоматической трактовки мы в этом параграфе воздерживаемся. При желании можно исходить из гильбертовых аксиом инцидентности, порядка, конгруэнтности и параллельности, справедливых для евклидовой плоскости. Утверждения 1—3 являются следствиями трех первых групп аксиом и не зависят от аксиомы параллельности.

3. («Жесткость».) Если h — луч, исходящий из точки A, и S — полуплоскость, ограниченная прямой, несущей луч h (рис. 1), а h' — луч, исходящий из точки A', и S' — полуплоскость, ограниченная прямой, несущей луч h', то не существует двух разных движений, которые переводили бы A в A', h в h' и S в S'.

Полуплоскость, ограниченную прямой, несущей заданный луч, т. е. каждую из двух полуплоскостей, на которую прямая разбивает плоскость, иногда называют *стороной* этой прямой (луча).

1. Инволютивные движения. В силу жесткости могут существовать только два движения, переводящие луч h прямой g в себя: одно с сохранением сторон луча h (прямой g), а другое — с изменением их. Так как существуют и тождественное движение, и симметрия относительно прямой g, причем каждое из них оставляет на месте все точки прямой g, то первое из указанных движений должно быть тождеством, а второе — симметрией относительно прямой g (*осевой симметрией с осью* g). Мы видим, что существует единственная симметрия относительно данной прямой.

Симметрию относительно прямой g мы обозначим через σ_g. Неподвижные точки симметрии σ_g — это только точки прямой g, так как полуплоскости, определяемые g, при симметрии меняются местами. Так как прямая, перпендикулярная g, пересекает g в некоторой неподвижной точке и отношение перпендикулярности прямых сохраняется каждым движением, то прямые, перпендикулярные g, являются неподвижными прямыми симметрии σ_g. Но через всякую точку, не принадлежащую прямой g, проходит только одна неподвижная прямая (ибо сама эта точка не неподвижна); поэтому единственными неподвижными прямыми движения σ_g являются сама прямая g и прямые, перпендикулярные g.

Пусть теперь α — произвольное инволютивное движение. Так как α меняет местами каждую точку A и ее образ $A^*=A\alpha$, то соединяющая их прямая (A, A^*) (при $A \neq A^*$) переходит в себя, а значит, является неподвижной прямой движения α. Так как каждое движение переводит середину отрезка в середину преобразованного отрезка, то середина F отрезка AA^* (*средняя точка* для точек A и A^*, как будем мы говорить) также является неподвижной точкой. Следовательно, α переводит исходящий из F луч $F(A)$, содержащий точку A, в противоположный луч $F(A^*)$.

Теперь либо в множестве средних точек всех пар точек A, A^* есть хотя бы две различные, либо таких точек нет. В первом случае обозначим эти точки через F_1 и F_2. Тогда движение

α переводит луч $F_1(F_2)$ в себя, т. е. по сказанному выше является симметрией относительно прямой (F_1, F_2). Эта прямая является общей медиатрисой *) всех пар точек A, A^*.

Во втором случае есть только одна точка F, являющаяся общей средней точкой для всех пар точек A, A^*. Тогда движение α является симметрией относительно точки F (иначе — *центральной симметрией с центром* F). Нетрудно видеть также, что существует единственная симметрия относительно данной точки.

Объединяя все сказанное выше, заключаем, что справедлива

Теорема 1. *Всякое инволютивное движение есть либо симметрия относительно точки, либо симметрия относительно прямой.*

Симметрию относительно точки P обозначаем через σ_P. Неподвижная точка движения σ_P — это только точка P. Неподвижные прямые движения σ_P — только прямые, проходящие через P, так как через точку, отличную от P, может проходить не более одной неподвижной прямой.

Всякую симметрию относительно точки можно представить в виде произведения двух симметрий относительно прямых:

Теорема 2. *Если a и b — перпендикулярные прямые, проходящие через точку P, то* $\sigma_a\sigma_b=\sigma_P$.

Доказательство. Пусть h, $\bar{h}$ — два луча прямой a с вершиной P, а S, $\bar{S}$ — стороны прямой a. Так как $\sigma_a\sigma_b$, как и σ_P, переводит P в P, h в $\bar{h}$, S в $\bar{S}$, то из «жесткости» вытекает требуемая теорема.

Если a и b перпендикулярны, то $\sigma_a\sigma_b=\sigma_b\sigma_a$: *симметрии относительно перпендикулярных прямых коммутируют.*

2. Представление движений в виде произведений симметрий. Группа движений евклидовой плоскости порождается симметриями относительно прямых:

Теорема 3. *Всякое движение является произведением не более чем трех симметрий относительно прямых.*

Доказательство. Пусть h — исходящий из точки A луч, принадлежащий прямой a. Данное движение α переводит A в A^*, h в h^*, a в a^*. Сначала допустим, что $A=A^*$, а w — биссектриса угла, образованного лучами h и h^*. В зависимости от того, как движение α преобразует стороны прямой a (оно переводит их в стороны прямой a^*), имеем в силу «жесткости» $\alpha=\sigma_w$ или $\alpha=\sigma_w\sigma_{a^*}$. Если $A\neq A^*$ и l — медиатриса точек A и A^*, то симметрия σ_l переводит A в A^*, а h — в луч h', выходящий

*) *Медиатриса* двух точек A и B — это перпендикуляр к соединяющей эти точки прямой (A, B) в середине отрезка AB. (*Прим. перев.*)

из A^* (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю, в силу «жесткости» $\alpha=\sigma_l\sigma_w$ или $\alpha=\sigma_l\sigma_w\sigma_{a^*}$, где w — биссектриса угла, образованного лучами h' и h^*.

Итак, всякое движение можно представить в виде произведения двух или трех симметрий относительно прямых, ибо симметрию относительно одной прямой σ_g можно записать в виде $\sigma_g\sigma_g\sigma_g$.

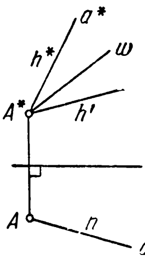


Рис. 2

Зададимся теперь вопросом о неподвижных элементах (точках и прямых) движения, представимого в виде произведения $\sigma_a\sigma_b$ двух осевых симметрий. К таким движениям относятся тождественное преобразование и (в силу теоремы 2) центральные симметрии, неподвижные элементы которых мы знаем. Если две прямые a и b имеют общую точку, то она является неподвижной точкой движения $\sigma_a\sigma_b$; если они имеют общий перпендикуляр, то он является неподвижной прямой движения $\sigma_a\sigma_b$. Тем самым мы уже нашли все неподвижные элементы движения $\sigma_a\sigma_b$, как видно из следующей теоремы.

Теорема 4. а) *Неподвижной точкой движения* $\sigma_a\sigma_b$, *где* $a\neq b$, *может быть только общая точка прямых* a *и* b. б) *Неподвижной прямой движения* $\sigma_a\sigma_b$, *где* $a\neq b$ *и* a *не перпендикулярна* b, *может быть только общий перпендикуляр к прямым* a *и* b.

Доказательство. а) Пусть F — неподвижная точка движения $\sigma_a\sigma_b$. Тогда $F\sigma_a=F\sigma_b$. Обозначим эту точку через F'; тогда обе прямые a и b должны быть медиатрисами точек F, F'. В таком случае из условия $a\neq b$ следует $F=F'$. Поэтому F — неподвижная точка обеих симметрий σ_a и σ_b, а значит, она принадлежит одновременно и a и b.

б) Рассуждаем аналогично, пользуясь тем, что разные не перпендикулярные прямые a и b не могут быть одновременно осями симметрии пары несовпадающих прямых.

Из теоремы 4 следует, что неподвижные точки движения $\sigma_a\sigma_b$ и осевой симметрии σ_c никогда не совпадают. Поэтому равенство $\sigma_a\sigma_b=\sigma_c$ невозможно, откуда вытекает

Следствие. *Равенство* $\sigma_a\sigma_b\sigma_c=1$ *невозможно.*

Движение, представимое в виде произведения симметрий относительно двух прямых с общей точкой P, мы назовем *поворотом вокруг точки* P (*или поворотом с центром* P). Движение, представимое в виде произведения двух симметрий относительно двух прямых с общим перпендикуляром g, мы назовем (параллельным) *переносом вдоль прямой* g. При повороте $\sigma_a\sigma_b$ каждая точка поворачивается на угол, равный удвоенному углу между прямыми a и b; аналогичное обстоятельство имеет место для переноса $\sigma_a\sigma_b$ *).

Представление поворота вокруг точки P в виде произведения $\sigma_a\sigma_b$ не однозначно. Можно произвольно провести через P прямую c, приняв ее за ось второй симметрии, и определить затем проходящую через P прямую d так, чтобы было $\sigma_a\sigma_b = \sigma_d\sigma_c$ (рис. 3, *а*); точно так же можно сначала выбрать ось первой симметрии произвольно, а затем подобрать вторую симметрию. Аналогичные соображения верны для переносов вдоль прямой g, представленных в виде произведения двух осевых

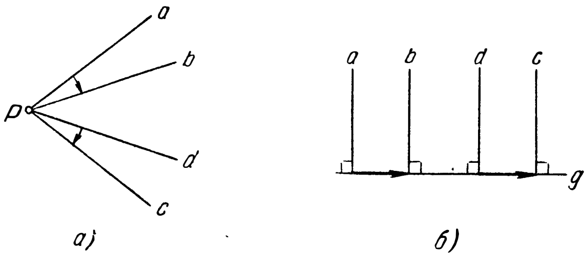


Рис. 3.

симметрий: в этом случае произвольно выбирается одна из осей симметрии (перпендикулярная g), а затем подбирается вторая (рис. 3, *б*). В этом и состоит следующая основополагающая

Теорема 5 (теорема о трех симметриях). а) *Если a, b, c — прямые, имеющие общую точку P, то существует проходящая через P прямая d такая, что $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$.* б) *Если a, b, c — прямые, перпендикулярные одной прямой g, то существует такая прямая d, перпендикулярная g, что $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$.*

Доказательство. а) Пусть h — исходящий из точки P луч, принадлежащий прямой a, а S и $\bar{S}$ — стороны a. Движение $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ переводит h в некоторый луч h^*, исходящий из точки P, а S — в одну из сторон S^* луча h^*. Симметрия относительно биссектрисы d угла, образованного лучами h и h^*, переводит P в P, h в h^*, а S или $\bar{S}$ — в S^*. Тогда в силу «жесткости» либо $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$, либо $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_a\sigma_d$. Однако во втором случае мы имели бы $\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$, что невозможно по следствию теоремы 4.

б) Рассуждаем аналогично, обозначая через h луч прямой a, исходящий из общей точки A прямых a и g, и определяя прямую d как перпендикуляр к g, проходящий через среднюю точку для точек A и $A\sigma_a\sigma_b\sigma_c$.

*) То есть при переносе $\sigma_a\sigma_b$ каждая точка смещается на расстояние, равное удвоенному расстоянию между a и b. (*Прим. ред*)

Справедливо также следующее обращение этой теоремы:

Теорема 6 (обращение теоремы о трех симметриях). а) *Если* $\sigma_a\sigma_b\sigma_c=\sigma_d$ *и* a, b — *различные прямые, проходящие через точку* P, *то прямые* c *и* d *также проходят через точку* P. б) *Если* $\sigma_a\sigma_b\sigma_c=\sigma_d$ *и* a, b — *различные прямые, перпендикулярные прямой* g, *то прямые* c *и* d *также перпендикулярны прямой* g.

Доказательство. По условию $\sigma_a\sigma_b=\sigma_d\sigma_c$ и $a\neq b$, т. е. $c\neq d$.

а) Так как a и b проходят через P, то P — неподвижная точка движения $\sigma_a\sigma_b$, а значит, и движения $\sigma_d\sigma_c$. Но тогда в силу теоремы 4 а) точка P принадлежит также прямым c и d.

б) Так как a и b перпендикулярны g, то g — неподвижная прямая движения $\sigma_a\sigma_b$, не имеющего, в силу теоремы 4 а), неподвижных точек. Следовательно, g — неподвижная прямая движения $\sigma_d\sigma_c$. Тогда по теореме 4 б) c и d перпендикулярны g.

Из теорем 5 и 6 вытекает

Теорема 7. *Произведение трех осевых симметрий является осевой симметрией тогда и только тогда, когда три данные прямые — оси симметрий — принадлежат одному пучку, т. е. либо имеют общую точку, либо параллельны.*

Рассмотрим теперь произвольное движение, представимое в виде произведения трех осевых симметрий. Движение, представимое в виде

$$\sigma_a\sigma_b\sigma_g, \quad \text{где} \quad a,\ b\perp g \tag{1}$$

(рис. 4), назовем *скользящей симметрией с осью* g. Скользящая симметрия представляет собой перенос вдоль прямой g, сопровождаемый последующей симметрией относительно прямой g. Если $a=b$, то она сводится к одной симметрии σ_g; при $a\neq b$ это движение не имеет неподвижных точек и обладает единственной неподвижной прямой g.

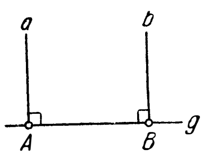


Рис. 4.

В произведении (1) σ_g коммутирует с σ_a и σ_b; поэтому это произведение равно также $\sigma_a\sigma_g\sigma_b$. Если A и B — точки пересечения a и b с g, то в силу теоремы 2 $\sigma_a\sigma_b\sigma_g=\sigma_a\sigma_B=\sigma_A\sigma_b$. Обратно, если дано произвольное произведение $\sigma_a\sigma_B$ и g — перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a, а b — перпендикуляр, опущенный из B на g, то по теореме 2 $\sigma_a\sigma_B=\sigma_a\sigma_b\sigma_g$. Аналогично устанавливается, что также и всякое произведение $\sigma_A\sigma_B$ имеет вид (1). Итак, имеет место

Теорема 8. *Скользящие симметрии — это те движения, которые представимы в виде* $\sigma_a\sigma_B$ (*или* $\sigma_A\sigma_b$).

Покажем теперь, что имеет место

Теорема 9. *Всякое произведение трех осевых симметрий является скользящей симметрией.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $\sigma_u\sigma_v\sigma_w$. Если прямая v параллельна обеим прямым u и w, то наше утверждение вытекает из теоремы 5 б). Пусть $v \nparallel u$ или $v \nparallel w$. В первом случае опустим из точки P пересечения прямых u и v перпендикуляр l на прямую w; основание его обозначим через B (рис. 5). По теореме 5 а) существует такая прямая a, что $\sigma_u\sigma_v\sigma_l = \sigma_a$. Тогда $\sigma_u\sigma_v\sigma_w = \sigma_a\sigma_l\sigma_w = \sigma_a\sigma_B$ и, значит, наше утверждение вытекает из теоремы 8. Во втором случае (когда $v \nparallel w$) аналогично устанавливается, что $\sigma_w\sigma_v\sigma_u$ является скользящей симметрией. Но движение, обратное скользящей симметрии, очевидно, само является скользящей симметрией*).

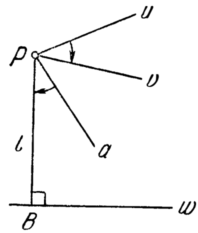


Рис. 5.

Из теорем 3, 8, 9 вытекает, что группа движений евклидовой плоскости *«биинволютивна»* (zweispiegelig), т. е. каждое движение можно представить в виде произведения не более чем двух инволютивных движений:

Теорема 10. *Всякое движение представимо в виде* $\sigma_a\sigma_b$ *или* $\sigma_a\sigma_B$.

Как показывают наши рассуждения, множество всех движений евклидовой плоскости распадется на множества поворотов, (параллельных) переносов и скользящих симметрий. Движения этих трех типов различаются неподвижными элементами; только тождественное преобразование является одновременно и поворотом, и переносом.

Какие движения получаются, если рассматривать произведения центральных симметрий?

Теорема 11. *Движения, представимые в виде произведений двух центральных симметрий, являются (параллельными) переносами.*

Доказательство. Если v — прямая, проходящая через точку A и B, а a и b — перпендикуляры, восставленные к v в этих точках, то по теореме 2 $\sigma_A\sigma_B = \sigma_a\sigma_v\sigma_v\sigma_b = \sigma_a\sigma_b$, т. е. $\sigma_A\sigma_B$ есть перенос. Это рассуждение можно и обратить.

Теорема 12. *Всякое произведение трех центральных симметрий совпадает с одной симметрией относительно некоторой точки.*

Доказательство. Если A, B, C — данные точки, то проведем прямую v, проходящую через точки A и B, и прямую w, проходящую через C и параллельную v (рис. 6). Тогда

*) Ясно, что $(\sigma_w\sigma_v\sigma_u)^{-1} = \sigma_u^{-1}\sigma_v^{-1}\sigma_w^{-1} = \sigma_u\sigma_v\sigma_w$. (*Прим. ред.*)

перпендикуляры a и b, восставленные к v в точках A и B, и перпендикуляр c, восставленный к w в точке C, таковы, что $c \perp v$, и, по теореме 5 б), существует такая прямая d, перпендикулярная v (и w), что $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$. При этом $\sigma_a\sigma_v\sigma_v\sigma_b\sigma_c\sigma_w = \sigma_d\sigma_w$, т. е. в силу теоремы 2 $\sigma_A\sigma_B\sigma_C = \sigma_D$, где D — точка пересечения d и w.

Из теорем 11 и 12 следует, что подгруппа группы движений, порожденная центральными симметриями, состоит из центральных симметрий и (параллельных) переносов. Центральные симметрии в отличие от осевых симметрий не порождают полной группы движений. Центральные симметрии и переносы *переводят каждую прямую в параллельную ей прямую*, в то время как произвольное движение может переводить прямую в новую прямую, пересекающую исходную.

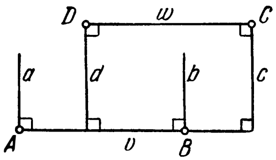


Рис. 6.

Важную роль играет *операция последовательного выполнения поворотов и* (параллельных) *переносов*: если $\sigma_a\sigma_b$ и $\sigma_c\sigma_d$ — два произведения осевых симметрий, то всегда найдутся такие прямые e и f, что

$$\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d = \sigma_e\sigma_f. \tag{2}$$

а) Пусть оба движения $\sigma_a\sigma_b$ и $\sigma_c\sigma_d$ — повороты (отличные от тождественного преобразования), g — прямая, соединяющая центры поворотов (рис. 7). Тогда в силу теоремы 5 а) существуют такие прямые e и f, что

$$\sigma_a\sigma_b = \sigma_e\sigma_g \quad \text{и} \quad \sigma_c\sigma_d = \sigma_g\sigma_f. \tag{3}$$

Ясно, что из (3) следует (2).

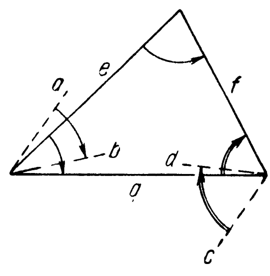


Рис. 7.

б) Пусть $\sigma_a\sigma_b$ — поворот, отличный от 1, а $\sigma_c\sigma_d$ — (параллельный) перенос; через g обозначим прямую, параллельную c и d и проходящую через центр поворота $\sigma_a\sigma_b$. Тогда в силу теоремы 5 существуют такие прямые e и f, что снова имеет место (3), а следовательно, и (2).

в) Если и $\sigma_a\sigma_b$, и $\sigma_c\sigma_d$ — (параллельные) переносы, то, воспользовавшись теоремой 11, запишем их как произведения центральных симметрий: $\sigma_a\sigma_b = \sigma_A\sigma_B$, $\sigma_c\sigma_d = \sigma_C\sigma_D$. Затем выберем произвольную точку G и определим существующие в силу теоремы 12 точки E и F, для которых*)

$$\sigma_A\sigma_B = \sigma_E\sigma_G, \quad \sigma_C\sigma_D = \sigma_G\sigma_F. \tag{4}$$

*) То есть $\sigma_A\sigma_B\sigma_G = \sigma_E$, $\sigma_G\sigma_C\sigma_D = \sigma_F$. (*Прим. ред.*)

Тогда $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d = \sigma_E\sigma_F$, и, записав $\sigma_E\sigma_F$ снова в виде произведения $\sigma_e\sigma_f$, получаем (2). Попутно показано, что *произведение двух переносов снова является переносом.*

Ясно, что в группе, порожденной осевыми симметриями, движения, представимые в виде произведения четного числа осевых симметрий, составляют подгруппу, индекс которой равен 2, если только она не совпадает со всей группой. По доказанному выше всякое произведение четного числа осевых симметрий представимо в виде произведения двух симметрий, а всякое произведение нечетного числа осевых симметрий сводится к произведению трех симметрий. Из следствия теоремы 4 вытекает, что произведение нечетного числа осевых симметрий никогда не равно 1, а значит, произведение четного числа осевых симметрий не может совпасть с произведением нечетного числа осевых симметрий. Итак, имеет место

Теорема 13. *Движения, представимые в виде произведения двух осевых симметрий, т. е. повороты и (параллельные) переносы, образуют подгруппу индекса 2 всей группы движений; смежный класс состоит из скользящих симметрий.*

Рассмотрим такие множества симметрий:

1) симметрии относительно прямых, проходящих через фиксированную точку P;

2) симметрии относительно прямых, перпендикулярных фиксированной прямой g;

3) симметрии относительно точек, принадлежащих фиксированной прямой g;

4) симметрии относительно произвольных точек.

Каждое из этих множеств обладает тем свойством, что произведение всяких трех симметрий одного множества снова принадлежит тому же множеству. Подгруппы группы движений, порожденные этими множествами симметрий, обладают одним общим свойством, вытекающим из следующей теоретико-групповой леммы:

Лемма. *Если в произвольной группе задана система образующих, состоящая из инволютивных элементов, и всякое произведение трех образующих снова является образующей, то произведения двух образующих составляют коммутативную подгруппу индекса 2, смежным классом для которой служит сама система образующих.*

Доказательство. В рассматриваемой группе всякий элемент является либо образующим, либо произведением двух образующих. Отсюда непосредственно вытекают все утверждения леммы, кроме утверждения о коммутативности подгруппы. Последнее же доказывается так: если σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 — образующие, то

$$\sigma_1\sigma_2\cdot\sigma_3\sigma_4=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdot\sigma_4=\sigma_3\sigma_2\sigma_1\cdot\sigma_4=\sigma_3\cdot\sigma_2\sigma_1\sigma_4=\sigma_3\cdot\sigma_4\sigma_1\sigma_2=\sigma_3\sigma_4\cdot\sigma_1\sigma_2.$$

Пользуясь вводимым в п. 3 понятием внутреннего автоморфизма, можно было бы вывести коммутативность подгруппы из следующего очень полезного соображения: если σ — фиксированная образующая, то $\alpha^\sigma=\alpha^{-1}$ для каждого элемента α подгруппы. Так как отображение $\alpha\to\alpha^\sigma$ является автоморфизмом, а отображение $\alpha\to\alpha^{-1}$ — антиавтоморфизмом, то наше равенство означает, что некоторый автоморфизм подгруппы совпадает с некоторым ее антиавтоморфизмом; но это и означает, что подгруппа *коммутативна.*

В группах, порожденных указанными выше симметриями, произведения двух образующих представляют собой в случае 1) повороты вокруг точки P; в случаях 2) и 3) (параллельные) переносы прямой вдоль g; в случае 4) все переносы. Итак, используя лемму, заключаем, что справедлива

Теорема 14. *Повороты вокруг фиксированной точки P, переносы вдоль фиксированной прямой g и все параллельные переносы плоскости образуют коммутативные подгруппы группы движений.*

Можно чуть усилить лемму. Если подгруппа содержит инволютивные элементы, то они принадлежат *центру* группы (коммутируют со всеми элементами группы). Множество поворотов вокруг точки P содержит единственный инволютивный элемент — симметрию относительно точки P (вращение на 180°). Он коммутирует со всеми симметриями относительно прямых, проходящих через точку P. Инволютивных переносов нет (можно рассуждать так: не будучи тождеством, инволютивный перенос должен был бы по теореме 4 а) не иметь неподвижных точек; однако в силу теоремы 1 он, как инволютивное движение, должен был бы обладать хотя бы одной неподвижной точкой).

Задачи. **1.** Некоторое множество элементов группы тогда и только тогда является смежным классом по некоторой подгруппе, когда оно вместе с каждыми элементами α, β, γ содержит также и $\alpha\beta^{-1}\gamma$.

2. Группа, каждый отличный от 1 элемент которой инволютивен, коммутативна. Если группа, порожденная инволютивными элементами, коммутативна, то всякий отличный от 1 элемент этой группы инволютивен.

3. Если выполняется условие рассмотренной выше леммы и центр группы содержит отличные от 1 элементы, то все эти элементы инволютивны.

3. Движения движений (внутренние автоморфизмы группы движений). Можно подвергать движению не только точки и прямые, но и сами движения. Если α — некоторое движение, то оно сопоставляет каждой точке A ее образ $A\alpha=B$. Подвергнем теперь пару A, B, т. е. пару «прообраз — образ относительно движения α» некоторому движению γ и рассмотрим соответствие, относящее точке $A\gamma$ точку $B\gamma$ (рис. 8). Оно опять оказывается движением, а именно, имеет вид движения $\gamma^{-1}\alpha\gamma$, ибо, очевидно,

$$A\alpha = B \text{ тогда и только тогда, когда } A\gamma(\gamma^{-1}\alpha\gamma) = B\gamma. \tag{5}$$

Рассуждая аналогично применительно к прямым, получаем

$$a\alpha = b \text{ тогда и только тогда, когда } a\gamma(\gamma^{-1}\alpha\gamma) = b\gamma. \tag{6}$$

Итак, $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ — это движение, получающееся из движения α, если подвергнуть его движению γ.

Про элементы группы говорят, что $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ получается из α *внутренним автоморфизмом, задаваемым элементом* γ. Вместо $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ мы будем короче писать α^{γ}. При этом имеют место следующие формулы:

$$(\alpha^{\gamma_1})^{\gamma_2} = \alpha^{\gamma_1\gamma_2}, \quad (\alpha_1\alpha_2)^{\gamma} = \alpha_1^{\gamma}\alpha_2^{\gamma}, \quad (\alpha^{-1})^{\gamma} = (\alpha^{\gamma})^{-1}. \tag{7}$$

Отношение «α_1 получается из α_2 некоторым внутренним автоморфизмом» рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Инволютивное движение переводится внутренним автоморфизмом снова в инволютивное движение: если $\alpha^2 = 1$ и $\alpha \neq 1$, то $(\alpha^{\gamma})^2 = 1$ и $\alpha^{\gamma} \neq 1$.

Из (5) вытекает, что если A — неподвижная точка движения α, то $A\gamma$ — неподвижная точка движения α^{γ}, и наоборот. Таким образом, неподвижные точки движения α взаимно однозначно соответствуют неподвижным точкам движения α^{γ} — и то же самое имеет место для неподвижных прямых движений α и α^{γ}.

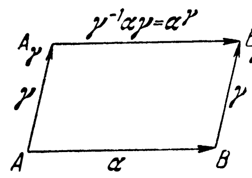


Рис. 8.

Из сказанного следует, что симметрию относительно точки внутренний автоморфизм переводит снова в симметрию относительно точки (точнее — определенный движением γ внутренний автоморфизм переводит симметрию относительно точки A в симметрию относительно точки $A\gamma$); аналогично, симметрию относительно прямой a этот же внутренний автоморфизм переводит в симметрию относительно прямой $a\gamma$:

$$\sigma_A^{\gamma} = \sigma_{A\gamma}, \tag{8}$$

$$\sigma_a^{\gamma} = \sigma_{a\gamma}. \tag{9}$$

Поворот переходит при внутреннем автоморфизме в поворот на такой же угол; перенос — в перенос на такое же расстояние; скользящая симметрия — в скользящую симметрию с той же величиной входящего в состав этого движения параллельного переноса.

Назовем некоторый комплекс, т. е. просто множество элементов группы, *инвариантным*, если внутренний автоморфизм, определенный произвольным элементом группы, переводит каждый элемент нашего комплекса снова в элемент этого же комплекса. Примерами инвариантных комплексов, содержащихся в группе движений, могут служить тождественное движение 1; все центральные симметрии; множество всех осевых симметрий; множество всех инволютивных движений; множество всех поворотов, углы которых конгруэнтны между собой. Если инвариантный комплекс является подгруппой, то он называется *нормальным делителем*. Параллельные переносы составляют нормальный делитель группы движений; повороты и переносы, вместе взятые, также составляют нормальный делитель (подгруппа индекса 2 всегда является нормальным делителем).

Задача. Подгруппа, порожденная некоторым инвариантным комплексом группы, всегда является нормальным делителем. Из каких движений состоит при фиксированном натуральном k нормальный делитель $\mathfrak{N}_k$ группы движений, порожденный инвариантным комплексом всех поворотов на угол $\pm\frac{360^\circ}{k}$? Из каких движений состоит нормальный делитель, порожденный всеми нормальными делителями $\mathfrak{N}_k$?

4. Запись геометрических соотношений на языке группы движений. В силу равенств (8) и (9) имеем

$$A\gamma = B \quad \text{равносильно} \quad \sigma_A^\gamma = \sigma_B; \tag{10}$$

$$a\gamma = b \quad \text{равносильно} \quad \sigma_a^\gamma = \sigma_b. \tag{11}$$

Поэтому утверждение: «движение γ переводит точку A в точку B» на теоретико-групповом языке можно сформулировать так: внутренний автоморфизм, определенный движением γ, переводит симметрию σ_A в симметрию σ_B. Аналогично обстоит дело и в случае прямых. Поэтому, заменяя геометрические объекты — точки и прямые — находящимися с ними во взаимно однозначном соответствии центральными и осевыми симметриями, т. е. инволютивными элементами группы движений, мы сможем перевести некоторые геометрические утверждения на язык группы движений. Ради этого мы введем *новую систему обозначений*: букву σ мы условимся отбрасывать и обозначать симметрию относительно точки P просто той же буквой P, а симметрию относительно прямой g — просто через g. Тогда

В старых обозначениях		В новых обозначениях
$A\gamma = B$	равносильно	$A^\gamma = B$,
$a\gamma = b$	равносильно	$a^\gamma = b$

Для того чтобы геометрические утверждения возможно было сформулировать на языке группы движений, очень существенна возможность представления первичных геометрических отношений между точками и прямыми в виде теоретико-групповых соотношений, связывающих отвечающие этим точкам и прямым симметрии. Например, утверждение, что точка A инцидентна прямой b, равносильно тому, что симметрия относительно прямой b (т. е. порожденный этой симметрией внутренний автоморфизм) переводит симметрию относительно точки A в себя, т. е. в наших новых обозначениях равносильно соотношению $A^b=A$. Это равенство можно переписать также в виде $Ab=bA$ или же $b^A=b$.

Другие примеры такого рода собраны в нижеследующей таблице:

1°	$Ab=bA$	A, b инцидентны
2°	$ab=ba$ и $a \neq b$	a, b перпендикулярны
3°	$ab=dc$	а) a, b, c, d проходят через одну точку, и ориентированный угол между a, b равен ориентированному углу между d, c б) a, b, c, d параллельны между собой, и ориентированное расстояние между a, b равно ориентированному расстоянию между d, c
4°	$ab=bc$	b — ось симметрии пары a и c, в частности биссектриса угла, образованного a и c, если a и c пересекаются
5°	$Ab=dC$	Существует прямая, которой инцидентны A и C и которой перпендикулярны b и d, причем ориентированное расстояние между A и b равно ориентированному расстоянию между d и C
6°	$Ab=bC$	b — ось симметрии A и C (если $A=C$, то b инцидентна этой точке)
7°	$aB=Dc$	Существует прямая, которой перпендикулярны a и c и которой инцидентны B и D, причем ориентированное расстояние между a и B равно ориентированному расстоянию между D и c
8°	$aB=Bc$	a и c параллельны, и при $a \neq c$ точка B инцидентна оси симметрии пары a, c, а при $a=c$ точка B инцидентна a и c
9°	$AB=DC$	Пара A и B параллельна и равна паре D, C (если A, B, C не коллинеарны, то A, B, C, D — вершины параллелограмма)
10°	$AB=BC$	B — средняя точка (центр симметрии) для A и C

Отношение 3° между прямыми b, d и a, c, согласно Йельмслеву, называется *зеркальным расположением прямых b и d по отношению к прямым a и c*.

Особый интерес представляет вопрос о том, в каком случае произведение центральных и осевых симметрий инволютивно, т. е. само является центральной или осевой симметрией и, следовательно, имеет прозрачный геометрический смысл. Ответ на этот вопрос для произведений двух и трех множителей дает следующий перечень:

ab инволютивно	a и b перпендикулярны; в этом случае ab — симметрия относительно точки пересечения a и b
Ab инволютивно	A и b инцидентны; в этом случае Ab — симметрия относительно перпендикуляра, восставленного к b в точке A
abc инволютивно	a, b, c принадлежат одному пучку; в этом случае abc — симметрия относительно прямой d, описанной в п. 3° предыдущей таблицы (прямую d мы называем *четвертой зеркальной* к a, b, c)
AbC инволютивно	существует прямая, которой инцидентны A и C и которая перпендикулярна b; в этом случае AbC — симметрия относительно прямой d, описанной в п. 5° предыдущей таблицы
aBc инволютивно	существует прямая, перпендикулярная a и c и инцидентная B; тогда aBc — симметрия относительно точки D, описанной в п. 7° предыдущей таблицы
ABC инволютивно	в силу теоремы 12 это имеет место всегда; ABC — симметрия относительно точки D, описанной в п. 9° предыдущей таблицы

Кроме тех соотношений между симметриями, которые имеют геометрический смысл и расшифровываются как конкретные отношения между точками и прямыми, есть такие соотношения, которые справедливы для всех осевых или центральных симметрий. Тривиальны, например, такие равенства: $AA=1$ для всех A; $aa=1$ для всех a, а вот нетривиальный пример соотношения, связывающего все центральные симметрии *): $ABCABC=1$. Нетривиальное тождество, связывающее осевые симметрии, указал Г. Томсен:

Если a, b, c — три произвольные осевые симметрии, то по теореме 9 abc — скользящая симметрия, т. е. $(abc)^2$ — параллельный перенос. Внутренний автоморфизм a переводит его снова в перенос, а именно, в $(bca)^2$. Так как переносы коммутируют, то $(abc)^2(bca)^2=(bca)^2(abc)^2$, т. е.

$$abc\,abc\,bca\,bca\,cba\,cbc\,bacb=1 \quad \text{для всех } a,\ b,\ c;$$

или иначе

$$a^{(bcabc)^2}=a \quad \text{для всех} \quad a,\ b,\ c.$$

5. Доказательство некоторых теорем с помощью исчисления симметрий. Как показывают предыдущие рассуждения, геометрические теоремы иногда можно сформулировать в виде высказываний о симметриях. Это открывает возможность доказательства геометрических теорем с помощью теоретико-группового «исчисления симметрий». Чтобы новые доказательства можно было считать строгими, надо сначала сформулировать некоторые

*) Равенство $ABCABC=1$ равносильно утверждению об инволютивном характере движения ABC. (*Прим. ред.*)

высказывания о симметриях в качестве аксиом. Это будет сделано позже. Здесь мы ограничимся доказательством с помощью «группового исчисления» некоторых совсем простых теоретико-групповых теорем о соотношениях, связывающих центральные и осевые симметрии, и покажем, как интерпретировать эти соотношения в виде теорем о геометрических объектах.

1) *Из* $P_1P_2=Q_1Q_2$ *и* $P_2P_3=Q_2Q_3$ *следует* $P_1P_3=Q_1Q_3$.

Доказательство. Достаточно перемножить оба фигурирующих в условии теоремы равенства.

Теорема 1) означает, что если перенос или, что то же самое, вектор P_1, P_2 равен (в смысле равенства векторов) вектору Q_1, Q_2, а P_2, P_3 равен Q_2, Q_3, то P_1, P_3 равен Q_1, Q_3 (рис. 9). Это утверждение составляет содержание *малой афинной теоремы Дезарга* *).

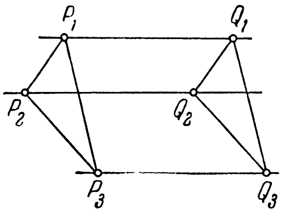


Рис. 9.

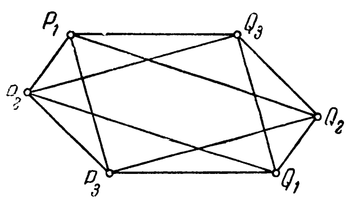


Рис. 10.

2) *Если* $P_1P_2=Q_2Q_1$ *и* $P_2P_3=Q_3Q_2$, *то* $P_1P_3=Q_3Q_1$.

Доказательство. Перемножая данные в условии равенства, получаем $P_1P_3=Q_2Q_1Q_3Q_2$. Правая часть равна Q_3Q_1, так как по теореме 12 $Q_2Q_1Q_3=Q_3Q_1Q_2$.

Частным случаем этой теоремы, к которому мы приходим, если P_1, P_2, P_3 и Q_1, Q_2, Q_3 попарно соответственно коллинеарны, является *малая аффинная теорема Паппа — Паскаля* (рис. 10).

3) *Если* $(abc)^2=1$ *и* $P_1^a=P_2$, $P_2^b=P_3$, $P_3^c=P_4$, $P_4^a=P_5$, $P_5^b=P_6$, *то* $P_6^c=P_1$.

Доказательство. Так как $(abc)^2=1$, то $P_1^{abcabc}=P_1$; с другой стороны, по условию $P_1^{abcabc}=P_2^{bcabc}=P_3^{cabc}=P_4^{abc}=P_5^{bc}=P_6^c$.

Теорема 3) означает, что если три прямые a, b, c образуют пучок и 6 точек P_i таковы, что a — медиатриса (ось симметрии) пар точек P_1, P_2 и P_4, P_5, b — ось симметрии пар P_2, P_3 и P_5, P_6, c — ось симетрии пары P_3, P_4, то c также является осью симметрии пары P_6, P_1. В этой теореме содержится *теорема Паскаля* для вписанного в круг шестиугольника с параллельными противолежащими стронами: если две пары противолежащих сторон

*) Или *аффинной аксиомы Дезарга* в иной трактовке системы аксиом аффинной геометрии на плоскости (ср., например, п. 9 книги Яглом и Ашкинузе [1]). *(Прим. ред.)*

вписанного шестиугольника попарно параллельны, то это верно и для третьей пары противоположных сторон (рис. 11).

4) *Из* $P_1^A = P_2$, $P_2^B = P_3$, $P_3^C = P_4$, $P_4^A = P_5$ *и* $P_5^B = P_6$ *следует, что* $P_6^C = P_1$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 (в силу теоремы 12 $(ABC)^2=1$).

Теорема 4) означает, что если A — центр симметрии пар точек P_1, P_2 и P_4, P_5, B — центр симметрии пар точек P_2, P_3 и P_5, P_6, а C — центр симметрии пары точек P_3, P_4, то C — центр симметрии пары точек P_6, P_1. И эта теорема означает замыкание некоторого шестиугольника *).

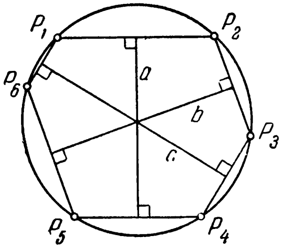


Рис. 11.

5) *Если* $U^a=V$, $V^b=V$, $V^c=W$ *и* $abc=d$, то $U^d=W$.

Доказательство этой теоремы тривиально.

Теорема 5) означает, что если a — ось симметрии пары точек U, V, а b проходит через V и, кроме того, c — ось симметрии V, W и a, b, c принадлежат одному пучку, то прямая d — четвертая зеркальная к a, b, c — является также осью симметрии U, W. Отсюда вытекает *теорема о точке пересечения медиатрис треугольника* U, V, W: *если* P — точка пересечения медиатрисы a точек U, V и медиатрисы c точек V, W, то, приняв за b прямую, соединяющую P и V, мы получим, что четвертая зеркальная к a, b, c, которая по теореме 5 проходит через точку P, сама является медиатрисой точек U, W (рис. 12). Отсюда же вытекает способ построения четвертой зеркальной к трем заданным прямым a, b, c $(a \neq c)$, проходящим через одну точку.

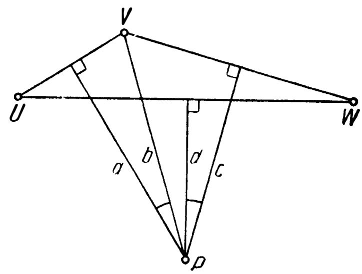


Рис. 12.

6) *Если* $u^a=v$, $v^b=v$, $v^c=w$ *и* $abc=d$, *то* $u^d=w$.

Отсюда получается *теорема о точке пересечения биссектрис трехсторонника* u, v, w: через точку пересечения биссектрис двух углов трехсторонника проходит также биссектриса третьего угла (рис. 13, *а*, *б*).

Если даны центральные симметрии A, B, C, то в силу теоремы 12 три произведения ABC, CAB, BCA также являются

*) Ср., например, задачу 12 б) книги Яглом [1]. (*Прим. ред.*)

центральными симметриями, причем $CAB=BAC$, $ABC=CBA$, $BCA=ACB$. Непосредственно отсюда получаем

7) *Если* $CAB=U$, $ABC=V$, $BCA=W$, *то* $UC=CV=BA$, $VA=$ $=AW=CB$ *и* $WB=BU=AC$.

Таким образом, вектор U, C; вектор C, V; вектор B, A попарно равны; то же относится к другим тройкам соответствующих

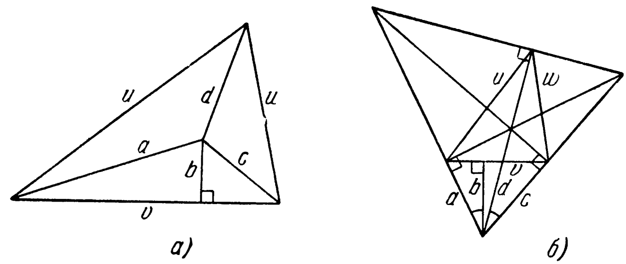


Рис. 13.

векторов. Но отсюда следует, что если A, B, C образуют треугольник, то U, V, W тоже образуют треугольник, для которого точки A, B, C являются серединами сторон и стороны которого параллельны сторонам треугольника A, B, C (рис. 14). Из наличия описанного треугольника U, V, W можно вывести *теорему о точке пересечения высот* данного треугольника A, B, C: высоты треугольника A, B, C являются медиатрисами описанного треугольника и в силу 5) пересекаются в одной точке.

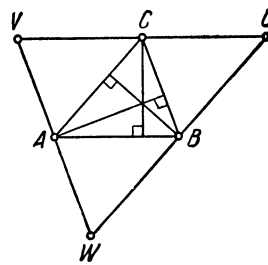


Рис. 14.

Обращая 7), получаем

8) *Если* $U^C=V$, $V^A=W$ *и* $W^B=U$, *то* $U=CAB$, $V=ABC$ *и* $W=BCA$.

Доказательство. По условию $U^{CAB}=U$. Но тогда для центральной симметрии $CAB=U'$ справедливо равенство $UU'=U'U$. Отсюда следует, что $U=U'$, так как в противном случае движение UU' было бы инволютивным; но в силу теоремы 11 UU' является переносом, а инволютивного переноса не существует. Аналогично выводятся и прочие равенства.

Совместно с теоремой 7) теорема 8) означает, что в треугольнике прямая, соединяющая середины сторон, параллельна третьей стороне. В силу этого можно упростить указанную в 5) конструкцию четвертой зеркальной для трех прямых a, b, c $(a\neq c)$ с общей точкой P: выберем на b отличную от P точку и опустим из нее перпендикуляры на a и c; тогда перпендикуляр, опущенный из P на прямую, соединяющую основания предыдущих перпендикуляров, является четвертой зеркальной к a, b, c (*конфигурация перпендикуляров*).

9) *Если* $ba'c=a''$, $cb'a=b''$, $ac'b=c''$ *и движение* $a'b'c'$ *инволютивно, то* $a''b''c''$ *инволютивно.*

Доказательство. Имеем $a''b''c''=ba'c\cdot cb'a\cdot ac'b=(a'c'b')^b$.

Теорема 9) геометрически интерпретируется как теорема о *зеркальном соответствии* относительно трехсторонника a, b, c.

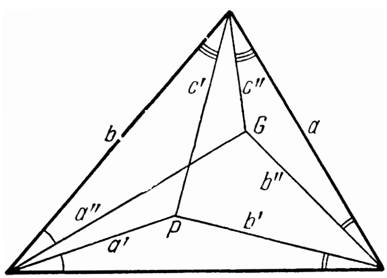


Рис. 15.

Если a, b, c — стороны треугольника, то, проведя через каждую его вершину прямую, а затем четвертую зеркальную к ней по отношению к сторонам трехсторонника, мы получим: если три проведенные прямые образуют пучок, то их четвертые зеркальные прямые также образуют пучок (рис. 15).

Вообще если A, B, C — треугольник, а P — точка, не лежащая на его сторонах, и если мы соединим P с вершинами A, B, C прямыми a', b', c' и в каждой вершине проведем четвертую зеркальную a'', b'', c'', как описано выше, то последние прямые либо пересекаются в одной точке, либо будут попарно параллельны. Второй случай представляет самостоятельный интерес, и мы на нем еще остановимся ниже. Наша теорема позволяет каждой точке P, не принадлежащей сторонам треугольника, сопоставить некоторую «противоточку» G (рис. 16), могущую быть как собственной, так и бесконечно удаленной.

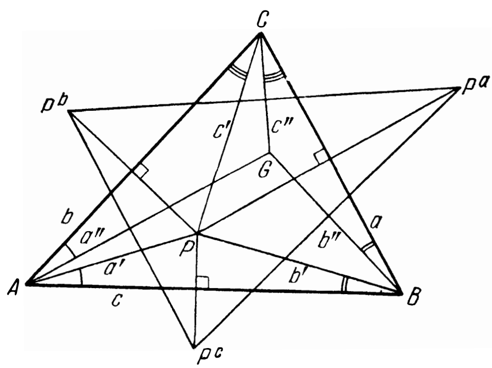


Рис. 16.

Соответствие $P\to G$ называется *изогональным соответствием*, отвечающим данному треугольнику.

Если построить теперь точки P^a, P^b, P^c, симметричные точке P по отношению к сторонам a, b, c треугольника, то, как в 5), A — пересечение медиатрис треугольника P^b, P, P^c, т. е. четвертая зеркальная a'' является медиатрисой точек P^b, P^c. Точно так же b'' — медиатриса точек P^c, P^a, а c'' — медиатриса точек P^a, P^b. Если поэтому прямые a'', b'', c'' не параллельны, то их пересечение — противоточка G точки P — является точкой пересечения медиатрис треугольника P^a, P^b, P^c.

Частный случай бесконечно удаленной изогональной противоточки приводит к теореме о вписанном в круг четырехугольнике. Чтобы ее сформулировать, введем новое определение, относящееся к двум парам (пересекающихся) прямых: мы будем говорить, что a, b и d, c определяют *равные* (ориентированные) *углы*, и писать

$$ab \equiv dc,$$

если для прямых $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, проведенных через точку O параллельно прямым a, b, c, d, выполняется равенство $\bar{a}\bar{b} = \bar{d}\bar{c}$. Это определение не зависит от выбора точки O. Введенное таким образом отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, и из $ab \equiv dc$ вытекает $ba \equiv cd$.

Теорема о вписанном четырехугольнике. *Пусть A, B, C, P — полный четырехугольник; точка A инцидентна прямым a', b, c; B инцидентна a, b', c; C инцидентна a, b, c'; P инцидентна a', b', c'; при этом прямые a', c, c', a не проходят все через одну точку. Тогда из $a'c = c'a$ следует, что $a'b \equiv b'a$ (а также, что $b'c \equiv c'b$).*

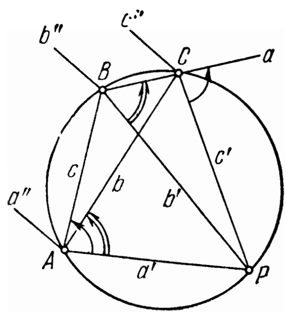


Рис 17.

Доказательство. Четвертые зеркальные a'', b'', c'' для заданных прямых определим равенствами

$$a'c = ba'', \tag{12}$$

$$b'a = cb'', \tag{13}$$

$$c'a = bc'' \tag{14}$$

(рис. 17). По теореме 9) прямые a'', b'', c'' принадлежат одному пучку. Покажем, что они параллельны, т. е. что изогональная противоточка точки P по отношению к треугольнику A, B, C — «бесконечно удаленная» точка. Из $a'c \equiv c'a$ и (12), (14) следует $ba'' \equiv bc''$, т. е. $a'' \parallel c''$. При этом $a'' \neq c''$, так как если бы было $a'' = c''$, то из (12), (14) следовало бы $a'c = c'a$, а поэтому прямые a', c, c', a проходили бы через одну точку. Так как прямые a'', b'', c'' принадлежат одному пучку и так как $a'' \neq c''$ и $a'' \parallel c''$, то $a'' \parallel b''$. Следовательно, $ca'' \equiv cb''$, — а отсюда с помощью (12) и (13) следует наше утверждение.

Троекратным применением теоремы о вписанном четырехугольнике можно доказать *аффинную теорему Паппа — Паскаля*.

Так как идея доказательства имеет фундаментальное значение, то она воспроизводится здесь по «Основаниям геометрии» Гильберта *):

Аффинная теорема Паппа — Паскаля. *Пусть* A_1, B_2, A_3, B_1, A_2, B_3 — *шестиугольник, вершины которого поочередно лежат на двух прямых* a *и* b; *точки* A_i (*где* $i=1, 2, 3$) *принадлежат* a (*но не* b!); *точки* B_i *принадлежат* b (*но не* a!). *Тогда если в двух парах противоположных сторон шестиугольника прямые попарно параллельны, то прямые третьей пары противоположных сторон также параллельны* (рис. 18, *а*).

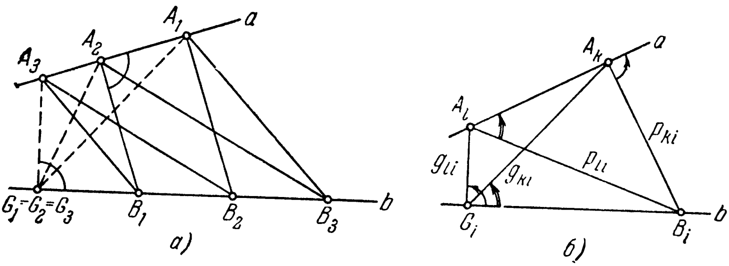


Рис. 18.

Доказательство. Обозначим прямую $(A_i,\ B_k)$, соединяющую A_i и B_k, где $i \neq k$, через p_{ik} и сформулируем условия и заключение теоремы, относящиеся к параллельности, так:

Пусть $p_{21}a \equiv p_{12}a$ *и* $p_{31}a \equiv p_{13}a$; *тогда* $p_{32}a \equiv p_{23}a$.

Для каждой циклической перестановки i, k, l чисел 1, 2, 3 подберем по точкам B_i, A_k, A_l точку G_i прямой b так, чтобы четырехугольник G_i, A_l, A_k, B_i удовлетворял условиям теоремы о вписанном четырехугольнике. Для этого точку $G_i \in b$ определим так, чтобы имело место равенство углов $bg_{li} \equiv p_{ki}a$, где $g_{li} = (A_l,\ G_i)$ (рис. 18, *б*). Тогда имеющаяся в теореме о вписанном четырехугольнике оговорка о том, что b, g_{li}, p_{ki}, a не проходят через одну точку, будет выполнена, ибо b не проходит через точку A_k пересечения двух разных прямых p_{ki}, a. А отсюда следует, что в силу теоремы о вписанном четырехугольнике для прямых $(A_k,\ G_i) = g_{ki}$ имеет место равенство углов $bg_{ki} \equiv p_{li}a$.

Итак, имеем

$bg_{31} \equiv p_{21}a,$	(15а)	$bg_{21} \equiv p_{31}a,$	(15б)
$bg_{12} \equiv p_{32}a,$	(16а)	$bg_{32} \equiv p_{12}a,$	(16б)
$bg_{23} \equiv p_{13}a,$	(17а)	$bg_{13} \equiv p_{23}a.$	(17б)

*) Ср. § 14 книги Гильберт [1]. *(Прим. ред.)*

Теперь воспользуемся условиями параллельности. Из $p_{21}a \equiv \equiv p_{12}a$ и (15a), (16a) следует, что прямые g_{31}, g_{32} параллельны, а так как у них есть общая точка A_3, то они совпадают. Поэтому не только прямая b, но и отличная от b прямая $g_{31}=g_{32}$ инцидентна двум точкам G_1, G_2; но это возможно, лишь если $G_1=G_2$. Аналогично, из $p_{31}a=p_{13}a$ и (15б), (17a) получаем $g_{21}=g_{23}$, откуда $G_1=G_3$. Значит, $G_2=G_3$, откуда $g_{12}=g_{13}$, а в силу (16a) и (17б) тогда $p_{32}a \equiv p_{23}a$.

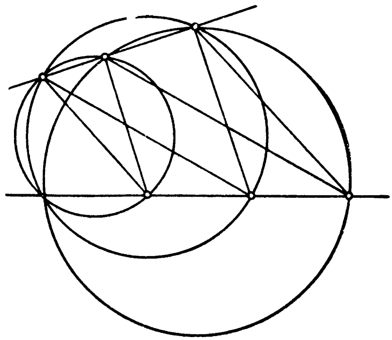


Рис. 19.

Доказательство показывает также, что *окружности, описанные около трех треугольников, содержащихся в шестиугольнике Паскаля и опирающихся на одну и ту же несущую прямую, пересекаются в общей точке, принадлежащей второй несущей прямой* (рис. 19).

Задачи. 1. $ASBSCS=1$ означает, что S — центр тяжести треугольника A, B, C.

2. Если A, B, C, P — четырехугольник с прямыми углами в вершинах A и C, то центр симметрии точек P^A, P^C является точкой пересечения высот треугольника A, B, C. С помощью этого замечания можно доказать теорему о высотах.

3. Точка пересечения высот и точка пересечения медиатрис треугольника находятся в изогональном соответствии.

4. Если во вписанном четырехугольнике A, B, C, P опустить из P перпендикуляры на стороны a, b, c треугольника A, B, C, то основания их принадлежат одной прямой s (*«прямая Симсона»*); прямые a'', b'', c'', фигурирующие в доказательстве теоремы о вписанном четырехугольнике, перпендикулярны s, т. е. («бесконечно удаленная») изогональная противоточка точки P — это пучок перпендикуляров к s.

Литература к § 1. Винер [1], Кэзи [1], Гильберт [1], Гессенберг [1], [3], Йельмслев [1], [2], Шур [1], Шван [2], Томсен [3], Ван дер Варден [3], Ижерен [1], Гузе [1], Керекьярто [1]. (См. также, например, Егер [2], Ленц [3], Яглом [1]. *Прим. ред.*)

§ 2. Понятие метрической плоскости

Понятие метрической плоскости, являющееся объектом нашего изучения, охватывает не только евклидовы, но и неевклидовы плоскости. Чтобы составить представление о неевклидовой плоскости, мы кратко напомним построение ее классической модели. Доказательств мы приводить не будем, ибо позже в рамках наших построений будут определены общие эллиптическая и гиперболическая плоскости — и там будут проведены все необходимые доказательства.

Во второй части этого параграфа мы введем общее понятие метрической плоскости.

1. Модель непрерывной эллиптической плоскости. Будем исходить из трехмерного «непрерывного» евклидова пространства, которое можно определить аксиоматически, приняв систему аксиом Гильберта, включая аксиомы непрерывности. Моделью непрерывной эллиптической плоскости служит сфера непрерывного евклидова пространства, диаметрально противоположные точки которой отождествлены. *Точка P модели* — это пара диаметрально противоположных точек сферы; *прямая g модели* — это большой круг сферы с отождествленными диаметрально противоположными точками.

На модели две разные «прямые» всегда имеют одну общую «точку». Отношение инцидентности на эллиптической плоскости то же, что и на проективной плоскости. Отношение порядка здесь может быть описано в терминах отношения разделения для четырех точек одной прямой.

Мы говорим, что две «прямые» на модели *перпендикулярны*, если соответствующие им большие круги взаимно перпендикулярны. Все прямые эллиптической плоскости, перпендикулярные фиксированной прямой g, проходят через одну точку P, называемую *полюсом* прямой g. Для всякой точки P найдется прямая g такая, что все прямые, проходящие через P, перпендикулярны g; g называется *полярой* точки P. Соответствие между полюсом и полярой устанавливает взаимно однозначное отображение множеств точек и прямых на множества прямых и точек с сохранением инцидентности, т. е. то, что называется *корреляцией*. Если P — полюс g, то g — поляра P, т. е. корреляция инволютивна. Точки поляры точки P сами называются *полярными* к P. Всякие две различные прямые имеют по крайней мере один общий перпендикуляр — поляру их точки пересечения.

Движения эллиптической плоскости задаются евклидовыми движениями сферы, переводящими ее в себя.

Всякое евклидово движение сферы, переводящее ее в себя и сохраняющее ориентацию в евклидовом пространстве, представляет собой поворот сферы вокруг некоторой оси, проходящей через центр сферы. Евклидова симметрия относительно центра сферы меняет местами диаметрально противоположные точки сферы и поэтому на эллиптической плоскости оказывается тождественным движением. Отсюда следует, что те евклидовы движения сферы, которые переводят ее в себя и меняют ориентацию в евклидовом пространстве, на эллиптической плоскости совпадают с движениями, порожденными поворотами сферы. В частности, евклидова симметрия относительно плоскости, проходящей через центр сферы, приводит к тому же эллиптическому движению, что и евклидов поворот сферы на угол π вокруг диаметра, перпендикулярного к этой плоскости; ведь они различаются только на евклидову симметрию относительно центра сферы.

Таким образом, всякое движение эллиптической плоскости индуцируется евклидовым поворотом сферы вокруг некоторой оси, проходящей через центр сферы. Если евклидов поворот отличен от тождества, то ось определена однозначно; она пересекает сферу в некоторой (одной!) «точке» модели. Всякое отличное от тождества движение эллиптической плоскости поэтому оказывается поворотом вокруг некоторой однозначно определенной точки этой плоскости. Поворот вокруг точки P на угол π представляет собой *симметрию* эллиптической плоскости *относительно точки* P. В силу сделанного выше замечания эта симметрия совпадает с *симметрией* эллиптической плоскости *относительно поляры* g *точки* P. Таким образом, *на эллиптической плоскости всякая центральная симметрия совпадает с некоторой осевой симметрией, и наоборот*. Иными словами, всякая симметрия на эллиптической плоскости является симметрией относительно пары полюс — поляра как «центра» и «оси» этой симметрии. Всякий поворот эллиптической плоскости вокруг точки P можно представить как произведение двух симметрий, осями которых являются прямые эллиптической плоскости, проходящие через точку P, а центрами — точки, полярные к P.

При изучении эллиптической геометрии часто бывает удобно рассматривать пару полюс — поляра как единое целое. При этом важно некоторое отношение между двумя парами полюс — поляра A, a и B, b, которое мы назовем *отношением инцидентности пар* и определим четырьмя условиями: 1) A и b инцидентны; 2) a и B инцидентны; 3) a и b перпендикулярны; 4) A и B полярны. Каждое из этих четырех условий влечет за собой остальные три. Для всяких двух разных пар полюс — поляра A, a и B, b всегда найдется единственная пара полюс — поляра C, c, которая инцидентна им обеим. При этом c оказывается прямой, соединяющей точки A и B, или, что то же самое, общим перпендикуляром a и b, а C — точкой пересечения a и b, т. е. точкой, полярной A и B. В частности, если сами пары A, a и B, b инцидентны, то эти три пары образуют *полярный треугольник*. Всякое неинволютивное и нетождественное движение эллиптической плоскости имеет единственную однозначно определенную неподвижную пару полюс — поляра P, g; для симметрий относительно P, g неподвижными являются также все пары полюс — поляра, инцидентные P, g.

Другую модель эллиптической плоскости, очевидным образом связанную с моделью, изображающей эллиптическую плоскость как сферу, можно получить так: рассмотрим в трехмерном непрерывном евклидовом пространстве прямые и плоскости, проходящие через фиксированную точку O, и назовем прямые, проходящие через O, *точками модели*, а плоскости, проходящие через O, — *прямыми модели*. Мы говорим, что точка и прямая этой модели инцидентны, если они инцидентны как объекты евклидовой геометрии. Перпендикулярность прямых на модели вводится как евклидова ортогональность плоскостей, а полярность — как евклидова ортогональность прямых и плоскостей. Предоставим читателю перенести на эту «*модель-связку*» рассуждения, проведенные нами для «модели-сферы».

От модели-связки, пополняя евклидово пространство *бесконечно удаленными элементами*, можно прийти к третьей модели эллиптической плоскости. В этой модели точками и прямыми являются точки и прямые *бесконечно удаленной плоскости* (получающиеся при пересечении связки бесконечно удаленной плоскостью), которая сама является проективной плоскостью. Евклидова ортогональность прямых и плоскостей связки определяет поляритет (инволютивную корреляцию) на проективной плоскости. При этом ни одна точка не инцидентна со своей полярой. Инволютивные движения эллиптической плоскости в этой модели оказываются *гармоническими гомологиями*, центром которых является некоторая точка P, а осью — ее поляра g: P и точки прямой g являются неподвижными точками этого преобразования, а всякая отличная от них точка A модели отображается в точку A^* прямой v, соединяющей P и A, причем так, что A и A^* расположены гармонически по отношению к P и точке S пересечения v и g (рис. 20).

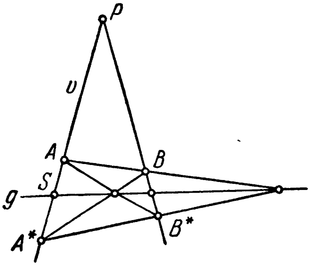


Рис. 20.

Итак, непрерывную плоскую эллиптическую геометрию можно представить себе в виде геометрии сферы с отождествленными диаметрально противоположными точками в непрерывном трехмерном евклидовом пространстве, как геометрию связки того же пространства и, наконец, как геометрию бесконечно удаленной плоскости этого евклидова пространства *).

*) То есть просто как геометрию некоторой проективной плоскости. (*Прим. ред.*)

2. Модель Клейна непрерывной гиперболической плоскости. Эта модель непрерывной гиперболической плоскости получается так:

Рассмотрим некоторый круг непрерывной евклидовой плоскости. *Точками модели* назовем точки, лежащие внутри круга, а *прямыми модели* — евклидовы отрезки прямых, содержащиеся внутри круга. Всякие две разные «точки» модели имеют единственную соединяющую их «прямую», как и на евклидовой плоскости; здесь выполняются также все гильбертовы аксиомы порядка. Что же касается пересечения прямых, то в этой модели выполняется гиперболическая аксиома параллельности; в формулировке Гильберта она гласит:

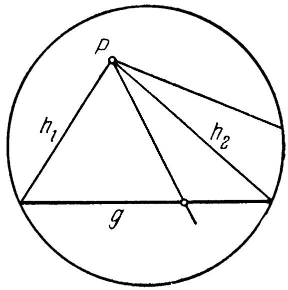


Рис. 21.

Если g — прямая, а P — не принадлежащая ей точка, то существуют два луча h_1 и h_2, исходящие из P, не лежащие на одной прямой, не пересекающие g и такие, что всякий луч, выходящий из P и заключенный внутри угла, образованного h_1 и h_2, пересекает g (рис. 21).

h_1 и h_2 — это лучи, соединяющие точку P с точками, в которых прямая g пересекает окружность (эти точки пересечения не принадлежат внутренности круга, а поэтому не принадлежат гиперболической плоскости). Две «предельные прямые», на которых расположены лучи h_1 и h_2, называются (гиперболическими) *параллелями* к прямой g, проходящими через точку P. На гиперболической плоскости те прямые, проходящие через P, которые проходят вне угла между лучами h_1 и h_2, также не пересекают прямой g. Следовательно, *через P проходит бесконечно много прямых, не пересекающих g.*

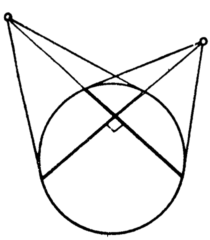


Рис. 22.

Как известно, на евклидовой плоскости, пополненной бесконечно удаленными элементами, заданием окружности определяется поляритет. При этом полярой точки, лежащей на окружности, является касательная к окружности, проходящая через эту точку. Две прямые модели называются *перпендикулярными*, если в обогащенной плоскости каждая из них проходит через полюс другой (рис. 22). Для двух разных прямых a и b модели возможны три взаимно исключающие друг друга возможности: 1) a и b пересекаются в точке модели; 2) a и b гиперболически параллельны (пересекаются в точке окружности); 3) a и b имеют общий перпендикуляр (который всегда определен однозначно).

Движения модели — это те коллинеации обогащенной плоскости, которые переводят круг в себя. Инволютивные движения задаются теми гармоническими гомологиями, центром которых является не принадлежащая окружности точка, а осью — поляра этой точки. Такая гармоническая гомология называется *центральной симметрией* в гиперболической плоскости, если ее центром является точка модели, и *осевой симметрией*, если ее ось является прямой модели (рис. 23). Всякое движение гиперболической плоскости можно представить в виде произведения осевых симметрий.

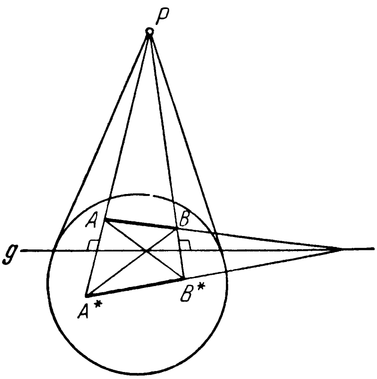


Рис. 23.

Отметим, что перпендикулярность прямых, проходящих через центр окружности, совпадает с евклидовой перпендикулярностью. Это связано с тем, что «в точке» гиперболическая и евклидова геометрии не различаются.

Подобно тому, как мы изобразили эллиптическую плоскость в виде проективной, можно представить гиперболическую плоскость в виде проективной плоскости, в которой задан некоторый поляритет. Для поляритета имеются две возможности: 1) ни одна точка не инцидентна своей поляре, 2) множество точек, инцидентных своим полярам, образуют коническое сечение, основной образ поляритета. В первом случае проективная плоскость дает модель эллиптической плоскости, а во втором внутренность конического сечения доставляет модель гиперболической плоскости. В обоих случаях движения — это те коллинеации, которые сохраняют поляритет, а инволютивные движения — это гармонические гомологии, центром и осью которой является пара полюс — поляра, причем полюс и поляра, разумеется, должны быть неинцидентными.

Представляется естественным, что эти построения не зависят от непрерывности и что при отказе от непрерывности на проективной плоскости можно получить более общие эллиптическую и гиперболическую плоскости.

Для непрерывных неевклидовых плоскостей существуют и другие модели, интересные тем, что они связывают неевклидовы плоскости с другими областями математики. Здесь мы отошлем читателя к многочисленным учебным изложениям неевклидовых геометрий.

3. Метрические плоскости. Определим аксиоматически, что мы будем понимать под метрической плоскостью.

Рассмотрим два множества объектов, называемых точками и прямыми, и два отношения: *точка A и прямая b инцидентны* и *прямая a перпендикулярна прямой b* *).

Взаимно однозначное отображение множеств точек и прямых каждое на себя, при котором сохраняется инцидентность и перпендикулярность, мы по определению назовем *ортогональной коллинеацией*. Инволютивную ортогональную коллинеацию, при которой каждая точка прямой g переходит в себя, назовем *симметрией относительно прямой g*, или *осевой симметрией*.

Множество точек и прямых назовем *метрической плоскостью*, если выполнены следующие аксиомы:

1. Аксиомы инцидентности. *Существует по крайней мере одна прямая. Каждой прямой инцидентны по крайней мере три точки. Для всяких двух разных точек существует единственная прямая, которой они инцидентны.*

2. Аксиомы ортогональности. *Если a перпендикулярна b, то b перпендикулярна a. Перпендикулярные прямые имеют общую точку. Через каждую точку проходит перпендикуляр к любой заданной прямой; если точка инцидентна прямой, то этот перпендикуляр единственный.*

3. *Для каждой прямой существует по крайней мере одна симметрия относительно этой прямой* (аксиома симметрии). *Суперпозиция симметрий относительно трех прямых a, b, c, имеющих общую точку или общий перпендикуляр, совпадает с симметрией относительно некоторой прямой d* (теорема о трех симметриях**); ср. п. 2 § 1.)

Отображения метрической плоскости на себя, которые получаются суперпозицией осевых симметрий, называются *движениями* метрической плоскости. Движения образуют группу, называемую *группой движений* метрической плоскости.

Заметим, что аксиомы инцидентности и ортогональности совместно с аксиомой симметрии исключают существование

---

*) Вместо того чтобы говорить «точка и прямая инцидентны», мы часто будем, как обычно, говорить «точка лежит на прямой», «точка принадлежит прямой», «прямая проходит через точку» и т. п Вместо «a перпендикулярна b» будем говорить «a ортогональна b», «a является перпендикуляром к b» и т. п.

**) В некоторых частных случаях теорему о трех симметриях можно вывести из предыдущих аксиом, например, если прямые a, b, c не все различны (см. ниже п. 4) или если прямые a, b, c инцидентны одной точке и две из этих прямых взаимно перпендикулярны (см. ниже (IV), (V) п. 5).

прямых, перпендикулярных самим себе. В самом деле, перпендикулярная самой себе прямая g должна была бы быть перпендикулярной *только* самой себе, ибо всякая прямая, перпендикулярная g, должна иметь с g общую точку, а из последней аксиомы ортогональности следует, что существует единственная прямая, перпендикулярная g и проходящая через эту точку. Так как, с другой стороны, через каждую точку плоскости проходит перпендикуляр к g, то мы заключаем, что все точки плоскости инцидентны g. В силу аксиом инцидентности g была бы единственной прямой плоскости и, следовательно, не существовало бы симметрии относительно прямой g.

В то время как гильбертова система аксиом для евклидовой геометрии явилась аксиоматическим обоснованием давно разрабатывавшейся теории, не существует столь же четко очерченной теории, аксиоматический вариант которой дается нашей системой аксиом. Система аксиом состоит из нескольких элементарных утверждений, каждое из которых во всяком случае справедливо в классической евклидовой и классических неевклидовых плоскостях. Последующие построения должны прояснить значимость этих утверждений и сделать теорию метрических плоскостей осмысленной.

Чтобы читатель уяснил себе общность понятия метрической плоскости, укажем на следующее обстоятельство. В нашей системе аксиом нет никаких отношений порядка, никаких аксиом порядка (и поэтому, конечно, никакой аксиомы непрерывности). За счет этого делается возможным включить в рассмотрение эллиптические плоскости. Далее, для двух данных прямых не обязательно существует движение, совмещающее их; то же относится и к точкам. Следовательно, в метрической плоскости, вообще говоря, нет свободной подвижности. Что касается пересечения двух прямых, то здесь постулируется лишь существование точки пересечения двух взаимно перпендикулярных прямых. Однако никакого утверждения, родственного евклидовой или гиперболической «аксиоме о параллельных», здесь заранее не высказывается. Таким образом, наша система аксиом охватывает то содержание метрической геометрии, которое не зависит от порядка, свободной подвижности, от теории параллельных и от пространственных допущений. Теорию метрических плоскостей мы назовем *плоской метрической геометрией.*

Из тех аксиоматических описаний метрических плоскостей, в которых принимают отношение порядка и требование свободной подвижности, но отказываются от аксиомы параллельности и аксиомы непрерывности, более всего известен имеющийся в «Основаниях геометрии» Гильберта вариант, где трактуются следствия из одних лишь аксиом инцидентности, аксиом порядка и аксиом конгруэнтности; однако эллиптическая геометрия здесь исключается. Весьма основательное обоснование геометрии на базе этих групп аксиом провел в 1907 г. Йельмслев. Он, как прежде Гессенберг при обосновании плоской эллиптической геометрии без помощи аксиом непрерывности, существенно опирался на симметрии и почти не пользовался отношением порядка. В 1929 г. Йельмслев начал свои исследования по «общему учению о конгруэнтности», в котором он отказался от отношения порядка и от свободной подвижности. Побуждаемый своими работами по «геометрии реальности», он в значительной мере отказался и от однозначности, а также и от существования прямых, соединяющих пары точек. Этому направлению Йельмслева, которое в последующем нашло свое возрождение в работах Клингенберга о «плоскостях со смежными элементами», мы не уделим в этой книге никакого внимания. Если же ограничиться только «простейшими случаями» систем аксиом Йельмслева, в которых постулируются существование и однозначность соединительных прямых, то его система аксиом оказывается менее общей, нежели наша: он требует, чтобы всякие две точки можно было совместить друг с другом и чтобы перпендикуляр к прямой определялся однозначно, а последнее исключает эллиптические плоскости.

В 1934 г. Подел и Райдемайстер предложили систему аксиом, охватывающую эллиптический случай и не связанную с отношением порядка; она соответствовала нашей в том, что не предполагала свободной подвижности. При этом вопрос о неэллиптическом случае остался в стороне. В этой системе аксиом наряду с отношением инцидентности и перпендикулярности в качестве первичного вводилось также отношение конгруэнтности. Но вместо последнего, используемого к тому же очень умеренно, можно привлечь в качестве первичного понятие осевой симметрии. Это сделал впервые в 1943 г. Арнольд Шмидт, который наряду с требованием существования осевых симметрий ввел в число аксиом предложение о трех симметриях, роль которого была прояснена работами Гессенберга и Йельмслева. Так возникла идея о том, что понятие осевой симметрии является фундаментальным геометрическим понятием, позволяющим ввести остальные движения как суперпозиции осевых симметрий. В 1956 г. Шютте заметил, что при наличии аксиом инцидентности и ортогональности из существования по крайней мере одной симметрии относительно каждой прямой вытекает однозначность симметрий относительно прямых. Это открыло возможность описать метрическую плоскость посредством неопределяемых понятий «точка» и «прямая» и основных отношений инцидентности и ортогональности, как это и сделано выше.

4. Построение плоской метрической геометрии в терминах группы движений. Покажем, что теория метрических плоскостей может быть полностью сформулирована в терминах их группы движений. Это обстоятельство, как заметил уже Шютте, не зависит от того, принята ли теорема о трех симметриях в качестве аксиомы, и справедливо для всякой плоскости, на которой выполняются сформулированные выше аксиомы инцидентности и ортогональности, а также аксиома симметрии. Мы будем называть эти более общие плоскости, имеющие существенное значение для развития того хода мыслей, которого мы придерживаемся в этой книге, *обобщенными метрическими плоскостями.* Сформулируем теоремы, которые справедливы для таких плоскостей и которые достаточны для достижения нашей цели (доказательства приводятся в п. 5).

Аксиомами обобщенной метрической плоскости (как и аксиомами метрической плоскости) допускается, что, подобно тому, как обстоит дело в классической эллиптической плоскости, две разные прямые одновременно имеют общую точку P и перпендикулярны некоторой прямой g. В этом случае мы назовем точку P и прямую g *полярными*; точку P — *полюсом* прямой g, а прямую g — *полярой* этой точки P.

Теорема 1. *Если P и g полярны, то P и g не инцидентны, и всякий перпендикуляр к g проходит через P, а всякая прямая, проходящая через P, перпендикулярна g.*

Теорема 2. *Всякая прямая имеет не более одного полюса; всякая точка имеет не более одной поляры.*

Конечно же, в обобщенной метрической плоскости может вообще не быть полярных элементов *).

Очень важна следующая

Теорема 3 (Шютте). *Существует не более одной симметрии относительно данной прямой. Соответствие между осевыми симметриями и прямыми взаимно однозначно.*

Инволютивная ортогональная коллинеация, оставляющая на месте каждую прямую, проходящую через данную точку P, называется *симметрией относительно точки P (центральной симметрией)*.

Теорема 4. *Для всякой точки существует единственная симметрия относительно этой точки. Симметрию относительно точки P можно представить в виде произведения симметрий относительно двух произвольных ортогональных прямых, проходящих через P. Соответствие между точками и симметриями относительно точек (центральными симметриями) взаимно однозначно.*

Теорема 5. *Симметрия относительно прямой и симметрия относительно точки совпадают тогда и только тогда, когда точка и прямая полярны.*

---

*) Справедлива такая теорема: *Если в обобщенной метрической плоскости есть одна пара полюс — поляра, то всякая точка имеет поляру, а всякая прямая имеет полюс.*

Доказательство. Прежде всего с помощью теоремы 1 установим, что (*) *если A и b инцидентны, то из того, что A обладает полярой, вытекает, что b обладает полюсом, и обратно.* В самом деле, если a — поляра A, то и b, и перпендикуляр c, проведенный к b в точке A, перпендикулярны a; тогда точка пересечения a и c есть полюс прямой b. Обратно, если B — полюс b, то перпендикуляр к соединительной прямой (B, A), проходящий через B, является полярой A.

Пусть теперь P — та точка из условия теоремы, которая имеет поляру. Отсюда, применяя (*), получаем, что каждая прямая, проходящая через P, имеет полюс, а поскольку каждая точка лежит на одной из таких прямых, то всякая точка имеет поляру. Так как всякая прямая инцидентна некоторой точке, то тогда всякая прямая имеет полюс.

Совместно с теоремой 2 доказательство (*) дает:

Если A и b инцидентны, то поляра A и полюс b инцидентны.

Будем обозначать симметрию относительно прямой g через σ_g, а симметрию относительно точки P — через σ_P. В силу теорем 3 и 4 об однозначности имеем

$$\sigma_a^{\sigma_g} = \sigma_{a\sigma_g}, \tag{1}$$

$$\sigma_A^{\sigma_g} = \sigma_{A\sigma_g}. \tag{2}$$

В самом деле, $\sigma_a^{\sigma_g}$ — ортогональная коллинеация, оставляющая на месте каждую точку прямой $a\sigma_g$. Она инволютивна, ибо получается из инволютивной коллинеации внутренним автоморфизмом. В силу теоремы 3 она является однозначно определенной симметрией относительно прямой $a\sigma_g$. Точно так же получаем (2) с помощью теоремы 4.

Утверждения (1) и (2) показывают, что внутренний автоморфизм, определенный некоторой осевой симметрией, переводит осевые и центральные симметрии снова в осевые и центральные симметрии. Эти утверждения можно еще сформулировать так:

$$a\sigma_g = b \quad \textit{равносильно} \quad \sigma_a^{\sigma_g} = \sigma_b, \tag{3}$$

$$A\sigma_g = B \quad \textit{равносильно} \quad \sigma_A^{\sigma_g} = \sigma_B. \tag{4}$$

Отсюда получаем

a *перпендикулярна* b *равносильно* $\sigma_a\sigma_b$ *инволютивно*, (5)

A *инцидентна* b *равносильно* $\sigma_A\sigma_b$ *инволютивно*. (6)

Доказательство (5). a и b перпендикулярны в том и только в том случае, когда a — неподвижная прямая движения σ_b, отличная от b (см. ниже п. 5 (I)), т. е. когда $a\sigma_b = a$ и $a \neq b$. В силу (3) и однозначности сопоставления прямых осевым симметриям это равносильно тому, что $\sigma_a^{\sigma_b} = \sigma_a$ и $\sigma_a \neq \sigma_b$, — а это означает, что $\sigma_a\sigma_b$ инволютивно.

Доказательство (6). A и b инцидентны тогда и только тогда, когда A — неподвижная точка σ_b, не полярная b (см. п. 5 (II)). Это же в силу (4) и теоремы 5 равносильно тому, что $\sigma_A^{\sigma_b} = \sigma_A$ и $\sigma_A \neq \sigma_b$; но последнее означает, что $\sigma_A\sigma_b$ инволютивно.

Объединяя сказанное выше, получаем: точкам и прямым обобщенной метрической плоскости (в частности, метрической плоскости) взаимно однозначно отвечают осевые и центральные симметрии, т. е. (инволютивные) элементы порожденной осевыми симметримия группы движений. Если заменить прямые и точки симметриями относительно этих прямых и точек, а аксиоматически заданные отношения инцидентности и перпендикулярности — теоретико-групповыми отношениями между симметриями, указанными в правых частях равенств (6) и (5), то группа движений доставит нам изоморфный образ данной обобщенной метрической плоскости. Операции осевой симметрии отвечает при этом теоретико-групповой внутренний автоморфизм, порожденный этой осевой симметрией (см. (3) и (4)). Следовательно, теорию обобщенной метрической плоскости можно сформулировать на языке теории групп движений.

5. Доказательства. Приведем, следуя Лингенбергу, доказательства теорем 1—5 п. 4, относящихся к обобщенной метрической плоскости.

(I) *Все неподвижные прямые ортогональной коллинеации $\alpha \neq 1$, оставляющей на месте все точки некоторой прямой g, — это сама прямая g и перпендикуляры к ней.*

Доказательство. Надо показать, что нет других неподвижных прямых, кроме указанных. Если u — неподвижная прямая коллинеации α, не перпендикулярная g, то всякая точка U прямой u является неподвижной точкой α, ибо если u' — перпендикуляр из U на g, то u' — неподвижная прямая α, отличная от u, и точка U, как точка пересечения двух разных неподвижных прямых, сама будет неподвижной точкой α.

Допустим теперь, что есть неподвижная прямая h коллинеации α, которая отлична от g и не перпендикулярна g. Рассмотрим произвольную точку P. Из P опустим на g перпендикуляр a, основание которого обозначим через A (рис. 24). Выберем на h точку B, не лежащую ни на g, ни на a, и проведем однозначно определяемую прямую b, соединяющую A и B. Прямая b не совпадает ни с g, ни с a. Так как A и B — неподвижные точки коллинеации α, то b — неподвижная прямая для α, а так как b не перпендикулярна g, то всякая точка b — неподвижная точка для α, т. е. каждая прямая, перпендикулярная b, является неподвижной прямой коллинеации α. Теперь если из P опустить на b перпендикуляр c, то $c \neq a$ и P, как точка пересечения двух разных неподвижных прямых a и c, является неподвижной точкой α. Итак, наше допущение привело нас к тому, что *каждая* точка является неподвижной, т. е. что $\alpha = 1$; но это противоречит условию.

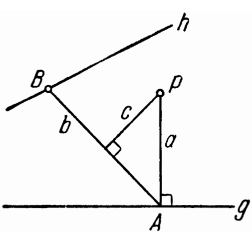


Рис. 24.

Доказательство теоремы 1. Первое утверждение вытекает из однозначности восставленного перпендикуляра. Если P — полюс g, а c — перпендикуляр к g, пересекающий g в точке C, то при симметрии относительно g точка P остается неподвижной, как точка пересечения двух неподвижных прямых, равно как неподвижна и точка C. Поэтому прямая (P, C) неподвижна. Следовательно, по (I) (P, C) перпендикулярна g, а в силу однозначности восставленного перпендикуляра $(P, C) = c$. Следовательно, c проходит через P. С другой стороны, если d — произвольная прямая, проходящая через P, то выберем $D \neq P$ на d и опустим из нее перпендикуляр d' на g. По доказанному d' проходит через P, т. е $d' = d$; следовательно, d перпендикулярна g.

Доказательство теоремы 2. Так как по теореме 1 все прямые, перпендикулярные g, проходят через полюс g, то существует не более одного полюса g. Если g и g' — две поляры одной точки P, то проведем через P две взаимно перпендикулярные прямые a и b; они обе будут перпендикулярны как g, так и g'. Пусть A, A', соответственно B, B', — точки пересечения g, g' с a, соответственно с b. Тогда A, A' — полюсы b, а B, B' — полюсы a. В силу уже доказанной однозначности полюса получаем $A=A'$ и $B=B'$, т. е. $g=(A,B)=(A',B')=g'$.

В последующих теоремах и доказательствах, когда речь идет о полюсе прямой или поляре точки, надо все время подразумевать: «если он (или она) существует».

(II) *Все неподвижные точки ортогональной коллинеации* $\alpha\neq 1$, *оставляющей на месте все точки прямой* g, — *это точки прямой* g *и полюс* g.

Доказательство. В самом деле, если P — неподвижная точка коллинеации α, не принадлежащая g, то прямая, соединяющая P со всякой точкой прямой g, будет неподвижной прямой коллинеации α, т. е. по (I) она перпендикулярна g; поэтому P — это полюс g.

(III) *Ортогональная коллинеация* $\alpha\neq 1$, *оставляющая на месте все прямые, проходящие через точку* P, *не имеет никаких неподвижных точек, кроме точки* P *и точек ее поляры, и никаких неподвижных прямых, кроме прямых, проходящих через* P, *и поляры точки* P.

Доказательство. В силу теоремы 2 поляра точки P, будучи общим перпендикуляром всех прямых, проходящих через P, является неподвижной прямой коллинеации α. Кроме того, точка Q поляры принадлежит неподвижной прямой (Q,P), а поэтому является неподвижной точкой. Если бы существовала отличная от P неподвижная точка коллинеации α, не принадлежащая поляре точки P, то всякая проходящая через эту точку прямая была бы неподвижна, ибо она является однозначно определенным перпендикуляром к некоторой прямой, проходящей через P, т. е. она является некоторой неподвижной прямой; поэтому всякая точка была бы неподвижна и мы имели бы $\alpha=1$. Если бы, далее, существовала не проходящая через P и не полярная P неподвижная прямая h, то основание перпендикуляра, опущенного из P на h, было бы неподвижной точкой, отличной от точки P и не лежащей на поляре точки P.

(IV) *Если* σ_a *и* σ_b — *симметрии относительно двух перпендикулярных прямых* a *и* b, *проходящих через точку* P, *то* $\sigma_a\sigma_b$ — *симметрия относительно точки* P.

Доказательство распадается на три этапа.

а) *Единственная неподвижная точка* $\sigma_a\sigma_b$, *не принадлежащая поляре точки* P, — *это точка* P.

Доказательство. Пусть Q — неподвижная точка $\sigma_a\sigma_b$, т. е. $Q\sigma_a=Q\sigma_b$. Допустим, что Q не принадлежит поляре точки P. Тогда существуют однозначно определенные перпендикуляры a' и b', восставленные из Q к a и к b. При этом $a'\neq b'$. Так как $Q\sigma_a$ принадлежит a' и $Q\sigma_b$ принадлежит b', то точка $Q\sigma_a=Q\sigma_b$ должна совпадать с Q. Следовательно, Q — общая неподвижная точка симметрий σ_a и σ_b. Так как по допущению она не является полюсом ни a, ни b, то по (II) Q является общей точкой a и b, т. е. совпадает с P.

б) $\sigma_a\sigma_b$ *инволютивно.*

Доказательство. $(\sigma_a\sigma_b)^2$ оставляет неподвижной каждую точку прямых a и b, а значит, по (II) является тождеством. В силу а) $\sigma_a\sigma_b$ не тождество.

в) *Всякая прямая, проходящая через* P, *является неподвижной прямой инволюции* $\sigma_a\sigma_b$.

Доказательство. Пусть c — прямая, проходящая через P, а Q — точка c, отличная от P и не принадлежащая поляре точки P. По а) Q отлична от своего образа $Q^*=Q\sigma_a\sigma_b$, а по б) прямая (Q,Q^*) неподвижна. Перпендикуляр из P на эту прямую определен однозначно и его основание является неподвижной точкой, не принадлежащей поляре точки P.

Следовательно, по а) его основание совпадает с P, а неподвижная прямая (Q, Q^*) совпадает с c.

Доказательство теоремы 3. Пусть σ_g и $\hat{\sigma}_g$ — симметрии с одной и той же осью g. Выберем на g точку P и восставим в ней перпендикуляр h (рис. 25). Пусть σ_h — фиксированная симметрия относительно h. Тогда $\sigma_h\sigma_g$ и $\sigma_h\hat{\sigma}_g$ будут по (IV) симметриями относительно точки P. Теперь выберем точку Q, не принадлежащую ни g, ни h. Обе точки $Q\sigma_h\sigma_g$ и $Q\sigma_h\hat{\sigma}_g$ принадлежат, с одной стороны, однозначно определенному перпендикуляру l из точки $Q\sigma_h$ на прямую g, а с другой стороны, прямой (Q, P). Имеем $l \neq (Q, P)$, а значит, $Q\sigma_h\sigma_g = Q\sigma_h\hat{\sigma}_g$. Следовательно, по б) также $Q\sigma_g\sigma_h = Q\hat{\sigma}_g\sigma_h$, т. е. $Q\sigma_g = Q\hat{\sigma}_g$; другими словами, Q — неподвижная точка для $\sigma_g\hat{\sigma}_g$. Отсюда по (II) вытекает, что $\sigma_g\hat{\sigma}_g = 1$, т. е. $\sigma_g = \hat{\sigma}_g$. То, что симметрии относительно *разных* прямых не совпадают, вытекает уже из (II).

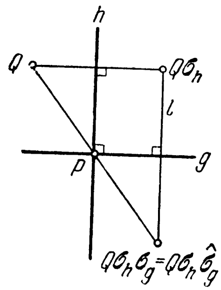


Рис. 25.

(V) *Если σ_P — симметрия относительно точки P, а σ_a, σ_b — симметрии относительно двух перпендикулярных прямых a и b, проходящих через P, то $\sigma_a\sigma_P = \sigma_b$, т. е. $\sigma_P = \sigma_a\sigma_b$.*

Доказательство (V), аналогично (IV), проводится в три этапа.

а′) *Неподвижными точками коллинеации $\sigma_a\sigma_P$ могут быть только неподвижные точки симметрии σ_b.*

Доказательство. Пусть Q — неподвижная точка $\sigma_a\sigma_P$, т. е. $Q\sigma_a = Q\sigma_P$. Допустим, что Q не принадлежит b. Тогда существует однозначно определенная прямая a', перпендикулярная a и проходящая через Q. Так как $Q\sigma_a$ принадлежит a', а $Q\sigma_P$ — прямой (Q, P) и так как $a' \neq (Q, P)$, то $Q\sigma_a = Q\sigma_P = Q$. Значит, Q — общая неподвижная точка для σ_a и σ_P, и в силу (II) и (III) Q может быть только полюсом прямой b.

б′) *$\sigma_a\sigma_P$ инволютивно.*

Доказательство. При $(\sigma_a\sigma_P)^2$ каждая точка прямой a и каждая прямая, проходящая через точку P, неподвижны, а значит, по (I) $(\sigma_a\sigma_P)^2 = 1$. В силу а′) $\sigma_a\sigma_P \neq 1$.

в′) *$\sigma_a\sigma_P$ переводит перпендикуляры к b в себя.*

Доказательство Пусть c — перпендикуляр к b. Так как a и поляра P — неподвижные прямые как симметрии σ_a, так и σ_P, а поэтому и коллинеации $\sigma_a\sigma_P$, то мы можем считать, что c отлична от a и от поляры P. Выберем точку Q на c, которая не принадлежит ни b, ни поляре P. По а′) Q отлична от своего образа $Q^* = Q\sigma_a\sigma_P$ и по б′) прямая (Q, Q^*) неподвижна. Она не проходит через P. Перпендикуляр l из точки P на прямую (Q, Q^*) определен однозначно; его основание F является неподвижной точкой, отличной от P и от полюса прямой b. Тогда F — точка прямой b по а′), т. е. $l = (P, F) = b$; т. е. (Q, Q^*) перпендикулярна b. Так как Q не является полюсом b, то $(Q, Q^*) = c$, а значит, c — неподвижная прямая.

Так как ортогональная коллинеация $\sigma_a\sigma_P$ по б′) инволютивна, а по в′) каждая точка прямой b неподвижна, то по теореме 3 $\sigma_a\sigma_P$ является однозначно определенной симметрией относительно прямой b. Этим утверждение (V) доказано

Доказательство теоремы 4. По (IV) произведение симметрий относительно двух перпендикулярных прямых, проходящих через точку P, является симметрией относительно P. С другой стороны, если взять симметрии $\sigma_a\sigma_b$ относительно двух фиксированных взаимно перпендикулярных прямых a и b, проходящих через P, то для всякой симметрии σ_P в силу (V) имеет место $\sigma_P=\sigma_a\sigma_b$. Следовательно, есть только одна симметрия относительно P. То, что симметрии относительно разных точек не совпадают, вытекает из (III).

Доказательство теоремы 5. Если P и g полярны, то симметрия относительно P по (III) оставляет каждую точку прямой g неподвижной, а значит, по теореме 3 совпадает с симметрией относительно g. Обратно, симметрия относительно прямой g и симметрия относительно точки P в силу (I) могут совпадать только тогда, когда P и g полярны.

Итак, нами доказаны все теоремы п. 4. Установленные там результаты дают возможность сформулировать аксиоматические основы учения о метрической плоскости и все следствия этих аксиом на языке теории групп движений и свести доказательства к рассмотрению свойств группы движений, т. е. заменить их теоретико-групповым исчислением. Хотя метрическая геометрия может быть развита непосредственно на основе данной в п. 3 системы аксиом, мы, следуя Арнольду Шмидту, будем идти путем развития теории группы движений (впервые, хотя и несколько иначе, так поступил применительно к евклидовой геометрии на плоскости Томсен). При этом системе аксиом удается придать еще более компактную форму.

Литература к § 2. К пп. 1—2: Клейн [1], [2], Гильберт [1], [2], Бальдус [1], Кокстер [1]. К пп. 3—5: Гильберт [1], Гессенберг [1], [3], Йельмслев [1], [2], Томсен [3], Подел и Райдемайстер [1], Бахман [1], Шмидт [1], Клингенберг [4], Шютте [2], [3]. (Доказательство теоремы 3 Шютте опубликовал только для евклидового случая — см. [2].)

Построение пространственной метрической геометрии с применением отношения порядка и свободной подвижности, но без аксиом параллельности и непрерывности дано Шуром [1]. (Ср. также Аренс [1] и Дикуонцо [1] через выделение симметрии в группе движений. О иных геометриях, на которые построения этой главы непосредственно не распространяются, см. Клейн [1], [3], Каган [1], Яглом, Розенфельд и Ясинская [1], Пименов [1], Дикуонцо [1] и Вольф [1]. — *Прим. перев.*)

Глава II

МЕТРИЧЕСКАЯ (АБСОЛЮТНАЯ) ГЕОМЕТРИЯ

§ 3. Система аксиом метрической (абсолютной) геометрии

Для систематической трактовки плоской метрической геометрии мы сформулируем здесь систему аксиом, имеющую в качестве первичных объектов одни только инволютивные элементы группы, порожденной этими элементами; при этом все аксиомы нашей системы будут налагать известные условия на эти инволютивные образующие. Предлагаемая система аксиом характеризует группу движений метрических плоскостей и, следовательно, равносильна системе аксиом п. 3 § 2. Она представляет собой сокращенную модификацию системы аксиом Арнольда Шмидта.

Сделаем несколько замечаний об инволютивных элементах произвольной группы.

1. Инволютивные элементы группы. Основные соотношения. Элемент группы, порядок которого равен двум, называется *инволютивным*. Другими словами, элемент σ называется инволютивным, если $\sigma^2=1$, $\sigma\neq 1$, или, что то же самое, если $\sigma=\sigma^{-1}$, $\sigma\neq 1$. Через α, β, γ мы будем обозначать произвольные элементы группы, а через ρ, σ, τ — инволютивные элементы. Мы будем часто использовать следующее утверждение: элемент, обратный произведению инволютивных элементов, представляет собой произведение тех же элементов в обратном порядке, т. е. $(\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n)^{-1}=\sigma_n \ldots \sigma_2\sigma_1$. Понадобится нам и другое утверждение: образ инволютивного элемента при внутреннем автоморфизме группы является инволютивным элементом, т. е. элемент $\sigma^\alpha=\alpha^{-1}\sigma\alpha$ всегда инволютивен.

При изучении групп, порождаемых инволютивными элементами, нас, в частности, будет интересовать вопрос о том, когда произведение инволютивных элементов само инволютивно; в первую очередь мы зададимся вопросом о том, когда произведение двух или трех инволютивных элементов само инволютивно. При этом соотношения

$$\rho\sigma \quad \text{инволютивно,} \tag{1}$$

$$\rho\sigma\tau \quad \text{инволютивно} \tag{2}$$

будут играть важную роль.

Мы будем обозначать соотношение (1) *через* $\rho|\sigma$. Вместо «$\rho_1|\sigma$ и $\rho_2|\sigma$» мы будем короче писать $\rho_1, \rho_2|\sigma$; вместо «$\rho_1|\sigma_1$, и $\rho_2|\sigma_1$, и $\rho_1|\sigma_2$, и $\rho_2|\sigma_2$» будем короче писать $\rho_1, \rho_2|\sigma_1, \sigma_2$ и т. д.

Простейшие формальные свойства отношений (1) и (2) таковы. Соотношение (1) равносильно любому из следующих соотношений:

$$\rho\sigma = \sigma\rho, \qquad \rho \neq \sigma, \tag{1'}$$

$$\rho^\sigma = \rho, \qquad \rho \neq \sigma, \tag{1''}$$

$$\sigma^\rho = \sigma, \qquad \rho \neq \sigma. \tag{1'''}$$

Поэтому отношение (1) симметрично и нерефлексивно. Трехместное отношение (2) *рефлексивно* в том смысле, что оно всегда выполняется, если ρ, σ, τ не все различны; например, если $\tau=\rho$, то $\rho\sigma\tau=\sigma^\rho$ инволютивно. Далее, оно симметрично в следующем смысле: если соотношение (2) выполняется для ρ, σ, τ, то оно выполняется и для любой их перестановки. В самом деле, если $\rho\sigma\tau$ инволютивно, то инволютивны и его образы $(\rho\sigma\tau)^\rho = \sigma\tau\rho$, $(\rho\sigma\tau)^\tau=\tau\rho\sigma$ при внутренних автоморфизмах ρ, τ. А так как всякое инволютивное произведение равно своему обратному, то и $\tau\sigma\rho$, $\rho\tau\sigma$, $\sigma\rho\tau$ инволютивны.

Если для трех инволютивных элементов ρ_1, ρ_2, σ выполняется соотношение

$$\rho_1, \rho_2|\sigma, \tag{3}$$

то мы говорим, что σ *соединяет* элементы ρ_1, ρ_2. Если для двух инволютивных элементов ρ_1, ρ_2 существует инволютивный элемент σ, удовлетворяющий (3), то мы говорим, что ρ_1, ρ_2 *соединимы*; в противном случае называем их *несоединимыми*. Если $\rho_1, \rho_2, \rho_3|\sigma$, то мы говорим, что σ *соединяет* ρ_1, ρ_2, ρ_3 и т. д.

Вот пример выполнения соотношения (3): если $\rho_1|\rho_2$, то произведение $\rho_1\rho_2$ соединяет ρ_1, ρ_2.

2. Система аксиом. Основное допущение. *Дана группа* $\mathfrak{G}$ *и инвариантная система* $\mathfrak{S}$ *ее образующих, состоящая из инволютивных элементов.*

Элементы из $\mathfrak{S}$ обозначаются малыми латинскими буквами. Те инволютивные элементы из $\mathfrak{G}$, которые представимы как произведение двух элементов из $\mathfrak{S}$ (т. е. элементы вида ab, где $a|b$), обозначаются большими латинскими буквами.

Аксиома 1. *Для любых P, Q найдется g такой, что $P, Q|g$.*

Аксиома 2. *Из $P, Q|g, h$ следует, что $P=Q$ или $g=h$.*

Аксиома 3. *Если $a, b, c|P$, то существует элемент d такой, что $abc=d$.*

Аксиома 4. *Если $a, b, c|g$, то существует элемент d такой, что $abc=d$.*

Аксиома D. *Существуют g, h, j такие, что $g|h$, и не имеет места ни одно из соотношений $j|g$, $j|h$, $j|gh$.*

Этой системе аксиом удовлетворяют группы движений рассмотренных в п. 3 § 2 метрических плоскостей (в частности, группы движений классических евклидовой и неевклидовых плоскостей), если принять за $\mathfrak{S}$ множество осевых симметрий; те инволютивные элементы группы, которые представимы как произведение двух элементов из $\mathfrak{S}$, окажутся при этом центральными симметриями.

Согласно основному допущению задается группа $\mathfrak{G}$, порожденная системой образующих $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{G}$, состоящей из инволютивных элементов, т. е. задается «порожденная группа», другими словами — пара $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$. (В группе, вообще говоря, могут существовать различные инвариантные системы из инволютивных образующих такие, что выполняются все аксиомы.) Всякую пару $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, удовлетворяющую системе аксиом, мы назовем *группой движений.* Элементы из $\mathfrak{S}$ мы будем называть *осевыми симметриями*, а инволютивные элементы, представимые в виде произведения двух элементов из $\mathfrak{S}$, — *центральными симметриями*; элементы группы $\mathfrak{G}$ мы назовем *движениями.* Таким образом, в нашей трактовке движения осевые и центральные симметрии — это элементы некоей абстрактной группы $\mathfrak{G}$ (а не отображения в множестве элементов исходной области). Ту теорию, которая строится на базе этой системы аксиом, мы называем *плоской метрической геометрией.* Чтобы подчеркнуть, что эта теория является общим фундаментом, над которым надстраиваются различные частные метрические геометрии, отвечающие тому или иному допущению относительно параллельных, мы будем называть нашу теорию, следуя введенному Я. Бойяи термину, *плоской абсолютной геометрией.*

Аксиомы являются некоторыми специальными высказываниями относительно основных отношений (1), (2) и (3). Аксиомы 1 и 2 говорят об отношении (3): два элемента P и Q всегда можно соединить элементом из $\mathfrak{S}$ и притом единственным, если $P \neq Q$. Аксиомы 3 и 4 связывают отношения (3) и (2): если три элемента из $\mathfrak{S}$ можно соединить элементом P или элементом из $\mathfrak{S}$, то для них выполняется отношение (2) с тем усилением, что само произведение принадлежит $\mathfrak{S}$.

3. Групповая плоскость. Движения групповой плоскости. Каждую группу движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, удовлетворяющую нашей системе аксиом, можно рассматривать как группу движений некоторой метрической плоскости. Укажем следующую каноническую конструкцию, позволяющую приписать абстрактной группе $\mathfrak{G}$ и ее системе образующих $\mathfrak{S}$ некую геометрическую структуру, называемую *групповой плоскостью* пары $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$.

Элементы из $\mathfrak{S}$ назовем *прямыми* групповой плоскости, а те инволютивные элементы группы $\mathfrak{G}$, которые представимы в виде произведения двух элементов из $\mathfrak{S}$, — *точками* групповой плоскости. Две прямые a и b из групповой плоскости мы назовем *перпендикулярными*, если выполняется отношение $a \mid b$; это обстоятельство мы будем также записывать в виде $a \perp b$. Таким образом, точки — это те элементы группы, которые представимы в виде произведения двух перпендикулярных прямых. Назовем затем точку A и прямую b групповой плоскости *инцидентными*, если выполняется отношение $A \mid b$; это обстоятельство мы будем также записывать так: $A \operatorname{I} b$ или $b \operatorname{I} A$. Если имеет место равенство $ab = dc$, то, следуя Йельмслеву, мы будем говорить, что *прямые b, d расположены зеркально* (*или симметрично*) *по отношению к прямым a, c*; тогда и a, c расположены зеркально по отношению к b, d (рис. 26). В частности, если $a = c$, т. е. $ab = da$, то мы будем говорить, что прямые b, d расположены зеркально (симметрично) по отношению к прямой a *).

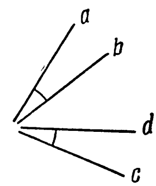


Рис. 26.

В силу аксиом в групповой плоскости выполняются следующие утверждения относительно перпендикулярности, инцидентности и зеркального расположения: 1, 2. *Для любых двух точек всегда найдется инцидентная им прямая*; *она единственна, если точки различны.* 3, 4. *Если три прямые a, b, c инцидентны одной точке или же перпендикулярны одной прямой, то существует прямая d такая, что d, b расположены зеркально по отношению к a, c.* D. *Существуют две перпендикулярные прямые g, h и прямая j, не перпендикулярная ни g, ни h и не инцидентная точке gh* («аксиома трехсторонника»; рис. 27).

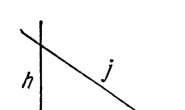


Рис. 27.

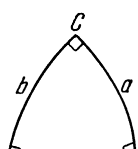


Рис. 28.

Прямую, соединяющую две различные точки P, Q, мы обозначим через (P, Q).

Наша система аксиом допускает существование таких элементов a, b, c в $\mathfrak{S}$, что $abc = 1$. Тогда произведение любых двух из элементов a, b, c равно третьему и поэтому инволютивно. При этом в групповой плоскости прямые a, b, c попарно перпендикулярны и образуют «полярный трехсторонник», как в эллиптической геометрии (рис. 28).

*) Из наших аксиом не вытекает, что всякие две прямые имеют ось симметрии, т. е. прямую, относительно которой они расположены симметрично.

В этом случае, например, ab, будучи инволютивным элементом и произведением двух элементов из $\mathfrak{S}$, является элементом C и $C=c$. На групповой плоскости элемент ab является одновременно и прямой, и точкой. Если $C=c$, то мы будем говорить, что точка C и прямая c групповой плоскости *полярны*, и называть точку C *полюсом* прямой c, а прямую c — *полярой* точки C. Те групповые плоскости, в которых существуют полярные точки и прямые, мы рассмотрим подробнее в п. 8.

Так как по основному допущению система образующих инвариантна, то при внутреннем автоморфизме, порождаемом произвольным элементом c, множество $\mathfrak{S}$ отображается на себя. При этом всякое инволютивное произведение двух элементов из $\mathfrak{S}$ переходит в инволютивное произведение двух элементов из $\mathfrak{S}$. Таким образом, отображение

$$x^* = x^c, \qquad X^* = X^c \tag{4}$$

является взаимно однозначным отображением множества прямых и множества точек групповой плоскости на себя. При этом отображении перпендикулярность прямых, инцидентность точки и прямой и зеркальное расположение пар прямых сохраняются; прямые x, x^* расположены зеркально по отношению к прямой c. Двукратное применение этого отображения является тождеством. Отображение (4) мы назовем *симметрией групповой плоскости относительно прямой c*. Прямая x является неподвижной прямой этой симметрии тогда и только тогда, когда $x=c$ или $x\perp c$; точка X является неподвижной тогда и только тогда, когда $X=c$, т. е. X полярна c (такие точки могут и не существовать), или же когда $X \mathrel{I} c$. Из аксиом 3, 4 вытекает, что для симметрий (4) выполняется теорема о трех симметриях: *произведение симметрий относительно прямых a, b, c, инцидентных одной точке или перпендикулярных одной прямой, совпадает с симметрией относительно некоторой прямой*, а именно — относительно фигурирующей выше прямой d, которая вместе с b расположена зеркально относительно a, c; назовем эту прямую *четвертой зеркальной прямой* для тройки прямых a, b, c.

Вообще при любом $\gamma \in \mathfrak{G}$ отображение

$$x^* = x^\gamma, \quad X^* = X^\gamma \tag{5}$$

является взаимно однозначным на множестве прямых и множестве точек групповой плоскости, причем сохраняются введенные на групповой плоскости геометрические отношения. Отображение (5) мы назовем *движением групповой плоскости*; при $\gamma = C$ — *симметрией групповой плоскости относительно точки C*. Если точка C и прямая c групповой плоскости полярны, то симметрия относительно C совпадает с симметрией относительно c.

Движения (5) групповой плоскости образуют некоторую группу $\mathfrak{G}^*$, порождаемую системой $\mathfrak{S}^*$ симметрий (4) относительно прямых групповой плоскости. Если сопоставить каждому $\gamma \in \mathfrak{G}$ движение (5) групповой плоскости, то получим гомоморфное отображение пары $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ на $(\mathfrak{G}^*, \mathfrak{S}^*)$; позже будет доказано (теорема 19), что это отображение изоморфно. Таким образом, всякая группа движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, удовлетворяющая аксиомам, может быть представлена как группа $(\mathfrak{G}^*, \mathfrak{S}^*)$ движений ее групповой плоскости. Групповая плоскость является метрической плоскостью в смысле п. 3 § 2. (Мы вскоре завершим доказательство этого факта — см. п. 4, следствие из теоремы 3 и теорему 19.)

Плоская метрическая геометрия, т. е. теория групп движений, заданных аксиоматически, — та теория, которую мы намерены развивать, — является также геометрией групповых плоскостей этих групп движений. Чтобы подчеркнуть эту связь, мы будем пользоваться геометрической терминологией групповой плоскости применительно к заданным в абстрактной группе инволютивным элементам и отношениям между ними. Так, мы станем называть элементы из $\mathfrak{S}$ просто *прямыми*, а вместо $a|b$ писать $a \perp b$. Те инволютивные элементы из $\mathfrak{G}$, которые представимы в виде произведения двух элементов из $\mathfrak{S}$, мы станем называть просто *точками*, а вместо $A|b$ будем писать $A \mathrel{I} b$ или $b \mathrel{I} A$. Можно в самих аксиомах устранить символ $|$, заменив его на $\perp$ и $\mathrel{I}$ и переформулировав, например, аксиомы 1 и D так:

Аксиома 1. *Для любых P, Q найдется g такая, что $P, Q \mathrel{I} g$.*

Аксиома D. *Существуют g, h, j такие, что $g \perp h$, и не имеет места ни одно из соотношений $j \perp g$, $j \perp h$, $j \mathrel{I} gh$.*

Многие утверждения нашей теории получают благодаря использованию обоих символов $\perp$ и $\mathrel{I}$ геометрическое истолкование в групповой плоскости. Мы станем применять оба символа, чтобы утверждения нашей теории было легче читать. Символы $\perp$ и $\mathrel{I}$ всегда можно заменить символом $|$; в принципе можно ограничиться им одним.

4. Первые следствия из аксиом. Докажем некоторые теоремы, столь же простые и фундаментальные, как и сами аксиомы; мы их не включили в состав аксиом лишь из соображений экономии исходных требований. Здесь мы имеем в виду прежде всего факты *существования и «однозначности» перпендикуляров* и *обращение теоремы о трех перпендикулярах* (аксиомы 3 и 4).

Теорема 1 (о пересечении перпендикуляров). *Из $a \perp b$ и $P \mathrel{I} a, b$ следует, что $P = ab$, и наоборот.*

Доказательство. Так как $a \perp b$, то произведение ab по определению является точкой, причем такой, что $ab \mathrel{I} a, b$. Так как по условию $P \mathrm{I} a, b$ и $a \neq b$, то $P = ab$ в силу аксиомы 2. Обратное предложение следует из самих определений перпендикулярности и инцидентности: ведь из равенства $P = ab$ вытекает, что произведение любых двух из трех элементов P, a, b равно третьему и поэтому инволютивно.

Теорема 1 утверждает, что если $a \perp b$, то ab есть однозначно определенная точка пересечения a и b.

Теорема 2 (о существовании перпендикуляров). *Для любых P и g найдется по крайней мере одна l такая, что $l \mathrm{I} P$ и $l \perp g$.*

Доказательство. Случай 1: $P \mathrm{I} g$. Если $P = ab$, то $a, b, g \mathrm{I} P$. По аксиоме 3 существует l такая, что $abg = l$, т. е. $Pg = l$. Как и при доказательстве обращения теоремы 1, получаем тогда, что $l \mathrm{I} P$, $l \perp g$.

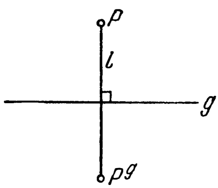


Рис. 29.

Случай 2: $P \not\mathrm{I} g$. Тогда либо $P \neq P^g$, либо $P = g$. Рассмотрим эти два подслучая отдельно.

Случай 2а: $P \neq P^g$. В силу аксиомы 1 существует l такая, что $l \mathrm{I} P, P^g$ (рис. 29). Рассмотрев внутренний автоморфизм, определенный элементом g, получим $l^g \mathrm{I} P^g, P$. Поэтому в силу аксиомы 2 имеем $l = l^g$. Далее $l \neq g$, ибо $P \mathrm{I} l$, но $P \not\mathrm{I} g$. Следовательно, $l \perp g$.

Случай 2б: $P = g$, т. е. P и g *полярны*. Тогда для произвольной c, если $c \mathrm{I} P$, то $c \perp g$ (и обратно). Если теперь $P = ab$, то $a, b \mathrm{I} P$ и поэтому $a, b \perp g$. *В этом случае перпендикуляр к g, проходящий через P, не является единственным.*

Теорема 3 (об однозначности перпендикуляра). Из $P \neq g$, *$a, b \mathrm{I} P$ и $a, b \perp g$ следует, что $a = b$.*

Доказательство. Случай 1: $P \mathrm{I} g$. Из $a, g \mathrm{I} P$ и $a \perp g$ по теореме 1 следует $P = ag$. Аналогично получаем $P = bg$. Следовательно, $ag = bg$, а значит, $a = b$.

Случай 2: $P \neq P^g$. Из $a, b \mathrm{I} P$ следует, что $a^g, b^g \mathrm{I} P^g$. Из $a, b \perp g$ вытекает $a^g = a$ и $b^g = b$. Итак, $a, b \mathrm{I} P, P^g$, откуда по аксиоме 2 заключаем, что $a = b$.

Согласно теореме 2 всякая точка соединима с любой прямой некоторой прямою. Если $P \neq g$, то в силу теоремы 3 соединяющая прямая определяется однозначно; мы обозначим ее через (P, g) или (g, P).

Рассмотрения, выделенные в доказательствах теорем 2 и 3 как «случай 1», доказывают, что справедлива

Теорема 4. *Если $P \mathrm{I} g$, то Pg — прямая, а именно — перпендикуляр к g в точке P.*

В силу теоремы 3 для *полярного трехсторонника*, т. е. для трех попарно перпендикулярных прямых, имеет место

Теорема 5 (о полярном трехстороннике). *Если a, b, c — попарно перпендикулярные прямые, то $abc=1$, и наоборот.*

Доказательство. Пусть a, b, c попарно перпендикулярны. В силу $a \perp b$ произведение ab — точка и при этом $a, b \mathrel{\rceil\!\lceil} ab$; кроме того, $a, b \perp c$ и $a \neq b$. Отсюда в силу теоремы 3 $ab=c$, так что $abc=1$. Обратное утверждение было уже доказано в п. 3.

Теперь мы можем установить, что *ни одна прямая не перпендикулярна всем остальным прямым*; иначе говоря, что ни одна прямая не коммутирует со всеми остальными прямыми. Можно утверждать даже больше, а именно, что ни одна прямая не коммутирует со всеми тремя прямыми g, h, j аксиомы D. Допустим, что такая прямая c, коммутирующая с прямыми g, h, j, существует. Тогда $c \neq g, h, j$ (ибо g, j, как и h, j, не коммутируют) и, следовательно, $c \mid g, h, j$. Из $c \mid g, h$ и $g \mid h$ в силу теоремы 5 вытекает, что $c=gh$; но в таком случае $gh \mid j$, что противоречит аксиоме D.

Отсюда, как дополнение к определению, получаем, что симметрии (4) относительно прямых групповой плоскости отличны от тождественного движения; таким образом, они являются настоящими осевыми симметриями в смысле п. 3 § 2. Таким образом, кроме доказательства существования трех точек на каждой прямой, составляющего содержание теоремы 31 (стр. 81) (которое, однако, можно было бы провести уже сейчас), нами уже полностью доказано, что групповая плоскость является метрической плоскостью.

Если использовать в последнем рассуждении вместо теоремы 5 теорему 1, то можно установить, что ни одна точка не коммутирует со всеми прямыми. Поэтому каждая симметрия относительно точки групповой плоскости отлична от тождественного движения, т. е. эти симметрии являются центральными симметриями в смысле п. 4 § 2.

Теорема 6 (о существовании точек прямой). *Для каждой прямой a существует такая точка A, что $A \mathrel{\rceil\!\lceil} a$.*

Доказательство. По аксиоме D существует по крайней мере одна точка P (такой является gh). По теореме 2 для P, a существует l такая, что $l \mathrel{\rceil\!\lceil} P$, $l \perp a$. Тогда $la=A$ есть искомая точка.

Теорема 7 (дополнение к аксиоме 3). *Из $a, b, c \mathrel{\rceil\!\lceil} P$ и $abc=d$ следует $d \mathrel{\rceil\!\lceil} P$.*

Доказательство. Требуемая инцидентность означает, что $abcP=Pabc$ и $abc \neq P$. Но первое следует непосредственно из того, что по предположению a, b, c коммутируют с P. Если бы было $abc=P$, то $ab=Pc$, и так как Pc инволютивно, то $a \perp b$. Тогда по теореме 1 $P=ab$, откуда $Pc=P$, т. е. $c=1$, что невозможно.

Теорема 8 (обращение аксиомы 3). *Если* $a \neq b$ *и* $a, b \mathrel{\mathrm{I}} P$, *то из* $abc = d$ *следует* $c \mathrel{\mathrm{I}} P$.

Доказательство. По теореме 2 существует прямая b' такая, что $b' \mathrel{\mathrm{I}} P$ и $b' \perp c$ (рис. 30). Тогда $b'c$ — точка P' и $b', c \mathrel{\mathrm{I}} P'$. Теперь по аксиоме 3 abb' есть некоторая прямая a', которая в силу $a \neq b$ отлична от b' и по теореме 7 инцидентна P. Так как $a'b'c = abc = d$, то $a'd = b'c = P'$, откуда $a' \mathrel{\mathrm{I}} P'$. Итак, $a', b' \mathrel{\mathrm{I}} P, P'$ и $a' \neq b'$, откуда в силу аксиомы 2 имеем $P' = P$, т. е. $c \mathrel{\mathrm{I}} P$.

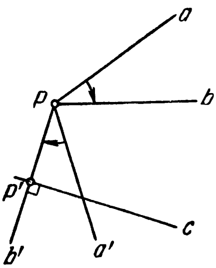


Рис. 30

Теорема 9 (дополнение к аксиоме 4). *Из* $a, b, c \perp g$ *и* $abc = d$ *вытекает* $d \perp g$.

Доказательство. Требуемая ортогональность означает, что $abcg = gabc$ и $abc \neq g$. Первое получается непосредственно из условий теоремы. Если бы было $abc = g$, то $ab = gc$ и тогда, так как gc инволютивно, $a \perp b$. Тогда по теореме 5 $abg = 1$, т. е. $ab = g$. Отсюда $gc = g$ и $c = 1$.

Теорема 10 (обращение аксиомы 4). *Из* $a \neq b$; $a, b \perp g$; $abc = d$ *вытекает* $c \perp g$.

Доказательство. По теореме 6 существует такая точка P, что $P \mathrel{\mathrm{I}} c$. Если $P = g$, то $c \perp g$. Если $P \neq g$, то проведем через P перпендикуляр c' к g (рис. 31; теоремы 2 и 3). Покажем, что $c \neq c'$ невозможно.

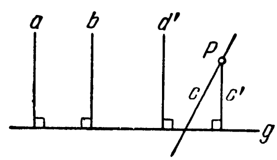


Рис. 31.

Так как $a, b, c' \perp g$, то abc' по аксиоме 4 является прямой d', для которой в силу теоремы 9 $d' \perp g$. Тогда $dc = d'c'$ и если $c \neq c'$, то по теореме 8 $d' \mathrel{\mathrm{I}} P$. Итак, мы имеем $P \neq g$; $d', c' \mathrel{\mathrm{I}} P$ и $d', c' \perp g$, т. е. в силу теоремы 3 $d' = c'$, а значит, $d = c$, откуда $a = b$, что противоречит допущению.

Задачи 1. Систему аксиом п 2 § 3 можно видоизменить, заменив ее эквивалентной системой, следующим образом: устранить из основного допущения слово «инвариантная» и дополнить список аксиом теоремой 2.

2. Симметрии a, b, c относительно трех попарно перпендикулярных плоскостей трехмерного евклидова пространства, симметрии в этих плоскостях относительно трех прямых пересечения, симметрия d относительно точки пересечения, а также тождественное отображение образуют абелеву группу $\mathfrak{G}$, причем a, b, c, d составляют ее инвариантную систему образующих $\mathfrak{S}$. Имеет место $abcd = 1$. Какие из наших аксиом и какие из теорем 1—10 выполняются в $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, а какие нет?

3. Пусть выполнено основное допущение без требования инвариантности системы образующих

Теорема 4*. *Если* $P|g$, *то существует* l *такая, что* $Pg = l$, является, как было замечено в теореме 2, следствием аксиомы 3.

а) Из аксиомы 3 вытекает дополнение к аксиоме 3 (теорема 7).

б) Из теоремы о пересечении перпендикуляров (теорема 1) вытекает теорема о полярном трехстороннике (теорема 5); из теоремы о полярном трехстороннике вытекает дополнение к аксиоме 4 (теорема 9). При выполнении теоремы 4* эти три предложения попарно эквивалентны.

в) Из теоремы 4* и обращения аксиомы 4 (теорема 10) следует аксиома 2.

Как видно из в), систему аксиом п. 2 § 3 можно заменить на эквивалентную, устранив аксиому 2 и добавив обращение аксиомы 4.

4 (к эквивалентности системы аксиом метрической плоскости п. 3 § 2 и системы аксиом теории групп п. 2 § 3). Для каждой метрической плоскости E определяется *группа движений* $(\mathbf{G}(E), \mathbf{S}(E))$ *плоскости* E [$(\mathbf{G}(E)$ порождается системой $\mathbf{S}(E)$ осевых симметрий]; она удовлетворяет системе аксиом теории групп. Для каждой пары $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, удовлетворяющей системе аксиом теории групп, определяется *групповая плоскость* $\mathbf{E}(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ *пары* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$; она удовлетворяет системе аксиом п. 3 § 2. При этом имеют место изоморфизмы:

$$\mathbf{E}(\mathbf{G}(E), \mathbf{S}(E)) \cong E, \quad (\mathbf{G}(\mathbf{E}(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})), \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}))) \cong (\mathfrak{G}, \mathfrak{S}).$$

Таким образом, если отождествлять изоморфные объекты, то функция «группа движений плоскости E» взаимно однозначно отображает метрические плоскости на пары, удовлетворяющие системе аксиом п. 2 § 3. Функция «групповая плоскость для группы $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$» осуществляет обратное отображение.

5. Отношение принадлежности одному пучку. Самый важный частный случай отношения (2) — это случай, когда произведение образующих a, b, c снова является образующим или короче

$$abc \text{ — прямая.} \tag{6}$$

Если выполняется (6), то мы будем говорить, что три прямые a, b, c *принадлежат одному пучку*.

В силу аксиом 3 и 4 и их обращений можно утверждать, что если $a \neq b$ и a, b имеют общую точку или общий перпендикуляр (т. е. существует точка V такая, что $a, b \,\mathrm{I}\, V$, или существует прямая v такая, что $a, b \perp v$), то множество прямых, принадлежащих одному пучку с прямыми a, b, — это множество прямых, проходящих через точку V, соответственно множество прямых, перпендикулярных прямой v.

Однако две различные прямые не обязаны иметь общую точку или общий перпендикуляр (ср. п. 2 § 2); поэтому из отношения (6) не следует, что три прямые a, b, c проходят через одну точку V или же соединимы одной прямой v.

Рассмотрим теперь такой частный случай отношения (2), когда произведение трех элементов имеет смешанный характер, т. е. состоит из прямых и точек, а именно, когда

$$AbC \text{ — прямая.} \tag{7}$$

Оно выполняется тогда и только тогда, когда A, b, C соединимы одной прямой v (рис. 32).

Теорема 11. *AbC тогда и только тогда является прямой, когда существует такая прямая v, что A, $C \mathrm{I}\, v$ и $b \perp v$.*

Доказательство. а) Пусть v — такая прямая, что A, $C \mathrm{I}\, v$ и $b \perp v$. Обозначив $Av=a$, $Cv=c$ (см. теорему 4), получим $AbC=(abc)^v$ и a, b, $c \perp v$. По аксиоме 4 abc есть прямая d, а по теореме 9 $d \perp v$. Поэтому $AbC=d^v=d$.

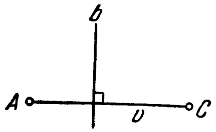


Рис. 32.

б) Пусть AbC — прямая. Если $A=C$, то в силу теоремы 2 можно выбрать такую прямую v, что $A \mathrm{I}\, v$ и $b \perp v$. Если $A \neq C$, то обозначим $v=(A, C)$ и полагаем снова $Av=a$, $Cv=c$. Тогда $(abc)^v=AbC$, т. е. abc — прямая. Так как $a \neq c$ и a, $c \perp v$, то в силу теоремы 10 $b \perp v$.

Дополнение к теореме 11. *Если A, $C \mathrm{I}\, v$, а также $b \perp v$ и $AbC=d$, то $d \perp v$.*

Доказательство. По условию $A, C \mathrm{I}\, v$ и $b \perp v$; поэтому (см. выше случай а)) AbC — прямая, перпендикулярная v. Эта прямая в силу условия $AbC=d$ совпадает с d.

Если $A \neq C$, то теорема 11 утверждает: AbC является прямой тогда и только тогда, когда $b \perp (A, C)$. Если $A \neq b$, то теорема 11 утверждает: AbC является прямой тогда и только тогда, когда $C \mathrm{I}\, (A, b)$.

Аналогично теореме 11 для отношения

$$aBc \text{ — точка} \tag{8}$$

имеет место

Теорема 12. *aBc тогда и только тогда является точкой, когда существует прямая v, для которой $a, c \perp v$ и $B \mathrm{I}\, v$* (рис. 33).

Доказательство. а) Пусть v — прямая, удовлетворяющая требуемым условиям. Положим $Bv=b$; тогда $a, b, c \perp v$. В силу аксиомы 4 $abc=d$ и по теореме 9 $d \perp v$. Тогда $aBc=abvc=abcv=dv$ есть точка D такая, что $D \mathrm{I}\, v$.

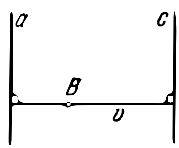


Рис. 33.

б) Пусть aBc — это точка D. Тогда $BcD=a$ и по теореме 11 и дополнению к ней существует прямая v такая, что B, $D \mathrm{I}\, v$ и $c, a \perp v$.

Из а), как и в случае теоремы 11, получаем

Дополнение к теореме 12. *Из $a, c \perp v$; $B \mathrm{I}\, v$; $aBc=D$ вытекает $D \mathrm{I}\, v$.*

Трехместные отношения (6), (7), (8) симметричны в указанном в п. 1 смысле. Например, отношение (7) равносильно отношению «ACb — прямая» или отношению «bAC — прямая».

Теоремы 11 и 12 обобщают теорему о трех симметриях.

6. Теорема о перпендикулярах. Рассмотрим теперь теорему о перпендикулярах, которую Йельмслев называет *основной теоремой* плоской метрической геометрии. В частности, она позволяет продолжить изучение отношения (6).

В теореме о перпендикулярах речь идет о прямых a, a', c, c', где $a \perp a'$ и $c \perp c'$; здесь указывается критерий того, что прямая, принадлежащая одному пучку с a, c, принадлежит также одному пучку с a', c'.

Теорема 13 (теорема о перпендикулярах). *Если* $aa' = A$, $cc' = C$ *и* abc *является прямой* d, *то* $a'bc'$ *является прямой тогда и только тогда, когда существует прямая* v *такая, что* $A, C \,]\, v$ *и* $d \boldsymbol{\perp} v$ (см. рис. 34).

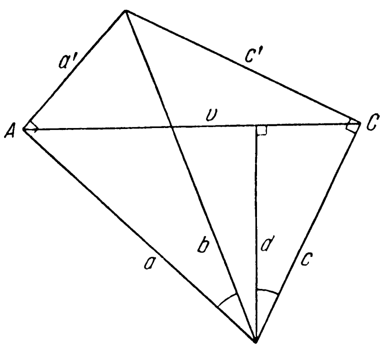


Рис. 34.

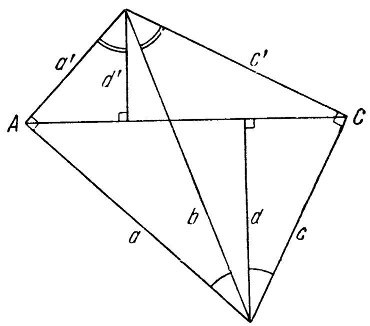


Рис. 35.

Доказательство. Мы имеем $a'bc' = a'a \cdot abc \cdot cc' = AdC$. Поэтому $a'bc'$ является прямой тогда и только тогда, когда AdC — прямая, и наше утверждение следует из теоремы 11.

Если $A \neq C$, то при допущениях теоремы о перпендикулярах $a'bc'$ является прямой тогда и только тогда, когда $d \perp (A, C)$.

Таким образом, теорема о перпендикулярах вытекает из теоремы 11. В приложениях часто целесообразно вместо теоремы о перпендикулярах использовать непосредственно теорему 11 (ср., например, первое доказательство теоремы о высотах в § 4).

Конструкция теоремы о перпендикулярах может быть сделана симметричной добавлением прямой d' (рис. 35); тогда получается

Теорема 14 (теорема о конфигурации перпендикуляров). *Любые четыре из равенств*

$$aa' = A, \quad cc' = C, \quad abc = d, \quad a'bc' = d', \; AdC \doteq d'$$

влекут за собой пятое.

Доказательство. Пятое равенство вытекает из четырех первых:

$$AdC = a'a \cdot abc \cdot cc' = a'bc' = d'.$$

Аналогично получается и третье равенство из всех остальных. То же имеет место для четвертого равенства, ибо теорема инвариантна относительно замены a, c, d на a', c', d'.

Первое равенство получается из четырех остальных так:

$$aa' = dcb \cdot bc'd' = dCd' = A.$$

Так же и второе получается из остальных, ибо теорема инвариантна относительно замены a, a', A на c, c', C.

Теорема о конфигурации перпендикуляров примечательна тем, что она доказывается без ссылок на аксиомы и справедлива для произвольных инволютивных элементов любой группы.

Даже если в конфигурации перпендикуляров некоторые элементы совпадают, мы получаем геометрически нетривиальные результаты. Так, например, если $a=c$, $a'=c'$, $A=C$, то теорема 14 гласит: из первого и любых двух из остальных равенств $aa' = A$, $b^a = d$, $b^{a'} = d'$, $d^A = d'$ вытекает четвертое. Если здесь речь идет о последнем равенстве, то это можно геометрически истолковать так: если отразить гипотенузу прямоугольного треугольника в обоих катетах, то полученные прямые будут симметричны относительно вершины A (рис. 36).

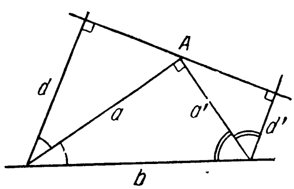


Рис. 36.

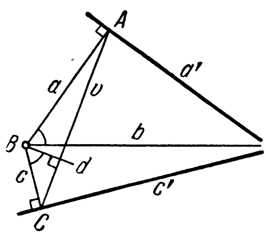


Рис. 37.

Следствием теоремы о перпендикулярах является важная теорема о соединимости:

Теорема 15. *Для любых двух прямых a', c' и точки B найдется прямая, инцидентная B и лежащая в одном пучке с a', c'; если к тому же $a' \neq c'$ и B не инцидентна ни a', ни c', то такая прямая единственна.*

Доказательство. Опустим из B перпендикуляры a и c на a' и c', обозначив основания $aa'=A$ и $cc'=C$ (рис. 37).

Для доказательства существования проведем прямую, которая инцидентна A и C, и опустим на нее перпендикуляр d из B. Тогда по аксиоме 3 adc — прямая, которая в силу теоремы 7 инцидентна B и по теореме о перпендикулярах принадлежит одному пучку с a', c'.

Для доказательства однозначности допустим, что $a' \neq c'$ и B не инцидентна ни a', ни c'. Тогда $A \neq C$, ибо из $aa' = cc'$ и $a' \neq c'$, т. е. $a \neq c$, и $B \mathrm{I}\, a, c$ по теореме 8 следовало бы $B \mathrm{I}\, a', c'$. Таким образом, прямая v, соединяющая точки A и C, определена однозначно. Далее имеем $B \neq v$, ибо из $B = v$ следовало бы $a, c \perp v$, а отсюда в силу однозначности перпендикуляра, восставленного к прямой, вытекало бы $v = a' = c'$.

Пусть теперь b, b' — две проходящие через B прямые, принадлежащие одному пучку с a', c'. Тогда abc и $ab'c$ — прямые, проходящие через B, которые перпендикулярны v в силу теоремы о перпендикулярах. Так как в силу $B \neq v$ через B проходит единственный перпендикуляр к v, то $abc = ab'c$, т. е. $b = b'$.

Задача. Пусть даны a_i, b_i, c_i — два прямоугольных треугольника с вершинами $A_i \mathrm{I}\, b_i, c_i$, $B_i \mathrm{I}\, c_i, a_i$ и $C_i = a_i b_i$ $(i = 1, 2)$. Пусть, далее, $A_1 = A_2 = A$; кроме того, $b_1 c_1 = b_2 c_2$ и $b_1 \not\perp c_1$. Если b проходит через B_1, B_2, а l — перпендикуляр, опущенный из A на b, то точки C_1, C_2, lb коллинеарны.

7. Представление движений. Согласно основному допущению всякий элемент нашей группы представим в виде произведения прямых. Докажем, что имеет место

Теорема 16 (теорема о редукции). *Произведение четного числа прямых всегда равно некоторому произведению ab двух прямых, а произведение нечетного числа прямых — некоторому произведению aB прямой и точки, а также некоторому произведению Ab точки и прямой.*

Доказательство. а) *Каждое произведение uvW равно некоторому произведению ab.*

В самом деле, в силу теоремы 15 существует прямая l, инцидентная W и такая, что uvl есть прямая a (рис. 38). По теореме 4 lW — прямая b, откуда $uvW = uvl \cdot lW = ab$.

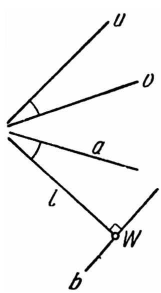


Рис. 38.

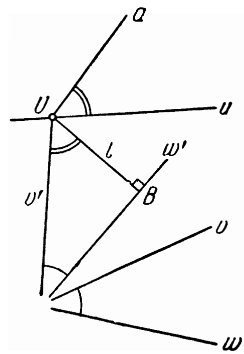


Рис. 39.

б) *Каждое произведение uvw равно некоторому произведению aB.*

В силу теоремы 6 существует точка U, инцидентная u. По теореме 15 существует прямая v', инцидентная U, такая, что $v'vw$ является прямой w'. Опустим из U перпендикуляр l на

w' (рис. 39); тогда в силу аксиомы 3 $uv'l$ является прямой a, а lw' — точкой B и $uvw = uv'w' = uv'l \cdot lw' = aB$.

Используя а) и б), можно упростить любое заданное произведение прямых: каждое произведение четырех прямых в силу б) и а) равно произведению двух прямых. Поэтому произведение четного числа прямых равно произведению двух, а нечетного числа — произведению трех прямых (для произведения из одного множителя утверждение справедливо тривиальным образом), после чего в силу б) мы и приходим к требуемым результатам.

В силу теоремы 16, в частности, каждый инволютивный элемент группы можно представить в виде ab или aB. По определению инволютивный элемент ab есть точка, а инволютивный элемент aB в силу теоремы 4 есть прямая. Итак:

Теорема 17. *Всякий инволютивный элемент группы есть либо точка, либо прямая.*

Опираясь на теоремы 16 и 17, мы докажем теперь, что для всякой группы движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, удовлетворяющей аксиомам, справедлива

Теорема 18. *Центр группы $\mathfrak{G}$ состоит только из единицы.*

Замечание. Будем говорить вместе с Г. Винером, что группа *биинволютивна* (zweispiegelig), если всякий ее элемент представим в виде произведения двух инволютивных элементов. Имеет место утверждение:

Если центр биинволютивной группы не содержит инволютивных элементов, то он состоит только из единицы.

Доказательство. В биинволютивной группе квадрат всякого принадлежащего центру элемента равен единице, ибо $\rho\rho'$ (где ρ, ρ' инволютивны), принадлежит центру, коммутирует с ρ и, значит, $\rho\rho' \cdot \rho = \rho \cdot \rho\rho' = \rho'$, т. е. $(\rho\rho')^2 = 1$.

Доказательство теоремы 18. Так как группа $\mathfrak{G}$ по теореме 16 биинволютивна, то остается доказать, что центр $\mathfrak{G}$ не содержит инволютивных элементов. Но это следует из теоремы 17 и того факта, уже установленного в п. 4, что ни одна прямая и ни одна точка не коммутируют со всеми прямыми.

Группа $\mathfrak{G}$ изоморфна группе своих внутренних автоморфизмов, ибо по теореме 18 внутренний автоморфизм, порожденный элементом $\gamma \neq 1$, не может переводить всякий элемент из $\mathfrak{G}$ в себя. Он не может даже переводить каждый элемент из $\mathfrak{S}$ в себя, и поэтому имеет место

Теорема 19. *Аксиоматически заданная группа движений изоморфна группе движений ее групповой плоскости.*

Итак, всякое высказывание об элементах аксиоматически заданной группы может быть переформулировано в виде высказывания о движениях групповой плоскости, и обратно.

В виде дополнения к теореме 16 заметим, что верна

Теорема 20. а) *Каждое произведение* aB *равно некоторому произведению*

$$abc, \text{ где } a, b \perp c, \tag{9}$$

и наоборот. То же верно для произведения Ab.

б) *Каждое произведение* AB *равно некоторому произведению*

$$ab, \text{ где существует } c \text{ такое, что } a, b \perp c, \tag{10}$$

и наоборот.

Доказательство. а) Если c — перпендикуляр к a, проходящий через B, и $Bc=b$, то aB равно (9). Обратное тривиально.

б) Если c — прямая, проходящая через A и B, и $Ac=a$, а $Bc=b$, то $AB= ac \cdot cb$. Обратно, всякое произведение (10) равно $ac \cdot cb$, где ac и cb — точки.

То движение, которое можно представить в виде произведения aB, будем называть *скользящей симметрией*. Если отличная от единицы скользящая симметрия представлена в виде aB, то перпендикуляр (a, B) мы называем *осью скользящей симметрии*. Ось не зависит от выбора представления скользящей симметрии в виде aB, ибо из $aB=a'B' \neq 1$ в силу теоремы 11 следует, что $(a, B)=(a', B')$. Если скользящая симметрия представлена в виде Ab, то (A, b) тоже является осью Ab. Для инволютивного aB в силу теоремы 4 $aB=(a, B)$; поэтому если скользящая симметрия инволютивна, то она является осевой симметрией (симметрией относительно оси преобразования).

Может случиться, что произведение $aB=1$ (например, в случае, когда выполняется вводимая ниже аксиома Р); в этом случае тождественное движение также является скользящей симметрией, и каждая прямая является осью этой скользящей симметрии.

Задача. Пусть a, b, c — трехсторонник, где $abc \neq 1$, и в этом трехстороннике существуют высоты u, w ($u \perp a$ и ubc — прямая, $w \perp c$ и abw — прямая). Тогда ось скользящей симметрии abc инцидентна основаниям высот au и cw.

8. Собственные и зеркальные движения. Аксиома полярного трехсторонника. Во всякой группе, порожденной инволютивными элементами, те элементы, которые представимы в виде произведения четного числа образующих, образуют подгруппу, которую мы обозначим через $\mathfrak{U}$. Далее возможны два взаимоисключающие друг друга случая.

1) *Ни одно произведение нечетного числа образующих не равно* 1. Тогда произведение четного числа образующих не равно произведению нечетного числа образующих, и $\mathfrak{U}$ — подгруппа индекса 2.

2) *Существует произведение нечетного числа образующих, равное* 1. Тогда всякое произведение образующих можно умножить на это произведение, не изменив самого элемента. Значит, всякое произведение четного числа образующих равно произведению нечетного числа образующих, и обратно. В этом случае $\mathfrak{U}$ совпадает со всей группой.

Наша система аксиом допускает обе возможности. Разветвление ее осуществляется такими аксиомами:

Аксиома $\sim$P*). *Всегда* $abc \neq 1$.

Аксиома P. *Существуют* a, b, c, *для которых* $abc = 1$.

Согласно теореме 5 аксиома $\sim$P гласит: *нет полярного трехсторонника,* аксиома P гласит: *существует полярный трехсторонник.*

Если для системы образующих аксиоматически заданной группы выполняется аксиома $\sim$P, то, согласно теореме 16, имеет место случай 1) и справедлива

Теорема 21. *Если выполняется аксиома* $\sim$P, *то все элементы, представимые в виде* ab, *образуют подгруппу индекса* 2. *Ее класс смежности состоит из всех элементов группы, представимых в виде* aB. *Инволютивные элементы подгруппы — это точки; инволютивные элементы класса смежности — прямые. Ни одна точка не совпадает с прямой.*

Если выполняется аксиома P, то имеет место случай 2) и справедлива

Теорема 22. *Если выполняется аксиома* P, *то всякий элемент группы представим в виде* ab; *всякая точка равна некоторой прямой, и обратно; всякий инволютивный элемент группы принадлежит системе образующих.*

Тот элемент группы, который представим в виде четного, соответственно нечетного числа образующих, мы называем *собственным*, соответственно *зеркальным движением.* При условии выполнимости аксиомы $\sim$P собственные и зеркальные движения различны; при условии выполнимости аксиомы P всякий элемент группы является одновременно и собственным и зеркальным движением.

Мы докажем теперь следующую теорему об отношении (1), частными случаями которого являются отношения перпендикулярности и инцидентности:

---

*) $\sim$ — логический знак отрицания. *(Прим. ред.)*

Теорема 23. *Если выполняется аксиома* $\sim$ P, *то произведение AB никогда не инволютивно.*

Доказательство. Если AB инволютивно, то AB в силу теоремы 20б) равно инволютивному произведению (10). Тогда a, b, c попарно перпендикулярны и в силу теоремы 5 $abc=1$.

Две точки A и B, для которых имеет место отношение $A|B$, мы будем называть *взаимно полярными*. Существование полярных точек равносильно аксиоме P.

Группу, удовлетворяющую нашей системе аксиом и аксиоме P, мы назовем *эллиптической группой движений*, ее групповую плоскость — *эллиптической плоскостью*, а соответствующую теорию — (*плоской*) *эллиптической геометрией.*

Так как в эллиптической группе движений всякая точка равна прямой, и обратно, то всякая точка эллиптической плоскости имеет однозначно определенную поляру, а каждая прямая — однозначно определенный полюс.

Если $a=A$ и $b=B$, то отношение $a|b$ можно выразить одним из четырех способов (рис. 40):

I. прямые a и b перпендикулярны;

II. прямая a и точка B инцидентны;

III. точка A и прямая b инцидентны;

IV. точки A и B полярны.

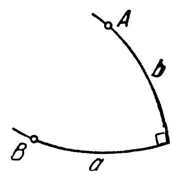


Рис. 40.

Теорема эллиптической геометрии сохранит свою истинность, если заменить в ней точки прямыми и прямые — точками, т. е. большие латинские буквы на малые и наоборот. Так, например, в силу аксиом 1 и 2 в эллиптической геометрии выполняются теоремы:

1) *Для любых a, b существует по крайней мере одно такое c, что $a, b|c$.*

2) *Из $a, b|c, d$ вытекает $a=b$ или $c=d$.*

В теореме 1) содержатся, например, такие утверждения эллиптической геометрии: две прямые всегда имеют общий перпендикуляр; две прямые всегда имеют общую точку; из всякой точки можно опустить на всякую прямую перпендикуляр; две точки всегда имеют общую полярную точку. В теореме 2) содержатся, в частности, такие утверждения: две различные прямые имеют не более одного общего перпендикуляра; две различные прямые имеют не более одной общей точки; через всякую точку проходит не более одного перпендикуляра к всякой прямой, которая не полярна этой точке; две различные точки можно соединить не более чем одной прямой.

9. Аналогия между точками и прямыми. Замена точек на прямые и наоборот, которую можно по желанию производить во всех теоремах эллиптической геометрии, возможна также и в общей плоской метрической геометрии, однако, лишь при определенных условиях. Примеры этой *аналогии точек и прямых* таковы:

Для всяких A *и* B *найдется такое* c, *что* $A\,\mathrm{I}\,c$ *и* $B\,\mathrm{I}\,c$ (аксиома 1).	*Для всяких* A *и* b *найдется такое* c, *что* $A\,\mathrm{I}\,c$ *и* $b \perp c$ (теорема 2).
Из $A\,\mathrm{I}\,c, d$ *и* $B\,\mathrm{I}\,c, d$ *следует* $A=B$ *или* $c=d$ (аксиома 2).	*Из* $A\,\mathrm{I}\,c, d$ *и* $b \perp c, d$ *следует* $A=b$ *или* $c=d$ (теорема 3).

[Если заменить в правом столбце точку A на прямую a, то мы не придем к верному утверждению абсолютной геометрии. Более того, из двух получающихся высказываний: «*Для* a *и* b *всегда найдется такое* c, *что* $a, b \perp c$» и «*Если* $a, b \perp c, d$, *то* $a=b$ *или* $c=d$», первое равносильно аксиоме P, а второе — аксиоме $\sim$R неевклидовой метрики, которая будет введена в п. 7 § 6.]

Другими примерами аналогичных друг другу теорем служат аксиомы 3 и 4, их дополнения, их обращения, теорема 1 о пересечении перпендикуляров и теорема 5 о полярном трехстороннике, теорема 11 и теорема 12.

На аналогию между точками и прямыми обратил внимание Арнольд Шмидт; он придал ей точную форму, сведя изучение геометрии к анализу системы аксиом теоретико-группового характера. Несмотря на непоследовательный характер этой аналогии, она представляет собой весьма плодотворный принцип, о котором не следует забывать при изучении плоской метрической геометрии. Аналогия между точками и прямыми помогает распознавать родственные теоремы, которые иногда даже и доказываются аналогично, а также формулировать новые теоремы, исходя из уже известных. Однако мы не знаем никакой общей теоремы, которая позволила бы точно указать границы, в каких эта аналогия является допустимой.

Даже среди теорем общей плоской метрической геометрии есть такие, которые выполняются для любых инволютивных элементов аксиоматически заданной группы и в которых можно по желанию заменять точки прямыми и наоборот, например:

Теорема 24. *Пусть* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma$ *инволютивны*; *тогда*

а) *из* $\sigma_1 | \sigma_2,\ \sigma_2 | \sigma_3,\ \sigma_3 | \sigma_1$ *следует* $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$, *и наоборот*;

б) *если* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \sigma$, *то* $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ *инволютивно и* $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 | \sigma$.

Теорема 24 б) — это *теорема о трех симметриях для произвольных инволютивных элементов и дополнение к ней.*

Доказательство. а) Если $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — прямые, то а) имеет место в силу теоремы 5, а значит, при условии справедливости аксиомы P утверждение а) в силу теоремы 22 выполняется всегда. При условии истинности аксиомы $\sim$ P условие а) в силу теоремы 23 возможно только тогда, когда среди элементов σ_1, σ_2, σ_3 есть одна точка и две прямые. В этом случае а) следует из теоремы 1. Обращение этой теоремы тривиально.

б) Если σ_1, σ_2, σ_3, σ — прямые, то б) имеет место в силу аксиомы 4 и теоремы 9, а значит, при условии истинности аксиомы P, б) верно всегда. Если же принять аксиому $\sim$ P, то, согласно теореме 23, возможны только следующие случаи:

σ — точка, а σ_1, σ_2, σ_3 — прямые; в этом случае б) следует из аксиомы 3 и теоремы 7;

σ — прямая, а элементы σ_1, σ_2, σ_3 суть:

две прямые и точка; тогда б) верно по теореме 12;
прямая и две точки; тогда б) верно по теореме 11;
три точки; тогда мы должны доказать:

Если $A, B, C \mathrel{\text{I}} g$, то ABC есть точка D и $D \mathrel{\text{I}} g$.

Положим $Ag=a$, $Bg=b$, $Cg=c$. Тогда $a, b, c \perp g$. По аксиоме 4 abc является прямой d, причем в силу теоремы 9 $d \perp g$. Итак, $ABC=ag\cdot gb\cdot cg=dg$ — точка D и $D \mathrel{\text{I}} g$.

По поводу теоремы 24 б) заметим, что обращение теоремы о трех симметриях не обладает такой же общностью; например, утверждения:

$$\textit{если}\quad A\neq B,\quad A, B \mathrel{\text{I}} g\quad \textit{и}\quad ABC=D,\quad \textit{то}\quad C \mathrel{\text{I}} g, \tag{11}$$

$$\textit{если}\quad a\neq b,\quad a, b\perp g\quad \textit{и}\quad abC=D,\quad \textit{то}\quad C \mathrel{\text{I}} g, \tag{12}$$

справедливы только тогда, когда метрика неевклидова, т. е. при выполнении вводимой ниже аксиомы $\sim$ R (п. 7 § 6). Проводя же рассуждения по схеме доказательства теоремы 24 б), можно лишь установить, что справедлива

Теорема 24. *Пусть σ_1, σ_2, σ_3 σ инволютивны; тогда:*

в) *Если $\sigma_1=\sigma_2$; $\sigma_1, \sigma_2 | \sigma$ и $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ — прямая, то $\sigma_3 | \sigma$.*

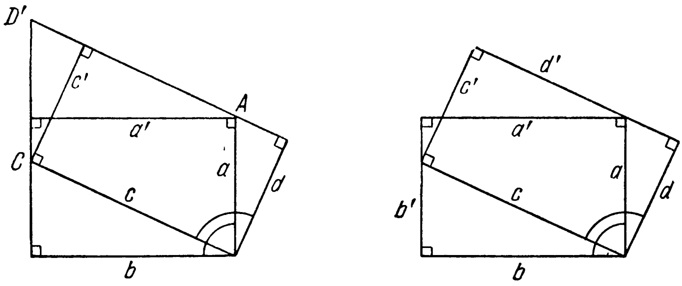
К тем теоремам, которые выполняются для всех инволютивных элементов нашей группы, принадлежат, в частности, теоремы, справедливые для всякого инволютивного элемента произвольной группы, т. е. не зависящие от аксиом. Подобной теоремой является теорема 14 о конфигурации перпендикуляров. Если заменить в ней прямую d' на точку D' и поменять местами C и c', то мы убедимся, что справедлива

Теорема 14′. *Если имеют место какие-либо четыре из равенств $aa'=A$, $cc'=C$, $abc=d$, $a'bC=D'$, $Adc'=D'$, то имеет место и пятое равенство.*

Если в фигуре, которая отвечает этому аналогу конфигурации перпендикуляров (рис. 41, *а*), отбросить точку D' (рис. 41, *б*), то придем, например, к такому утверждению, которое нам понадобится позже:

Теорема 25. *Пусть $ab=dc$ и $a \not\perp d$. Пусть также $a'\perp a$; $b'\perp b$; $c'\perp c$; $d'\perp d$; $aa' \mathrel{\text{I}} d'$; $cc' \mathrel{\text{I}} b'$. Тогда условие $a'\perp b'$ равносильно $c'\perp d'$.*

Доказательство. Положим $aa'=A$, $cc'=C$. Тогда $a'bC=$ $=a'a\cdot abc\cdot c'=Adc'$. Если теперь $a'\perp b'$, то, так как $b\perp b'$ и $C\,\mathrm{I}\,b'$, по теореме 12 произведение $a'bC$ является точкой. Так как при этом Adc' — тоже точка, а $A\,\mathrm{I}\,d'$, $d\perp d'$ и $A\neq d$ (поскольку $a\,\mathrm{I}\,A$; $a\not\perp d$), то в силу той же теоремы 12 $c'\perp d'$. Аналогично получается обратное утверждение: надо только заметить, что в силу обеих первых посылок $b\not\perp c$.



а) *б)*

Рис. 41.

Если принять аксиому $\sim$ P, то в теореме 25 можно отбросить условие $a\not\perp d$.

Задача. Образовать все аналоги теоремы о конфигурации перпендикуляров и уяснить их геометрическое значение.

10. Неподвижные прямые и неподвижные точки движения. Зададимся вопросом о неподвижных прямых и неподвижных точках движения (5) групповой плоскости, т. е. об инволютивных элементах σ, для которых

$$\sigma^{\gamma}=\sigma. \tag{13}$$

Эти элементы σ мы короче назовем *инволютивными неподвижными элементами движения* γ.

Если γ само инволютивно, то ответ на наш вопрос ясен: надо, чтобы было $\sigma=\gamma$ или $\sigma|\gamma$. В общем случае запишем γ в «нормальной форме» (см. выше теорему 16): $\gamma=\alpha\beta$, где α, β — инволютивные элементы, хотя бы один из которых является прямой.

Лемма о неподвижных элементах. *Пусть* α, β — *инволютивные элементы, хотя бы один из которых является прямой, и* $(\alpha\beta)^2=1$. *Тогда для любого инволютивного* σ *равенство* $\sigma^{\alpha\beta}=\sigma$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $\sigma|\alpha$, β.

Таким образом, неинволютивное и отличное от единицы движение (записываемое в нормальной форме в виде $\alpha\beta$) обладает только теми инволютивными неподвижными элементами, которые соединяют α и β, т. е. являются общими неподвижными инволютивными элементами обоих инволютивных множителей (такой элемент обязательно отличен от α и β, ибо, например, из $\alpha^{\beta}=\alpha$ следовало бы $(\alpha\beta)^2=1$).

Доказательство необходимости. Не теряя общности, можно предположить, что элемент α является прямой a. Допустим, что утверждение неверно; тогда существует такой элемент σ, что $\sigma^{\alpha}=\sigma^{\beta}\neq\sigma$.

Мы можем считать, что β, σ соединимы, т. е. что существует такой инволютивный элемент ρ, что $\beta, \sigma|\rho$. В самом деле, если они несоединимы, то оба эти элемента обязательно являются прямыми. Тогда можно на прямой σ выбрать произвольную точку ρ и по теореме 15 так определить прямую β', где $\beta'|\rho$, чтобы $a\beta\beta'$ было прямой a' (рис. 42). Так как $a\beta=a'\beta'\neq 1$ и не инволютивно, то из $\sigma^{a}=\sigma^{\beta}\neq\sigma$ в силу обращения аксиомы 4 вытекает $\sigma^{a'}=\sigma^{\beta'}\neq\sigma$. Тогда можно заменить $a\beta$ на $a'\beta'$; в дальнейшем мы считаем это сделанным.

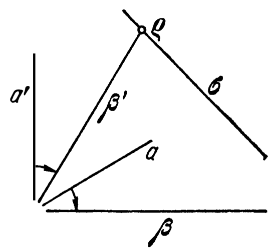


Рис. 42.

Из $\beta, \sigma|\rho$ вытекает $\beta^{\sigma}|\rho^{\sigma}=\rho$. Так как условие $\sigma^{a\beta}=\sigma$ равносильно $(a\beta)^{\sigma}=a\beta$, то $a\beta\beta^{\sigma}=(a\beta)^{\sigma}\beta^{\sigma}=a^{\sigma}$ есть прямая. Из $\sigma^{\beta}\neq\sigma$, т. е. $\beta\neq\beta^{\sigma}$, следовало бы поэтому (в силу того, что $\beta, \beta^{\sigma}|\rho$, и теоремы 24в)), что $a|\rho$. По теореме 24б) в силу $a, \beta, \sigma|\rho$ произведение $a\beta\sigma$ является инволютивным, т. е. $a\beta=(a\beta)^{\sigma}=\sigma\cdot a\beta\sigma=\sigma\cdot\sigma\beta a=\beta a$ и, значит, $(a\beta)^2=1$; но это противоречит условию.

Если инволютивные элементы ρ, σ, τ связаны условием $\sigma^{\rho}=\tau$, то мы называем ρ *средним элементом* для σ, τ, точнее, *средней линией* или *средней точкой* *), в зависимости от того, является ли ρ прямой или точкой. Если R — средняя точка для S и T, то $(S, T)^R=(S^R, T^R)=(T, S)=(S, T)$ и $(S, T)\neq R$ (ибо соединение двух разных элементов не может быть их средним элементом), а также $R \mathrm{I} (S, T)$: *средняя точка двух различных точек всегда лежит на прямой, соединяющей их.* Столь же простыми рассуждениями устанавливается, например, *что средняя линия двух различных точек перпендикулярна их соединительной прямой,* т. е. является *медиатрисой* этих точек. Другое утверждение: *средняя линия двух различных пересекающихся прямых проходит через их общую точку*, т. е. является *«биссектрисой»*.

*) Мы будем пользоваться также терминами *«ось симметрии»*, *«центр симметрии»*. *(Прим. перев.)*

Из леммы о неподвижных элементах вытекает такое чисто теоретико-групповое следствие:

Следствие о среднем элементе. *Пусть* α, β — *инволютивные элементы, хоть один из которых является прямой. Пусть, далее,* σ, τ *также инволютивны. Тогда из* $\sigma^\alpha=\tau$, $\sigma^\beta=\tau$ *и* $\sigma\neq\tau$ *следует, что либо* $\alpha=\beta$, *либо* $\alpha\beta$ *инволютивно и* $\alpha\beta\,|\,\sigma, \tau$.

Таким образом, если два различных инволютивных элемента σ, τ обладают двумя различными средними элементами, один из которых есть прямая, то произведение средних элементов инволютивно и соединяет σ, τ.

Доказательство. По условию $\sigma^{\alpha\beta}=\sigma$, но ни отношение $\sigma\,|\,\alpha$ (из $\sigma\,|\,\alpha$ следовало бы $\sigma=\sigma^\alpha=\tau$), ни отношение $\sigma\,|\,\beta$ не имеют места. По лемме отсюда следует, что $(\alpha\beta)^2=1$, т. е. либо $\alpha=\beta$, либо $\alpha\beta$ инволютивно. Во втором случае из $\sigma^{\alpha\beta}=\sigma$ и $\alpha\beta\neq\sigma$ (из $\alpha\beta=\sigma$ следовало бы, что $\sigma\,|\,\alpha$) вытекает $\alpha\beta\,|\,\sigma$; так же получается $\alpha\beta\,|\,\tau$.

Разыщем теперь движения, которые переводят в себя точку S и инцидентную ей прямую t. Единственными инволютивными движениями, для которых это возможно, очевидно, являются симметрии относительно S, или относительно t, или относительно перпендикуляра, восставленного к t в точке S, т. е. относительно St. Неинволютивное движение, которое оставляет неподвижными S и t, необходимо является тождеством, ибо, записав его в нормальной форме $\alpha\beta$ и допустив, что оно $\neq 1$, по лемме получим $S, t\,|\,\alpha, \beta$, т. е. в силу $S \,\mathrm{I}\, t$ по теореме 24 а) имеем $St\alpha=1$ и $St\beta=1$, т. е. $\alpha=\beta$, а значит, $\alpha\beta=1$, что противоречит нашему допущению. Те движения, которые оставляют неподвижной пару (точка, прямая), образуют так называемую *четырехчленную группу Клейна* (Kleinische Vierergruppe) *), состоящую из тождества и трех указанных выше симметрий. Отсюда следует

Теорема 26 (о жесткости движений). *Пусть дана пара: точка S и инцидентная ей прямая t; выберем еще одну такую же пару. Если существует движение γ, которое первую пару переводит во вторую, то существует ровно четыре движения, переводящие первую пару во вторую. Они получаются умножением элементов* 1, S, t, St *четырехчленной группы Клейна на движение* γ.

В самом деле, если δ — движение, переводящее первую пару во вторую, то $\delta\gamma^{-1}$ — движение, оставляющее S и t неподвижными.

---

*) Хорошо известно, что имеется лишь по одной группе второго и третьего порядка — это соответствующие циклические группы; неизоморфных же групп четвертого порядка существует две — циклическая группа и «Vierergruppe» Клейна. *(Прим. ред.)*

Утверждение о жесткости движений является аналогом предположения об ортогональной паре прямых s, t.

Примем теперь (вплоть до теоремы 28) *аксиому* $\sim$ P. Лемма о неподвижных элементах утверждает:

Теорема 27. *При допущении аксиомы* $\sim$P *справедливо*:

а) *Пусть* $ab \neq 1$ *и не инволютивно. Для того чтобы было* $s^{ab}=s$, *необходимы и достаточны условия* $s \perp a, b$; *для того чтобы было* $S^{ab}=S$, *необходимы и достаточны условия* $S \,\rfloor\, a, b$.

б) *Пусть* aB *не инволютивно. Для того чтобы было* $s^{aB}=s$, *необходимо и достаточно условие* $s=(a, B)$; $S^{aB}=S$ *не может иметь места никогда.*

Таким образом, неподвижными прямыми неинволютивного собственного нетождественного движения $ab \neq 1$ могут быть только общие перпендикуляры прямых a, b; неподвижной точкой такого движения может быть только общая точка a, b; если общий перпендикуляр или общая точка существуют, то они обязательно будут неподвижными элементами. Единственной неподвижной прямой неинволютивного зеркального движения aB является (a, B) — ось скользящей симметрии aB; неподвижных точек это движение не имеет.

Если движение инволютивно, то можно добавить: неподвижной прямой инволютивного собственного движения $ab=C$ является каждая прямая s, инцидентная C, а единственной неподвижной точкой этого движения является точка C. Инволютивным неподвижным элементом инволютивного зеркального движения $aB=c$, кроме оси $(a, B)=c$ скользящей симметрии, являются еще прямые s, перпендикулярные c, и точки S прямой c.

Из этого вытекают такие утверждения: если отличное от тождественного движение обладает двумя неподвижными точками, то это есть симметрия относительно прямой, соединяющей эти точки; если оно обладает неподвижной точкой и неподвижной прямой, то оно инволютивно.

Из следствия о среднем элементе вытекает ряд утверждений; для примера приведем следующие:

1) *если* $s^a=t$, $s^b=t$, $s \neq t$ *и* $a \neq b$, *то* $a \perp b$ *и* $ab \,\rfloor\, s, t$,

т. е. если две различные прямые имеют две различные средние линии, то они имеют общую точку, и обе средние линии (биссектрисы) в этой точке взаимно перпендикулярны;

2) *если* $s^A=t$, $s^b=t$ *и* $s \neq t$, *то* $A \,\rfloor\, b$ *и* $Ab \perp s, t$,

т. е. если две различные прямые имеют среднюю точку и среднюю линию, то средняя точка лежит на средней линии и восставленный в этой точке перпендикуляр к средней линии есть общий перпендикуляр к данным прямым;

3) *если* $S^a=T$, $S^b=T$ *и* $S \neq T$, *то* $a=b$,

т. е. две различные точки имеют не более одной медиатрисы;

4) *если* $S^A = T$, $S^B = T$, *то* $A = B$,
т. е. две точки имеют не более одной средней точки.

Доказательство 4). Если $S = T$, то утверждение следует непосредственно из теоремы 23. Если $S \neq T$, то, обозначив $(S, T) = v$, получим $A, B \,]\!\![\, v$. Тогда по 3) перпендикуляры $Av = a$ и $Bv = b$ совпадают, т. е. $A = B$.

В следующей теореме применяется понятие оси скользящей симметрии:

Теорема 28 (теорема Йельмслева о линии средних точек). *Каково бы ни было движение* γ, *каждая пара точек* P, P^γ *обладает средней точкой*). Пусть точки* P *пробегают некоторую прямую* g, *а следовательно, точки* P^γ — *прямую* g^γ; *тогда средние точки пар* (P, P^γ) *либо все совпадают, либо все принадлежат одной прямой.* ($\sim$P)

Доказательство. Прежде всего покажем, что если γ — зеркальное движение, т. е. скользящая симметрия, то каждая пара (P, P^γ) обладает средней точкой, и последняя лежит на оси этой скользящей симметрии. Пусть $\gamma = aB$, а $s = (a, B)$ — ось (рис. 43). Опустим перпендикуляр a' из P на s. По теореме 12 $a'aB$ есть точка B' прямой s и $P^\gamma = P^{a'\gamma} = P^{B'}$, т. е. B' — средняя точка пары (P, P^γ). В частности, если P пробегает некоторую прямую g, то средние точки пар (P, P^γ) принадлежат s; если $g \perp s$, то средние точки сливаются в одну.

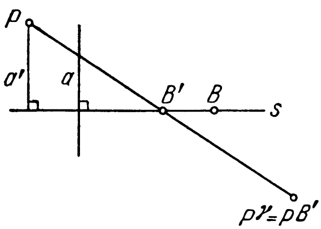


Рис. 43.

Пусть теперь γ — собственное движение. Если g — прямая, проходящая через точку P, то $P^{g\gamma} = P^\gamma$, т. е. зеркальное движение $g\gamma$ переводит точку P в ту же точку, что и собственное движение, а значит, средняя точка пары $(P, P^{g\gamma})$ та же, что и средняя точка пары (P, P^γ). Если P пробегает прямую g, то опять же средние точки пар (P, P^γ) принадлежат одной прямой или все совпадают. Кроме того, при этом $g^{g\gamma} = g^\gamma$.

Примем теперь аксиому P и зададимся вопросом об инволютивных неподвижных элементах движения на *эллиптической* плоскости. Теперь всякие две различные прямые a, b имеют точно один общий перпендикуляр, который мы будем обозначать через (a, b). Лемма о неподвижных элементах дает:

Теорема 29. *Если справедлива аксиома* P, *то*:

*) Это утверждение справедливо и в случае выполнимости аксиомы P.

В случае, когда движение $ab \neq 1$ *и не инволютивно, равенство* $s^{ab} = s$ *равносильно тому, что* $s = (a, b)$.

Таким образом, единственная неподвижная прямая неинволютивного движения $ab \neq 1$ — это общий перпендикуляр к a, b. Неподвижными прямыми инволютивного движения $ab = c$, кроме общего перпендикуляра $(a, b) = c$, являются также перпендикуляры к c.

Следствие о среднем элементе можно усилить:

Теорема 30. *Если выполняется аксиома* P, *то:*

Из того, что $s^a = t$, $s \neq t$, *вытекает существование единственной прямой* $b \neq a$ *такой, что* $s^b = t$ *и* $ab = (s, t)$.

Если две различные прямые имеют среднюю линию, то они имеют еще одну среднюю линию, и не больше того; обе средние линии вместе с общим перпендикуляром данных прямых образуют полярный трехсторонник.

Задача. Замените в теоремах 29 и 30 точки на прямые и получите все аналоги этих теорем.

11. Существование точек и прямых. Теорема 31. а) *Каждой прямой инцидентны по крайней мере три различные точки.* б) *Каждой точке инцидентны по крайней мере четыре различные прямые.*

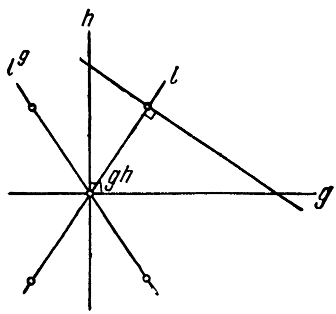


Рис. 44.

Доказательство. Пусть g, h, j — трехсторонник аксиомы D (рис. 44). Точка gh не полярна прямой j (иначе было бы $g, h \perp j$); поэтому перпендикуляр $(gh, j) = l$ однозначно определен и $l \neq g, h$ (ибо $j \not\perp g$, $j \not\perp h$). Рассмотрим основание lj этого перпендикуляра, отличное от точки gh (ибо $gh \not\mathrm{I}\, j$), и точку, симметричную ему относительно gh; эта точка $(lj)^{gh} = lj^{gh}$ будет снова отлична от gh, а также и от lj (ибо из $j^{gh} = j$ следовало бы $gh = j$ или $gh \,\mathrm{I}\, j$). Таким образом, gh, lj, lj^{gh} — три различные точки прямой l. Им симметричны относительно g три различные точки отличной от l прямой l^g (ибо из $l = l^g$ следовало бы $l = g$, или $l \perp g$, откуда $l = h$); точка gh при этой симметрии переходит сама в себя.

Пусть теперь a — произвольная прямая. Если $a \perp l$, l^g, то по теореме 3 $gh = a$, т. е. $a \perp g, h$. Тогда al, al^g, ag, ah — четыре различные точки прямой a. Если $a \not\perp l$ или $a \not\perp l^g$, то из трех построенных точек прямой l (или l^g) опустим перпендикуляры на a; их основания будут тремя различными точками прямой a. (Если из двух различных точек опущены перпендикуляры на прямую, не перпендикулярную прямой, соединяющей эти точки, то основания перпендикуляров различны.) Поэтому а) верно.

Пусть A — произвольная точка. Если $A \mathrel{I} l, l^g$, то $A = gh$ и l, l^g, g, h — четыре различные прямые, проходящие через точку A. Если $A \not{\mathrel{I}} l$ или $A \not{\mathrel{I}} l^g$, то прямые, соединяющие A с тремя построенными точками прямой l (или l^g), будут тремя различными прямыми, проходящими через A. Так как в каждой точке можно восставить перпендикуляр к любой проходящей через нее прямой, то существует по крайней мере еще одна (четвертая) прямая, проходящая через A. Пункт б) доказан.

Вернемся к построению точек и прямых на базе рассмотрения трехсторонника аксиомы D. Точка $lj = P$ — это та точка, которая не совпадает с точкой gh и не полярна ей, не принадлежит g и не принадлежит h. Уже введенные точки P, P^g, P^{gh}, P^h — четыре различные точки, никакие три из которых не коллинеарны; они образуют четырехугольник, средними линиями которого являются g, h, а средней точкой gh. Поскольку каждая из прямых g, h перпендикулярна противоположным сторонам четырехугольника, то, кроме этих пяти точек, существуют еще четыре точки пересечения прямых g, h с противоположными сторонами. Все эти девять точек отличны друг от друга и никакие четыре из них не коллинеарны. Различных прямых существует во всяком случае 12: прямые g, h, l, l^g, четыре стороны четырехугольника и прямые j, j^g, j^h, j^{gh}.

Существование большего числа точек и прямых доказать нельзя: минимальная модель нашей системы аксиом — это метрическая плоскость с 9 точками и 12 прямыми, в которой на каждой прямой лежат ровно три точки и через каждую точку проходят ровно четыре прямые (ср. п. 2 § 13).

Задача. Существует ли группа движений, удовлетворяющая системе аксиом п. 2 § 3, в которой элементы g, h, j аксиомы D составляют систему образующих?

Литература к § 3. Йельмслев [1], [2], Шмидт [1], Бахман [3]. Системы аксиом, родственные изложенной в п. 2, изучали Шпернер [4], Карцель [1], [2], [3], [5], Шютте [3], [5], Лингенберг [4], а для пространственной геометрии Аренс [1] (и также Дикуонцо [1]. *Прим. перев.*).

§ 4. Теоремы метрической геометрии

1. Теорема о медиатрисах. Теорема 1 (теорема о медиатрисах). *Если $C^u = B$ и $B^w = A$, то существует прямая v такая, что uvw — прямая и $C^v = A$.*

Теорема 1 утверждает, что если известны медиатрисы двух пар вершин треугольника, то существует медиатриса третьей пары вершин, причем все три медиатрисы принадлежат одному пучку.

Доказательство. По теореме 15 § 3 существует прямая v', инцидентная B и лежащая в одном пучке с u и w (рис. 45). Значит, $uv'w$ является прямой v, для которой $C^v = C^{uv'w} = B^{v'w} = B^w = A$.

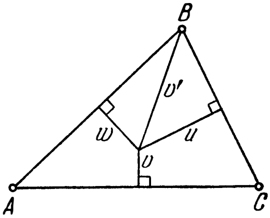


Рис. 45.

Теорема 2 (о средней линии). *Если $C^U = B$, $B^W = A$, то существует прямая v такая, что UvW — прямая и $C^v = A$.*

Если $A \neq C$, то $U \neq W$; поэтому нашу теорему с помощью теоремы 11 § 3 можно перефразировать так: среди перпендикуляров к прямой, соединяющей середины двух сторон треугольника, имеется и медиатриса третьей стороны.

Доказательство. Пусть s — прямая, инцидентная U и W, а v' — перпендикуляр, опущенный из B на s (рис. 46). По теореме 11 § 3 $Uv'W$ является прямой v, перпендикулярной s, для которой $C^v = C^{Uv'W} = B^{v'W} = B^W = A$.

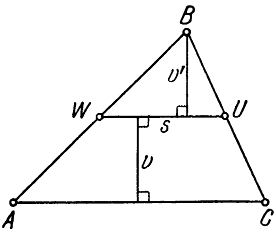


Рис. 46.

Теоремы 1 и 2 доставляют еще один пример аналогии между точками и прямыми. Другой аналог теоремы 2 доставляет

Теорема 2'. *Если $C^u = B$, $B^W = A$, то существует точка V такая, что uVW — прямая и $C^V = A$.*

Если $A \neq C$, то $u \neq W$; в этом случае теорема 2' утверждает, что перпендикуляр, опущенный из середины одной стороны треугольника на медиатрису другой стороны, проходит через середину третьей стороны (см. тот же рис. 46 в несколько иных обозначениях).

Доказательство. Пусть s — перпендикуляр, опущенный из W на u, а v' — перпендикуляр, опущенный из B на s. По теореме 12 § 3 $uv'W$ является точкой V прямой s, для которой $C^V = C^{uv'W} = B^{v'W} = B^W = A$.

Задача. Считая справедливой аксиому P, найти все аналоги теоремы 1.

2. Теорема о высотах. Теорема 3 (теорема о высотах). *Если $abc \neq 1$ и*

$$u \perp a, \quad v \perp b, \quad w \perp c, \tag{1}$$

$$buc, \quad cva, \quad awb \text{ — прямые,} \tag{2}$$

то uvw — прямая.

Эта теорема означает, что в трехстороннике, не являющемся полярным трехсторонником, «высоты», т. е. прямые, принадлежащие одному пучку с двумя сторонами и перпендикулярные третьей стороне, образуют пучок; при этом не предполагается, что стороны трехсторонника пересекаются.

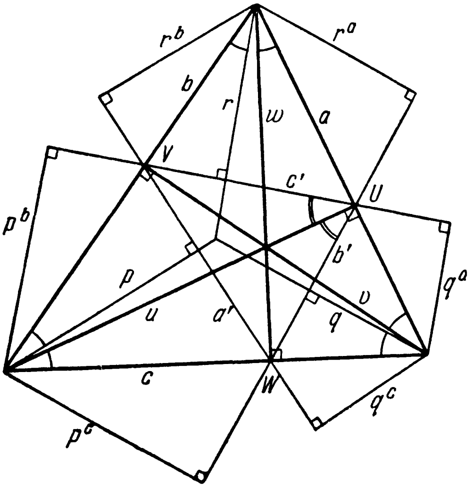


Рис. 47.

Доказательство. Из (1) вытекает, что мы можем рассматривать основания высот $au=U$, $bv=V$, $cw=W$ (рис. 47). Прямые (2) мы обозначим через p, q, r. Тогда выполняются тождества

$$Up^c = abc, \quad p^bU = bca,$$

$$Up^cW = r^a, \quad p^bUq^a = V,$$

$$UqW = uvw. \qquad (3)$$

Так как $abc \neq 1$, то в силу двух первых равенств $U \neq p^c$, p^b. Значит, перпендикуляры, опущенные из U на p^c и p^b, определены однозначно; положим

$$(U,\ p^c) = b', \qquad (U,\ p^b) = c'.$$

Для перпендикуляров a' и c' выполняются соотношения

$$c'^a = c'^{Ua} = c'^u = (U,\ p^b)^u = (U^u,\ p^{bu}) = (U,\ p^{pc}) = (U,\ p^c) = b',$$

т. е.

$$c'^a = b'. \qquad (4)$$

Из третьего равенства (3) в силу теоремы 11 § 3 следует, что $W \,] \, b'$. Из четвертого равенства (3) в силу теоремы 12 § 3 следует, что $q^a \perp c'$, т. е. $q \perp c'^a$; поэтому в силу (4) $q \perp b'$. Так как при этом U, $W \,] \, b'$ и $q \perp b'$, то по теореме 11 § 3 $UqW = uvw$ является прямой, что и требовалось доказать.

Из четвертого равенства (3) попутно в силу дополнения к теореме 12 § 3 вытекает, что $V \,] \, c'$. Из равенства (4), очень важного само по себе, видно также, что a является биссектрисой треугольника, образованного основаниями высот. Вообще, как легко видеть, *стороны и высоты исходного трехсторонника являются биссектрисами треугольника, образованного основаниями высот.*

Равенство (4) можно получить иным, достойным внимания путем, если привлечь введенное в п. 7 § 3 понятие оси скользящей симметрии. В силу первого из равенств (3) abc является скользящей симметрией с осью b', которая в силу $abc \neq 1$ определена однозначно. Аналогично, в силу второго равенства (3) bca является скользящей симметрией с осью c'. В силу $(bca)^a = abc$ получаем для осей $c'^a = b'$.

В силу дополнения к теореме 11 § 3 полученное в завершение доказательства утверждение о том, что $UqW = uvw$ является прямой, дополнительно означает, что прямая uvw перпендикулярна b'. Значит, abc является скользящей симметрией с осью b', а uvw — симметрия относительно прямой, перпендикулярной b'.

Если α — скользящая симметрия и σ — прямая, перпендикулярная к ее оси, то по теореме 12 § 3 $\alpha\sigma$ будет точкой. Тогда выполняется равенство

$$\alpha^\sigma = \alpha^{-1}, \tag{5}$$

которое и вообще равносильно равенству $(\alpha\sigma)^2 = 1$ при произвольном α, лишь бы σ было инволютивно. Например, равенство (5) выполняется тогда, когда α — произведение двух прямых, а σ — прямая, принадлежащая тому же пучку.

Рассмотрим теперь более общее соотношение:

$$\alpha^\beta = \alpha^{-1}, \tag{6}$$

выполняющееся для двух «нечетных» элементов группы (зеркальных движений групповой плоскости); здесь $\alpha \neq 1$.

Ось скользящей симметрии $\alpha \neq 1$ обозначим через $[\alpha]$. Очевидно, всегда $[\alpha^{-1}] = [\alpha]$, $[\alpha^\beta] = [\alpha]^\beta$. Если (6) имеет место, то $[\alpha^\beta] = [\alpha^{-1}]$ и поэтому $[\alpha]^\beta = [\alpha]$, т. е. $[\alpha]$ — неподвижная прямая движения β. В силу п. 10 § 3 для β, как для зеркального движения с неподвижной прямой $[\alpha]$, имеются только две возможности:

1) β — скользящая симметрия с осью $[\alpha]$;
2) β — прямая, перпендикулярная к $[\alpha]$.

Как в доказательстве леммы из п. 2 § 1, устанавливается, что скользящие симметрии с совпадающими осями коммутируют. В случае 1) поэтому $\alpha^\beta = \alpha$, а отсюда, согласно (6), $\alpha = \alpha^{-1}$, т. е. α инволютивно и $\alpha = [\alpha]$.

Поэтому справедливо следующее общее утверждение об элементах нашей группы:

Лемма Томсена. *Если для зеркальных движений α и β групповой плоскости при $\alpha \neq 1$ выполняется равенство* (6), *то α или β является прямой.*

Пользуясь леммой, можно, следуя Томсену, значительно упростить доказательство теоремы о высотах:

Второе доказательство теоремы о высотах. Сделаем дополнительное допущение, что a, b, c не принадлежат одному пучку, т. е. abc не является прямой. Из (1) и (2) следует

$$(abc)^{uvw}=(a^u(bc)^u)^{vw}=(acb)^{vw}=((ac)^v b^v)^w=(cab)^w=$$
$$=c^w(ab)^w=cba,$$

ибо по первому условию (1) $a^u=a$, а по первому условию (2) $(bc)^u=cb$ и т. д. Итак,

$$(abc)^{uvw}=(abc)^{-1}. \tag{7}$$

Так как $abc\neq 1$ и не прямая, то по лемме uvw — прямая.

Однако это изящное доказательство неприменимо, когда a, b, c принадлежат одному пучку.

3. Теорема об основаниях. Теорема о высотах является некоторым утверждением, формулируемым в терминах инцидентности и перпендикулярности. Дальнейшими утверждениями такого рода являются теоремы Йельмслева об основаниях. Они основываются на теореме о перпендикулярах и на следующем простом факте:

Пусть a, a_1, a_2 — прямые, проходящие через точку O. Тогда по аксиоме 3 a_1aa_2 — прямая, т. е. $a_1aa_2=a_2aa_1$, и эта прямая также инцидентна O в силу дополнения к аксиоме 3. Итак, можно сказать: если a, a_1, a_2 проходят через O, то произведения

$$a_iaa_k \tag{8}$$

при всех подстановках ik индексов 1 2 являются одной и той же прямой, проходящей через O. По индукции доказывается, что если a, a_1, a_2, a_3 проходят через O, то при попарно различных индексах i, k, l все произведения

$$a_iaa_kaa_l \tag{9}$$

являются одной и той же прямой, проходящей через O; если a, a_1, a_2, a_3, a_4 проходят через O, то произведения

$$a_iaa_kaa_laa_m \tag{10}$$

для всех подстановок $iklm$ индексов 1 2 3 4 являются одной и той же прямой, проходящей через O, и т. д.

Пусть теперь A — отличная от O и не полярная ей точка; тогда прямые, проходящие через A, не полярны O. Если сопоставить каждой прямой, проходящей через A, перпендикуляр, опущенный на нее из точки O (рис. 48), то получим взаимно однозначное соответствие между множеством прямых, проходящих через A, и множеством прямых, проходящих через O. При этом соответствии всякие две соответствующие друг другу прямые имеют точку пересечения, которая не полярна O; у разных пар (образ, прообраз) эти точки пересечения будут различными. Множество образованных таким образом точек пересечения мы назовем *множеством оснований для* O, A. Никакие три различные точки из множества оснований не коллинеарны. (В противном случае мы получили бы противоречие с теоремой о перпендикулярах.) Прямая, соединяющая любые две точки из множества оснований, опять-таки не полярна O, и перпендикуляр, опущенный на нее из O, определен однозначно. Теорема об основаниях утверждает, что *если опустить из O перпендикуляры на стороны треугольника, вершины которого принадлежат множеству оснований для O, A, то основания этих перпендикуляров принадлежат одной прямой.* В евклидовом случае, в котором множество оснований для O, A является окружностью диаметра OA (известной под названием «окружность Фалеса»), эта прямая является так называемой *прямой Симсона* (ср. п. 5 § 1, задача 4).

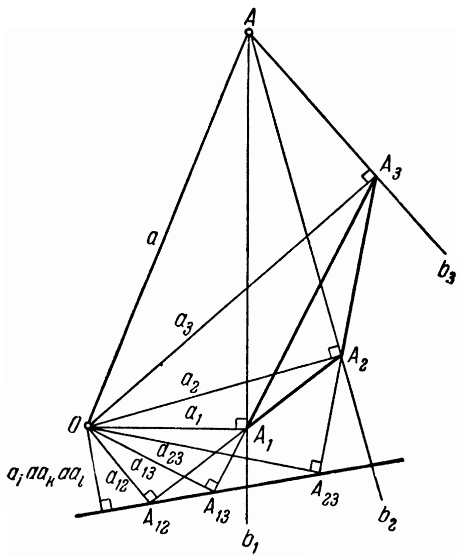


Рис. 48

Теорема 4 (теорема об основаниях для трех прямых). *Пусть O и A — две неполярные точки, а b_1, b_2, b_3 — три различные прямые, не инцидентные O и проходящие через A. Если опустить из O перпендикуляры a_i на b_i (i, $k=1$, 2, 3) и обозначить их основания через A_i, а затем из O — перпендикуляры a_{ik} на прямые (A_i, A_k) и обозначить основания этих перпендикуляров через A_{ik}, то полученные точки A_{12}, A_{13}, A_{23} принадлежат одной прямой* *).

Точки A_{12}, A_{13}, A_{23} попарно различны. В самом деле, мы заметили, что A_1, A_2, A_3 попарно различны и не коллинеарны. Следовательно, например, (A_1, A_2), (A_1, A_3) — две разные прямые, проходящие через точку A_1 которая не полярна O и в силу $b_1 \not I O$ отлична от O. Будучи точками из множества оснований для O, A_1, точки A_{12}, A_{13} поэтому различны.

*) Индексы i, k — какие угодно различные индексы; порядок их безразличен.

Доказательство теоремы 4. Обозначим $(O, A) = a$. Тогда

$$a_i a a_k = a_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3;\ i \neq k) \tag{11}$$

по теореме о перпендикулярах; ведь при данном сочетании i, k прямые a_i, a_k представляют собой перпендикуляры, опущенные из O на две прямые, проходящие через A, а A_i, A_k — их основания; поэтому четвертая зеркальная прямая к a_i, $a = (O, A)$, a_k совпадает с перпендикуляром a_{ik}, опущенным из O на (A_i, A_k).

Из (11) следует

$$a_i a a_k a a_l = a_{ik} a_i a_{il} \ (i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3 \text{ и все различны}). \tag{12}$$

Снова применим теорему о перпендикулярах при фиксированном наборе индексов i, k, l: a_{ik}, a_{il} представляют собой перпендикуляры, опущенные из O на две прямые, проходящие через A_i; основаниями этих перпендикуляров служат A_{ik}, A_{il}; прямая $a_i a a_k a a_l$ в силу (12) является четвертой зеркальной к a_{ik}, $a_i = (O,\ A_i)$, a_{il}. Отсюда вытекает, что $a_i a a_k a a_l \perp (A_{ik},\ A_{il})$. А так как прямая (9) — одна и та же при любом сочетании индексов, то

$$a_i a a_k a a_l \perp (A_{12},\ A_{13}),\ (A_{12},\ A_{23}),\ (A_{13},\ A_{23}). \tag{13}$$

Поэтому стоящие в правой части три попарно пересекающиеся прямые совпадают друг с другом, поскольку перпендикуляр, опущенный из точки A_{ik} на прямую (9), определен однозначно.

Итак, при наших условиях для прямых b_1, b_2, b_3 существует *прямая оснований* по отношению к O, не зависящая от того, в каком порядке берутся прямые b_1, b_2, b_3. Рассуждая по индукции, можно сопоставить прямую оснований по отношению к O и для более чем трех прямых, проходящих через A. Следующий шаг здесь таков:

Теорема 5 (теорема об основаниях для четырех прямых). *Пусть O и A — две не полярные друг другу точки, а b_1, b_2, b_3, b_4 — различные прямые, проходящие через A и не инцидентные O. Если опустить из O перпендикуляры a_{ikl} на прямые оснований для b_i, b_k, b_l, обозначив основания этих перпендикуляров через A_{ikl}, то полученные таким путем точки A_{123}, A_{124}, A_{134}, A_{234} принадлежат одной прямой. Здесь набор индексов $i\,k\,l$ может представлять собой любое сочетание из* 1, 2, 3, 4 *по три.*

Четыре названные точки попарно различны: ведь в силу замечания к теореме 4, например, прямые (A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4) попарно различны; следовательно, A_{12}, A_{13}, A_{14}, как точки множества оснований для O, A_1, отличны друг от друга и не коллинеарны, т. е. (A_{12}, A_{13}), (A_{12}, A_{14}) — различные прямые, проходящие через точку A_{12}, не полярную O и отличную от O (ибо A_{12}, A_1, A_2 коллинеарны, а O, A_1, A_2, как три различные точки множества оснований для O, A, не коллинеарны). Поэтому точки A_{123} и A_{124} различны, как точки множества оснований для O, A_{12}.

Доказательство теоремы 5. Как прежде, введем обозначения a, a_i, a_{ik} (i, $k=1$, 2, 3, 4; $i \neq k$) и снова получим

$$a_i a a_k = a_{ik}. \tag{14}$$

Из предыдущего доказательства видно, что

$$a_i a a_k a a_l = a_i a_k a_l. \tag{15}$$

Из (14) и (15) получаем

$$a_i a a_k a a_l a a_m = a_{ikl} a_{ik} a_{ikm}. \tag{16}$$

По теореме о перпендикулярах при данной перестановке $i\,k\,l\,m$ индексов 1, 2, 3, 4 имеем $a_i\, a a_k\, a a_l\, a a_m \perp (A_{ikl}, A_{ikm})$, а так как прямая (10) одна и та же для любой перестановки индексов, то

$$a_i a a_k a a_l a a_m \perp (A_{123}, A_{124}),\ (A_{123}, A_{134}),$$
$$(A_{124}, A_{134}),\ (A_{123}, A_{234}),\ (A_{124}, A_{234}),\ (A_{134}, A_{234}). \tag{17}$$

Отсюда, как и выше, следует наше утверждение.

4. Теорема о транзитивности. Продолжим изучение отношения «a, b, c принадлежит одному пучку», т. е. отношения

$$abc \text{ — прямая}. \tag{18}$$

Из того обстоятельства, что, согласно основному допущению, прямые образуют инвариантную систему, уже следует *рефлексивность* и *симметричность* этого отношения. Важным следствием нашей аксиоматики является *транзитивность* этого отношения, т. е.

Теорема 6 (теорема о транзитивности). *Если $a \neq b$ и abc, abd являются прямыми, то acd — тоже прямая.*

Если a, b имеют общую точку V, то это утверждение следует из аксиомы 3 и ее обращения. В самом деле, прежде всего из условия теоремы и обращения аксиомы 3 следует, что $c, d \,\mathrm{I}\, V$; затем из $a, c, d \,\mathrm{I}\, V$ и аксиомы 3 получаем требуемое. В силу аксиомы 4 и ее обращения наша теорема выполняется и тогда, когда a, b имеют общий перпендикуляр v.

Значит, теорема доказана, если имеет место аксиома P.

Поэтому при доказательстве теоремы 6 мы можем считать выполненной аксиому $\sim$P, т. е. считать, что перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, всегда определен однозначно. Доказательство мы проведем шестикратным применением теоремы о перпендикулярах; оно является своеобразным обращением теоремы об основаниях.

Прежде всего заметим, что если на две различные прямые опустить перпендикуляры из точки, не инцидентной обеим этим прямым, то основания перпендикуляров будут различны.

Доказательство теоремы 6 ($\sim$P). Можно считать, что a, b, c, d — четыре различные прямые, ибо в противном случае утверждение тривиально. Выберем точку A, инцидентную a, но не инцидентную b; тогда A не инцидентна также ни c, ни d. Опустим из A перпендикуляры b', c', d' на b, c, d; их основания B', C', D' будут различны в силу сделанного замечания (рис. 49).

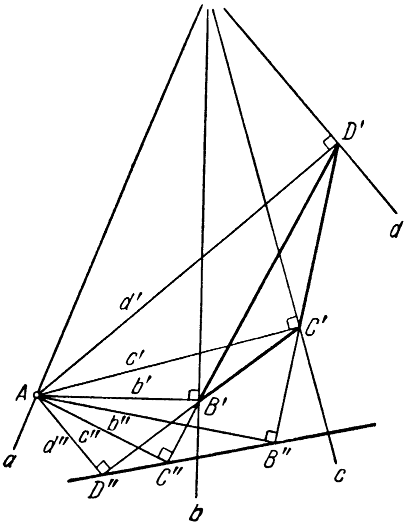


Рис. 49.

Поскольку по условию теоремы bac и bad — прямые, то имеет место конструкция, характеризующая теорему о перпендикулярах, где A — центр пучка; поэтому

$$b'ac' \perp (B', C'), \quad b'ad' \perp (B', D'). \tag{19}$$

Если точки B', C', D' принадлежат одной прямой, то по (19) $b'ac' = b'ad'$, т. е. $c' = d'$. Но прямой $c' = d'$ инцидентны тогда не только A, C', D', но и B'; значит, $b' = c' = d'$, и прямые b, c, d имеют общий перпендикуляр, опущенный из A. В силу обращения аксиомы 4 тогда a перпендикулярна этому общему перпендикуляру, и наше утверждение следует из аксиомы 4.

Если теперь прямые (B', C'), (B', D'), (C', D') различны, то опустим на них из A перпендикуляры d'', c'', b''. Их основания D'', C'', B'' по замечанию различны, ибо, например, (B', C') и (B', D') пересекаются в B'; но $A \neq B'$. Это построение приводит к трем дальнейшим фигурам, отвечающим теореме о перпендикулярах с точкой A в качестве центра пучка и со вторыми центрами B', C', D'; отсюда

$$d''b'c'' \perp (D'', C''), \quad d''c'b'' \perp (D'', B''), \quad c''d'b'' \perp (C'', B''). \tag{20}$$

По (19) $b'ac' = d''$, $b'ad' = c''$. Следовательно, $d''c' = c''d'$ и в (20) $d''c'b'' = c''d'b''$. Поэтому $(D'', B'') = (C'', B'')$ и точки B'', C'', D'' принадлежат одной прямой. Значит, в (20) также

$d''b'c''=d''c'b''$, т. е. $b'c''=c'b''$. Подставляя это в равенство $b'ad'=c''$, получаемое из (19), имеем $c'ad'=b''$, а тем самым в качестве третьего соотношения (19) получаем

$$c'ad' \perp (C', D').$$

Применяя в шестой раз теорему о перпендикулярах (на этот раз в обратном порядке), заключаем отсюда, что cad — прямая.

5. Пучок прямых. Интересные результаты можно получить из следующей системы G свойств прямых:

G_0. *Прямые являются инволютивными элементами группы; существуют по крайней мере две прямые.*

G_1. *Образ прямой при внутреннем автоморфизме, порожденном прямой, представляет собой прямую.*

G_2. *Для прямых выполняется теорема о транзитивности.*

Если выполнено G_0, то G_1 равносильно рефлексивности и симметричности отношения (18).

Сначала рассмотрим произвольное множество элементов a, b, c, d, ..., для которого задано рефлексивное, симметричное и транзитивное *трехместное* отношение $R(a, b, c)$. Итак, мы считаем, что это отношение обладает такими свойствами:

Рефлексивность. Если a, b, c не все различны, то $R(a, b, c)$.

Симметричность. Если R выполняется для a, b, c, то оно выполняется для каждой перестановки a, b, c. (Отношение R не зависит от того, в какой последовательности выписаны аргументы.)

Транзитивность. Из $a \neq b$ и $R(a, b, c)$, $R(a, b, d)$ следует $R(a, c, d)$.

Из этих свойств вытекают два правила:

(I) $a' \neq b'$ *и* $R(a', b', a)$, $R(a', b', b)$, $R(a', b', c)$ *влечет* $R(a, b, c)$.

(II) $a \neq b$ *и* $R(a', b', a)$, $R(a', b', b)$, $R(a, b, c)$ *влечет* $R(a', b', c)$.

Доказательство (I). a отлично от a' или от b'. Так как a', b' входят в условия симметрично, то можно принять, что $a \neq a'$. Из $a' \neq b'$ и $R(a', b', a)$, $R(a', b', b)$ по транзитивности вытекает $R(a', a, b)$; аналогично, из $R(a', b', c)$ вытекает $R(a', a, c)$. В силу симметричности тогда $R(a, a', b)$ и $R(a, a', c)$, откуда, так как $a \neq a'$, по транзитивности получаем $R(a, b, c)$.

Доказательство (II). При $a'=b'$ утверждение вытекает из рефлексивности; поэтому примем $a' \neq b'$. Из $R(a', b', a)$, $R(a', b', b)$ по транзитивности следует $R(a', a, b)$; аналогично, по симметричности получаем $R(b', a, b)$. Так как при этом выполняются $R(a, b, a')$, $R(a, b, b')$, $R(a, b, c)$ и $a \neq b$, то по (I) выполняется $R(a', b', c)$.

Обратно, можно из (I) или (II) как частный случай получить транзитивность: для этого достаточно положить $a'=c$ в (I) или $a'=a$ в (II). При условиях рефлексивности и симметричности, таким образом, каждое из правил (I) или (II) равносильно транзитивности.

С помощью рефлексивного, симметричного и транзитивного трехместного отношения можно в данном множестве *выделять подмножества* аналогично тому, как это делается с помощью двухместного отношения с теми же свойствами*). Пусть $a \neq b$; множество элементов c, для которых выполняется $R(a, b, c)$, назовем *смежным классом, определяемым элементами a и b*, и

*) Пусть $R(a, b)$ — двухместное рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение (т. е. такое отношение, что для каждого a имеет место $R(a, a)$; если $R(a, b)$, то $R(b, a)$; если $R(a\ b)$ и $R(a, c)$, то $R(b, c)$); тако

обозначим через $M(a, b)$. Для этих подмножеств выполняются следующие условия:

1) *всякие три элемента одного смежного класса удовлетворяют отношению* R;

2) *если для двух различных элементов некоторого смежного класса и некоторого третьего элемента выполняется отношение* R, *то последний также лежит в этом смежном классе;*

3) *всякий смежный класс определяется любыми двумя различными его элементами;*

4) *два различных смежных класса не могут иметь более одного общего элемента.*

Утверждение 1) следует из (I), 2) — из (II), 3) — из 1) и 2), 4) — из 3).

Теперь положим в основу систему свойств G и обратимся к изучению отношения (18). В силу (I) и (II) справедливы теоремы:

Теорема 7. *Если* $a' \neq b'$ *и* $a'b'a$, $a'b'b$, $a'b'c$ *представляют собой прямые, то* abc — *прямая.*

Теорема 8. *Если* $a \neq b$ *и* $a'b'a$, $a'b'b$, abc *представляют собой прямые, то* $a'b'c$ — *прямая.*

Заметим, что теорему 7 можно установить еще короче, нежели по плану доказательства (I). В самом деле, так как $a'b'a$ — прямая, то $aa'b'$ — тоже некоторая прямая d; следовательно, $a'b' = ad$ и в силу $a' \neq b'$ имеем $a \neq d$. Так как по двум другим условиям adb и adc — прямые, то по транзитивности abc — прямая. Аналогично можно получить теорему 8.

Те смежные классы, которые определяются отношением (18) на множестве всех прямых, мы назовем *пучками прямых.* Вводим определение:

Если $a \neq b$, то множество прямых c, для которых abc является прямой, называется *пучком* $\mathbf{G}(ab)$ *прямых, определенным элементами* a *и* b.

(Очевидно, это множество зависит только от произведения ab. Символ $\mathbf{G}(ab)$ определен только при $ab \neq 1$, т. е. при $a \neq b$.)

В силу утверждений 1)—4) для пучков прямых справедливы такие четыре теоремы:

Теорема 7′. *Если* $a, b, c \in \mathbf{G}(a'b')$, *то* abc — *прямая.*

Теорема 8′. *Если* $a \neq b$, *а также* $a, b \in \mathbf{G}(a'b')$ *и* abc — *прямая, то* $c \in \mathbf{G}(a'b')$.

отношение называется ***отношением эквивалентности.*** Если назвать *смежным классом* $M(a)$, *определенным элементом* a, множество всех таких b, что $R(a, b)$, то, как хорошо известно,

1) всякие два элемента одного смежного класса удовлетворяют отношению R;

2) если два элемента удовлетворяют отношению R, то они принадлежат одному смежному классу;

3) всякий смежный класс определяется любым своим элементом;

4) никакие два смежных класса не имеют общих элементов. *(Прим. ред.)*

Теорема $7'$ — это просто теорема о трех симметриях применительно к пучку прямых, а теорема $8'$ является ее обращением. При выполнении G_0 и G_1 как теорема о трем симметриях, так и ее обращение равносильны теореме о транзитивности; поэтому теорема и ее обращение равносильны друг другу.

Пучок прямых определяется любыми двумя своими прямыми:

Теорема 9. *Из* $a \neq b$ *и* $a, b \in \mathsf{G}(a'b')$ *следует* $\mathsf{G}(a'b') = \mathsf{G}(ab)$.

Два различных пучка прямых могут иметь не более одной общей прямой:

Теорема 10. *Из* $a \neq b$ *и* $a, b \in \mathsf{G}(a'b')$, $\mathsf{G}(a''b'')$ *следует* $\mathsf{G}(a'b') = \mathsf{G}(a''b'')$.

Теорема 9 является объединением теорем $7'$ и $8'$. Теорема 10 получается двукратным применением теоремы 9.

В связи с теоремой $7'$ надо заметить, что прямая abc принадлежит тому же пучку $\mathsf{G}(a'b')$.

Дополнение к теореме $7'$. *Из* $a, b, c \in \mathsf{G}(a'b')$ *следует* $abc \in \mathsf{G}(a'b')$.

Доказательство. При $a=b$ это тривиально. Пусть $a \neq b$. Так как по теореме $7'$ abc — прямая, то $ab \cdot abc = ab \cdot cba = c^{ba}$ — прямая, т. е. $abc \in \mathsf{G}(ab)$. А так как по теореме 9 $\mathsf{G}(ab) = \mathsf{G}(a'b')$, то утверждение доказано.

Очевидно, что предыдущие теоремы вытекают из одной только системы свойств G.

Прямые, инцидентные некоторой точке A, образуют пучок прямых $\mathsf{G}(A)$; точку A назовем *центром* этого пучка. Прямые, перпендикулярные некоторой прямой a, в силу аксиомы 4 и ее обращения также образуют пучок прямых, *пучок перпендикуляров* к a; прямую a назовем *осью* этого пучка. Пучок перпендикуляров с осью a мы будем обозначать через $\mathsf{G}(a)$.

Пучок прямых, совпадающий с некоторым пучком $\mathsf{G}(A)$, т. е. содержащий две взаимно перпендикулярные прямые, мы будем называть *собственным пучком прямых.* При выполнимости аксиомы P всякий пучок прямых является собственным, а при выполнимости аксиомы $\sim$P несобственными будут, во всяком случае, все пучки перпендикуляров.

Пучки прямых мы будем обозначать буквами $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \ldots$

Прямую, принадлежащую двум пучкам, мы назовем *соединением* этих двух пучков. По теореме 10 два различных пучка имеют не более одного соединения. Относительно существования соединения из теоремы 15 § 3 получаем:

Собственный пучок прямых соединим со всяким пучком прямых.

Если подвергнуть все прямые внутреннему автоморфизму, определяемому элементом γ, то всякий пучок прямых $\mathbf{A}$ перейдет снова в пучок прямых — *в преобразованный пучок* $\mathbf{A}^\gamma$; при этом

$$\mathsf{G}(ab)^\gamma = \mathsf{G}(a^\gamma b^\gamma). \tag{21}$$

Это отображение является взаимно однозначным отображением множества пучков прямых, в частности подмножества собственных пучков, на себя.

Задача. (а) Если $(ab)^2 \neq 1$, то $\mathsf{G}((ab)^2) = \mathsf{G}(ab)$ и из $abcab = d$ следует $c = d$.

б) Если $(abc)^2 \neq 1$, то $(abc)^w = bac$ равносильно тому, что $w \perp c$ и $w \in \mathsf{G}(ab)$. Иными словами, w является высотой в трехстороннике a, b, c, опущенной на сторону c.

6. Теорема о биссектрисах. Из одних только свойств G_0—G_2 вытекает *теорема о биссектрисах* для трехсторонника a, b, c, которую мы сформулируем так:

Теорема 11 (теорема о биссектрисах). *Пусть a, b, c не принадлежат одному пучку; $c^u = b$, $b^w = a$ и v принадлежит тому же пучку, что c, a, и тому же пучку, что u, w. Тогда $c^v = a$* (рис. 50).

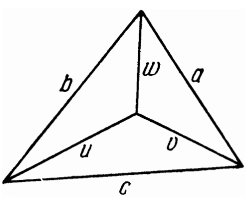


Рис. 50.

Доказательство. Если заменить c и a на b^u и b^w, то получим такое равносильное высказывание о четырех прямых b, u, v, w:

Если $b^u b b^w$ — не прямая, а uvw, $b^u v b^w$ — прямые, то $b^u v b^w = v$.

Докажем это утверждение. Из первой посылки следует, что $u \neq w$ и $b^u \neq b^w$; поэтому существуют пучки $\mathsf{G}(uw)$ и $\mathsf{G}(b^u b^w)$. Они различны, ибо $b^u \notin \mathsf{G}(uw)$: ведь если бы $b^u uw = ubw$ было прямой, то $b^u b b^w = ub \cdot ubw \cdot bw = ub \cdot wbu \cdot bw = wbu \cdot b \cdot ubw = b^{ubw}$ было бы прямой.

Теперь имеем

$$v,\ b^u v b^w \in \mathsf{G}(uw),\quad \mathsf{G}(b^u b^w),$$

ибо uvw, $b^u v b^w$, $u \cdot b^u v b^w \cdot w = (uvw)^b$ и $b^u \cdot b^u v b^w \cdot b^w = v$ будут прямыми. Поэтому наше утверждение следует из теоремы 10.

Его можно еще записать в виде $(uvw)^b = uvw$; поскольку $uvw \neq b$ (иначе ubw было бы прямой), то имеет место также $uvw \perp b$.

7. Лемма о девяти прямых. Из одних только свойств G_0—G_2 получается следующее общее утверждение:

Лемма о девяти прямых. *Пусть даны элементы группы α_1, α_2, α_3 (где $\alpha_1 \neq \alpha_2$) и β_1, β_2, β_3 (где $\beta_1 \neq \beta_2$) такие, что восемь произведений $\alpha_i\beta_k$ (i, $k = 1, 2, 3$ и $(i, k) \neq (3,3)$) являются прямыми. Тогда и девятое произведение $\alpha_3\beta_3$ будет прямой.*

Если составить таблицу произведений $\alpha_i\beta_k$, то лемма гласит: если на местах, обозначенных в этой таблице кружком ($\circ$), стоят прямые, то на месте, обозначенном звездочкой ($*$), также стоит прямая.

	β_1	$\neq$	β_2	β_3
α_1	$\circ$		$\circ$	$\circ$
$\neq$				
α_2	$\circ$		$\circ$	$\circ$
α_3	$\circ$		$\circ$	$*$

Доказательство. Если $\beta_3 = \beta_1$, то утверждение тривиально. Пусть $\beta_1 \neq \beta_3$. Имеем

$$(\alpha_1\beta_1)^{-1}(\alpha_1\beta_2) = (\alpha_2\beta_1)^{-1}(\alpha_2\beta_2) = (\alpha_3\beta_1)^{-1}(\alpha_3\beta_2), \tag{22}$$

$$(\alpha_1\beta_1)^{-1}(\alpha_1\beta_3) = (\alpha_2\beta_1)^{-1}(\alpha_2\beta_3). \tag{23}$$

При этом в скобках по условию стоят прямые (следовательно, показатель -1 можно отбросить), и всякие две умножаемые прямые различны, ибо $\beta_1 \neq \beta_2, \beta_3$. Поэтому элемент (22) группы определяет пучок прямых, и элемент (23) также определяет пучок прямых. Эти пучки по условию имеют общими две различные прямые $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_1$, а значит, в силу теоремы 10 они совпадают. Поэтому равенства (22) и (23) означают, что существует пучок прямых G, которому принадлежат все восемь прямых, упомянутые в условии леммы. А так как элемент (23) равен также $(\alpha_3\beta_1)^{-1}(\alpha_3\beta_3)$, то $\alpha_3\beta_3$ представимо в виде произведения трех прямых из G, т. е. по теореме 7′ $\alpha_3\beta_3$ является прямой.

По дополнению к теореме 7′ прямая $\alpha_3\beta_3$ также принадлежит пучку G и, значит, выполняется

Следствие. *Все девять прямых леммы принадлежат одному пучку.*

Обратно, при выполнении G_0 и G_1 можно из леммы получить теорему о транзитивности, как показывает приводимая здесь таблица произведений (можно считать, что $a \neq c$, ибо при $a = c$ теорема о транзитивности тривиальна). Таким образом, *при* *условиях* G_0 *и* G_1 *лемма о девяти прямых равносильна теореме о транзитивности.*

	a	c	d
1	a	c	d
ab	b^a	abc	abd
ac	c^a	a	acd

8. Спаривание прямых. Если две пары прямых a_1, b_1 и a_2, b_2 связаны соотношением

$$a_1a_2 = b_2b_1, \tag{24}$$

то мы говорим (ср. п. 3 § 3), что прямые a_2, b_2 *зеркально расположены* по отношению к прямым a_1, b_1. Отношение (24) равносильно любому из следующих:

$$a_2a_1 = b_1b_2, \quad b_1a_2 = b_2a_1, \quad a_1b_2 = a_2b_1. \tag{25}$$

Таким образом, зеркальное расположение двух пар прямых является *симметричным* отношением пар и не зависит от того, в каком порядке берутся элементы одной пары. Как показывает следующая лемма, оно является также *транзитивным* отношением в множестве пар прямых одного пучка:

Лемма. *Если* a_1, a_2, a_3 *принадлежат одному пучку и справедливы два из трех равенств:*

$$a_1a_2 = b_2b_1, \quad a_1a_3 = b_3b_1, \quad a_2a_3 = b_3b_2, \tag{26}$$

то справедливо и третье; при этом a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 *принадлежат одному пучку.*

Доказательство. Так как $a_1a_2a_3$ — прямая, то $(a_1a_2a_3)^2 = 1$ и $a_1a_2a_3 \neq 1$. Разобьем лемму на два предложения, каждое из которых касается одного из этих условий:

а) *Если* $(a_1a_2a_3)^2 = 1$ *и выполняются первые два равенства* (26), *то*

$$a_2a_3 = a_1 \cdot a_1a_2a_3 = a_1 \cdot a_3a_2a_1 = b_3b_1 \cdot b_1b_2 = b_3b_2.$$

б) *Если* $a_1a_2a_3 \neq 1$ *и выполняются равенства* (26), *то* a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 *принадлежат одному пучку.*

Так как $a_1a_2a_3 \neq 1$, то по теореме 5 § 3 прямые a_i, а значит, в силу равенств (26), и прямые b_i, попарно не перпендикулярны; поэтому $b_1b_2b_3 \neq 1$. Так как, далее, в силу равенств (26) $(a_1a_2a_3)^2 = b_2b_1 \cdot b_1b_3 \cdot b_3b_2 = 1$ и точно так же $(b_1b_2b_3)^2 = 1$, то $a_1a_2a_3$ и $b_1b_2b_3$ инволютивны, т. е. по п. 7 § 3 они будут прямыми.

То, что a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 принадлежат одному пучку, тривиально, когда $a_1 = a_2 = a_3$, так как тогда и $b_1 = b_2 = b_3$. Если же

$a_1 \neq a_2$, то все шесть прямых принадлежат пучку $\mathsf{G}(a_1a_2) = \mathsf{G}(b_2b_1)$, ибо выполняется $a_1, a_2, a_3 \in \mathsf{G}(a_1a_2)$ и $b_1, b_2, b_3 \in \mathsf{G}(b_2b_1)$.

Назовем взаимно однозначное инволютивное отображение в множестве прямых пучка, т. е. разбиение прямых пучка на пары, *спариванием*, если всякие две пары, являющиеся образом и прообразом, расположены зеркально одна по отношению к другой. Спаривание определяется заданием пары a, b соответствующих друг другу прямых: тогда каждой прямой x пучка соответствует четвертая зеркальная

$$y = axb. \tag{27}$$

(Спаривание в собственном пучке прямых — это «равноугольная инволюция» *).)

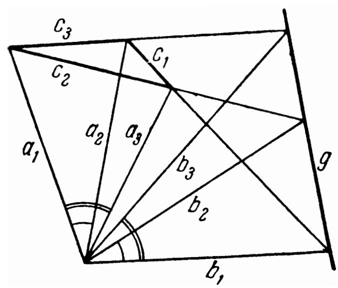


Рис. 51.

Теперь мы можем установить справедливость т е о р е м ы Г е с с е н б е р г а о с п а р и в а н и и, гласящей:

Пусть дан трехсторонник c_1, c_2, c_3, через «вершины» которого проведены прямые a_1, a_2, a_3 одного пучка (т. е. a_k принадлежит тому же пучку, что c_i, c_l); далее, пусть b_1, b_2, b_3 — прямые, отвечающие a_1, a_2, a_3 при спаривании, причем c_1, c_2, a_1, a_2, b_1, b_2 предполагаются попарно различными. Тогда если g — прямая, принадлежащая тому же пучку, что c_1, b_1 и что c_2, b_2, то она принадлежит также тому же пучку, что c_3, b_3 (рис. 51). Сформулируем эту теорему при одном лишь дополнительном требовании:

Т е о р е м а 12 (теорема о спаривании). *Пусть $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, g$ — прямые, удовлетворяющие следующим условиям:*

$a_1a_2a_3$ — *прямая;* $a_1a_2 = b_2b_1$, $a_1a_3 = b_3b_1$;

$c_ia_kc_l$ — *прямая, какова бы ни была перестановка* i, k, l *из* 1, 2, 3;

$c_1b_1 \neq c_2b_2$ (дополнительное условие);

c_1b_1g, c_2b_2g — *прямые.*

Тогда c_3b_3g — *прямая.*

Если дополнительное условие не имеет места, то прямая g нашими условиями не определяется однозначно. В силу

*) Другими словами, инволюция, задаваемая парой прямых a, b, сопоставляет каждой прямой x определяемого a и b собственного пучка такую прямую y того же пучка, что $ax = yb$, т. е. a и x определяют такой же направленный угол, как y и b (см. п. 5 § 1; ср. ниже рис. 51 и таблицу произведений). (*Прим. ред.*)

$a_1a_2 = b_2b_1$ дополнительное условие равносильно также тому, что $a_1a_2 \neq c_2c_1$.

Доказательство. По пункту а) леммы имеет место $a_2a_3 = b_3b_2$. В таблице произведений

	$b_1a_3c_2 = b_3a_1c_2$	$b_2a_3c_1 = b_3a_2c_1$	g
c_1b_1	$c_1a_3c_2$	$(b_1b_2a_3)^{c_1} = (a_2a_1a_3)^{c_1}$	c_1b_1g
c_2b_2	$(b_2b_1a_3)^{c_2} = (a_1a_2a_3)^{c_2}$	$c_2a_3c_1$	c_2b_2g
c_3b_3	$c_3a_1c_2$	$c_3a_2c_1$	c_3b_3g

восемь произведений, кроме последнего, по условию будут прямыми.

По дополнительному условию $c_1b_1 \neq c_2b_2$ и $b_3a_1c_2 \neq b_3a_2c_1$. Следовательно, утверждение вытекает из леммы о девяти прямых.

Таким образом, теорема о спаривании есть частный случай леммы о девяти прямых; справедливость ее основывается исключительно на свойствах $\mathfrak{G}_0 - \mathfrak{G}_2$.

Если в теореме 12 заменить прямые c_1, c_2, c_3, g точками C_1, C_2, C_3, G, то получим *теорему, аналогичную теореме о спаривании*, являющуюся обобщением на абсолютную геометрию евклидовой теоремы о четырехугольнике, вписанном в круг, и играющую определенную роль в исследованиях Тёпкена и Йельмслева. Наше доказательство сохраняется дословно. В то время как в теореме о спаривании фигурирует трехсторонник, через вершины которого проведены прямые, аналогичная теорема говорит о треугольнике, на стороны которого опущены перпендикуляры. Считая, что входящие в формулировку элементы C_1, C_2, C_3, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 попарно различны, можно так перефразировать утверждение теоремы:

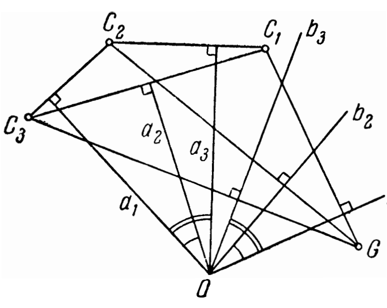


Рис. 52.

Пусть даны треугольник C_1, C_2, C_3 и прямые a_1, a_2, a_3 одного пучка такие, что a_k перпендикулярна (C_i, C_l); пусть, далее, b_1, b_2, b_3 — прямые, отвечающие при спаривании прямым a_1, a_2, a_3. Тогда если перпендикуляры, опущенные из C_1 на b_1 и из C_2 на b_2, проходят через точку G, то перпендикуляр, опущенный из C_3 на b_3, тоже проходит через G (рис. 52).

Примером теоремы о спаривании является теорема об основаниях (теорема 4).

Для того чтобы пояснить это, заметим прежде всего, что если a, a_1, a_2, a_3 — прямые пучка, то прямые a_i и $a'_i = a_k a a_l$ (i, k, l — любая перестановка чисел 1, 2, 3) соответствуют друг другу при спаривании:

$$a_i a_k = a_i a a_l \cdot a_l a a_k = a'_k a'_i.$$

(При этом спаривании прямой a соответствует прямая (9).)

Теперь используем обозначения теоремы 4. По условию через вершины A_1, A_2, A_3 треугольника оснований проходят прямые a_1, a_2, a_3 пучка $\mathsf{G}(O)$. Положив $(A_i, A_k) = c_l$, имеем по теореме о перпендикулярах $a'_l = a_{ik} \perp c_l$, т. е. $A_{ik} = c_l a'_l$. В силу теоремы о спаривании эти три точки принадлежат одной прямой. Следовательно, «прямая оснований» — это прямая, которая специальным спариванием сопоставляется треугольнику оснований.

Конструкция теоремы об основаниях также является примером теоремы, аналогичной теореме о спаривании: на стороны c_i треугольника оснований опущены из O перпендикуляры a'_i, а опущенные из вершин A_i треугольника оснований перпендикуляры b_i на прямые a_i, получаемые спариванием из прямых a'_i, проходят через точку A.

Задачи. 1. а) Теорема об изогональном соответствии (п. 5 § 1, предложение 9)): «*Если $ba'c = a''$, $cb'a = b''$, $ac'b = c''$ и a', b', c' принадлежат одному пучку, то a'', b'', c'' также принадлежат одному пучку*», — справедлива в абсолютной геометрии.

б) Справедлива также следующая, аналогичная предыдущей, теорема (теорема об изотомическом соответствии) *): «*Если $Ba'C = a''$, $Cb'A = b''$, $Ac'B = c''$ и a', b', c' принадлежат одному пучку, то и a'', b'', c'' принадлежат одному пучку*».

в) Если A, B, C — треугольник и к его сторонам (B, C), (C, A), (A, B) восставлены перпендикуляры a', b', c', которые принадлежат пучку P, не содержащему сторон треугольника, то прямые $a'' = Ba'C$, $b'' = Cb'A$, $c'' = Ac'B$, принадлежащие, согласно б), одному пучку G (*изотомическому противопучку пучка* P), являются медиатрисами «треугольника» P^A, P^B, P^C.

G является образом P при изогональном соответствии в трехстороннике $A\bar{a}$, $B\bar{b}$, $C\bar{c}$, где $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ соединяют точки A, B, C с пучком P.

---

*) Нетрудно видеть, что в евклидовой геометрии эта теорема гласит: *если перпендикуляры a', b', c', восставленные к сторонам BC, CA, AB треугольника ABC в точках A', B', C' этих сторон, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры a'', b'', c'', восставленные к тем же сторонам треугольника в точках A'', B'', C'', симметричных точкам A', B', C' относительно середин соответствующих сторон, также пересекутся в одной точке*; эта теорема (с очевидностью следующая из известной теоремы Карно геометрии треугольника; см. Зетель [1], стр. 137) родственна теореме об изотомическом соответствии (Зетель [1], стр. 98—99). (*Прим. ред.*)

2. (Йельмслев). Доказать следующее утверждение о зеркальном расположении в четырехстороннике a, b, c, d и установить его геометрический смысл: *Если* $da'=a''a$, $ab'=b''b$, $bc'=c''c$, $cd'=d''d$, *то из* $a'b'=d'c'$ *следует* $a''b''=d''c''$.

9. Теорема Паппа — Брианшона. Теорема о спаривании, являющаяся метрическим уточнением известной теоремы проективной геометрии о четырехстороннике (ср. п. 2 § 5), важна для обоснования плоской метрической геометрии прежде всего потому, что, троекратно применяя ее, можно доказать теорему Паппа — Брианшона о шестистороннике, стороны которого поочередно принадлежат двум пучкам. Впервые этот ход мыслей использовал Гессенберг в исследованиях по эллиптической геометрии. Позже его использовал Йельмслев для доказательства теоремы Паппа — Паскаля о шестиугольнике, вершины которого поочередно принадлежат двум прямым, в рамках абсолютной геометрии. Теоремы Паппа — Паскаля и Паппа — Брианшона равносильны, поскольку каждую фигуру Паппа — Паскаля можно воспринимать как фигуру Паппа — Брианшона, и наоборот (ср. п. 1 § 5).

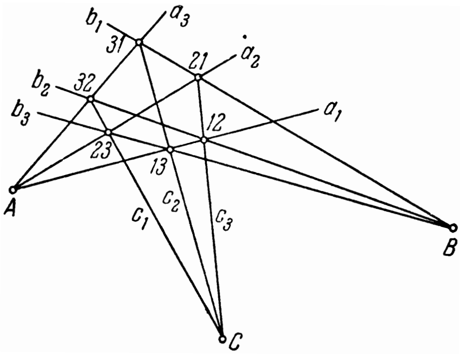


Рис. 53.

Мы докажем теорему Паппа — Брианшона для так называемого *вещественного случая:* если дан простой шестисторонник вместе с диагоналями (ср. п. 1 § 5) и стороны его поочередно принадлежат одному из двух пучков, причем хотя бы один из этих пучков собственный, то, коль скоро две из диагоналей принадлежат какому-либо собственному пучку, ему принадлежит и третья диагональ.

Теорема 13 (теорема Паппа — Брианшона, вещественный случай). *Пусть* $a_1, b_2, a_3, b_1, a_2, b_3$ — *простой шестисторонник и* A, B — *такие пучки, что*

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathsf{A},$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3 \in \mathsf{B}$$

причем хотя бы один из пучков A *и* B *собственный. Пусть, далее,* c_1, c_2, c_3 — *такие прямые, что*

$a_i b_k c_l$ — *прямая для любой перестановки* i, k, l *индексов* 1, 2, 3.

Тогда если для какого-то собственного пучка C *выполняются два из соотношений*

$$c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathsf{C},$$

то выполняется и третье (рис. 53).

Отвлекаясь от вырожденных случаев, эта теорема равносильна такой теореме о шестистороннике Брианшона a_1, b_2, a_3, b_1, a_2, b_3, через вершины которого проведены шесть прямых c_{ik} некоторого собственного пучка:

Теорема 13а. *Пусть* a_i *и* b_k $(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$ — *прямые, а* A, B, C — *пучки, причем* $a_i \in \mathsf{A}$, $\notin \mathsf{B}, \mathsf{C}$; $b_k \in \mathsf{B}$; B *и* C *собственные. Пусть, далее,* c_{ik} $(i,\ k=1,\ 2,\ 3;\ i \neq k)$ — *такие прямые, что* $c_{ik} \in \mathsf{C}$ *и* $a_i b_k c_{ik}$ — *прямые. Тогда любые два из равенств*

$$c_{12}=c_{21}, \qquad c_{13}=c_{31}, \qquad c_{23}=c_{32}$$

влекут за собой третье.

Доказательство теоремы 13а. Пусть a, b — соединения C с A, B (теорема 15 § 3). Определим в пучке C спаривание посредством пары a, b; при этом спаривании всякой прямой c_{ik} отвечает прямая d_{ik}, определяемая равенством

$$ac_{ik}=d_{ik}b$$

(рис. 54).

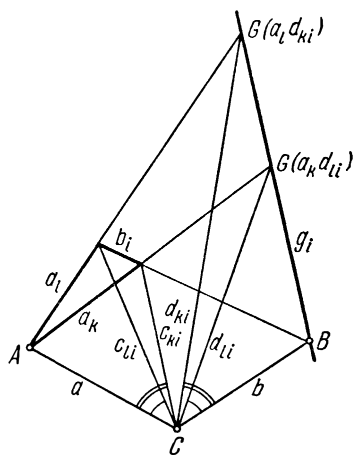


Рис. 54.

Пусть теперь i, k, l — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3. Рассмотрим трехсторонник b_i, a_k, a_l, через вершины которого проведены прямые a, c_{li}, c_{ki} пучка C, а также соответствующие им при спаривании прямые b, d_{li}, d_{ki}. Из теоремы о спаривании следует: если обозначить через g_i соединение двух различных пучков B, $\mathsf{G}(a_k d_{li})$ (в силу $a_k \notin \mathsf{C}$ имеем $a_k \neq d_{li}$, а так как $a_k \notin \mathsf{B}$, то эти пучки различны; значит, дополнительное условие $b_i b \neq a_k d_{li}$ теоремы о спаривании здесь выполняется), то g_i также принадлежит пучку $\mathsf{G}(a_l d_{ki})$. Итак,

$$g_1 \in \mathsf{B},\quad \mathsf{G}(a_2 d_{31}),\quad \mathsf{G}(a_3 d_{21});$$

$$g_2 \in \mathsf{B},\quad \mathsf{G}(a_3 d_{12}),\quad \mathsf{G}(a_1 d_{32});$$

$$g_3 \in \mathsf{B},\quad \mathsf{G}(a_1 d_{23}),\quad \mathsf{G}(a_2 d_{13}).$$

Если теперь $c_{12}=c_{21}$, $c_{13}=c_{31}$ и, значит, $d_{12}=d_{21}$, $d_{13}=d_{31}$, то существуют два различных пучка, которым принадлежат g_1 и g_2, и два различных пучка, которым принадлежат g_1 и g_3. Следовательно, $g_1=g_2=g_3$ (рис. 55). Поэтому $g_1 \in \mathbf{G}(a_1d_{23}), \mathbf{G}(a_1d_{32})$, т. е. $d_{23}, d_{32} \in \mathbf{C}$, $\mathbf{G}(a_1g_1)$ $\big($в силу $a_1 \notin \mathbf{B}$ имеем $a_1 \neq g_1\big)$, а так как $\mathbf{C} \neq \mathbf{G}(a_1g_1)$ $\big($из-за $a \notin \mathbf{C}\big)$, то $d_{23}=d_{32}$ и, значит, $c_{23}=c_{32}$.

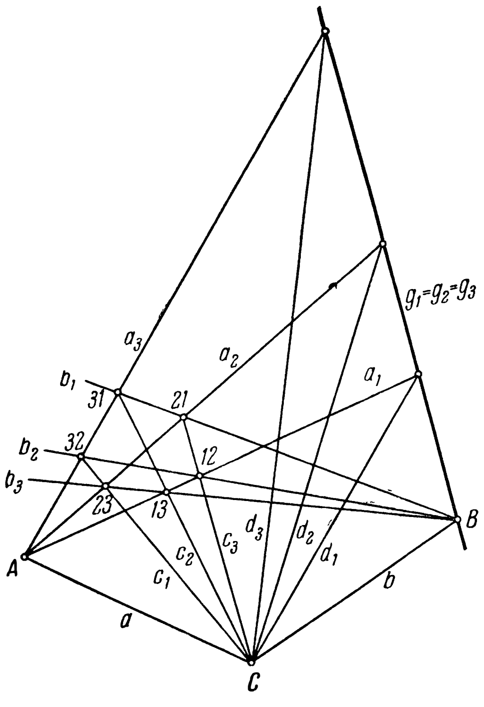


Рис. 55.

Доказательство, таким образом, состоит в том, чтобы за счет специально подобранного спаривания обогатить проективную конструкцию, превратив ее в некоторую метрическую, а затем установить, что это спаривание сопоставляет трем сторонам трехсторонника b_i, a_k, a_l те же самые прямые пучка $\mathbf{B}$. Оно аналогично гильбертову доказательству аффинной теоремы Паппа — Паскаля в евклидовой плоскости путем троекратного применения теоремы о вписанном четырехугольнике.

К доказательству теоремы 13: Пусть $\mathbf{C}$ — собственный пучок, содержащий c_3 и c_2. Из условия о том, что a_1, b_2, a_3, b_1, a_2, b_3 — простой шестисторонник, вытекает, что $\mathbf{G}(a_ib_k) \neq \mathbf{G}(a_kb_i)$ (при $i \neq k$), а затем, — что $a_i \notin \mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $b_k \notin \mathbf{A}$, $\mathbf{C}$. Следовательно, c_l — однозначное соединение пучков $\mathbf{G}(a_ib_k)$, $\mathbf{G}(a_kb_i)$, и можно однозначно определить c_{ik} как соединение пучков $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}(a_ib_k)$. В силу $c_3, c_2 \in \mathbf{C}$ тогда $c_{12}=c_{21}=c_3$, $c_{13}=c_{31}=c_2$, а по теореме 13а $c_{23}=c_{32}=c_1$, т. е. $c_1 \in \mathbf{C}$.

10. Теорема о медианах. Из теоремы о спаривании можно, следуя Йельмслеву, получить также теорему о медианах треугольника.

Теорема 14 (теорема о медианах). *Пусть A, B, C не коллинеарны; U, W — такие точки, что $C^U=B$, $B^W=A$, а v — пря-*

мая, инцидентная B и принадлежащая тому же пучку, что $u=(A, U)$, $w=(C, W)$. Тогда существует точка V такая, что $V \mathrel{I} v$ и $C^V=A$.

Доказательство. Построим треугольник, центрально симметричный данному относительно точки U (рис. 56). В полученном треугольнике A, A^U, C точка U является средней для

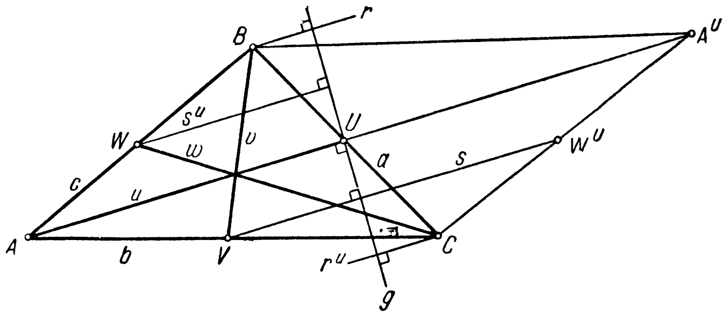


Рис. 56.

A, A^U, т. е. прямая $g=Uu$ является медиатрисой A, A^U. Далее, W^U — средняя точка для A^U, C. Проведем перпендикуляр $s=(W^U, g)$. ($W^U \neq g$, ибо из $W^U=g$, т. е. $W=g^U=g$, следовало бы $C=B^U=B^{gu}=B^{Wu}=A^u=A$.) По теореме 2′ имеем: существует точка V такая, что

$$V \mathrel{I} s, \qquad C^V=A; \tag{28}$$

при этом $V \mathrel{I} b$. Выполняется ли еще $V \mathrel{I} v$?

Проведем перпендикуляр $r=(B, g)$. ($B \neq g$, ибо из $B=g$ следовало бы $B=g=g^U=B^U=C$.) Из трех прямых u, r, s, перпендикулярных g, симметрией относительно u получаются прямые u, $r^u=(C, g)$, $s^u=(W, g)$. (Например, $r^u=r^{gu}=r^U=(B, g)^U=(B^U, g^U)=(C, g)$.)

Применим к трехстороннику w, $c=(A, B)$, $b=(A, C)$, через вершины A, C, W которого проведены прямые u, r^u, s^u, перпендикулярные g, теорему о спаривании: u, r, s соответствуют прямым u, r^u, s^u при спаривании; v принадлежит тому же пучку, что w, u, а также тому же пучку, что c, r; дополнительное условие $wu \neq cr$ теоремы о спаривании также выполнено, поскольку u, c, w не принадлежат одному пучку. Таким образом, имеем

$$bsv \text{ — прямая.} \tag{29}$$

Теперь если $b \neq s$, то из $V \mathrel{I} b$, s и (29) следует $V \mathrel{I} v$, а значит, и наше утверждение.

Если $b=s$, то A полярна U (если $b=s$, то, так как $s \perp g$, выполняется $b \perp g$; тогда b, u — два различных перпендикуляра, опущенных из A на g, т. е. $A=g$).

Таким образом, при выполнении аксиомы $\sim$ P это доказательство Йельмслева является корректным; в эллиптической же геометрии (в которой справедлива аксиома P) требуются дополнительные рассуждения.

Если A полярна U, но C не полярна W, то в предыдущем доказательстве можно поменять местами A, U и C, W.

В оставшемся случае, когда A полярна U и C полярна W, т. е.

$$B^W \mid U \text{ и } B^U \mid W \text{ или, в другой записи, } B \mid U^W,\ W^U, \tag{30}$$

возникает чрезвычайно симметричная конфигурация, для которой мы можем доказать теорему без применения спаривания. Точки U^W, W^U, согласно (30), принадлежат поляре точки B; так как к тому же, как видно непосредственно, точки U^W, W^U принадлежат прямой (U, W), а прямая (U, W) не полярна B (иначе B была бы полярна U, т. е. было бы $B=B^U=C$), то по аксиоме 2 (рис. 57)

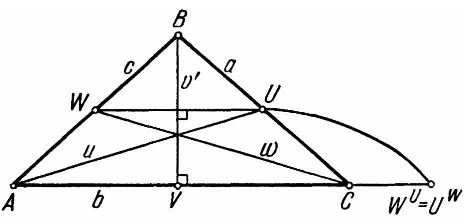


Рис. 57.

$$U^W = W^U. \tag{31}$$

Если поляру этой точки обозначить через v', т. е. $U^W = W^U = v'$, то

$$\text{а) } v' \mathrm{I} B, \text{ б) } U^{v'} = W, \text{ в) } \left(B^U\right)^{v'} = B^W, \text{ т. е. } C^{v'} = A, \tag{32}$$

ибо а) получается из (30), б) — из (31), в) — из (30).

Из (32 б)) и (32 в)) следует, что

$$(A,\ U)^{v'} = \left(A^{v'},\ U^{v'}\right) = (C,\ W), \text{ т. е. } u^{v'} = w.$$

Поэтому v' принадлежит тому же пучку, что u и w, и с помощью (32 а)) в силу теоремы 15 § 3 мы заключаем, что $v'=v$. Таким образом, в силу (32 в)) v — медиатриса точек C, A, а значит, ее основание bv — средняя точка для точек A, C.

Литература к § 4. Гессенберг [1], [2], [3], Йельмслев [1], [2], Тёпкен [1], [2], Томсен [3] Доказательство теоремы Дезарга дал Шпернер [4].

§ 5. Проективные и проективно-метрические плоскости

В следующем параграфе будет показано, что всякая метрическая плоскость может быть погружена в так называемую проективно-метрическую плоскость. Для понимания этого факта потребуются некоторые сведения из проективной геометрии. В настоящем параграфе мы сведем воедино некоторые понятия и теоремы плоской проективной геометрии и введем понятие проективно-метрической плоскости.

1. Проективные плоскости. Пусть даны два множества каких-то объектов или «вещей», одно из которых мы назовем множеством *точек*, другое — множеством *прямых*, и определено отношение «*точка P и прямая g инцидентны*». Множество точек и прямых с этим отношением мы называем *проективной плоскостью,* если выполнены следующие аксиомы (1—3) *):

1. Аксиомы инцидентности проективной плоскости. *Для любых двух точек найдется инцидентная им прямая. Для любых двух прямых найдется инцидентная им точка. Две различные прямые не инцидентны сразу двум различным точкам. Существуют четыре точки, никакие три из которых не инцидентны одной прямой.*

Шесть точек A_1, B_2, A_3, B_1, A_2, B_3 называют *простым шестиугольником*, если никакие две «циклически соседние» точки **) не коллинеарны ни с какой из прочих четырех точек. Соединительные прямые двух циклически соседних точек называются *сторонами* шестиугольника; стороны (A_k, B_i) и (A_i, B_k) называются *противоположными*.

Стороны простого шестиугольника образуют фигуру, двойственную простому шестиугольнику — *простой шестисторонник*: никакие две «циклически соседние» стороны не имеют общей точки ни с одной из четырех остальных сторон. Вершины простого шестиугольника попарно различны; то же относится к сторонам. В частности, противоположные стороны различны, а поэтому для любой пары противоположных сторон однозначно определена их точка пересечения, называемая *диагональной точкой.*

В простом шестиугольнике противоположные точки A_i, B_i не коллинеарны ни с одной из прочих точек. Аналогичное свойство сторон приводит к тому, что через диагональную точку проходят только две стороны шестиугольника — те, которые указаны в ее определении. Отсюда вытекает, что диагональные точки отличны друг от друга и от вершин, а значит, и прямые, соединяющие попарно диагональные точки, отличны от сторон. Значит, более общо, прямая, соединяющая две диагональные точки, не проходит ни через одну вершину (ибо каждая вершина соединяется по крайней мере с одной из каждых двух различных диагональных точек посредством некоторой стороны, а сторона, по сказанному, содержит только одну диагональную точку).

2. Предложение Паппа — Паскаля. *Если вершины простого шестиугольника попеременно принадлежат двум прямым, то диагональные точки принадлежат одной прямой* (рис. 58).

---

*) Кое-где в новейшей литературе проективной плоскостью называют всякое множество точек и прямых, для которого выполнены аксиомы инцидентности проективной плоскости.

**) Т. е. A_1 и B_2, или B_2 и A_3, ..., или B_3 и A_1. *(Прим. ред.)*

Непосредственно ясно, что в силу определения простого шестиугольника две упомянутые прямые, несущие вершины шестиугольника, отличны друг от друга, а точка их пересечения отлична от всех вершин шестиугольника. Сказанное ранее приводит к заключению, что из девяти точек: шести вершин шестиугольника и трех диагональных точек — любые две различны; точно так же из девяти прямых: шести сторон шестиугольника, двух «несущих прямых» и возникающей в силу справедливости рассматриваемого предложения «прямой Паскаля» — любые две различны.

Полным четырехугольником называют совокупность четырех точек, никакие три из которых не коллинеарны, и шести прямых, соединяющих попарно эти точки. Точки называются *вершинами*, а прямые — *сторонами* полного четырехугольника. Те две стороны, которые не имеют общей вершины, называются *противоположными*; точка пересечения противоположных сторон называется *диагональной точкой*. Двойственным образом определяется понятие *полного четырехсторонника*.

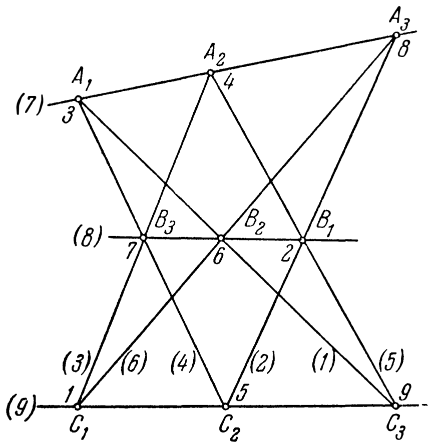


Рис. 58.

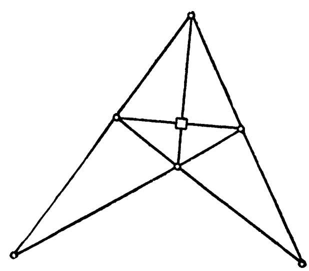


Рис. 59.

3. Аксиома Фано. *Диагональные точки полного четырехугольника не коллинеарны* (рис. 59).

Если выполнены аксиомы инцидентности проективной плоскости, то предложение Паппа — Паскаля может быть выражено в нескольких равносильных формулировках.

Рассмотрим конфигурацию Паппа, состоящую из девяти разных точек 1, 2, ..., 9 и девяти разных прямых (1), (2), ..., (9) и определяемую приведенной на стр. 107 таблицей инцидентностей. Все таблицы инцидентностей, которые получаются простым изменением нумерации точек и прямых, надо считать равносильными. В этой конфигурации через каждую точку проходят три прямые, а на каждой прямой лежат три точки. Так как таблица инцидентностей симметрична относительно главной диагонали, то наша конфигурация двойственна самой себе. Точки нашей конфигурации можно разбить на три тройки точек так, что никакие две точки одной и той же тройки нельзя соединить ни одной прямой нашей конфигурации. При выбранной нами нумерации эти *тройки несоединимых точек* суть (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9). Двойственным образом прямые конфигурации подразделяются на три тройки так, что никакие две прямые одной тройки не пересекаются ни в одной точке нашей конфигурации. В нашей нумерации эти *тройки непересекающихся прямых* таковы: ((1), (2), (3)), ((4), (5), (6)), ((7), (8), (9)). Из трех прямых,

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1			×			×			×
2		×			×			×	
3	×			×			×		
4			×		×		×		
5		×		×					×
6	×					×		×	
7			×	×				×	
8		×				×	×		
9	×				×				×

проходящих через некоторую точку конфигурации, никакие две не могут принадлежать одной и той же тройке. Поэтому через каждую точку конфигурации проходит точно одна прямая из каждой тройки прямых, и, аналогично, на каждой прямой конфигурации лежит в точности одна точка из каждой тройки точек.

Автоморфизмом таблицы инцидентностей мы называем пару (φ, ψ) перестановок чисел $1, \ldots, 9$ таких, что если клетка i, (k) в таблице обозначена крестиком, то ее клетка-образ $i\varphi$, $(k\psi)$ также обозначена крестиком, и обратно. Если ввести групповую операцию $(\varphi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2) = (\varphi_1\varphi_2, \psi_1\psi_2)$, то автоморфизмы таблицы инцидентностей составляют группу. Две клетки таблицы инцидентностей называются *равноправными*, если существует автоморфизм, переводящий одну клетку в другую. Равноправие клеток является отношением эквивалентности. При этом

(I) *В таблице инцидентностей для конфигурации Паппа все отмеченные клетки равноправны; точно так же равноправны и все пустые клетки.*

Для *доказательства* установим, что 1) для любого i найдется автоморфизм (φ, ψ), при котором $1\varphi = i$. Отсюда вытекает, что каждая клетка равноправна некоторой клетке первой строки, и нам останется доказать, что 2) все отмеченные клетки первой строки равноправны и 3) все пустые клетки первой строки равноправны.

Чтобы доказать 1), 2), 3), рассмотрим подстановки

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 9 & 8 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $\alpha_1 = (\varphi_1, \psi_1)$, $\alpha_2 = (\varphi_2, \psi_2)$ являются автоморфизмами таблицы инцидентностей. В силу симметрии таблицы инцидентностей относительно главной диагонали $\beta_1 = (\psi_1, \varphi_1)$, $\beta_2 = (\psi_2, \varphi_2)$ также являются автоморфизмами таблицы инцидентностей.

Автоморфизмы α_2, $\alpha_2\beta_2$. α_1, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_1\beta_1^2$, α_1^2, $\alpha_1^2\beta_1$, $\alpha_1^2\beta_1^2$ доказывают утверждение 1); автоморфизмы β_1, β_1^2 доказывают утверждение 2); автоморфизмы β_1, β_1^2, β_2, $\beta_1\beta_2$, $\beta_1^2\beta_2$ — утверждение 3).

(II) *Если для девяти разных точек и девяти разных прямых имеют место 27 инцидентностей конфигурации Паппа, то эти точки и прямые не связаны никакими другими отношениями инцидентности.*

Для доказательства представим себе таблицу инцидентностей с дополнительным двадцать восьмым крестиком. Поскольку все пустые клетки равноправны, достаточно рассмотреть крестик в клетке (1, (1)). Из-за дополнительного крестика образуются два прямоугольника (со сторонами, параллельными осям) из крестиков, в которых общей вершиной является только дополнительный крестик. В обоих прямоугольниках есть три разные строки и три разных столбца. Прямоугольник из крестиков — это двойная инцидентность, которая, согласно третьей аксиоме инцидентности проективной плоскости, невозможна для двух различных точек и двух различных прямых.

(III) *Если для девяти разных прямых и девяти разных точек выполняется 26 из 27 инцидентностей конфигурации Паппа, то сверх того может еще выполняться только двадцать седьмая инцидентность конфигурации Паппа; никакая другая двадцать седьмая инцидентность невозможна.*

В самом деле, из тех двух прямоугольников, которые возникают при добавлении двадцать восьмого крестика к таблице инцидентностей для конфигурации Паппа, при устранении одного из первоначальных крестиков может быть разрушен максимум один.

Установим, что предложение Паппа — Паскаля равносильно теореме:

Теорема о конфигурации Паппа. *Если для девяти разных точек и девяти разных прямых выполняются 26 инцидентностей конфигурации Паппа, то выполняется и двадцать седьмая инцидентность.*

Прежде всего эта теорема следует из предложения Паппа — Паскаля. Так как по (I) все инцидентности конфигурации Паппа равноправны, то достаточно показать, что с помощью предложения Паппа — Паскаля можно вывести инцидентность (9, (9)) из остальных 26 инцидентностей. Для этого примем прямые (7) и (8) за несущие прямые шестиугольника, а прямую (9) — за прямую Паскаля; эти три прямые принадлежат одной тройке прямых. Те шесть точек конфигурации, которые принадлежат прямым (7) и (8), образуют шестиугольник, сторонами которого являются те прямые конфигурации, которые не входят в тройку ((7), (8), (9)). В силу (III) это простой шестиугольник. Две точки пересечения противоположных сторон принадлежат (9) уже по условию теоремы; третья точка — это точка 9, которая, согласно заключению предложения Паппа — Паскаля, также принадлежит прямой (9).

Очевидно, обратно, теорема о конфигурации Паппа содержится в предложении Паппа — Паскаля как частный случай.

Двойственной предложению Паппа — Паскаля является

Теорема Паппа — Брианшона. *Если стороны простого шестисторонника попеременно проходят через две точки, то прямые, соединяющие противоположные вершины шестисторонника, проходят через одну точку.*

Проводя рассуждения, двойственные предыдущим, можно установить, что эта теорема равносильна теореме, двойственной теореме о конфигурации Паппа, т. е. самой этой теореме. Таким образом, любую из недостающих 27 инцидентностей можно вывести из остальных 26 и теоремы Паппа — Брианшона. (Например, чтобы вывести ту же инциденцию (9, (9)), надо принять 9 за «точку Брианшона» и рассмотреть возникающий из данной конфигурации шестисторонник с несущими точками 7 и 8.) Следовательно, предложение Паппа — Паскаля, теорема о конфигурации Паппа и теорема Паппа — Брианшона совпадают по содержанию и различаются только формулировками.

С целью дальнейших применений (в п. 5 § 6) мы (считая выполненными лишь одни аксиомы инцидентности) сделаем ряд замечаний о фигурах, которые удовлетворяют условиям теоремы о конфигурации Паппа. Будем называть систему из девяти разных точек и девяти разных прямых, для которых выполняются по крайней мере 26 из 27 инцидентностей конфигурации Паппа, *открытой конфигурацией Паппа*. Если выполняются все 27 инцидентностей, то мы скажем, что конфигурация *замкнута*. Теми же рассуждениями, что в (III), получаем

(IV) *Если для девяти разных точек и девяти прямых, из которых по крайней мере восемь различны, имеют место 26 инцидентностей конфигурации Паппа, то все девять прямых различны, т. е. это открытая конфигурация Паппа.*

Так как таблица инцидентностей конфигурации Паппа симметрична относительно главной диагонали, то имеет место и двойственное утверждение.

В открытой конфигурации Паппа мы называем «открытую» двадцать седьмую инцидентность *критической инцидентностью*, а относящиеся к ней элементы — *критической точкой* и *критической прямой*.

Если в открытой конфигурации Паппа заменить критическую прямую на прямую, соединяющую критическую точку и одну из тех двух точек конфигурации, которые по условию принадлежат критической прямой, то в силу (IV) получим опять-таки открытую конфигурацию Паппа. Такая замена называется *вариацией критической прямой*. Двойственным образом определяется *вариация критической точки*. Замена, получающаяся при многократном применении таких «простых» вариаций, называется *вариацией конфигурации*. Имеет место

(V) *Открытая конфигурация Паппа при вариации переходит снова в открытую конфигурацию Паппа. Если замкнуть конфигурацию, полученную в результате вариации, то замкнется и исходная конфигурация, и наоборот.*

В самом деле, оба утверждения выполняются для простой вариации, а значит, и для произвольной вариации конфигурации Паппа.

Варьируя критическую точку (соответственно критическую прямую) в открытой конфигурации Паппа, можно добиться того, чтобы критическая инцидентность поменялась с любой заданной инцидентностью, стоящей в той же строке (соответственно столбце). Поэтому

(VI) *Каждая прямая g открытой конфигурации Паппа может быть превращена в критическую прямую за счет не более чем трех простых вариаций конфигурации, которые не изменяют g.*

На проективной плоскости имеет место принцип двойственности: если в терминах понятий «точка», «прямая», «инцидентность» сформулирована теорема, выводимая из аксиом проективной плоскости, то выводима из этих аксиом также и теорема, получаемая из первоначальной заменой слова «точка» на слово «прямая» и наоборот, — ведь это утверждение верно для самих аксиом проективной плоскости.

Полным треугольником называют три неколлинеарные точки, рассматриваемые совместно с соединяющими их прямыми. Понятие полного треугольника совпадает с двойственным ему понятием полного трехсторонника. Пусть теперь даны два полных треугольника с вершинами A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3, со сторонами $a_1=(A_2, A_3)$, ..., $b_1=(B_2, B_3)$, ... и для них установлено соответствие (отмеченных одним и тем же индексом) вершин, а значит, и сторон. Говорят, что два треугольника находятся в *перспективном соответствии по отношению к точке* (*центру*) O, если при каждом $i=1$, 2, 3 точки O, A_i, B_i коллинеарны; говорят, что два треугольника находятся в *перспективном соответствии по отношению к прямой* (*оси*) o, если при каждом $i=1$, 2, 3 прямые o, a_i, b_i имеют общую точку. Из проективных аксиом инцидентности и предложения Паппа—Паскаля вытекает, как показал Гессенберг, т е о р е м а Д е з а р г а: *если два полных треугольника находятся в проективном соответствии по отношению к некоторой точке, то они находятся также в проективном соответствии по отношению к некоторой прямой* *); имеет место также и двойственное (т. е обратное) утверждение (рис. 60).

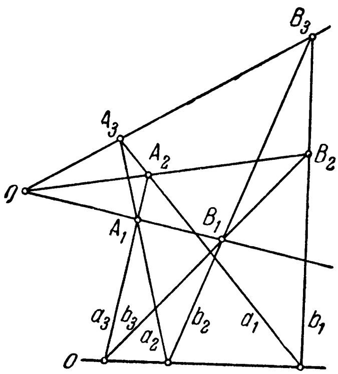


Рис. 60.

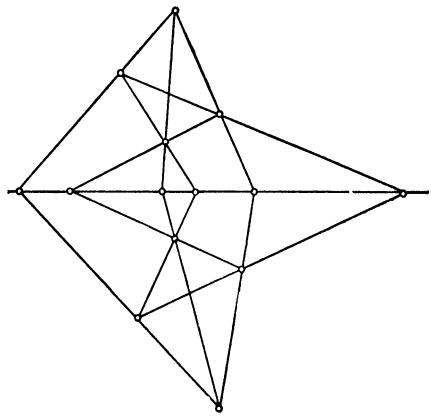


Рис. 61.

Из теоремы Дезарга вытекает т е о р е м а о п о л н о м ч е т ы р е х у г о л ь н и к е (называемая также т е о р е м о й о д е з а р г о в о м ч е т ы р е х у г о л ь н и к е): *если даны два полных четырехугольника, для которых указано соответствие вершин, а потому и сторон, и некоторая прямая, не проходящая ни через одну вершину, пересекает пять пар соответствующих сторон в одних и тех же точках, то она пересекает и шестую пару сторон в одной и той же точке* (рис. 61). Три стороны полного четырехугольника, проходящие через одну вершину, называют *звездной тройкой,* а три стороны, являющиеся сторонами частичного треугольника, входящего в состав полного четырехугольника, — *треугольной тройкой*; стороны, противоположные сторонам звездной тройки, образуют треугольную тройку, и обратно. Две

*) Ср. Г и л ь б е р т [1], теорема 61 из § 35 и примечание редактора [74]. (*Прим. ред.*)

тройки точек $A, B, C; D, E, F$ некоторой прямой g называются *сечением четырехугольника,* если существует не содержащий прямой g полный четырехугольник со сторонами a, b, c, d, e, f, пересекающими прямую g в точках $A, B, C, D, E, F,$ причем a и d, b и e, c и f — противоположные стороны четырехугольника; a, b, c составляют звездную тройку, а d, e, f — треугольную

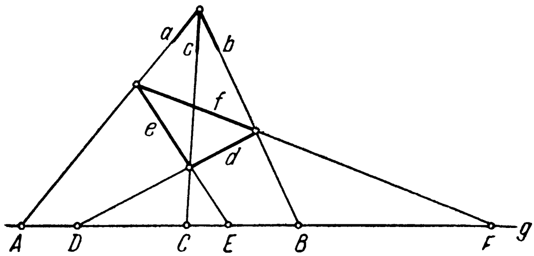


Рис. 62.

тройку (рис. 62). (В сечении четырехугольника важен и порядок троек точек.) Тогда теорему о полном четырехугольнике можно сформулировать так: *в любом сечении четырехугольника каждая точка однозначно определена пятью остальными.*

Задачи. 1. В простом шестиугольнике две противоположные стороны определяют диагональную точку; прямая, соединяющая обе не принадлежащие этим противоположным сторонам противоположные вершины шестиугольника, называется *диагональю, принадлежащей данной диагональной точке.* Пользуясь этим понятием принадлежности диагонали данной диагональной точке, можно так переформулировать предложение Паппа — Паскаля в самодвойственном виде: *если две диагонали простого шестиугольника инцидентны диагональным точкам, принадлежащим этим диагоналям, то третья диагональ также инцидентна диагональной точке, принадлежащей этой диагонали* (Гессенберг; см. рис. 63).

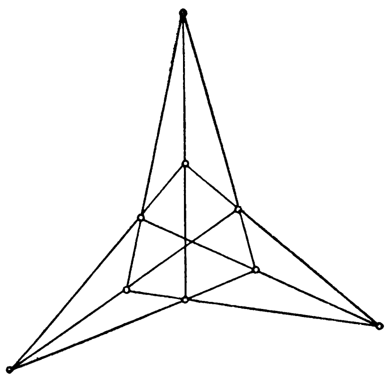


Рис. 63.

2. (Вольф). Если для девяти разных точек и девяти прямых имеют место 26 из 27 инцидентностей конфигурации Паппа, то либо все прямые различны, либо все прямые совпадают.

2. Проективная геометрия одномерного образа. Множество точек проективной плоскости, инцидентных некоторой заданной прямой, называется *рядом точек.* Этому понятию двойственно понятие *пучка прямых:* пучок прямых — это множество прямых, инцидентных некоторой фиксированной точке. Ряды точек и пучки прямых называются *одномерными образами проективной геометрии* *).

Взаимно однозначное соответствие между рядом точек и пучком прямых называется *перспективным соответствием,* если образ и прообраз при этом соответствии инцидентны. То соответствие между двумя рядами точек, которое возникает, когда ряд точек одной прямой перспективно соотнесен пучку прямых с некоторым центром O, а затем этот пучок прямых поставлен

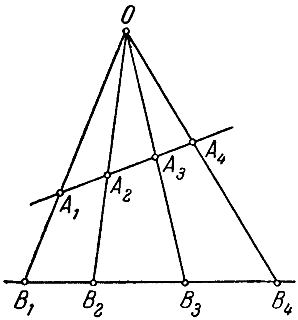


Рис. 64.

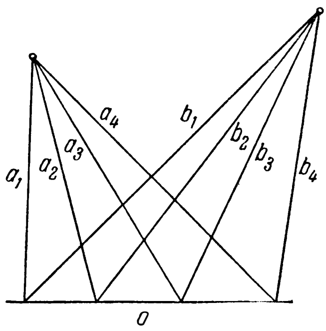


Рис. 65.

в перспективное соответствие ряду точек второй прямой, называется *перспективным соответствием двух рядов точек с центром O* (рис. 64); то обстоятельство, что взаимно однозначное соответствие точечных рядов $[A]$ и $[B]$ является перспективным с центром O, обозначается так: $[A]\overset{O}{\underset{\wedge}{=}}[B]$. Двойственным образом определяется *перспективное соответствие двух пучков прямых с осью o* (рис. 65). Всякое взаимно однозначное отображение одномерного образа проективной геометрии на другой одномерный образ, которое может быть получено как последовательность нескольких перспективных соответствий, называется *проективным отображением.* Всякое проективное отображение ряда точек на другой ряд точек (той же или другой прямой) может быть заменено суперпозицией нескольких перспективных соответствий рядов точек. То обстоятельство, что взаимно однозначное соответствие точечных рядов $[A]$ и $[B]$ является проективным, обозначается так: $[A]\underset{\wedge}{=}[B]$.

*) В нашей литературе чаще используется идущий еще от Штейнера термин «образ первой ступени», сегодня звучащий достаточно архаично. (*Прим. ред.*)

Легко видеть, что суперпозицией не более чем двух перспективных соответствий можно перевести любые три различные точки прямой в любые три заданные разные точки другой прямой (рис. 66); тем самым устанавливается, что не более чем тремя перспективными соответствиями можно перевести исходные точки в любые три различные точки той же прямой. Другое

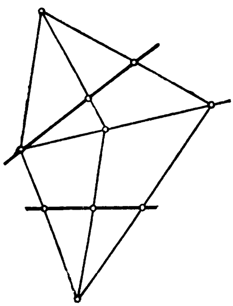


Рис. 66.

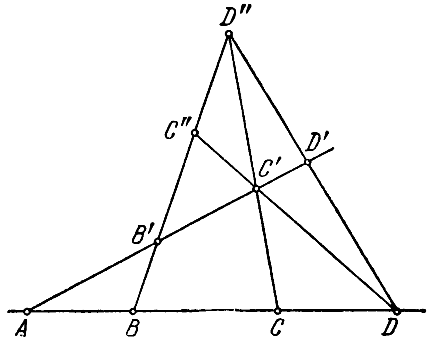


Рис. 67.

важное утверждение о существовании проективного отображения выражается следующей теоремой Штаудта: *пусть даны две пары точек одной прямой, не имеющие общих точек; тогда существует суперпозиция трех перспективных соответствий, которая в каждой паре меняет местами обе точки.* (Доказательство в обозначениях рис. 67 состоит в установлении следующих перспективных соответствий:

$$A,\ B,\ C,\ D \overset{D''}{\underset{\wedge}{=}} A,\ B',\ C',\ D' \overset{D}{\underset{\wedge}{=}}$$

$$\overset{D}{\underset{\wedge}{=}} B,\ B',\ C'',\ D'' \overset{C'}{\underset{\wedge}{=}} B,\ A,\ D,\ C;$$

здесь точка D'' и прямая AB' выбираются произвольно — лишь бы не возникали лишние инцидентности.)

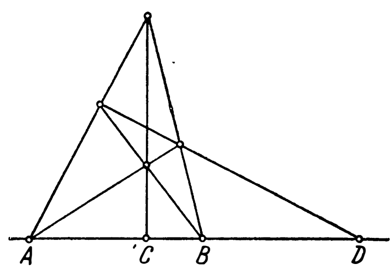


Рис. 68.

Если A, B; C, D — пары точек одной прямой, то говорят, что точки C, D расположены *гармонически* по отношению к точкам A, B, если A, B, C; A, B, D образуют сечение четырехугольника (рис. 68); в этом случае пишут: $H(A, B;\ C, D)$. Таким образом, точки A и B являются диагональными точками рассматриваемого полного четырехугольника. Если имеет место $H(A, B;\ C, D)$, то точки A, B, C, D попарно различны; при этом $C \neq D$ вытекает из аксиомы Фано, тогда как несовпадение прочих точек следует непосредственно из аксиом инцидентности. Из теоремы о полном четырехугольнике в качестве частного случая получается, что четвертая гармоническая точка определяется однозначно: *из* $H(A, B;\ C, D)$ *и* $H(A, B;\ C, D')$ *следует, что* $D = D'$. Гармоническое расположение четырех точек инвариантно относительно проективного отображения (это справедливо вообще для свойства точек образовать сечение четырехугольника). Из теоремы Штаудта поэтому вытекает, что в $H(A, B;\ C, D)$ можно переставлять обе пары: *из* $H(A, B;\ C, D)$ *следует* $H(C, D;\ A, B)$. Из самого же определения гармонического расположения четырех точек следует, что можно также переставить две точки в каждой из пар.

Как показал Ф. Шур, на проективной плоскости выполняется основная теорема проективной геометрии: *на прямой существует только одно проективное преобразование, которое переводит три заданные различные точки в три заданные различные точки.* Поэтому группа проективных преобразований прямой точно трижды транзитивна. Следствием основной теоремы является то, что во всяком сечении четырехугольника можно переставить обе тройки.

Инволютивное проективное преобразование одномерного образа обычно называется *инволюцией*; точнее было бы говорить о *проективной инволюции*. Из теоремы Штаудта и основной теоремы вытекает: *проективное преобразование прямой, которое меняет местами хотя бы две различные точки, инволютивно.* Имеет место также следующая теорема Паппа о четырехугольнике: *три различные пары* A, A^*; B, B^*; C, C^* *точек прямой являются соответствующими друг другу парами точек относительно некоторой проективной инволюции тогда и только тогда, когда* A, B, C; A^*, B^*, C^* *образуют сечение четырехугольника.* Из этой теоремы, в частности, вытекает, что если проективная инволюция имеет две различные неподвижные точки, то она будет *гармонической инволюцией,* однозначно определенной этими точками: всякая другая пара (прообраз, образ) расположена гармонически по отношению к неподвижным точкам. Для любых двух различных точек можно указать (проективную) гармоническую инволюцию, для которой эти точки являются неподвижными. Далее, из инвариантности гармонического расположения относительно проективного преобразования и единственности четвертой гармонической точки следует, что *проективная инволюция, обладающая неподвижной точкой, обязательно имеет еще одну неподвижную точку.* Таким образом, проективная инволюция обладает либо двумя разными неподвижными точками, либо ни одной; в первом случае она называется *гиперболической*, во втором — *эллиптической.*

Группа проективных преобразований прямой «биинволютивна»:

Теорема 1. *Всякое проективное преобразование прямой можно представить в виде произведения двух проективных инволюций. При этом в качестве первой инволюции всегда можно выбрать гармоническую инволюцию.*

Доказательство (Г. Винер). Можно считать, что данное проективное преобразование π отлично от тождественного преобразования. Пусть A — произвольная точка прямой, не являющаяся неподвижной точкой для π. Рассмотрим (гиперболическую) проективную инволюцию σ, которая точку A оставляет неподвижной, а точки $A\pi^{-1}$ и $A\pi$ меняет местами. Тогда $\sigma\pi$ — проективное преобразование, которое меняет местами разные точки A и $A\pi$, т. е. оно является некоторой инволюцией σ', и $\pi=\sigma\sigma'$.

3. Проективные коллинеации на плоскости. *Коллинеацией* на проективной плоскости называется взаимно однозначное отображение множества точек и прямых каждое на себя, при котором сохраняется отношение инцидентности. Коллинеация называется *проективной*, если она отображает проективно каждый одномерный образ проективной плоскости.

Лемма. *Коллинеация, которая отображает проективно по крайней мере один ряд точек, является проективной коллинеацией.*

Доказательство. Данная коллинеация $\varkappa$ отображает проективно ряд точек $[C]$ прямой c на ряд точек $[C\varkappa]$ прямой $c\varkappa$: $[C]\barwedge[C\varkappa]$. Пусть a — произвольная прямая. Выберем точку S, не лежащую ни на c, ни на a, и спроектируем из S прямую c на a: $[C]\overset{S}{\doublebarwedge}[A]$ (рис. 69). Так как $\varkappa$ — коллинеация, то мы также имеем: $[C\varkappa]\overset{S\varkappa}{\doublebarwedge}[A\varkappa]$. Суперпозиция этих трех проективных отображений даст: $[A]\barwedge[A\varkappa]$. Таким образом, $\varkappa$ преобразует всякий ряд точек — а значит, и всякий пучок прямых — проективно.

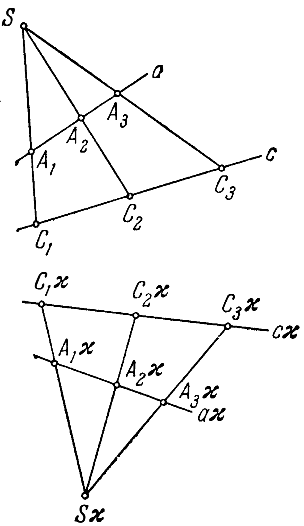


Рис. 69.

Коллинеация, при которой все прямые, проходящие через некоторую точку O, и все точки, принадлежащие некоторой прямой o, остаются неподвижными, называется *перспективной коллинеацией* с центром O и осью o; в силу доказанной леммы эта коллинеация является проективной. Если центр и ось не инцидентны, то назовем перспективную коллинеацию *гомологией*; в противном случае назовем ее *переносом* *). Если A и A^* коллинеарны O, отличны от O и не принадлежат прямой o, то существует точно одна перспективная коллинеация с центром O и осью o, переводящая A в A^* (рис. 70). Однозначность вытекает из аксиом инцидентности, а существование устанавливается с помощью теоремы Дезарга, которая применяется к конфигурации, в которой O является центром, а o — осью (существование переносов вытекает уже из «малой теоремы Дезарга», т. е. из того частного случая теоремы Дезарга, когда центр инцидентен оси). Перспективные коллинеации с фиксированным центром и фиксированнной осью образуют группу. (Из теоремы Паппа — Паскаля вытекает, что эта группа коммутативна.)

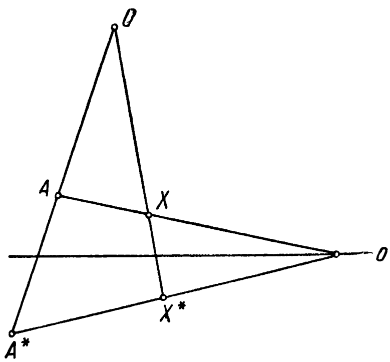


Рис. 70.

Конечным числом перспективных коллинеаций можно перевести любой заданный четырехугольник (четыре точки, никакие три из которых не коллинеарны) в любой заданный четырехугольник. Из основной теоремы вытекает, что такая проективная коллинеация единственна. Таким образом, *группа проективных коллинеаций порождается перспективными коллинеациями.*

Гомология называется *гармонической*, если каждая пара (прообраз, образ), отличная от точек оси и центра, расположена гармонически по отношению к центру и оси (т. е. по отношению к центру и точке пересечения оси с прямой, соединяющей прообраз и образ). Всякая гомология, при которой

---

*) Веблен и Юнг [1] употребляют термин «элация». [Этот термин сохранен, в частности, в русском переводе книги Кокстера [2]. Иногда в русской литературе употребляют термин «гомология» вместо термина «проективная коллинеация», заменяя термин «перенос» на термин «особая гомология» (Буземан и Келли [1]) или «параболическая гомология» (Гуревич [1]). Вместо термина «перенос» (который связан с тем, что соответствующее преобразование расширенной евклидовой плоскости, осью которого служит бесконечно удаленная прямая, совпадает с обычным параллельным переносом) иногда употребляют термин «трансляция». *(Прим. ред.)*]

вышеназванные точки A, A^* расположены гармонически по отношению к центру и оси, является гармонической в силу инвариантности гармонического расположения по отношению к перспективному соответствию, центр которого принадлежит оси гомологии. Гармоническая гомология однозначно определяется центром и осью; она представляет собой инволютивное преобразование. Обратно, всякая инволютивная гомология индуцирует на любой прямой, проходящей через ее центр, проективную инволюцию, неподвижными точками которой является центр и точка пересечения указанной прямой с осью, т. е. гармоническую инволюцию с этими неподвижными точками; значит, на прямой инволютивная гомология является гармонической инволюцией. Следовательно, *всякая инволютивная гомология является гармонической.* Более общо, в проективной плоскости выполняется особенно важная для нас

Теорема 2. *Всякая инволютивная проективная коллинеация является гармонической гомологией.*

Доказательство. Будем обозначать образы звездочкой. Если $A \neq A^*$, то прямая (A, A^*), соединяющая образ и прообраз инволютивной коллинеации, является неподвижной прямой; если $a \neq a^*$, то точка пересечения a и a^* — неподвижная точка.

Выберем точку A так, чтобы было $A \neq A^*$, и проведем через A прямую c так, чтобы было $c \neq (A, A^*)$ (рис. 71). Тогда c не будет неподвижной прямой. Выберем точку $B \neq A$ на c, не являющуюся неподвижной точкой. (На c имеется не более одной неподвижной точки, ибо c не является неподвижной прямой.) Точка B^* не принадлежит сторонам треугольника A, B, A^*. Следовательно, A, B, A^*, B^* — вершины полного четырехугольника; его диагональные точки будут неподвижными точками. Обозначим точку пересечения прямых (A, A^*) и (B, B^*) через O, а прямую, соединяющую две другие диагональные точки, через o. Тогда и точки пересечения прямых (A, A^*) и (B, B^*) с o являются неподвижными, а по основной теореме всякая точка прямой c неподвижна. По аксиоме Фано O и o не инцидентны.

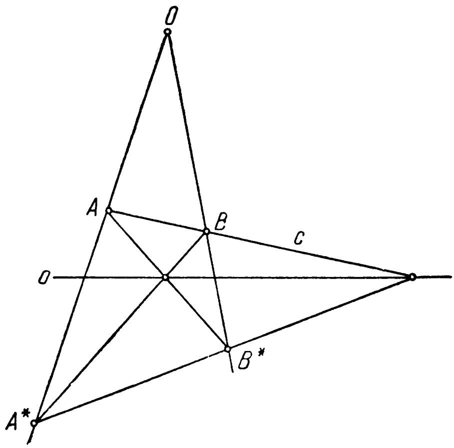


Рис. 71.

Значит, данная проективная коллинеация является гомологией с центром O и осью o. Пара A, A^* расположена, как видно из нашего построения, гармонически по отношению к центру и оси.

Теперь в несколько шагов докажем теорему о гармонических гомологиях и переносах с фиксированной осью.

Перенос, отличный от тождественного преобразования, не имеет неподвижных точек, не инцидентных оси. Обратно:

(I) *Коллинеация, которая оставляет неподвижной каждую точку некоторой прямой o и ни одной другой точки, является переносом с этой осью o.*

Доказательство. Пусть A не принадлежит прямой o и A^* — образ точки A; тогда $A \neq A^*$. Прямая $(A, A^*) = a$ пересекает o в точке O и является неподвижной, ибо $(A, O)^* = (A^*, O) = (A, O)$. Пусть теперь $b \neq a$, o — произвольная другая прямая, проходящая через O, а $B \neq O$ — точка прямой b. Тогда (B, B^*) — опять-таки неподвижная прямая и она отлична от неподвижной прямой a. Точка пересечения обеих неподвижных прямых — неподвижная точка; следовательно, она должна принадлежать o и, значит, совпадать с O. Поэтому $(B, B^*) = b$ и b — неподвижная прямая.

(II) *Произведение двух гармонических гомологий с общей осью является переносом с этой осью.*

Доказательство. Пусть σ_1, σ_2 — гармонические гомологии с осью o. Если $\sigma_1\sigma_2$ не имеет неподвижных точек вне o, то по (I) $\sigma_1\sigma_2$ является отличным от тождества переносом с осью o. Если у $\sigma_1\sigma_2$ есть неподвижная точка, не принадлежащая o, то эта точка гомологиями σ_1 и σ_2 отображается в одну и ту же точку плоскости. Так как гармоническая гомология однозначно определяется своей осью и не принадлежащей оси парой (прообраз, образ), то $\sigma_1 = \sigma_2$, т. е. $\sigma_1\sigma_2$ — тождество.

(III) *Всякий перенос с осью o представим в виде произведения двух гармонических гомологий с осью o. При этом в качестве первой гармонической гомологии можно выбрать произвольную гармоническую гомологию с осью o.*

Доказательство. Пусть $\tau \neq 1$ — данный перенос, O — его центр; σ_1 — произвольная гармоническая гомология с осью o и центром O_1. Рассмотрим точку O_2 — четвертую гармоническую точку к O по отношению к двум разным точкам O_1, $O_1\tau$ — и гармоническую гомологию σ_2 с центром O_2 и осью o. Произведение $\sigma_1\sigma_2$ переводит O_1 в $O_1\tau$; с другой стороны, согласно (II), оно будет переносом с осью o. Так как перенос однозначно определяется своей осью и не лежащей на оси парой (образ, прообраз), то $\sigma_1\sigma_2 = \tau$.

(IV) *Произведение трех гармонических гомологий с одинаковыми осями является гармонической гомологией с той же осью.*

Доказательство. Пусть σ_1, σ_2, σ_3 — гармонические гомологии с осью o. Тогда $\sigma_2\sigma_3$ по (II) является переносом с осью o, а по (III) существует гармоническая гомология σ_4 с осью o такая, что $\sigma_2\sigma_3 = \sigma_1\sigma_4$; следовательно, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_4$.

Из (II), (III) и (IV) с учетом леммы из п. 2 § 1 вытекает

Теорема 3. *Группа, порожденная гармоническими гомологиями с одной и той же осью, содержит группу всех переносов с этой осью в качестве коммутативной подгруппы индекса* 2; *смежными классами по этой подгруппе являются гармонические гомологии с той же осью.*

(V) *Произведение трех гармонических гомологий, центры и оси которых являются вершинами и сторонами некоторого треугольника, есть тождественное преобразование.*

Доказательство. Если σ_1, σ_2, σ_3 — данные гармонические гомологии, то $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ оставляет на месте каждую точку, принадлежащую одной из трех осей: ведь эта точка при одной из трех гармонических гомологий остается неподвижной, а при двух других меняется местами с одной и той же точкой. Таким образом, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ переводит каждую точку сторон треугольника в себя; следовательно, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$.

Задача. Произведение двух гармонических гомологий инволютивно (и тем самым является гармонической гомологией) тогда и только тогда, когда центр хотя бы одной из них принадлежит оси другой.

4. Корреляция, поляритет. Взаимно однозначное отображение множества точек и множества прямых проективной плоскости соответственно на множество прямых и множество точек, при котором сохраняется отношение инцидентности, называется *корреляцией*. Корреляция называется *проективной*, если она проективно отображает каждый одномерный образ проективной плоскости. Как и для коллинеаций, справедливо следующее утверждение:

Лемма. *Корреляция, преобразующая проективно хотя бы один ряд точек, проективна.*

Инволютивная корреляция называется *поляритетом*. Если дан поляритет π, то образ точки A — прямая $A\pi = a$ — называется *полярой* точки A, а образ прямой a — точка $a\pi = A$ — называется *полюсом* прямой a. Две точки называются *сопряженными*, если каждая из них принадлежит поляре другой; две прямые называются *сопряженными*, если каждая из них проходит через полюс другой. Следовательно, точка сопряжена самой себе тогда, когда она инцидентна своей поляре, а прямая сопряжена себе, когда она инцидентна своему полюсу.

Для поляритета имеются две возможности:

1) Существуют самосопряженные точки и самосопряженные прямые. Если поляритет проективный, то, по определению

Штаудта, самосопряженные элементы образуют *коническое сечение* (рассматриваемое и как множество точек, и как множество прямых) — так называемую *фундаментальную кривую поляритета.*

2) Самосопряженных элементов нет.

В первом случае поляритет называется *гиперболическим*, во втором — *эллиптическим.*

5. Проективно-метрические плоскости. Проективную плоскость, в которой задан некоторый проективный поляритет, назовем *обыкновенной проективно-метрической плоскостью.* Заданный поляритет называется также *абсолютным поляритетом* проективно-метрической плоскости; сопряженные точки называются *полярными* точками, сопряженные прямые — *взаимно перпендикулярными* прямыми. Обыкновенную проективно-метрическую плоскость назовем *гиперболической* или *эллиптической* в зависимости от того, является ли ее абсолютный поляритет гиперболическим или эллиптическим.

В обыкновенной проективно-метрической плоскости каждая гармоническая гомология σ, центр и ось которой представляют собой неинцидентную пару (полюс, поляра), оставляет инвариантным абсолютный поляритет π. В самом деле, коллинеация σ^{π} оставляет на месте все прямые, проходящие через центр, и все точки, принадлежащие оси; следовательно, σ^{π} является гомологией. С другой стороны, σ^{π} — это образ инволютивной коллинеации σ при внутреннем автоморфизме; значит, гомология σ^{π} инволютивна. Так как инволютивная гомология однозначно определяется центром и осью, то $\sigma^{\pi}=\sigma$, т. е. $\pi^{\sigma}=\pi$.

Гармоническую гомологию с неинцидентной парой (полюс, поляра) в качестве центра и оси мы назовем *порождающей симметрией*, а те проективные коллинеации, которые представляются в виде произведения таких симметрий, назовем *движениями обыкновенной проективно-метрической плоскости.* Движения обыкновенной проективно-метрической плоскости сохраняют абсолютный поляритет. Движения образуют группу — *группу движений* обыкновенной проективно-метрической плоскости.

Под *особой проективно-метрической плоскостью* мы будем понимать проективную плоскость, в которой задана некоторая прямая в качестве так называемой *бесконечно удаленной прямой* g_{∞}, а на ней задана некоторая проективная эллиптическая инволюция *). Эта инволюция называется *абсолютной инволю-*

---

*) Здесь казалось бы естественным не ограничиваться заданием на прямой g_{∞} только эллиптической инволюции и выделением в проективной плоскости лишь прямой g_{∞}, без права выделить (альтернативно) точку G_{∞}; од-

цией или же *абсолютной полярной инволюцией*. Две точки прямой g_∞, соответствующие друг другу при абсолютной инволюции, называются *полярными*; две отличные от g_∞ прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекают прямую g_∞ в полярных друг другу точках; прямая g_∞ считается перпендикулярной всем прямым, в том числе и себе самой. Всякая точка прямой g_∞ называется *полюсом* любой прямой, которая проходит через полярную ей точку. Таким образом, каждая прямая, отличная от g_∞, имеет единственный полюс, принадлежащий прямой g_∞.

В особой проективно-метрической плоскости гармоническая гомология с осью $a \neq g_\infty$ и ее полюсом A в качестве центра переводит прямую g_∞ в себя (ибо эта прямая проходит через центр гомологии) и сохраняет абсолютную полярную инволюцию π. В самом деле, если A' — точка пересечения прямой a с g_∞, то данная гармоническая гомология индуцирует на g_∞ гармоническую инволюцию σ с неподвижными точками A, A', а σ^π есть проективная инволюция на g_∞, оставляющая неподвижными те же точки A, A'; поэтому σ^π — гармоническая инволюция с неподвижными точками A, A', т. е. $\sigma^\pi = \sigma$, а значит, $\pi^\sigma = \pi$.

Гармоническую гомологию с осью, отличной от g_∞, и полюсом этой оси в качестве центра мы называем *порождающей симметрией*, а проективную коллинеацию, которая является произведением таких симметрий, — *движением особой проективно-метрической плоскости*. Движения переводят прямую g_∞ в себя и оставляют абсолютную полярную инволюцию инвариантной. Движения образуют группу — *группу движений* особой проективно-метрической плоскости.

Группа движений особой проективно-метрической плоскости содержит также все гармонические гомологии с осью g_∞, ибо, согласно теореме (V) п. 3, такая гармоническая гомология (обозначим ее центр через O) является произведением порождающих симметрий, оси которых проходят через O и взаимно перпендикулярны, а центрами служат полюсы этих осей. Отсюда на основании теоремы 3 вытекает, что группа движений содержит в качестве коммутативной подгруппы все переносы с осью g_∞. Гармонические гомологии с осью g_∞, очевидно, составляют инвариантное множество в группе движений. Поэтому порожденная ими группа, а также группа переносов с осью g_∞ являются нормальными делителями группы движений особой проективно-метрической плоскости.

нако отказ от этих ограничений, позволяющий охватить все проективные метрики на плоскости в смысле Клейна, связан с необходимостью весьма существенной перестройки развиваемых здесь построений (*Прим. перев.*)

Задачи. 1. Пусть на проективной прямой задана проективная инволюция π. Проективное преобразование на прямой, которое оставляет π инвариантной и имеет в качестве неподвижной какую-то точку A, не являющуюся неподвижной точкой для π, является либо тождеством, либо гармонической инволюцией с неподвижными точками A и $A\pi$.

2. Пусть дана обыкновенная проективно-метрическая плоскость. Единственные отличные от тождества перспективные коллинеации, сохраняющие поляритет, — это порождающие симметрии. Не существует отличной от тождества проективной коллинеации, которая сохраняла бы абсолютный поляритет и в то же время переводила бы в себя каждую точку прямой, инцидентной со своим полюсом.

3. Пусть на проективной плоскости задан поляритет. Он является проективным тогда и только тогда, когда для него выполняется теорема о высотах.

6. Ортогональная инволюция. Вернемся теперь к рассматривавшейся в §§ 3 и 4 метрической геометрии и покажем, что в собственном пучке отображение, сопоставляющее каждой прямой перпендикуляр к ней, которое мы будем называть *ортогональной инволюцией* (ведь очевидно, что это отображение инволютивно), может быть получено как последовательность перспективных соответствий.

Прежде всего докажем это для спаривания:

Теорема 4. *Всякое спаривание в собственном пучке прямых является проективным отображением.*

Доказательство. В пучке с центром O зададим спаривание $y=axb$, где a и b — фиксированные прямые, проходящие через O; при этом можно считать, что $a\neq b$. (Если $a=b$, то выберем прямую c, проходящую через O, отличную от a и не перпендикулярную a; тогда $c\neq c^a$ и $y=cxc^a$ на прямых пучка совпадает с заданным спариванием, ибо $cxc^a=c\cdot xac\cdot a=c\cdot cax\cdot a=$ $=axa$ (ср. также п. 8 § 4).)

Выберем пару a', $b'\neq a$, b прямых, проходящих через O и соответствующих друг другу при спаривании (рис. 72). На a, b, b' выбираем неколлинеарные точки A, B, $B'\neq O$. Пусть $v=$ $=(A, B')$, $g=(B, B')$. Проведем прямую $p=(B, A)$ и прямую q, соединяющую B с $\mathbf{G}(a'v)$. Последовательность перспективных соответствий

$$\underset{O}{a, a'} \overset{v}{\underset{\wedge}{=}} \underset{B}{p, q} \overset{a'}{\underset{\wedge}{=}} \underset{A}{p, v} \overset{g}{\underset{\wedge}{=}} \underset{O}{b, b'},$$

при которой ни одна из осей перспективного соответствия не инцидентна с центром пучка, переводит a, a' в b, b'.

Теперь пусть x, y — произвольная пара прямых, проходящих через O и сопоставляемых друг другу спариванием. Возьмем прямую u, соединяющую B с $\mathbf{G}(xv)$, и прямую w, соединяющую A с $\mathbf{G}(a'u)$. К прямым a, a', x и b, b', y, сопоставляемым друг другу при спаривании, и к трехстороннику u, v, w, через вершины которого проходят первые три прямые, применим теорему о спаривании (дополнительное условие $ub \neq vb'$ здесь выполнено); мы получим: так как u, b и v, b' принадлежат тому же пучку, что g, то и w, y принадлежат тому же пучку, что g. Данная последовательность перспективных соответствий, определенная независимо от x и y, сначала переводит x в u, затем u в w, а затем, по доказанному, w в y, т. е., окончательно, x в y.

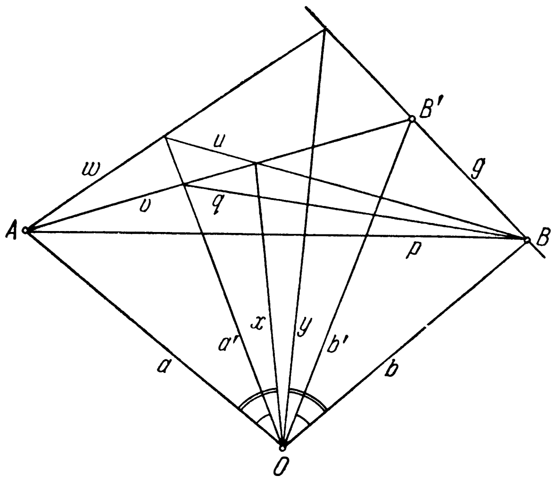


Рис. 72.

Теорема 5. *Ортогональная инволюция в собственном пучке прямых является проективным преобразованием.*

Доказательство. Если O — центр данного пучка, то мы утверждаем, что отображение $x^* = Ox$ проективно. Выберем две фиксированные перпендикулярные прямые a, a^*, проходящие через O. Тогда спаривания $y = axa$ и $y = a^*xa$ по теореме 4 являются проективными отображениями в пучке прямых с центром O. Следовательно, это выполняется и для их суперпозиции $x^* = a^*(axa)a = Ox$.

Идея этого доказательства впервые встречается у Арнольда Шмидта.

Задача. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа тех проективных преобразований в собственном пучке прямых метрической плоскости, которая оставляет инвариантной ортогональную инволюцию. (Прямые пучка обозначаются через a, b, c, d, ..., x.)

Инволютивные элементы группы $\mathfrak{G}$, отличные от ортогональной инволюции, — это спаривания (представимые в виде $x^* = axb$); для любых двух прямых существует точно одно спаривание, которое меняет их местами. Произведение трех спариваний снова является спариванием. Поэтому к группе, порожденной спариваниями, можно применить лемму п. 2 § 1: эта группа содержит коммутативную подгруппу $\mathfrak{U}$ индекса 2, образованную произведениями двух спариваний (представимых в виде $x^*=cdxab$); смежным классом для $\mathfrak{U}$ является множество $\mathfrak{S}$ спариваний. Группа $\mathfrak{U}$ просто транзитивная, т. е. для всяких двух прямых существует единственный элемент из $\mathfrak{U}$ переводящий одну из них в другую. Ортогональная инволюция является единственным инволютивным элементом из $\mathfrak{U}$. Группа, порожденная спариваниями, совпадает с $\mathfrak{G}$.

В множестве $\mathfrak{S}$ спариваний содержится, в частности, множество $\mathfrak{S}'$ гармонических инволюций, неподвижными прямыми которых служит некоторая пара взаимно перпендикулярных прямых (эти инволюции представимы в виде $x^*=x^c$). Произведение трех элементов из $\mathfrak{S}'$ является элементом из $\mathfrak{S}'$. Можно снова применить к группе $\mathfrak{G}'$, порожденной элементами из $\mathfrak{S}'$, лемму п. 2 § 1 : $\mathfrak{G}'$ содержит в качестве коммутативной подгруппы $\mathfrak{U}'$ индекса 2 произведения двух элементов из $\mathfrak{S}'$ (представимых в виде $x^*=x^{cd}$); смежным классом для $\mathfrak{U}'$ является $\mathfrak{S}'$. $\mathfrak{U}'$ является множеством квадратов элементов из $\mathfrak{U}$. Продолжить до движений плоскости можно только проективные преобразования из узкой группы $\mathfrak{G}'$.

Описанные свойства типичны для групп тех проективных преобразований определенного одномерного образа, которые сохраняют инвариантной некоторую заданную эллиптическую проективную инволюцию.

Литература к § 5. Штаудт [1], [2], Шур [1], Веблен и Юнг [1], Леви [1], Гессенберг [3], Прюфер [1], Йельмслев [4], Кокстер [2], Ленц [1], Пиккерт [3]. К п. 6: Шмидт [1].

§ 6. Обоснование метрической геометрии

Цель этого параграфа — доказать, что всякая метрическая плоскость может быть погружена в проективно-метрическую плоскость, причем группа движений, определяемая нашей системой аксиом, может быть представлена в виде подгруппы группы движений проективно-метрической плоскости. Это доказательство, которое позволит использовать мысль, в общем виде восходящую к Кэли и Клейну, — использовать проективные метрики для изучения метрических плоскостей, — будет называться обоснованием плоской метрической геометрии *).

Проблема обоснования распадается на две части: погружение групповой плоскости в некоторую проективную идеальную плоскость и продолжение метрики групповой плоскости до некоторой проективной метрики в этой идеальной плоскости. Для решения обеих проблем нам существенно понадобятся некоторые отображения плоскости, которые не являются движениями и которые мы назовем *полуповоротами.*

Полуповороты впервые ввел Йельмслев для решения первой проблемы в плоскости, не являющейся эллиптической плоскостью. Он определил их как точечные отображения следующим

*) Чаще вместо термина «обоснование» в таком контексте употребляют термин «моделирование». (*Прим. перев.*)

образом: пусть дан неинволютивный поворот вокруг точки O (или поворот с центром O) и A' — образ точки A; тогда *полуповоротом* вокруг точки O (или полуповоротом с центром O), определяемым этим поворотом, называется отображение, сопоставляющее точке A точку A^* — среднюю точку для точек A и A' (при наших предположениях эта средняя точка существует и совпадает с основанием перпендикуляра; см. рис. 73). Полуповорот сопоставляет всякой точке некоторую определенную точку, разным точкам — разные точки; однако, вообще говоря, не всякая точка является при этом образом некоторой точки. Поэтому об обратном отображении можно говорить лишь при некоторых ограничениях; если исключить тождественное отображение*), то отображение, обратное к полуповороту, не является полуповоротом, и произведение двух полуповоротов с общим центром O не является полуповоротом. Но в силу теоремы о средней линии (теорема 28 § 3) Йельмслев смог заключить, что три точки одной прямой при полуповороте переходят в три точки одной прямой.

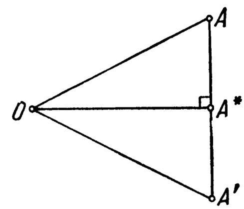


Рис. 73.

Следуя духу нашей системы аксиом, мы определим полуповороты не как точечные отображения, а как отображения прямых. Тогда первая теорема, которую нам придется доказать, будет такова: полуповорот переводит три прямые, принадлежащие одному пучку, в три прямые, принадлежащие одному пучку.

В теории полуповоротов доминирующую роль будет играть теорема о перпендикулярах, которую мы чаще всего будем использовать в равносильной ей формулировке теоремы 11 из § 3.

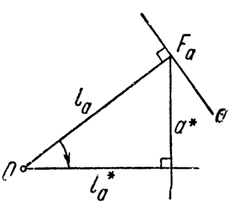


Рис. 74.

1. Полуповороты прямых. Пусть дана групповая плоскость группы движений, удовлетворяющей системе аксиом п. 2 § 3. В этом и последующем пунктах мы примем аксиому $\sim$P; позднее мы легко убедимся, что все доказанное останется справедливым и при выполнении аксиомы P.

Выберем фиксированную точку O. *Перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую a*, т. е. прямую (O, a), обозначим через l_a, а *основание* al_a этого перпендикуляра — через F_a (рис. 74).

*) Тоже, разумеется, являющееся полуповоротом (отвечающим тождественному повороту). (*Прим. ред.*)

Определение. *Пусть дано неинволютивное произведение* uv, *где* $u, v \,]\!\![\, O$. *Каждой прямой* a *сопоставим прямую* a^* *по следующему правилу*:

1) *Если* $a \,]\!\![\, O$, *то* $aa^* = uv$.

2) *Если* $a \not\!\!]\!\![\, O$, *то определяем* l_a^* *по* 1), *а затем определяем* a^* *соотношением*: $a^* = (F_a, l_a^*)$.

Такое отображение множества прямых в себя мы назовем *полуповоротом вокруг* O (или полуповоротом с центром O), *задаваемым элементом* uv *группы*.

Согласно этому определению полуповорот осуществляется с помощью определения четвертой зеркальной прямой, проходящей через O, а также проведения и пересечения перпендикуляров; при этом используются только пары перпендикулярных прямых, из которых одна проходит через O.

Если обозначать полуповорот вокруг O с помощью звездочки, то мы можем утверждать, что

(I) *Если* $a, b \,]\!\![\, O$, *то* $ab = a^*b^*$.

Доказательство. Это утверждение следует из того, что $aa^* = uv$ и $bb^* = uv$.

Поэтому для прямых, инцидентных O, из $a \neq b$ вытекает $a^* \neq b^*$. Таким образом, пучок прямых, инцидентных O, взаимно однозначно отображается на себя с сохранением углов.

(II) *При любом* a *имеем* $a^* = (F_a, l_a^*)$ *и* $l_a^* = l_{a^*}$.

Доказательство. При $a \,]\!\![\, O$ в силу (I) $F_a = al_a = a^*l_a^*$; поэтому $a^* = (F_a, l_a^*)$. При $a \not\!\!]\!\![\, O$ это равенство имеет место в силу определения 2), а из него следует, что $l_a^* \perp a^*$, т. е. $l_a^* = l_{a^*}$.

Прямой угол, сторона которого проходит через O, переходит в прямой же угол со стороной, проходящей через O:

(III) *Пусть* $a \,]\!\![\, O$. *Из* $a \perp b$ *вытекает* $a^* \perp b^*$, *и наоборот*.

Доказательство. Из $a \,]\!\![\, O$ и $a \perp b$ вытекает $a = l_b$, т. е., согласно (II), $a^* = l_b^* = l_{b^*}$, а значит, $a^* \,]\!\![\, O$ и $a^* \perp b^*$. В силу отмеченной в (I) взаимной однозначности рассуждение можно обратить.

Взаимная однозначность отображения сохраняется для всех прямых:

(IV) *Из* $a \neq b$ *вытекает* $a^* \neq b^*$.

Доказательство. Пусть по прямой a построена прямая a^*. В последующей обратной цепи построений каждый шаг выполняется единственным образом: сначала a^*; затем l_{a^*} как перпендикуляр, опущенный на a^* из O; затем $l_a^* = l_{a^*}$ по (II); затем l_a как прообраз l_a^* (однозначный в силу (I)); затем F_a как точка пересечения a^* и l_a при $a^* \neq l_a$ (всегда

$l_a^* \perp a^*$; из $a^* = l_a$ вытекало бы $l_a^* \perp l_a$ и элемент $l_a l_a^* = uv$ был бы инволютивным); затем $a = F_a l_a$.

Полуповороты сохраняют инцидентность в следующем смысле:

(V) *Из* $a \,\mathrm{I}\, F_b$ *вытекает* $a^* \,\mathrm{I}\, F_{b^*}$, *и наоборот* (рис. 75).

Доказательство. По определению 1) $l_a l_a^* = l_b l_b^*$, т е. по (II) $l_{a^*} = l_a l_b l_{b^*}$. Если $a \,\mathrm{I}\, F_b$, то в силу $l_b, b^* \,\mathrm{I}\, F_b$ (при этом, как отмечено в (IV), $l_b \neq b^*$) по аксиоме 3 $a l_b b^* = F_a (l_a l_b l_{b^*}) F_{b^*} = F_a l_{a^*} F_{b^*}$ является прямой, т. е. по теореме 11 § 3 в силу $(F_a, l_{a^*}) = a^*$ имеем $a^* \,\mathrm{I}\, F_{b^*}$. Эти рассуждения можно и обратить.

Из (III) и (V) вытекает:

(VI) *Если* $b \,\mathrm{I}\, O$, *то* $(F_a, b)^* = (F_{a^*}, b^*)$.

Доказательство. Из $c \,\mathrm{I}\, F_a$ и $c \perp b$ в силу (V) и (III) следует $c^* \,\mathrm{I}\, F_{a^*}$ и $c^* \perp b^*$.

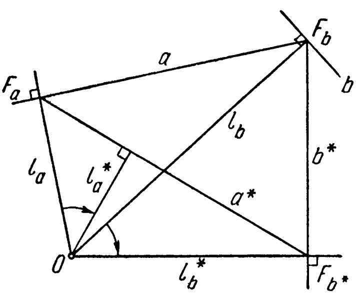


Рис. 75.

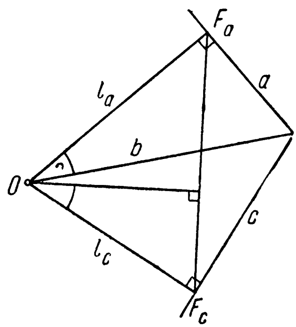


Рис. 76.

Теперь мы докажем, что отношение принадлежности одному пучку сохраняется при полуповоротах:

(VII) *Пусть* $b \,\mathrm{I}\, O$. *Если* abc — *прямая, то* $a^*b^*c^*$ — *тоже прямая, и наоборот.*

Для доказательства сначала заметим:

1) *Если* $a, b, c \,\mathrm{I}\, O$, *то* $(abc)^* = a^*b^*c^*$.

В самом деле, из равенства $(abc)c = ab$ в силу (I) вытекает $(abc)^*c^* = a^*b^*$.

2) *Пусть* $d \,\mathrm{I}\, O$. *Если* $F_a d F_c$ — *прямая, то* $F_{a^*} d^* F_{c^*}$ — *прямая, и наоборот.*

В самом деле, если $F_a d F_c$ — прямая, то в силу теоремы 11 § 3 имеем $(F_a, d) \,\mathrm{I}\, F_c$, т. е. по (V) и (VI) $(F_a, d)^* = (F_{a^*}, d^*) \,\mathrm{I}\, F_{c^*}$. Следовательно, в силу теоремы 11 § 3 $F_{a^*} d^* F_{c^*}$ — прямая. Эти рассуждения можно и обратить.

Доказательство (VII). Пусть $abc = F_a (l_a b l_c) F_c$ — прямая (рис. 76). Тогда в силу сделанных только что замечаний

1) и 2) и в силу (II) $F_{a^*}(l_{a^*}b^*l_{c^*})F_{c^*} = a^*b^*c^*$ — прямая, и наоборот.

Как видно, доказательство основывается на том, что конструкция теоремы о перпендикулярах с центром O, выражающая принадлежность прямых a, b, c одному пучку, переходит при полуповороте вокруг O снова в конструкцию теоремы о перпендикулярах, выражающую принадлежность прямых a^*, b^*, c^* одному пучку.

Теперь, пользуясь теоремой о транзитивности (теорема 6 § 4), можно освободиться от требования, чтобы одна из прямых была инцидентна O:

Теорема 1 (теорема об инвариантности пучков). *Если звездочкой обозначен полуповорот вокруг O, то abc — прямая тогда и только тогда, когда $a^*b^*c^*$ — прямая.*

Доказательство. Можно считать, что $a \neq b$ и $a \not\mathrm{I}\, O$. По теореме 15 § 3 существует прямая d, инцидентная O и принадлежащая тому же пучку, что a, b. Пусть теперь abc — прямая. Так как и abd — прямая, то по теореме о транзитивности acd и abd — прямые. В силу $d \,\mathrm{I}\, O$ тогда по (VII) $a^*c^*d^*$ и $a^*b^*d^*$ — прямые, а так как $a^* \neq d^*$, то по теореме о транзитивности $a^*b^*c^*$ — прямая. Так как из $d \,\mathrm{I}\, O$ по (VII) следует, что $a^*b^*d^*$ — прямая, то рассуждения можно обратить.

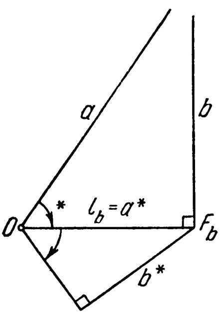


Рис. 77.

Если a — прямая, инцидентная O, а b — прямая, не имеющая с a общего перпендикуляра, проходящего через O, то существует полуповорот вокруг O, который переводит a и b в прямые, имеющие общую точку:

(VIII) *Если $a \,\mathrm{I}\, O$ и b — прямая, не имеющая общего перпендикуляра с a, проходящего через O, то полуповорот вокруг O, задаваемый элементом al_b, переводит прямые a и b в прямые, инцидентные точке F_b* (рис. 77).

Замечание. При доказательстве теоремы 1 мы использовали теорему о транзитивности. Но можно, подобно самому Йельмслеву, вывести теорему о транзитивности из теорем о полуповоротах (за вычетом теоремы 1). Для этого надо вспомнить п. 4 § 4, где мы заметили, что теорема о транзитивности для прямых a, b, c, d вытекает из аксиом 3 и 4 и их обращений, если только прямые a, b имеют общую точку или общий перпендикуляр. Пользуясь полуповоротами, можно свести общий случай к этим частным. Выберем точку O на a. Если a, b имеют общий перпендикуляр, проходящий через O, то выполняется теорема о транзитивности. В противном случае по (VIII) существует такой полуповорот * вокруг O, который переводит a, b в прямые a^*, b^*, имеющие общую точку. По (VII) $a^*b^*c^*$ и $a^*b^*d^*$ — прямые; так как теперь речь идет о прямых с общей точкой, то $a^*c^*d^*$ — прямая, а тогда по (VII) acd — прямая.

Теорема 2. *Полуповороты вокруг одной точки коммутируют: если * и ° — полуповороты вокруг O, то* $a^{*\circ}=a^{\circ *}$ *для любой прямой a.*

Доказательство. По определению 1) $l_a l_a^{\circ} = l_a^{*} l_a^{*\circ}$ и $l_a l_a^{*} = l_a^{\circ} l_a^{\circ *}$. Следовательно, утверждение выполняется для прямой l_a; по (II) тогда $l_{a^{*\circ}} = l_{a^{\circ *}}$. А так как $a^* = (F_a, l_{a^*})$, то по (VI) и (II) $a^{*\circ} = (F_{a^\circ}, l_{a^{*\circ}}) = (F_{a^\circ}, l_{a^{\circ *}}) = a^{\circ *}$ (рис. 78).

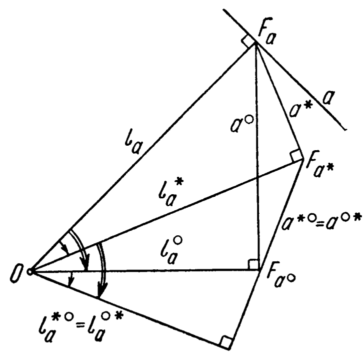


Рис. 78.

Если к полуповороту вокруг O, задаваемому элементом uv группы, применить внутренний автоморфизм, порожденный произвольной симметрией относительно прямой, инцидентной O (т. е. автоморфизм $x'=x^c$ при $c \,\mathrm{I}\, O$), то получим полуповорот вокруг O, задаваемый «инверсным» элементом vu [т. е. в наших обозначениях для всякого a из $c \,\mathrm{I}\, O$ следует $(F_{a^c}, l_{a^c} uv)^c = (F_a, l_a vu)$]. Поэтому полуповорот, задаваемый обратным элементом группы, мы будем называть *отраженным полуповоротом.*

Задача. Если * обозначает полуповорот вокруг O, задаваемый элементом uv, то для всякой прямой a прямая a^* является линией середин для a и a^{uv} (см. теорему 28 § 3).

2. Отображения пучков, индуцированные полуповоротами. Полуповорот * вокруг O, согласно определению, является отображением множества прямых в себя. Но в силу теоремы 1 он индуцирует *отображение пучков прямых:* если $\mathsf{G}(ab)$ — пучок прямых, то образом его назовем пучок

$$\mathsf{G}(ab)^* = \mathsf{G}(a^* b^*). \qquad (1)$$

Это определение образа пучка прямых не зависит от выбора представления данного пучка: ведь из $c, d \in \mathsf{G}(ab)$ по теореме 1 вытекает $c^*, d^* \in \mathsf{G}(a^* b^*)$, а отсюда из $\mathsf{G}(cd) = \mathsf{G}(ab)$ по теореме 9 § 4 вытекает $\mathsf{G}(c^* d^*) = \mathsf{G}(a^* b^*)$. Из того факта, что прямая принадлежит пучку тогда и только тогда, когда ее об*раз принадлежит образу пучка, вытекает, что разные пучки* прямых имеют разные образы.

Пользуясь (III), непосредственно получаем, что пучок перпендикуляров к прямой, проходящей через O, снова является пучком перпендикуляров к прямой, проходящей через O:

(IX) *Если* $a]\!\![O$, *то* $\mathsf{G}(a)^* = \mathsf{G}(a^*)$.

Так как при полуповороте не всякая прямая является образом некоторой прямой, то однозначное отображение множества прямых какого-либо пучка не является отображением *на*, а только отображением *в* множество прямых пучка-образа. Но

(X) *Если пучок* $\mathsf{G}(ab)$ *собственный, то и пучок* $\mathsf{G}(a^*b^*)$ *собственный, и всякая прямая из* $\mathsf{G}(a^*b^*)$ *является образом некоторой прямой из* $\mathsf{G}(ab)$.

Доказательство. Так как $\mathsf{G}(ab)$ — собственный пучок, то мы можем считать, что $a \perp b$ и что, кроме того, $a]\!\![O$ (рис. 79). Тогда $\mathsf{G}(ab) = \mathsf{G}(F_b)$ и пучок $\mathsf{G}(a^*b^*) = \mathsf{G}(F_{b^*})$ собственный. Пусть d — произвольная прямая такая, что $d]\!\![F_{b^*}$. Прямая l_d, проходящая через O, имеет прообраз e (а именно, $e = aa^*l_d$), для которого $e^* = l_d$. Положив $c = (F_b, e)$, будем иметь, что c — прообраз d, ибо по (VI) $c^* = (F_b, e)^* = (F_{b^*}, e^*) = (F_{b^*}, l_d) = d$.

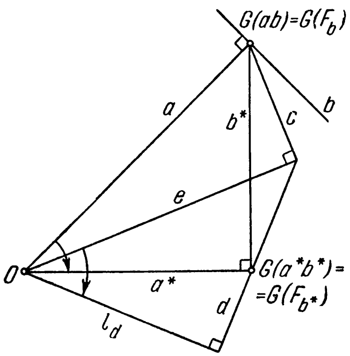


Рис. 79.

Из (X) выводим

(XI) *Всякий пучок прямых является образом некоторого пучка прямых.*

Доказательство. Среди образов собственных пучков выберем два различных пучка A^*, B^*, соединение которых не принадлежит данному пучку. Соединения A^*, B^* с данным пучком являются по (X) образами a^*, b^* прямых a, b из пучков A, B. При этом $a^* \neq b^*$. Тогда данный пучок равен $\mathsf{G}(a^*b^*)$ и является образом пучка $\mathsf{G}(ab)$.

Отсюда следует

Теорема 3. *Всякий полуповорот индуцирует взаимно однозначное отображение множества пучков прямых на себя, при котором всякий собственный пучок переходит в собственный пучок.*

Далее, с помощью (IX) и (VIII) устанавливается, что справедлива

Теорема 4. *При полуповороте вокруг O множество пучков перпендикуляров к прямым, проходящим через O, преобразуется в себя. Каков бы ни был пучок прямых, не являющийся пучком перпендикуляров к прямой, проходящей через O, существует полуповорот вокруг O, который переводит этот пучок в некоторый собственный пучок.*

То полезное, что мы извлечем в дальнейшем из полуповоротов, основывается на теоремах 3 и 4, а также на коммутативности (теорема 2).

Чтобы наглядно уяснить себе, что за преобразования осуществляются полуповоротами, рассмотрим сначала евклидову плоскость (в обычном смысле слова). Тогда полуповорот вокруг точки O — это отображение множеств прямых и точек на себя. Если полуповорот задается поворотом на угол 2α, то внутренность круга с центром O и радиусом r отображается на внутренность концентрического круга радиуса $r^*=r\cos\alpha$. Множество бесконечно удаленных точек, которыми пополняется евклидова плоскость, отображается на себя. На этой проективной плоскости полуповороты вокруг O являются коллинеациями с неподвижной точкой O и неподвижной бесконечно удаленной прямой.

Теперь представим себе внутренность единичного круга с центром O как модель Клейна для плоскости Лобачевского; назовем точки и прямые модели, т. е точки, принадлежащие внутренности круга, и прямые, пересекающие внутренность круга, собственными, а прочие точки и прямые пополненной евклидовой плоскости — несобственными. При полуповороте вокруг O собственные элементы перейдут в себя; те несобственные элементы, которые принадлежат некоторому определенному кругу, концентрическому исходному кругу и содержащему его внутри себя, также отобразятся на собственные элементы Всякую несобственную точку и всякую несобственную прямую, кроме бесконечно удаленных элементов, можно подходящим полуповоротом вокруг O перевести в собственный элемент. Если несобственная точка A переходит в собственную точку A^*, то множество собственных прямых, проходящих через A, отображается в множество (но не на множество!) собственных прямых, проходящих через A^*. Полуповоротами вокруг собственной точки $O'\neq O$ можно также перевести и бесконечно удаленные элементы в собственные.

3. К определению полуповорота. Вернемся к понятию полуповорота прямых в том виде, как оно было определено в п. 1, при условии выполнимости аксиомы $\sim$P. Пусть впредь uv — неинволютивный элемент группы и $u, v \,]\, O$. В определении полуповорота вокруг O, задаваемого элементом uv группы, можно в силу (II) объединить оба случая 1) и 2) в такое правило, пригодное для всякой прямой a:

$$\textit{Если } (O, a)=l_a \quad \textit{и} \quad al_a=F_a, \quad \textit{то} \quad a^*=(F_a, l_a uv). \qquad (*)$$

Отбросим теперь требование выполнимости аксиомы $\sim$P, дабы охватить и эллиптическую геометрию. Правда, стоит заметить, что обе проблемы, для решения которых нам понадобится теория полуповоротов, а именно, проблема расширения групповой плоскости до проективно замкнутой плоскости и проблема построения абсолютного поляритета в расширенной плоскости — не являются проблемами в случае эллиптической плоскости, на которой и так выполняются проективные аксиомы инцидентности и существует поляритет (п. 8 § 3). Речь идет лишь о том, чтобы провести обоснование плоской метрической геометрии так, чтобы ход мыслей не зависел от подразделения геометрий на неэллиптические и эллиптические.

Правило (*) имеет смысл для всякой прямой $a \neq O$, ибо тогда перпендикуляр l_a определен однозначно (в силу выбора l_a перпендикуляр из F_a на прямую $l_a uv$ всегда определяется однозначно, ибо uv не инволютивно и поэтому $a \neq uv$, т. е. $F_a = l_a a \neq \neq l_a uv$); при $a \neq O$ правило (*) дает, как легко проверить, $a^* \neq O$. Таким образом, прямая $a = O$ — поляра точки O, существующая в эллиптической плоскости, — является изолированным элементом по отношению ко всем полуповоротам вокруг O.

В общем случае определим *полуповорот вокруг O, задаваемый неинволютивным элементом uv группы при $u, v \,]\, O$*, так: если $a \neq O$, то a^* определяется по правилу (*), как и раньше; если же $a = O$, то $a^* = O$.

Оба случая можно объединить в правило: *Если l_a — перпендикуляр, опущенный из O на a, и $al_a = F_a$, то*

$$a^* = (F_a, l_a uv). \qquad (**)$$

В эллиптической плоскости всякий полуповорот является взаимно однозначным отображением множества прямых на себя. Теорема 1 сохраняет силу и тогда, когда среди прямых a, b, c фигурирует поляра точки O: ведь abc — прямая и если $a = O$, то b и c по теореме 12 § 3 имеют общий перпендикуляр, проходящий через O, а это свойство сохраняется при полуповороте. С помощью теоремы 1 можно определить отображение пучков прямых (которые на эллиптической плоскости все являются собственными), как в п. 2, и получить при этом теорему 3. Очевидно, теорема 2 выполняется и тогда, когда $a = O$. Первое утверждение теоремы 4 выполняется, как и прежде, а второе на эллиптической плоскости тривиально, ибо на ней всякий пучок прямых — собственный.

С теоретико-групповой точки зрения полуповороты примечательны тем, что это операции, которые сопоставляют прямым прямые, но (в отличие от внутренних автоморфизмов множества прямых, порожденных элементами группы) здесь прямые умножаются только справа (или только слева) на фиксированный неинволютивный элемент группы.

В самом деле, пусть η — элемент группы, определяющий полуповорот вокруг O (в прежней записи $\eta = uv$). Тогда для всякой прямой a произведение $a\eta$ является «нечетным» элементом (отвечающим зеркальному движению групповой плоскости), отличным от 1. В общем случае движение, заданное нечетным элементом $\alpha \neq 1$, является скользящей симметрией. По п. 7 § 3 ей однозначно сопоставляется прямая — *ось скользящей симметрии*, которую мы обозначили через $[\alpha]$. Если записать α в виде

$\alpha = Ab$, то ось скользящей симметрии соединяет A и b, т. е. $[\alpha] = (A, b)$. В нашем случае $a\eta = al_a \cdot l_a\eta = F_a \cdot l_a\eta$, т. е. $[a\eta] = (F_a, l_a\eta)$. Тогда определение (**) полуповорота вокруг O, задаваемого элементом η, можно выразить так:

$$a^* = [a\eta]. \qquad (***)$$

При этом $[\alpha] = [\alpha^{-1}]$, т. е. $[\eta a] = [a\eta^{-1}]$; таким образом, отображение $a^* = [\eta a]$ — отраженный полуповорот.

4. Расширение групповой плоскости до идеальной плоскости. Расширим теперь групповую плоскость до проективной плоскости: введем «идеальные точки» и «идеальные прямые» так, чтобы они образовали проективную «идеальную плоскость», в которой «собственные» идеальные точки и прямые составили бы точный образ групповой плоскости.

Пучок прямых назовем *идеальной точкой*, а собственный пучок прямых — *собственной идеальной точкой*. Таким образом, точке A взаимно однозначно соответствует собственная идеальная точка $\mathsf{G}(A)$. Если a — прямая, то множество идеальных точек A, для которых $a \in \mathsf{A}$,, назовем *собственной идеальной прямой* $\mathsf{g}(a)$ (иными словами, речь идет о множестве идеальных точек, представимых в виде $\mathsf{G}(ax)$). Тогда прямой a взаимно однозначно отвечает собственная идеальная прямая $\mathsf{g}(a)$, а отношению инцидентности в групповой плоскости $A \,\rfloor\, a$ отвечает отношение $\mathsf{G}(A) \in \mathsf{g}(a)$. Идеальную точку $\mathsf{G}(a)$, т. е. пучок перпендикуляров к прямой a, мы назовем *полюсом собственной идеальной прямой* $\mathsf{g}(a)$.

Общее понятие идеальной прямой мы определим, следуя Йельмслеву, с помощью полуповоротов. Выберем точку O и рассмотрим индуцированное полуповоротами вокруг O взаимно однозначное отображение множества всех пучков прямых, т. е. идеальных точек, на себя (теорема 3).

Если * — произвольный полуповорот вокруг O, то для всякого множества a идеальных точек существует определенное множество образов a^* — множество образов идеальных точек — и определенное множество прообразов b (где $\mathsf{b}^* = \mathsf{a}$). В частности, если a — собственная идеальная прямая, то a^* — тоже собственная идеальная прямая:

(XII) *Для каждой прямой a имеем* $\mathsf{g}(a)^* = \mathsf{g}(a^*)$.

Доказательство. $\mathsf{g}(a^*)$ — это множество идеальных точек B, для которых $a^* \in \mathsf{B}$, т. е. (так как по теореме 3 всякая идеальная точка B является образом некоторой идеальной точки A) множество идеальных точек A^*, где $a^* \in \mathsf{A}^*$, т. е. множество A^*, где $a \in \mathsf{A}$, т. е. $\mathsf{g}(a)^*$.

Определение. Множество a идеальных точек называется *идеальной прямой*, если существует полуповорот ° вокруг O

такой, что $\mathfrak{a}^\circ$ — собственная идеальная прямая. Кроме того, надо назвать идеальной прямой множество всех идеальных точек $\mathfrak{G}(a)$, где $a] O$, т. е. множество полюсов всех собственных идеальных прямых, содержащих идеальную точку $\mathfrak{G}(O)$; эти идеальные прямые мы назовем *полярами* $\mathfrak{g}(O)$ *собственной идеальной точки* $\mathfrak{G}(O)$.

Множество идеальных точек и идеальных прямых мы станем называть *идеальной плоскостью.*

В определении идеальной прямой, а следовательно, и в определении понятия идеальной плоскости фигурирует точка O; в п. 5 мы установим, что эти понятия не зависят от выбора точки O.

Из (XII) и коммутирования полуповоротов вокруг O следует

(XIII) *Если* $*$ — *произвольный полуповорот вокруг* O, *а* $\mathfrak{a}$ — *идеальная прямая, то* $\mathfrak{a}^*$ — *идеальная прямая; в частности,* $\mathfrak{g}(O)^* = \mathfrak{g}(O)$.

Доказательство. $\mathfrak{g}(O)^* = \mathfrak{g}(O)$ в силу теоремы 4. Теперь пусть $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}(O)$. Тогда по определению существует полуповорот $^\circ$ вокруг O такой, что $\mathfrak{a}^\circ$ — собственная идеальная прямая. В силу (XII) тогда и $\mathfrak{a}^{\circ *}$ — собственная идеальная прямая. Из теоремы 2 вытекает, что множества $\mathfrak{a}^{\circ *}$ и $\mathfrak{a}^{* \circ}$ совпадают. Так как тогда $\mathfrak{a}^{* \circ}$ — собственная идеальная прямая, то $\mathfrak{a}^*$ по определению идеальной прямой также является идеальной прямой.

С помощью (XIII) мы докажем

(XIV) *Для двух различных идеальных прямых* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *существует единственная идеальная точка* $\mathfrak{C}$, *которая принадлежит* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$.

Доказательство. Сначала пусть $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}(O)$. Тогда $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{g}(O)$ и существует такой полуповорот $^\circ$ вокруг O, что $\mathfrak{b}^\circ$ — собственная идеальная прямая $\mathfrak{g}(e)$, отличная от $\mathfrak{g}(O)^\circ = \mathfrak{g}(O)$. Из $\mathfrak{g}(O) \neq \mathfrak{g}(e)$ следует, что $O \neq e$. Если обозначить $(O, e) = d$, то идеальная точка $\mathfrak{D} = \mathfrak{G}(d)$, и только она, принадлежит $\mathfrak{a}^\circ = \mathfrak{g}(O)$ и $\mathfrak{b}^\circ$. Тогда идеальная точка $\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}^\circ = \mathfrak{D}$, и только она, принадлежит $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

Пусть теперь $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \neq \mathfrak{g}(O)$. Тогда существует такой полуповорот $^\circ$ вокруг O, что $\mathfrak{a}^\circ$ — собственная идеальная прямая, а так как по (XIII) $\mathfrak{b}^\circ$ — идеальная прямая и отлична от $\mathfrak{g}(O)^\circ = \mathfrak{g}(O)$, то существует такой полуповорот $*$ вокруг O, что $\mathfrak{b}^{\circ *}$ (а значит, по (XII), и $\mathfrak{a}^{\circ *}$) является собственной идеальной прямой. При этом $\mathfrak{a}^{\circ *} \neq \mathfrak{b}^{\circ *}$, и по определению идеальной точки $\mathfrak{a}^{\circ *}$ и $\mathfrak{b}^{\circ *}$ имеют единственную общую идеальную точку $\mathfrak{D}$. Тогда идеальная точка $\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}^{\circ *} = \mathfrak{D}$, является единственной общей идеальной точкой $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

(XV) *Для двух различных идеальных точек* A, B *существует единственная идеальная прямая* c, *которой принадлежат* A *и* B.

Доказательство. Достаточно доказать только существование; единственность вытекает из (XIV). При $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathsf{g}(O)$ доказывать нечего. Итак, пусть, например, $\mathsf{A} \notin \mathsf{g}(O)$. Тогда по теореме 4 существует такой полуповорот $*$ вокруг O, что A^* — собственная идеальная точка. По теореме 15 § 3 существует собственная идеальная прямая d, для которой $\mathsf{A}^*, \mathsf{B}^* \in \mathsf{d}$. Множество прообразов c, где $\mathsf{c}^* = \mathsf{d}$, по определению идеальной прямой является идеальной прямой; она такова, что $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathsf{c}$.

Из (XIV) и (XV) следует (ибо существование минимального числа прямых и точек гарантируется теоремой 31 § 3)

Теорема 5. *В идеальной плоскости выполняются проективные аксиомы инцидентности.*

Идеальная плоскость — это «минимальное» проективно-замкнутое расширение групповой плоскости. Так как всякую собственную идеальную точку можно соединить со всякой идеальной точкой даже собственной идеальной прямой, то относительно выделения собственных элементов на идеальной плоскости выполняется следующая

Теорема 6. *Всякой собственной идеальной точке принадлежат только собственные идеальные прямые, а всякой несобственной прямой принадлежат только несобственные идеальные точки.*

Из (XV) выводим такое дополнение к (XIII): *если* $*$ — *произвольный полуповорот вокруг* O, *а* b — *некоторая идеальная прямая, то и множество прообразов* b (*т. е. множество* a, *где* $\mathsf{a}^* = \mathsf{b}$) *является идеальной прямой.* Для доказательства выберем две идеальные точки $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathsf{a}$ (где $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$). По (XV) существует идеальная прямая c, для которой $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathsf{c}$, а по (XIII) c^* есть идеальная прямая. При этом $\mathsf{A}^*, \mathsf{B}^* \in \mathsf{a}^*$, c^* и $\mathsf{A}^* \neq \mathsf{B}^*$, т. е. по (XV) $\mathsf{a}^* = \mathsf{c}^*$, а значит, $\mathsf{a} = \mathsf{c}$, т. е. a — идеальная прямая.

Это позволяет дополнить утверждение теоремы 3: всякий полуповорот вокруг O индуцирует на идеальной плоскости коллинеацию. Так как по п. 5 § 6 эта коллинеация отображает пучок прямых, проходящих через O, на себя проективно (отображение $x^* = xuv = u(uxu)v$ пучка является произведением двух спариваний), то по лемме п. 3 § 5 эта коллинеация проективна. Таким образом, имеет место

Теорема 7. *Всякий полуповорот вокруг* O *индуцирует на идеальной плоскости проективную коллинеацию, неподвижными элементами которой являются идеальная точка* $\mathsf{G}(O)$ *и идеальная прямая* $\mathsf{g}(O)$.

Эти проективные отображения мы назовем *полуповоротами идеальной плоскости.*

Задача. Пусть в идеальной плоскости задан полуповорот * вокруг собственной идеальной точки $\mathbf{G}(O)$, а $\mathbf{g}(a)$ — идеальная прямая, проходящая через $\mathbf{G}(O)$. Отображение идеальной прямой $\mathbf{g}(a)$ на идеальную прямую $\mathbf{g}(a^*)$, индуцированное полуповоротом *, является перспективным соответствием с центром $\mathbf{G}(a^*)$ (рис. 80). [Отсюда снова следует, что полуповороты идеальной плоскости являются проективными преобразованиями.]

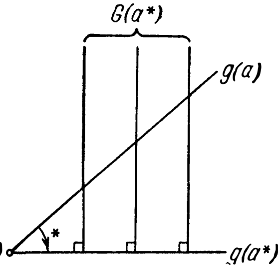


Рис. 80.

5. Идеальная плоскость группы движений. Теорема 8. *В идеальной плоскости выполняется теорема о конфигурации Паппа.*

Пусть дана открытая конфигурация Паппа, состоящая из идеальных точек и идеальных прямых. Напомним, что мы исследовали свойства открытой конфигурации Паппа в п. 1 § 5, и здесь мы можем опираться на введенные там понятия и установленные результаты.

Будем обозначать критическую идеальную точку в данной открытой конфигурации Паппа через $\mathbf{C}$, а критическую идеальную прямую через $\mathbf{c}$. Нам надо доказать, что $\mathbf{C} \in \mathbf{c}$. Две инцидентные с $\mathbf{C}$ идеальные прямые конфигурации обозначим через $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, а две инцидентные с $\mathbf{c}$ идеальные точки конфигурации — через $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ (рис. 81). Напомним, что девять идеальных точек конфигурации распадаются на три тройки «несоединимых» идеальных точек *). Ту тройку, которой принадлежит критическая идеальная точка, назовем *критической тройкой.*

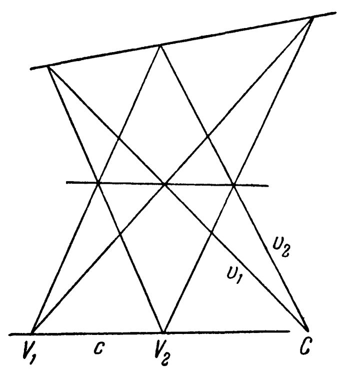


Рис. 81.

Проведем доказательство, группируя определенным образом все возможные случаи. Согласно теореме 13 § 4 всякая открытая конфигурация Паппа, в которой все девять идеальных прямых и три идеальные точки критической тройки собственные, замыкается («вещественный случай»).

*) Две идеальные точки открытой конфигурации Паппа называются *несоединимыми*, если их нельзя соединить никакой идеальной прямой конфигурации, даже допустив, что критическая инцидентность имеет место.

Ту открытую конфигурацию Паппа, рассмотрение которой ниже составляет «случай 1a)», можно перевести полуповоротом вокруг O в конфигурацию, удовлетворяющую этому требованию «собственности». Все другие случаи мы сводим «вариацией конфигурации», описанной в п. 1 § 5, (V), к случаю 1a).

Случай 1. *Девять идеальных прямых конфигурации отличны от* $\mathfrak{g}(O)$.

a) *Идеальные точки критической тройки не принадлежат* $\mathfrak{g}(O)$. Если три идеальные точки критической тройки и критические идеальные прямые собственные, то по теореме 6 все идеальные прямые конфигурации собственные, а значит, конфигурация замкнута по теореме 13 § 4. Если же три идеальные точки критической тройки и критические прямые не все собственные, то их можно перевести в собственные последовательностью полуповоротов вокруг O. Полученная конфигурация замкнута, а значит, замкнута и исходная конфигурация.

б) *Критическая идеальная точка не принадлежит* $\mathfrak{g}(O)$, *но хотя бы одна из двух других идеальных точек критической тройки принадлежит* $\mathfrak{g}(O)$. Тогда шесть идеальных точек конфигурации, которые не входят в состав критической тройки, не принадлежат $\mathfrak{g}(O)$. Заменим $\mathfrak{c}$ на $\mathfrak{c}' = (\mathfrak{C}, \mathfrak{V}_1)$; так как $\mathfrak{C} \notin \mathfrak{g}(O)$, то $\mathfrak{c}' \neq \mathfrak{g}(O)$. Тогда $\mathfrak{V}_2$ — критическая идеальная точка, а содержащая ее тройка — критическая тройка проварьированной конфигурации, удовлетворяющей условиям случая 1a).

в) *Критическая идеальная точка принадлежит* $\mathfrak{g}(O)$. Заменим критическую идеальную точку $\mathfrak{C}$ на идеальную точку $\mathfrak{C}'$ пересечения $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{v}_1$. Тогда $\mathfrak{v}_2$ — критическая идеальная прямая, а $\mathfrak{C}'$ — критическая идеальная точка. Если $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}$, то $\mathfrak{C} \in \mathfrak{c}$, как и утверждается. Если $\mathfrak{C}' \neq \mathfrak{C}$, то $\mathfrak{C}'$ не принадлежит $\mathfrak{g}(O)$, ибо $\mathfrak{C}$ принадлежит $\mathfrak{g}(O)$, но $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}') = \mathfrak{v}_1 \neq \mathfrak{g}(O)$, и мы приходим к конфигурации, разобранной в случаях 1a) или 1б).

Случай 2. $\mathfrak{g}(O)$ — *идеальная прямая конфигурации.*

В силу п. 1 § 5, (VI) можно предположить, что $\mathfrak{g}(O)$ — критическая идеальная прямая. Если тогда не выполняется критическая инциденция, то вариацией критической идеальной прямой мы получаем конфигурацию, удовлетворяющую условиям случая 1.

Вместе с теоремой 8 выполняется также

Теорема 8′. *На идеальной плоскости выполняется теорема Паппа — Паскаля.*

Если три различные идеальные точки $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ принадлежат одной идеальной прямой, то существует такой простой шестисторонник, образованный собственными идеальными прямыми, вершины которого через одну принадлежат двум собственным идеальным прямым, а противоположные стороны пересекаются в A_1, A_2, A_3 (рис. 82). Чтобы это установить, выберем собственную идеальную точку B_2; на собственных идеальных прямых (A_1, B_2), (A_3, B_2) выберем собственные идеальные точки C_3, C_1, а на собственной идеальной прямой (C_1, C_3) выберем собственную идеальную точку C_2. Идеальная точка B_1 пересечения (A_2, C_3) и (A_3, C_2) и идеальная точка B_3 пересечения (A_1, C_2) и (A_2, C_1) лежат, согласно теореме Паппа — Паскаля, на одной идеальной прямой с B_2. Восемь построенных идеальных прямых собственные, ибо они содержат по крайней мере по одной собственной идеальной точке.

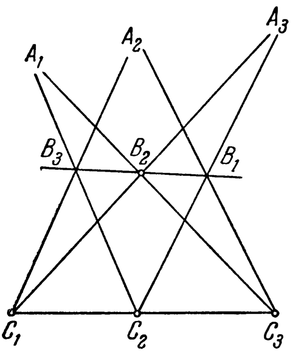


Рис. 82.

Утверждение о том, что A_1, A_2, A_3 принадлежат одной идеальной прямой, равносильно тому, что существует конфигурация Паппа — Паскаля, для которой A_1, A_2, A_3 — идеальные точки пересечения противоположных сторон, а восемь других идеальных прямых собственные. Так как последнее утверждение не зависит от выбора точки O, вокруг которой проводились все полуповороты, то справедлива

Теорема 9. *Понятие идеальной прямой плоскости, а потому и понятие идеальной плоскости, не зависит от выбора центра полуповорота.*

Таким образом, для всякой группы, удовлетворяющей нашей системе аксиом, существует однозначно определенная идеальная плоскость; поэтому можно говорить про *идеальную плоскость группы движений.*

В идеальной плоскости у каждой собственной идеальной прямой $\mathsf{g}(a)$ есть единственный полюс $\mathsf{G}(a)$, а всякая собственная идеальная точка $\mathsf{G}(A)$ имеет единственную поляру $\mathsf{g}(A)$ — множество полюсов идеальных прямых, проходящих через $\mathsf{G}(A)$. Поляра $\mathsf{g}(A)$ сразу является идеальной прямой, если A — центр полуповорота; поэтому в силу теоремы 9 она всегда является идеальной прямой.

Если уже в самой групповой плоскости есть полярные друг другу прямые и точки, то групповая плоскость эллиптическая. Если a и A взаимно полярны, т. е. $a=A$, то полюс $\mathsf{G}(a)$ идеальной прямой $\mathsf{g}(a)$ является идеальной точкой $\mathsf{G}(A)$, а поляра $\mathsf{g}(A)$ идеальной точки $\mathsf{G}(A)$ — идеальной прямой $\mathsf{g}(a)$.

Согласно п. 5 § 4 всякое движение групповой плоскости

$$a^* = a^\gamma \tag{2}$$

индуцирует взаимно однозначное отображение

$$\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^\gamma \tag{3}$$

множества идеальных точек на себя. Каждому множеству a идеальных точек тогда однозначно сопоставляется множество образов идеальных точек, которое мы обозначим через a^γ. Но надо еще показать, что если a — идеальная прямая, то a^γ — тоже идеальная прямая.

Отображение (3) преобразует собственные идеальные точки и собственные идеальные прямые в точности так же, как отображение (2) преобразует отвечающие им точки и прямые. В самом деле, по формуле (21) § 4 и определению собственной идеальной прямой

$$\mathsf{G}(A)^\gamma = \mathsf{G}(A^\gamma) \tag{4}$$

и

$$\mathsf{g}(a)^\gamma = \mathsf{g}(a^\gamma). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь отображение (3) в том случае, когда $\gamma = c$, т. е. когда (2) является осевой симметрией групповой плоскости относительно прямой c. Выберем точку O на c в качестве центра всех последующих полуповоротов. Имеем $\mathsf{g}(O)^c = \mathsf{g}(O)$. Если a — идеальная прямая и $\mathsf{a} \neq \mathsf{g}(O)$, то существует полуповорот вокруг O, переводящий a в какую-то собственную идеальную прямую $\mathsf{g}(b)$. Тогда отраженный полуповорот переводит a^c в $\mathsf{g}(b)^c$, т. е. в силу (5) — в собственную идеальную прямую $\mathsf{g}(b^c)$. Значит, a^c — идеальная прямая.

Отображение (3) при $\gamma = c$, таким образом, является коллинеацией и имеет место

Теорема 10. *Симметрия групповой плоскости относительно прямой c индуцирует на идеальной плоскости инволютивную гомологию, осью которой служит собственная идеальная прямая* $\mathsf{g}(c)$, *а центром — ее полюс* $\mathsf{G}(c)$.

Так как в идеальной плоскости существуют инволютивные гомологии, то выполняется аксиома Фано, и с помощью теорем 5 и 8′ получается

Теорема 11. *Идеальная плоскость является проективной плоскостью.*

Так как каждое движение (2) есть суперпозиция осевых симметрий, то в силу теоремы 10 всякое отображение (3) на идеальной плоскости является произведением инволютивных гомологий и, значит, проективной коллинеацией:

Теорема 12. *Всякое движение групповой плоскости индуцирует на идеальной плоскости проективную коллинеацию, отображающую множество собственных идеальных точек и собственных идеальных прямых на себя.*

В частности, имеет место

Теорема 10′. *Центральная симметрия групповой плоскости относительно точки C индуцирует на идеальной плоскости инволютивную гомологию, центром которой служит собственная идеальная точка* $\mathsf{G}(C)$, *а осью — ее поляра* $\mathsf{g}(C)$.

Так как каждый элемент γ группы можно представить в виде ab или aB, то всякая проективная коллинеация идеальной плоскости, индуцированная движением групповой плоскости, может быть представлена в виде произведения двух инволютивных гомологий вида, указанного в теоремах 10 и 10′.

6. Группа, порожденная полуповоротами вокруг некоторой идеальной точки. Включим в наше изложение исследование группы, порождаемой полуповоротами вокруг собственной идеальной точки на идеальной плоскости. Это, очевидно, какие-то коллинеации идеальной плоскости, а уравнения группы ведут к теоремам о замыкании. Соображениями этого пункта, резюмированными теоремой 7, мы далее не будем пользоваться при обосновании плоской метрической геометрии.

В дальнейшем $\mathsf{O} = \mathsf{G}(O)$ — фиксированная собственная идеальная точка, а $\mathsf{o} = \mathsf{g}(O)$ — ее поляра. Полуповорот идеальной плоскости вокруг O, получаемый из полуповорота прямых вокруг точки O, задаваемой элементом uv группы, мы обозначим через H_{uv}. В идеальной плоскости для полуповорота H_{uv} существует обратная коллинеация H_{uv}^{-1}. Назовем H_{uv} *прямым полуповоротом,* а H_{uv}^{-1} — *обратным полуповоротом* вокруг O. Только тождественное отображение является одновременно и прямым и обратным полуповоротом.

В произведении прямых и обратных полуповоротов идеальной плоскости вокруг O можно переставлять множители: ведь в силу теоремы 2 $H_1H_2 = H_2H_1$, а это равенство можно умножить на H_1^{-1} и слева и справа и получить $H_2H_1^{-1} = H_1^{-1}H_2$; с другой стороны, образуя обратную коллинеацию, получаем: $H_2^{-1}H_1^{-1} = H_1^{-1}H_2^{-1}$. Итак,

(XVI) *Группа* $\mathfrak{H}_{\mathsf{O}}$, *порожденная полуповоротами идеальной плоскости вокруг собственной идеальной точки* O, *является коммутативной группой проективных коллинеаций, оставляющих на месте* O *и ее поляру* o.

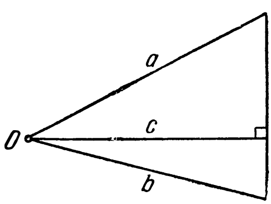


Рис. 83.

Рассмотрим теперь произведение таких прямого и обратного полуповоротов

$$H_{ac}H_{bc}^{-1} = H_{ac}H_{(cb)^{-1}}^{-1}, \tag{6}$$

где a, c, b — прямые, инцидентные O, и $a, b \not\underline{\perp} c$ (рис. 83). Если $\mathsf{a} = \mathsf{g}(a)$, $\mathsf{b} = \mathsf{g}(b)$, $\mathsf{c} = \mathsf{g}(c)$, то коллинеацию (6) будем короче записывать так: $(\mathsf{a}, \mathsf{c}, \mathsf{b})$. При $\mathsf{a} = \mathsf{b}$ коллинеация $(\mathsf{a}, \mathsf{c}, \mathsf{b})$ обращается в тождество. Если же $\mathsf{a} \neq \mathsf{b}$ и C — полюс c, то C не принадлежит ни a, ни b, а $(\mathsf{a}, \mathsf{c}, \mathsf{b})$ переводит идеальную прямую a в идеальную прямую b так, что прямая, соединяющая произвольную идеальную точку идеальной прямой a с ее образом на b, проходит через C (ср. задачу в п. 4).

Из существования этих коллинеаций и их коммутативности непосредственно вытекает, что на идеальной плоскости выполняется теорема Паппа — Паскаля для случая, когда O — точка пересечения несущих прямых, а o — прямая Паскаля:

Для шестиугольника $A_1, B_2, A_3, B_1, A_2, B_3$, *вершины которого попеременно принадлежат двум идеальным прямым* a, b, *проходящим через* O, *имеет место следующее:*

Если две пары противоположных сторон пересекаются в точках, принадлежащих o, *то и третья пара противоположных сторон пересекается в точке, принадлежащей* o. (Необходимые условия несовпадения должны быть выполнены.)

Пусть, например, C_3 — точка пересечения (A_1, B_2) и (A_2, B_1), C_2 — точка пересечения (A_1, B_3) и (A_3, B_1), C_1 — точка пересечения (A_2, B_3) и o. Надо показать, что точка B_2' пересечения (A_3, C_1) и b совпадает с B_2. Пусть снова c_i — идеальная прямая, проходящая через O и имеющая полюс C_i (рис. 84; $i = 1, 2, 3$). Произведение

$$(a, c_1, b)(b, c_2, a)(a, c_3, b) \tag{7}$$

переводит A_2 в B_3, A_1 в B_2. Произведение

$$(a, c_3, b)(b, c_2, a)(a, c_1, b) \tag{8}$$

переводит A_2 в B_1, A_3 в B_2'. Так как (7) и (8) совпадают вследствие коммутативности, то $B_2 = B_2'$.

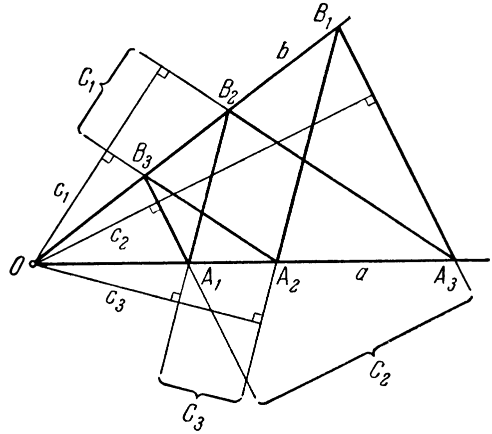


Рис. 84.

Именно таким путем Йельмслев доказал аффинную теорему Паппа — Паскаля в евклидовой плоскости.

(XVII) *Любой элемент из* $\mathfrak{H}_O$, *оставляющий неподвижной идеальную прямую, проходящую через* O, *является гомологией с центром* O *и осью* o.

Доказательство. Произведение $\prod H_{\eta_i} H_{\zeta_i}^{-1}$ (где допускается η_i, $\zeta_i = 1$) переводит идеальную прямую $g(a)$, проходящую через O, в идеальную прямую $g(a')$, где $a \prod \eta_i \zeta_i^{-1} = a'$. Если по крайней мере для одной из проходящих через O идеальных прямых $g(a) = g(a')$, т. е. $a = a'$, то $\prod \eta_i \zeta_i^{-1} = 1$ и, значит, всякая идеальная прямая, проходящая через O, совпадает со своим образом.

(XVIII) *Всякий элемент из* $\mathfrak{H}_O$, *оставляющий на месте идеальную точку, отличную от* O *и не принадлежащую* o, *является тождеством.*

Доказательство. Такой элемент группы $\mathfrak{H}_O$ оставляет неподвижной идеальную прямую, проходящую через O и содержащую данную неподвижную точку, а поэтому в силу (XVII) является гомологией. Из одних лишь проективных аксиом инцидентности вытекает, что гомология с неподвижной точкой, отличной от центра и не принадлежащей оси, является тождественным преобразованием.

Из существования коллинеации (6) и из (XVIII) получаем, что на идеальной плоскости выполняется теорема Дезарга, если только O является дезарговым центром, а o — дезарговой осью:

Для двух треугольников A_1, A_2, A_3 *и* B_1, B_2, B_3 *таких, что соединительные прямые* $g_i = (A_i, B_i)$ *проходят через* O, *в случае если две пары* *соответствующих сторон пересекаются на* o, *то и третья пара соответствующих сторон пересекается на* o. (Здесь тоже должны выполняться необходимые условия несовпадения.)

Пусть C_1 — точка пересечения (A_2, A_3) и (B_2, B_3), C_2 — точка пересечения (A_1, A_3) и (B_1, B_3), C_3 — точка пересечения (A_1, A_2) и o. Надо показать, что точка B_2' пересечения прямых (B_1, C_3) и g_2 совпадает с B_2. Пусть, как и прежде, c_i — идеальные прямые, проходящие через O, полюсами которых служат C_i (рис. 85). Произведение

$$(g_2, c_1, g_3)(g_3, c_2, g_1)(g_1, c_3, g_2) \tag{9}$$

переводит A_2 в A_2 и поэтому является тождеством. Так как при этом B_2 переходит в B_2', то $B_2 = B_2'$.

Пусть A, B — идеальные точки, отличные от O и не принадлежащие o. В силу (XVIII) имеется не более одного элемента из $\mathfrak{H}_O$,

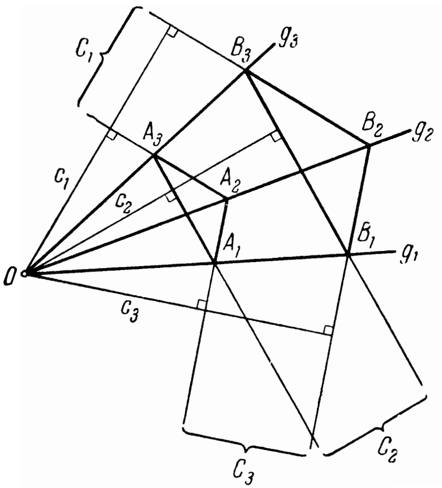


Рис. 85.

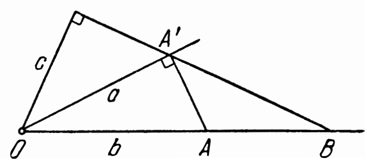


Рис. 86.

переводящего A в B. Если A и B не коллинеарны O, то можно посредством коллинеации (6) перевести A в B. Пусть теперь A и B принадлежат некоторой идеальной прямой b, проходящей через O (рис. 86). Выберем идеальную прямую $a \neq b$, проходящую через O и не проходящую через полюс прямой b. Тогда полуповорот (b, a, a) переводит идеальную точку A в идеальную точку A' на a. Коллинеацией (a, c, b) можно затем перевести A' в B. Если $a = g(a)$, $b = g(b)$, $c = g(c)$, то произведение

$$H_{ba} H_{ac} H_{bc}^{-1} \tag{10}$$

является в силу (XVII) гомологией с центром O и осью o, которая переводит A в B. Итак,

(XIX) $\mathfrak{H}_O$ *просто транзитивна на множестве тех идеальных точек, которые отличны от* O *и не принадлежат* o. *Всякий элемент из* $\mathfrak{H}_O$ *можно представить в виде произведения максимум двух прямых и одного обратного полуповорота.*

(XX) $\mathfrak{H}_O$ *содержит группу всех гомологий с центром* O *и осью* o.

Применив гомологию, которая переводит, например, A_3 в B_3, можно непосредственно убедиться в справедливости теоремы Дезарга в вышеприведенной форме.

7. Аксиомы евклидовой и неевклидовой метрик. После того, как мы доказали, что групповая плоскость всякой группы движений, удовлетворяющей нашей системе аксиом, может быть расширена до проективной идеальной плоскости, перед нами встает задача доказать, что групповая плоскость индуцирует в идеальной плоскости проективно-метрические отношения. Прежде всего в идеальной плоскости вводится ортогональность для собственных идеальных прямых посредством ортогональности, заданной в групповой плоскости. Мы можем уже говорить про полюс собственной идеальной прямой и про поляру собственной идеальной точки. Естественно спросить, можно ли распространить эти отношения на произвольные идеальные прямые и идеальные точки. Чтобы ответить на этот вопрос, надо вернуться к свойствам ортогональных прямых групповой плоскости. Будем различать случай, когда на групповой плоскости существует прямоугольник, и случай, когда прямоугольника не существует.

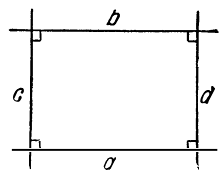


Рис. 87.

Рассмотрим следующую *аксиому прямоугольника*, которую будем называть также *аксиомой евклидовой метрики:*

Аксиома R. *Существуют* a, b, c, d *такие, что* $a, b \perp c, d$ *и* $a \neq b$, $c \neq d$,

т. е. существует прямоугольник *) (рис. 87). Ее отрицание, которое мы будем называть *аксиомой неевклидовой метрики*, звучит так:

Аксиома $\sim$R. *Из* $a, b \perp c, d$ *вытекает* $a=b$ *или* $c=d$,

т. е. две различные прямые имеют не более одного общего перпендикуляра.

Группу движений (в смысле нашей системы аксиом) и ее групповую плоскость мы станем называть *метрически-евклидовой* или *метрически-неевклидовой* в зависимости от того, выполняется ли аксиома R или аксиома $\sim$R. Добавлением слова «метрически» мы хотим подчеркнуть, что то существенное, чем различаются эти геометрии, основано на понятии ортогональности, т. е. имеет метрическую природу. О том же, что касается пересечения или непересечения прямых, исходя из аксиом R или $\sim$R можно сказать мало.

Так как в эллиптической групповой плоскости всякие две различные прямые всегда имеют единственный общий перпендикуляр, то из аксиомы P вытекает аксиома $\sim$R. Попутно следует заметить, что из аксиомы R следует аксиома D.

Аксиомы R и $\sim$R можно перефразировать как утверждения о «идентичности прямых, характеризуемых их перпендикуля-

---

*) Точнее, «прямосторонник» (у автора — Rechtseit). Впрочем, в силу теоремы 1 § 3 перпендикулярные прямые пересекаются, и поэтому прямосторонник имеет 4 вершины, т. е. оказывается прямоугольником. *(Прим. перев.)*

рами». Две прямые a и b назовем *идентичными в смысле перпендикуляров*, если они имеют одни и те же перпендикуляры, т. е. если пучки перпендикуляров $\mathsf{G}(a)$ и $\mathsf{G}(b)$ совпадают. Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Для идентичности двух прямых в смысле перпендикуляров достаточно уже того, чтобы они имели два разных общих перпендикуляра (это сразу вытекает из аксиомы 4 и ее обращения). Аксиома R равносильна утверждению о том, что существуют различные прямые, идентичные в смысле перпендикуляров. Аксиома $\sim$R равносильна утверждению о том, что всякая прямая идентична в смысле перпендикуляров только самой себе, т. е. из $\mathsf{G}(a)=\mathsf{G}(b)$ следует $a=b$. В этом случае всякий пучок перпендикуляров отвечает однозначно определяемой прямой — носительнице пучка.

Как в случае евклидовой, так и в случае неевклидовой метрики ключ к решению нашей задачи, как мы увидим, содержится в ранее доказанной теореме, аналогичной теореме о перпендикулярах (теорема 25 § 3). Из этой теоремы вытекает, с одной стороны, теорема о прямоугольнике (теорема 13), а с другой стороны, — лемма о полуповоротах («правило сокращения звездочек»).

8. Метрически-евклидовы плоскости. Допустим, что выполняется аксиома евклидовой метрики.

Из существования прямоугольника, как того требует аксиома R, следует общая теорема о том, что всякий четырехугольник с тремя прямыми углами является прямоугольником:

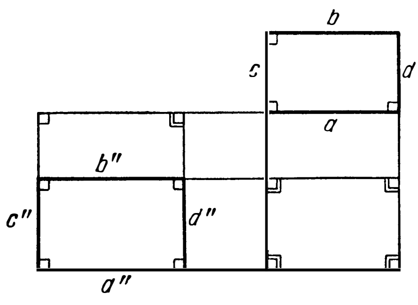


Рис. 88.

Теорема 13 (теорема о прямоугольнике). *Из a, $b \perp c$ и $a \perp d$ следует $b \perp d$* (R).

Для этого важного утверждения мы дадим два доказательства. В обоих будет использоваться уже упомянутое (не зависящее от аксиомы R) обстоятельство: если две прямые имеют два разных общих перпендикуляра, то они идентичны в смысле перпендикуляров, т. е. каждый перпендикуляр к одной прямой является одновременно перпендикуляром к другой прямой.

Первое доказательство теоремы 13. Достаточно доказать следующее: существует прямоугольник a'', b'', c'', d'', у которого $a'', b'' \perp c'', d''$ и $a'' \neq b''$, $c'' \neq d''$, причем $c'' \perp a$ (рис. 88).

В самом деле, если такой прямоугольник существует, то рассуждаем так: поскольку c'', d'' идентичны в смысле перпендикуляров, то $d'' \perp a$. Значит, a, a'', b'' идентичны в смысле перпендикуляров, ибо у них, кроме общего перпендикуляра c'', есть еще общий перпендикуляр d''. Так как c, $d \perp a$, то также и c, $d \perp a''$, b''. Итак, c и d идентичны в смысле перпендикуляров, ибо у них есть два общих перпендикуляра a'', b''. Но тогда из $b \perp c$ следует $b \perp d$.

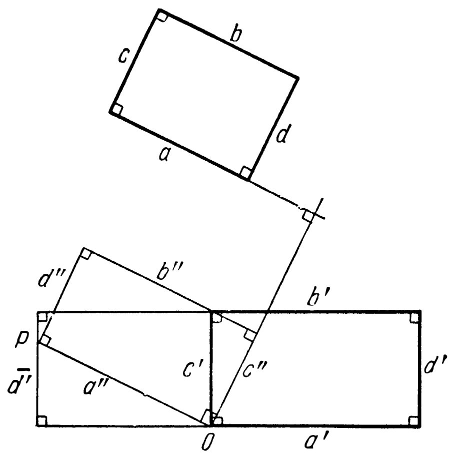


Рис. 89.

Прямоугольник указанного вида можно построить с помощью теоремы 25 § 3. Пусть a', b', c', d' — существующий по аксиоме R прямоугольник (рис. 89). Из вершины $O=a'c'$ опустим перпендикуляр c'' на a. Если $c''=a'$, то полученный прямоугольник уже обладает желаемыми свойствами. Если же $c'' \neq a'$, то проведем через O перпендикуляр a'' к c'' и выберем на нем точку $P \neq O$. Из этой точки опустим перпендикуляр $\bar{d}'$ на a'; так как a' и b' идентичны в смысле перпендикуляров, то $\bar{d}' \perp b'$. Из точки P восставим перпендикуляр d'' к a'', а затем опустим из вершины $b'c'$ данного прямоугольника перпендикуляр b'' на c''. Тогда в силу указанной теоремы $b'' \perp d''$.

В т о р о е д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 13. Воспользуемся тем, что независимо от выполнения или невыполнения аксиомы R справедлива

Л е м м а. *Пусть $A \neq B$. ABC является точкой тогда и только тогда, когда через C проходит прямая, идентичная в смысле перпендикуляров прямой (A, B).*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы. а) Пусть $ABC=D$. Так как $A \neq B$, то $C \neq D$; положим $(C, D)=g$ и рассмотрим равенство $AB(Cg)=Dg$. В силу теоремы 11 § 3 из него следует, что две разные прямые Cg и Dg перпендикулярны (A, B). Так как они тривиальным образом перпендикулярны g, то (A, B) и g идентичны в смысле перпендикуляров.

б) Пусть g — некоторая идентичная (A, B) в смысле перпендикуляров прямая, проходящая через C. Прямая Cg перпендикулярна g, а следовательно, и (A, B). Поэтому прямая $AB(Cg)$ в силу теоремы 11 § 3 перпендикулярна (A, B), а значит, и g, откуда заключаем, что произведение $AB(Cg)g=$ $=ABC$ является точкой.

Доказательство теоремы. Опустим из двух разных точек V, W прямой a перпендикуляры v, w на сторону a' существующего по аксиоме R прямоугольника (рис. 90). Можно выбрать a' так, чтобы $v \neq a$, и, значит, $v \neq w$. Поскольку a' идентична противоположной ей стороне в смысле перпендикуляров, то v и w также перпендикулярны противоположной стороне; поэтому v и w идентичны в смысле перпендикуляров. Если выбрать на v точку $U \neq V$, то по лемме UVW — точка. Так как тогда и WVU — точка, то опять же по лемме существует прямая u, идентичная a в смысле перпендикуляров и проходящая через U. Из $c, d \perp a$ следует, что $c, d \perp u$. Таким образом, в силу $a \neq u$ прямые c и d идентичны в смысле перпендикуляров, и из $b \perp c$ вытекает, что $b \perp d$.

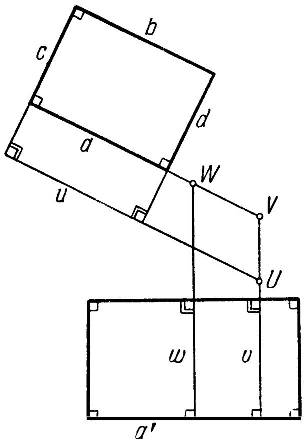


Рис. 90.

Из теоремы 13 следует, что в метрически-евклидовой плоскости для идентичности двух прямых в смысле перпендикуляров достаточно наличия у них одного общего перпендикуляра:

Следствие. *Если два пучка перпендикуляров имеют хотя бы одну общую прямую, то они совпадают. Каждая прямая принадлежит единственному пучку перпендикуляров* (R).

Таким образом, при выполнении аксиомы R пучки перпендикуляров представляют собой непересекающиеся классы, на которые разбивается множество всех прямых.

Мы называем прямые a и b метрически-евклидовой плоскости *параллельными* (это обозначается так: $a \| b$), если они идентичны в смысле перпендикуляров. Ясно, что через каждую точку проходит единственная прямая, параллельная данной прямой. Конечно, две разные параллельные прямые не могут иметь общих точек, но вовсе не обязательно, чтобы непараллельные прямые всегда имели общую точку.

Так как к любой прямой (A, B) можно через любую точку C провести параллельную прямую, то из леммы следует

Теорема 14. *Произведение ABC всегда является точкой* (R).

Если точки A, B, C не коллинеарны, то точка $ABC = D$ является четвертой вершиной параллелограмма, определенного точками A, B и C.

Из леммы же следует, что в случае выполнимости аксиомы $\sim$R произведение ABC является точкой тогда и только тогда, когда точки A, B, C коллинеарны. Важной особенностью метрически-евклидовой группы движений является то, что она имеет коммутативный нормальный делитель (подгруппа переносов).

Назовем *переносом* элемент ab группы, где $a \| b$. Так как в силу теоремы 13 параллельность двух прямых равносильна существованию у них общего перпендикуляра, то по теореме 20б) § 3 переносы — это те элементы группы, которые представимы в виде AB. Если AB и $A'B'$ — два переноса, то по теореме 14 ABA' является точкой A'', а значит, произведение $AB \cdot A'B' = A''B'$ является переносом. Таким образом, переносы образуют подгруппу группы движений. Из теоремы 14 далее получается, что эта подгруппа коммутативна (ср. лемму в п. 2 § 1). Образ переноса AB при внутреннем автоморфизме, порожденном произвольным элементом γ группы, есть перенос $A^\gamma B^\gamma$, т. е. переносы образуют нормальный делитель.

Этим доказано первое утверждение из следующей теоремы о структуре метрически-евклидовой группы движений:

Теорема 15. *В метрически-евклидовой группе движений $\mathfrak{G}$ переносы образуют коммутативный нормальный делитель $\mathfrak{T}$. Если $\mathfrak{G}_O$ — подгруппа, порожденная прямыми, инцидентными фиксированной точке O, то $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_O \mathfrak{T}$.*

Для доказательства второго утверждения достаточно показать, что всякий элемент $\alpha \in \mathfrak{G}$ можно представить в виде $\alpha = \alpha_0 \tau$, где $\alpha_0 \in \mathfrak{G}_O$ и $\tau \in \mathfrak{T}$.

Обозначим прямую, параллельную произвольной прямой u и проходящую через O, символом u_0. Тогда $u_0 u$ — перенос, и при $\alpha = u$ мы сразу получаем представление нужного вида: $\alpha = u_0(u_0 u)$.

Если α — собственное движение, то по теореме 16 § 3 $\alpha = ab$. Тогда

$$\alpha = a_0 \cdot (a_0 a) \cdot b_0 \cdot (b_0 b) = a_0 b_0 \cdot (a_0 a)^{b_0} (b_0 b)$$

является представлением требуемого вида. Если α — зеркальное движение, то по теоремам 16 и 20а) § 3 можно представить α в виде $\alpha = cab$, где $c \perp a, b$; при этом ab — перенос. Тогда

$$\alpha = c_0 \cdot (c_0 c)(ab)$$

является искомым представлением.

У группы $\mathfrak{G}$ есть подгруппа индекса 2, образованная всеми собственными движениями; обозначим ее через $\mathfrak{D}$. У $\mathfrak{G}_O$ есть подгруппа индекса 2 — это абелева группа $\mathfrak{D}_O$ поворотов вокруг O (т. е. произведений двух прямых, инцидентных O). К теореме 15 можно присовокупить: $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_O \mathfrak{T}$.

Так как $\mathfrak{G}_O$ и $\mathfrak{D}_O$ имеют с $\mathfrak{T}$ единственный общий элемент — единицу, то из равенств $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_O\mathfrak{T}$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_O\mathfrak{T}$ вытекают изоморфизмы $\mathfrak{G}/\mathfrak{T} \cong \mathfrak{G}_O$, $\mathfrak{D}/\mathfrak{T} \cong \mathfrak{D}_O$. В частности, отсюда следует, что «локальные» группы $\mathfrak{G}_O$ и $\mathfrak{D}_O$, отвечающие всем точкам O, изоморфны.

Задача. Каждое из двух следующих требований равносильно аксиоме R:

а) Если A, B, C — треугольник, угол C которого прямой, C' — средняя точка A и B, а B' — средняя точка A и C, то $(C', B') \perp (A, C)$.

б) Если A, B, C — три разные точки некоторой прямой, не инцидентной O, то точки O^A, O^B, O^C коллинеарны.

9. Абсолютная полярная инволюция в идеальной плоскости метрически-евклидовой группы движений. В силу теоремы 13 о прямоугольнике пучок перпендикуляров обладает свойствами, которые специфичны для метрически-евклидовой плоскости. Какова бы ни была точка O, всякий пучок перпендикуляров является пучком перпендикуляров к некоторой прямой, инцидентной O, т. е. множество всех пучков перпендикуляров является полярой для $\mathsf{G}(O)$:

Множество всех пучков перпендикуляров есть идеальная прямая (R).

Эту идеальную прямую — поляру всех собственных идеальных точек — мы назовем *бесконечно удаленной идеальной прямой*; ее идеальные точки — пучки перпендикуляров — *бесконечно удаленными идеальными точками.*

Если два пучка перпендикуляров содержат две взаимно перпендикулярные прямые, то по теореме 13 всякие две прямые этих двух пучков перпендикуляров взаимно перпендикулярны. Итак, существует «ортогональность пучков перпендикуляров». Два взаимно перпендикулярных пучка перпендикуляров мы называем взаимно *полярными* бесконечно удаленными идеальными точками. Полярность задает на бесконечно удаленной прямой эллиптическую инволюцию. Она является проективным отображением, ибо по теореме 5 § 5 ортогональная инволюция в собственном пучке $\mathsf{G}(O)$ будет проективным отображением, а взаимно перпендикулярные идеальные прямые, содержащие собственную идеальную точку $\mathsf{G}(O)$ (т. е. идеальные прямые $\mathsf{g}(a)$ и $\mathsf{g}(b)$, где $a \perp b$ и $a, b \,\mathrm{I}\, O$), пересекают бесконечно удаленную идеальную прямую в двух взаимно полярных идеальных точках. Следовательно:

Полярная инволюция в множестве бесконечно удаленных идеальных точек есть проективная эллиптическая инволюция на бесконечно удаленной идеальной прямой (R).

Эта инволюция определяет на идеальной плоскости особую проективную метрику. Всякая бесконечно удаленная идеальная точка является полюсом любой собственной идеальной прямой, которая содержит полярную ей бесконечно удаленную идеальную точку. Всякая осевая симметрия групповой плоскости индуцирует по теореме 10 осевую симметрию проективно-метрической идеальной плоскости, осью которой служит собственная идеальная прямая.

Таким образом, мы приходим к следующему результату:

Теорема 16. *Идеальная плоскость метрически-евклидовой группы движений является особой проективно-метрической плоскостью, роль абсолютной инволюции в которой играет полярная инволюция в множестве бесконечно удаленных идеальных точек. Движения метрически-евклидовой групповой плоскости индуцируют движения особой проективно-метрической идеальной плоскости.*

Переносы групповой плоскости индуцируют в идеальной плоскости проективные переносы в смысле п. 3 § 5, осью которых является бесконечно удаленная идеальная прямая. (Это можно получить из теорем 10′ и (II) в п. 3 § 5, если записать перенос групповой плоскости в виде произведения двух центральных симметрий групповой плоскости.) Второе утверждение теоремы 16 можно уточнить с помощью теорем 6 и 15:

Следствие. *Подгруппа группы движений особой проективно-метрической идеальной плоскости, индуцированная группой движений метрически-евклидовой групповой плоскости, является произведением*

1) *группы, порожденной всеми осевыми симметриями проективно-метрической идеальной плоскости, оси которых проходят через фиксированную собственную идеальную точку*;

2) *подгруппы группы всех проективных переносов, состоящей из переносов, осью которых служит бесконечно удаленная идеальная прямая.*

10. Абсолютный поляритет на идеальной плоскости метрически-неевклидовой группы движений. Предположим теперь, что имеет место аксиома $\sim$R неевклидовой метрики.

Мы хотим показать, что в этом случае на идеальной плоскости существует поляритет, для которого в согласии с прежними определениями

полюс собственной идеальной прямой $\mathsf{g}(a)$ — это идеальная точка $\mathsf{G}(a)$;

поляра собственной идеальной точки $\mathsf{G}(A)$ — это идеальная прямая $\mathsf{g}(A)$.

Мы следуем ходу мысли, идущему от П. Бергау.

Чтобы определить поляритет в общем случае, используем полуповороты прямых вокруг точки O, которую в дальнейшем будем считать фиксированной, и перейдем к коллинеациям, индуцированным этими полуповоротами на идеальной плоскости.

Вообще говоря, две ортогональные прямые групповой плоскости переходят при полуповороте в две неортогональные прямые; если коллинеация, индуцированная неким полуповоротом, переводит собственную идеальную прямую $\mathfrak{g}(a)$ в собственную идеальную прямую $\mathfrak{g}(b)$, то она, вообще говоря, не переводит пучок перпендикуляров $\mathsf{G}(a)$ в пучок перпендикуляров $\mathsf{G}(b)$. И все же между $\mathsf{G}(a)$ и $\mathsf{G}(b)$ есть общая зависимость, замеченная Й. Бочеком. Привлекая понятие отраженного полуповорота, ее можно выразить так: коллинеация, обратная той коллинеации, которая индуцируется отраженным полуповоротом, переводит $\mathsf{G}(a)$ в $\mathsf{G}(b)$.

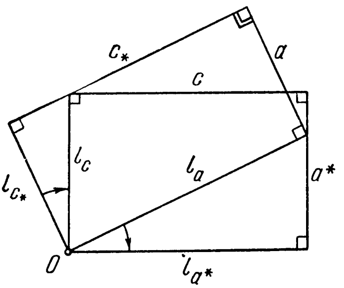


Рис. 91.

Мы хотим, как и при введении идеальных прямых, избежать употребления обратных полуповоротов, и поэтому выразим указанную зависимость так: *если коллинеация, индуцированная некоторым полуповоротом, переводит собственную идеальную прямую* $\mathfrak{g}(a)$ *в собственную идеальную прямую* $\mathfrak{g}(b)$, *то коллинеация, индуцированная отраженным полуповоротом, переводит пучок перпендикуляров* $\mathsf{G}(b)$ *в пучок перпендикуляров* $\mathsf{G}(a)$. Будем обозначать образ элемента при полуповороте звездочкой сверху, а при отраженном полуповороте — звездочкой снизу. Тогда можно наш закон выразить так:

Лемма. *Пусть* $*$ — *некоторый полуповорот вокруг* O. *Из* $a^*=b$ *следует* $\mathsf{G}(b)_*=\mathsf{G}(a)$, *т. е. «звездочки можно сокращать»*:

$$\mathsf{G}(a^*)_*=\mathsf{G}(a). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть c — произвольная прямая такая, что $c\perp a^*$ (рис. 91). Наше утверждение гласит: $c_*\perp a$.

Пусть сначала $a \mathrm{I} O$. Тогда $a^*_*=a$, и, значит, наше утверждение вытекает из (III). Далее, при $a=O$ утверждение тривиально.

Теперь пусть $a \not\mathrm{I} O$ и $a\neq O$; тогда и $c\neq O$. Однозначно определяемые перпендикуляры l_a, l_{c_*}, l_c, l_{a^*} и прямые a, c_*, c, a^* удовлетворяют условиям теоремы 25 § 3, ибо по определению полуповоротов * и $_*$ выполняются соотношения

$$l_a l_{a^*}=l_{c_*}l_c,\quad l_a\not\perp l_{a^*},\quad a l_a \mathrm{I} a^*,\quad c l_c \mathrm{I} c_*.$$

Из этой теоремы получаем требуемое утверждение.

Лемма подсказывает следующее

Определение. Пара a, A называется *парой поляра — полюс*, если существуют полуповорот * вокруг O и прямая a такие, что

$$\mathsf{a}^* = \mathsf{g}(a), \qquad \mathsf{G}(a)_* = \mathsf{A}. \tag{12}$$

Кроме того, пара $\mathsf{g}(O)$, $\mathsf{G}(O)$ также называется парой поляра — полюс.

Ясно, что по нашему определению всякая пара $\mathsf{g}(a)$, $\mathsf{G}(a)$ является парой поляра — полюс. Кроме того

(XXI) *Всякая пара* $\mathsf{g}(A)$, $\mathsf{G}(A)$ *является парой поляра — полюс.*

Предварительно сделаем, в виде дополнения к теореме 4, одно замечание о *превращении пучка перпендикуляров в собственный.* Пусть $\mathsf{G}(a)$ — пучок перпендикуляров, причем $a \not\mathrel{I} O$ и $a \neq O$ (рис. 92). Если b — произвольная прямая из $\mathsf{G}(a)$, отличная от l_a, то $b \neq O$ и по аксиоме $\sim\mathrm{R}$ произведение $l_a l_b$ не инволютивно. Полуповорот, задаваемый $l_a l_b$, переводит тогда пучок перпендикуляров $\mathsf{G}(a)$ в собственный пучок $\mathsf{G}(bl_b)$.

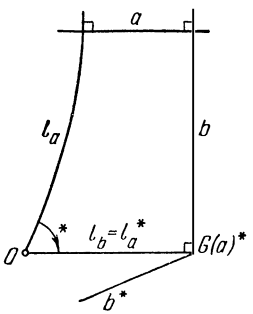


Рис. 92.

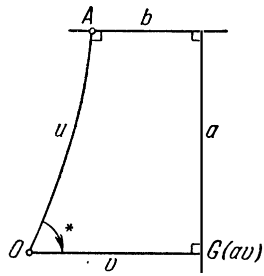


Рис. 93.

Доказательство (XXI). Если выполняется аксиома P, то точка A равна некоторой прямой a, а поэтому пара $\mathsf{g}(A)$, $\mathsf{G}(A)$ совпадает с парой $\mathsf{g}(a)$, $\mathsf{G}(a)$ (ср. п. 5).

Предположим теперь, что выполняется аксиома $\sim$P. При $A = O$ утверждение справедливо по определению; пусть поэтому $A \neq O$. Положим $(O, A) = u$, $uA = b$; пусть, далее, $a \neq u$ — перпендикуляр к b и $v = (O, a)$ (рис. 93). В силу аксиомы $\sim\mathrm{R}$ элемент uv группы не инволютивен, и потому определяет полуповорот, который мы условимся обозначать звездочкой сверху. В силу уже сделанного дополнения к теореме 4 $\mathsf{g}(A)^* = (\mathsf{G}(u), \mathsf{G}(b))^* = (\mathsf{G}(u)^*, \mathsf{G}(b)^*) = (\mathsf{G}(v), \mathsf{G}(av)) = \mathsf{g}(a)$ и $\mathsf{G}(a)_* = \mathsf{G}(A)$.

(XXII) (Однозначность.) а) *Всякая идеальная прямая имеет не более одного полюса.* б) *Всякая идеальная точка имеет не более одной поляры.*

Доказательство. Утверждения справедливы для $\mathsf{g}(O)$ и $\mathsf{G}(O)$, которые переходят в себя при всех коллинеациях, индуцированных полуповоротами вокруг O.

Пусть теперь a, A и b, B — пары поляра — полюс, где $\mathsf{a}, \mathsf{b} \neq \mathsf{g}(O)$ и $\mathsf{A}, \mathsf{B} \neq \mathsf{G}(O)$. По определению существуют такие полуповороты *, $^\circ$ и прямые a, b, что

$$\mathsf{a}^* = \mathsf{g}(a), \qquad \mathsf{G}(a)_* = \mathsf{A}, \tag{13}$$

$$\mathsf{b}^\circ = \mathsf{g}(b), \qquad \mathsf{G}(b)_\circ = \mathsf{B}. \tag{14}$$

Справедливость нашего утверждения получается последовательным применением обоих полуповоротов. Из (13) и (14) с учетом коммутативности полуповоротов и леммы вытекает

$$\mathsf{a}^{*\circ} = \mathsf{g}(a)^\circ = \mathsf{g}(a^\circ), \tag{15а}$$

$$\mathsf{G}(a^\circ)_{*\circ} = \mathsf{G}(a^\circ)_{\circ *} = \mathsf{G}(a)_* = \mathsf{A}, \tag{15б}$$

$$\mathsf{b}^{*\circ} = \mathsf{b}^{\circ *} = \mathsf{g}(b)^* = \mathsf{g}(b^*), \tag{16а}$$

$$\mathsf{G}(b^*)_{*\circ} = \mathsf{G}(b)_\circ = \mathsf{B}. \tag{16б}$$

Если теперь $\mathsf{a} = \mathsf{b}$, то по (15а) и (16а) $\mathsf{g}(a^\circ) = \mathsf{g}(b^*)$, т. е. $a^\circ = b^*$, т. е. $\mathsf{G}(a^\circ) = \mathsf{G}(b^*)$, т. е. по (15б) и (16б) $\mathsf{A} = \mathsf{B}$. Рассуждение можно обратить, ибо в силу аксиомы $\sim$R из $\mathsf{G}(a^\circ) = \mathsf{G}(b^*)$ следует также $a^\circ = b^*$.

Следствие. *Пусть* a, A — *пара поляра — полюс, а* * — *полуповорот вокруг* O. *Из* $\mathsf{a}^* = \mathsf{g}(a)$ *вытекает* $\mathsf{G}(a)_* = \mathsf{A}$, *и наоборот.*

(XXIII) *Пусть* * — *произвольный полуповорот вокруг* O, *и* $\mathsf{a}^* = \mathsf{b}$, $\mathsf{B}_* = \mathsf{A}$. *Если* a, A — *пара поляра — полюс, то* b, B — *тоже пара поляра — полюс, и наоборот.*

Доказательство. При $\mathsf{a} = \mathsf{g}(O)$ теорема тривиальна. Пусть поэтому $\mathsf{a} \neq \mathsf{g}(O)$. Тогда существуют такие полуповорот $^\circ$ и прямая a, что

$$\mathsf{a}^\circ = \mathsf{g}(a). \tag{17}$$

В силу $\mathsf{a}^* = \mathsf{b}$

$$\mathsf{b}^\circ = \mathsf{a}^{*\circ} = \mathsf{a}^{\circ *} = \mathsf{g}(a)^* = \mathsf{g}(a^*). \tag{18}$$

Поэтому если a, A — пара поляра — полюс, то из (17) и следствия из (XXII) вытекает, что $\mathsf{G}(a)_\circ = \mathsf{A}$, а значит, из $\mathsf{B}_* = \mathsf{A}$ получаем $\mathsf{G}(a)_\circ = \mathsf{G}(a^*)_{*\circ} = \mathsf{G}(a^*)_{\circ *} = \mathsf{B}_*$, т. е. $\mathsf{G}(a^*)_\circ = \mathsf{B}$; вместе с (18) это означает, что b, B — пара поляра — полюс.

Если b, B — пара поляра — полюс, то по (18) и следствию из (XXII) получаем: $\mathsf{G}(a^*)_\circ = \mathsf{B}$, откуда в силу $\mathsf{B}_* = \mathsf{A}$ вытекает, что $\mathsf{G}(a^*)_{\circ *} = \mathsf{G}(a^*)_{*\circ} = \mathsf{G}(a)_\circ = \mathsf{A}$, откуда по (17) заключаем, что a, A — пара поляра — полюс.

С помощью (XXII) получаем

Следствие. *Пусть* a, A *и* b, B — *пары поляра — полюс, а* * — *полуповорот вокруг* O. *Тогда* $\mathsf{a}^* = \mathsf{b}$ *влечет* $\mathsf{B}_* = \mathsf{A}$, *и наоборот.*

(XXIV) (Существование.) а) *У всякой идеальной прямой есть полюс.* б) *У всякой идеальной точки есть поляра.*

Доказательство. а) Полюсом $\mathsf{g}(O)$ служит $\mathsf{G}(O)$. Если $\mathsf{a} \neq \mathsf{g}(O)$, то существуют полуповорот * и прямая a такие, что $\mathsf{a}^* = \mathsf{g}(a)$. Тогда $\mathsf{G}(a)_*$ является полюсом a.

б) Идеальная точка $\mathsf{A} \in \mathsf{g}(O)$ — это пучок перпендикуляров $\mathsf{G}(a)$; ее поляра — это $\mathsf{g}(a)$. Если $\mathsf{A} \notin \mathsf{g}(O)$, то по теореме 4 существуют такие полуповорот * и точка A, что $\mathsf{A}^* = \mathsf{G}(A)$. Согласно (XXI) $\mathsf{g}(A)$ является полярой для $\mathsf{G}(A)$, а значит, $\mathsf{g}(A)_*$ по (XXIII) является полярой для A *).

(XXV) (Сохранение инцидентности.) *Пусть* a, A *и* b, B — *пары поляра — полюс. Из* $\mathsf{A} \in \mathsf{b}$ *вытекает* $\mathsf{B} \in \mathsf{a}$.

Доказательство. а) Пусть $\mathsf{A} \in \mathsf{g}(O)$. Тогда A — пучок перпендикуляров $\mathsf{G}(a)$, где $a \mathrm{I} O$, т. е. $\mathsf{a} = \mathsf{g}(a)$ (используем (XXII). Если $\mathsf{b} = \mathsf{g}(O)$, то утверждение справедливо. Если $\mathsf{b} \neq \mathsf{g}(O)$, то существуют такие полуповорот * и прямая b, что

$$\mathsf{b}^* = \mathsf{g}(b). \tag{19}$$

Тогда $\mathsf{A}^* = \mathsf{G}(a)^* = \mathsf{G}(a^*)$, ибо $a \mathrm{I} O$. Из $\mathsf{A} \in \mathsf{b}$ вытекает $\mathsf{A}^* \in \mathsf{b}^*$, т. е. $\mathsf{G}(a^*) \in \mathsf{g}(b)$, т. е. $b \perp a^*$, т. е. $a^* \perp b$, т. е. $\mathsf{G}(b) \in \mathsf{g}(a^*)$, т. е. $\mathsf{G}(b)_* \in \mathsf{g}(a^*)_*$, а так как $\underset{*}{a^*} = a$ (в силу $a \mathrm{I} O$) — а значит, $\mathsf{g}(a^*)_* = \mathsf{g}(\underset{*}{a^*}) = \mathsf{g}(a)$, — то

$$\mathsf{G}(b)_* \in \mathsf{g}(a). \tag{20}$$

Так как здесь b, B — пара поляра — полюс, то по (19) и следствию из (XXII) получаем $\mathsf{G}(b)_* = \mathsf{B}$. Кроме того, $\mathsf{g}(a) = \mathsf{a}$. Итак, (20) означает, что $\mathsf{B} \in \mathsf{a}$.

б) Пусть $\mathsf{A} \notin \mathsf{g}(O)$. Тогда существуют такие полуповорот * и точка A, что $\mathsf{A}^* = \mathsf{G}(A)$. Из $\mathsf{A} \in \mathsf{b}$ вытекает $\mathsf{A}^* \in \mathsf{b}^*$, т. е. $\mathsf{G}(A) \in \mathsf{b}^*$, а отсюда, согласно теореме 6, следует, что b^* является собственной идеальной прямой $\mathsf{g}(b)$, причем $b \mathrm{I} A$, т. е. $\mathsf{G}(b) \in \mathsf{g}(A)$, откуда

$$\mathsf{G}(b)_* \in \mathsf{g}(A)_*. \tag{21}$$

---

*) Заметим, что отраженный полуповорот, получаемый из полуповорота, обозначаемого звездочкой снизу, совпадает с полуповоротом, обозначаемым звездочкой сверху.

Как обычно, $\mathbf{G}(b)_* = \mathbf{B}$. Так как в силу (XXI) и по условию $\mathbf{g}(A)$, $\mathbf{G}(A)$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ — пары поляра — полюс, то в силу $\mathbf{A}^* = \mathbf{G}(A)$ и следствия из (XXIII) имеет место $\mathbf{g}(A)_* = \mathbf{a}$. Итак, (21) означает, что $\mathbf{B} \in \mathbf{a}$.

В силу результатов (XXII), (XXIV), (XXV) определенное нами соответствие поляра — полюс является инволютивной корреляцией, и можно сформулировать заключительную теорему:

Теорема 17. *В идеальной плоскости метрически-неевклидовой группы движений существует поляритет (определенный уже в идеальной плоскости произвольной группы движений), который сопоставляет собственным идеальным прямым их полюсы и собственным идеальным точкам — их поляры.*

Из общих свойств поляритета вытекает, что $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ являются парой поляра — полюс тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}$ соединяет полюсы двух разных собственных идеальных прямых, пересекающихся в $\mathbf{A}$. Таким образом, соответствие поляра — полюс можно описать исключительно в терминах «полюс собственной идеальной прямой» и «инцидентность в идеальной плоскости», не прибегая к полуповоротам. Поэтому, в частности, построенный нами поляритет не зависит от выбора центра полуповорота, и, следовательно, имеет место

Следствие 1. *В идеальной плоскости существует единственный поляритет, согласующийся с определением полюсов собственных идеальных прямых.*

На идеальной плоскости каждой идеальной точке $\mathbf{A}$, через которую проходит идеальная прямая $\mathbf{g}(O)$, отвечает поляра, получаемая, если соединить $\mathbf{A}$ с $\mathbf{G}(O)$ идеальной прямой $\mathbf{g}(b)$, а через $\mathbf{G}(O)$ провести идеальную прямую $\mathbf{g}(a)$, для которой $a \perp b$. Так как отображение $\mathbf{g}(b)$ на $\mathbf{g}(a)$ является, согласно теореме 5 § 5, проективным, то и отображение идеальной точки $\mathbf{g}(O)$ на ее поляру проективно. По лемме п. 4 § 5 справедливо

Следствие 2. *Описанный поляритет представляет собой проективное отображение.*

Этот поляритет определяет в идеальной плоскости обыкновенную проективную метрику. Каждая осевая симметрия групповой плоскости индуцирует по теореме 10 осевую симметрию проективно-метрической идеальной плоскости, осью которой является собственная идеальная прямая.

Итак, наш окончательный результат таков:

Теорема 18. *Идеальная плоскость метрически-неевклидовой группы движений является обыкновенной проективно-метрической плоскостью; ее абсолютный поляритет однозначно определяется ортогональностью на групповой плоскости. Движения метрически-неевклидовой групповой плоскости индуцируют дви-*

жения обыкновенной проективно-метрической идеальной плоскости.

В заключение сформулируем в терминах отображений идеальной плоскости тот закон, с помощью которого мы строили поляритет:

Если подвергнуть полуповорот идеальной плоскости внутреннему автоморфизму, порожденному абсолютным поляритетом, то получим коллинеацию, обратную отраженному полуповороту [(XXIII)].

Задачи. 1. В условиях справедливости аксиомы $\sim$R ортогональность прямых инвариантна относительно полуповоротов.

2. Можно доказать теорему существования (XXIV) непосредственно из определения соответствия поляра — полюс. Показать, не используя (XXI) — (XXIII) для доказательства б), что всякая идеальная точка $\mathsf{A} \neq \mathsf{G}(O)$ является образом некоторого пучка перпендикуляров, т. е. существуют такие полуповорот * вокруг $\mathsf{G}(O)$ и прямая a, что $\mathsf{G}(a)^* = \mathsf{A}$ ($\sim$R).

11. Основная теорема. В силу теорем 11, 16 и 18 для групп движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, задаваемых системой аксиом п. 2 § 3, справедливо утверждение:

Идеальная плоскость группы движений является проективно-метрической плоскостью.

В силу построения групповой плоскости и ее идеальной плоскости между $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ и группой движений проективно-метрической идеальной плоскости существует следующая связь:

Каждому элементу из $\mathfrak{S}$ отвечает прежде всего осевая симметрия групповой плоскости, которая по теореме 10 индуцирует осевую симметрию проективно-метрической плоскости (осью этой симметрии служит собственная идеальная прямая, а центром — ее полюс); таким образом, системе образующих $\mathfrak{S}$ отвечает некоторая подсистема определенной в п. 5 § 5 полной системы образующих группы движений проективно-метрической идеальной плоскости. Абстрактная группа $\mathfrak{G}$, представленная группой движений групповой плоскости, представляется той подгруппой группы движений проективно-метрической идеальной плоскости, которая порождается этой подсистемой.

Сведем воедино все полученные результаты по обоснованию плоской метрической геометрии:

Основная теорема. *Группы движений, удовлетворяющие системе аксиом* п. 2 § 3, *представляются в виде подгрупп групп движений проективно-метрических плоскостей.*

Короче, можно выразить основную теорему, сказав, что *группы движений метрических плоскостей — это подгруппы групп движений проективно-метрических плоскостей.*

Основная теорема позволяет изучать аксиоматически заданные группы движений и определяемые ими метрические плоскости современными алгебраическими методами аналитической геометрии, как это будет подробнее показано в гл. III.

Задача. Если в проективно-метрической плоскости E_{pm} задана метрическая подплоскость E_m и всякая прямая из E_{pm}, содержащая хотя бы одну точку из E_m, принадлежит E_m, то плоскость E_{pm} изоморфна проективно-метрической идеальной плоскости для плоскости E_m.

12. Евклидова и эллиптическая группы движений. Среди групп движений, удовлетворяющих нашей системе аксиом, особый интерес представляют те, которые можно представить как полные группы движений проективно-метрической плоскости.

Точнее, мы ставим следующий вопрос, примыкающий к характерному для п. 11 ходу мысли: *какие из аксиоматически заданных групп движений* ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$) *представляются группами движений проективно-метрической плоскости с сохранением образующих*? Это значит, что система образующих $\mathfrak{S}$ представляется полной системой образующих группы движений проективно-метрической плоскости.

Как видно из п. 11, необходимым и достаточным условием этого является следующее:
осями порождающих симметрий группы движений проективно-метрической идеальной плоскости служат все собственные идеальные прямые. (*)

Легко дать аксиоматическую характеристику тех групп движений, в идеальной плоскости которых выполнено это условие.

По аксиоме 1 всякие две точки и по теореме 2 § 3 всякая точка и прямая соединимы (в смысле определения из п. 1 § 3); в обоих случаях существует соединительная прямая. Напротив, две прямые — даже если потребовать выполнения аксиомы R или аксиомы $\sim$R, — вообще говоря, не соединимы. В качестве новой аксиомы введем требование, чтобы каждые две прямые были соединимы, т. е. имели бы общую точку или общий перпендикуляр. Вот эта *аксиома соединимости:*

Аксиома V*. *Для любых двух прямых a, b существует точка C или прямая c такие, что $a, b \mathbin{\rm I} C$ или $a, b \perp c$.*

Метрически-евклидову группу движений, в которой выполняется аксиома V*, мы назовем *евклидовой группой движений.* На евклидовой групповой плоскости, которая определяется такой группой, параллельные прямые (определяемые как прямые, идентичные в смысле перпендикуляров) оказываются единственными непересекающимися (коль скоро они различны) прямыми. Для любой прямой и точки вне ее существует единственная прямая, проходящая через эту точку и не пересекающая данной прямой (это евклидово требование равносильно аксиомам R и V*); выполняются аффинные аксиомы инцидентности, На идеальной плоскости евклидовой группы движений бесконечно удаленные идеальные точки (пучки перпендикуляров) представляют собой единственные несобственные идеальные точки, бесконечно удаленная идеальная прямая — единственная несобственная идеальная прямая. Тем самым выполняется условие (*) и верна

Теорема I. *Всякую евклидову группу движений можно представить в виде группы движений некоторой особой проективно-метрической плоскости с сохранением образующих.*

Далее, эллиптическая группа движений удовлетворяет условию (*); на эллиптической групповой плоскости выполняются проективные аксиомы инцидентности, а на идеальной плоскости все идеальные точки и идеальные прямые будут собственными. Поэтому верна

Теорема II. *Всякую эллиптическую группу движений можно представить в виде группы движений некоторой эллиптической проективно-метрической плоскости с сохранением образующих.*

В этих теоремах, полученных нами здесь как частные случаи общих результатов этого параграфа, выражены основные результаты, касающиеся обоснования заданных нашими аксиомами евклидовых и эллиптических геометрий. Но очевидно, что эти специальные теоремы можно получить гораздо проще, чем получалась основная теорема, ибо в эллиптическом случае проблема распространения отпадает, а в евклидовом она не представляет труда. В частности, для доказательства обеих специальных теорем не нужны полуповороты.

Евклидова и эллиптическая группы движений — это единственные группы движений, удовлетворяющие нашей системе аксиом и обладающие уточненным ранее свойством полноты. В самом деле, в метрически-евклидовой группе движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ условие (*) требует, чтобы на ее идеальной плоскости бесконечно удаленная идеальная прямая была единственной несобственной идеальной прямой; значит, $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ обязательно евклидова. Для метрически-неевклидовой группы движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ условие (*) означает, что на ее идеальной плоскости полярный треугольник должен иметь собственные стороны; тогда $\mathfrak{S}$ должна содержать тройку попарно перпендикулярных прямых, т. е. $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ эллиптическая.

Теперь мы хотим еще показать, что конечная группа движений, удовлетворяющая нашей системе аксиом, всегда обладает уточненным ранее свойством полноты. Прежде всего из теоремы 16 § 3 видно, что если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — группа движений, удовлетворяющая нашей системе аксиом, то $\mathfrak{G}$ конечна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}$ конечна. Далее, легко доказывается

Теорема 19. *Конечная группа движений, удовлетворяющая нашей системе аксиом, обязательно является евклидовой или эллиптической.*

Доказательство. Если дана группа движений, которая не является ни евклидовой, ни эллиптической, то существуют прямые a, b, которые не имеют общей точки и не идентичны в смысле перпендикуляров. Тогда на a есть точка O такая, что перпендикуляр $(O, b)=l_b$ не перпендикулярен a. Элементу al_b группы отвечает полуповорот прямых вокруг точки O. При этом полуповороте прямая b не имеет прообраза. Таким образом, этот полуповорот, являющийся взаимно однозначным отображением $\mathfrak{S}$ в себя, является взаимно однозначным отображением $\mathfrak{S}$ на собственное подмножество. Следовательно, $\mathfrak{S}$ бесконечна.

Теорему 19 можно усилить. Имеет место

Теорема 20. *Не существует конечной эллиптической группы движений.*

Прежде всего сделаем одно общее замечание. На всякой метрической плоскости множество точек распадается на *классы точек, переводимых друг в друга движением,* ибо отношение «существует движение γ такое, что $A^\gamma=B$» является отношением эквивалентности на множестве точек. У двух переводимых друг в друга точек есть средняя точка, и, значит, они могут быть переведены друг в друга центральной симметрией. Поэтому класс $K(A)$ точек, которые можно перевести в A движениями, получается, если взять все точки плоскости, которые центрально симметричны A относительно какого-нибудь центра симметрии. В неэллиптическом случае две такие точки A^C и $A^{C'}$ всегда различны при $C\neq C'$. В эллиптическом случае некоторые A^C и $A^{C'}$ при $C\neq C'$ могут совпасть: $A^C=A^{C'}=A$ тогда и только тогда, когда либо C, C' обе полярны A, либо C, C' — полярная пара точек, содержащая точку A, а $A^C=A^{C'}\neq A$ тогда и только тогда, когда C, C', A — три различные коллинеарные точки и C, C' — полярная пара точек. Поэтому в эллиптической плоскости $K(A)$ содержит ровно столько отличных от A точек, сколько точек получается из A при каждой симметрии относительно C, C', которые коллинеарны A, полярны друг другу и отличны от A. Все это следует из теорем п. 10 § 3.

Рассмотрение классов точек, переводимых друг в друга движениями, как заметил Карцель, дает нам

Доказательство теоремы 20. Рассмотрим конечную эллиптическую плоскость. Это плоскость с конечным числом точек и прямых, для которых выполняются проективные аксиомы инцидентности. На каждой прямой лежит одно и то же число точек, которое мы обозначим через $n+1$ $(n>1)$. Тогда через каждую точку проходит точно $n+1$ прямых, а общее число как точек, так и прямых равно n^2+n+1 *).

Подсчитаем точки из класса $K(A)$. На всякой прямой, проходящей через A, число отличных от A полярных пар C, C' равно $\frac{n-1}{2}$. Таким образом, на плоскости общее число коллинеарных A полярных пар C, C' $(C, C' \neq A)$ равно $\frac{(n+1)(n-1)}{2} = \frac{n^2-1}{2}$. Тогда в силу замечания $K(A)$ содержит точно $1+\frac{n^2-1}{2}=\frac{n^2+1}{2}$ точек **).

Таким образом, множество точек плоскости распадается на классы по $\frac{n^2+1}{2}$ точек в каждом. Следовательно, общее число точек делится на $\frac{n^2+1}{2}$. Но

$$n^2+n+1 : \frac{n^2+1}{2} = 2+\frac{2n}{n^2+1}$$

при $n>1$ никогда не является целым числом. Допущение существования конечной эллиптической плоскости привело нас, таким образом, к противоречию.

Из теорем 19 и 20 получается

Теорема III. *Конечная группа движений, удовлетворяющая системе аксиом* п. 2 § 3, *обязательно евклидова.*

В заключение сделаем замечание о метрически-неевклидовых группах движений, в которых выполняется аксиома V*. Эта аксиома выполняется в эллиптической группе движений. Но в метрически-неевклидовой группе движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, в которой выполняется аксиома V*, аксиома P не обязана выполняться. Это значит, что возможна геометрия, в которой две

---

*) Если одна прямая a содержит $n+1$ точек, то через каждую не принадлежащую этой прямой точку B проходят $n+1$ прямых (соединяющих B со всеми точками a); отсюда без труда устанавливается, что каждая прямая c содержит $n+1$ точек (ибо вне c и вне a найдется точка, через которую, как мы уже знаем, проходит $n+1$ прямых); наконец, мы можем теперь установить, что через каждую точку (включая точки прямой a) проходят $n+1$ прямых (ибо вне этой точки есть прямая, содержащая $n+1$ точку). Далее, через каждую из $n+1$ точек прямой a проходит n отличных от a прямых и все эти прямые различны, — таким образом, вместе с a мы будем иметь

$$(n+1)n+1=n^2+n+1$$

прямых (и столько же точек). *(Прим. ред.)*

**) Другая возможность подсчитать искомое число точек класса $K(A)$ открывается тем, что это число равно индексу нормализатора точки A в эллиптической группе движений, а поэтому может быть выражено через отношение порядков двух этих групп различные прямые всегда имеют либо общую точку, либо единственный общий перпендикуляр, но не общую точку и общий перпендикуляр одновременно (это предположение равносильно аксиомам $\sim$R, V*, $\sim$P). Однако тогда можно так расширить систему $\mathfrak{S}$ образующих, чтобы выполнялась аксиома P:

Теорема 21. *Если* ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$) — *метрически-неевклидова группа движений, в которой выполняется аксиома* V*, *а* $\mathfrak{S}'$ — *множество инволютивных элементов из* $\mathfrak{G}$, *то* ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}'$) — *эллиптическая группа движений.*

Группу движений ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$), удовлетворяющую системе аксиом п. 2 § 3 и аксиомам $\sim$R, V*, $\sim$P, назовем *подэллиптической группой движений* *). Подэллиптическую группу движений нельзя представить группой движений проективно-метрической плоскости с сохранением образующих.

Литература к § 6. Йельмслев [1], [2], Шур [1], Шмидт [1], Бочек [1], Лингенберг [1] (в последней работе дано, в частности, другое доказательство теоремы 17).

Замечание о свободной подвижности

Вообще говоря, группа движений групповой плоскости, введенной в п. 3 § 3 (метрической плоскости), не транзитивна ни на множестве точек, ни на множестве прямых. Классическое требование, чтобы любые две точки, как и любые две прямые, можно было бы совместить движением, в нашей системе аксиом явилось бы очень сильной дополнительной аксиомой, значение которой мы вкратце теперь обсудим. В дальнейшем будем рассматривать произвольную группу движений, удовлетворяющую системе аксиом п. 2 § 3.

Сначала заметим, что если даны две точки и движение, переводящее одну из них в другую, то существует *собственное* движение, осуществляющее это; аналогично обстоит дело и для двух прямых. С другой стороны, можно задаться вопросом, симметричны ли две взаимно переводимые друг в друга движением точки (прямые), т. е. есть ли у них средний элемент. Докажем, что справедлива

Теорема 1. а) *Две переводимые друг в друга точки имеют среднюю точку.* б) *Две пересекающиеся переводимые друг в друга прямые имеют биссектрису.*

Доказательство а) проведено в теореме 28 § 3.

---

*) В оригинале «полуэллиптическая» (halbelliptische), но термин «полуэллиптическая геометрия» был использован еще В. Бляшке для обозначения совсем другого объекта (ср., например, Яглом, Розенфельд и Ясинская [1]). (*Прим. перев.*)

Доказательство б). Пусть даны две прямые $a \neq b$, имеющие общую точку C, и такое движение γ, что $a^{\gamma}=b$ (рис. 94). Можно считать движение γ собственным. Сначала покажем, что в этом случае существует собственное движение, которое переводит a в b и оставляет C на месте. Если $C^{\gamma}=C$, то нам доказывать нечего; поэтому пусть $C^{\gamma} \neq C$. Так как $C \,\mathrm{I}\, a$, то $C^{\gamma} \,\mathrm{I}\, b$, т. е. $(C, C^{\gamma})=b$. По а) у C, C^{γ} есть средняя точка M. Тогда γM обладает требуемым свойством. В самом деле, $C^{\gamma M}=C$ и $(C, C^{\gamma})^{M}=(C, C^{\gamma})$, т. е. $b^{M}=b$, а значит, $a^{\gamma M}=b^{M}=b$.

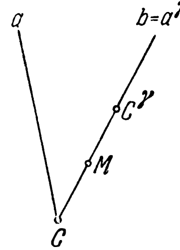


Рис. 94.

Итак, у нас имеется собственное движение uv, где $a^{uv}=b$, $C^{uv}=C$. Если uv не инволютивно, то из $C^{uv}=C$ по лемме о неподвижном элементе (п. 10 § 3) вытекает, что $u, v \,\mathrm{I}\, C$. Тогда auv — прямая m, где $m \,\mathrm{I}\, C$ и $a^{m}=a^{auv}=a^{uv}=b$, т. е. m — биссектриса a, b. Если uv инволютивно, т. е. $uv=M$, где $a^{M}=b$, $C^{M}=C$, то MC тоже инволютивно, ибо $M \neq C$ (ведь $a^{C}=a \neq b$). Таким образом, этот случай возможен только при условии выполнимости аксиомы Р (теорема 23 § 3). Но в этом случае существует прямая $m=M$, а для нее $a^{m}=b$, $C \,\mathrm{I}\, m$, т. е. она является биссектрисой a, b.

Условимся теперь говорить, что группа движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ удовлетворяющая системе аксиом п. 2 § 3, обладает *свободной подвижностью*, если в ее групповой плоскости можно всякую инцидентную пару (точка, прямая) движением перевести в любую инцидентную пару (точка, прямая). Это значит, что по данным парам A, a и B, b, где $A \,\mathrm{I}\, a$ и $B \,\mathrm{I}\, b$, найдется $\gamma \in \mathfrak{G}$ такое, что $A^{\gamma}=B$ и $a^{\gamma}=b$. Если существует такое движение γ, то в силу жесткости движений (теорема 26 § 3) существует точно четыре движения, удовлетворяющих поставленным условиям.

Свободную подвижность можно определить равносильным образом, потребовав, чтобы всякую упорядоченную пару ортогональных прямых можно было перевести некоторым движением в любую упорядоченную пару ортогональных прямых.

Теорема 2. *Свободная подвижность равносильна любому из следующих трех требований:*

1) *всякую точку можно перевести движением в любую точку, и всякую прямую — в любую прямую;*

2) *всякие две точки имеют среднюю точку, а всякие две пересекающиеся прямые — биссектрису* (можно делить пополам все отрезки и углы);

3) *всякое собственное движение, обладающее неподвижной прямой или неподвижной точкой, является квадратом.*

Доказательство. Из наличия свободной подвижности тривиальным образом следует 1), а из 1) следует 2) с помощью теоремы 1. Обратно, из 2) следует свободная подвижность: если даны A, a и B, b, для которых $A \mathrel{I} a$ и $B \mathrel{I} b$, то по 2) существует средняя точка M для A, B, а в силу того, что a^M, $b \mathrel{I} B$, существует биссектриса m для a^M и b, инцидентная B. Тогда $A^{Mm}=B$ и $a^{Mm}=b$. Поэтому свободная подвижность, 1) и 2) попарно эквивалентны. Далее, мы докажем эквивалентность 2) и 3), используя лемму о неподвижных элементах (п. 10 § 3), следующую лемму:

Лемма. *Две прямые a, b имеют среднюю линию тогда и только тогда, когда ab является квадратом,*
и то обстоятельство, что две разные точки имеют середину тогда и только тогда, когда перпендикуляры, восставленные в этих точках к соединяющей их прямой, имеют среднюю линию.

Доказательство леммы. Если есть прямая m, для которой $a^m=b$, то $ab=aa^m=(am)^2$. Обратно, пусть $ab \neq 1$ — квадрат, тогда ab — квадрат собственного движения, т. е. $ab=(uv)^2$. Из равенства $ab=uu^v=v^uv$ получаем, что прямые a, b, u, v принадлежат одному пучку. Если обозначить auv через m, то $ab=(am)^2=aa^m$, т. е. $b=a^m$.

Теорема 3. *Каждое из двух следующих требований:*

1′) *всякие две прямые имеют среднюю линию (всякий элемент из $\mathfrak{S}$ можно подходящим внутренним автоморфизмом перевести во всякий элемент из $\mathfrak{S}$);*

2′) *всякое собственное движение является квадратом эквивалентно другому. Из этих требований вытекает свободная подвижность.*

Доказательство. Эквивалентность 1′) и 2′) получается из леммы. Из 2′) следует 3).

Задачи. **1.** Требования 1′) и 2′) сильнее, нежели требование свободной подвижности. Привести пример.

2. Следующие три требования равносильны и слабее, нежели требование свободной подвижности (пример тому встретится в п. 6 § 18):

1″) *любые две прямые можно перевести движением одну в другую ($\mathfrak{S}$ — это класс сопряженных груповых элементов);*

2″) *всякие две пересекающиеся прямые имеют биссектрису (всякий поворот вокруг точки является квадратом);*

3″) *всякое собственное движение является произведением не более чем двух квадратов.*

Позднее мы исследуем значение требования свободной подвижности для евклидовой, эллиптической и гиперболической групп движений. Выяснится, что при принятии постулатов, посредством которых определяются эти группы движений, каждое из восьми сформулированных здесь условий 1), 2), 3), 1′), 2′), 1″), 2″), 3″) равносильно свободной подвижности.

§ 7. О законе транзитивности для произвольных инволютивных элементов

Различие между осевыми и центральными симметриями в метрически-неевклидовых группах движений не столь велико, как в метрически-евклидовых группах. Это связано с тем, что в метрически-неевклидовых группах движений существуют законы, которым подчиняется основное отношение ($|$) п. 1 § 3 для произвольных инволютивных элементов. Наиболее плодотворным из этих законов является закон транзитивности, который к тому же имеет место для групп движений всех обыкновенных проективно-метрических плоскостей (§ 9). Здесь мы поясним теоретико-групповой характер законов, касающихся инволютивных элементов группы, и извлечем некоторые теоретико-групповые следствия, которые частично основываются только на транзитивности, а частично также и на других законах.

1. Законы, выполняющиеся в метрически-неевклидовых группах движений для произвольных инволютивных элементов. В каждой группе движений, удовлетворяющей системе аксиом п. 2 § 3, имеют место, как было установлено теоремой 24 § 3, следующие законы, касающиеся произвольных инволютивных элементов:

E′. *Если* $\sigma_1 | \sigma_2$, $\sigma_2 | \sigma_3$ *и* $\sigma_3 | \sigma_1$, *то* $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$.

S. *Если* σ_1, σ_2, $\sigma_3 | \sigma$, *то* $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ *инволютивно*.

S′. *Если* σ_1, σ_2, $\sigma_3 | \sigma$ *и* $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ *инволютивно, то* $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 | \sigma$.

Если выполняется аксиома $\sim$R, то имеют место еще однозначность соединения (E), обращение теоремы о трех симметриях (U) и закон транзитивности (T):

Теорема 1. *Во всякой метрически-неевклидовой группе движений для любых инволютивных элементов справедливы следующие законы:*

E. *Из* σ_1, $\sigma_2 | \sigma_3$, σ_4 *следует* $\sigma_1 = \sigma_2$ *или* $\sigma_3 = \sigma_4$.

U. *Если* $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\sigma_1, \sigma_2 | \sigma$ *и* $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ *инволютивно, то* $\sigma_3 | \sigma$.

T. *Если* $\sigma_1 \neq \sigma_2$ *и* $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_1\sigma_2\sigma_4$ *инволютивны, то* $\sigma_1\sigma_3\sigma_4$ *инволютивно.*

Доказательство. Все три соотношения выполняются, когда σ_i и σ — прямые: E в силу аксиомы $\sim$R; U — в силу обращения аксиомы 4, T — в силу теоремы 6 § 4. Поэтому если выполняется аксиома P, то эти законы всегда имеют место*).

Примем теперь аксиому $\sim$P. В этом случае нам придется рассмотреть еще следующие варианты указанных законов.

Для E: σ_1, σ_2 — две точки или же точка и прямая. В обоих случаях σ_3, σ_4 — прямые по теореме 23 § 3. В первом случае E

*) Ибо в случае выполняемости аксиомы P (эллиптический случай) каждая точка равна некоторой прямой. *(Прим. ред.)*

имеет место ввиду единственности соединительной прямой (аксиома 2), а во втором — ввиду однозначности перпендикуляра (теорема 3 § 3).

Для U: $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ — точка. Если при этом $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — две прямые и точка, то по теореме 12 § 3 существует прямая g, для которой $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | g$, а тогда по E имеем $g = \sigma$, т. е. $\sigma_3 | \sigma$. Если $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — три точки, то по теореме 23 § 3 σ — прямая и, как отмечалось в теореме 14 § 6, U имеет место. Если $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ — прямая, то U выполняется по теореме 24 в) § 3.

Для T: Если σ_1, σ_2 соединимы, т. е. существует инволютивный элемент σ, для которого $\sigma_1, \sigma_2 | \sigma$, то по условию и в силу U имеем $\sigma_3, \sigma_4 | \sigma$, а значит, в соответствии с S выполняется требуемое. Если σ_1 и σ_2 несоединимы, то они обязательно прямые, ибо две точки — так же как точка и прямая, — всегда соединимы по аксиоме 1 и теореме 2 § 3. Тогда и σ_3 — прямая, ибо в противном случае множители инволютивного произведения $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ были бы соединимы согласно теореме 12 § 3. Таким же образом видим, что σ_4 — прямая. А для прямых T, как уже отмечалось выше, всегда выполняется.

Все названные законы являются чисто теоретико-групповыми следствиями транзитивности T, т. е. если для инволютивных элементов некоторой группы выполняется закон T, то выполняются также E′, S, S′, E, U. Точнее, имеют место такие зависимости:

Теорема 2. *В любой группе: из* T *следует* S *и* U; *из* U *следует* E; *из* E *следует* E′; *из* E′ *следует* S′, *и наоборот; из* S *следует* S′.

Доказательство. а) В S и в U входит условие о том что $\sigma_1\sigma$ является инволютивным элементом σ_1', т. е. σ представимо в виде $\sigma = \sigma_1\sigma_1'$. Если воспользоваться записью $\sigma = \sigma_1\sigma_1'$, то S и U гласят:

Если $\sigma_1\sigma_1'$, $\sigma_1\sigma_1'\sigma_2$, $\sigma_1\sigma_1'\sigma_3$ инволютивны, то $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ инволютивно.

Если $\sigma_1 \neq \sigma_2$ и $\sigma_1\sigma_1'$, $\sigma_1\sigma_1'\sigma_2$, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ инволютивны, то $\sigma_1\sigma_1'\sigma_3$ инволютивно.

Но это — частные случаи T.

б) Пусть $\sigma_1 \neq \sigma_2$ и $\sigma_1, \sigma_2 | \sigma_3, \sigma_4$. Тогда $\sigma_1\sigma_4$, $\sigma_2\sigma_4$ инволютивны. Так как $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\sigma_1, \sigma_2 | \sigma_3$ и $\sigma_1\sigma_2(\sigma_2\sigma_4)$ инволютивно, то по U имеет место $\sigma_2\sigma_4 | \sigma_3$, т. е. $\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ инволютивно. Если бы теперь было $\sigma_3 \neq \sigma_4$, то, так как $\sigma_3, \sigma_4 | \sigma_2$ и $\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ инволютивно, из U вытекало бы, что $\sigma_2 | \sigma_2$; но $\sigma_2\sigma_2 = 1$ неинволютивно.

в) Если $\sigma_1\sigma_2$ инволютивно, то, тривиальным образом, $\sigma_1\sigma_2$ является соединением σ_1 и σ_2. Если, как того требует посылка в E′, σ_3 также является соединением σ_1 и σ_2, то по E $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$. Таким образом, E′ — частный случай E и означает, что инволютивное произведение двух инволютивных элементов является единственным их соединением.

г) Входящие в E′ элементы σ_1, σ_2, σ_3 по условию коммутируют, откуда $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_3\sigma_2\sigma_1$ и утверждение E′ равносильно такому: $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ не инволютивно. Отрицание E′ поэтому можно выразить так:

$\sim$E′: *существуют* σ_1, σ_2, σ_3, *для которых* $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_3\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ *инволютивны.*

Дополнение S′ к S равносильно следующему утверждению: если σ_1, σ_2, $\sigma_3 | \sigma$ и $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ инволютивно, то $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \neq \sigma$ (ср. доказательство теоремы 7 § 3). Поэтому отрицание S′ можно сформулировать так:

$\sim$ S′: *существуют* σ_1, σ_2, σ_3, *для которых* $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ *инволютивно и* σ_1, σ_2, $\sigma_3 | \sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

Очевидно, что $\sim$E′ равносильно $\sim$ S′, т. е. E′ равносильно S′.

д) Если имеет место $\sim$E′, то $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_3\sigma_1 | \sigma_3$ и $\sigma_1\sigma_2 \times \sigma_2\sigma_3 \cdot \sigma_3\sigma_1 = 1$, т. е. нарушается S. Значит, из $\sim$E′ следует $\sim$S, а в силу г) из $\sim$S′ следует $\sim$S, откуда заключаем, что из S следует S′.

Закон соединимости V:

V. *Для всяких* σ_1 *и* σ_2 *найдется* σ *такое, что* σ_1, $\sigma_2 | \sigma$,

требующий, чтобы всякие два инволютивных элемента были соединимы, для групп движений, удовлетворяющих нашей системе аксиом, равносилен аксиоме V* (п. 12 § 6). Как и V*, в метрически-неевклидовых группах движений V, вообще говоря, места не имеет.

Из T не следует V; также из V не следует T (и ни одно из названных в теореме 2 следствий T).

Задачи. 1. В группе, порожденной симметриями относительно трех попарно ортогональных плоскостей обычного евклидова пространства, имеет место V, но ни один из законов E′, S, S′, E, U, T не выполняется.

2. Закон E′ имеет место для произвольных инволютивных элементов группы тогда и только тогда, когда группа обладает следующим свойством:

Все неодноэлементные подгруппы, каждый отличный от единицы элемент которых инволютивен, — либо циклические порядка 2, либо являются четырехэлементными группами (Vierergruppe) Клейна.

3. Частные случаи закона транзитивности T, которые не выполняются в метрически-евклидовых группах движений, таковы:

Если $a \neq b$ *и* abC, abD *инволютивны, то* ACD *инволютивно.*

Если $A \neq B$ *и* ABC, ABd *инволютивны, то* ACd *инволютивно.*

4. Для инволютивных элементов произвольной группы верно следующее: справедливость любых трех из равенств $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2 = 1$, $(\sigma_1\sigma_2\sigma_4)^2 = 1$, $(\sigma_1\sigma_3\sigma_4)^2 = 1$, $(\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^2 = 1$ влечет за собой справедливость четвертого.

2. Аксиоматическая характеристика эллиптической группы движений. В группе, в которой всякие два инволютивных элемента соединимы, связи между законами, относящимися к произвольным инволютивным элементам, особенно просты. Особый интерес представляют эти связи в эллиптической группе движений. Согласно теореме 22 § 3 в этой группе каждый инволютивный элемент является образующей (прямой). По этой причине мы будем здесь обозначать произвольные инволютивные элементы не через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, как в первом пункте этого параграфа, а через $a, b, \ldots$

Эллиптическая группа движений была определена в п. 8 § 3 как группа движений в смысле системы аксиом п. 2 § 3, удовлетворяющая дополнительной аксиоме P. Поскольку в такой группе центральные и осевые симметрии совпадают и система образующих состоит из всех инволютивных элементов (теорема 22 § 3; ср. замечание в конце этого пункта), здесь система аксиом, дополненная аксиомой P, может быть упрощена. Упрощенная система аксиом эллиптической группы движений такова:

Основное допущение. *Дана группа $\mathfrak{G}$, порожденная своими инволютивными элементами.*

Инволютивные элементы группы $\mathfrak{G}$ будут обозначаться малыми латинскими буквами.

Аксиома V. *Для всяких a и b найдется точно одно c такое, что $a, b \mid c$.*

Аксиома E. *Из $a, b \mid c, d$ вытекает $a=b$ или $c=d$.*

Аксиома S. *Если $a, b, c \mid g$, то abc инволютивно.*

Аксиома D. *Найдутся g, h, j такие, что $g \mid h$ и ни $j \mid g$, ни $j \mid h$, ни $j \mid gh$ не выполняется.*

Непосредственно из основного допущения, V и S можно вывести «биинволютивность» эллиптической группы движений:

Теорема 3. *Во всякой группе, в которой выполняются V и S, каждое произведение инволютивных элементов можно представить в виде произведения двух инволютивных элементов.*

Доказательство. Очевидно, это утверждение справедливо для любого числа n множителей, если оно справедливо для $n=1$ и $n=3$. Рассмотрим поэтому произведение abc, не предполагая, что все множители здесь различны. По V существует u такое, что $a, b \mid u$, и v такое, что $u, c \mid v$ (рис. 95). Тогда vc — а по S и abv — инволютивно и $abc = abv \cdot vc$.

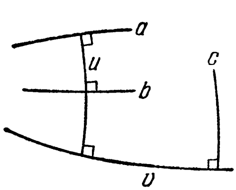


Рис. 95.

В рассматриваемой системе аксиом можно заменить однозначность E соединения на обращение U теоремы S о трех симметриях; следующим шагом на пути упрощения системы аксиом будет замена S и U на транзитивность T. Для этого установим, что имеет место

Теорема 4. *Во всякой группе, в которой выполняется V, следующие три утверждения равносильны:*

1) E *и* S; 2) S *и* U; 3) T.

Доказательство. а) Из V, E, S вытекает U. Это доказываем, как в теореме 8 § 3, используя то, что в силу теоремы 2 E влечет S′. Так как и обратно по теореме 2 E вытекает из U, то 1) и 2) равносильны.

б) Из V, S, U следует T, как в доказательстве теоремы 1. Так как S и U вытекают из T в силу теоремы 2, то 2) и 3) равносильны.

Далее покажем, что имеет место

Теорема 5. *Если группа содержит хотя бы один инволютивный элемент и в ней выполняются* V *и* E, *то* D *равносильно утверждению:*

Ни один инволютивный элемент не коммутирует со всяким инволютивным элементом. (*)

Доказательство. а) Из E′ и D вытекает (*), как в п. 4 § 3, где было показано, что ни одна прямая не коммутирует со всеми прямыми.

б) Из V, E, (*) и существования инволютивного элемента a вытекает D:

Из (*) вытекает существование инволютивного элемента $b \neq a$, где $b \nmid a$. По V существует c такое, что $a, b \mid c$. Тогда по (*) должен существовать еще один инволютивный элемент $d \neq c$, где $d \nmid c$ (рис. 96). Тогда из E следует:

Если $d \mid a$ *или* $d \mid ac$, *то* $d \nmid c$ *и* $d \nmid bc$.

В самом деле, $d \neq c$ и $c \mid a, b, ac, bc$. Из $d \mid a, b$ вытекало бы вследствие E, что $a = b$; из $d \mid a, bc$ вытекало бы $a = bc$, т. е. $a \mid b$; из $d \mid ac, b$ вытекало бы $ac = b$, т. е. $a \mid b$; из $d \mid ac, bc$ вытекало бы $ac = bc$, т. е. $a = b$.

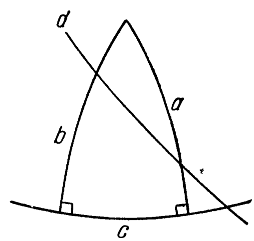


Рис. 96.

Итак, если $d \mid a$ или $d \mid ac$, то D выполняется для прямых b, c, d. Если же ни $d \mid a$, ни $d \mid ac$ не имеют места, то за прямые аксиомы D можно взять a, c, d.

Из теорем 4 и 5 видно, что эллиптическую группу движений можно задать такой особо простой системой аксиом:

Основное допущение. *Дана группа* $\mathfrak{G}$, *порождаемая своими инволютивными элементами, причем ни один инволютивный элемент не коммутирует со всеми остальными инволютивными элементами.*

Эти инволютивные элементы обозначаются малыми латинскими буквами.

Аксиома T. *Если* $a \neq b$ *и* abc, abd *инволютивны, то* acd *инволютивно.*

Аксиома V. *Для всяких a и b найдется такое c, что $a, b|c$.*

Включенное в основное допущение требование (*) означает, что центр группы $\mathfrak{G}$ не содержит инволютивных элементов; поскольку по теореме 3 $\mathfrak{G}$ биинволютивна, отсюда следует, что центр $\mathfrak{G}$ состоит из одного единичного элемента (ср. замечание к теореме 18 § 3).

Замечание. Пусть опять дана пара ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$), удовлетворяющая системе аксиом п. 2 § 3 и аксиоме P. Покажем, как непосредственно из этой системы аксиом вытекает теорема 22 из § 3, на которой основывается переход к системе аксиом, принятой в начале этого пункта. Через a, b, .. опять-таки обозначаем элементы из $\mathfrak{S}$, т. е. прямые.

1) *Всякая точка A равна некоторой прямой.* Пусть u, v, w — существующий по аксиоме P полярный трехсторонник ($uvw=1$). Тогда uv — точка, и по аксиоме 1 существует такая прямая b, что $b|uv$, A (рис. 97). Тогда $w|b$, и по аксиоме 3 buv, bA — прямые (ср. теорему 2 § 3, случай 1)), причем buv, $bA|b$. Поэтому по аксиоме 4 правая часть тождества $A=buv\cdot w\cdot bA$ — прямая.

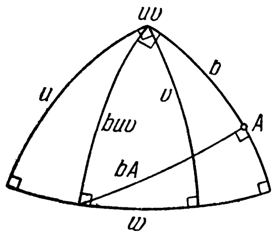


Рис. 97.

2) *Всякая прямая a равна некоторой точке.* Существует прямая b, где $b|a$ (по аксиоме D и теореме 2 § 3). Тогда ba — точка, а по 1) существует прямая c, где $c=ba$. Значит, $a=bc$, и так как a инволютивна, то bc инволютивно, т. е. является точкой.

3) *Всякий элемент из $\mathfrak{G}$ можно представить в виде произведения двух прямых.* В силу аксиомы 1 и свойства 2) выполняется аксиома V для прямых. По аксиоме 4 для прямых выполняется аксиома S. Из доказательства теоремы 3 видно, что всякое произведение трех прямых равно поэтому произведению прямой и точки, а значит, по 1) — произведению двух прямых. Отсюда вытекает требуемое.

4) *Всякий инволютивный элемент группы $\mathfrak{G}$ является прямой.* В силу 3) всякий инволютивный элемент из $\mathfrak{G}$ является произведением двух прямых, т. е. точкой, т. е. — по 1) — прямой.

Тем самым доказаны все утверждения теоремы 22 § 3.

3. Пучок инволютивных элементов. Пусть $\mathfrak{G}$ — *произвольная группа, содержащая не менее двух инволютивных элементов, в которой имеет место закон транзитивности* T *для всех инволютивных элементов.* Инволютивные элементы в дальнейшем в этом параграфе мы станем обозначать малыми латинскими буквами, а закон транзитивности записывать в виде

T. *Если $a\neq b$ и abc, abd инволютивны, то acd инволютивно.*

Рассуждения п. 5 § 4 можно повторить применительно к группе $\mathfrak{G}$, заменяя всюду предикат «является прямой» на «инволютивно». Поскольку отношение

$$abc \text{ инволютивно,} \tag{1}$$

которое во всякой группе рефлексивно и симметрично, в нашей группе в силу T еще и транзитивно, мы можем с помощью этого отношения выделить на множестве инволютивных элементов из

$\mathfrak{G}$ классы, которые назовем *пучками инволютивных элементов*. Пучки инволютивных элементов обладают следующими свойствами: всякие три элемента одного пучка связаны отношением (1); если $a \neq b$, то существует пучок, содержащий a и b; если пучок содержит a и b, то он содержит все c, для которых выполняется (1). Всякие два разных инволютивных элемента задают пучок. Обозначаем пучок, определяемый элементами a, b, где $a \neq b$, т. е. множество тех элементов c, для которых имеет место (1), через $J(ab)$.

Как установлено в п. 7 § 4, в любой группе утверждение T равносильно тому, что справедлива

Лемма о девяти инволютивных элементах. *Если даны элементы* α_1, α_2, α_3, *где* $\alpha_1 \neq \alpha_2$, *и* β_1, β_2, β_3, *где* $\beta_1 \neq \beta_2$, *и восемь из произведений* $\alpha_i\beta_k$, *где* i, $k = 1, 2, 3$ *и* $(i, k) \neq (3, 3)$, *инволютивны, то и девятое произведение* $\alpha_3\beta_3$ *инволютивно.*

4. Биинволютивные группы, в которых имеет место закон транзитивности. Пусть теперь $\mathfrak{G}$ — *группа, в которой имеет место* T *и которая биинволютивна.* К классу биинволютивных групп, в которых выполняется T, принадлежат все метрически-неевклидовы группы движений (теоремы 16 § 3 и 1 § 7), а также, как будет показано ниже (в § 9), — группы движений всех обыкновенных проективно-метрических плоскостей.

Если в $\mathfrak{G}$ определить $J(\alpha)$ для произвольного $\alpha (\alpha \neq 1)$ как *множество всех элементов c, для которых αc инволютивно,* то в силу биинволютивности множество $J(\alpha)$ совпадает с пучком $J(ab)$ и, следовательно, содержит по крайней мере два разных элемента a и b. (Полезно заметить, что если инволютивно одно из произведений αc, $c\alpha$, $\alpha^{-1}c$, $c\alpha^{-1}$, то инволютивны все четыре.) Обозначение $J(\alpha)$ вводится только при $\alpha = 1$. В силу свойств смежных классов (п. 3) для пучков $J(\alpha)$ мы имеем

(I) *Из* $u, v, w \in J(\alpha)$ *следует* $uvw \in J(\alpha)$.

(II) *Из* $u \neq v$ *и* $u, v \in J(\alpha)$, $J(\beta)$ *следует* $J(\alpha) = J(\beta)$.

Если для пучка $J(\alpha)$ найдется инволютивный элемент a такой, что $J(\alpha) = J(a)$, то мы называем *a инволютивным носителем* пучка $J(\alpha)$. Инволютивный носитель пучка является соединением для всех элементов пучка. В силу однозначности E соединения, которая вытекает из T по теореме 2, пучок имеет не более одного инволютивного носителя:

(III) *Из* $J(a) = J(a')$ *следует* $a = a'$.

Не используя теорему 2, это можно доказать так. Пусть $u \in J(a) = J(a')$. Тогда ua инволютивно и $ua \in J(a)$, т. е. $ua \in J(a')$, т. е. uaa' инволютивно. Если бы было $a \neq a'$, то было бы $u \in J(aa')$, а с другой стороны, так как $a, a' \in J(u)$ и так как пучок определяется двумя своими элементами, было бы $J(aa') = J(u)$, т. е. $u \in J(u)$, что невозможно.

Теперь рассмотрим подгруппу, порожденную в группе $\mathfrak{G}$ элементами некоторого пучка $J(\alpha)$. В силу (1) произведение трех образующих снова является образующей. Поэтому в группе, порожденной элементами из $J(\alpha)$, произведения двух образующих составляют абелеву подгруппу индекса 2, смежным классом которой является $J(\alpha)$ (лемма из п. 2 § 1). Эту абелеву подгруппу мы называем *группой поворотов* $D(\alpha)$. (Она опять-таки определяется только при $\alpha \neq 1$.) Пучок $J(\alpha)$ и группа поворотов $D(\alpha)$ связаны так:

(IV) *Если* $u \in J(\alpha)$, *то* $D(\alpha) = uJ(\alpha) = J(\alpha)u$.

Группа поворотов $D(\alpha)$, т. е. множество всех произведений uv при $u, v \in J(\alpha)$, состоит из единицы и по (II) из множества тех элементов $\beta \neq 1$ из $\mathfrak{G}$, для которых $J(\beta) = J(\alpha)$, т. е. которые определяют тот же пучок, что и α. Ясно, что отношение «α и β определяют один и тот же пучок» является отношением эквивалентности в множестве отличных от единицы элементов $\mathfrak{G}$. Группа поворотов — класс смежности, определяемый с помощью этого отношения и расширенный добавлением единицы.

Таким образом, в группе $\mathfrak{G}$ можно произвести разбиение всех отличных от единицы элементов на непересекающиеся классы так, чтобы каждый класс, будучи дополнен единицей, составлял бы подгруппу. Такое разбиение произвольной группы Юнг называет *подразбиением* *).

Резюмируя, получаем, что справедлива

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{G}$ — биинволютивная группа, в которой выполняется условие* T. *Инволютивные элементы $\mathfrak{G}$ можно сотнести пучкам, причем разные пучки имеют не более одного общего элемента. Произведения пар элементов произвольного пучка образуют абелеву подгруппу группы $\mathfrak{G}$. Эти абелевы «группы поворотов» осуществляют подразбиение группы $\mathfrak{G}$.*

Группа поворотов $D(\alpha)$ — однозначно определенная группа поворотов, отвечающая элементу $\alpha \neq 1$. Если группа поворотов $D(\alpha)$ содержит инволютивный элемент a, то $J(\alpha) = J(a)$, т. е. a — инволютивный носитель пучка $J(\alpha)$. Поэтому в силу (III) *всякая группа поворотов содержит не более одного инволютивного элемента.*

Задача. Найти группу, в которой условие T выполняется (причем посылка этого условия не пуста), но которая не является биинволютивной.

5. Отношение Томсена. В группах движений метрических плоскостей огромное значение имеет отношение

$$\alpha\beta\alpha = \beta \text{ или, что то же, } \alpha^{\beta} = \alpha^{-1}. \tag{2}$$

*) В оригинале «Partition». (*Прим. перев.*)

Назовем его *отношением Томсена.* Результаты, полученные Томсеном с помощью этого отношения, основываются на том, что в рассматриваемых им группах движений (исключая разве что евклидову метрику) два элемента связаны этим отношением только тогда, когда хотя бы один из них инволютивен (ср. лемму Томсена в п. 2 § 4). Так, например, Томсен предложил принять в качестве аксиомы, характеризующей гиперболическую группу движений, такое требование:

(V) *Из* $\alpha\beta\alpha=\beta$ *вытекает* $\alpha^2=1$ *или* $\beta^2=1$.

Мы хотим показать, что во всякой биинволютивной группе, в которой имеет место закон транзитивности T, выполняется также закон (V) и что из этого соотношения можно извлечь следствия о существовании квадратного корня из элемента группы и о том, когда элемент при внутреннем автоморфизме переходит в себя или в обратный элемент.

Если для элементов α и β группы имеет место отношение Томсена $\alpha\beta\alpha=\beta$, то, умножая его справа на β, получаем, что $\gamma=\alpha\beta$ и β имеют равные квадраты. Если, напротив, γ и β имеют равные квадраты, то для элементов $\alpha=\gamma\beta^{-1}$ и β выполняется отношение Томсена. Поэтому из одних только теоретико-групповых соображений вытекает, что условие (V) равносильно симметрическому условию

(VI) *Из* $\gamma^2=\beta^2\neq 1$ *следует* $(\gamma\beta^{-1})^2=1$,

которое означает, что два элемента группы, имеющие равные квадраты ($\neq 1$), получаются один из другого умножением не более чем на один инволютивный множитель.

Очевидно, (V) и (VI) выполняются в любой абелевой группе. Они выполняются также в любой биинволютивной группе, в которой выполняется T. В самом деле, в такой группе из $\alpha\beta\alpha=\beta$ и $\beta^2\neq 1$ следует, что α и β принадлежат одной группе поворотов, т. е. одной абелевой подгруппе, а из $\gamma^2=\beta^2\neq 1$ вытекает, что γ и β принадлежат одной группе поворотов.

Достаточно доказать последнее утверждение. Если $\gamma^2=\beta^2\neq 1$, то $\gamma, \beta\neq 1$ и элементы γ, γ^2, β, β^2 каждый определяет какую-то группу поворотов. Так как $\gamma^2\in D(\gamma)$, то $D(\gamma^2)=D(\gamma)$. Аналогично, $D(\beta^2)=D(\beta)$. А так как по условию $D(\gamma^2)=D(\beta^2)$, то $D(\gamma)=D(\beta)$, что и требовалось доказать.

Так как мы получили, что два элемента, квадраты которых равны и отличны от 1, принадлежат одной и той же группе поворотов, и так как в группе поворотов имеется не более одного инволютивного элемента, то в силу (VI) выполняется

Теорема 7 (о квадратном корне). *В биинволютивной группе, в которой имеет место транзитивность* T, *уравнение* $\xi^2=\gamma^2\neq 1$ *имеет единственное решение* $\xi=\gamma$, *если* $D(\gamma)$ *не содержит инволютивного элемента, и еще одно решение* $\xi=c\gamma$, *если* $D(\gamma)$ *содержит инволютивный элемент* c.

Таким образом, в биинволютивной группе, в которой выполняется T, из каждого отличного от единицы элемента либо вовсе нельзя извлечь квадратного корня, либо для него существует один или два квадратных корня. Квадратные корни из отличного от единицы элемента содержатся в его группе поворотов.

Теперь мы можем полностью составить себе представление о роли отношения Томсена в рассматриваемых группах:

Теорема 8 (об отношении Томсена). *В биинволютивной группе, удовлетворяющей условию* T, *ее элементы* β *и* $\alpha\neq 1$ *связаны отношением Томсена* (2) *тогда и только тогда, когда имеет место одно из двух условий:*

1) α *не инволютивен, а* $\beta\in J(\alpha)$,

2) α *инволютивен, а* $\beta\in J(\alpha)$ *или* $\beta\in D(\alpha)$.

Доказательство. То, что отношение (2) имеет место в указанных случаях, тривиально: если $\beta\in J(\alpha)$, то оно имеет место по определению символа J, а если элемент α инволютивен, то отношение Томсена равносильно коммутированию α и β, а поэтому выполняется и для $\beta\in D(\alpha)$.

Пусть теперь наоборот $\alpha \neq 1$ и β — элементы, связанные отношением Томсена (2). Если $\beta^2=1$, то опять же тривиально выполнение 1) или 2): если β инволютивно и $\beta \neq \alpha$, то (2) непосредственно означает, что $\beta \in J(\alpha)$; если β инволютивно и $\beta=\alpha$, то α инволютивно и $\beta \in D(\alpha)$; если $\beta=1$, то в силу (2) α инволютивно и $\beta \in D(\alpha)$. Если $\beta^2 \neq 1$, то из (2) вытекает, как уже отмечалось, что α и β принадлежат одной и той же группе поворотов, т. е. $\beta \in D(\alpha)$; так как к тому же α и β коммутируют, то из (2) следует, что α инволютивно.

С помощью этой теоремы доказывается

Теорема 9 (о коммутировании). *В биинволютивной группе, в которой имеет место* T, *два элемента (не являющиеся инволютивными одновременно) коммутируют тогда и только тогда, когда они принадлежат одной и той же группе поворотов.*

(Для двух разных инволютивных элементов a и b коммутирование означает, что $a|b$, т. е. $a \in J(b)$ и $b \in J(a)$)

Доказательство необходимости. Пусть α, β — элементы группы, коммутирующие между собой (это значит, что $\alpha^{\beta}=\alpha$), и пусть α — неинволютивный элемент. Так как можно считать, что $\alpha \neq 1$, то надо показать, что

(VII) *Из* $\alpha^2 \neq 1$ *и* $\alpha^{\beta}=\alpha$ *вытекает* $\beta \in D(\alpha)$.

Для доказательства этого утверждения выберем $u \in J(\alpha)$. По определению J имеем $\alpha^u=\alpha^{-1}$, а так как $\alpha^{\beta}=\alpha$, то $\alpha^{\beta u}=\alpha^{-1}$. Значит, по теореме об отношении Томсена $\beta u \in J(\alpha)$, т. е. $\beta=\beta u \cdot u \in D(\alpha)$.

Задачи. **1.** Пусть дана метрически-евклидова группа движений Пусть a, b, c, d — прямые, образующие прямоугольник, т. е. $a, b \perp c, d$ и $a \neq b$, $c \neq d$. Квадраты скользящих симметрий $\gamma=abc$, $\beta=abd$ равны квадрату переноса $ab \neq 1$, а частное $\gamma\beta^{-1}$ — это перенос $cd \neq 1$. Так как переносы не инволютивны, то для γ и β соотношение (VI) не выполняется Для переноса $\alpha=\gamma\beta^{-1}=cd$ и скользящей симметрии $\beta=abd$ выполняется соотношение Томсена (2), а α и β не инволютивны и отличны от единицы; поэтому для α и β нарушается (V).

Показать, что за этим исключением законы (VI) и (V) справедливы и для метрически-евклидовых групп движений.

2. В метрически-неевклидовой неэллиптической группе движений для незеркальных движений γ, β из $\gamma^2=\beta^2 \neq 1$ следует $\gamma=\beta$.

3. Во всякой биинволютивной группе, в которой выполняется T, имеют место следующие утверждения, соответствующие лемме об инволютивном неподвижном элементе неинволютивного движения (п 10 § 3) и приведенному там же следствию о среднем элементе:

а) Если $(ab)^2 \neq 1$, то автоморфизм $x^*=x^{ab}$ (при инволютивном x) не имеет неподвижных элементов, если a и b несоединимы, а если a и b соединимы, то их соединение (однозначно определенное по теореме 2) — единственный неподвижный элемент этого автоморфизма.

б) Если $c^a=d$ и $c \neq d$, то уравнение $c^x=d$ (где x инволютивно) имеет второе решение тогда и только тогда, когда c и d имеют соединение v; если b — второе решение, то $ab=v$; третьего решения нет.

4. Во всякой группе, в которой выполняется томсеновский закон (V), инволютивные элементы связаны соотношением:

(T′) *Если* $(ab)^2 \neq 1$ *и* abc, abd *инволютивны, то* acd *инволютивно*, а требование транзитивности T может и нарушаться. В произвольной группе T равносильно T′ и S.

5. В биинволютивной группе, в которой выполняется T, выполняется также следующее: если элемент α неинволютивный и $\alpha c \alpha=d$, то $c=d$.

Литература к § 7. К п. 2: Шмидт [1], [2]. К понятию «подразбиение»: Юнг [1]. К. п. 5: Томсен [3].

Замечание об алгебраизации аффинной и проективной плоскостей

Пусть K — некоторое поле. Его элементы мы будем обозначать большими латинскими буквами, нуль — буквой O. При всяком A отображение

$$X^* = X + A \tag{1}$$

является взаимно однозначным отображением K на себя. Все отображения (1) составляют коммутативную группу T_K («группу переносов на K»), действующую на K просто транзитивно *). При всяком $A \neq O$ из K отображение

$$X^* = XA \tag{2}$$

является взаимно однозначным отображением K на себя, оставляющим элемент O на месте. Все отображения (2) составляют коммутативную группу D_K («группу растяжений на K» **)), действующую на $K \setminus \{O\}$ просто транзитивно. В силу дистрибутивности

$$(A + B)\,C = AC + BC \tag{3}$$

внутренний автоморфизм, порожденный элементом из D_K и примененный ко всем элементам из T_K, является автоморфизмом T_K.

Мы хотим доказать обращение этого утверждения и для этого примем такое

Допущение. *Пусть дано множество K, содержащее по крайней мере два элемента.* (Элементы K мы по-прежнему обозначаем большими латинскими буквами.) *Пусть O, E — два фиксированных элемента из K. В группе всех взаимно однозначных отображений K на себя существуют две коммутативные подгруппы* T и D, *обладающие такими свойствами:*

1) T *просто транзитивна на K;*

2) $O\delta = O$ *при всех* $\delta \in \mathsf{D}$ *и* D *просто транзитивна на* $K \setminus \{O\}$;

3) *из* $\tau \in \mathsf{T}$ *и* $\delta \in \mathsf{D}$ *следует* $\tau^\delta \in \mathsf{T}$.

Если A — элемент из K, то по 1) в T существует единственное отображение, переводящее O в A. Обозначим его через τ_{OA}. Тогда всякое A можно представить в виде $O\tau_{OA}$. Если $A \neq O$, то

---

*) Группа взаимно однозначных отображений некоторого множества на себя называется *просто транзитивной*, если для всяких двух элементов A, B этого множества найдется единственное отображение из группы, которое переводит A в B.

**) Если K — поле вещественных чисел, то группу D_K образуют всевозможные гомотетии (растяжения и сжатия) числовой прямой Если K — поле комплексных чисел, то группу D_K образуют всевозможные центрально подобные вращения (произведения гомотетии на поворот вокруг ее центра) плоскости комплексного переменного с центром в точке 0. *(Прим. ред.)*

по 2) в D есть единственное отображение, которое переводит E в A. Обозначим его через δ_{EA}. Всякое A можно представить тогда в виде $E\delta_{EA}$.

Пользуясь этими однозначными представлениями элементов из K, определим для этих элементов *сложение*, а для элементов из $K\setminus\{O\}$ — *умножение*:

$$O\tau_{OA}+O\tau_{OB}=O\tau_{OA}\tau_{OB}, \tag{4}$$

$$E\delta_{EA}\cdot E\delta_{EB}=E\delta_{EA}\delta_{EB}. \tag{5}$$

Последнее дополним соглашением

$$A\cdot O=O\cdot A=O \text{ для всех } A\in K. \tag{6}$$

В таком случае имеет место

Теорема. *При сделанном допущении множество K оказывается полем относительно операций* (4) *и* (5), (6), *причем O является его нулем, а E — его единицей.*

Доказательство. Очевидно, что определенное формулой (4) сложение ассоциативно и коммутативно. Его нулем является $O=O\tau_{OO}$, ибо τ_{OO} — тождественное отображение K на себя. Противоположным для $O\tau$ является $O\tau^{-1}$.

Определенное формулой (5) умножение ассоциативно и коммутативно. Единицей служит $E=E\delta$, ибо δ_{EE} — тождественное отображение K на себя. Обратным элементом для $E\delta$ служит $E\delta^{-1}$.

Из определения умножения вытекает

$$X\cdot E\delta_{EA}=X\delta_{EA} \quad \text{для всех} \quad X\in K. \tag{7}$$

В самом деле, эта формула прежде всего выполняется для $X=O$ по (6) и 2). Если $X\neq O$, то можно написать $X=E\delta_{EX}$ и прийти к требуемому результату посредством (5). Так как каждый элемент из K можно однозначно представить в виде $O\tau$, где $\tau\in\mathsf{T}$, то (7) можно переписать в виде $O\tau\cdot E\delta_{EA}=O\tau\delta_{EA}$, а тогда, поскольку по 2) $O=O\delta_{AE}^{-1}$, имеем

$$O\tau\cdot E\delta_{EA}=O\tau^{\delta_{EA}}. \tag{8}$$

При этом в силу 3) правая часть имеет вид $O\tau'$ при $\tau'\in\mathsf{T}$, т. е. тот вид, который лежит в основе определения сложения.

Докажем теперь дистрибутивность (3). При $C=O$ она имеет место в силу (6). Пусть теперь $C\neq O$, т. е. $C=E\delta_{EC}$. Тогда из определения (4) сложения и из формулы (8) следует

$$(O\tau_{OA}+O\tau_{OB})\,E\delta_{EC}=O\tau_{OA}\tau_{OB}\cdot E\delta_{EC}=O\,(\tau_{OA}\tau_{OB})^{\delta_{EC}}=$$
$$=O\tau_{OA}^{\delta_{EC}}\tau_{OB}^{\delta_{EC}}=O\tau_{OA}^{\delta_{EC}}+O\tau_{OB}^{\delta_{EC}}=O\tau_{OA}\cdot E\delta_{EC}+O\tau_{OB}\cdot E\delta_{EC}.$$

Тем самым теорема доказана.

Имеем место $X\tau_{OA}=X+A$ и, при $A\neq O$, $X\delta_{EA}=XA$ для всех $X\in K$, откуда вытекает

Следствие. $\mathsf{T}=\mathsf{T}_K$, *а* $\mathsf{D}=\mathsf{D}_K$.

Можно использовать нашу теорему, чтобы алгебраизовать афинную плоскость. Чтобы полнее использовать изложенные в § 5 сведения о проективной плоскости, определим здесь *аффинную плоскость* как проективную плоскость, в которой выделена в качестве «бесконечно удаленной» некоторая прямая u и рассматриваются только те точки, которые не принадлежат u, и только те прямые, которые отличны от u. Две прямые аффинной плоскости называется *параллельными*, если они либо совпадают, либо не имеют на аффинной плоскости общих точек (т. е. когда они пересекаются на проективной плоскости в точке, принадлежащей u). Выберем две различные точки O и E аффинной плоскости; соединяющая их прямая g пересекает прямую u в «бесконечно удаленной» точке U. Проективная трансляция, осью которой является u, а центром U, и гомология с осью u и центром O, рассматриваемые как коллинеации аффинной плоскости, называются соответственно *аффинным переносом вдоль прямой* g и *гомотетией с центром* O. Аффинные переносы вдоль g и гомотетии с центром O — это две группы взаимно однозначных отображений на множестве K всех точек аффинной прямой g; эти группы удовлетворяют условиям нашей теоремы. Тогда операции (4), (5), (6) определяют на K *исчисление точек* и относительно них множество точек является полем *).

Из следствия вытекает, что аффинные переносы на g представляются отображениями (1), а гомотетии с центром O на g — отображениями (2).

Теперь выберем на аффинной плоскости некоторую точку E' вне g и обозначим прямую, соединяющую O и E', через g'. Тогда точкам аффинной плоскости можно однозначно сопоставить пары элементов из K так. Через данную точку проводим прямые, параллельные «осям координат» g' и g, пересекающие g в точке A, а g' в точке B'. Через B' проводим прямую, параллельную прямой, соединяющей точки E и E'; она пересекает g в точке B. Элементы A, B поля K называются *координатами* данной точки. Аффинную плоскость, таким образом, можно представить в виде *аффинной координатной плоскости над полем* K (об этом понятии см. п. 1 § 13).

Вводя известным образом однородные координаты, можно представить проективную плоскость, с которой мы начинали,

---

*) Полезно сравнить это «исчисление точек» с гильбертовым. (Гильберт в [1] говорит про «исчисление отрезков».)

как *проективную координатную плоскость над полем K* (об этом понятии см. п. 1 § 8).

Наши рассуждения не зависят от выполнения аксиомы Фано. Если эта аксиома справедлива, то поле K имеет характеристику $\neq 2$.

Мы не станем полностью обсуждать здесь все проблемы, связанные с алгебраизацией аффинной и проективной плоскостей, отсылая читателя к литературе.

Литература. Штаудт [2], Гильберт [1], Веблен и Юнг [1], Шван [1], [2], Паш и Ден [1], Гессенберг [3], Райдемайстер [1], Кокстер [2], Ходж и Пидо [1], Клингенберг [1], Пиккерт [3] (и цитированная там литература), Лингенберг [2], Артин [2].

Методами, указанными в п. 4 § 11, мы сумеем ввести исчисление точек и на проективной прямой. По сравнению с предыдущим алгебраизация проективной плоскости имеет то преимущество, что она сразу дает представление всех проективных отображений на прямой в виде дробно-линейных преобразований.

Глава III

ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Проективно-метрические плоскости, которые мы в § 5 определили в рамках синтетической проективной геометрии, могут быть проще и естественнее описаны алгебраически. Этот подход, позволяющий изучать проективно-метрические плоскости и их группы движений методами аналитической геометрии, и будет изучаться в настоящей главе. Основная теорема (см. ниже, стр. 190) открывает тем самым путь к алгебраизации метрических плоскостей и их групп движений. В частности, мы включим проективно-метрические плоскости и их группы движений в теорию метрических векторных пространств и ортогональных групп, созданную Е. Виттом и особенно широко развитую Ж. Дьёдонне. Кроме того, мы дадим здесь представление обыкновенных проективно-метрических плоскостей и их групп движений с помощью гиперкомплексных систем.

Наряду с этим, в согласии с общим замыслом книги, цель главы состоит в том, чтобы указать как законы, которым подчиняются инволютивные образующие, могут служит характеристическими признаками групп движений проективно-метрической плоскости. рассматриваемых как абстрактные группы, порождаемые своими инволютивными элементами.

§ 8. Проективно-метрические координатные плоскости и метрическое векторное пространство*)

1. Проективные и проективно-метрические координатные плоскости. Пусть K — поле характеристики $\neq 2$. Назовем *вектором* тройку $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ элементов K. Класс пропорциональных векторов $r\boldsymbol{x}=(rx_1, rx_2, rx_3)=r(x_1, x_2, x_3)$ при $r\neq 0$ (здесь $r\in K$ и $(x_1, x_2, x_3)\neq(0, 0, 0)$) назовем *точкой*. Так же назовем векторами и тройки $\boldsymbol{u}=[u_1, u_2, u_3]$ элементов из K; класс таких

*) Мы предполагаем, что читатель знаком с понятием координатной проективной плоскости и с понятием векторного пространства, и задерживаемся на них лишь бегло. Центральное понятие этого параграфа — понятие метрического векторного пространства.

пропорциональных векторов $\boldsymbol{ru}=r[u_1, u_2, u_3]=[ru_1, ru_2, ru_3]$ при $r\neq 0$ (где $r\in K$) и $[u_1, u_2, u_3]\neq[0, 0, 0]$ назовем *прямой.* Точку $\boldsymbol{rx}$ и прямую $\boldsymbol{ru}$ назовем *инцидентными,* если

$$\boldsymbol{ux}=u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0. \tag{1}$$

Так определенные точки и прямые с указанным отношением инцидентности образуют проективную плоскость — *проективную координатную плоскость над полем К.*

Обратно, если дана проективная плоскость, то, как следует из замечания об алгебраизации или из указанной в этой связи литературы, можно, выбрав в качестве координатного некоторый треугольник, сопоставить этой плоскости некоторое поле K характеристики$\neq 2$ и представить проективную плоскость в виде проективной координатной плоскости над K. Поле K не зависит от выбора координатного треугольника.

Пусть дана проективная координатная плоскость над полем характеристики$\neq 2$. Коллинеации в этой плоскости — это полулинейные преобразования

$$rx_i^*=\sum_{k=1}^{3} c_{ik}A(x_k), \qquad ru_i^*=\sum_{k=1}^{3} C_{ik}A(u_k) \qquad (i=1, 2, 3), \tag{2}$$

где (c_{ik}) — матрица с элементами из K, определитель которой отличен от нуля, (C_{ik}) — матрица из сопряженных миноров матрицы (c_{ik}), а $A(x)$ — автоморфизм поля K. Проективные коллинеации — это линейные преобразования (2), т. е. те преобразования (2), в которых $A(x)$ является тождественным автоморфизмом: $A(x)=x$.

Гармоническая гомология, центром и осью которой служит неинцидентная пара (точка $\boldsymbol{rp}$, прямая $\boldsymbol{rq}$), дается формулами:

$$\boldsymbol{rx}^*=-\boldsymbol{x}+\frac{2\boldsymbol{gx}}{\boldsymbol{gp}}\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{ru}^*=-\boldsymbol{u}+\frac{2\boldsymbol{up}}{\boldsymbol{gp}}\boldsymbol{g}. \tag{3}$$

Легко непосредственно проверить, что (3) — инволютивная коллинеация с указанными неподвижными элементами.

Корреляция представляется формулами:

$$rx_i^*=\sum_{k=1}^{3} f_{ik}A(u_k), \qquad ru_i^*=\sum_{k=1}^{3} F_{ik}A(x_k) \qquad (i=1, 2, 3), \tag{4}$$

где (f_{ik}) — невырожденная матрица с элементами из K, (F_{ik}) — матрица сопряженных миноров к (f_{ik}), $A(x)$ — автоморфизм поля K. Преобразование (4) является поляритетом, когда $A(x)=A^{-1}(x)$ и $f_{ik}=A(f_{ki})$. Проективные корреляции — это те преобразования (4), у которых $A(x)=x$, а проективные поляритеты —

преобразования

$$rx_i^* = \sum_{k=1}^{3} f_{ik}u_k, \qquad ru_i^* = \sum_{k=1}^{3} F_{ik}x_k, \text{ где } f_{ik} = f_{ki} \text{ и } \det f_{ik} \neq 0. \quad (5)$$

Если дан проективный поляритет (5), то условие сопряженности двух прямых $r\boldsymbol{u}$ и $r\boldsymbol{v}$ в смысле этого поляритета, иначе — условие того, что прямая $r\boldsymbol{u}$ инцидентна полюсу прямой $r\boldsymbol{v}$, выразится формулой

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} f_{ik}u_i v_k = 0 \qquad (f_{ik} = f_{ki}, \quad \det f_{ik} \neq 0), \qquad (6)$$

т. е. обращением в нуль симметрической билинейной формы ранга 3, зависящей от координат, которыми задаются прямые*). Аналогично записывается условие сопряженности двух точек $r\boldsymbol{x}$ и $r\boldsymbol{y}$ в виде $\sum_{i,\,k=1}^{3} F_{ik}x_i y_k = 0$.

Всякую обыкновенную проективно-метрическую плоскость можно, выбрав координатный треугольник, представить в виде проективной координатной плоскости над некоторым полем K отличной от 2 характеристики так, что в этой плоскости проективный поляритет задается формулой (5), а ортогональность прямых — формулой (6). Если поляритет гиперболический, т. е. существуют самосопряженные прямые, — другими словами, для некоторой прямой $r\boldsymbol{u}$ квадратичная форма, определяемая данной симметричной билинейной формой, обращается в нуль при подстановке в нее координат прямой

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} f_{ik}u_i u_k = 0, \qquad (7)$$

то (7) является уравнением в тангенциальных координатах фундаментального конического сечения (в точечных координатах его уравнение имеет вид $\sum_{i,\,k=1}^{3} F_{ik}x_i x_k = 0$). Если поляритет эллиптический, то прямой, для которой выполнялось бы равенство (7), не существует.

Чтобы представить особую проективно-метрическую плоскость в виде координатной плоскости, выберем координатный треугольник так, чтобы бесконечно удаленная прямая была бы прямой $r[0,\ 0,\ 1]$ координатного треугольника. Абсолютная полярная инволюция в множестве бесконечно удаленных точек

*) Впредь эти координаты мы будем называть *тангенциальными*. (*Прим. перев.*)

$r(x_1, x_2, 0)$ в координатах x_1, x_2 представится линейным преобразованием; ее можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} rx_1^* &= f_{21}x_1 - f_{11}x_2, \\ rx_2^* &= f_{22}x_1 - f_{12}x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (f_{ik}=f_{ki}, \quad \det f_{ik} \neq 0) \tag{8}$$

($f_{12}=f_{21}$, ибо речь идет об инволюции). Две точки $r(x_1, x_2, 0)$ и $r(y_1, y_2, 0)$ отвечают друг другу при инволюции тогда и только тогда, когда

$$f_{22}x_1y_1 - f_{21}x_1y_2 - f_{12}x_2y_1 + f_{11}x_2y_2 = 0. \tag{9}$$

Две прямые $\boldsymbol{ru} = r[u_1, u_2, u_3]$ и $\boldsymbol{rv} = r[v_1, v_2, v_3]$, отличные от бесконечно удаленной прямой, взаимно ортогональны тогда и только тогда, когда для их бесконечно удаленных точек $r(u_2, -u_1, 0)$ и $r(v_2, -v_1, 0)$ выполняется условие (9), т. е. когда

$$\sum_{i,\, k=1}^{2} f_{ik}u_iv_k = 0 \qquad (f_{ik}=f_{ki}, \quad \det f_{ik} \neq 0). \tag{10}$$

Формула (10) выражает еще и тот факт, что бесконечно удаленная прямая $r[0, 0, 1]$ ортогональна всем прямым, включая саму себя. Таким образом, ортогональность прямых на особой проективно-метрической плоскости снова выражается обращением в нуль симметрической билинейной формы в тангенциальных координатах, но только форма эта теперь имеет ранг 2. Так как абсолютная полярная инволюция особой проективно-метрической плоскости по условию эллиптическая, то $r[0, 0, 1]$ — единственная ортогональная себе прямая, т. е.

$$\sum_{i,\, k=1}^{2} f_{ik}u_iu_k = 0 \text{ имеет место только при } u_1 = u_2 = 0. \tag{11}$$

Матрицы коэффициентов (f_{ik}) симметрических билинейных форм, фигурирующих в равенствах (6) и (10), определены с точностью до общего множителя.

Если на проективной координатной плоскости над полем K характеристики $\neq 2$ ортогональность прямых задана условием (6), то эта плоскость является обыкновенной проективно-метрической плоскостью. Если ортогональность прямых задается условием (10) или (11), то это особая проективно-метрическая плоскость, на которой прямая $r[0, 0, 1]$ является бесконечно удаленной прямой. В самом деле, от (6) можно перейти к проективному поляритету (5), а от (10) — к проективной инволюции (8) на прямой $r[0, 0, 1]$.

2. Векторные пространства. Векторным пространством над полем K называется множество V элементов, именуемых *векторами*, причем каждой паре векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ однозначно сопоставляется вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и каждой паре вектор $\boldsymbol{a}$ и элемент $c \in K$ (именуемый *скаляром*) однозначно сопоставляется вектор $c\boldsymbol{a}$ так, что по отношению к сложению векторы образуют коммутативную группу, и выполняются следующие правила:

1) $c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b}$, 2) $(c+c')\boldsymbol{a}=c\boldsymbol{a}+c'\boldsymbol{a}$,

3) $(cc')\boldsymbol{a}=c(c'\boldsymbol{a})$, 4) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

Нуль аддитивной группы называется *нулевым вектором* $\mathbf{0}$. Всякое подмножество множества V, которое само является векторным пространством (по отношению к данным операциям), называется *подпространством* пространства V. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{a}_m$ называются линейно зависимыми, если существуют не все равные нулю элементы $a_1, a_2, \ldots, a_m \in K$, для которых

$$a_1\boldsymbol{a}_1+a_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+a_m\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}. \qquad (12)$$

В противном случае векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ называются *линейно независимыми*.

Мы будем рассматривать только те векторные пространства, для которых существует конечное максимальное число линейно независимых векторов. Максимальное число линейно независимых векторов векторного пространства V называется *размерностью* V. В векторном пространстве размерности n всякие n линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ образуют базис, т. е. каждый вектор $\boldsymbol{a}$ является линейной комбинацией

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{a}_1+a_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+a_n\boldsymbol{a}_n \qquad (13)$$

с однозначно определенными компонентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из существования базиса видно, что всякое векторное пространство размерности n над полем K изоморфно векторному пространству, элементами которого служат комплекты $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ элементов тела K, а сложение и умножение на скаляр определено покомпонентно. Таким образом, с точностью до изоморфизма для всякого данного поля K и наперед заданной размерности n существует единственное векторное пространство этой размерности над этим полем. Одномерные подпространства (записываемые в виде $K\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$) мы называем также *прямыми*, двумерные — *плоскостями*, $(n-1)$-мерные — *гиперплоскостями* n-мерного векторного пространства.

Линейными преобразованиями n-мерного векторного пространства над полем K мы называем взаимно однозначное отображение α множества V на себя, при котором выполняются условия линейности:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\alpha=\boldsymbol{a}\alpha+\boldsymbol{b}\alpha, \qquad (c\boldsymbol{a})\alpha=c(\boldsymbol{a}\alpha). \qquad (14)$$

Линейные преобразования образуют группу, *линейную группу* *) n-мерного векторного пространства.

При фиксированном базисе каждому линейному преобразованию α отвечает квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ n-го порядка с элементами из K, определитель которой отличен от нуля и такая, что для любого вектора $\boldsymbol{a}$ имеем $(\boldsymbol{a}\alpha) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})$ в смысле матричного умножения, где $(\boldsymbol{a})$ и $(\boldsymbol{a}\alpha)$ — матрицы-столбцы, образованные из компонент соответственно векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}\alpha$. Этим свойством обладают те и только те матрицы, у которых k-й столбец состоит из компонент образа k-го базисного вектора. Обратно, всякая матрица $\boldsymbol{A}$, определитель которой отличен от нуля, определяет при фиксированном базисе линейное преобразование векторного пространства. Поэтому *линейная группа n-мерного векторного пространства над K представляется группой квадратных матриц n-го порядка с элементами из K и отличным от нуля определителем;* при этом произведение двух линейных преобразований представляется произведением представляющих их матриц.

Пусть теперь даны два базиса. Выразим векторы второго базиса линейными комбинациями векторов первого и составим из получающихся комплектов матрицу, k-м столбцом которой будет комплект, представляющий k-й вектор второго базиса. Тогда эта матрица $\boldsymbol{C}$, определитель которой отличен от нуля, выражает зависимость между компонентами произвольного вектора в обоих базисах: Если $(\boldsymbol{a})_1$ и $(\boldsymbol{a})_2$ — матрицы-столбцы из компонент вектора $\boldsymbol{a}$ в первом и во втором базисах, то $(\boldsymbol{a})_1 = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{a})_2$ в смысле матричного умножения. Если теперь дано некоторое линейное преобразование с матрицей $\boldsymbol{A}_1$ в первом базисе и $\boldsymbol{A}_2$ — во втором, то $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}$. Поэтому $\det \boldsymbol{A}_2 = \det \boldsymbol{A}_1$. Итак, матрицы, которые описывают одно и то же линейное преобразование в разных базисах, имеют равные определители; этот не зависящий от выбора базиса определитель называется *определителем линейного преобразования.*

В проективной координатной плоскости над полем K характеристики $\neq 2$ можно ограничиться одними точечными координатами, а прямые описывать как ряды точек, т. е. как множества точек, представимых в виде линейных комбинаций двух разных точек. Двойственным образом можно ограничиться тангенциальными координатами, описывая точки как пучки прямых, т. е. как множества прямых, представимых в виде линейных комбинаций двух разных прямых. Поэтому проективную координатную плоскость над K можно представить как векторное пространство из троек элементов из K двояким образом: используя одномерные или двумерные подпространства этого

*) Или *полную линейную группу.* (*Прим. ред.*)

векторного пространства. При первом подходе *точки и прямые* проективной плоскости представляются прямыми и плоскостями векторного пространства, а инцидентность точки и прямой — тем, что отвечающее точке подпространство принадлежит подпространству, отвечающему прямой; при втором подходе *прямые и точки* проективной плоскости представляются прямыми и плоскостями векторного пространства, а инцидентность прямой и плоскости — тем, что отвечающее точке подпространство содержит подпространство, отвечающее прямой. Мы здесь предпочтем второй способ *). В силу результатов п. 1 верна

Теорема 1. *Всякую проективную плоскость можно представить в виде множества плоскостей и прямых трехмерного векторного пространства над однозначно определенным полем характеристики$\neq 2$, причем инцидентность точки и прямой представляется включением второго из двух подпространств в состав первого. Обратно, плоскости и прямые трехмерного векторного пространства над всяким полем характеристики$\neq 2$ образуют проективную плоскость.*

При этом представлении роль проективных коллинеаций проективной плоскости играют взаимно однозначные отображения плоскостей и прямых, индуцируемые линейными преобразованиями векторного пространства. Линейное преобразование векторного пространства индуцирует тождественное отображение своих подпространств тогда и только тогда, когда оно сводится к умножению всех векторов на один и тот же отличный от нуля элемент поля K; такие преобразования изоморфны мультипликативной группе поля и образуют центр линейной группы векторного пространства **). Таким образом, *группа проективных коллинеаций проективной плоскости представляется фактор-группой линейной группы трехмерного векторного пространства по ее центру.*

3. Метрические векторные пространства и ортогональные группы. Пусть дано n-мерное векторное пространство над полем K характеристики$\neq 2$. Функция $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, сопоставляющая упорядоченной паре векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ некоторый элемент из K, называется *билинейной формой*, если

$$F(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = cF(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \qquad F(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}'', \boldsymbol{b}) = F(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) + F(\boldsymbol{a}'', \boldsymbol{b}), \tag{15}$$

$$F(\boldsymbol{a}, c\boldsymbol{b}) = cF(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \qquad F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{b}'') = F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}') + F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}''). \tag{16}$$

---

*) При таком подходе мы сможем представить посредством трехмерного векторного пространства не только обыкновенные проективно-метрические плоскости, но и особые (теорема 2).

**) Доказательство этого, а также других утверждений о векторном пространстве читатель может найти, например, в гл. 2 книги Бурбаки [1]. (*Прим. перев.*)

Билинейная форма называется *симметричной*, если

$$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}). \tag{17}$$

Если выбрать базис $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ векторного пространства и представить $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в этом базисе:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{a}_1 + a_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{a}_n, \qquad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{a}_1 + b_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + b_n\boldsymbol{a}_n,$$

то

$$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = F(a_1\boldsymbol{a}_1 + a_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{a}_n,\ b_1\boldsymbol{a}_1 + b_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + b_n\boldsymbol{a}_n) = \\ = \sum_{i,\ k=1}^{n} F(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k)\, a_i b_k;$$

поэтому, если положить $F(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = f_{ik}$, имеем

$$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i,\ k=1}^{n} f_{ik} a_i b_k, \qquad f_{ik} = f_{ki}, \tag{18}$$

— это есть обычная запись симметрической билинейной формы.

При преобразовании базиса место матрицы $(f_{ik}) = \boldsymbol{F}$ в формуле (18) занимает матрица $\boldsymbol{C'FC}$, где $\boldsymbol{C}$ — матрица преобразования базиса (ср. п. 2), а $\boldsymbol{C'}$ — матрица, транспонированная по отношению к $\boldsymbol{C}$. Представлению (18) отвечает определитель $\det f_{ik} = \det \boldsymbol{F}$; при преобразовании базиса он заменяется определителем $\det(\boldsymbol{C'FC}) = (\det \boldsymbol{C})^2 \det \boldsymbol{F}$, где $\det \boldsymbol{C} \neq 0$. Таким образом, форме F сопоставляется посредством ее определителей квадратичный класс *) в K.

Векторное пространство, в котором задана симметрическая билинейная форма F, называется *метрическим векторным пространством.* $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ называется *скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ — *значением формы* на векторе $\boldsymbol{a}$.

Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ метрического векторного пространства называются *ортогональными*, если

$$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0. \tag{19}$$

Два подпространства называются ортогональными, если каждый вектор одного подпространства ортогонален каждому вектору другого подпространства. Если, например, два вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ ортогональны, то прямые $K\boldsymbol{a}$, $K\boldsymbol{b}$ ортогональны. Мно-

*) Все элементы из K, отличающиеся друг от друга множителем, являющимся полным квадратом, образуют так называемый *квадратичный класс*; если $a \in K$, то квадратичный класс, которому принадлежит a, т. е. множество всех элементов $\{c^2a\}$ при $c \neq 0$, $c \in K$, обозначается через $\{a\}$.

[Соответствующее отношение эквивалентности, вообще говоря, не согласуется с операцией сложения в поле; поэтому здесь нельзя говорить о факторизации. (*Прим. перев.*)]

жество векторов, ортогональных заданному вектору, образует подпространство. Множество векторов, ортогональных всем векторам заданного подпространства T, также образует подпространство $T^{\perp}$, называемое *максимальным подпространством, ортогональным* T.

Вектор $\boldsymbol{a}$, ортогональный самому себе (т. е. такой, что $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$), называется *изотропным*; отличный от нуля изотропный вектор называется *собственно изотропным.*

Если T — подпространство, то можно задаться вопросом, как найти все принадлежащие T векторы, ортогональные всем векторам из T. Эти векторы образуют подпространство — пересечение T и $T^{\perp}$ — и, во всяком случае, они все изотропны (но, конечно, этому подпространству не обязаны принадлежать все изотропные векторы из T). Если это подпространство состоит не только из нуля, т. е. если T содержит отличный от нуля вектор, ортогональный всем векторам из T, то T называется *изотропным подпространством*; если T изотропно, то $T^{\perp}$ также изотропно. Ясно, что прямая $K\boldsymbol{a}$ изотропна тогда и только тогда, когда вектор $\boldsymbol{a}$ изотропен.

Понятия, введенные для произвольного подпространства T, имеют смысл и в том частном случае, когда T совпадает со всем пространством. Подпространство, состоящее из тех векторов $\boldsymbol{a}$, которые ортогональны всем векторам векторного пространства, т. е. из векторов $\boldsymbol{a}$, для которых

$$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \text{ для всех векторов } \boldsymbol{b}, \tag{20}$$

называется *радикалом* метрического векторного пространства. Каждый вектор радикала изотропен. Если же, обратно, их всякий изотропный вектор принадлежит радикалу, то говорят, что форма F *отделяет нуль.*

В любом базисе условие ортогональности (19) выражается билинейным соотношением

$$\sum_{i,\, k=1}^{n} f_{ik} a_i b_k = 0, \tag{21}$$

связывающим компоненты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Если дан вектор $\boldsymbol{a}$, то уравнение (21), являясь линейным уравнением относительно $\boldsymbol{b}$, имеет пространство решений размерности n или $n-1$ в зависимости от того, все коэффициенты равны нулю или нет. Поэтому подпространство всех векторов, ортогональных данному вектору $\boldsymbol{a}$, либо совпадает со всем пространством (это значит, что $\boldsymbol{a}$ принадлежит радикалу), либо является гиперплоскостью. В частности, *подпространство $g^{\perp}$ всякой прямой g, не принадлежащей радикалу, является гиперплоскостью.*

Если d — размерность радикала, то число $n-d$ называется *рангом формы* F. Так определенный ранг F совпадает с рангом матрицы (f_{ik}), вычисленным в каком-либо базисе, ибо радикал состоит из всех тех векторов $\boldsymbol{a}$, для которых в (21), рассматриваемом как уравнение относительно $\boldsymbol{b}$, все коэффициенты обращаются в нуль, а поэтому радикал состоит из пространства решений однородной системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ik}a_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

и, значит, размерность d радикала равна числу измерений n, уменьшенному на ранг матрицы (f_{ik}).

Особый интерес представляют, конечно, те векторные метрические пространства, радикал которых состоит из одного вектора $\mathbf{0}$ (хотя мы не можем ограничиться одним этим случаем), т. е. пространства, в которых

$$\text{Если } F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \text{ для всех векторов } \boldsymbol{b}, \text{ то } \boldsymbol{a} = \mathbf{0}. \tag{23}$$

Это значит, что F имеет ранг n, т. е., иными словами, определитель F не равен $\{0\}$.

В метрическом векторном пространстве, в котором нет собственных изотропных векторов, вместо (23) выполняется более сильное требование

$$\text{Если } F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0, \text{ то } \boldsymbol{a} = \mathbf{0}. \tag{24}$$

Оно означает, что F имеет ранг n и отделяет нуль.

Линейное преобразование α метрического векторного пространства называется *ортогональным преобразованием*, если оно не меняет скалярного произведения, т. е. если

$$F(\boldsymbol{a}\alpha, \boldsymbol{b}\alpha) = F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \text{ для всех векторов } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \tag{25}$$

и если определитель α равен ± 1 *). Если радикал состоиг из одного нулевого вектора, то второе требование следует из (25): ведь в некотором базисе α и F представляются матрицами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{F}$ при $\det \boldsymbol{F} \neq 0$, а в силу (25) $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{F}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}$ и поэтому $\det \boldsymbol{A} = \pm 1$.

В силу тождества

$$2F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \tag{26}$$

---

*) Эти линейные преобразования лучше было бы называть *изометрическими*, ибо они сохраняют не только ортогональность, но и значение скалярного произведения. (Ср. задачу в п. 4.)

линейное преобразование α, которое не меняет значения формы на каждом векторе, т. е. для которого

$$F(\boldsymbol{a}\alpha,\ \boldsymbol{a}\alpha) = F(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) \text{ для всех } \boldsymbol{a}, \tag{27}$$

сохраняет также скалярное произведение любых двух векторов.

Ортогональные преобразования n-мерного метрического векторного пространства над K с метрической формой F образуют группу, называемую *ортогональной группой* и обозначаемую $O_n(K, F)$. Ортогональные преобразования с положительным определителем образуют подгруппу индекса 2 — *собственно ортогональную группу* $O_n^+(K, F)$. Формы с пропорциональными коэффициентами определяют одну и ту же ортогональную группу.

Если g — не изотропная прямая метрического векторного пространства, то линейное преобразование σ, для которого

$$\text{а) } \boldsymbol{u}\sigma = \boldsymbol{u} \text{ для всех } \boldsymbol{u} \in g, \quad \text{б) } \boldsymbol{u}\sigma = -\boldsymbol{u} \text{ для всех } \boldsymbol{u} \in g^{\perp}, \tag{28}$$

очевидно, является инволютивным ортогональным преобразованием, определитель которого равен $(-1)^{n-1}$. Если $\boldsymbol{g}$ — вектор, представляющий прямую g (т. е. $g = K\boldsymbol{g}$), то это преобразование можно задать также формулой

$$\boldsymbol{u}^* = -\boldsymbol{u} + 2\frac{F(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{g})}{F(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{g})}\boldsymbol{g}. \tag{29}$$

Мы будем называть это преобразование *симметрией относительно (неизотропной) прямой* g (или *осевой симметрией с осью* g) и обозначать через σ_g. Осевые симметрии σ_g при нечетном n (в частности, при $n=3$) принадлежат $O_n^+(K, F)$.

Сделаем ряд геометрических замечаний, относящихся к ортогональности подпространств в метрическом векторном пространстве размерности 3.

Если форма F *тернарна*, т. е. имеет ранг 3, то максимальное ортогональное подпространство каждой прямой является плоскостью, а максимальное ортогональное подпространство всякой плоскости есть прямая. Следовательно, в этом случае существует *отношение ортогональности, связывающее прямые и плоскости.* Это отношение ортогональности обладает свойствами проективного поляритета: оно является однозначным инволютивным соответствием; при всех прямых g и плоскостях E из $g \subset E$ следует $E^{\perp} \subset g^{\perp}$; при задании базиса оно представляется линейным соотношением между координатами прямой и плоскости (ср. конец п. 1). Если форма F отделяет нуль, то нет ни изотропной прямой, ни изотропной плоскости, и ни одна прямая не принадлежит ортогональной ей плоскости. Если F не отделяет нуль, то есть два рода пар (прямая, плоскость), в которых прямая и плоскость взаимно ортогональны: те, в которых прямая не принадлежит плоскости и оба элемента пары не изотропны, и те, в которых прямая принадлежит плоскости и оба элемента пары изотропны.

Если форма F *бинарна*, т. е. имеет ранг 2, то метрическое векторное пространство имеет одномерный радикал; соответствующую прямую обозначим через g_∞. Пусть теперь E — плоскость, содержащая прямую g_∞. Если a — прямая из E, отличная от g_∞, то максимальное подпространство, ортогональное a, является, очевидно, плоскостью, содержащей g_∞. Поскольку эта плоскость ортогональна a и g_∞, она ортогональна E, т. е. является подпространством $E^\perp$ (рис. 98). Выполняется соотношение $E^{\perp\perp}=E$. Итак, *в пучке плоскостей, содержащих радикал, существует инволютивное отношение ортогональности*. Это отношение обладает свойствами проективной инволюции, ибо при выборе базиса оно выражается линейной зависимостью между координатами этих плоскостей (ср. конец п. 1). Две отличные от g_∞ прямые ортогональны тогда и только тогда, когда натянутые на каждую из них и g_∞ плоскости ортогональны. Если, кроме того, F отделяет нуль, то вне радикала нет изотропных векторов, т. е. g_∞ — единственная изотропная прямая, и содержащие ее плоскости — единственные изотропные плоскости. Тогда $E \neq E^\perp$ и, значит, ортогональное соответствие плоскостей, содержащих радикал, является эллиптической инволюцией.

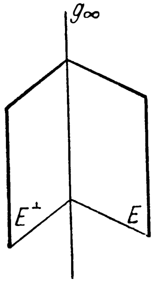


Рис. 98.

Эти замечания о геометрии трехмерного метрического векторного пространства прежде всего будут использованы в § 9.

Задачи. 1. Пусть дано n-мерное метрическое векторное пространство, R — его радикал. Обозначим через $\dim T$ размерность подпространства T. Тогда для каждого подпространства T

а) $\dim T^\perp = n - \dim T + \dim T \cap R$,

б) $\dim T^{\perp\perp} = \dim T + (\dim R - \dim T \cap R)$,

в) $T \subseteq T^{\perp\perp}$; $T = T^{\perp\perp}$ тогда и только тогда, когда $R \subseteq T$.

2. а) Во всяком метрическом векторном пространстве есть ортогональный базис. Любое множество попарно перпендикулярных неизотропных векторов можно дополнить до ортогонального базиса.

б) Ортогональный базис подпространства T можно дополнить до ортогонального базиса всего пространства тогда и только тогда, когда $T \cap T^\perp$ содержится в радикале.

4. Проективно-метрические плоскости и метрические векторные пространства. Пусть дана проективно-метрическая плоскость, а в ней выбран координатный треугольник, как в п. 1.

Тогда в силу п. 1 можно представить проективно-метрическую плоскость в виде проективной координатной плоскости над полем K характеристики $\neq 2$ с заданной симметрической билинейной формой относительно тангенциальных координат; матрица коэффициентов этой формы определена лишь с точностью до общего множителя. Равенство нулю этой формы характеризует ортогональность прямых. Зафиксируем какую-нибудь одну матрицу в классе матриц с пропорциональными коэффициентами. Отнесем координатную плоскость к тангенциальным координатам и, как указывалось в п. 2, представим ее прямые и точки прямыми и плоскостями векторного пространства троек элементов из K. Это векторное пространство превращается в метрическое при подходящем выборе симметрической билинейной формы с фиксированной матрицей коэффициентов.

Таким образом, проективно-метрическая плоскость может быть представлена трехмерным метрическим векторным пространством, причем прямые проективно-метрической плоскости и их ортогональность представляются прямыми векторного пространства и их ортогональностью, а точки проективно-метрической плоскости представляются плоскостями векторного пространства. При этом для метрической формы F векторного пространства выполняется следующее условие:

Если проективно-метрическая плоскость обыкновенная, то F тернарная. Абсолютным поляритетом при нашем представлении является ортогональность прямых и плоскостей векторного пространства. Если проективно-метрическая плоскость эллиптическая, то F отделяет нуль; если она гиперболическая, то F не отделяет нуль.

Если проективно-метрическая плоскость особая, то F бинарна и отделяет нуль. Бесконечно удаленная прямая проективно-метрической плоскости (ортогональная всем прямым) представляется одномерным радикалом векторного пространства. Абсолютная инволюция бесконечно удаленных точек представляется ортогональностью плоскостей векторного пространства, содержащих радикал.

Таким образом, выполняется первое утверждение следующей теоремы, второе утверждение которой вытекает из теоремы 1 и замечания в конце п. 3:

Теорема 2. *Всякую проективно-метрическую плоскость можно представить плоскостями и прямыми трехмерного метрического векторного пространства над полем K характеристики $\neq 2$ с симметрической билинейной формой F, которая либо бинарна и отделяет нуль, либо тернарна. Обратно, плоскости и прямые любого такого метрического векторного пространства образуют проективно-метрическую плоскость.*

Сведем воедино некоторые соответствующие друг другу понятия теории проективно-метрических плоскостей и теории трехмерных метрических векторных пространств:

Проективно-метрическая плоскость	Метрическое векторное пространство
прямая g	прямая g
точка P	плоскость P
g, P инцидентны	$g \subset P$
g, h ортогональны	g, h ортогональны
g ортогональна самой себе	g изотропна
Симметрия, осью которой служит (не ортогональная самой себе) прямая g, а центром — полюс прямой g.	Осевая симметрия σ_g (при неизотропной прямой g).

Точнее говоря, каждой порождающей симметрии в группе движений проективно-метрической плоскости отвечает некоторый класс («пропорциональных») линейных преобразований метрического векторного пространства (ср. конец п. 2), а симметрии σ_g образуют полную систему представителей этих классов в группе $O_3^+(K, F)$. Умножению симметрий в проективно-метрической плоскости соответствует умножение соответствующих симметрий σ_g. Поэтому верна

Теорема 3. *Следующие группы совпадают между собой:*

1) *группа движений проективно-метрической плоскости;*

2) *подгруппы собственно ортогональной группы $O_3^+(K, F)$, порожденные множеством симметрий σ_g; здесь характеристика поля $K \neq 2$, а форма F либо бинарна и отделяет нуль, либо тернарна.*

Это значит, что каждая группа 1) представима в виде группы 2), а всякая группа 2) может быть представлена в виде группы 1).

В силу всего доказанного мы можем теперь выразить результаты обоснования плоской метрической геометрии, основанной на нашей системе аксиом, в виде следующей алгебраической теоремы:

Основная теорема (алгебраическая формулировка). *Всякая группа, удовлетворяющая системе аксиом* п. 2 § 3, *представима в виде подгруппы собственно ортогональной группы $O_3^+(K, F)$, причем характеристика поля K отлична от двух, а симметрическая билинейная форма F либо бинарна и отделяет нуль, либо тернарна; элементы аксиоматически заданной системы образующих группы представляются при этом посредством определенных симметрий σ_g из $O_3^+(K, F)$, которые порождают представляющую подгруппу.*

Если аксиоматически заданная группа — евклидова или эллиптическая группа движений, то элементы системы образующих представляются всеми симметриями σ_g из группы $O_3^+(K, F)$.

Задача. В n-мерном метрическом векторном пространстве, радикал которого состоит из одного нуля, обозначим через $L_n(K, F)$ группу классов пропорциональных взаимно однозначных линейных преобразований α, которые сохраняют ортогональность, т. е. таковы, что

Для всех векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ следует $F(\boldsymbol{x}\alpha, \boldsymbol{y}\alpha) = 0$, и наоборот. (*)

а) Доказать, что (*) равносильно тому, что

Существует элемент $c \neq 0$ из K такой, что $F(\boldsymbol{x}\alpha, \boldsymbol{y}\alpha) = cF(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для всех векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. (**)

б) Линейное преобразование со свойством (**) пропорционально ортогональному преобразованию тогда и только тогда, когда множитель c является полным квадратом.

в) Если n нечетно, то множитель c всегда является полным квадратом, а поэтому $L_n(K, F) \cong O_n^+(K, F)$.

Группу проективных коллинеаций обыкновенной проективно-метрической плоскости, которая оставляет инвариантным абсолютный поляритет, можно представить группой $L_3(K, F)$, а значит, в силу в) — группой $O_3^+(K, F)$.

5. К теореме о трех симметриях. Рассмотрим проективную прямую над полем K характеристики $\neq 2$. Точки A данной прямой — это классы пропорциональных пар $r(x_1, x_2)$ элементов из K, где $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Проективные отображения прямой на себя — это линейные преобразования

$$rx_i^* = \sum_{k=1}^{2} c_{ik}x_k \qquad (i = 1, 2), \tag{30}$$

где

$$c_{ik} \in K, \quad \det c_{ik} \neq 0.$$

Эти *бинарные однородные линейные преобразования над* K образуют группу, обозначаемую через $L_2(K)$ *). Она представляется группой классов пропорциональных матриц $r(c_{ik})$ второго порядка над K при $\det c_{ik} \neq 0$. Класс пропорциональных матриц мы короче будем называть *однородной матрицей*. Квадратичный класс вычетов $\{\det c_{ik}\} \neq \{0\}$ мы назовем *определителем однородной матрицы* $r(c_{ik})$.

Приведем ряд результатов об инволютивных элементах группы $L_2(K)$ и о представляющих их однородных матрицах; эти результаты устанавливаются простым вычислением в рамках матричной алгебры:

(I) *Однородная матрица второго порядка* $r(c_{ik})$ *с определителем* $\neq \{0\}$ *инволютивна тогда и только тогда, когда ее след* $r(c_{11}+c_{22})$ *равен нулю.*

Инволютивный элемент группы $L_2(K)$ представляется, таким образом, однородной матрицей

$$r\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & -c_{11} \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad -\left(c_{11}^2 + c_{12}c_{21}\right) \neq 0; \tag{31}$$

поэтому ему однозначно отвечает однородная тройка (класс пропорциональных троек) $r(c_{11}, c_{12}, c_{21})$ над K при $\left\{-\left(c_{11}^2 + c_{12}c_{21}\right)\right\} \neq \{0\}$.

*) Обычное более точное обозначение $PGL_2(K)$.

(II) *Произведение трех инволютивных однородных матриц* (31) *инволютивно тогда и только тогда, когда соответствующие однородные тройки линейно зависимы*

Это устанавливается с помощью (I); надо лишь проверить, когда след произведения матриц равен нулю

(III) *Инволютивное преобразование из группы* $L_2(K)$ *имеет* (*две различные*) *неподвижные точки тогда и только тогда, когда оно представляется однородной матрицей* (31), *определитель которой равен* $\{-1\}$.

(IV) *В группе* $L_2(K)$ *для любых двух разных точек* $A = r(a_1, a_2)$, $A' = r(a_1', a_2')$ *найдется единственное инволютивное преобразование, которое оставляет их неподвижными* (*гармоническая инволюция с неподвижными точками* A, A'); *оно представляется однородной матрицей*

$$r\begin{pmatrix} a_1a_2' + a_2a_1' & -2a_1a_1' \\ 2a_2a_2' & -(a_1a_2' + a_2a_1') \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Пусть теперь на проективной прямой задана инволюция, т. е. взаимно однозначное инволютивное соответствие на множестве точек, которую мы назовем «абсолютной» инволюцией. Мы не предполагаем, что эта инволюция проективна (т. е. представима линейным преобразованием). Но мы предположим, что она эллиптична, т. е. у нее нет неподвижных точек. Тогда, согласно (IV), каждой паре точек этой инволюции A, A' отвечает гармоническая инволюция, неподвижными точками которой являются A, A'. При заданной «абсолютной» инволюции мы называем это линейное преобразование *симметрией относительно* A, A'.

Сформулируем теорему, доказательство которой является нашей целью и которая позволит прояснить значение теоремы о трех симметриях:

Теорема 4. *Эллиптическая инволюция на проективной прямой проективна* (*линейна*) *тогда и только тогда, когда произведение любых трех симметрий от пар точек этой инволюции инволютивно.*

Доказательство. В множестве всех симметрий (32) относительно пар точек X, X' заданной инволюции произведение трех симметрий по (II) инволютивно тогда и только тогда, когда в множестве однородных троек $r(x_1x_2' + x_2x_1',\ -2x_1x_1',\ 2x_2x_2')$ всякие три тройки линейно зависимы. Это тривиальным образом равносильно тому, что в множестве однородных троек

$$r(x_1x_1',\ x_1x_2' + x_2x_1',\ x_2x_2') \qquad (33)$$

всякие три тройки линейно зависимы. Но последнее имеет место тогда и только тогда, когда всякая тройка (33) является решением некоторого однородного линейного уравнения, т. е. когда существуют элементы f_{11}, $f_{12} = f_{21}$, f_{22} из K, не равные все нулю, такие, что для всех троек (33)

$$f_{11}x_1x_1' + f_{12}x_1x_2' + f_{21}x_2x_1' + f_{22}x_2x_2' = 0. \qquad (34)$$

Таким образом, устанавливаемое нашей инволюцией соответствие представляется обращением в нуль некоторой симметричной билинейной формы Это равносильно тому, что данная инволюция представляется линейным преобразованием

$$\left.\begin{aligned} rx_1' &= f_{12}x_1 + f_{22}x_2, \\ rx_2' &= -(f_{11}x_1 + f_{21}x_2) \end{aligned}\right\} \qquad (\text{где } f_{12} = f_{21}). \qquad (35)$$

В силу взаимной однозначности инволюции при этом для определителя формы (34) и линейного преобразования (35) выполняется $\{\det f_{ik}\} \neq \{0\}$, что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что условие нашей теоремы выполнено, и рассмотрим произведение трех симметрий относительно пар точек данной «абсолютной» инволюции. Определитель произведения равен $\{-1\}$, ибо это верно для каждого множителя. Значит, в силу (III) произведение имеет две неподвижные точки. Так как множители коммутируют с «абсолютной» — по теореме 4 проективной — инволюцией (ср. п. 5 § 5), то это верно и для произведения, а потому обе неподвижные точки произведения образуют пару точек «абсолютной» инволюции. Таким образом, произведение не только инволютивно, но и является симметрией относительно пары точек «абсолютной» инволюции. Итак, верно

Следствие. *Произведение трех симметрий относительно пар точек проективной эллиптической инволюции является симметрией относительно пары точек этой инволюции.*

Теперь покажем, как наши рассуждения об одномерном проективном фундаментальном образе переносятся на двумерное векторное пространство. Возьмем векторное пространство пар $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ элементов из поля K характеристики $\neq 2$ и рассмотрим отображение не только одномерных подпространств векторного пространства, но и самих векторов. Линейное преобразование

$$x_i^* = \sum_{k=1}^{2} c_{ik} x_k \quad (i = 1, 2), \quad \text{где} \quad c_{ik} \in K, \quad \det c_{ik} \neq 0 \tag{36}$$

векторного пространства может быть инволютивным только тогда, когда его определитель равен ± 1. Единственные инволютивные преобразования (36) с определителем 1 — это линейные преобразования, переводящие каждый вектор в противоположный; их матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Инволютивные линейные преобразования с определителем -1 представляются матрицами со следом, равным нулю, и определителем -1:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & -c_{11} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad -\left(c_{11}^2 + c_{12}c_{21}\right) = -1. \tag{38}$$

Произведение трех матриц (38) инволютивно тогда и только тогда, когда взятые из матриц тройки (c_{11}, c_{12}, c_{21}) линейно зависимы. Для всякого инволютивного линейного преобразования с определителем -1 есть некоторая прямая a векторного пространства, каждый вектор которой неподвижен, и прямая a', каждый вектор которой переходит в противоположный. Обратно, для любых различных прямых $a = K\boldsymbol{a}$, $a' = K\boldsymbol{a}'$ найдется единственное линейное преобразование, которое указанным образом переводит векторы прямых a и a'; оно инволютивно и определитель его равен -1. Если $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{a}' = (a_1', a_2')$, то матрица этого преобразования имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{vmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1a_2' + a_2a_1' & -2a_1a_1' \\ 2a_2a_2' & -\left(a_1a_2' + a_2a_1'\right) \end{pmatrix}. \tag{39}$$

[Очевидно, что линейные преобразования, образующиеся переменой ролей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$, получаются одно из другого умножением на линейное преобразование (37).]

Пусть теперь в двумерном векторном пространстве задана «ортогональность» как симметричное отношение между векторами, обладающее тем свойством, что все векторы, ортогональные вектору $\boldsymbol{a} \neq 0$, образуют прямую. Далее потребуем, чтобы ни один ненулевой вектор не был ортогонален сам себе. При заданной ортогональности назовем *осевой симметрией* инволютивное линейное преобразование, которое переводит всякий вектор прямой в себя, а всякий ортогональный ей вектор — в противоположный. Тогда имеет место

Теорема 5. *Пусть в двумерном векторном пространстве задана ортогональность с указанными свойствами. Тогда его можно метризовать* (*в смысле п.* 3) *с сохранением ортогональности в том и только в том случае, когда при заданной ортогональности симметрии таковы, что произведение любых трех симметрий инволютивно.*

В заключение покажем, как явно указать «четвертый вектор симметрии» в метрическом векторном пространстве:

Теорема 6. *Пусть в двумерном метрическом векторном пространстве даны четыре симметрии относительно неизотропных прямых a, b, c, d и $\sigma_a\sigma_b\sigma_c=\sigma_d$; пусть, кроме того, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — векторы, представляющие прямые a, b и c ($a=K\boldsymbol{a}$ и т. д.). Тогда вектор*

$$\boldsymbol{d}=F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}+F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{40}$$

представляет прямую d и при этом

$$F(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d})=F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})F(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}). \tag{41}$$

Доказательство. В правой части (40) слагаемое $F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}$ пропорционально $\boldsymbol{a}$, а слагаемое $-F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}+F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$ перпендикулярно $\boldsymbol{a}$. Поэтому

$$\boldsymbol{d}\sigma_a=F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

Двукратным повторением этого рассуждения устанавливаем, что $\boldsymbol{d}\sigma_a\sigma_b\sigma_c=\boldsymbol{d}$, т. е. $\boldsymbol{d}\sigma_d=\boldsymbol{d}$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{d}$ принадлежит прямой d.

Теперь используем линейную зависимость векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Будь то общий случай, когда $\boldsymbol{b}$ — линейная комбинация $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$, будь то частный случай, когда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ пропорциональны, простым вычислением проверяется выполнение (41). Отсюда, в частности, вытекает, что $F(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}) \neq 0$, т. е. $\boldsymbol{d} \neq 0$, а значит, вектор $\boldsymbol{d}$ представляет прямую d.

Задачи. 1. Группа $L_2(K)$ биинволютивна. (Надо доказать для однородных невырожденных матриц второго порядка $M, \ldots$ следующее: для всякой матрицы M найдется матрица M_1, след которой равен нулю, такая, что $M_2=M_1M$ имеет след, равный нулю.)

2. В теореме 6 равенство (41) равносильно равенству

$$\frac{F^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})}=\frac{F^2(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{c})}{F(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d})F(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c})},$$

которое означает, что парам векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{c}$ отвечают одинаковые «квадраты косинусов».

3. Пусть a, b, c — три неизотропные компланарные прямые n-мерного метрического векторного пространства ($n>1$), которые представляются векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Тогда $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ равно симметрии относительно прямой, представляемой вектором (40); эта прямая неизотропна.

Литература к § 8. О проективных метриках: Кэли [1], Клейн [1], [2], Веблен и Юнг [1], Буземан и Келли [1], Бэр [7] (см. также Яглом, Розенфельд, Ясинская [1]. *Прим. ред.*). К п. 1: Веблен и Юнг [1], Бэр [7], Ленц [1]. К п. 2: Биркгоф и Маклейн [1], Бэр [7] (книга, служащая эталоном для изучения проективного пространства как множества подпространств векторного пространства), Артин [2]. К п. 3: Витт [1], Дьёдонне [1], [3], Эйхлер [1], Артин [2]. К п. 5: Веблен и Юнг [1].

§ 9. Ортогональные группы

1. Резюме. Нам предстоит теперь подробнее изучить собственно ортогональную группу $O_3^+(K, F)$. При этом все время предполагается, что поле K имеет характеристику $\neq 2$, а симметрическая билинейная форма F либо бинарна и отделяет нуль, либо тернарна. Группа $O_3^+(K, F)$ содержит *симметрии* σ_g *относительно неизотропных прямых* g трехмерного метрического векторного пространства, которые были определены в п. 3 § 8 и которые представляются формулами:

$$\sigma_g\colon \boldsymbol{u}^* = -\boldsymbol{u} + 2\frac{F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{g})}{F(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g})}\boldsymbol{g}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{g} \in g \quad \text{и} \quad F(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}) \neq 0. \qquad (*)$$

Мы покажем, что группа $O_3^+(K, F)$ *порождается симметриями* $(*)$ (теоремы 2, 2′). В последующем мы будем рассматривать группу $O_3^+(K, F)$ совместно с этой фиксированной системой инволютивных образующих.

Далее мы рассмотрим наши основные соотношения (1) и (2) из п. 1 § 3 применительно к симметриям $(*)$ и покажем, что они соответствуют основным геометрическим отношениям метрического векторного пространства (теоремы 1, 1′, 3, 3′):

Произведение $\sigma_a\sigma_b$ *инволютивно тогда и только тогда, когда* (*неизотропные*) *прямые* a, b *перпендикулярны.*

Произведение $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ *инволютивно тогда и только тогда, когда* (*неизотропные*) *прямые* a, b, c *компланарны.*

Этим открывается возможность сформулировать геометрические теоремы о метрическом векторном пространстве в виде утверждений о симметриях, т. е. утверждений об инволютивных образующих группы $O_3^+(K, F)$.

На основе этого факта и с помощью прежних результатов мы придем к трем следующим теоремам:

Теорема IV. *Следующие группы, рассматриваемые как порожденные группы, совпадают:*

(1) *группа евклидовых движений;*

(2) *группа движений особой проективно-метрической плоскости;*

(3) *группа* $O_3^+(K, F)$ *при характеристике* K*, отличной от 2, и форме* F*, бинарной и отделяющей нуль.*

Теорема V. *Следующие группы, рассматриваемые как порожденные группы, совпадают:*

(1′) *эллиптическая группа движений;*

(2′) *группа движений эллиптической проективно-метрической плоскости;*

(3′) *группа* $O_3^+(K, F)$ *при характеристике* K, *отличной от* 2, *и форме* F, *тернарной и отделяющей нуль.*

Теорема VI. *Следующие группы, рассматриваемые как порожденные группы, совпадают:*

(2″) *группа движений гиперболической проективно-метрической плоскости;*

(3″) *группа* $O_3^+(K, F)$ *при характеристике* K, *отличной от* 2, *и форме* F, *тернарной и не отделяющей нуль.*

При этом совпадение групп (2) и (3), (2′) и (3′), (2″) и (3″) получается из алгебраизации групп движений проективно-метрических плоскостей (§ 8, теорема 3) и из того, что группа $O_3^+(K, F)$ порождается симметриями (∗).

Далее, из обоснования евклидовой геометрии мы знаем, что всякая группа (1) представляется в виде группы (2) с сохранением образующих (теорема I § 6). Чтобы провести последнее заключение в теореме IV, рассмотрим соотношения между инволютивными образующими группы (3), откуда непосредственно получим, что всякая группа (3) является группой (1). Совпадение групп (1) и (3) означает, что *наша система аксиом* п. 2 § 3 *совместно с аксиомами* R *и* V* *характеризует ортогональные группы* (3) *как абстрактные группы, порождаемые инволютивными элементами; эта характеристика дается соотношениями, которым должны удовлетворять инволютивные образующие.*

Аналогично, из обоснования эллиптической геометрии нам известно, что всякая группа (1′) представляется группой (2′) с сохранением образующих (теорема II § 6). Чтобы провести последнее заключение в теореме V, снова рассмотрим соотношения между инволютивными образующими группы (3′), из которых непосредственно вытекает, что всякая группа (3′) является группой (1′). Кроме того, получаем, что для групп, фигурирующих в теореме V, система образующих состоит из всех инволютивных элементов. Совпадение групп (1′) и (3′) означает, что *наша система аксиом* п. 2 § 3 *совместно с аксиомой* P *характеризует ортогональные группы* (3′) *как абстрактные группы, порождаемые своими инволютивными элементами; характеристика дается соотношениями, которым удовлетворяют инволютивные элементы.* Поэтому группы (3′) характеризуются также и краткой системой аксиом, приведенной в конце п. 2 § 7.

Ортогональные группы (3″), системой образующих которых является множество всех симметрий (*) (симметрии (*) и в группах (3″) совпадают со всеми инволютивными элементами), не удовлетворяют нашей системе аксиом п. 2 § 3: в них не выполнена аксиома 1. Но мы сформулируем и для групп (3″) соотношения между инволютивными элементами, относительно этих соотношений мы докажем в § 11, что они являются «определяющими» соотношениями, т. е. что они характеризуют эти группы как абстрактные группы, порожденные своими инволютивными элементами.

2. Лемма. В последующем нам пригодится одна элементарная лемма, справедливая для всякого метрического векторного пространства над полем характеристики $\neq 2$.

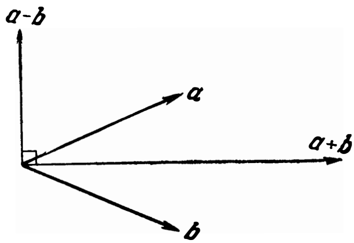


Рис. 99.

Лемма 1. *Пусть* $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$. *Тогда векторы* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ *ортогональны. Если вектор* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *не изотропный, то симметрия относительно прямой* $K(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ *меняет местами векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$. *Если вектор* $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ *не изотропный, то симметрия относительно прямой* $K(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ *меняет местами векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$. *Если* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *не изотропны, то* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ *не могут быть одновременно изотропными.*

Доказательство. Из $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ вытекает:

$$F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 0.$$

Следовательно,

$$2\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

является разложением вектора $2\boldsymbol{a}$ на ортогональные слагаемые (рис. 99).

Если вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ неизотропный, то, положив $K(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = g$, имеем

$$2\boldsymbol{a}\sigma_g = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\sigma_g + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\sigma_g = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{b},$$

т. е. $\boldsymbol{a}\sigma_g = \boldsymbol{b}$.

Если вектор $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ неизотропный, то, положив $K(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = h$, имеем

$$2\boldsymbol{a}\sigma_h = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\sigma_h + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\sigma_h = -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = -2\boldsymbol{b},$$

т. е. $\boldsymbol{a}\sigma_h = -\boldsymbol{b}$.

Наконец, если $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \neq 0$, то

$$F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + F(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \\ = 2F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 2F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 4F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \neq 0,$$

а значит, векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ не могут быть одновременно изотропными.

Если α — некоторое ортогональное преобразование, а $\boldsymbol{a}$ — неизотропный вектор, то по нашей лемме, примененной к векторам $\boldsymbol{a}\alpha$ и $\boldsymbol{a}$, существует неизотропная прямая l, для которой $\boldsymbol{a}\alpha\sigma_l = \pm\boldsymbol{a}$.

Укажем еще одно общее обстоятельство, на которое мы часто будем ссылаться: если при ортогональном преобразовании α образ $\boldsymbol{a}\alpha$ неизотропного вектора $\boldsymbol{a}$ пропорционален $\boldsymbol{a}$, то $\boldsymbol{a}\alpha = \pm\boldsymbol{a}$, так как $F(\boldsymbol{a}\alpha, \boldsymbol{a}\alpha) = F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \neq 0$.

3. Группы $O_3^+(K, F)$ с бинарной формой, отделяющей нуль *). В этом и последующем пунктах мы рассмотрим трехмерное метрическое векторное пространство с *бинарной формой F, отделяющей нуль*, и принадлежащей ему группой $O_3^+(K, F)$; характеристика поля K, как всегда, считается отличной от 2.

Относительно геометрии этого векторного пространства мы отсылаем к замечаниям, сделанным в п. 3 § 8. Снова обозначим *одномерный радикал* через g_∞, а векторы, представляющие прямую g_∞, через $\boldsymbol{g}_\infty$.

Кроме симметрий (*) относительно неизотропной прямой существует еще *симметрия относительно радикала* g_∞. А именно, если A — неизотропная плоскость, то существует однозначно определенное линейное преобразование σ, для которого

1) $\boldsymbol{u}\sigma = \boldsymbol{u}$ для всех $\boldsymbol{u} \in g_\infty$; 2) $\boldsymbol{u}\sigma = -\boldsymbol{u}$ для всех $\boldsymbol{u} \in A$; это есть инволютивное ортогональное преобразование с определителем 1. Таким образом, *эта симметрия σ_A относительно прямой g_∞ определяется прежде всего тогда, когда некоторая неизотропная плоскость A выделяется в качестве «антиобраза»*. Фигурирующие в символах σ_g и σ_A подпространства g и A не изотропны.

Относительно названной группы $O_3^+(K, F)$, элементы которой мы обозначаем $\alpha, \ldots$, докажем следующие теоремы:

Теорема 1. а) *Произведение $\sigma_a\sigma_b$ инволютивно тогда и только тогда, когда (неизотропные) прямые a и b перпендикулярны; в этом случае $\sigma_a\sigma_b = \sigma_A$, где $A = a + b$.* б) *Произведение $\sigma_A\sigma_b$ инволютивно тогда и только тогда, когда (неизотропная)*

*) Читатель может начать с изучения пп. 5 и 6, где рассматриваются более простые случаи.

прямая b принадлежит (неизотропной) плоскости A; в этом случае $\sigma_A\sigma_b=\sigma_a$, где a и b — перпендикулярные прямые, принадлежащие A.

Доказательство. аа) Пусть a и b перпендикулярны, и $a=K\boldsymbol{a}$, $b=K\boldsymbol{b}$. Тогда $\boldsymbol{a}\sigma_a\sigma_b=\boldsymbol{a}\sigma_b=-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\sigma_a\sigma_b=-\boldsymbol{b}\sigma_b=-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{g}_\infty\sigma_a\sigma_b=-\boldsymbol{g}_\infty\sigma_b=\boldsymbol{g}_\infty$. Значит, $\sigma_a\sigma_b$ совпадает в некотором базисе с σ_A, а поэтому $\sigma_a\sigma_b=\sigma_A$.

аб) Напротив, пусть $\sigma_a\sigma_b$ инволютивно. Тогда $\boldsymbol{b}\sigma_a\sigma_b=\boldsymbol{b}\sigma_b\sigma_a$, т. е. $(\boldsymbol{b}\sigma_a)\sigma_b=\boldsymbol{b}\sigma_a$, т. е. $\boldsymbol{b}\sigma_a$ является неподвижным вектором для σ_b, т. е. $\boldsymbol{b}\sigma_a$ пропорционален $\boldsymbol{b}$, т. е. $\boldsymbol{b}\sigma_a=\pm\boldsymbol{b}$. В силу $\sigma_a\neq\sigma_b$ невозможно $\boldsymbol{b}\sigma_a=\boldsymbol{b}$, значит, $\boldsymbol{b}\sigma_a=-\boldsymbol{b}$, т. е. a перпендикулярна b.

ба) Пусть $b=K\boldsymbol{b}$. Если b принадлежит A, то в A есть перпендикулярная b (неизотропная) прямая a. По а) $\sigma_a\sigma_b=\sigma_A$, т. е. $\sigma_A\sigma_b=\sigma_a$.

бб) Если $\sigma_A\sigma_b$ инволютивно, то $\boldsymbol{b}\sigma_A\sigma_b=\boldsymbol{b}\sigma_b\sigma_A$, т. е. $(\boldsymbol{b}\sigma_A)\sigma_b=$ $=\boldsymbol{b}\sigma_A$, т. е. $\boldsymbol{b}\sigma_A$ — неподвижный вектор для σ_b, т. е. опять-таки $\boldsymbol{b}\sigma_A=\pm\boldsymbol{b}$. Знак $+$ невозможен, ибо вектор $\boldsymbol{b}$ не изотропен. Значит, $\boldsymbol{b}\sigma_A=-\boldsymbol{b}$, т. е. b принадлежит A.

Лемма 2. а) *Если $\boldsymbol{a}\alpha=\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}\alpha=\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два ортогональных неизотропных вектора, то $\alpha=1$.* б) *Если $\boldsymbol{a}\alpha=-\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}\alpha=\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два ортогональных неизотропных вектора, то $\alpha=\sigma_b$, причем $b=K\boldsymbol{b}$.* в) *Если $\boldsymbol{a}\alpha=-\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — какой-то неизотропный вектор, то α есть либо симметрия σ_g, где прямая g ортогональна $\boldsymbol{a}$, либо симметрия σ_E, где $\boldsymbol{a}\in E$.*

Доказательство. а) α, как и всякий элемент группы, переводит любой вектор $\boldsymbol{g}_\infty$ в пропорциональный ему вектор; пусть $\boldsymbol{g}_\infty\alpha=r\boldsymbol{g}_\infty$, где $r\in K$. Так как на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ натянута неизотропная плоскость, то $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{g}_\infty$ образуют базис; в этом базисе преобразование α представляется матрицей с определителем r. Следовательно, должно быть $r=1$; поэтому α переводит векторы некоторого базиса в себя и, значит, $\alpha=1$.

б) Имеем $\boldsymbol{a}\alpha\sigma_b=-\boldsymbol{a}\sigma_b=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\alpha\sigma_b=\boldsymbol{b}\sigma_b=\boldsymbol{b}$. Тогда в силу а) $\alpha\sigma_b=1$, откуда $\alpha=\sigma_b$.

в) Пусть $\boldsymbol{b}$ — неизотропный вектор, ортогональный $\boldsymbol{a}$. Тогда $\boldsymbol{b}\alpha$ и $\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{b}\alpha$ тоже ортогональны $\boldsymbol{a}$. По лемме 1 при подходящем выборе знака прямая $g=K(\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{b}\alpha)$ не изотропна и $\boldsymbol{b}\alpha\sigma_g=\pm\boldsymbol{b}$, а так как прямая g ортогональна $\boldsymbol{a}$, то $\boldsymbol{a}\alpha\sigma_g=-\boldsymbol{a}\sigma_g=\boldsymbol{a}$. В силу а) и б) получаем $\alpha\sigma_g=1$ или $\alpha\sigma_g=\sigma_a$ (где $a=K\boldsymbol{a}$). Следовательно, либо $\alpha=\sigma_g$, либо $\alpha=\sigma_a\sigma_g$, а тогда по теореме 1а) $\alpha=\sigma_E$, где $E=a+g$.

Теорема 2. *Всякий элемент α группы можно представить либо в виде $\sigma_a\sigma_b$, либо в виде $\sigma_A\sigma_b$. Поэтому α представим в виде произведения не более чем трех симметрий (*). Если* *элемент α инволютивен, то α представляет собой либо симметрию σ_A, либо симметрию σ_a.*

Доказательство. Рассмотрим при фиксированном α некоторую неизотропную плоскость и ее неизотропный образ. Возьмем вектор $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$, принадлежащий обеим плоскостям. Тогда $\boldsymbol{s}$ неизотропный, а $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}\alpha$ — не собственно изотропный. Если $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}\alpha \neq \boldsymbol{0}$, то положим $b = K(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}\alpha)$; если же $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}\alpha = \boldsymbol{0}$, то выберем в качестве b произвольную неизотропную прямую, перпендикулярную $\boldsymbol{s}$. Тогда по лемме 1 $\boldsymbol{s}\alpha\sigma_b = -\boldsymbol{s}$. По лемме 2в) $\alpha\sigma_b$ является либо симметрией σ_a, либо симметрией σ_A, т. е. либо $\alpha = \sigma_a\sigma_b$, либо $\alpha = \sigma_A\sigma_b$.

Остальные утверждения теоремы получаются теперь из теоремы 1.

Всякий элемент $\sigma_a\sigma_b$ группы переводит вектор радикала в себя, а каждый элемент $\sigma_A\sigma_b$ группы переводит вектор радикала в противоположный. Элементы, представимые в виде $\sigma_a\sigma_b$, образуют подгруппу индекса 2, смежный класс которой состоит из элементов, представимых в виде $\sigma_A\sigma_b$.

Лемма 3. *Если α переводит неизотропную плоскость A в себя, то либо α является некоторой симметрией σ_h, где $h \subset A$, либо α является произведением $\sigma_g\sigma_h$ двух симметрий, где $g, h \subset A$.*

Доказательство. A не содержит собственно изотропного вектора. Выберем в A два взаимно перпендикулярных вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. По условию векторы $\boldsymbol{a}\alpha$ и $\boldsymbol{b}\alpha$ также принадлежат A. Если $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\alpha \neq \boldsymbol{0}$, то положим $h = K(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\alpha)$, а если $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\alpha = \boldsymbol{0}$, то $h = K\boldsymbol{b}$. Тогда по лемме 1 $\boldsymbol{a}\alpha\sigma_h = \boldsymbol{a}$. Вектор $\boldsymbol{b}\alpha\sigma_h$ перпендикулярен $\boldsymbol{a}\alpha\sigma_h = \boldsymbol{a}$, а так как он принадлежит A, то он пропорционален $\boldsymbol{b}$, т. е. $\boldsymbol{b}\alpha\sigma_h = \pm \boldsymbol{b}$. По лемме 2а), б) тогда $\alpha\sigma_h = 1$ или $\alpha\sigma_h = \sigma_g$, где $g = K\boldsymbol{a}$, откуда $\alpha = \sigma_h$ или $\alpha = \sigma_g\sigma_h$.

Лемма 4. *Если α переводит каждый вектор изотропной плоскости A в противоположный, то α является симметрией σ_g при $g \subset A^{\perp}$.*

Доказательство вытекает из леммы 2в). Так как α по условию переводит каждый вектор $\boldsymbol{g}_\infty$ в $-\boldsymbol{g}_\infty$, то α не может быть симметрией σ_E.

Теорема 3. *Произведение $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ равно симметрии σ_d в том и только в том случае, когда (неизотропные) прямые a, b, c компланарны.*

Доказательство. а) Пусть a, b, c принадлежат некоторой плоскости A. Если A не изотропная, то произведение $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ переводит плоскость A в себя, а каждый вектор $\boldsymbol{g}_\infty$ — в противоположный, и поэтому по лемме 3 $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ совпадает с некоторой симметрией σ_d при $d \subset A$. Если плоскость A изотропная, то произведение $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ переводит каждый вектор из $A^{\perp}$ в противоположный, и по лемме 4 $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ совпадает с некоторой симметрией σ_d, где $d \subset A$.

При доказательстве обратного*) мы воспользуемся тем, что для произвольного элемента α группы справедливы следующие утверждения:

(I) *Если α переводит все векторы двух разных изотропных плоскостей в себя, то $\alpha=1$.* (II) *Если α переводит две разные неизотропные плоскости и все векторы $\boldsymbol{g}_\infty$ в себя, то $\alpha=1$.* (III) *Если α переводит некоторую неизотропную плоскость и все векторы какой-либо изотропной плоскости в себя, то $\alpha=1$.*

(I) Тривиально. (II) Пусть $\boldsymbol{g}$ — вектор, представляющий линию пересечения неподвижных плоскостей. Тогда $\boldsymbol{g}\alpha = \pm \boldsymbol{g}$, а если $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ — вектор неподвижной плоскости E, перпендикулярный $\boldsymbol{g}$, то $\boldsymbol{a}\alpha$ — вектор из E, тоже перпендикулярный $\boldsymbol{g}$, а поэтому $\boldsymbol{a}\alpha = \pm \boldsymbol{a}$. Тогда $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{g}_\infty$ образуют базис, для которого $\boldsymbol{g}\alpha = \pm \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{a}\alpha = \pm \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{g}_\infty\alpha = + \boldsymbol{g}_\infty$. Если здесь стоят знаки $+$, $+$, $+$, то мы имеем $\alpha=1$. Комбинации $+$, $-$, $+$ или $-$, $+$, $+$ знаков невозможны, ибо определитель преобразования α равен 1. В случае комбинации $-$, $-$, $+$ знаков мы имели бы $\alpha=\sigma_E$, а это невозможно, ибо σ_E не переводит никакой неизотропной отличной от E плоскости в себя. (III) Пусть $\boldsymbol{g}$ — вектор, представляющий линию пересечения неподвижных плоскостей. Тогда $\boldsymbol{g}\alpha=\boldsymbol{g}$. Для любого вектора $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ из неизотропной неподвижной плоскости E, перпендикулярного $\boldsymbol{g}$, как и раньше, имеем $\boldsymbol{a}\alpha = \pm \boldsymbol{a}$. Тогда для базиса $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{g}_\infty$ имеем $\boldsymbol{g}\alpha = + \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{a}\alpha = \pm \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{g}_\infty\alpha = +\boldsymbol{g}_\infty$. При комбинации знаков $+$, $+$, $+$ имеем $\alpha=1$; комбинация же $+$, $-$, $+$ невозможна, ибо определитель α равен 1.

б) Пусть теперь $\sigma_a\sigma_b=\sigma_d\sigma_c$. Обозначим это отображение через α. Если $\alpha=1$, то $a=b$ и a, b, c, очевидно, компланарны. Пусть теперь $\alpha\neq 1$ и $A=a+b$, $D=d+c$. Если A и D изотропны, то $\sigma_a\sigma_b$ переводит каждый вектор из $A^\perp$ в себя; $\sigma_d\sigma_c$ переводит каждый вектор из $D^\perp$ в себя; значит, α переводит каждый вектор из $A^\perp$ и $D^\perp$ в себя. В силу $\alpha\neq 1$ по (I) тогда $A^\perp = D^\perp$, т. е. $A=D$. Если и A и D обе неизотропны, то $\sigma_a\sigma_b$ переводит плоскость A в себя, $\sigma_d\sigma_c$ — плоскость D в себя. Значит, α переводит плоскости A и D и всякий вектор $\boldsymbol{g}_\infty$ в себя. В силу $\alpha\neq 1$ по (II) $A=D$. Случай же, когда одна из плоскостей A и D изотропна, а другая нет, невозможен в силу (III). В самом деле, тогда $\sigma_a\sigma_b$ переводило бы плоскость A в себя, $\sigma_d\sigma_c$ переводило бы всякий вектор из $D^\perp$ в себя; значит, α переводило бы некоторую неизотропную плоскость в себя и все векторы некоторой изотропной плоскости в себя.

4. Группы $O_3^+(K, F)$ с бинарной формой, отделяющей нуль, как евклидовы группы движений. После того как мы доказали в теореме 2, что группа $O_3^+(K, F)$ с бинарной отделяющей нуль

*) При доказательстве теоремы IV мы не будем пользоваться обратным утверждением.

формой порождается симметриями (*), нам для доказательства теоремы IV осталось, как уже обсуждалось в п. 1, установить лишь, что всякая группа (3) является группой (1), т. е. нам надо доказать, что справедлива

Теорема IV*. *Всякая группа $O_3^+(K, F)$ при характеристике поля K, отличной от двух, и бинарной форме F, отделяющей нуль, рассматриваемая совместно с симметриями* (*) *как системой образующих группы, является евклидовой группой движений.*

Проверим утверждение этой теоремы.

Основное допущение нашей системы аксиом п. 2 § 3 выполнено для группы (3); очевидно, что система образующих инвариантна. Инволютивное произведение двух образующих по теореме 1а) является симметрией σ_A.

При этом для симметрий из группы (3) выполняются такие утверждения:

Для σ_A, σ_B *всегда найдется* σ_g *такая, что* $\sigma_A, \sigma_B \mid \sigma_g$. (Аксиома 1)

Из $\sigma_A, \sigma_B \mid \sigma_g, \sigma_h$ *следует* $\sigma_A = \sigma_B$ *или* $\sigma_g = \sigma_h$. (Аксиома 2)

Если $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c \mid \sigma_E$, *то существует такая* σ_d, *что* $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$. (Аксиома 3)

Если $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c \mid \sigma_g$, то *существует такая* σ_d, *что* $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$. (Аксиома 4)

Существуют $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_d$, *для которых* $\sigma_a, \sigma_b \mid \sigma_c, \sigma_d$, $\sigma_a \neq \sigma_b$ *и* $\sigma_c \neq \sigma_d$. (Аксиома R)

По σ_a *и* σ_b *найдется такая* σ_C, *что* $\sigma_a, \sigma_b \mid \sigma_C$, *или найдется такая* σ_c, *что* $\sigma_a, \sigma_b \mid \sigma_c$. (Аксиома V*)

Справедливость этих утверждений легко устанавливается с помощью геометрических свойств метрического векторного пространства на основе теорем 1 и 3. В самом деле, проверим аксиомы 1—2: для всяких двух неизотропных плоскостей A и B найдется неизотропная прямая g такая, что $g \subset A, B$, т. е. по теореме 1б) $\sigma_A, \sigma_B \mid \sigma_g$; если σ_A, σ_B различны, то A и B тоже различны, и тем самым однозначно определена g, а значит, и σ_g. Проверим аксиому 3: неизотропные прямые a, b, c, фигурирующие в условии, в силу теоремы 1 б) принадлежат неизотропной плоскости E; в силу теоремы 3 отсюда следует требуемое. Проверим аксиому 4: неизотропные прямые a, b, c, фигурирующие в условии, в силу теоремы 1 а) перпендикулярны неизотропной прямой g, т. е. принадлежат (изотропной) плоскости, перпендикулярной g, а значит, по теореме 3 справедливо заключение аксиомы. Проверим аксиому R: выберем в качестве a и b различные неизотропные прямые некоторой изотропной плоскости E, а в качестве c, d — различные неизотропные прямые из $E^\perp$; тогда σ_a, σ_b, σ_c, σ_d в силу теоремы 1 а) удовлетворяют аксиоме R. Наконец, проверим аксиому V*: если существует неизотропная плоскость C, для которой a, $b \subset C$, то по теореме 1 б) имеем σ_a, $\sigma_b | \sigma_C$; в противном случае a и b принадлежат изотропной плоскости E, а для каждой неизотропной прямой c из $E^\perp$ в силу теоремы 1 а) имеем σ_a, $\sigma_b | \sigma_c$.

5. Группы $O_3^+(K, F)$ с тернарной формой, отделяющей нуль. Перейдем теперь к трехмерному метрическому векторному пространству, *радикал которого состоит из одного нуля*; опять-таки считаем, что характеристика основного поля отлична от 2. Согласно п. 3 § 8 ортогональность прямых и плоскостей в таком пространстве является взаимно однозначным инволютивным соответствием. Для двух заданных разных прямых a и b существует единственная прямая c, ортогональная им; при этом a, b, c компланарны в том и только в том случае, когда прямая c изотропна.

В этом и следующем пунктах мы предполагаем, что рассматриваемая тернарная форма *отделяет нуль*. Тогда нет собственно изотропных векторов (§ 8, формула (24)) и нет изотропных прямых и плоскостей.

Докажем ряд теорем о группах $O_3^+(K, F)$ с тернарной отделяющей нуль формой, элементы которых мы по-прежнему обозначаем через $\alpha, \ldots$

Теорема 1′. *Произведение $\sigma_a\sigma_b$ инволютивно тогда и только тогда, когда* (*неизотропные*) *прямые a и b ортогональны; в этом случае $\sigma_a\sigma_b = \sigma_c$, где c ортогональна a и b.*

Доказательство. Пусть $a = K\boldsymbol{a}$, $b = K\boldsymbol{b}$.

а) Пусть a и b перпендикулярны, а $c = K\boldsymbol{c}$ перпендикулярна a и b. Тогда $\boldsymbol{a}\sigma_a\sigma_b = \boldsymbol{a}\sigma_b = -\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\sigma_a\sigma_b = -\boldsymbol{b}\sigma_b = -\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}\sigma_a\sigma_b = -\boldsymbol{c}\sigma_b = \boldsymbol{c}$. Значит, для векторов базиса $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ отображение $\sigma_a\sigma_b$ совпадает с σ_c, откуда следует, что $\sigma_a\sigma_b = \sigma_c$.

б) Пусть $\sigma_a\sigma_b$ инволютивно. Тогда $\boldsymbol{a}\sigma_b\sigma_a = \boldsymbol{a}\sigma_a\sigma_b$, т. е. $(\boldsymbol{a}\sigma_b)\sigma_a = \boldsymbol{a}\sigma_b$, т. е. $\boldsymbol{a}\sigma_b$ — неподвижный вектор для σ_a и поэтому он пропорционален $\boldsymbol{a}$, т. е. $\boldsymbol{a}\sigma_b = \pm\boldsymbol{a}$. Но $\boldsymbol{a}\sigma_b = \boldsymbol{a}$ невозможно, так как $\sigma_a \neq \sigma_b$; поэтому $\boldsymbol{a}\sigma_b = -\boldsymbol{a}$, т. е. a перпендикулярна b.

Лемма 2′. а) *Если $\boldsymbol{a}\alpha = \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}\alpha = \boldsymbol{b}$ для двух линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то $\alpha = 1$.* б) *Если $\boldsymbol{a}\alpha = -\boldsymbol{a}$ для какого-то ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$, то α — симметрия σ_g, где g ортогональна $\boldsymbol{a}$.*

Доказательство. а) Пусть $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ — вектор, ортогональный $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Тогда вектор $\boldsymbol{c}\alpha$ также ортогонален $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а поэтому пропорционален $\boldsymbol{c}$: $\boldsymbol{c}\alpha = r\boldsymbol{c}$, где $r \in K$. Так как в базисе $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ преобразование α представляется матрицей с определителем r, то $r = 1$; следовательно, α переводит векторы некоторого базиса в себя и, значит, $\alpha = 1$.

б) Пусть вектор $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ ортогонален $\boldsymbol{a}$. Тогда $\boldsymbol{b}\alpha$ и $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\alpha$ ортогональны $\boldsymbol{a}$. Если $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\alpha \neq \mathbf{0}$, то положим $g = K(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\alpha)$; в противном случае g — прямая, ортогональная $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Тогда по лемме 1 $\boldsymbol{b}\alpha\sigma_g = \boldsymbol{b}$, а так как g ортогональна $\boldsymbol{a}$, то $\boldsymbol{a}\alpha\sigma_g = -\boldsymbol{a}\sigma_g = \boldsymbol{a}$. Тогда в силу а) $\alpha\sigma_g = 1$, т. е. $\alpha = \sigma_g$.

Теорема 2′. *Всякий элемент α группы представим в виде $\sigma_a\sigma_b$. Если α инволютивен, то α является симметрией σ_c.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{s}$ — произвольный вектор $\neq \mathbf{0}$. Если $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}\alpha \neq \mathbf{0}$, то положим $b = K(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}\alpha)$; в противном случае обозначим через b произвольную прямую, ортогональную $\boldsymbol{s}$. Тогда по лемме 1 $\boldsymbol{s}\alpha\sigma_b = -\boldsymbol{s}$; в силу леммы 2′б) $\alpha\sigma_b$ — некоторая симметрия σ_a, откуда $\alpha = \sigma_a\sigma_b$.

Второе утверждение теоремы вытекает из теоремы 1′.

Теорема 3′. *Произведение $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ инволютивно в том и только в том случае, когда (неизотропные) прямые a, b, c компланарны.*

Доказательство. а) Если a, b, c принадлежат некоторой плоскости E, то существует перпендикулярный им ненулевой вектор $\boldsymbol{g}$. Каждая из симметрий σ_a, σ_b, σ_c, а значит, и их произведение, переводит $\boldsymbol{g}$ в $-\boldsymbol{g}$. Поэтому по лемме 2′б) $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ является симметрией σ_d, где $d \subset E$.

б) Пусть $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ инволютивно и, следовательно, по теореме 2′ совпадает с некоторой симметрией σ_d. Если $\sigma_a = \sigma_b$, т. е. $a = b$, то утверждение тривиально. Если же $\sigma_a\sigma_b \neq 1$, то возьмем вектор $\boldsymbol{g} \neq \mathbf{0}$, перпендикулярный a и b и вектор $\boldsymbol{h} \neq \mathbf{0}$, перпендикулярный c и d. Тогда $\boldsymbol{g}\sigma_a\sigma_b = -\boldsymbol{g}\sigma_b = \boldsymbol{g}$ и точно так же $\boldsymbol{h}\sigma_d\sigma_c = \boldsymbol{h}$. В силу $\sigma_a\sigma_b = \sigma_d\sigma_c \neq 1$ по лемме 2′а) векторы $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ пропорциональны. Тогда a, b, c, d перпендикулярны $\boldsymbol{g}$, а значит, компланарны.

6. Группы $O_3^+(K, F)$ с тернарной формой, отделяющей нуль, как эллиптические группы движений. После того как в теореме 2′ доказано, что группа $O_3^+(K, F)$ с тернарной отделяющей нуль формой порождается симметриями (*), для доказательства теоремы V остается только проверить, что каждая группа (3′) является группой (1′):

Теорема V*. *Всякая группа $O_3^+(K, F)$ при характеристике поля K, отличной от двух, и тернарной отделяющей нуль форме F, рассматриваемая совместно с симметриями (*) в качестве системы образующих, является эллиптической группой движений.*

Покажем, что группа (3′) удовлетворяет системе аксиом эллиптической группы движений, приведенной в конце п. 2 § 7.

Основное допущение выполнено, ибо в силу теоремы 2 симметрии (*) — это все инволютивные элементы группы (3′) и они образуют систему образующих группы. Так как форма F тернарна, то в векторном пространстве нет прямой, которая была бы ортогональна всем прямым (ср. § 8, (23)), а значит, по теореме 1′ в группе (3′) ни один инволютивный элемент не коммутирует со всеми инволютивными элементами.

Кроме того, симметрии (*) из группы (3′) удовлетворяют таким требованиям:

T. *Если* $\sigma_a \neq \sigma_b$ *и* $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$, $\sigma_a\sigma_b\sigma_d$ *инволютивны, то* $\sigma_a\sigma_c\sigma_d$ *инволютивно.*

V. *Для* σ_a *и* σ_b *найдется* σ_c *такая, что* $\sigma_a, \sigma_b \mid \sigma_c$.

T выполняется в силу теоремы 3′, так для компланарности прямых векторного пространства имеет место транзитивность (линейная зависимость транзитивна). V выполняется в силу теоремы 1′, так как в векторном пространстве у любых двух прямых найдется неизотропный перпендикуляр.

7. Группы $O_3^+(K, F)$ с произвольной тернарной формой. Теоремы 1′, 2′, 3′ из п. 5 справедливы для любой группы $O_3^+(K, F)$ с тернарной формой F, т. е. *без допущения об отделимости нуля.* Требуется лишь несколько видоизменить доказательства.

Предпошлем доказательствам четыре замечания об изотропных векторах в трехмерном метрическом векторном пространстве с тернарной формой F:

(I) *Если* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ — *собственно изотропные ортогональные векторы, то* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *пропорциональны.*

(II) *Если* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *изотропны и линейно независимы, то линейная комбинация* $r\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}$ (*где* $r, s \in K$ *и* $r, s \neq 0$) *представляет собой неизотропный вектор.*

(III) *Если* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *попарно ортогональны,* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *не изотропны и* $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$, *то* $\boldsymbol{c}$ *не изотропен.*

(IV) *Если* $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ *и вектор* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *изотропен, то* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *ортогонален* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

Так как в трехмерном векторном пространстве, радикал которого состоит из одного нуля, ортогональность прямых и плоскостей представляет собой взаимно однозначное соответствие, то в этом случае

Если $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *перпендикулярны* $\boldsymbol{c}$ *и* $\boldsymbol{d}$, *причем все векторы отличны от нуля, то* $\boldsymbol{a}$ *пропорционален* $\boldsymbol{b}$ *или* $\boldsymbol{c}$ *пропорционален* $\boldsymbol{d}$.

Отсюда следуют (I) и (III). В самом деле, условие (I) означает, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. А если бы при условиях (III) вектор $\boldsymbol{c}$ был изотропным, то $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ были бы ортогональны $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Тогда $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$ был бы пропорционален $\boldsymbol{c}$ и тем самым изотропным, что противоречит условию.

Доказательство (II). В силу (I) изотропные линейно независимые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не ортогональны, т. е. $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$. С другой стороны, в силу $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 0$ имеем $F(r\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}, r\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}) = 2rsF(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, а это и значит, что вектор $r\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}$ не изотропен.

Доказательство (IV). Из $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ получаем

$$F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 2(F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) = \\ = 2F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 2(F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) + F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})) = 2F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}).$$

Модифицируем теперь доказательства п. 5.

К теореме 1′. Прямая c, перпендикулярная двум взаимно перпендикулярным неизотропным прямым a и b, в силу (III) сама не изотропна.

К лемме 2′а). Доказательство требует дополнительного рассмотрения в том случае, когда векторы, ортогональные $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, изотропны. Тогда выберем вектор $\boldsymbol{c}$ так, чтобы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ были линейно независимы. Имеем $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\alpha) = F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ и $F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\alpha) = F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, т. е. $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\alpha - \boldsymbol{c}) = F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\alpha - \boldsymbol{c}) = 0$, т. е. $\boldsymbol{c}\alpha - \boldsymbol{c}$ ортогонален $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а значит, в нашем случае изотропен. Применяя (IV) к векторам $\boldsymbol{c}\alpha$ и $-\boldsymbol{c}$, видим, что вектор $\boldsymbol{c}\alpha - \boldsymbol{c}$ ортогонален $\boldsymbol{c}$. Значит, вектор $\boldsymbol{c}\alpha - \boldsymbol{c}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, образующим базис. Так как форма F тернарна, то $\boldsymbol{c}\alpha - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, т. е. $\boldsymbol{c}\alpha = \boldsymbol{c}$ (ср. § 8, (23)). Отсюда $\alpha = 1$.

Доказательство леммы 2′б). Пусть $\boldsymbol{b}$ — неизотропный вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{a}$ (такой вектор существует в силу (II)). Тогда векторы $\boldsymbol{b}\alpha$ и $\boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{b}\alpha$ ортогональны $\boldsymbol{a}$. Разберем два случая:

Случай 1. *Вектор $\boldsymbol{a}$ неизотропный.* Вектор $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\alpha$ не собственно изотропный. Ведь будь он собственно изотропным, он был бы ортогонален $\boldsymbol{b}$ в силу (IV), и тогда $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\alpha$ составили бы тройку попарно ортогональных векторов, два из которых не изотропны, а третий собственно изотропен, что противоречит (III). Обозначим $g = K(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\alpha)$, если $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\alpha \neq \boldsymbol{0}$; в противном случае пусть g — прямая, ортогональная $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Тогда g неизотропная (во втором случае это следует из (III)). Следовательно, по лемме 1 $\boldsymbol{b}\alpha\sigma_g = \boldsymbol{b}$ и g перпендикулярна $\boldsymbol{a}$, откуда $\boldsymbol{a}\alpha\sigma_g = -\boldsymbol{a}\sigma_g = \boldsymbol{a}$. По лемме 2′а) ($\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ и вектор $\boldsymbol{b}$ неизотропный, значит, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно независимы) тогда $\alpha\sigma_g = 1$, т. е. $\alpha = \sigma_g$.

Случай 2. *Вектор $\boldsymbol{a}$ собственно изотропный.* Если вектор $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\alpha$ не изотропен, то мы можем положить $g = K(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\alpha)$ и, как выше, заключить, что $\alpha = \sigma_g$. Мы утверждаем, что вектор $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\alpha$ всегда не изотропен. В противном случае по лемме 1 был бы не изотропен вектор $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\alpha$ и для $h = K(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\alpha)$ мы имели бы $\boldsymbol{b}\alpha\sigma_h = -\boldsymbol{b}$, и так как h ортогональна $\boldsymbol{a}$, получили бы $\boldsymbol{a}\alpha\sigma_h = -\boldsymbol{a}\sigma_h = \boldsymbol{a}$. Так как $\alpha\sigma_h$ переводит неизотропный вектор $\boldsymbol{b}$ в $-\boldsymbol{b}$, то, согласно относящимся к случаю 1 рассмотрениям, $\alpha\sigma_h$ явилось бы некоторой симметрией σ_l. Таким образом, мы пришли бы к противоречию, ибо симметрия относительно неизотропной прямой l не может перевести собственно изотропный вектор $\boldsymbol{a}$ в отличный от него вектор.

Доказательство теоремы 2′. Для данного α найдется ненулевой вектор $\boldsymbol{s}$ такой, что вектор $\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}\alpha$ не собственно изотропен.

В самом деле, если для α существует неподвижный ненулевой вектор, то последний уже обладает требуемым свойством. В противном случае вектор $\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\alpha$ обращается в нуль только при $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$. Значит, линейное отображение $\boldsymbol{u}$ на $\boldsymbol{u}^*$ взаимно однозначно, а так как размерность сохраняется, то оно является отображением векторного пространства на себя; при этом прообраз $\boldsymbol{s}$ произвольного неизотропного вектора $\boldsymbol{s}^*$ обладает требуемым свойством.

Исходя из найденного вектора $\boldsymbol{s}$, мы можем рассуждать, как прежде. Нужно только в случае $\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}\alpha=\boldsymbol{0}$ определить b как произвольную неизотропную и ортогональную $\boldsymbol{s}$ прямую; она существует в силу (II).

К теореме 3′. Доказательство сохраняется дословно.

Из этих теорем и доказанного в п. 6 получается следующая теорема при произвольной тернарной форме:

Теорема 4. *Для всякой группы $O_3^+(K, F)$ при характеристике поля K, отличной от двух, и тернарной форме F справедливо следующее*:

Инволютивные элементы группы — это симметрии (*) *относительно неизотропных прямых. Всякий элемент группы представим в виде произведения двух инволютивных элементов. Центр группы состоит из одного лишь единичного элемента* *). *Инволютивные элементы группы удовлетворяют условию транзитивности* T.

Из биинволютивности вытекает, что всякий элемент $\alpha\neq 1$ группы $O_3^+(K, F)$ с тернарной формой является *поворотом* с однозначно определенной осью неподвижных векторов. В самом деле, если представить α в виде $\alpha=\sigma_a\sigma_b$, а c — прямая, ортогональная a и b, то $\sigma_a\sigma_b$ переводит всякий вектор c в себя и по лемме 2′ не имеет других неподвижных векторов.

8. Законы, которым подчиняются инволютивные элементы группы $O_3^+(K, F)$ с тернарной формой, не отделяющей нуль. Рассмотрим группу $O_3^+(K, F)$ с *тернарной, но не отделяющей нуль формой* F (см. (3″)). Из теоремы 3 § 8 и того, что группа (3″) порождается симметриями (*), вытекает справедливость теоремы 6.

Мы хотим установить законы, которым подчиняются инволютивные элементы группы (3″), т. е. симметрии относительно

*) Это устанавливается с помощью замечания к теореме 18 § 3.

неизотропных прямых. Группа (3″) отличается от группы (3′) с тернарной отделяющей нуль формой прежде всего тем, что в ней не всякие два инволютивных элемента соединимы. Выполняется соотношение:

$\sim$V. *Существуют* σ_a, σ_b, *которые несоединимы.*

Точнее, σ_a и σ_b несоединимы по теореме 1′ в том и только в том случае, когда a и b — разные неизотропные прямые, а прямая c, перпендикулярная a и b, изотропна. Сейчас мы сформулируем закон, который скажет о несоединимых элементах большее. В силу (I) и (II) п. 7 верны следующие утверждения:

(I) *Две разные изотропные прямые не ортогональны.*

(II) *Три разные изотропные прямые не компланарны.*

Эти утверждения можно сформулировать в виде таких законов о несоединимых инволютивных элементах:

UV1. *Если ни* σ_a, σ_b, *ни* σ_c, σ_d *несоединимы, то существует* σ_g *такой, что* $\sigma_a\sigma_b\sigma_g$ *и* $\sigma_c\sigma_d\sigma_g$ *инволютивны.*

UV2. *Если ни* σ_a, σ_b, *ни* σ_a, σ_c, *ни* σ_a, σ_d *несоединимы, то либо* $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$, *либо* $\sigma_a\sigma_b\sigma_d$, *либо* $\sigma_a\sigma_c\sigma_d$ *инволютивно.*

Доказательство UV1. По условию существуют изотропные прямые u и v такие, что u перпендикулярна a и b, а v перпендикулярна c и d. Если $u=v$, то a, b, c, d ортогональны этой прямой, значит, компланарны, и наше утверждение справедливо по теореме 3′ (при замене g на a). Если $u=v$, то возьмем в качестве g прямую, ортогональную u и v. В силу (I) g не изотропна. Так как a, b, g ортогональны u, а c, d, g ортогональны v, то как a, b, g, так и c, d, g компланарны. В силу теоремы 3′ отсюда вытекает наше утверждение.

Доказательство UV2. По условию существуют изотропные прямые u, v и w такие, что $u\perp a, b$; $v\perp a, c$; $w\perp a, d$. Так как прямые u, v, w ортогональны a, то они компланарны. В силу (II) они не все различны. Если, например, $u=v$, то a, b, c ортогональны этой прямой, а значит, компланарны, и тогда по теореме 3′ $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ инволютивно.

Итак, справедлива

Теорема 5. *Для группы* $O_3^+(K, F)$ *над полем характеристики* $\neq 2$ *при тернарной и не отделяющей нуль форме* F:

Всякий элемент представим в виде произведения двух инволютивных элементов, а для инволютивных элементов выполняются требования T, $\sim$V, UV1, UV2.

Позже (см. § 11) мы докажем, что, и обратно, всякая группа с этими свойствами представима в виде ортогональной группы $O_3^+(K, F)$ указанного вида.

Литература к § 9. Дьёдонне [1], [3], Бэр [6], Эйхлер [1], Артин [2].

§ 10. Представление метрических векторных пространств и их ортогональных групп с помощью гиперкомплексных систем

Теоремы V и VI из § 9 показывают, что группа движений обыкновенной проективно-метрической плоскости может быть представлена как собственно ортогональная группа трехмерного метрического векторного пространства с тернарной формой F над некоторым полем K. Иными словами, это есть группа автоморфизмов некоторой векторной группы — аддитивной группы, в которой операторами-множителями служат элементы поля K и которая «метризована» посредством формы F. Можно сделать еще один шаг на пути алгебраизации, привлекая к рассмотрению гиперкомплексную систему над K, обладающую тем свойством, что векторную группу можно представить с помощью аддитивной группы гиперкомплексной системы (точнее, как некоторую подгруппу), а собственно ортогональную группу — с помощью мультипликативной группы гиперкомплексной системы (точнее, как некоторую фактор-группу). В качестве такой гиперкомплексной системы мы используем кватернионы над полем K, а если форма F не отделяет нуль, то рассмотрим также алгебру матриц второго порядка над полем K.

Попутно получится некий новый вспомогательный объект: норма собственно ортогонального преобразования, — который мы используем для построения моделей нашей системы аксиом, т. е. метрических плоскостей.

Рассуждения настоящего параграфа относятся к *обыкновенному* случаю, т. е. к метрическому векторному пространству без радикала.

1. Нормированная тернарная форма. Пусть дано трехмерное метрическое векторное пространство над полем K характеристики $\neq 2$ с тернарной симметрической билинейной формой F. Если заменить форму F на пропорциональную ей форму cF, где $c \neq 0$, $c \in K$, то это несущественное изменение никак не скажется на ортогональной группе. Для любой тернарной формы есть пропорциональная ей форма, определитель которой принадлежит квадратичному классу вычетов $\{1\}$. (Достаточно взять форму cF, где c — элемент, представляющий определитель F.) Если определитель формы принадлежит классу $\{1\}$, то мы называем форму *нормированной.*

Если форма F нормирована, а $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — линейно независимые попарно ортогональные векторы, то F в этом базисе имеет вид $k_1x_1y_1+k_2x_2y_2+k_3x_3y_3$, где $k_i=F(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)$, а произведение $k_1k_2k_3$ является квадратом $c^2 \neq 0$ из K. Тогда в ортогональном базисе e_1, e_2, $\frac{k_1k_2}{c}e_3$ форма F имеет вид

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = k_1x_1y_1 + k_2x_2y_2 + k_1k_2x_3y_3, \tag{1}$$

где k_1, $k_2 \neq 0$, k_1, $k_2 \in K$.

Теорема 1. *Всякая нормированная тернарная симметрическая билинейная форма в подходяще выбранном ортогональном базисе имеет вид* (1).

В таком ортогональном базисе мы введем *векторное произведение* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, которое определяется как вектор с компонентами

$$k_2\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad -k_1\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

При этом $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0}$ тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно независимы, то $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ представляет однозначно определенную прямую, ортогональную $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Справедливо *тождество Лагранжа* *)

$$f([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})f(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) - f^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \tag{3}$$

Таким образом, векторное произведение нормировано так, что если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны, то значение формы на векторном произведении $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равно произведению значений формы на $\boldsymbol{a}$ и на $\boldsymbol{b}$.

Если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ не изотропны, то симметрия относительно прямой, представляемой вектором $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, является соединением симметрий относительно прямых, представляемых векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Значения формы $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ на векторах $\boldsymbol{a}$, представляющих некоторую фиксированную прямую, составляют квадратичный класс вычетов, который называется *значением формы на прямой.* Значения формы на двух прямых совпадают в том и только в том случае, когда векторы обеих прямых можно перевести друг в друга ортогональным преобразованием; в этом случае их можно перевести друг в друга даже симметрией (ср. лемму 1 § 9). Значение формы на изотропной прямой равно $\{0\}$. Можно задаться вопросом, имеют ли геометрический смысл другие значения форм. Ответом, в частности, является

---

*) Известное *тождество Лагранжа*

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + \\ + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

получается отсюда при $k_1 = k_2 = 1$. (*Прим. ред.*)

Теорема 2. *Пусть дано трехмерное метрическое векторное пространство с нормированной тернарной формой. Если значение формы на некоторой прямой g равно $\{-1\}$, то существуют ровно две разные изотропные прямые, ортогональные g. Если значение формы на g равно $\{0\}$, то g — единственная изотропная прямая, ортогональная g. Если значение формы на g отлично от $\{0\}$ и $\{-1\}$, то нет изотропных прямых, которые были бы ортогональны g.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{g}$ — вектор, представляющий прямую g. Изотропные векторы, ортогональные $\boldsymbol{g}$, являются решениями $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ однородной системы уравнений $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, $f(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{x}) = 0$. Подставив в квадратное уравнение вместо одной из неизвестных x_1, x_2, x_3 ее значение из линейного уравнения $f(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{x}) = 0$, получим квадратное уравнение для двух неизвестных, дискриминант которого с точностью до отличного от нуля квадратичного множителя равен $-f(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g})$. Три случая: когда $-f(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g})$ есть отличный от нуля квадрат, когда оно равно нулю и когда это число не равно нулю и не является квадратом, — приводят нас к сформулированным утверждениям.

Назовем прямую, которая ортогональна двум разным изотропным прямым, *секущей*. Основание для этого таково: интерпретируя метрическое векторное пространство с тернарной формой как проективно-метрическую плоскость, видим, что изотропные прямые (если они существуют) образуют коническое сечение (ср. § 8). Поэтому прямые векторного пространства, ортогональные двум разным изотропным прямым, ортогональны двум прямым конического сечения, т. е. пересекают коническое сечение в двух точках. Теорема 2 означает тогда, что *секущая — это прямая, значение формы на которой равно* $\{-1\}$.

Извлечем некоторые следствия из теоремы 2.

Если нормированная форма F не отделяет нуль, то возьмем изотропный вектор $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$ и прямую, ортогональную прямой $K\boldsymbol{e}_2$ и отличную от нее. По теореме 2 значение формы на этой прямой равно $\{-1\}$ и поэтому на этой прямой существует вектор $\boldsymbol{e}_1$, для которого $F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = -1$. По теореме 2 существует изотропная прямая, ортогональная прямой $K\boldsymbol{e}_1$, но отличная от $K\boldsymbol{e}_2$, а по п. 8 § 9, (1) — и не ортогональная ей. На ней есть вектор $\boldsymbol{e}_3$, для которого $F(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = -\frac{1}{2}$. В базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ форма F имеет вид

$$g_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -x_1y_1 - \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2), \tag{4}$$

а определитель ее равен $1/4$. Тогда $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $-\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ — ортогональный базис, в котором F имеет специальный нормальный вид (1)

$$f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3, \tag{5}$$

с определителем 1. Итак, имеет место

Теорема 3. *В трехмерном векторном пространстве всякая нормированная тернарная не отделяющая нуль симметрическая билинейная форма имеет в подходящем базисе вид* (4), *а в подходящем ортогональном базисе — вид* (5).

Таким образом, над полем K характеристики $\neq 2$ имеются по существу всего-навсего одно трехмерное метрическое пространство, содержащее собственно изотропные векторы и не содержащее радикала, и единственная собственно ортогональная группа $O_3^+(K, F)$ с тернарной не отделяющей нуль формой F.

Квадратичная форма $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, принадлежащая тернарной не отделяющей нуль симметрической билинейной форме $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, представляет все элементы из K. В самом деле, это справедливо уже для слагаемого $-x_2x_3$ формы $g_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, а также для слагаемого $-x_2^2 + x_3^2$ формы $f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$. В силу тождества

$$c = -\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+c}{2}\right)^2$$

всякий элемент из K можно представить в виде разности двух квадратов из K.

Если форма отделяет нуль, то все обстоит совсем иначе. Само уже существование отделяющей нуль тернарной формы является сильным требованием, налагаемым на поле K. Принадлежащая форме квадратичная форма в силу теоремы 2 не представляет элементы квадратичного класса вычетов $\{-1\}$. Это можно выразить так:

Теорема 4. *Если квадратичная форма*

$$k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_1k_2x_3^2, \quad \text{где} \quad k_1, k_2 \neq 0, \ k_1, k_2 \in K, \tag{6}$$

в поле K представляет нуль лишь тривиальным образом, то и форма

$$x_0^2 + k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_1k_2x_3^2 \tag{7}$$

в поле K представляет нуль лишь тривиальным образом.

Теореме 4 можно дать и иное доказательство.

Заметим сначала следующее. Всякая квадратичная форма с коэффициентами из поля K вместе с любым элементом $a \in K$ представляет также всякий элемент из квадратичного класса вычетов $\{a\}$, т. е. при $a \neq 0$ представляет и $1/a$. Отличные от нуля элементы, представимые квадратичной формой, составляют мультипликативную группу, поскольку форма представляет 1, а произведение двух значений формы само является значением формы. Это справедливо для всякой бинарной квадратичной формы

$$y_1^2 + k_1y_2^2. \tag{8}$$

То, что произведение двух значений формы само является значением формы, видно из известного тождества:

$$\left(a_1^2+k_1a_2^2\right)\left(b_1^2+k_1b_2^2\right)=\left(a_1b_1-k_1a_2b_2\right)^2+k_1\left(a_1b_2+a_2b_1\right)^2.$$

Так как форма (6) $k_1x_1^2+k_2\left(x_2^2+k_1x_3^2\right)$ по условию представляет нуль лишь тривиальным образом, то форма (8) представляет нуль лишь тривиальным образом, а элемента $-\frac{k_1}{k_2}$ она не представляет. Так как она представляет k_1, то она не представляет $-k_2$.

Пусть теперь форма (7) представляет нуль:

$$\left(c_0^2+k_1c_1^2\right)+k_2\left(c_2^2+k_1c_3^2\right)=0. \tag{9}$$

Тогда $c_2^2+k_1c_3^2=0$, ибо в противном случае число $-k_2$ представлялось бы в виде частного двух элементов, представимых формой (8), а значит, и само представлялось бы формой (8). Поэтому в (9) $c_2^2+k_1c_3^2=0$ и $c_0^2+k_1c_1^2=0$, а так как форма (8) представляет нуль лишь тривиальным образом, то $c_0=c_1=c_2=c_3=0$.

2. Кватернионы. Пусть K — поле характеристики $\neq 2$, а k_1, $k_2 \in K$ и отличны от нуля и друг от друга. *Кватернионы* (обобщенные)

$$\alpha=a_0+a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3 \tag{10}$$

с указанной ниже ассоциативной таблицей умножения базисных элементов $1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образуют гиперкомплексную систему над K, так называемую *систему кватернионов* $Q(K;\ k_1,\ k_2)$:

	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$-k_1$	$\mathbf{e}_3$	$-k_1\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	$-k_2$	$k_2\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$k_1\mathbf{e}_2$	$-k_2\mathbf{e}_1$	$-k_1k_2$

Если $\beta=b_0+b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3$, то кватернион $\alpha\beta$ имеет компоненты

$$\left.\begin{aligned}&a_0b_0-k_1a_1b_1-k_2a_2b_2-k_1k_2a_3b_3,\\&a_0b_1+a_1b_0+k_2a_2b_3-k_2a_3b_2,\\&a_0b_2+a_2b_0-k_1a_1b_3+k_1a_3b_1,\\&a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Назовем

$$\bar{\alpha}=a_0-a_1\mathbf{e}_1-a_2\mathbf{e}_2-a_3\mathbf{e}_3 \tag{12}$$

кватернионом, *сопряженным* α. Справедливы тождества

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta}=\bar{\beta}\bar{\alpha}, \quad \bar{\bar{\alpha}}=\alpha. \tag{13}$$

Таким образом, взятие сопряженного элемента представляет собой инволютивный антиавтоморфизм системы кватернионов.

Следом кватерниона α назовем число

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2a_0, \tag{14}$$

а его *нормой* $f(\alpha, \alpha)$ число

$$\alpha\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\alpha = a_0^2 + k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 + k_1 k_2 a_3^2. \tag{15}$$

При этом справедливо следующее *правило норм*:

$$f(\alpha\beta, \alpha\beta) = f(\alpha, \alpha) f(\beta, \beta), \tag{16}$$

ибо $\alpha\beta\overline{\alpha\beta} = \alpha\beta\bar{\beta}\bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha} \cdot \beta\bar{\beta}$, так как $\beta\bar{\beta}$, как элемент из K, коммутирует со всяким кватернионом.

Если $f(\alpha, \alpha) = 0$, то α — делитель нуля. Если $f(\alpha, \alpha) \neq 0$, то у α есть обратный кватернион

$$\alpha^{-1} = \frac{\bar{\alpha}}{f(\alpha, \alpha)}. \tag{17}$$

Кватернионы с ненулевой нормой образуют группу по умножению, называемую *мультипликативной группой системы кватернионов*.

Система кватернионов $Q(K; k_1, k_2)$ совместно с кватернарной формой норм

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\alpha) = \\ = a_0 b_0 + k_1 a_1 b_1 + k_2 a_2 b_2 + k_1 k_2 a_3 b_3, \tag{18}$$

рассматриваемой как симметрическая билинейная форма, является четырехмерным метрическим пространством. $f(\alpha, \beta)$ равна половине следа любого из произведений $\bar{\alpha}\beta$, $\beta\bar{\alpha}$, $\alpha\bar{\beta}$, $\bar{\beta}\alpha$.

Обратим внимание на трехмерное подпространство кватернионов со следом нуль, на так называемые *«чистые» кватернионы*:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \tag{19}$$

с тернарной симметрической билинейной формой

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) = k_1 a_1 b_1 + k_2 a_2 b_2 + k_1 k_2 a_3 b_3. \tag{20}$$

$f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ отличается от половины следа произведения $\mathbf{ab}$ множителем -1. Ортогональность двух чистых кватернионов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ означает, что $\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}$; изотропны те чистые кватернионы, норма $f(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ которых обращается в нуль.

Называем как обычно, для произвольного кватерниона α половину его следа $\frac{1}{2}(\alpha+\bar{\alpha})=a_0$ *скалярной частью* кватерниона, а чистый кватернион $\frac{1}{2}(\alpha-\bar{\alpha})=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3$ — *векторной частью* кватерниона.

Для чистого кватерниона $\mathbf{a}$ имеем $f(\mathbf{a}, \mathbf{a})=-\mathbf{a}^2$: *квадрат чистого кватерниона содержится в поле* K. Кроме чистых кватернионов, этим свойством обладают только сами элементы поля K.

Всякий кватернион представим в виде произведения двух чистых кватернионов. В самом деле, если $\gamma=c_0+\mathbf{c}$, то существует чистый кватернион $\mathbf{x}$, для которого $f(\mathbf{c}, \mathbf{x})=0$, а $f(\mathbf{x}, \mathbf{x})\neq 0$ (ср. п. 7 § 9, (II) или теорему 2 этого параграфа). Обозначив такой кватернион через $\mathbf{b}$, видим, что произведение $\gamma\mathbf{b}$, а значит, $-\frac{\gamma\mathbf{b}}{f(\mathbf{b}, \mathbf{b})}=\gamma\mathbf{b}^{-1}$ — также чистый кватернион. Полагая $\gamma\mathbf{b}^{-1}=\mathbf{a}$, получаем $\gamma=\mathbf{ab}$.

Два кватерниона с ненулевой векторной частью коммутируют: $\alpha\beta=\beta\alpha$ — тогда и только тогда, когда их векторные части пропорциональны. Лишь элементы поля K коммутируют со всеми кватернионами.

Теперь рассмотрим собственно ортогональную группу $O_3^+(K, f)$ векторного пространства чистых кватернионов. Симметрия относительно неизотропного вектора $\mathbf{a}$ (т. е. относительно прямой $K\mathbf{a}$) по формуле $(*)$ § 9 имеет вид

$$\mathbf{x}^*=-\mathbf{x}+\frac{2f(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{f(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\mathbf{a}=-\mathbf{x}+\frac{\mathbf{xa}+\mathbf{ax}}{\mathbf{a}^2}\mathbf{a}=-\mathbf{x}+\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\mathbf{a}+\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\mathbf{xa},$$

т. е.

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{a}^{-1}\mathbf{xa}, \quad \text{где} \quad f(\mathbf{a}, \mathbf{a})\neq 0. \tag{21}$$

Значит, *кватернион, симметричный данному кватерниону относительно третьего кватерниона* $\mathbf{a}$, *— это образ данного кватерниона при внутреннем автоморфизме, порожденном третьим кватернионом* $\mathbf{a}$. Это отображение совпадает с внутренним автоморфизмом, порожденным кватернионами вида $c\mathbf{a}$, где $c\neq 0$, $c\in K$, и только ими.

(То, что отображение (21) является симметрией относительно $\mathbf{a}$, можно установить и непосредственно из того, что оно является линейным преобразованием векторного пространства, из того, что $\mathbf{a}^*=\mathbf{a}$, и из того, что для любого вектора $\mathbf{x}$, ортогонального $\mathbf{a}$, его образ $\mathbf{x}^*=\mathbf{a}^{-1}\mathbf{xa}=\mathbf{a}^{-1}(-\mathbf{ax})=-\mathbf{x}$.)

Так как всякое собственно ортогональное преобразование можно в силу теоремы 2' § 9 представить в виде произведения двух симметрий, то его можно записать в виде

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}^{-1}\mathbf{xab} \qquad (f(\mathbf{aa}), f(\mathbf{b}, \mathbf{b})\neq 0), \tag{22}$$

и в виде
$$\mathbf{x}^* = \gamma^{-1}\mathbf{x}\gamma \qquad (f(\gamma, \gamma) \neq 0). \tag{23}$$

Как и выше, это отображение задается всеми кватернионами $c\gamma$, где $c \neq 0$, $c \in K$, и только ими. Обратно, так как всякий кватернион с ненулевой нормой можно представить в виде произведения двух чистых кватернионов с ненулевыми нормами, то отображение (23) при любом γ, где $f(\gamma, \gamma) \neq 0$, является собственно ортогональным преобразованием. Итак, *в векторном пространстве чистых кватернионов собственно ортогональные преобразования — это внутренние автоморфизмы, которые порождаются кватернионами с ненулевой нормой.* Таким образом, мы доказали, что справедлива

Теорема 5. *Собственно ортогональная группа $O_3^+(K, f)$ пространства чистых кватернионов системы кватернионов $Q(K;\ k_1,\ k_2)$ изоморфна фактор-группе мультипликативной группы системы кватернионов по ее центру (мультипликативной группе поля K).*

Отображение (23) переводит все чистые кватернионы, пропорциональные векторной части γ, — т. е. некоторую прямую векторного пространства — в себя. Это прямая, каждый вектор которой неподвижен, определена однозначно, поскольку отображение отлично от тождества. Если оно записано в виде (22), то эта прямая, каждый вектор которой неподвижен, представляется чистым кватернионом $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в силу тождества
$$\mathbf{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) + \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}), \tag{24}$$
указывающего разложение произведения $\mathbf{ab}$ двух чистых кватернионов на два слагаемых: на скалярную часть, равную $-f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, и на векторную часть $\frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba})$, которая как раз и представляет определенное в п. 1 векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Попутно из (24) в силу правила норм сразу получается тождество Лагранжа:
$$f(\mathbf{a}, \mathbf{a})\,f(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = f(\mathbf{ab}, \mathbf{ab}) = f^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + f([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{a}, \mathbf{b}]). \tag{25}$$

Если тернарная метрическая форма (20) пространства чистых кватернионов из системы кватернионов $Q(K;\ k_1,\ k_2)$ отделяет нуль, то по теореме 4 и кватернарная форма норм (18) системы кватернионов отделяет нуль. Тогда система кватернионов оказывается телом (некоммутативным), ибо мультипликативная группа в этом случае состоит из всех отличных от нуля кватернионов.

Теперь рассмотрим произвольное трехмерное метрическое векторное пространство с тернарной формой над полем K. Нормируем форму и выберем ортогональный базис, в котором она имеет вид (1), что возможно в силу теоремы 1. Тогда это векторное пространство можно представить в виде векторного пространства чистых кватернионов системы $Q(K;\ k_1,\ k_2)$ кватернионов; собственно ортогональная группа данного векторного пространства представится группой внутренних автоморфизмов чистых кватернионов, определяемых произвольными кватернионами из $Q(K;\ k_1,\ k_2)$ с ненулевой нормой. Итак, пару — векторная группа и собственно ортогональная группа метрического векторного пространства — можно представить аддитивной и мультипликативной группами системы кватернионов:

Теорема 6. *Всякая группа $O_3^+(K,\ F)$ при поле K характеристики $\neq 2$ и тернарной форме F изоморфна фактор-группе мультипликативной группы системы кватернионов над K по ее центру.*

При кватернионном представлении каждому собственно ортогональному преобразованию γ сопоставляются четыре однородных параметра rc_0, rc_1, rc_2, rc_3 из поля K $(r\neq 0)$. Если γ — не тождественное преобразование и рассматривается как поворот (теорема 4 § 9), то $r(c_1,\ c_2,\ c_3)$ — вектор, представляющий ось вращения, а c_0 — *параметр поворота*, отнесенный к неподвижному вектору $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ (неподвижному вектору $r(c_1,\ c_2,\ c_3)$ отвечает параметр rc_0 поворота). Параметр поворота для инволютивного поворота равен нулю.

В абелевой подгруппе, образованной поворотами вокруг одной и той же оси, параметры поворота, отвечающие фиксированному вектору $\boldsymbol{c}$, представляющему ось, складываются по правилу

$$\frac{c_0c_0' - f(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c})}{c_0 + c_0'}, \tag{26}$$

как можно усмотреть из выражения для произведения соответствующих кватернионов. Для любого собственно ортогонального преобразования γ можно указать параметр поворота, если представить γ в виде произведения двух симметрий. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представляют оси симметрий, то по (24) $-f(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ есть параметр поворота, принадлежащий неподвижному вектору $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$.

Если K — поле вещественных чисел и $k_1=k_2=1$, то группа $O_3^+(K,\ f_1)$ при $f_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ — это группа поворотов вещественного евклидова пространства вокруг фиксированной точки. Если представить ось поворота единичным вектором $\boldsymbol{c}$, то принадлежащий ему параметр поворота равен $\mp \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}$, где ϑ — угол поворота. Эта группа представляет одновременно группу движений вещественной эллиптической плоскости.

Задачи. 1. Для произведения двух кватернионов справедлива формула

$$(a_0 + \mathrm{a})(b_0 + \mathrm{b}) = a_0 b_0 - f(\mathrm{a}, \mathrm{b}) + a_0 \mathrm{b} + b_0 \mathrm{a} + [\mathrm{a}, \mathrm{b}].$$

2. Полная ортогональная группа $O_3(K, f)$ векторного пространства чистых кватернионов состоит из отображений (23) и отображений $\mathrm{x}^* = \gamma^{-1} \bar{\mathrm{x}} \gamma$, где $f(\gamma, \gamma) \neq 0$. Она порождается своими инволютивными элементами. Сформулировать законы, которым подчиняются ее инволютивные элементы.

3. Норма собственного ортогонального преобразования. Норма кватернионов $f(\alpha, \alpha)$ гомоморфно отображает систему кватернионов на подгруппу мультипликативной группы поля K; при этом центр группы кватернионов отображается на группу отличных от нуля квадратов поля K. Следовательно, фактор-группа мультипликативной группы системы кватернионов по ее центру отображается на подгруппу мультипликативной группы квадратичных классов вычетов (отличных от $\{0\}$) поля K.

Из представления собственно ортогональной группы кватернионами (теорема 6) следует

Теорема 7. *Каждому элементу α из группы $O_3^+(K, F)$ (где F — нормированная тернарная форма) отвечает отличный от $\{0\}$ квадратичный класс вычетов из K — это норма $F(\alpha)$. Норма задает гомоморфное отображение группы $O_3^+(K, F)$ на подгруппу мультипликативной группы квадратичных классов вычетов поля K.*

Для инволютивного собственно ортогонального преобразования, т. е. симметрии σ_g относительно неизотропной прямой g, *норма* $F(\sigma_g)$ совпадает с введенным в п. 1 *значением формы на прямой* g. Для произвольного собственно ортогонального преобразования α, если оно представлено произведением $\sigma_1 \sigma_2$ двух симметрий (теорема 2′ § 9), имеем

$$F(\alpha) = F(\sigma_1) F(\sigma_2). \tag{27}$$

Таким образом, понятие нормы собственно ортогонального преобразования не зависит от выбора системы кватернионов и базиса векторного пространства.

Из теоремы 7 и леммы 1 § 9 получаем: нормы двух симметрий равны в том и только в том случае, когда эти симметрии сопряжены в группе $O_3^+(K, F)$ (одно получается из другого внутренним автоморфизмом); разбиение симметрий на классы по их нормам оказывается разбиением их на классы сопряженных симметрий.

Ядро гомоморфизма, осуществляемого нормой $F(\alpha)$, состоит из собственно ортогональных преобразований, норма которых равна классу $\{1\}$ отличных от нуля квадратов. Этот нормальный делитель можно характеризовать чисто теоретико-групповым образом:

Теорема 8. *В группе $O_3^+(K, F)$ с нормированной тернарной формой F элементы, норма которых равна $\{1\}$, образуют нормальный делитель. Этот нормальный делитель состоит из тех элементов группы, которые являются квадратами. Он является коммутантом группы $O_3^+(K, F)$.*

Доказательство. Если α — квадрат, то $F(\alpha)=\{1\}$. Обратно, если $F(\alpha)=\{1\}$, то, представляя α в виде произведения $\sigma_1\sigma_2$ двух симметрий, получаем $F(\sigma_1)F(\sigma_2)=\{1\}$, т. е. $F(\sigma_1)=$ $=F(\sigma_2)$. Следовательно, существует симметрия σ такая, что $\sigma_1^\sigma=\sigma_2$. Значит, $\alpha=\sigma_1\sigma_2=\sigma_1\sigma_1^\sigma=(\sigma_1\sigma)^2$, т. е. α — квадрат.

Очевидно, что всякий коммутатор $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ имеет норму $\{1\}$. Обратно, как уже показано, всякий элемент α при $F(\alpha)=\{1\}$ представляется в виде $\alpha=\sigma_1\sigma\sigma_1\sigma$, т. е. является коммутатором.

Следует отметить два утверждения, содержащиеся в теореме 8. В метрическом пространстве с нормированной тернарной формой F значение формы на прямой равно $\{1\}$ тогда и только тогда, когда симметрия относительно этой прямой является квадратом, т. е. когда инволютивный поворот вокруг этой прямой «можно делить пополам». В группе $O_3^+(K, F)$ всякое произведение квадратов является квадратом.

Задачи. 1. В силу теоремы 8 для каждого кватерниона α, норма которого $f(\alpha, \alpha)$ является отличным от нуля квадратом, существует кватернион β, квадрат которого пропорционален α. Указать этот кватернион β.

2. В любой группе всякий коммутатор представим в виде произведения квадратов; в любой группе, порождаемой своими инволютивными элементами, всякий квадрат представим в виде произведения коммутаторов. Таким образом, в любой группе коммутант содержится в подгруппе (являющейся, кстати, нормальным делителем), порожденной квадратами. В любой группе, порожденной своими инволютивными элементами, оба эти нормальных делителя совпадают.

3. Существует группа $O_3^+(K, F)$, в которой ни один инволютивный элемент не является квадратом. Тогда ее нормальный делитель, указанный в теореме 8, не содержит ни одного инволютивного элемента. Пример таков. Пусть $K=K_0$ — поле рациональных чисел, а F — нормированная форма $2x_1y_1+5x_2y_2+10x_3y_3$. Тогда квадратичная форма $2x_1^2+5x_2^2+10x_3^2$ не представляет в K_0 единицы.

Далее, $O_3^+(K, F)$ всегда обладает указанным свойством, если -1 является квадратом в K, а форма F тернарна и отделяет нуль.

4. Матрицы второго порядка над K. Линейная группа $L_2(K)$. Рассмотрим алгебру всех *матриц* $\mathfrak{A}$ *второго порядка* над полем K характеристики $\neq 2$. Матрицы, след которых равен нулю, мы запишем в виде

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Они образуют трехмерное векторное пространство. В качестве метрической формы этого векторного пространства возьмем ту симметрическую билинейную форму, которой соответствует квадратичная форма, сопоставляющая каждой матрице A ее определитель $\det \mathsf{A}$, т. е. форму

$$g_0(\mathsf{A},\ \mathsf{B}) = -a_1 b_1 - \frac{1}{2}(a_2 b_3 + a_3 b_2). \tag{29}$$

Это есть тернарная форма, не отделяющая нуль. Изотропными являются матрицы A при $\det \mathsf{A}=0$. $g_0(\mathsf{A},\ \mathsf{B})$ отличается множителем -1 от половины следа произведения AB (или BA). Так как $-\frac{1}{2}(\mathsf{AB}+\mathsf{BA})$ отличается от $g_0(\mathsf{A},\ \mathsf{B})$ только множителем (единичной матрицей), то A и B ортогональны в том и только в том случае, когда $\mathsf{BA}=-\mathsf{AB}$.

Как в п. 2, устанавливается, что собственно ортогональные преобразования векторного пространства матриц с нулевым следом — это отображения

$$\mathsf{X}^* = \mathfrak{A}\mathsf{X}\mathfrak{A}^{-1}, \quad \text{где } \det \mathfrak{A} \neq 0. \tag{30}$$

В частности, отображения

$$\mathsf{X}^* = \mathsf{AXA}^{-1} \qquad (\det \mathsf{A} \neq 0) \tag{31}$$

являются симметриями относительно A.

Поэтому *собственно ортогональная группа векторного пространства матриц с нулевым следом* изоморфна фактор-группе мультипликативной группы всех матриц второго порядка с отличным от нуля определителем по ее центру, который состоит из матриц, пропорциональных единичной матрице; иными словами, она *изоморфна группе* $L_2(K)$.

Если матрицу $\mathfrak{A}$ записать в виде

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix} a_0+a_1 & a_2 \\ a_3 & a_0-a_1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

и разложить ее в виде $\mathfrak{A}=a_0\mathfrak{E}+\mathsf{A}$ (здесь $\mathfrak{E}$ — единичная матрица), то видно, что A — неподвижный вектор «поворота» (30), и поскольку A — не нулевая матрица, то a_0 — отвечающий этому неподвижному вектору «параметр поворота».

Пусть теперь над полем K задано произвольное трехмерное метрическое векторное пространство с тернарной не отделяющей нуль формой F.

Нормируем форму F и выберем базис, в котором она имеет вид (4). Если каждому вектору с компонентами a_1, a_2, a_3 сопоставить матрицу (28), то данное векторное пространство представится в виде векторного пространства матриц второго порядка над K с нулевым следом. Собственно ортогональная группа данного векторного пространства представится тогда группой внутренних автоморфизмов матриц с нулевым следом, определяемых произвольной невырожденной матрицей второго порядка над K. В частности, имеет место

Теорема 9. *Группа $O_3^+(K, F)$ при характеристике поля K, отличной от 2, и форме F, тернарной и не отделяющей нуль, изоморфна линейной группе $L_2(K)$.*

Если F нормирована, то норма собственно ортогонального преобразования по построению равна определителю соответствующего элемента из группы $L_2(K)$ — некоторому отличному от $\{0\}$ квадратичному классу вычетов из K.

Способом, указанным в п. 2, можно представить данное векторное пространство с не отделяющей нуль формой F и ее собственено ортогональную группу также посредством элементов системы кватернионов $Q(K, -1, -1)$ *), если нормировать F и исходить из ортогонального базиса, в котором она имеет вид (5).

Если сопоставить каждому кватерниону

$$\alpha = a_0' + a_1'\mathrm{e}_1 + a_2'\mathrm{e}_2 + a_3'\mathrm{e}_3 \tag{33}$$

системы кватернионов $Q(K, 1, -1)$ матрицу

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_0' + a_1' & a_2' - a_3' \\ a_2' + a_3' & a_0' - a_1' \end{pmatrix}, \tag{34}$$

то (как легко проверить непосредственно) система кватернионов изоморфно отобразится на алгебру матриц (34) второго порядка. Правому умножению кватернионов отвечает левое умножение матриц. (Если заменить матрицу $\mathfrak{A}$ транспонированной матрицей $\mathfrak{A}'$, то порядок сомножителей в системе кватернионов и алгебре матриц будет одинаковым.) След и норма кватерниона α равны следу и определителю матрицы $\mathfrak{A}$.

Поэтому векторы данного векторного пространства представляются матрицами (34) нулевого следа, т. е. матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_1' & a_2' - a_3' \\ a_2' + a_3' & -a_1' \end{pmatrix}, \tag{35}$$

*) Кватернионы $Q(K, -1, -1)$ с нормой

$$\alpha\bar{\alpha} = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2,$$

где $\alpha = a_0 + a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2 + a_3\mathrm{e}_3$, часто называют также *псевдокватернионами* или *расщепленными кватернионами*. (*Прим. ред.*)

а собственно ортогональные преобразования данного векторного пространства — внутренними автоморфизмами этих матриц, определяемыми произвольными невырожденными матрицами (34). Если обозначить

$$a_0' = a_0, \quad a_1' = a_1, \quad a_2' - a_3' = a_2, \quad a_2' + a_3' = a_3, \tag{36}$$

то это означает для данного векторного пространства переход от формы f_0 вида (5) к форме g_0 вида (4), (29), а для матриц — переход от (35) и (34) к (28) и (32).

В силу теоремы VI § 9 можно так переформулировать теорему 9:

Теорема 9′. *Группа движений гиперболической проективно-метрической плоскости изоморфна линейной группе $L_2(K)$, где K — координатное поле проективной плоскости.*

Вернемся теперь к плоской проективной геометрии, чтобы усмотреть этот изоморфизм из других соображений.

Абсолютный поляритет данной проективно-метрической плоскости имеет фундаментальную кривую, которой является некоторое коническое сечение. Выберем подходящий координатный треугольник, точки (0, 1, 0) и (0,0,1) которого принадлежат коническому сечению, а точка (1, 0, 0) является полюсом соединяющей их прямой (ср. построение формы g_0 в п. 1). Тогда уравнение конического сечения примет вид

$$x_1^2 + x_2 x_3 = 0. \tag{37}$$

Уравнение

$$x_1 : x_2 : x_3 = x : -x^2 : 1 \tag{38}$$

сопоставляет каждой точке $X = (x_1, x_2, x_3)$ конического сечения, где $x_3 \neq 0$, некоторый *параметр* x. Для точки конического сечения, в которой $x_3 \neq 0$, этот параметр равен $x = \frac{x_1}{x_3}$, а для точки (0, 1, 0) положим $x = \infty$. Таким образом удается *градуировать коническое сечение*: каждой его точке однозначно сопоставляется элемент поля K, включая символ ∞.

Рассмотрим взаимно однозначные отображения множества точек конического сечения на себя, задаваемые *дробно-линейными преобразованиями параметра* x:

$$x^* = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{39}$$

где $a, b, c, d \in K$ и $ad - bc \neq 0$, а для ∞ соблюдены обычные соглашения:

Если $c = 0$, то $x^* = \infty$ при $x = \infty$.

Если $c \neq 0$, то $x^* = \frac{a}{c}$ при $x = \infty$ и $x^* = \infty$ при $x = -\frac{d}{c}$.

Преобразования (39) образуют группу, изоморфную группе $L_2(K)$. Преобразование (39) инволютивно тогда и только тогда, когда $d=-a$ (ср. формулу (1) из п. 5 § 8).

Пусть дано *инволютивное* отображение (39) конического сечения на себя. Сравним его с гармонической гомологией, центр $A=(a, b, c)$ которой не принадлежит коническому сечению, а осью является поляра точки A. Гармоническая гомология переводит коническое сечение в себя. Если X^* — образ X при (39), то точки A, X, X^* коллинеарны (вычислением проверяется, что определитель, составленный из их координат, равен нулю). Таким образом, инволютивное отображение (39) и гармоническая гомология на коническом сечении всюду совпадают.

Итак, на коническом сечении совпадают инволютивные отображения (39) и порождающие симметрии группы движений проективно-метрической плоскости, а значит, и произведения инволютивных отображений (39) и движения проективно-метрической плоскости. А так как группа преобразований (39) порождается своими инволютивными элементами (п. 5 § 8, задача 1), то на коническом сечении отображения (39) и движения проективно-метрической плоскости совпадают.

Окончательно, так как проективная коллинеация, переводящая коническое сечение в себя, однозначно определяется отображением, которое она индуцирует на коническом сечении, мы устанавливаем изоморфизм между группой преобразований (39) и группой движений проективно-метрической плоскости.

Теорема 9′ выражает то обстоятельство, что в проективной плоскости группа тех проективных коллинеаций, которые переводят коническое сечение в себя, изоморфна группе проективных преобразований на прямой.

5. Построение метрически-неевклидовых групп движений. Снова рассмотрим группу $O_3^+(K, F)$ с тернарной формой F, считая характеристику поля $\neq 2$. Такая группа, рассматриваемая совместно со своими инволютивными элементами (симметрии (*) из § 9) в качестве системы образующих, удовлетворяет нашей системе аксиом п. 2 § 3 в том и только в том случае, если F отделяет нуль. Тогда она оказывается эллиптической группой движений (ср. п. 1 § 9).

Возможно, что в группе $O_3^+(K, F)$ удастся выбрать собственное подмножество инволютивных элементов, которое также порождает группу, причем группа с этой системой образующих удовлетворяет нашей системе аксиом и тем самым также является метрически-неевклидовой группой движений, но уже не эллиптической.

Как мы покажем, это будет всегда при пользовании нормой (см. теорему 7), когда поле K упорядочено, а форма F *неопреде-*

ленная, т. е. когда квадратичная форма $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ представляет как положительные, так и отрицательные элементы из K.

Если K упорядочено, а F не отделяет нуль, то форма F всегда неопределенная (ср. п. 1). Примерами неопределенной отделяющей нуль формы служат формы вида

$$x_1y_1 - kx_2y_2 - kx_3y_3 \tag{40}$$

над полем рациональных чисел, если k — положительное целое рациональное число и $k \equiv 3 \pmod 4$. Действительно, если бы $x_1^2 - kx_2^2 - kx_3^2$ представляла нуль нетривиальным образом, то существовали бы целые рациональные числа c_1, c_2, c_3, не все четные, для которых $c_1^2 - kc_2^2 - kc_3^2 = 0$. Но для целых рациональных чисел c_1, c_2, c_3, которые не все четны, не может выполняться даже равенство $c_1^2 - kc_2^2 - kc_3^2 \equiv 0 \pmod 4$ *).

Теорема VII. *Пусть K — упорядоченное поле, а F — нормированная тернарная неопределенная симметрическая билинейная форма. Инволютивные элементы (симметрии) группы $O_3^+(K, F)$ с отрицательной нормой образуют систему образующих группы. Группа $O_3^+(K, F)$ с этой системой образующих является метрически-неевклидовой неэллиптической группой движений.*

Доказательству теоремы VII мы предпошлем два замечания. При указанных условиях в метрическом векторном пространстве

(I) *из трех значений формы на трех разных попарно ортогональных прямых одно всегда положительно, а два другие отрицательны.*

Доказательство. Пусть прямые представляются векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, а форма F отнесена к ортогональному базису $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$. Тогда она имеет диагональный вид, коэффициентами которого служат значения $F(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i)$ формы F. Так как эта форма нормирована, то произведение этих трех значений формы является отличным от нуля квадратом, т. е. положительно. Если бы они все три были положительными, то всякому отличному от нуля вектору отвечало бы положительное значение формы, что противоречит неопределенности F. Поэтому остается только та возможность, когда из значений формы $F(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i)$ одно положительно, а два других отрицательны.

(II) *Всякой прямой, ортогональной прямой с положительным значением формы, отвечает отрицательное значение формы.*

*) Поскольку $k \equiv 3 \equiv -1 \pmod 4$, то $c_1^2 - kc_2^2 - kc_3^2 \equiv c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \pmod 4$; далее, считая числа c_1, c_2, c_3 целыми (т. е. освобождаясь от дробей), мы имеем $c_i^2 \equiv 0 \pmod 4$, если c_i четно, и $c_i^2 \equiv 1 \pmod 4$, если c_i нечетно ($i = 1, 2, 3$), откуда и следует требуемое утверждение. (*Прим. ред.*)

Доказательство. Если дана прямая с положительным значением формы, то среди ортогональных ей прямых по теореме 2 нет изотропных, т. е. нет прямых, значение формы на которых равно $\{0\}$, а в силу (I) нет и прямых, которые имели бы положительное значение формы.

Доказательство теоремы. Для доказательства утверждения о системе образующих достаточно в силу теоремы 2′ § 9 доказать, что всякая симметрия с положительной нормой представима в виде произведения двух симметрий с отрицательной нормой. Пусть σ_c — симметрия, где $F(\sigma_c)>0$. Выберем в векторном пространстве две прямые a и b, ортогональные c и друг другу. По (II) значения формы на a и b отрицательны. Итак, существуют симметрии σ_a и σ_b, для которых $F(\sigma_a), F(\sigma_b)<0$, а по теореме 1′ § 9 тогда $\sigma_c=\sigma_a\sigma_b$.

Система образующих инвариантна. Следовательно, основное допущение нашей системы аксиом выполняется. Инволютивные произведения двух образующих («центральные симметрии» в смысле системы аксиом) — это отражения с положительной нормой.

Теперь надо показать, что выполняются аксиомы.

Аксиома 1. Пусть $F(\sigma_a)$, $F(\sigma_b)>0$. Тогда существует прямая c векторного пространства, перпендикулярная прямым a и b. По (II) значение формы на c отрицательно. Тогда существует симметрия σ_c, для которой $F(\sigma_c)<0$, а по теореме 1′ § 9 $\sigma_a, \sigma_b|\sigma_c$.

Аксиома 2 и аксиома $\sim$R. Аксиомы означают, что соединения двух разных симметрий однозначны. В трехмерном векторном пространстве с тернарной формой существует не более одной неизотропной прямой, перпендикулярной двум данным прямым. В силу теоремы 1′ § 9 поэтому всякие две разные симметрии имеют не более одного соединения.

Аксиомы 3 и 4. Пусть $F(\sigma_a)$, $F(\sigma_b)$, $F(\sigma_c)<0$ и $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c|\sigma_g$. По теореме 1′ § 9 прямые a, b, c векторного пространства принадлежат плоскости, перпендикулярной прямой g. Следовательно, их произведение $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ по теореме 3′ § 9 является отражением σ_d; по теореме 7

$$F(\sigma_a\sigma_b\sigma_c)=F(\sigma_a)F(\sigma_b)F(\sigma_c)<0, \text{ т. е. } F(\sigma_d)<0.$$

Выполнение аксиомы D проверяется без затруднений.

Аксиома $\sim$P. Равенство $\sigma_a\sigma_b\sigma_c=1$ при $F(\sigma_a), F(\sigma_b), F(\sigma_c)<0$ невозможно, ибо тогда $F(\sigma_a\sigma_b\sigma_c)<0$, тогда как $F(1)=\{1\}$.

Теперь теорема доказана полностью. Собственно ортогональные преобразования с положительной нормой — это собственные движения; с отрицательной нормой — зеркальные движения.

Содержание этой теоремы для случая *не отделяющей нуль формы* можно пересказать в силу теоремы 9 так:

Теорема VIII. *В группе $O_3^+(K, F)$ над упорядоченным полем K инволютивные элементы с отрицательным определителем составляют систему образующих. Группа $O_3^+(K, F)$ с этой системой образующих является метрически-неевклидовой неэллиптической группой движений.*

В этой группе движений выполняются и дополнительные аксиомы V* и H, посредством которых мы определим в § 14 *гиперболическую группу движений.*

Если в случае не отделяющей нуль формы интерпретировать метрическое векторное пространство над упорядоченным полем как упорядоченную проективно-метрическую плоскость, то симметриям векторного пространства отвечают гармонические гомологии, центр и ось которых полярны по отношению к абсолютному коническому сечению. В силу нашей теоремы гармонические гомологии подразделяются на «осевые симметрии» в смысле нашей системы аксиом (образующие группы) и на «центральные симметрии» (произведения пар образующих). Гармоническая гомология относится к первому классу, если ось ее содержит внутренние точки конического сечения, и ко второму, если центр ее является внутренней точкой конического сечения. В силу теоремы VIII на всякой упорядоченной проективной плоскости существует *«модель Клейна»* нашей системы аксиом.

В случае отделяющей нуль формы теорема VII *приводит к подэллиптической группе движений.* Ведь при отделяющей нуль форме F группа, в которой все инволютивные элементы составляют систему образующих, является эллиптической группой движений (теорема 5′ § 9) и, как легко видеть, вообще справедлива

Теорема 10. *Если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — эллиптическая группа движений, а $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$, где $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$, удовлетворяет системе аксиом* п. 2 § 3, *то $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ является подэллиптической группой движений.*

Литература к § 10. Кэли [1], Веблен и Юнг [1], Витт [1], Кокстер [1], Дьёдонне [1], [3], Эйхлер [1], Шевалле [1], Артин [2]. О кватернионах: Диксон [1], Дойринг [1].

§ 11. Группы движений гиперболических проективно-метрических плоскостей как абстрактные группы, порождаемые своими инволютивными элементами (H-группы)

В силу теоремы VI из § 9 и теорем 9, 9′ из § 10 следующие группы совпадают:

1) группы движений гиперболических проективно-метрических плоскостей;

2) собственно ортогональные группы $O_3^+(K, F)$, где характеристика поля K отлична от 2 и форма F тернарная и не отделяющая нуль;

3) линейные группы $L_2(K)$ при характеристике поля K, отличной от 2.

Линейную группу $L_2(K)$ можно представить также как группу дробно-линейных преобразований над полем K и как группу проективных преобразований на прямой проективной плоскости над полем K.

Мы знаем, что эти группы порождаются своими инволютивными элементами, точнее, они бинволютивны, и мы установили некоторые простые соотношения, которым удовлетворяют их инволютивные элементы (теорема 5 § 9). Теперь мы хотим решить поставленную в конце п. 1 § 9 задачу и показать, что этими соотношениями характеризуются абстрактные группы, имеющие указанные представления.

Замечание. Можно истолковать геометрически*) следующие заимствованные из системы аксиом термины, касающиеся гиперболической проективно-метрической плоскости. Мы знаем, в частности из § 9, следующее о группе движений этой плоскости: ее инволютивные элементы a, b, c — это гармонические гомологии, центр и ось которых взаимно полярны и не принадлежат абсолютному коническому сечению. Следовательно, инволютивные движения взаимно однозначно соответствуют тем прямым проективно-метрической плоскости, которые не касаются абсолютного конического сечения. Произведение ab инволютивно тогда и только тогда, когда оси a и b взаимно ортогональны. Произведение abc инволютивно тогда и только тогда, когда оси a, b, c принадлежат пучку. Прямые a и b несоединимы тогда и только тогда, когда $a \neq b$ и оси a и b пересекаются на абсолютном коническом сечении.

1. Система аксиом для H-групп.

Основное допущение. *Пусть $\mathfrak{H}$ — группа, всякий элемент которой представим в виде произведения двух инволютивных элементов.*

Инволютивные элементы из $\mathfrak{H}$ мы будем обозначать малыми латинскими буквами.

Аксиома T. *Если $a \neq b$ и abc, abd инволютивны, то acd инволютивно.*

Аксиома $\sim$V. *Существуют несоединимые a и b.*

Аксиома UV1. *Если ни a, b, ни c, d несоединимы, то существует v такой, что abv и cdv инволютивны* (рис. 100).

Аксиома UV2. *Если ни a, b, ни a, c, ни a, d несоединимы, то инволютивно либо abc* (рис. 101), *либо abd, либо acd.*

При этом, как и в п. 1 § 3, элементы a и b называются *соединимыми*, если существует v такой, что av и bv инволютивны.

*) Конечно, пока не известно, в какой мере такое геометрическое истолкование отвечает всей общности аксиоматического подхода.

Всякую группу $\mathfrak{H}$, удовлетворяющую этой системе аксиом, мы назовем *H-группой*. Наша цель состоит в том, чтобы для всякой H-группы $\mathfrak{H}$ построить некоторое поле K характеристики $\neq 2$

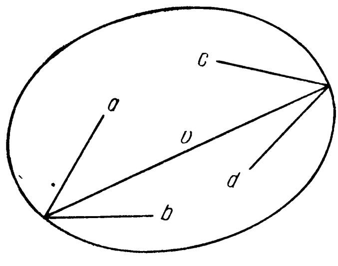


Рис. 100.

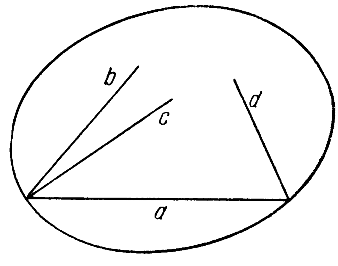


Рис. 101.

такое, что $\mathfrak{H}$ изоморфна группе дробно-линейных преобразований над K.

2. Пучок инволютивных элементов. Следствия основного допущения и аксиомы T. В силу аксиомы T отношение

$$abc \text{ инволютивно}, \tag{1}$$

которое во всякой группе рефлексивно и симметрично, в группе $\mathfrak{H}$ еще и транзитивно. Следовательно, как это делалось в п. 3 § 7, инволютивные элементы из $\mathfrak{H}$ можно объединять в *пучки инволютивных элементов*. Пучок, определяемый элементами a и b при $a \neq b$, т. е. множество тех c, для которых выполняется (1), обозначаем, как раньше, через $J(ab)$.

Произвольные элементы из $\mathfrak{H}$ мы будем обозначать малыми греческими буквами. Если для произвольного элемента $\alpha \neq 1$ определить $J(\alpha)$ как *множество тех c, для которых αc инволютивно*, то по основному допущению множество $J(\alpha)$ является пучком $J(ab)$ и содержит по крайней мере два разных элемента a и b.

Для пучков справедливы следующие теоремы (ср. с п. 4 § 7):

Теорема 1. *Из $u, v, w \in J(\alpha)$ следует $uvw \in J(\alpha)$.*

Теорема 2. *Из $u \neq v$ и $u, v \in J(\alpha)$, $J(\beta)$ следует $J(\alpha) = J(\beta)$.*

Элемент v, для которого выполняется $v \in J(\alpha)$, $J(\beta)$, мы назовем *соединением* двух пучков $J(\alpha)$ и $J(\beta)$. Теорема 2 означает, что два пучка имеют не более одного соединения.

Наряду с отношением (1) важно и нерефлексивное симметричное отношение

$$ab \text{ инволютивно (сокращенно } a|b), \tag{2}$$

С помощью J-символа мы запишем его в виде $b \in J(a)$ или, что равносильно, $a \in J(b)$. По основному допущению для любого a найдется элемент b такой, что $a|b$.

В пучке $J(a)$ элемент a соединяет все элементы пучка. Назовем пучок $J(\alpha)$ *обыкновенным*, если существует a такой, что $J(\alpha)=J(a)$; все прочие пучки назовем *особыми*. «Инволютивный носитель» a обыкновенного пучка определяется однозначно, ибо в силу п. 4 § 7, (III) справедлива

Теорема 3. *Из* $J(a)=J(a')$ *следует* $a=a'$.

Всякие два разных элемента особого пучка несоединимы. В самом деле, будь a и b соединимы элементом v, выполнялось бы $a, b \in J(v)$, а по теореме 2 пучок $J(ab)=J(v)$ обыкновенный. Итак, имеет место

Теорема 4. *Пучок* $J(ab)$ *особый в том и только в том случае, когда* a *и* b *несоединимы.*

Внутренний автоморфизм, определяемый любым инволютивным элементом c, преобразует всякий пучок $J(\alpha)$ в пучок $J(\alpha)^c = J(\alpha^c)$, причем обыкновенный пучок переходит в обыкновенный, а особый — в особый.

Внутренний автоморфизм, определяемый элементом пучка, переводит этот пучок в самого себя: из $c \in J(\alpha)$ вытекает $J(\alpha)^c = J(\alpha^c) = J(\alpha^{-1}) = J(\alpha)$.

В силу теоремы 2 устанавливаются следующие простые свойства внутренних автоморфизмов пучков.

(I) *Пусть* $J(\alpha)$ *и* $J(\beta)$ — *два разных пучка, имеющих соединение* v, *причем либо* $J(\alpha)^c=J(\alpha)$ *и* $J(\beta)^c=J(\beta)$, *либо* $J(\alpha)^c \doteq J(\beta)$. *Тогда* $v^c=v$ *и, если* $v \neq c$, *то* $v|c$.

Доказательство. По условию v и v^c принадлежат различным пучкам $J(\alpha)$ и $J(\beta)$. Следовательно, в силу теоремы 2 $v^c=v$.

(II) *Из* $J(\alpha)^c=J(\alpha)$ *и* $c \notin J(\alpha)$ *вытекает* $J(\alpha)=J(c)$.

Доказательство. Пусть s — произвольный элемент из $J(\alpha)$. По условию $s \neq c$, а значит, существует пучок $J(sc)$. Он отличается от $J(\alpha)$ и при внутреннем автоморфизме, порожденном элементом c, переходит в себя. Из (I) вытекает, что $s|c$. Значит, при этом автоморфизме каждый элемент пучка $J(\alpha)$ переходит в себя. Теперь если $J(\alpha)=J(ab)$, то $a, b|c$, т. е. $a, b \in J(c)$, и по теореме 2 $J(ab)=J(c)$.

В силу (II) всякий пучок, который при внутреннем автоморфизме, определяемом не принадлежащим ему элементом, переходит в себя, обязательно является обыкновенным пучком. Отсюда вытекает тот важный факт, что особый пучок преобразуется в себя только таким внутренним автоморфизмом, который задается принадлежащим ему инволютивным элементом, т. е. справедлива

Теорема 5. *Для особого пучка $J(\alpha)$ равенство $J(\alpha)^c = J(\alpha)$ равносильно $c \in J(\alpha)$.*

Из теоремы 5 вытекает

Следствие. *Если $J(\alpha)$ — особый пучок, которому принадлежит v, и $c|v$, то $J(\alpha)^c$ — отличный от $J(\alpha)$ особый пучок, которому принадлежит v.*

Доказательство (ср. рис. 102). По условию $c \notin J(\alpha)$, ибо из $v, c \in J(\alpha)$ и $c|v$ вытекало бы, что пучок $J(\alpha) = J(vc)$ обыкновенный. Следовательно, по теореме 5 $J(\alpha)^c$ — отличный от $J(\alpha)$ пучок, которому принадлежит $v^c = v$.

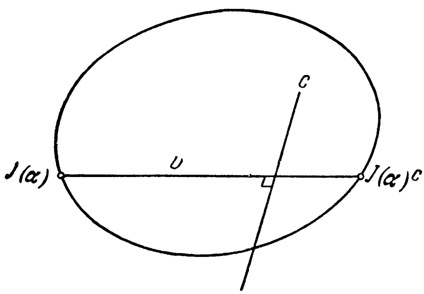


Рис. 102.

3. Концы. Следствия аксиом $\sim$ V, UV1, UV2. Особые пучки мы назовем *концами* и условимся обозначать их большими латинскими буквами (кроме букв H, J, K).

Перефразируем теорему 5 так:

Теорема 5′. *$A^c = A$ тогда и только тогда, когда $c \in A$.*

Из аксиом $\sim$V, UV1, UV2 с помощью понятия пучка и теоремы 4 непосредственно следует, что существует по крайней мере один конец; что два конца всегда можно соединить; что всякий инволютивный элемент принадлежит не более чем двум разным концам.

Докажем некоторые обобщения этих высказываний о концах.

Теорема 6. *Существует не менее четырех разных концов.*

Доказательство. Пусть $C = J(ab)$ — один конец, существующий на основании аксиомы $\sim$V. В силу следствия теоремы 5 существует конец $A \neq C$, где $a \in A$, и конец $B \neq C$, где $b \in B$ (рис. 103). По теореме 2 $a \notin B$, т. е. $A \neq B$. Теперь рассмотрим конец $D = B^a$. Имеем $B^a \neq C$, A, B, ибо из $a \notin B$ вытекает $a = a^a \notin B^a$, т. е. в силу $a \in C$, A имеем $B^a \neq C$, A, откуда, применяя вторично теорему 5′, имеем $B^a \neq B$.

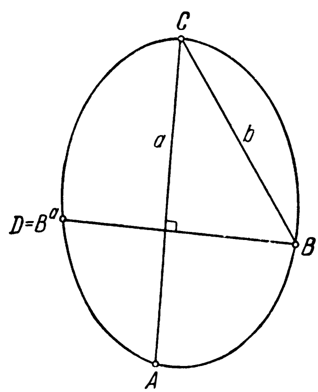


Рис. 103.

Теорема 7. *Два конца всегда можно соединить. Если $c \notin A$, то конец A и обыкновенный пучок $J(c)$ соединимы,* Доказательство второго утверждения. Рассмотрим конец A^c, который ввиду $c \notin A$ отличен от A по теореме 5′, и соединение v концов A и A^c. По (I) $c|v$, т. е. $v \in J(c)$. Итак, v соединяет A и $J(c)$.

Так как в силу аксиомы UV2 инволютивный элемент принадлежит не более чем двум разным концам, мы получаем с учетом следствия теоремы 5, что справедлива

Теорема 8. *Если инволютивный элемент принадлежит одному концу, то он принадлежит точно двум концам.*

Затем с учетом (I) получается

Теорема 9. *Если A и B — разные концы, а v соединяет их, то $A^c = B$ тогда и только тогда, когда $c|v$.*

Для дальнейшего очень важное значение имеет теорема, устанавливающая, что существует единственный инволютивный элемент, меняющий местами две заданные пары концов.

Теорема 10. *Если $A, B \neq U, V$, то существует единственный инволютивный элемент s, для которого $A^s = B$ и $U^s = V$.*

Доказательство. Прежде всего если $A = B$ и $U = V$, то в силу теоремы 5′ наложенные на s требования равносильны $s \in A, U$, т. е. s соединяет A и U. Так как $A \neq U$, то по первому утверждению теоремы 7 и теореме 2 существует единственное такое s.

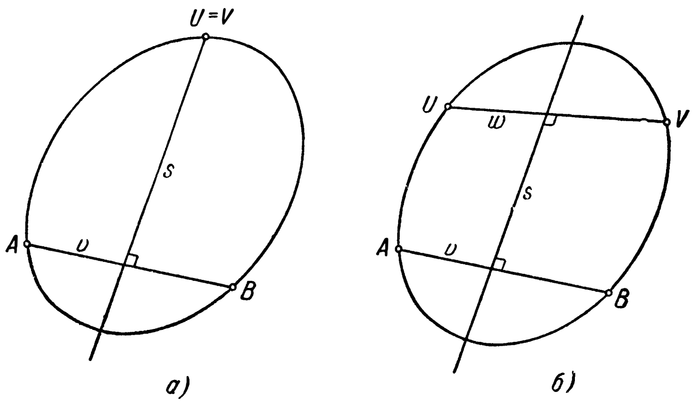


Рис. 104.

Если $A \neq B$, $U = V$ и v соединяет A и B (рис. 104, a), то по теоремам 9 и 5′ наложенные на s требования равносильны $s \in J(v)$, U, т. е. s соединяет $J(v)$ и U. По теореме 8 $v \notin U$. Итак, по второму утверждению теоремы 7 $J(v)$ и U соединимы, причем по теореме 2 однозначно, так как обыкновенный пучок $J(v)$ и особый пучок U, конечно, отличны друг от друга.

Если $A \neq B$, $U \neq V$ и v соединяет A и B, а w соединяет U и V (рис. 104, *б*), то наложенные на s требования в силу теоремы 9 равносильны тому, что $s \in J(v)$, $J(w)$. Так как v, w принадлежат разным парам концов, то по теореме 8 $v \neq w$, а значит, существует пучок $J(vw)$. Этот пучок $J(vw)$ обыкновенный, ибо поскольку ему принадлежат v и w, то для того, чтобы он был особым, т. е. концом, надо было бы в силу теоремы 8, чтобы было $J(vw) = A$ или $J(vw) = B$ и $J(vw) = U$ или $J(vw) = V$, что противоречит предположенному несовпадению A, B, U, V. «Инволютивный носитель» обыкновенного пучка $J(vw)$ соединяет $J(v)$ и $J(w)$, и по теореме 2 это соединение единственно, так как в силу теоремы 3 $J(v) \neq J(w)$, поскольку $v \neq w$.

4. Исчисление концов. Введем теперь некое исчисление концов. Для этого выделим два разных конца O и U (соответственно *нуль и бесконечность*); их соединение обозначим через o

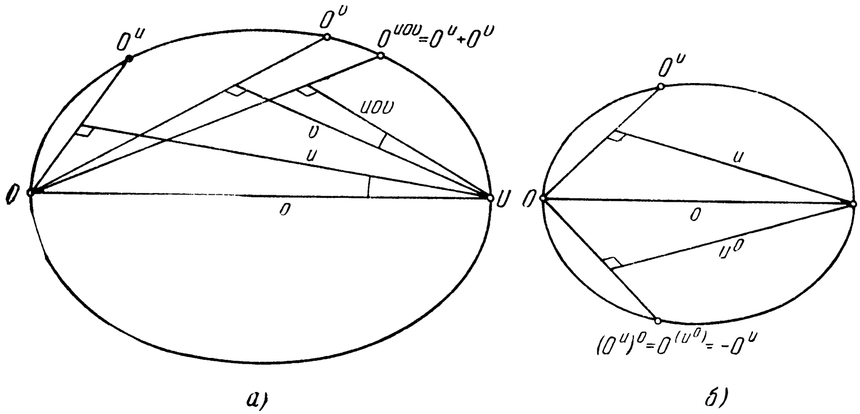


Рис. 105.

(рис. 105). Для определения *сложения* концов используем те инволютивные элементы, которые переводят U в себя; в силу теоремы 5′ это как раз те инволютивные элементы, которые принадлежат концу U. Согласно теореме 10 имеет место следующее:

Всякий отличный от U конец можно однозначно представить в виде O^u, где u — инволютивный элемент, для которого $U^u = U$. (3)

Для концов $\neq U$, представленных в виде O^u и O^v, определяем сложение формулой (рис. 105, *а*):

$$O^u + O^v = O^{uov}. \tag{4}$$

Сумма O^{uov} снова представлена в виде (3), ибо ввиду $u, o, v \in U$ в силу теоремы 1 имеем $uov \in U$. Следовательно, эта сумма $\neq U$. Таким образом, в множестве отличных от U концов определена однозначная операция. Так как uov инволютивно (теорема 1), то операция сложения коммутативна. Далее, сложение ассоциативно, ибо и $(O^u+O^v)+O^w$, и $O^u+(O^v+O^w)$ равны O^{uovow}, поскольку произведение $uovow$, будучи произведением элементов группы $\mathfrak{H}$, не зависит от расстановки скобок. Ясно, что $O=O^o$ играет для так определенного сложения роль нуля. Конец $O^{(u^o)}$ противоположен O^u (рис. 105, *б*). Равенство $O^u+O^u=O$ выполняется только тогда, когда $u=o$, т. е. $O^u=O$, ибо равносильное равенство $O^{uou}=O$ в силу однозначности представления (3) означает, что $uou=o$, а если бы при этом было $u\neq o$, то $u|o$ и вопреки определению особого пучка U содержал бы два инволютивных элемента с инволютивным произведением. Итак:

Концы, отличные от U, по отношению к сложению образуют абелеву группу, в которой $X+X=O$ влечет $X=O$.

Определим теперь *умножение* для концов $\neq O, U$ с помощью тех инволютивных элементов, которые меняют местами O и U; в силу теоремы 9 это будут инволютивные элементы пучка $J(o)$. Выделим некоторый третий конец $E\neq O, U$ (называемый *единицей*). В силу теоремы 10

Всякий конец, отличный от O и U, можно однозначно представить в виде E^a, где a — инволютивный элемент, для которого $O^a=U$. (5)

Тот инволютивный элемент, который входит в представление конца E, мы будем обозначать через e (т. е. $E^e=E$ и $O^e=U$). Для двух концов, представленных в виде (5), т. е. для концов E^a и E^b (причем $O^b=U$), определим произведение формулой (рис. 106, *а*)

$$E^aE^b=E^{aeb}. \tag{6}$$

Произведение E^{aeb} снова представлено в виде (5) и отлично от O и U. Значит, в множестве отличных от нуля и бесконечности концов определено умножение как однозначная бинарная операция. Как и для сложения, доказывается, что эта операция коммутативна и ассоциативна. $E=E^e$ — единица этой операции; $E^{(a^e)}$ — обратный элемент для E^a (рис. 106, *б*).

Итак:

Концы, отличные от O и U, образуют по отношению к умножению абелеву группу.

Положим еще

$$OX=XO=O \quad \text{для всякого конца} \quad X\neq U. \tag{7}$$

Докажем теперь дистрибутивность. Для этого рассмотрим произвольный отличный от O и U конец и представим его в виде (5) как E^a (при этом $O^a=U$). В силу определения (6) для любого конца $X\neq O, U$ справедливо $XE^a=X^{ea}$. Это равенство выполняется и при $X=O$ в силу (7), ибо $O^{ea}=O$. Следовательно,

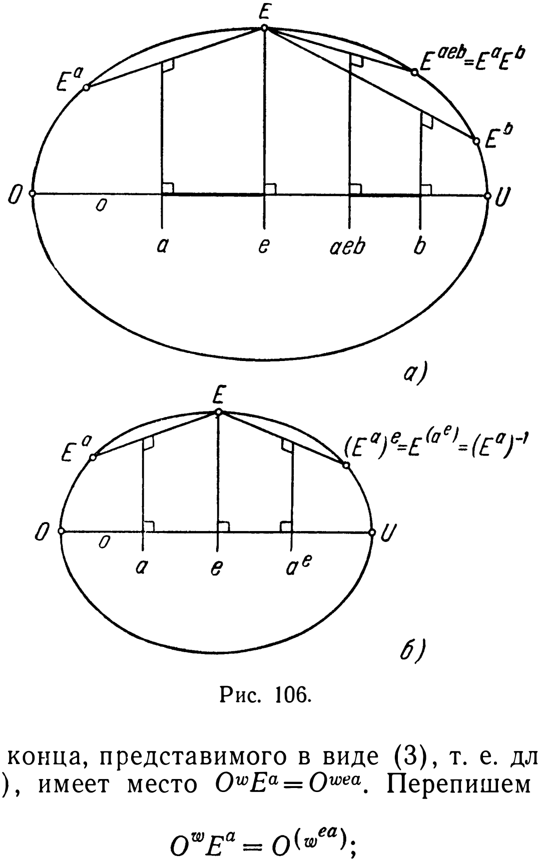


Рис. 106.

для всякого конца, представимого в виде (3), т. е. для конца O^w (где $U^w=U$), имеет место $O^wE^a=O^{wea}$. Перепишем это равенство в виде

$$O^wE^a=O^{(w^{ea})};\tag{8}$$

при этом стоящий справа конец будет снова представлен в виде (3), ибо w^{ea} — инволютивный элемент такой, что внутренний автоморфизм, определяемый им, переводит U в себя. Из определения (4) сложения, формулы (8) для умножения и того, что $o^{ea}=o$ (ибо $e, a\,|\,o$), вытекает дистрибутивность:

$$(O^u+O^v)E^a=O^{uov}E^a=O^{((uov)^{ea})}=O^{(u^{ea}ov^{ea})}=$$
$$=O^{(u^{ea})}+O^{(v^{ea})}=O^uE^a+O^vE^a.$$

Далее, в силу (7) умножение на O тривиальным образом дистрибутивно относительно сложения.

Теорема 11. *Концы, отличные от U, по отношению к введенным операциям образуют поле характеристики $\neq 2$ (называемое полем K концов).*

Замечание. Возможно иное, равносильное (3), представление концов $\neq U$ в виде

$$O^{ou}, \quad \text{где} \quad U^u = U; \tag{3'}$$

оно также однозначно. На его основе определение сложения (4) равносильно определению:

$$O^{ou} + O^{ov} = O^{ouov}. \tag{4'}$$

Преобразование $X^* = X^{ou}$ можно рассматривать как поворот вокруг конца «бесконечность». Тогда сумма двух концов A и B, определенная формулой (4'), оказывается образом нуля при суперпозиции тех двух поворотов вокруг бесконечного конца, которые переводят соответственно O в A и O в B. Аналогично, всякий конец $\neq O$, U можно представить однозначно в виде

$$E^{ea} \quad (\text{при } O^a = U), \tag{5'}$$

равносильном (5), а произведение можно определить формулой

$$E^{ea}E^{eb} = E^{eaeb}, \tag{6'}$$

что также равносильно (6). Тогда преобразования $X^* = X^{ea}$ можно рассматривать как переносы вдоль o. Произведение двух концов A и B оказывается образом единицы E при суперпозиции тех двух переносов вдоль o, которые переводят E в A и E в B. Коммутативность сложения и умножения вытекает тогда из того, что группа поворотов вокруг «бесконечного» конца, как и группа переносов вдоль o, коммутативна (ср. п. 4 § 7). Дистрибутивность умножения основывается на том, что всякий внутренний автоморфизм, определяемый переносом вдоль o, переводит каждый поворот вокруг «бесконечности» в поворот вокруг «бесконечности», т. е. является автоморфизмом группы поворотов вокруг «бесконечного» конца.

При таком представлении построение поля концов основано на том, что мы имеем две коммутативные группы, из которых первая просто транзитивна на всех концах $\neq U$, а вторая — на концах $\neq O$, U, и всякий элемент второй группы индуцирует автоморфизм первой группы. Исчисление концов основывается при таком его построении на теореме в замечании об алгебраизации аффинной и проективной плоскостей.

Если P_1, P_2, P_3 — одна тройка разных концов, а Q_1, Q_2, Q_3 — другая тройка, то по теореме 10 существуют инволютивные элементы s и t такие, что $P_i^{st} = Q^i$ при $i=1, 2, 3$. В самом деле, если допустить, что $P_i = Q_i$ либо возможно разве лишь для $i=3$, либо выполняется, по крайней мере, при $i=1, 2$, то можно выбрать s так, чтобы было $P_1^s = Q_2$, $P_2^s = Q_1$ (во втором случае в силу теоремы 9), а затем можно выбрать t так, чтобы было $Q_2^t = Q_1$, $(P_3^s)^t = Q_3$.

Отсюда получаем, что поле концов не зависит от выбора координатных концов O, E, U:

Следствие. *Поле, получающееся при изменении исходных концов, изоморфно первоначальному.*

Доказательство. Пусть O^*, E^*, U^* — тройка координатных концов, которая при наших определениях операций сложения и умножения приводит к полю K^*. Тогда существует элемент $\alpha \in \mathfrak{H}$, преобразующий O, E, U в O^*, E^*, U^* внутренним автоморфизмом. При этом взаимно однозначное отображение $X^\alpha = X^*$ множества концов на себя оказывается изоморфизмом K и K^*: ведь легко проверить, что при всех $A, B \in K$

$$(A+B)^\alpha = A^\alpha + B^\alpha, \qquad (AB)^\alpha = A^\alpha B^\alpha,$$

если операции слева выполняются в K, а справа в K^*.

5. Представление дробно-линейными преобразованиями. Покажем, что аксиоматически описываемая группа $\mathfrak{H}$ представима в виде группы дробно-линейных преобразований над полем K концов.

Для этого сначала перейдем от абстрактной группы $\mathfrak{H}$ к группе $\mathfrak{H}^*$ *преобразований концов*, индуцируемых группой $\mathfrak{H}$: всякий элемент $\alpha \in \mathfrak{H}$ индуцирует взаимно однозначное отображение

$$X^* = X^\alpha \tag{9}$$

множества концов на себя. Сопоставление элементу α преобразования (9), очевидно, является гомоморфизмом $\mathfrak{H}$ на группу $\mathfrak{H}^*$ индуцированных преобразований концов. Мы утверждаем, что этот гомоморфизм является изоморфизмом. Достаточно показать, что тождественное отображение концов индуцируется только единицей. Докажем более сильное утверждение, соответствующее основной теореме проективной геометрии одномерного фундаментального образа:

Теорема 12. *Если при внутреннем автоморфизме α три разных конца переходят каждый в себя, то $\alpha = 1$.*

Доказательство. Допустим, что α — произвольный отличный от единицы элемент из $\mathfrak{H}$. Если пучок $J(\alpha)$ особый, то обозначим через A любой конец, отличный от $J(\alpha)$; если же пучок $J(\alpha) = J(c)$ обыкновенный, то через A обозначим произвольный конец, которому не принадлежит c. Мы утверждаем, что $A^\alpha \neq A$. Пусть a соединяет A и $J(\alpha)$ (a существует по теореме 7). Из $a \in J(\alpha)$ вытекает, что α представимо в виде $\alpha = ab$. Тогда $A^\alpha = A^b$. Из $A^b = A$ по теореме 5′ вытекало бы $b \in A$; но тогда $a, b \in J(\alpha)$, A, где $a \neq b$, т. е. по теореме 2 было бы $J(\alpha) = A$. В первом случае это противоречит выбору $J(\alpha) \neq A$, а во втором — тому, что пучок $J(\alpha)$ обыкновенный.

Итак, если пучок $J(\alpha)$ особый, то $J(\alpha)$ — единственный конец, который при внутреннем автоморфизме, определенном элементом α, переходит в себя; если $J(\alpha)=J(c)$ — обыкновенный пучок, то α может переводить в себя только те концы, которым принадлежит c, т. е. по теореме 8 не более двух концов. Этим доказана теорема.

Отсюда следует также

Теорема 13. *Группа $\mathfrak{H}$ изоморфна группе $\mathfrak{H}^*$ преобразований концов, индуцированных элементами из $\mathfrak{H}$.*

Теперь нам предстоит показать, что группа $\mathfrak{H}^*$ совпадает с группой преобразований концов, представимых в виде дробно-линейных преобразований

$$X^*=\frac{AX+B}{CX+D}, \text{ где } A,\ B,\ C,\ D\in K \text{ и } AD-BC\neq 0. \qquad (10)$$

Как в п. 4 §10, мы обобщаем это определение (10), где положено $X\in K$ и $CX+D=0$, на случай $X=U$ или $X^*=U$ с помощью соглашений, введенных там для символа ∞, и получаем взаимно однозначное отображение множества всех концов на себя. Мы утверждаем, что справедлива

Теорема 14. *Для любого $\alpha\in\mathfrak{H}$ найдутся элементы*

$$A,\ B,\ C,\ D\in K, \text{ где } AD-BC\neq 0, \qquad (11)$$

для которых

$$X^\alpha=\frac{AX+B}{CX+D}, \qquad (12)$$

и для всяких элементов (11) *существует $\alpha\in\mathfrak{H}$, для которого справедливо* (12).

Для всякого $\alpha\in\mathfrak{H}$ существует не более одной (с точностью до множителя) четверки (11), для которой выполняется (12), ибо два преобразования (10) одинаковы только тогда, когда коэффициенты пропорциональны. Если же четверки (11) определены для двух разных элементов из $\mathfrak{H}$ так, чтобы выполнялось (12), то они не могут быть пропорциональными, ибо мы видели, что разные элементы из $\mathfrak{H}$ индуцируют разные отображения (9). Далее, так как и в группе $\mathfrak{H}^*$ и в группе дробно-линейных преобразований групповая операция умножения определяется суперпозицией преобразований, то, как только будет доказана теорема 14, мы сразу получим, что обе группы совпадают.

Преобразование (10) инволютивно тогда и только тогда, когда «след» $A+D=0$ (ср. п. 5 § 8, (1)). Следовательно, всякое инволютивное преобразование (10) при $C=0$ является преобразованием вида

$$X^*=-X+B, \qquad (13)$$

а всякое инволютивное преобразование (10) при $C \neq 0$ является образом преобразования

$$X^* = X^{-1}B' \qquad (B' \neq 0) \tag{14}$$

при внутреннем автоморфизме, определенном некоторым преобразованием (13). В самом деле, при $C \neq 0$ можно положить $C = E$, а всякое инволютивное преобразование (10) при $C = E$:

$$X^* = \frac{AX + B}{X - A}, \quad \text{где} \quad A^2 + B \neq 0,$$

можно получить из преобразования $X^* = X^{-1}(A^2 + B)$ внутренним автоморфизмом, заданным посредством преобразования $X^* = -X + A$.

Прежде всего докажем, что справедлива

Теорема 14'. *Для всякого инволютивного элемента* $s \in \mathfrak{H}$ *найдутся элементы*

$$A,\ B,\ C \in K, \ \text{где} \ A^2 + BC \neq 0, \tag{15}$$

такие, что

$$X^s = \frac{AX + B}{CX - A}, \tag{16}$$

а для всяких элементов (15) *найдется инволютивный элемент* $s \in \mathfrak{H}$, *для которого выполняется* (16).

Доказательство теоремы 14'. Для инволютивного элемента $s \in \mathfrak{H}$ возможно одно из двух:

1) s совпадает с некоторым инволютивным элементом u, где $U^u = U$;

2) s совпадает с некоторым инволютивным элементом a^u, где $O^a = U$ и $U^u = U$.

В самом деле, если не имеет места случай 1), то $U^s \neq U$, т. е. U^s можно представить в виде (3): $U^s = O^u$, где $U^u = U$. Из этих равенств следует $O^{(s^u)} = U$; если обозначить $s^u = a$, то $O^a = U$ и $s = a^u$.

Согласно определению сложения для инволютивного элемента u, где $U^u = U$, имеем

$$X^u = -X + B, \tag{17}$$

где $B = O^u$ из K, а по определению умножения для инволютивного элемента a при $O^a = U$ имеем

$$X^a = X^{-1}B', \tag{18}$$

где $B' = E^a \neq O$ — элемент из K. В силу указанной альтернативы отсюда получается первое утверждение теоремы 14'.

Обратно, для всякого элемента B из K найдется инволютивный элемент u такой, что выполняется (17) (а именно, инволютивный элемент u, для которого $U^u = U$ и $O^u = B$), и для всякого элемента $B' \neq O$ из K найдется инволютивный элемент a такой, что выполняется (18) (а именно, инволютивный элемент a, для которого $O^a = U, E^a = B'$). А так как мы выше заметили, что всякое инволютивное преобразование (10) является либо преобразованием (13), либо получается из (14) внутренним автоморфизмом, определенным преобразованием (13), то отсюда следует второе утверждение теоремы 14′.

Доказательство теоремы 14. То, что для каждого $\alpha \in \mathfrak{H}$ найдутся элементы (11), для которых выполняется (12), вытекает из основного допущения и теоремы 14′. Обратное справедливо, так как в силу теоремы 14′ всякое инволютивное преобразование (10) совпадает с некоторым отображением $X^* = X^s$ и так как всякое преобразование (10) можно представить в виде произведения двух инволютивных преобразований (10) (см. задачу 11 из п. 5 § 8).

Окончательно мы приходим к следующему результату:

Теорема 15. *Группа $\mathfrak{H}$ представляется группой дробно-линейных преобразований над полем концов, принадлежащим $\mathfrak{H}$; характеристика последнего $\neq 2$.*

6. Резюме. Сведем воедино полученные здесь результаты и ранее установленные факты.

В силу теоремы 5 § 9 и теоремы 9 § 10 справедлива

Теорема 16. *Группа дробно-линейных преобразований над полем характеристики $\neq 2$ является H-группой.*

Этот результат можно было бы установить и без использования результатов § 9 и § 10, непосредственно рассмотрев однородные матрицы второго порядка над полем K (ср. п. 5 § 8).

Из теорем 15 и 16 вытекает

Теорема 17. *Система аксиом для H-группы* (п. 1 § 11) *характеризует группу дробно-линейных преобразований над произвольным полем характеристики $\neq 2$.*

Отсюда с использованием теоремы VI (§ 9) и результатов п. 4 § 10 получается

Теорема IX. *Перечисленные ниже группы совпадают*:

1) *H-группы*;

2) *группы движений гиперболических проективно-метрических плоскостей*;

3) *группы $O_3^+(K, F)$, если характеристика поля K отлична от 2, а форма F тернарна и не отделяет нуль*;

4) *фактор-группы мультипликативных групп кватернионов $Q(K; -1, -1)$ по центру системы кватернионов* (*при характеристике поля K, отличной от 2*);

5) *линейная группа* $L_2(K)$ *при характеристике поля* K, *отличной от* 2.

Задача. Группа $L_2(K_3)$, где K_3 — простое поле характеристики 3, изоморфна группе $\mathfrak{S}_4$ — симметрической группе из четырех элементов.

7. Специальный класс инволютивных элементов H-группы. Выделим среди инволютивных элементов H-группы $\mathfrak{H}$ те, которые *принадлежат особенным пучкам* (*концам*). Обозначим множество этих элементов через $\mathfrak{T}$. Элемент τ из $\mathfrak{H}$ принадлежит множеству $\mathfrak{T}$ в том и только в том случае, когда τ инволютивен и когда существует инволютивный элемент $\tau' \in \mathfrak{H}$ такой, что τ и τ' несоединимы; тогда вместе с τ элемент τ' также принадлежит $\mathfrak{T}$. По аксиоме $\sim$V множество $\mathfrak{T}$ не пусто.

Очевидно, что $\mathfrak{T}$ — инвариантный комплекс в $\mathfrak{H}$. Всякий элемент из $\mathfrak{T}$ по теореме 8 принадлежит точно двум концам, а по теореме 2 является однозначно определенным соединением этих двух концов. Следовательно, из теоремы 10 получается, что по любым двум элементам из $\mathfrak{T}$ найдется инволютивный элемент из $\mathfrak{H}$ такой, что порожденный им внутренний автоморфизм переводит один из этих двух элементов в другой. Следовательно:

(I) $\mathfrak{T}$ — *класс сопряженных элементов из* $\mathfrak{H}$, *даже более того, внутренний автоморфизм, переводящий один элемент из* $\mathfrak{T}$ *в другой элемент из* $\mathfrak{T}$, *порождается инволютивным элементом из* $\mathfrak{H}$.

Так как по доказанным в п. 3 теоремам, в частности по теореме 7, всякий пучок можно соединить по крайней мере с одним концом, то всякий пучок $J(\alpha)$ содержит по крайней мере один элемент $\tau \in \mathfrak{T}$. Тогда $\alpha\tau$ — инволютивный элемент; обозначим его через σ. Поэтому можно усилить утверждение, являющееся основным допущением системы аксиом H-группы:

(II) *Всякий элемент* $\alpha \in \mathfrak{H}$ *можно представить в виде* $\alpha = \sigma\tau$, *где* σ *инволютивно, а* $\tau \in \mathfrak{T}$.

(Тогда $\alpha = \tau^{\sigma}\sigma$ — представление, в котором элемент из $\mathfrak{T}$ является первым множителем.) Применяя (II) к элементу $\tau_1 \in \mathfrak{T}$, получаем

(III) *Для любого элемента* $\tau_1 \in \mathfrak{T}$ *найдется элемент* $\tau_2 \in \mathfrak{T}$ *такой, что* $\tau_1 | \tau_2$.

В группе движений гиперболической проективно-метрической плоскости элементы из $\mathfrak{T}$ — это те порождающие отражения, оси которых являются *секущими* абсолютного конического сечения, т. е. прямыми, встречающими коническое сечение в двух разных точках.

В собственно ортогональной группе 3) теоремы IX элементы из $\mathfrak{T}$ — это симметрии относительно тех (неизотропных) прямых метрического векторного пространства, которые ортогональны изотропным прямым, т. е. если форма F нормирована, это симметрии относительно прямых со значением формы $\{-1\}$ (теорема 2 § 10) или, что то же, симметрии с нормой $\{-1\}$ (п. 3 § 10).

В группе 4) той же теоремы элементы из $\mathfrak{T}$ — это классы пропорциональных чистых кватернионов, квадратичный класс норм которых равен $\{-1\}$.

В группе $L_2(K)$ элементы из $\mathfrak{T}$ — это те инволютивные элементы (элементы с нулевым следом), определитель которых равен $\{-1\}$. В группе дробно-линейных преобразований над K этим элементам отвечают те инволютивные преобразования, которые оставляют неподвижными два элемента из K (один из них может быть бесконечным). В группе проективных преобразований на прямой им отвечают так называемые *гиперболические инволюции*.

Литература к § 11. Бахман [4]. О случае характеристики 2: Карцель [4]. Об исчислении концов: Штаудт [2], Гильберт [2], Веблен и Юнг [1] (см. также Юнг [1] — *Прим. ред.*), Коксетер [2].

Глава IV

ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ

В этой главе будет самостоятельно развита евклидова геометрия вплоть до алгебраического критерия ее группы движений.

В рамках развитой в гл. II абсолютной геометрии геометрия с евклидовой метрикой представляет собой «особый» частный случай. Важные законы, касающиеся основного отношения п. 1 § 3, и прежде всего однозначность соединения (а следовательно, и транзитивность), не соблюдаются для произвольных инволютивных элементов в метрически-евклидовых группах движений в противоположность тому, что имеет место в метрически-неевклидовых случаях (ср. § 7): ведь из самого существования прямых с несколькими общими перпендикулярами (аксиома R) сразу вытекает, что существуют инволютивные элементы с несколькими соединениями. Далее, для метрически-евклидовой группы движений характерно резкое различие между центральными и осевыми симметриями, выражаемое в чисто теоретико-групповых терминах, независимо от выбора системы образующих, тогда как в метрически-неевклидовой группе движений такое различие, вообще говоря, провести невозможно (ср. теорему 1 из § 18). В связи с этим в евклидовой метрике аналогия между точками и прямыми имеет весьма ограниченный характер.

Хотя, таким образом, привычная нам геометрия с евклидовой метрикой характеризуется некоторыми свойственными только ей осложнениями, от которых свободна геометрия с неевклидовой метрикой, зато, с другой стороны, некоторые умозаключения, которые, говоря геометрически, являются заключениями об эквиполлентности (о равенстве при параллельном переносе), позволяют прийти к специфическому для евклидовой метрики закону: *«Произведение трех центральных симметрий само является центральной симметрией»*. Кроме того, аксиома соединимости V* облегчает многие доказательства в евклидовой геометрии.

Дабы осветить все возможности, открываемые построением евклидовой геометрии на основе понятия симметрии, мы поставим в центр изучения § 12 одну теорему из евклидовой теории параллельных прямых — аффинную теорему Паппа — Паскаля, которой мы дадим шесть разных доказательств. В п. 5 § 1 уже было показано, как можно получить основные метрические теоремы о треугольнике, пользуясь симметриями.

В то время как в гл. 3 в соответствии с общей установкой обоснования абсолютной геометрии мы представляли евклидову группу движений в виде ортогональной группы трехмерного векторного пространства, здесь в соответствии с известными приемами элементарной аналитической геометрии мы представим евклидовы движения явными формулами метризованной аффинной координатной плоскости. Таким образом, мы снова придем к некоторому алгебраическому критерию евклидовой группы движений (§ 13).

§ 12. Теорема Паппа — Паскаля в евклидовой геометрии

1. Аксиомы и их непосредственные следствия. Мы определили евклидовы группы движений в рамках абсолютной геометрии посредством основного допущения и аксиом 1—4 п. 2 § 3, а также дополнительных аксиом R и V* (п. 12 § 6). При самостоятельном построении евклидовой геометрии предпочтительнее включить в число аксиом теорему о прямоугольнике (теорема 13 из § 6), которая в рамках нашей системы аксиом п. 2 § 3 равносильна аксиоме R. Поэтому зададим евклидову группу движений системой аксиом п. 2 § 3 и двумя аксиомами:

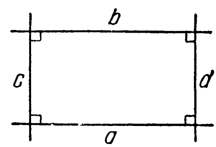


Рис. 107.

Аксиома R*. *Из* $a, b \perp c$ *и* $a \perp d$ *следует* $b \perp d$ (рис. 107).

Аксиома V*. *Для двух прямых* a, b *всегда найдется такая точка* C, *что* $a, b \,\mathrm{I}\, C$, *или найдется такая прямая* c, *что* $a, b \perp c$.

Замечание. Если к системе аксиом п. 2 § 3 добавить аксиому V*, то в основном допущении излишне требовать инвариантность системы образующих. В самом деле, если даны прямые a и b, то по аксиоме V* у них есть общая точка или общий перпендикуляр, а тогда по аксиоме 3 или соответственно 4 $aba = b^a$ является прямой.

Выводя теперь непосредственные следствия нашей системы аксиом, усиленной аксиомами R* и V*, можно в некоторых пунктах упростить общие рассуждения п. 4 § 3.

Начнем опять с теоремы о пересечении перпендикуляров (теорема 1 § 3) и теоремы: если $P \,\mathrm{I}\, g$, то Pg — прямая, а именно, перпендикуляр к прямой g в точке P (случай 1 теоремы 2 из § 3). Из теоремы о пересечении перпендикуляров вытекает единственность перпендикуляра, восставленного к прямой в точке на ней (случай 1 теоремы 3 из § 3). Посредством аксиомы R* отсюда выводится однозначность перпендикуляра в любом случае:

Из $a, b \,\mathrm{I}\, P$ *и* $a, b \perp g$ *следует* $a = b$.

В самом деле, перпендикуляр h к прямой a, восставленный в точке P, согласно R*, перпендикулярен и прямой b; значит, a и b — восставленные к h в одной и той же точке перпендикуляры, и, следовательно, они совпадают.

В силу этой однозначности аксиома V* в усиленной формулировке приводит к альтернативе: две разные прямые имеют либо единственную общую точку, либо единственный общий перпендикуляр. В частности, нет трех попарно перпендикулярных прямых, т. е. выполняется аксиома $\sim$P, и точка не может быть равна прямой. Теперь видно, что из всякой точки на любую не проходящую через нее прямую можно опустить перпендикуляр (случай 2 теоремы 2 из § 3).

Назовем две прямые a и b *параллельными* (обозначаем $a \| b$), если у них есть общий перпендикуляр. По аксиоме R* параллельные прямые равны в смысле перпендикуляров (ср. п. 8 § 6), а значит, отношение параллельности транзитивно. Из существования и единственности перпендикуляра заключаем, что через каждую точку проходит единственная прямая, параллельная данной. В силу альтернативы усиленной аксиомы V* для двух различных прямых понятия параллельности и непересечения равносильны.

Следовательно, выполняются а ф и н н ы е а к с и о м ы и н ц и д е н т н о с т и: *Для всяких двух точек найдется инцидентная им прямая, причем если точки различны, то только одна. Через всякую точку, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, не пересекающая данной. Существуют три неколлинеарные точки.* При наших предположениях на каждой прямой есть по крайней мере три разные точки.

Что касается обращений аксиом 3 и 4, то достаточно доказать обращение аксиомы 3, а обращение аксиомы 4 сведется тогда косвенными рассуждениями к дополнительным аксиомам.

В силу аксиомы V* из аксиом 3 и 4 и их обращений получаем утверждение: произведение abc является прямой в том и только в том случае, когда прямые a, b, c имеют общую точку или общий перпендикуляр. Отсюда непосредственно вытекает теорема о транзитивности для прямых (ср. п. 4 § 4).

2. Леммы о параллельных прямых. Для многих доказательств в исчислении симметрий при евклидовой метрике очень важна теорема

Произведение трех точек является точкой,
которая доказывается следующим образом: Если даны A, B, C и $A, B \,\mathrm{I}\, a$, то обозначим $Aa=a'$, $Ba=B'$, $(C, a)=c'$ (рис. 108); по аксиоме 4 и ее дополнению получим, что $a'b'c'$ — прямая d', где $d' \perp a$. Теперь положим $Cc'=c$, и так как $c' \perp a, c$, то по аксиоме R* также $d' \perp c$, а значит, $ABC=a'a \cdot ab' \cdot c'c= =a'b'c' \cdot c=d'c$, т. е. ABC является некоторой точкой D.

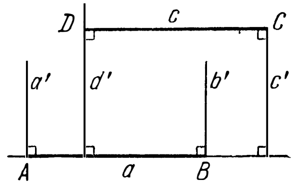


Рис. 108.

Теперь рассмотрим четыре точки A, B, C, D, удовлетворяющие условию $AB=DC$. Если $A \neq B$ (а значит, $D \neq C$), то из предыдущего доказательства видно, что $(A, B) \parallel (D, C)$. Если эти прямые различны, т. е. также $A \neq D$ и $B \neq C$, то в силу $AD=BC$ выполняется $(A, D) \parallel (B, C)$. Назовем четыре разные неколлинеарные точки A, B, C, D, для которых имеет место $(A, B) \parallel (D, C)$ и $(A, D) \parallel (B, C)$, *параллелограммом* (рис. 109). Нашим рассуждением мы доказали необходимость условия следующей теоремы:

Теорема 1.1. *Для того чтобы было $AB=DC$, где $A \neq B$ и $(A, B) \neq (D, C)$, необходимо и достаточно, чтобы точки A, B, C, D были параллелограммом.*

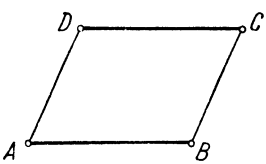


Рис. 109.

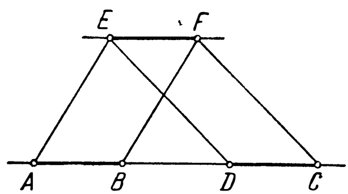


Рис. 110.

Доказательство достаточности. Если A, B, C, D — параллелограмм, то рассмотрим точку $ABC=D'$. Тогда в силу $AB=D'C$ по уже доказанному A, B, C, D' — параллелограмм. Так как в силу однозначности параллельной прямой для трех неколлинеарных точек A, B, C существует единственная точка, образующая с ними параллелограмм, то $D'=D$, т. е. $AB=DC$.

С помощью теоремы 1.1 и транзитивности равенства симметрий (если $AB=EF$, то равенства $AB=DC$ и $DC=EF$ равносильны) легко устанавливается

Теорема 1.2. *Если $A \neq B$, $D \neq C$ и $(A, B)=(D, C)$, то $AB= =DC$ тогда и только тогда, когда существуют точки E, F такие, что A, B, F, E и D, C, F, E представляют собой параллелограммы* (рис. 110).

Используя известный термин из аффинной геометрии, можно объединить теоремы 1.1 и 1.2, включая тривиальный случай, когда $A=B$ и $D=C$, в одну теорему:

Т е о р е м а 1. *Для* $AB=DC$ *необходимо и достаточно, чтобы* A, B *и* D, C *были эквиполлентны.*

Таким образом, посредством вычислений с относящимися к симметриям равенствами получаются теоремы об эквиполлентности (ср. примеры 1), 2) в п. 5 § 1).

Т е о р е м а 2 (инвариантность эквиполлентности при параллельном проектировании). *Из* $AB=DC$; A', B', C', $D' \mathrel{\mathrm{I}} g$; $A, A' \mathrel{\mathrm{I}} a'$; $B, B' \mathrel{\mathrm{I}} b'$; $C, C' \mathrel{\mathrm{I}} c'$; $D, D' \mathrel{\mathrm{I}} d'$ *и* $a' \| b' \| c' \| d' \nparallel g$ *следует* $A'B'=D'C'$.

Для доказательства используем леммы:

Л е м м а 1. *Из* $AB=DC$; $d \mathrel{\mathrm{I}} A$; $b \mathrel{\mathrm{I}} B$, C *и* $d \| b$ *следует* $d \mathrel{\mathrm{I}} D$.

Л е м м а 2. *Из* $AB=DC$; $a' \mathrel{\mathrm{I}} A$, $b' \mathrel{\mathrm{I}} B$, $c' \mathrel{\mathrm{I}} C$, $d' \mathrel{\mathrm{I}} D$; $a' \| b'$, $c' \| d'$; $a' \neq d'$ *и* $E \mathrel{\mathrm{I}} a', d'$; $F \mathrel{\mathrm{I}} b', c'$ *следует* $AB=EF$ (рис. 111).

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Рассмотрим точку $ABF=E'$. По лемме 1 $E' \mathrel{\mathrm{I}} a'$. Так как по условию $DCF=E'$, то аналогично $E' \mathrel{\mathrm{I}} d'$. Из E, $E' \mathrel{\mathrm{I}} a'$, d' тогда вытекает, что $E=E'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Определим D'' и C''

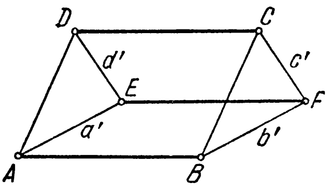


Рис. 111.

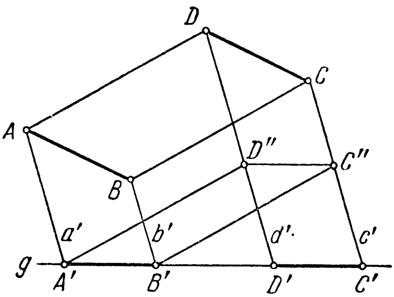


Рис. 112.

равенствами $AD=A'D''$, $BC=B'C''$ (рис. 112). По лемме 1 $D'' \mathrel{\mathrm{I}} d'$ и $C'' \mathrel{\mathrm{I}} c'$. В силу $A'B'=D''C''$ по лемме 2 получаем требуемое.

Т е о р е м а 3 (параллельные прямые, проведенные через вершины параллелограмма). *Из* $AB=DC$; $a' \mathrel{\mathrm{I}} A$, $b' \mathrel{\mathrm{I}} B$, $c' \mathrel{\mathrm{I}} C$, $d' \mathrel{\mathrm{I}} D$ *и* $a' \| b' \| c' \| d'$ *следует* $a'b'=d'c'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пересечем параллельные прямые a', b', c', d' общим перпендикуляром. По теореме 2 для точек пересечения A', B', C', D' имеет место равенство $A'B'=D'C'$, а значит, и $a'b'=d'c'$.

Т е о р е м а 4. *Всякие две точки имеют единственную среднюю точку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства существования средней точки достаточно рассмотреть две разные точки A и B.

Выберем точку C вне прямой (A, B) и определим D и D' равенствами $AC=DB$, $AC=BD'$ (рис. 113). $D \neq D'$, ибо иначе было бы $AC=CA$, а это невозможно ввиду $A \neq C$ и теоремы 23 из § 3. Далее, $DB=BD'$, т. е. B — средняя точка для D и D'. Прямая (C, D) пересекает прямую (A, B) в некоторой точке M, ибо в противном случае по аксиоме V* она была бы стороной (C, D') параллелограмма C, A, B, D'; но точка D, принадлежащая стороне (B, D') этого параллелограмма, не может ввиду $D \neq D'$ принадлежать стороне (C, D'). Из $D'B=BD$ по теореме 2 при параллельном проектировании получаем $CM=MD$, а отсюда вторичным применением параллельного проектирования получаем $AM=MB$; поэтому M — средняя точка для A и B.

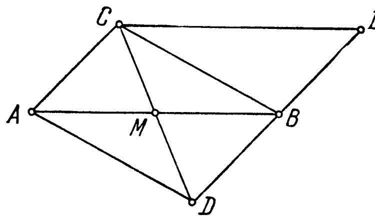


Рис. 113.

Если M и N — две средние точки для A и B (случай $A=B$ не исключается), то $A^{MN}=A$, т. е. $AMN=MNA=ANM$, т. е. $MN=NM$, а отсюда $M=N$ по теореме 23 из § 3.

Упомянем еще следующий частный случай теоремы о спаривании (теорема 12 из § 4):

Т е о р е м а 5. *Пусть даны шесть точек* A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3, *причем тройка* A_i, B_k, A_l *коллинеарна при всех перестановках* i, k, l *чисел* 1, 2, 3. *Кроме того, пусть даны прямые* a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3, *причем* $a_i \,\mathrm{I}\, A_i$, $b_i \,\mathrm{I}\, B_i$ *и эти прямые попарно параллельны между собой. Тогда из*

$$a_l a_k = b_k b_l \quad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k) \tag{1}$$

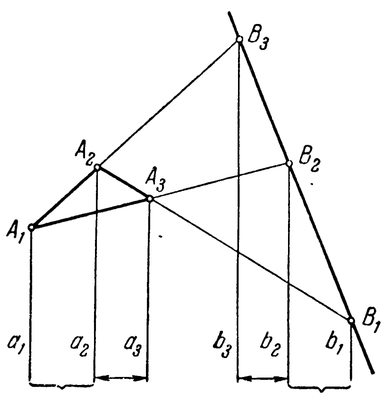


Рис. 114.

вытекает, что B_1, B_2, B_3 *коллинеарны* (рис. 114).

Доказательство теоремы 5 можно провести как доказательство теоремы о спаривании из § 4. (Если оговорка теоремы о спаривании не выполнена, то теорема 5 тривиальна.) Из теоремы 5 выводим теорему, аналогичную теореме об изогональном соответствии точек (пп. 5 и 9 § 1):

Т е о р е м а 6 (изотомическое соответствие прямых). *Пусть даны шесть точек* M_1, M_2, M_3; P_1, P_2, P_3 *и* M_k, P_i, M_l *коллинеарны* *при всех перестановках* i, k, l *чисел* $1, 2, 3$. *Обозначим* $M_kP_iM_l = Q_i$. *Тогда если* P_1, P_2, P_3 *коллинеарны, то и* Q_1, Q_2, Q_3 *коллинеарны* (рис. 115).

Доказательство. Пусть $P_1, P_2, P_3 \,\mathrm{I}\, a$. Для шести прямых a_i, b_i ($i = 1, 2, 3$) при $a_i, b_i \| a$, $a_i \,\mathrm{I}\, M_i$ и $b_i \,\mathrm{I}\, Q_i$ в силу определения точек Q_i и теоремы 3 выполняются равенства $a_kaa_l = b_i$, которые, будучи попарно перемножены, дадут $a_ia_k = a_iaa_l \times \times a_laa_k = b_kb_i$. Таким образом, точки M_i, Q_i и прямые a_i, b_i удовлетворяют условиям теоремы 5, а следовательно, Q_1, Q_2, Q_3 коллинеарны.

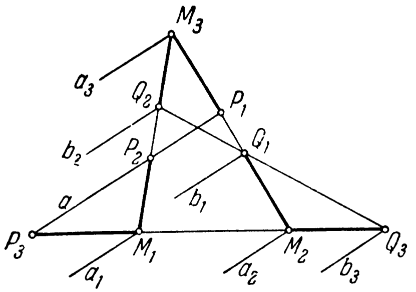


Рис. 115.

Замечание. В случае неевклидовой метрики теорему 6 можно доказать аналогично упомянутой теореме из § 1: так как по условию $P_1P_2P_3$ инволютивно и $Q_1Q_2Q_3 = M_2P_1M_3 \cdot M_3P_2M_1 \cdot M_1P_3M_2 = (P_1P_2P_3)^{M_2}$, то $Q_1Q_2Q_3$ тоже инволютивно, а так как при неевклидовой метрике произведение трех точек инволютивно только тогда, когда они коллинеарны, то Q_1, Q_2, Q_3 коллинеарны. В случае евклидовой метрики последнее умозаключение неверно, и поэтому такое простое доказательство не проходит.

3. Шесть доказательств теоремы Паппа — Паскаля. Дадим разные доказательства *аффинной теоремы Паппа — Паскаля*, сформулированной нами в п. 5 § 1. Как и там, обозначаем стороны (A_i, B_k) шестиугольника через p_{ik} и считаем, что $p_{12} \| p_{21}$, $p_{13} \| p_{31}$ (рис. 116).

Первое доказательство основано на том же, на чем основано доказательство Гильберта, приведенное в § 1; оно будет выведено здесь непосредственно из наших аксиом и их простейших следствий.

Первое доказательство. Проведем три перпендикуляра $h_i = (A_i, b)$, а затем шесть перпендикуляров $h_{kl} = (A_i, p_{kl})$ и рассмотрим шесть прямых $g_{kl} = ah_{kl}h_i$ (рис. 117; $i\,k\,l$ — перестановка чисел 1, 2, 3).

Прежде всего заключаем, что

$$g_{21}bg_{31},\ g_{12}bg_{32},\ g_{13}bg_{23} \text{ являются прямыми.} \qquad (2)$$

Это вспомогательное утверждение можно доказать без ссылки на условия теоремы, касающиеся параллельности. Фиксировав i, k, l, определим четвертую симметричную прямую

$$ag_{ki}p_{li} = g'_{ki}, \quad p_{li}bp_{ki} = b'_i, \quad p_{ki}g_{li}a = g'_{li}$$

(ср. изогональное точечное соответствие в пп. 5, 9 § 1). Имеем

$$g'_{ki}b'_i = ag_{ki}\cdot bp_{ki} = h_{ki}h_l\cdot bp_{ki} = (h_l b)^{h_{kl}}(h_{ki}p_{ki}),$$

т. е. $g'_{ki}b'_i$ является произведением двух точек, а значит, $g'_{ki}\parallel b'_i$ (ср. теорему 20 б) из § 3). Аналогично $g'_{li}\parallel b'_i$. Следовательно, $g'_{ki}b'_ig'_{li}$ — прямая, а тогда в силу $g'_{ki}b'_ig'_{li}=(g_{ki}bg_{li})^a$ и $g_{ki}bg_{li}$ является прямой.

Теперь учтем условия теоремы, в которые входит отношение параллельности. В силу них $h_{12}=h_{21}$, $h_{13}=h_{31}$, откуда $g_{12}=g_{21}$ и $g_{13}=g_{31}$. Так как $g_{kl}\,\mathrm{I}\,A_i$ и $b\not\mathrm{I}A_i$, то g_{12}, $g_{13}\neq b$, а по аксиоме V* g_{12} и b имеют либо точку пересечения S, либо общий перпендикуляр s; из (2) с помощью обращения теоремы о трех симметриях получаем g_{23}, $g_{32}\,\mathrm{I}\,S$ либо g_{23}, $g_{32}\perp s$. Так как g_{23}, $g_{32}\,\mathrm{I}\,A_1$,

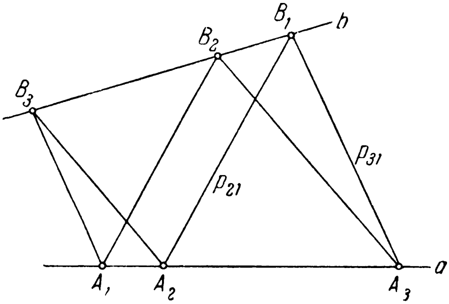


Рис. 116.

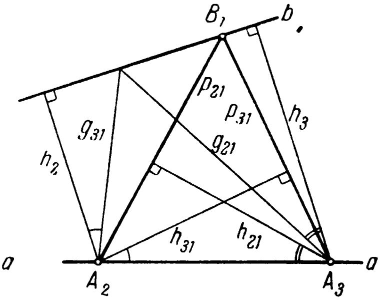


Рис. 117.

то в первом случае из $S\neq A_1$ по аксиоме 2 заключаем, что $g_{23}=g_{32}$ ($b\,\mathrm{I}\,S$ и $b\not\mathrm{I}A_1$), а во втором то же вытекает из однозначности перпендикуляров; это и подлежало доказательству *).

Гильбертово доказательство аффинной теоремы Паппа — Паскаля посредством троекратного применения теоремы о четырехугольнике, вписанном в круг, и доказательство Гессенберга теоремы Паппа — Брианшона троекратным применением теоремы о спаривании (теорема 13а из § 4) находятся в тесном родстве. Обращаясь к аналогии точек и прямых, из рассуждений Гессенберга можно получить доказательство аффинной теоремы Паппа — Паскаля; вместо теоремы Гессенберга о спаривании тогда надо использовать упомянутый в п. 8 § 4 аналог ее, обобщающий на абсолютную геометрию теорему о вписанном четырехугольнике:

*) К слову сказать, «второй случай» на самом деле невозможен.

Второе доказательство (Тёпкен). Выберем точку C и проведем перпендикуляры $(C,\ a)=c$, $(C,\ b)=d$, $(C,\ p_{ik})=c_{ik}$ (рис. 118). Прямые c, d в точке C задают некоторое спаривание. d_{ik} — прямые, соответствующие при этом спаривании прямым c_{ik}, т. е. такие, что $cc_{ik}=d_{ik}d$. При фиксированной перестановке i, k, l чисел 1, 2, 3 рассмотрим треугольник B_i, A_k, A_l со сторонами a, p_{li}, p_{ki}. На них опущены из C перпендикуляры c, c_{li}, c_{ki}, которым при спаривании отвечают прямые d, d_{li}, d_{ki}. Если обозначить через G_i точку пересечения прямой $b=(B_i,\ d)$ с перпендикуляром $(A_k,\ d_{li})$ (она существует, ибо иначе $d_{li}\perp b$, т. е. $d_{li}=d$ и $c_{li}=c$, т. е. $p_{li}=a$, а значит, $B_i \mathrm{I}\, a$), то по указанной теореме о спаривании перпендикуляр $(A_l,\ d_{ki})$ также проходит через G_i. Следовательно,

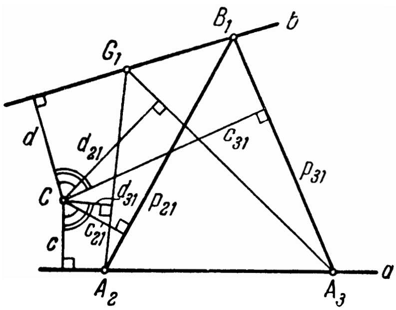


Рис. 118.

$$G_1 \mathrm{I}\, b,\ (A_2,\ d_{31}),\ (A_3,\ d_{21});\quad G_2 \mathrm{I}\, b,\ (A_3,\ d_{12}),\ (A_1,\ d_{32});$$
$$G_3 \mathrm{I}\, b,\ (A_1,\ d_{23}),\ (A_2,\ d_{13}).$$

Пользуясь теперь условиями параллельности, согласно которым $c_{12}=c_{21}$, $c_{13}=c_{31}$, т. е. $d_{12}=d_{21}$, $d_{13}=d_{31}$, получаем, что $G_1=G_2=G_3$, и что эта точка G принадлежит перпендикулярам $(A_1,\ d_{23})$ и $(A_1,\ d_{32})$. Итак, $d_{23},\ d_{32}\perp(A_1,\ G)$, а следовательно, в силу $d_{23},\ d_{32} \mathrm{I}\, C$ с помощью однозначности перпендикуляров заключаем, что $d_{23}=d_{32}$, т. е. $c_{23}=c_{32}$, откуда и получаем теорему.

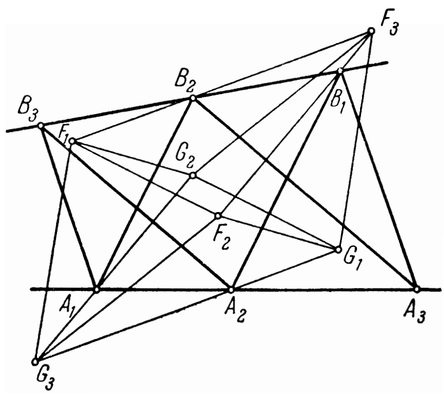


Рис. 119.

Этим рассуждением в абсолютной геометрии можно доказать теорему Паппа — Паскаля для конфигурации, в которой прямая Паскаля является полярой некоторой собственной точки. Другой ход мысли, посредством которого в абсолютной геометрии доказывается теорема Паппа — Паскаля при некотором дополнительном ограничении — а именно, что точка пересечения несущих прямых собственна, а прямая

Паскаля полярна ей, — в евклидовой плоскости приводит к доказательству аффинной теоремы Паппа — Паскаля в случае, когда несущие прямые не параллельны: это есть доказательство Йельмслева, основанное на коммутативности полуповоротов (ср. п. 6 § 6). Можно проследить, что это третье доказательство восходит к тем же геометрическим источникам, что два первых. Аффинная же теорема Паппа — Паскаля для параллельных несущих прямых («малая» теорема Паппа — Паскаля) является некоторым высказыванием об эквиполлентности и доказывается непосредственным использованием исчисления симметрий (ср. 2) в п. 5 § 1).

Следующее доказательство использует теорему о высотах, доказать которую легко, используя намеченный в 7) из п. 5 § 1 ход мысли, а также элементарные свойства эквиполлентности. Доказательство основывается на том, что точки пересечения высот шести треугольников, содержащихся в данном шестиугольнике, образуют указанную в 2) из п. 5 § 1 фигуру из эквиполлентных пар точек (рис. 119); это является простым обобщением малой аффинной теоремы Паппа — Паскаля, а замыкание этой конфигурации Паппа — Паскаля доказывается непосредственно.

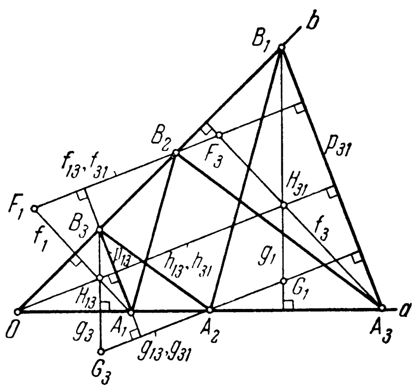


Рис. 120.

Четвертое доказательство (Гузе). Допустим, что несущие прямые a и b имеют общую точку O. В следующих треугольниках, содержащихся в конфигурации (рис. 120):

с вершинами	B_l, A_l, B_k	A_l, B_l, A_k	A_l, O, B_k
со сторонами	p_{ik}, b, p_{il}	p_{ki}, a, p_{li}	b, p_{lk}, a

проведем высоты

$$\begin{array}{lll} f_{ik} = (B_l, p_{ik}) & g_{ki} = (A_l, p_{ki}) & f_l = (A_l, b) \\ f_i = (A_i, b) & g_i = (B_i, a) & h_{lk} = (O, p_{lk}) \\ f_{il} = (B_k, p_{il}) & g_{li} = (A_k, p_{li}) & g_k = (B_k, a) \end{array}$$

Так как ни в одном треугольнике не совпадают все три стороны, то существуют точки пересечения высот, соответствующих F_i, G_i, H_{lk}.

Не используя содержащихся в формулировке теоремы условий параллельности, покажем, что требование $p_{ik} \| p_{ki}$ равносильно равенству $F_iF_k = G_kG_i$.

При $p_{ik} \| p_{ki}$ имеем $f_{ik} = f_{ki}$ и $h_{ik} = h_{ki}$, а эти прямые, будучи перпендикулярами к p_{ik} и p_{ki}, параллельны. Так как к тому же $f_i \| f_k$ и $f_i \neq f_{ik}$, то F_i, F_k и H_{ik}, H_{ki} эквиполлентны, т. е. $F_iF_k = H_{ik}H_{ki}$. Аналогично, $G_kG_i = H_{ik}H_{ki}$, а отсюда $F_iF_k = G_kG_i$.

Обратно, из $F_iF_k = G_kG_i$ в силу $f_i \| f_k$, $g_i \| g_k$ и $f_i \neq g_k$ по лемме 2 получаем $F_iF_k = H_{ik}H_{ki}$. Перепишем это равенство в виде $F_iH_{ik} = F_kH_{ki}$; в силу $f_{ik} \| h_{ik}$ и $f_{ki} \| h_{ki}$ отсюда по лемме 2 вытекает, что $B_lO = F_iH_{ik}$ или $f_{ik} = f_{ki}$. В первом случае было бы $b \| f_i$, что противоречит $b \perp f_i$; следовательно, $f_{ik} = f_{ki}$, т. е. $p_{ik} \| p_{ki}$.

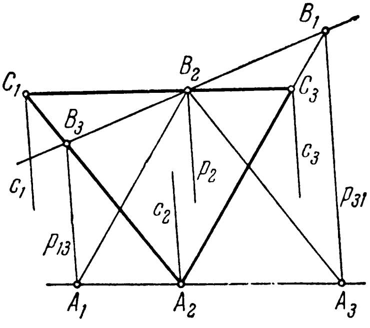


Рис. 121

Пользуясь условиями параллельности в теореме, получаем теперь $F_2F_1 = G_1G_2$ и $F_1F_3 = G_3G_1$. Перемножая эти равенства, получаем, поскольку $G_1G_2G_3 \cdot G_1 = G_3G_2G_1 \cdot G_1 = G_3G_2$, что $F_2F_3 = G_3G_2$, а вместе с тем и требуемое утверждение.

Как доказать аффинную теорему Паппа — Паскаля на евклидовой плоскости для случая, когда несущие прямые перпендикулярны, показал уже Ф. Шур, применивший теорему о высотах. В этом частном случае наше доказательство упрощается.

При выполнении аффинных аксиом инцидентности аффинная теорема Паппа — Паскаля равносильна следующему своему *обращению*, в котором предполагаются выполненными все три условия параллельности, а утверждается коллинеарность:

Если даны шесть точек A_1, B_2, A_3, B_1, A_2, B_3 и прямые p_{ik} такие, что A_i, $B_k \,\mathrm{I}\, p_{ik}$ и $p_{ik} \| p_{ki}$, то из коллинеарности A_1, A_2, A_3 вытекает коллинеарность B_1, B_2, B_3.

Приведем два доказательства этого обращения нашей теоремы. Особенно просто первое из них: двумя эквиполлентностями приходим к условиям специальной теоремы о спаривании (теорема 5), а затем однократным ее применением сразу устанавливается требуемая коллинеарность. Другое доказательство исходит из эквиполлентности середин девяти пар точек данного шестиугольника, а затем посредством теоремы 6 об изотомическом соответствии прямых в треугольнике приводит к требуемой коллинеарности при коллинеарности трех вершин треугольника.

Пятое доказательство (Гузе). Введем в качестве вспомогательных элементов точки C_1 и C_3, где (так нам будет удобно) индекс 2 отсутствует, как четвертые симметричные точки (рис. 121):

$$B_2A_3A_2 = C_1, \quad B_2A_1A_2 = C_3. \tag{3}$$

В силу $p_{23} \| p_{32}$ точки A_2, B_3, C_1 коллинеарны. В силу $p_{12} \| p_{21}$ точки A_2, C_3, B_1 коллинеарны. Так как A_1, A_2, A_3 коллинеарны, то C_1, B_2, C_3 коллинеарны. Затем введем такие четыре прямые, параллельные паре p_{13}, p_{31}: $c_1 \mathrm{I} C_1$, $c_2 \mathrm{I} A_2$, $c_3 \mathrm{I} C_3$, $p_2 \mathrm{I} B_2$. В силу (3) по теореме 3 $c_1c_2 = p_2p_{31}$, $c_2c_3 = p_{13}p_2$; отсюда $c_1c_3 = p_2 \cdot p_{31}p_{13}p_2 = p_2 \cdot p_2p_{13}p_{31} = p_{13}p_{31}$. Значит, точки C_1, A_2, C_3; B_1, B_2, B_3 и прямые c_1, c_2, c_3; p_{31}, p_2, p_{13} удовлетворяют условиям специальной теоремы о спаривании, а поэтому B_1, B_2, B_3 коллинеарны.

Шестое доказательство (Гузе). Согласно теореме 4 введем средние точки M_i для точек A_i и B_i, а также средние точки P_i для точек A_k и A_l и средние точки Q_i для точек B_k и B_l (рис. 122; здесь i, k, l — перестановка чисел 1, 2, 3). Проведем через точки P_i, M_k, M_l, Q_i параллельные прямые к паре параллельных противоположных сторон p_{kl} и p_{lk}; в силу теоремы 3 эти параллельные прямые являются осями симметрии прямых p_{kl} и p_{lk}. Следовательно, указанные четыре точки лежат на оси симметрии прямых p_{kl} и p_{lk}. Далее, из определения точек M_i и P_i имеем $B_k^{M_kP_iM_l} = B_l$, т. е. $M_kP_iM_l$ — средняя точка для B_k и B_l, т. е. в силу однозначности средней точки $M_kP_iM_l = Q_i$. Следовательно, девять точек M_i, P_i, Q_i удовлетворяют условиям теоремы 6. Так как точки P_1, P_2, P_3, будучи средними точками для коллинеарных точек A_1, A_2, A_3, сами коллинеарны, то по теореме 6 точки Q_1, Q_2, Q_3 коллинеарны. Точки B_i можно представить их средними точками Q_i, ибо $B_i^{Q_kQ_iQ_l} = B_i$, а значит, $B_i = Q_kQ_iQ_l$ (ср. теорему 23 § 3). Отсюда из коллинеарности средних точек Q_1, Q_2, Q_3 вытекает коллинеарность точек B_1, B_2, B_3.

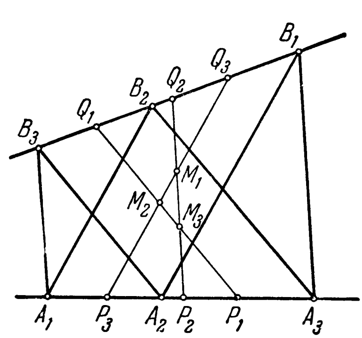


Рис. 122.

Литература к § 12. Шур [1], Йельмслев [2], Тёпкен [1], Гузе [1]. См. также литературу к § 1.

§ 13. Алгебраическое представление евклидовых групп движений

1. Представление евклидовых групп движений как групп движений евклидовых координатных плоскостей. Рассмотрим групповую плоскость евклидовой группы движений. Согласно § 12 в ней выполняются аффинные аксиомы инцидентности и аффинная теорема Паппа — Паскаля. Кроме того, как видно из доказательства теоремы 4 из § 12, в ней выполняется аффинная аксиома Фано («Диагонали параллелограмма пересекаются»). Выбрав координатную систему (пару пересекающихся прямых с единичными точками), можно известными методами сопоставить плоскости некоторое поле K характеристики $\neq 2$ *), например, введя исчисление точек на какой-нибудь координатной прямой. Так мы представим нашу плоскость в виде *аффинной координатной плоскости над полем* K: точка представляется парой (x, y), а прямая — тройкой $[u, v, w]$ элементов поля K, причем u и v не равны одновременно нулю, а пропорциональные тройки представляют одну и ту же прямую; инцидентность точки (x, y) и прямой $[u, v, w]$ выражается равенством

$$ux + vy + w = 0. \tag{1}$$

На этой аффинной координатной плоскости для каждой точки существует ровно одна инволютивная коллинеация, при которой все прямые, проходящие через эту точку, остаются неподвижными: это центральная симметрия относительно данной точки. Она переводит каждую прямую в некоторую параллельную ей прямую. Симметрия относительно точки (a, b) представляется уравнениями:

$$x^* = -x + 2a, \qquad y^* = -y + 2b. \tag{2}$$

Переносом в аффинной плоскости называется коллинеация, которая всякую прямую переводит в параллельную ей прямую и либо не имеет неподвижных точек, либо является тождеством. Заданной парой (точка — образ точки) в аффинной координатной плоскости задается точно один перенос. Перенос, переводящий точку (0, 0) в точку (a, b), выражается уравнениями:

$$x^* = x + a, \qquad y^* = y + b. \tag{3}$$

Группу переносов мы обозначим через $\mathfrak{T}$.

Предстоит исследовать, как выражается *ортогональность* двух прямых. Впредь мы будем считать, что координатные оси вы-

---

*) Ср. Замечание об алгебраизации аффинной и проективной плоскостей и указанную там литературу (§ 7).

браны взаимно ортогональными. Рассмотрим теперь прямую, не параллельную осям, и представим ее уравнением $y=cx+b$, где $c\neq 0$. Пучок параллельных прямых задается тогда фиксированным угловым коэффициентом $c\neq 0$. Угловой коэффициент ортогонального пучка параллельных прямых мы обозначим через $f(c)$. Тогда $f(c)$ — функция, определенная на всех отличных от нуля элементах поля K, причем ее значения сами будут отличными от нуля элементами поля K. Так как перпендикулярные прямые отличны друг от друга, то всегда $f(c)\neq c$, а в силу симметрии ортогональности $f(f(c))=c$. Вид функции $f(c)$ можно определить, привлекая одну теорему об ортогональности. Используем теорему о высотах, рассуждая согласно Р. Бэру таким образом:

Возьмем $d\neq 0, c$. Рассмотрим треугольник (рис. 123), вершины, стороны и высоты которого указаны в следующей таблице:

Вершины	Стороны	Высоты
$A=(c,\ 0)$	$(B,\ C): y=c(x-d)$	$y=f(c)(x-c)$
$B=(d,\ 0)$	$(A,\ C): y=d(x-c)$	$y=f(d)(x-d)$
$C=(0,\ -cd)$	$(A,\ B): y=0$	$x=0$

Так как высоты пересекаются в одной точке, то обе первые высоты должны пересекать ось ординат $x=0$ в одной и той же точке, т. е.

$$f(c)\,c=f(d)\,d.$$

Так как $d\neq 0$, c выбраны произвольно, то $f(c)c$ является постоянной, отличной от нуля; обозначим ее $-\frac{1}{k}$ и назовем k *постоянной ортогональности*. Итак, подлежащая определению функция имеет вид

$$f(c)=-\frac{1}{kc}. \tag{4}$$

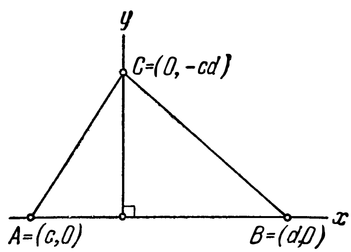


Рис. 123.

Так как всегда $f(c)\neq c$, то $-k$ не может быть квадратом в поле K. Итак, в силу (4) две прямые с угловыми коэффициентами $c\neq 0$ и $c'\neq 0$ ортогональны тогда и только тогда, когда

$$1+kcc'=0, \tag{5}$$

а для произвольных прямых $[u,\ v,\ w]$ и $[u',\ v',\ w']$ *условие ортогональности* имеет вид

$$vv'+kuu'=0, \tag{6}$$

т. е. представляет собой условие обращения в нуль симметричной билинейной формы от тангенциальных координат u, v; u', v';

эта форма отделяет нуль (при $(u, v) \neq (0, 0)$ всегда $v^2+ku^2 \neq 0$). Значение постоянной ортогональности k зависит от выбора единичной точки на осях координат. При произвольном изменении единичной точки в качестве постоянных ортогональности получаются как раз все элементы класса квадратичных вычетов $\{k\}$.

Отсюда получаем, что основание $\bar{P}$ перпендикуляра, опущенного из точки $P=(x, y)$ на прямую $[u, v, w]$, имеет координаты:

$$\left(\frac{v^2}{v^2+ku^2}x - \frac{kuv}{v^2+ku^2}y - \frac{kuw}{v^2+ku^2},\right.$$
$$\left. -\frac{uv}{v^2+ku^2}x + \frac{ku^2}{v^2+ku^2}y - \frac{uw}{v^2+ku^2}\right). \qquad (7)$$

Так как точка P^*, симметричная точке P относительно прямой $[u, v, w]$, симметрична точке P относительно точки $\bar{P}$, то сама *симметрия относительно прямой* $[u, v, w]$ представляется уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \frac{v^2-ku^2}{v^2+ku^2}x - \frac{2kuv}{v^2+ku^2}y - \frac{2kuv}{v^2+ku^2}, \\ y^* &= -\frac{2uv}{v^2+ku^2}x - \frac{v^2-ku^2}{v^2+ku^2}y - \frac{2vw}{v^2+ku^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Так как поворот вокруг начала O является произведением симметрии $x^*=x$, $y^*=-y$ относительно оси абсцисс на симметрию относительно прямой $[u, v, 0]$, то из формул (8) следуют формулы поворота вокруг O, если положить $w=0$, а коэффициенты при y умножить на -1. Поэтому те евклидо́вы движения, которые сохраняют точку O (в обозначениях п. 8 § 6 — элементы подгруппы $\mathfrak{G}_O$), представляются формулами:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \frac{v^2-ku^2}{v^2+ku^2}x + e\,\frac{2kuv}{v^2+ku^2}y, \\ y^* &= -\frac{2uv}{v^2+ku^2}x + e\,\frac{v^2-ku^2}{v^2+ku^2}y, \end{aligned}\right\} \text{ где } e = \pm 1; \qquad (9)$$

здесь e — определитель преобразования. Так как для евклидовой группы движений $\mathfrak{G}$ справедливо соотношение $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_O\mathfrak{T}$ (п. 8 § 6), то получаем представление произвольного евклидова движения, взяв суперпозицию преобразования (9) с переносом (3), т. е. прибавляем к правым частям (9) соответственно a и b. Полученное преобразование можно представить матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{v^2-ku^2}{v^2+ku^2} & e\,\frac{2kuv}{v^2+ku^2} & a \\ -\frac{2uv}{v^2+ku^2} & e\,\frac{v^2-ku}{v^2+ku^2} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{gathered}\text{где } u,\ v,\ e,\ a,\ b \in K, \\ (u,\ v) \neq (0,\ 0),\ e = \pm 1. \end{gathered} \qquad (10)$$

Добавлением строки (0, 0, 1) суперпозиция двух преобразований изображается (левым) умножением матриц. Матрица

$$S_{u,v,w}=\begin{pmatrix} \frac{v^2-ku^2}{v^2+ku^2} & -\frac{2kuv}{v^2+ku^2} & -\frac{2kuw}{v^2+ku^2} \\ \frac{2uv}{v^2+ku^2} & -\frac{v^2-ku^2}{v^2+ku^2} & -\frac{2vw}{v^2+ku^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } u,\ v,\ w\in K,\ (u,\ v)\neq(0,\ 0), \quad (11)$$

представляет симметрию относительно прямой $[u, v, w]$. Резюмируя, заключаем, что справедлива

Теорема X. *Всякой евклидовой группе движений* ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$) *отвечают поле K характеристики $\neq 2$ и число $-k$ из K, не являющееся квадратом, такие, что группа $\mathfrak{G}$ представляется матрицами* (10), *а система образующих $\mathfrak{S}$ — матрицами* (11).

Справедливо и обращение теоремы X:

Если K — поле характеристики $\neq 2$, а $-k$ не является в нем квадратом, то матрицы (10) *образуют евклидову группу движений, а матрицы* (11) *— ее систему образующих.*

Доказательство обращения. Имеем

$$S_{u',v',w'}S_{u,v,w}=\begin{pmatrix} \frac{V^2-kU^2}{V^2+kU^2} & -\frac{2kUV}{V^2+kU^2} & -\frac{2kVW_1-2kUW_2}{V^2+kU^2} \\ \frac{2UV}{V^2+kU^2} & \frac{V^2-kU^2}{V^2+kU^2} & -\frac{2kUW_1+2VW_2}{V^2+kU^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где U, W_1, W_2 — миноры второго порядка матрицы $\begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix}$,

т. е. $U=\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$, $W_1=\begin{vmatrix} u & w \\ u' & w' \end{vmatrix}$, $W_2=\begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}$, а $V=vv'+kuu'$.

Далее:

$$S_{u'',v'',w''}S_{u',v',w'}S_{u,v,w}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{v'''^2-ku'''^2}{v'''^2+ku'''^2} & -\frac{2ku'''v'''}{v'''^2+ku'''^2} & -\frac{2ku'''w'''-2kv'''D}{v'''^2+ku'''^2} \\ -\frac{2u'''v'''}{v'''^2+ku'''^2} & -\frac{v'''^2-ku'''^2}{v'''^2+ku'''^2} & -\frac{2v'''w'''+2ku'''D}{v'''^2+ku'''^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} u''' \\ v''' \\ w''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'v'' + ku'u'' \\ -(vv'' + kuu'') \\ vv' + kuu' \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}.$$

(Заметим, что равенство для одностолбцовой матрицы с элементами u''', v''', w''' в векторной форме может быть переписано как равенство для «четвертого симметричного вектора» теоремы 6 из § 8.) Положим далее:

$$S_{a,\,b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Легко проверяются четыре эквивалентности следующей таблицы:

(I) $S_{u,\,v,\,w} = S_{u',\,v',\,w'}$; u, v, w; u', v', w' линейно зависимы;
(II) $S_{u',\,v',\,w'}S_{u,\,v,\,w}$ инволютивно; $vv' + kuu' = 0$;
(III) $S_{u,\,v,\,w}S_{a,\,b}$ инволютивно; $ua + vb + w = 0$;
(IV) $S_{u'',\,v'',\,w''}S_{u',\,v',\,w'}S_{u,\,v,\,w}$ инволютивно; u, v, w; u', v', w'; u'', v'', w'' линейно зависимы.

При этом если выполняется (IV), то $S_{u'',\,v'',\,w''}S_{u',\,v',\,w'}S_{u,\,v,\,w} = S_{u''',\,v''',\,w'''}$. Если выполняется (II), то $S_{u',\,v',\,w'}S_{u,\,v,\,w}$ — это матрица $S_{a,\,b}$, в которой a и b являются решениями системы

$$ux + vy + w = 0, \quad u'x + v'y + w' = 0 \quad \text{при} \quad vv' + kuu' = 0.$$

Обратно, всякая матрица $S_{a,\,b}$ может быть представлена в виде инволютивного произведения двух матриц (11), например $S_{a,\,b} = S_{0,\,1,\,-b}S_{1,\,0,\,-a}$. Следовательно, матрицы (12) являются инволютивным произведением двух матриц (11).

Рассмотрим группу, порожденную матрицами (11), и будем считать матрицы (11) осевыми симметриями (системой образующих $\mathfrak{S}$) в смысле нашей системы аксиом. Тогда матрицы (12) являются центральными симметриями. В силу эквивалентностей (I)—(IV) и последующих утверждений без труда устанавливается, что для этих центральных и осевых симметрий выполняются аксиомы 1—4, R и V*. Следовательно, группа, порожденная матрицами (11), является евклидовой группой движений (инвариантность системы образующих проверять не нужно: см. п. 1 § 12). Элементы группы — это матрицы (10): ведь при $e = -1$ всякая матрица (10) имеет вид $S_{\frac{a}{2},\,\frac{b}{2}}S_{0,\,0}\,S_{u,\,v,\,0}$, а при $e = 1$ —

вид $S_{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}} S_{0,0} S_{u,v,0} S_{0,1,0}$, т. е. раз мы умеем записывать матрицы (12) в виде произведения матриц (11), всякая матрица (10) является произведением матриц (11).

Задачи. 1. Преобразования (9) — это те линейные преобразования векторного пространства пар (x, y) элементов из K, которые сохраняют инвариантным «скалярное произведение» $xx'+kyy'$.

2. Следующие группы совпадают: 1) подгруппа $\mathfrak{G}_O$ группы евклидовых движений; 2) ортогональная группа $O_2(K, F)$ над полем характеристики $\neq 2$, где форма F бинарна и отделяет нуль.

2. Специальные евклидовы группы движений. В силу обращения теоремы X над каждым полем характеристики $\neq 2$, в котором не каждый элемент является квадратом, есть по крайней мере одна евклидова группа движений. В частности, есть конечная евклидова группа движений — и при этом над каждым конечным полем характеристики $\neq 2$ только одна; наименьшая из них — над простым полем характеристики 3 при $k=1$.

Рассмотрим две *дополнительные аксиомы*, посредством которых конкретизируется общее понятие евклидовой группы движений, а тем самым и евклидовой плоскости.

Первой введем такую аксиому (при выполнении аксиом евклидовой группы движений):

Найдутся g и h такие, что $g^h \perp g$.

Она означает, что существует прямой угол, который можно разделить пополам. Это имеет место в том и только в том случае, когда существует центральная симметрия, являющаяся квадратом (ср. лемму из Замечания о свободной подвижности). Совместно с аксиомой R можно перефразировать дополнительную аксиому в виде требования, чтобы в групповой плоскости существовал квадрат, т. е. прямоугольник с ортогональными диагоналями. Как легко видеть, всякий прямой угол на евклидовой групповой плоскости можно разделить пополам, если существует хотя бы один прямой угол с этим свойством; в евклидовой группе движений всякая центральная симметрия является квадратом, если существует хотя бы одна центральная симметрия, являющаяся квадратом.

Рассмотрим теперь евклидову групповую плоскость, представленную, как в п. 1, в прямоугольной системе координат в виде координатной плоскости. Назовем *единичной окружностью* множество всех точек, симметричных единичной точке $(1, 0)$ оси абсцисс относительно какой-либо прямой, проходящей через начало координат. Единичная окружность состоит из точек (x, y), удовлетворяющих уравнению $x^2+ky^2=1$. Дополнительная аксиома выполняется тогда и только тогда, когда единичная окружность пересекает ось ординат, т. е. когда k является квадратом.

В этом случае можно нормировать k, сведя k к 1; для этого достаточно принять точку пересечения единичной окружности с осью ординат за единичную точку $(0, 1)$. Итак справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы центральные симметрии в евклидовой группе движений были квадратами, необходимо и достаточно, чтобы постоянная ортогональности в этой группе могла быть сделана равной* 1.

Такие евклидовы группы движений существуют как раз над теми полями, в которых -1 не является квадратом, причем над каждым полем подобная группа единственная. Существенно ограничительнее вторая аксиома:

Если $g, g'] [P$, то существует h такой, что $g^h = g'$,

которая означает, что всякий угол можно разделить пополам. Так как по теореме 4 из § 12 на евклидовой плоскости всякий отрезок можно разделить пополам, то для евклидовой группы движений эта дополнительная аксиома равносильна требованию свободной подвижности.

Вторая дополнительная аксиома выполняется тогда и только тогда, когда единичная окружность координатной плоскости пересекает всякую прямую, проходящую через начало. То, что единичная окружность пересекает ось ординат, означает, что можно считать $k = 1$ и уравнение единичной окружности записать в виде $x^2 + y^2 = 1$, а то, что она пересекает всякую прямую $y = cx$, означает, что $1 + c^2$ является квадратом. Таким образом, получаем следующее условие для координатного поля K: -1 не является квадратом в K, а $1 + c^2$ — квадрат в K при любом c. Такое поле называется *пифагоровым*. В силу второго требования сумма квадратов в пифагоровом поле является квадратом, а следовательно, в силу первого требования элемент -1 не является суммой квадратов. Таким образом, получается

Теорема 2. *Свободной подвижностью обладают те и только те евклидовы группы движений, постоянная ортогональности которых может быть сведена к* 1 *и поле которых пифагорово.*

Те поля, в которых -1 не является суммой квадратов (они называются *формально вещественными*), допускают упорядочение по Артину и Шрейеру. Следовательно, пифагорово поле, а значит, и та евклидова плоскость, в которой всякий угол можно разделить пополам, допускает упорядочение. Так как упорядочить пифагорово поле, вообще говоря, можно разными способами, то и существующее упорядочение для евклидовой плоскости не однозначно. Поэтому встает вопрос, какие геометрические отношения порядка сохраняются на таких евклидовых плоскостях при всех допустимых упорядочениях; например, лежит ли основание высоты прямоугольного треугольника в смысле этого упорядочения между концами гипотенузы. О. Боттема назвал изучавшееся им пересечение всех возможных упорядочений «несовершенным упорядочением».

В этой связи надо упомянуть один результат из совместной работы автора и Клингенберга: всякая евклидова плоскость допускает некоторое слабое упорядочение (изученное Шпернером в своей теории функций порядка), и это слабое упорядочение можно выбрать так, чтобы были справедливы определенные метрические теоремы порядка.

Задача. Евклидова группа движений над конечным полем из n элементов (характеристики $\neq 2$) имеет порядок $2(n^3+n^2)$.

Литература к § 13. К п. 1: Бэр [1], Бахман [2]. К п. 2: Артин и Шрейер [1], Боттема [1], [2], Шпернер [1], [2], [3], Бахман и Клингенберг [1].

Глава V

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Сформулированный Гильбертом в 1903 г. в «Новых основаниях геометрии Бойяи — Лобачевского» (ср. п. 2 § 2) гиперболический постулат параллельности гласит, что через данную точку всегда проходит прямая, не пересекающая данной прямой, и среди этих непересекающих прямых есть две граничные, отделяющие пересекающие прямые от непересекающих. В этом виде постулат может быть сформулирован только для тех плоскостей, в которых задано упорядочение.

Чтобы определить гиперболическую геометрию в рамках нашей системы аксиом абсолютной геометрии, примем в качестве дополнительной аксиомы требование, чтобы *существовали прямые, не имеющие ни общей точки, ни общего перпендикуляра.* Мы потребуем, чтобы такие прямые существовали, однако ограничим существование таких прямых «гиперболической аксиомой», потребовав, чтобы через фиксированную точку проходило не более двух прямых, которые не имеют с заданной прямой общей точки и общего перпендикуляра.

Обоснование так определенной гиперболической геометрии, согласно общему методу обоснования абсолютной геометрии идеальными элементами, ведет к гиперболической проективно-метрической идеальной плоскости, получаемой путем пополнения гиперболической плоскости (этапы: введение идеальных прямых, доказательство проективных аксиом инцидентности и теорем о замыкании в идельной плоскости, построение абсолютного поляритета в идеальной плоскости). При этом осевые и центральные симметрии на гиперболической плоскости индуцируют как раз все симметрии гиперболической проективно-метрической идеальной плоскости. Следовательно, движения гиперболической плоскости индуцируют все движения гиперболической проективно-метрической идеальной плоскости, а значит, могут быть алгебраически представлены так, как было указано в §§ 8—10.

Обращаясь к проблеме алгебраизации, можно с помощью теоремы 9′ § 10 так сформулировать задачу:

Показать, что аксиоматически заданные гиперболические группы движений представимы в виде групп дробно-линейных преобразований над некоторыми полями.

В дальнейшем эта задача решается так, как это предложили Бергау и Клингенберг*): с самого начала используются специальные свойства гиперболической группы движений и тем самым мы освобождаемся от необходимости следовать указанным выше этапам обоснования. Мы покажем, что симметрии, содержащиеся в гиперболической группе движений, удовлетворяют сформулированным в п. 1 § 11 аксиомам «H-группы», а затем непосредственно из результатов пп. 2—5 § 11 получим, что гиперболическая группа движений представима в виде группы дробно-линейных преобразований поля, образованного концами. Нам останется только исследовать, какие из инволютивных дробно-линейных преобразований отвечают при этом осевым симметриям в гиперболической группе движений.

Главная методическая идея этого подхода — использование *исчисления концов* — восходит к названной работе Гильберта, в которой автор, сверх того, пользовался симметриями и теоремой о трех симметриях для прямых одного конца. Но те аксиоматические требования, при которых мы будем пользоваться исчислением концов, являются значительно более общими, чем у Гильберта, так как исключается требование свободной подвижности.

§ 14. Гиперболические группы движений

1. Аксиомы гиперболических групп движений. Называем *гиперболической группой движений* ту группу движений, которая удовлетворяет системе аксиом п. 2 § 3 и следующим двум дополнительным аксиомам:

Аксиома $\sim$V*. *Существуют несоединимые прямые a и b.*

Аксиома H. *Если $a, b, c \mathbin{]\!\![} P$, a a, g; b, g и c, g несоединимы, то либо $a=b$, либо $a=c$, либо $b=c$.*

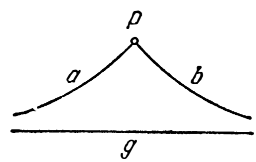


Рис. 124.

Аксиома $\sim$V* означает, что существуют несоединимые прямые. «Гиперболическая аксиома» H означает, что через данную точку P проходит не более двух прямых, не соединимых с данной прямой g (рис. 124).

При этом во всякой группе движений, удовлетворяющей системе аксиом п. 2 § 3, две прямые называются *несоединимыми* —

*) Клингенберг пользовался избыточными аксиомами, которые как теоремы были доказаны Бергау (теорема 3 § 14).

в соответствии с общим определением п. 1 § 3, — если у них нет ни общей точки, ни общего перпендикуляра, т. е. не существует ни точки C, где $C \mathrel{I} a, b$, ни прямой c, где $c \perp a, b$ (ср. п. 12 § 6).

Легко видеть, что можно эквивалентным образом несколько короче переформулировать систему аксиом п. 2 § 3, дополненную аксиомой $\sim V^*$, объединив аксиомы D и $\sim V^*$:

Аксиома D*. *Существуют g, h, j такие, что $g \perp h$, а g и j несоединимы.*

Таким образом, можно описать гиперболическую группу движений как группу, удовлетворяющую системе аксиом, получаемой заменой в системе аксиом п. 2 § 3 аксиомы D на более сильную аксиому D* и добавлением гиперболической аксиомы H.

Из одной только истинности аксиомы $\sim V^*$ вытекает, что в гиперболической группе движений выполняется аксиома $\sim P$, т. е. что эта группа не является *эллиптической* (ср. п. 8 § 3 или п. 12 § 6). Следовательно, в гиперболической группе движений справедливы все теоремы, которые были прежде получены в предположении выполнения $\sim P$; в частности, в гиперболической группе движений, согласно теореме 21 из § 3, движения делятся на собственные и зеркальные.

Относительно несоединимых прямых из группы движений, удовлетворяющей системе аксиом абсолютной геометрии п. 2 § 3, можно заметить, что *Несоединимые прямые обязательно различны.*

Если a и g — несоединимые прямые, а u — прямая, перпендикулярная g, то a^u — отличная от a прямая, не соединимая с g. Она также не принадлежит тому пучку, который содержит a и g, ибо в противном случае по теореме о транзитивности (теорема 6 из § 4) a, a^u, u принадлежали бы одному пучку, а значит, a, u, g принадлежали бы одному пучку, т. е. a и g были бы инцидентны точке ug.

Пусть даны точка P и прямая g. Проведем через P прямую a, не соединимую с g. Тогда перпендикуляр u, опущенный из P на g, определен однозначно, а a^u — отличная от a прямая, проходящая через P и не соединимая с g. Аксиома H равносильна требованию: если через P проходит прямая a, не соединимая с некоторой прямой g, то, кроме прямых, симметричных a относительно перпендикуляра, опущенного из P на g, нет никаких других прямых, проходящих через P и не соединимых с g.

В дальнейшем будет существенно такое замечание: несоединимые инволютивные элементы всякой группы движений, удовлетворяющей системе аксиом п. 2 § 3, обязательно являются прямыми (ср. п. 12 § 6), т. е. несоединимыми прямыми.

Теперь, используя обе аксиомы $\sim V^*$ и H, покажем, что гиперболическая группа движений является *метрически-неевклидовой*:

Теорема 1. *В гиперболической группе движений выполняется аксиома* $\sim R$.

Очевидно, теорему 1 можно переформулировать так:

Теорема 1′. *В метрически-евклидовой группе движений, в которой выполняется аксиома $\sim V^*$, аксиома H не выполняется.*

При доказательстве теоремы 1′ мы воспользуемся ниже формулируемой леммой о том, что прямые, симметричные некоторой прямой относительно параллельных осей, параллельны. (Понятие параллельности в метрически-евклидовой плоскости определено в п. 8 § 6.)

Лемма. *В метрически-евклидовой группе движений из* $u \| v$ *следует* $a^u \| a^v$.

Доказательство леммы. По условию uv — перенос (п. 8 § 6). Следовательно, vu и $(uv)^a$ — переносы. Значит, по теореме 15 из § 6 и $((uv)^a(vu))^u = a^u a^v$ также является переносом.

Доказательство теоремы 1′. По условию существуют две несоединимые прямые a и g. Выберем на a две разные точки P и Q и проведем перпендикуляры $(P, g) = u$, $(Q, g) = v$ (рис. 125). Тогда a^v также не соединима с g; a^v отлична от a и a^u и не принадлежит пучку, содержащему a и g. Тогда и a^u, a^v, g не принадлежат одному пучку, ибо a^u и a^v по лемме имеют общий перпендикуляр l, и, значит, если бы a^u, a^v, g принадлежали одному пучку, то по обращению аксиомы 4 g также была бы перпендикулярна l, т. е. a^u и a^v были бы соединимы с g.

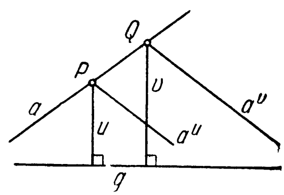


Рис. 125.

Теперь рассмотрим прямую b, проходящую через P и принадлежащую тому же пучку, что a^v и g (теорема 15 из § 3). В силу обращений аксиом 3 и 4 b тоже не соединима с g. При этом $b \neq a$ и $b \neq a^u$, ибо ни a, a^v, g, ни a^u, a^v, g не принадлежат одному пучку. Наличие прямой b показывает, что аксиома H не выполнена.

2. Концы. Из основного свойства пучков прямых (п. 5 § 4) вытекает, что всякие две различные прямые пучка прямых G (ab), образованного двумя несоединимыми прямыми a и b, сами не соединимы. С учетом системы аксиом п. 2 § 3 и аксиомы $\sim$V* получаем:

Всякий пучок прямых является либо собственным, либо пучком перпендикуляров, либо же пучком попарно несоединимых прямых, причем существуют пучки прямых каждого из трех типов.

В гиперболической группе движений пучки с попарно несоединимыми прямыми мы называем *концами*. Две прямые определяют конец в том и только в том случае, когда они несоединимы. По аксиоме $\sim$V* существует по крайней мере один конец, а из аксиомы H следует, что всякая прямая принадлежит не более чем двум разным концам.

Последнее утверждение строже следует обосновать так: если в группе движений, удовлетворяющей системе аксиом п. 2 § 3, есть прямая g, принадлежащая трем разным пучкам попарно несоединимых прямых, то через каждую не принадлежащую g точку P проходят три разные прямые, не соединимые с g (это существующие по теореме 15 из § 3 соединения точки P с тремя данными пучками); значит, аксиома H нарушена.

Пользуясь сделанным в п. 1 замечанием о несоединимых прямых, получаем: конец, которому принадлежит прямая g, при симметрии относительно всякой прямой, перпендикулярной g, переходит в другой конец, которому также принадлежит g. То же справедливо для симметрии относительно точек прямой g. Так как по аксиоме H прямая принадлежит не более чем двум концам, получаем:

(I) *Если прямая принадлежит одному концу, то она принадлежит еще ровно одному концу.*

Поэтому конец, которому принадлежит прямая g, суперпозицией двух симметрий относительно прямых, перпендикулярных g, переводится в себя. То же относится к суперпозиции симметрий относительно точки прямой g и относительно перпендикуляра к g.

Из одной лишь системы аксиом п. 2 § 3 вытекает, что пучок, который при симметрии относительно данной прямой c переходит в себя, это: 1) пучок, которому принадлежит c, или 2) пучок перпендикуляров к c (ср. доказательство теоремы 5 из § 11). Таким образом, единственные пучки, которые при симметрии относительно прямой, не принадлежащей пучку, переходят в себя, — это пучки перпендикуляров. Итак:

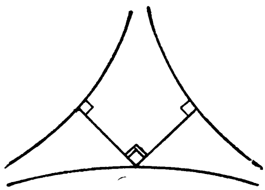


Рис. 126.

(II) *Если некоторый конец переходит при симметрии относительно прямой c в себя, то c принадлежит этому концу.*

Замечание. В п. 2 § 11 было определено понятие особого пучка инволютивных элементов для произвольной биинволютивной группы, в которой выполняется транзитивность T для произвольных инволютивных элементов. В силу теоремы 16 из § 3 и теоремы 1 из § 7 гиперболическая группа движений удовлетворяет этому теоретико-групповому условию, а значит, в ней можно, как в п. 2 § 11, образовать пучок из произвольных инволютивных элементов. Так как в гиперболической группе движений несоединимые инволютивные элементы непременно являются прямыми, то особый пучок произвольных инволютивных элементов (пучок попарно несоединимых элементов) — это обязательно пучок несоединимых прямых, т. е. конец в смысле вышеприведенного определения, и наоборот.

Задача. Доказать «теорему об асимптотическом трехстороннике»: Если даны три попарно несоединимые и не принадлежащие одному пучку прямые (рис. 126), то перпендикуляры, опущенные из какой-либо точки одной прямой на обе другие, взаимно перпендикулярны. (На идеальной плоскости эта теорема двойственна теореме Зайдевица: если треугольник вписан в коническое сечение, то всякая прямая, сопряженная одной стороне треугольника, пересекает обе другие стороны в сопряженных точках.)

3. Лемма Бергау о конце. Ближайшая наша цель состоит в том, чтобы показать, что в гиперболической группе движений всякие два конца соединимы, т. е. имеют общую прямую. Мы следуем идее Бергау и применяем доказанную им *лемму о конце*. В этом и последующем пунктах мы предполагаем, что группа движений гиперболическая.

Рассмотрим фигуру, образованную шестью прямыми a, b, g, d, e, f, удовлетворяющими следующим условиям (рис. 127):

$$a \perp g,\ d;\quad g \neq d;\quad g \perp e;$$

$$b \mathbin{\mathrm{I}} ge;\quad b \perp f;\quad def \text{ — прямая}. \qquad (*)$$

Символически эти условия запишем так $[a, b, g, d, e, f]$.

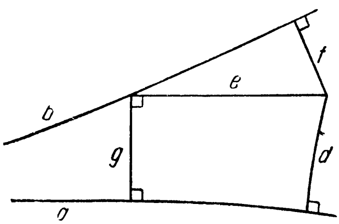


Рис. 127.

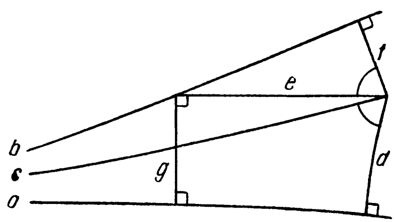


Рис. 128.

Лемма о конце. *Если a, b определяют конец и имеет место $[a, b, g, d, e, f]$, то прямая $c = def$ принадлежит этому концу* (рис. 128).

Доказательство. Так как прямая a принадлежит концу $\mathsf{G}(ab)$, то по сделанному в п. 2 замечанию $\mathsf{G}(ab)^{dg} = \mathsf{G}(ab)$, и так как прямая b принадлежит концу $\mathsf{G}(ab)$, то аналогично $\mathsf{G}(ab)^{(ge)f} = \mathsf{G}(ab)$. В силу $dg \cdot (ge) f = c$ поэтому $\mathsf{G}(ab)^c = \mathsf{G}(ab)$, т. е. по (II) $c \in \mathsf{G}(ab)$.

Обобщение леммы. *Пусть имеет место $[a, b, g, d, e, f]$ и пусть $def = c$. Если две из прямых a, b, c определяют конец, то третья из них принадлежит тому же концу.*

Доказательство. Очевидно, что обобщение будет вытекать из леммы, если только мы докажем следующее: пусть верно

$[a, b, g, d, e, f]$, $def=c$; если a и b соединимы, то a и c, b и c также соединимы.

Докажем это. По условию существует инволютивный элемент σ такой, что $a, b|\sigma$. По теореме S о трех симметриях и ее дополнению S′ (теорема 24б) из § 3 или п. 1 § 7) $dg\sigma=\sigma'$ и $\sigma(ge)f=\sigma''$, где $a|\sigma'$ и $b|\sigma''$ будут инволютивными элементами. Далее $\sigma'\sigma''=dg\sigma\cdot\sigma(ge)f=c$. Следовательно, $a, c|\sigma'$ и $b, c|\sigma''$.

Добавим два замечания относительно леммы о конце, которыми, однако, не будем пользоваться при обосновании гиперболической геометрии.

1. Лемма дает необходимое условие того, что две прямые a и b определяют некоторый конец. Эти условия и достаточны, ибо справедливо такое

Обращение леммы. *Если $a\neq b$ и существуют прямые d, e, f, g такие, что имеет место $[a, b, g, d, e, f]$, а прямые a, $def=c$, b принадлежат одному пучку, то a и b определяют конец.*

Доказательство. Пусть a и b соединимы, т. е. существует инволютивный элемент σ, где $a, b|\sigma$. Так как по условию $a\neq b$, а a, c, b принадлежат одному пучку, то по обращению теоремы о трех симметриях (теоремы 8 и 10 из § 3) выполняется также $c|\sigma$, что невозможно.

Из доказательства обобщения леммы видно, что для инволютивных элементов $dg\sigma=\sigma'$ и $\sigma(ge)f=\sigma''$ имеет место $a, c|\sigma'$ и $b, c|\sigma''$. В силу $a\neq b$ имеет место либо $a\neq c$, либо $b\neq c$; значит, по однозначности E соединения (теорема 1 из § 7) $\sigma=\sigma'$ или $\sigma=\sigma''$, т. е. $d=g$ или $ge=f$. Оба равенства невозможны (последнее в силу аксиомы $\sim$P).

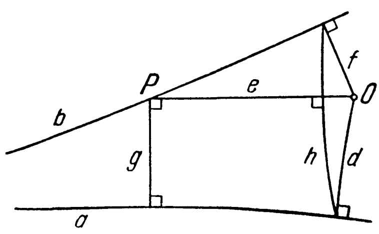


Рис. 129.

2. Утверждение леммы, что $a(def)b$ является прямой, равносильно утверждению, что $(ad)e(fb)$ — прямая. Это по теореме 11 § 3 означает, что существует прямая h, инцидентная точкам ad и fb и перпендикулярная прямой e (рис. 129). Поэтому теперь в условии (*) можно заменить требование о том, что def является прямой, более сильным требованием существования точки O, которой инцидентны d, e, f. Тогда лемма и ее обращение дают критерий того, что две прямые определяют конец.

Критерий. *Пусть a и b — две разные прямые. Выберем на b точку P, опустим из нее перпендикуляр на a и восставим к нему в P перпендикуляр e. Возьмем на e точку O, отличную от P. Из O опустим перпендикуляры на a и b и соединим их осно-*

вания прямой h. Прямые a и b определяют конец в том и только в том случае, когда $h \perp e$.

На гиперболической плоскости прямые одного конца называются также *параллельными* друг другу. Таким образом, мы получили критерий, являющийся чисто конфигурационным высказыванием об отношениях инцидентности и перпендикулярности, того, что две разные прямые являются гиперболическими параллелями.

Задача. Рассмотрим произвольную метрически-неевклидову плоскость, а также ее идеальную плоскость.

а) Идеальная точка, инцидентная своей поляре, является пучком несоединимых прямых, т. е. не является ни собственным пучком, ни пучком перпендикуляров.

Усилим определение «конфигурации леммы» $[a, b, g, d, e, f]$, потребовав, чтобы d, e, f были инцидентны точке $O \neq g$. Говорим, что конфигурация леммы замыкается, если прямые a, b, $def=c$ принадлежат одному пучку.

б) Идеальная точка $\mathbf{G}(ab)$ инцидентна своей поляре тогда и только тогда, когда конфигурация леммы, построенная для a и b, замыкается. (Использовать полуповорот вокруг O, задаваемый $de=cf$.)

Таким образом, *поляритет в идеальной плоскости для метрически-неевклидовой плоскости является гиперболическим тогда и только тогда, когда в метрической плоскости существует замыкающаяся конфигурация леммы при $a \neq b$*

в) Пусть в конфигурации леммы $e \neq b$; обозначим через * полуповорот вокруг O, задаваемый $dc=ef$. Имеем: конфигурация леммы замыкается тогда и только тогда, когда $a \in \mathbf{G}(a)^*$.

Идеальная точка инцидентна своей поляре тогда и только тогда, когда эта идеальная точка, рассматриваемая как образ некоторого пучка перпендикуляров при некотором полуповороте (ср. задачу 2 из п. 10 § 6), содержит прямую, несущую этот пучок.

г) Если переформулировать условие замыкания конфигурации леммы таким образом, чтобы потребовать ортогональность прямых e и h «критерия», то окажется, что замыкающаяся конфигурация леммы на идеальной плоскости может рассматриваться как конфигурация Паппа — Паскаля (рассмотреть полюсы и поляры идеальных прямых и соответственно идеальных точек $\mathbf{g}(a)$, $\mathbf{g}(b)$, $\mathbf{g}(g)$, $\mathbf{g}(e)$, $\mathbf{G}(ab)$, $\mathbf{G}(ge)$.)

4. Соединимость концов. Мы утверждаем теперь, что справедлива

Теорема 2 (существование перпендикуляра в конце). *Если даны конец и прямая вне него, то существует прямая, принадлежащая этому концу и перпендикулярная данной прямой.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{G}(c_1c_2)$ — данный конец, а h — данная прямая при $h \notin \mathbf{G}(c_1c_2)$. На c_1 выберем точку O, не принадлежащую h. Пусть $(O, h) = d^*$. По теореме 15 из § 3 через hd^* проходит прямая a, где $a \in \mathbf{G}(c_1c_2)$.

Если $a=c_1$, то в силу $hd^* \neq O$ имеем $a=d^*$, и a является прямой с указанным в теореме 2 свойством. Пусть поэтому $a \neq c_1$. Тогда наш конец имеет вид пучка $\mathbf{G}(ac_1)$.

Прямая $(O, a)=d$ (рис. 130) отлична от d^* (иначе было бы $a=h$ и $h \in \mathbf{G}(c_1c_2)$) и не перпендикулярна d^* (иначе было бы $a=d^*$, т. е. $a=c_1$). Следовательно, элемент dd^* задает полуповорот вокруг O, который мы обозначим через *. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что h и $\overset{*}{c}_1$ имеют общий перпендикуляр и что последний принадлежит данному пучку. Мы достигаем этого трехкратным применением обобщения леммы о концах, последовательно доказывая следующее:

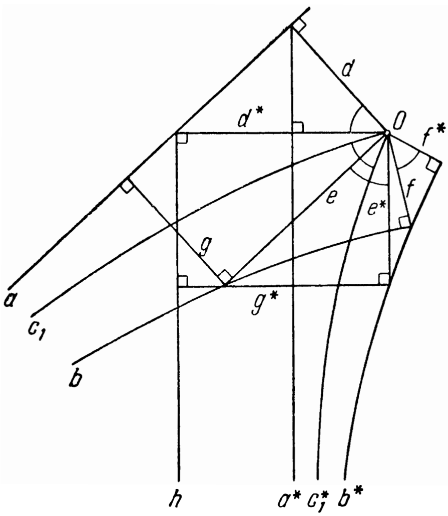


Рис. 130.

(I) *h и $\overset{*}{c}_1$ соединимы*;

(II) *h и $\overset{*}{c}_1$ имеют общий перпендикуляр c*;

(III) *c принадлежит концу $\mathbf{G}(ac_1)$*.

Доказательство (I). Дополним прямые a, d, c_1 до конфигурации леммы: пусть g — отличный от d перпендикуляр к a; положим $(O, g)=e$, $c_1de=f$, $(ge, f)=b$. Тогда имеет место $[a, b, g, d, e, f]$, где $def=c_1$. Так как a и c_1 определяют конец, то по обобщению леммы a, c_1, b образуют пучок.

Теперь применим к конфигурации леммы полуповорот *, обозначив при этом a^* через h. Возникает новая конфигурация леммы: $[h, b^*, g^*, d^*, e^*, f^*]$, где $d^*e^*f^*=c_1^*$. Отношения $g^* \neq d^*$, $g^* \perp e^*$, $b^* \,]\, g^*e^*$, $b^* \perp f^*$ справедливы, ибо они выполняются для прямых без звездочек. Далее, $h \perp d^*$ по определению d^*, а $h \perp g^*$ по теореме 25 из § 3, примененной к обоим четырехсторонникам d, e, g, a и d^*, e^*, g^*, h.

Теперь покажем, что в новой конфигурации леммы прямые h, c_1^*, b^* не принадлежат одному пучку. Тогда из обобщения леммы вытекает утверждение (1).

Допустим, что h, c_1^*, b^* принадлежат одному пучку. Так как первая конфигурация леммы гарантирует, что a, c_1, b принадлежат одному пучку (а поэтому одному пучку принадлежат a^*, c_1^*, b^*), то по транзитивности (теорема 6 из § 4) и прямые h, a^*, c_1^* должны были бы принадлежать одному пучку (так как $c_1 \neq b$, то $c_1^* \neq b^*$). Поскольку h, $a^* \perp d^*$ и $h \neq a^*$ (в силу

$d \neq d^*$), то по обращению аксиомы 4 должно было бы быть $c_1^* \perp d^*$. Но тогда было бы и $c_1 \perp d$, и a, c_1 имели бы общий перпендикуляр, т. е. не определяли бы конца.

Доказательство (II). В силу (I) прямые h, c_1^* обладают общей точкой или общим перпендикуляром. Покажем, что у них нет общей точки. Обозначим через $^\circ$ полуповорот вокруг O, задаваемый элементом d^*d группы; тогда $h^\circ = a$, $c_1^{*\circ} = c_1$, т. е. $\mathsf{G}(hc_1^*)^\circ = \mathsf{G}(ac_1)$. Если бы при этом h и c_1^* имели общую точку, то $\mathsf{G}(hc_1^*)$ и $\mathsf{G}(ac_1)$ по теореме 3 из § 6 были бы собственными пучками прямых.

Доказательство (III). Имеем $[c, a, h, c_1^*, d^*, d]$, где $c_1^*d^*d = c_1$ (рис. 131). По обобщению леммы и c принадлежит концу $\mathsf{G}(ac_1)$.

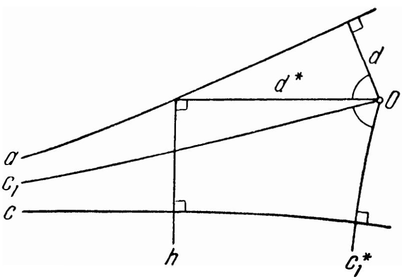


Рис. 131.

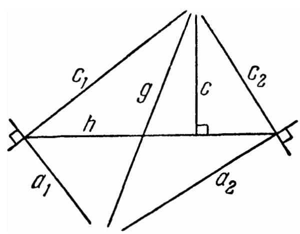


Рис. 132.

Из теоремы 2 выводится

Теорема 3 (соединимость концов). *Всякие два конца имеют общую прямую.*

Доказательство. Пусть $\mathsf{G}(c_1c_2)$ и $\mathsf{G}(d_1d_2)$ — концы. Если c_1 или c_2 принадлежит концу $\mathsf{G}(d_1d_2)$, то доказывать нечего. В противном случае по теореме 2 существуют прямые a_i ($i = 1, 2$) такие, что $a_i \in \mathsf{G}(d_1d_2)$ и $a_i \perp c_i$ (рис. 132). Имеем $a_1 \neq a_2$ и $\mathsf{G}(d_1d_2) = \mathsf{G}(a_1a_2)$. Точки a_1c_1 и a_2c_2 различны. Для их соединительной прямой $(a_1c_1, a_2c_2) = h$ имеет место $h \notin \mathsf{G}(c_1c_2)$. По теореме 2 существует прямая c, для которой $c \in \mathsf{G}(c_1c_2)$, $c \perp h$. Тогда c_1cc_2 — это прямая g, для которой $g \in \mathsf{G}(c_1c_2)$ и которая по теореме о перпендикулярах принадлежит концу $\mathsf{G}(a_1a_2)$.

5. Гиперболические группы движений и H-группы. Докажем, что справедлива

Теорема 4. *Если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — гиперболическая группа движений, то $\mathfrak{G}$ — H-группа.*

Следует иметь в виду, что в гиперболической группе движений система $\mathfrak{S}$ «прямых» аксиоматически выделена из множества инволютивных элементов группы. Аксиомы же H-группы — это высказывания о произвольных инволютивных элементах группы. Теорема 4 утверждает: если рассматривать совокупность всех инволютивных элементов гиперболической группы движений (т. е. отвлечься от различия между прямыми и точками), то для них выполняется основное допущение и аксиомы T, $\sim$V, UV1, UV2, которыми определялись H-группы в п. 1 § 11.

Доказательство теоремы 4. По теореме 16 из § 3 группа $\mathfrak{G}$ биинволютивна, а значит, удовлетворяет основному допущению H-группы. По теореме 1 из § 7 для произвольных инволютивных элементов из $\mathfrak{G}$ справедлива аксиома транзитивности T. Из аксиомы $\sim$V* следует аксиома $\sim$V. Поскольку несоединимые инволютивные элементы гиперболической группы движений обязательно являются прямыми, из аксиомы H следует справедливость аксиомы UV2 (ср. вывод из аксиомы H в начале п. 2), а из теоремы 3 следует справедливость аксиомы UV1.

Если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — гиперболическая группа движений, то $\mathfrak{G}$ не произвольная H-группа. Ведь в гиперболической группе движений есть подгруппа индекса 2 — подгруппа собственных движений. Инволютивные элементы этой подгруппы — точки, а произведение двух точек не инволютивно (теорема 23 из § 3). Поэтому теорему 4 можно уточнить:

Теорема 4′. *Если* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — *гиперболическая группа движений, то* $\mathfrak{G}$ — *H- группа с подгруппой* $\mathfrak{U}$, *обладающей таким свойством*:

(U) *Индекс* $\mathfrak{U}$ *равен* 2; *произведение любых двух инволютивных элементов из* $\mathfrak{U}$ *не инволютивно.*

Справедливо и обратное:

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{G}$ — *H-группа, обладающая подгруппой* $\mathfrak{U}$, *удовлетворяющей свойству* (U). *Тогда множество* $\mathfrak{S}$ *инволютивных элементов из смежного класса для* $\mathfrak{U}$ *является системой образующих для* $\mathfrak{G}$, *а* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — *гиперболическая группа движений.*

Дадим доказательство этой теоремы, опирающееся на аксиоматическое определение H-группы и не использующее алгебраического представления H-группы (теорема 15 из § 11). Чисто теоретико-групповыми методами мы покажем, что $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ удовлетворяет системе аксиом гиперболической группы движений.

Справедливость основного допущения: если π—инволютивный элемент из $\mathfrak{U}$, то по основному допущению для H-группы π представим в виде $\pi=\sigma'\sigma''$, где σ' и σ'' — инволютивные элементы из $\mathfrak{G}$. По (U) σ' и σ'' принадлежат $\mathfrak{S}$. Таким образом, всякий инволютивный элемент из $\mathfrak{G}$, коль скоро он сам не содержится в $\mathfrak{S}$, представим в виде произведения двух элементов из $\mathfrak{S}$. Тогда из основного допущения для H-группы получаем, что $\mathfrak{S}$ — система образующих для $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{S}$ инвариантна, ибо $\mathfrak{U}$, являясь подгруппой индекса 2, является нормальным делителем в $\mathfrak{G}$, а поэтому и $\mathfrak{U}$, и ее смежный класс, и множество инволютивных элементов последнего представляют собой инвариантные комплексы в $\mathfrak{G}$.

Для доказательства справедливости аксиомы 1 и аксиомы D* привлечем введенное в п. 7 § 11 понятие *множества $\mathfrak{T}$ тех инволютивных элементов из $\mathfrak{G}$, которые принадлежат особым пучкам* (*концам*). $\mathfrak{T}$ содержится в $\mathfrak{S}$, ибо раз $\mathfrak{T}$ является классом сопряженных элементов (п. 7 § 11, (1)), то либо $\mathfrak{T}$ целиком содержится в $\mathfrak{U}$, либо в смежном классе подгруппы $\mathfrak{U}$. Первая возможность исключается в силу (U), ибо $\mathfrak{T}$ в силу п. 7 § 11, (III) является множеством инволютивных элементов, которое содержит элементы с инволютивным произведением.

Аксиома 1. Если π — инволютивный элемент из $\mathfrak{U}$, то, как отмечалось, $\pi \notin \mathfrak{T}$; следовательно, если ρ — произвольный инволютивный элемент из $\mathfrak{G}$, то по определению множества $\mathfrak{T}$ элементы π и ρ соединимы, т. е. существует инволютивный элемент $\sigma \in \mathfrak{G}$ такой, что $\pi, \rho | \sigma$. Из $\pi \in \mathfrak{U}$ и $\pi | \sigma$ в силу (U) следует, $\sigma \notin \mathfrak{U}$, т. е. $\sigma \in \mathfrak{S}$.

Аксиома 2. Ее справедливость следует из однозначности E соединения, которая в силу теоремы 2 из § 7 вытекает из аксиомы T.

Аксиомы 3 и 4. Пусть даны элементы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathfrak{S}$ и инволютивный элемент $\rho \in \mathfrak{G}$ и выполняется $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \rho$. По теореме S о трех симметриях (являющейся в силу теоремы 2 из § 7 следствием аксиомы T) произведение $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ инволютивно. Являясь произведением трех элементов из смежного класса подгруппы $\mathfrak{U}$, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ принадлежит смежному классу подгруппы $\mathfrak{U}$, т. е. $\mathfrak{S}$.

Аксиома D*. По аксиоме $\sim$V существуют несоединимые инволютивные элементы τ, τ_1'; по определению множества $\mathfrak{T}$ они принадлежат $\mathfrak{T}$. По п. 7 § 11, (III) для τ_1 в $\mathfrak{T}$ найдется элемент τ_2 такой, что $\tau_1 | \tau_2$. Тогда τ_1, τ_2, τ_1' принадлежат $\mathfrak{S}$ и удовлетворяют аксиоме D*.

Аксиома H. Эта аксиома, даже рассматриваемая как утверждение о произвольных инволютивных элементах, выполняется в силу аксиом T и UV2. Пусть даны инволютивные элементы $\pi, \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и $\pi | \sigma_i$, причем σ, σ_i несоединимы ($i = 1, 2, 3$). По аксиоме UV2, например, произведение $\sigma_1\sigma_2\sigma$ инволютивно. Тогда должно быть $\sigma_1=\sigma_2$, ибо в противном случае в силу $\sigma_1, \sigma_2|\pi$ по обращению U теоремы о трех симметриях (которая, как доказано в теореме 2 из § 7, является следствием аксиомы T) имело бы место $\sigma|\pi$, т. е. π являлось бы соединением σ и σ_i.

Задачи. **1.** Если подгруппа индекса 2 произвольной группы не содержит никаких двух инволютивных элементов с инволютивным произведением, то из всяких трех инволютивных элементов, произведение которых равно 1, в этой подгруппе содержится точно один элемент; верно и обратное.

2. (Бергау) Пусть в *H*-группе, отличной от $\mathfrak{S}_4$ (ср. задачу из п. 6 § 11), есть подгруппа индекса 2. Тогда отличный от единицы элемент подгруппы можно представить в виде произведения трех инволютивных элементов подгруппы. Следовательно, во всякой гиперболической группе движений всякое отличное от единицы собственное движение представимо в виде произведения трех отражений от точек.

6. Требования, равносильные гиперболической аксиоме H. Чтобы лучше уяснить себе взаимосвязи отдельных теорем гиперболической геометрии, играющих у нас основную роль, мы, следуя Бергау, покажем дополнительно, что гиперболической аксиоме H равносильно (в предположении выполнения остальных аксиом абсолютной геометрии) любое из таких утверждений: лемма о конце, теорема 2 о существовании перпендикуляра к концу и теорема 3 о соединимости концов.

Переформулируем эти теоремы в терминах абсолютной геометрии:

Лемма E. *Если a и b несоединимы, имеет место $[a, b, g, d, e, f]$ и $def=c$, то abc — прямая.*

Теорема 2. *Если a и b несоединимы, а abc — не прямая, то существует u такая, что abu — прямая и $c\perp u$.*

Теорема 3. *Если ни a, b, ни c, d несоединимы, то существует v такая, что abv и cdv — прямые.*

Относительно так сформулированных теорем мы утверждаем следующее:

Теорема 6. *При выполнении системы аксиом* п. 2 § 3 *аксиома* H, *лемма* E, *теорема* 2 *и теорема* 3 *попарно равносильны.*

Если выполняется аксиома V*, то все утверждения выполняются тривиальным образом, ибо посылки их всегда оказываются ложными. Поэтому будем считать выполненной аксиому $\sim$V*. Тогда выполняется и аксиома $\sim$P; в частности, перпендикуляр из точки на прямую определен однозначно.

В пп. 1—4 было показано, что *из аксиомы* H *следует лемма* E (при этом было использовано, что аксиома H влечет аксиому $\sim$R), что *из леммы* E (точнее, из ее обобщения, но оно вытекает из леммы) *следует теорема* 2, что *из теоремы* 2 *вытекает теорема* 3. Теперь нужно показать, что эти заключения можно обратить.

I) *Из теоремы* 3 *следует теорема* 2.

Доказательство проводится так же, как доказательство второго утверждения теоремы 7 из § 11, причем рассматриваются пучок прямых $\mathbf{G}(ab)$ при $c \notin \mathbf{G}(ab)$ и пучок перпендикуляров $\mathbf{G}(c)$.

II) *Из теоремы* 2 *следует лемма* E.

Сначала рассмотрим следующее частное утверждение, содержащееся в обобщении леммы E:

Лемма E′. *Если имеет место $[a, b, g, d, e, f]$, $def=c$ и a, c несоединимы, то acb — прямая.*

Мы утверждаем, что

Из леммы E′ *следует лемма* E.

Очевидно, достаточно провести доказательство для конфигурации леммы $[a, b, g, d, e, f]$, где $def=c$. Если a и c соединимы, то a и b, соединимы.

Докажем это утверждение. Пусть σ — инволютивный элемент, причем $a, c|\sigma$. В силу $g, d, \sigma|a$ по аксиоме 4 и ее дополнению (теорема 9 из § 3) или же по теореме 12 из § 3 и ее дополнению $gd\sigma$ является инволютивным элементом ρ, где $\rho|\alpha$. Так как в силу $f(eg)\rho=f(eg)(gd\sigma)=c\sigma$ произведение $f(eg)\rho$ инволютивно, то из f, $eg|b$, пользуясь теоремой 11 или 12 из § 3, получаем $\rho|b$. Следовательно, $\rho|a$, b.

После этого вспомогательного замечания достаточно доказать лемму E'.

Пусть имеет место $[a, b, g, d, e, f]$ и $def=c$. Пусть a и c несоединимы. Допустим, что acb не прямая. Тогда по теореме 2 существует такая прямая u, что acu — прямая и $u\perp b$. По теореме 12 из § 3 тогда $uf(eg)$ является точкой Q. Так как произведение

$$acu=a\cdot cf\cdot(eg)\,Q=a\cdot de\cdot(eg)\,Q=(ad)\,gQ$$

является прямой, а $ad, g|a$, то по теореме 11 из § 3 имеем $Q\,\mathrm{I}\,a$. В силу d, g, $Q|a$ по теореме 12 из § 3 мы заключаем, что dgQ — точка, а так как $dgQ=cu$ (это видно из предыдущего), то и cu — точка. Следовательно, c и u имеют соединение cu, что противоречит условию.

III) *Из леммы* E *следует аксиома* H.

Исходя из точки P и прямой a, проведем такие построения (рис. 133): опустим перпендикуляр $(P, a)=g$, восставим перпендикуляр $Pg=e$, выберем

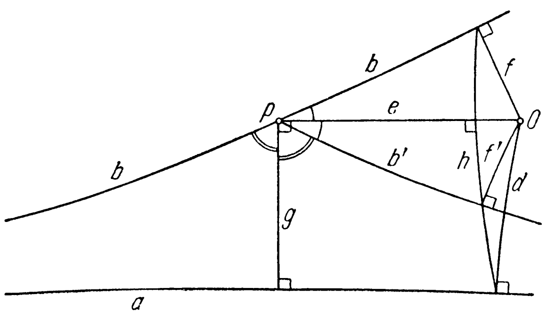


Рис. 133.

на e точку $O\neq P$ и опустим перпендикуляры $(O, a)=d$ и $(ad, e)=h$ (при этом $d\neq g$).

Пусть теперь b — прямая, проходящая через P и не соединимая с a. Утверждаем, что если опустить перпендикуляр $(O, b)=f$, то его основание fb принадлежит h в силу леммы E: ведь по этой лемме $a(def)b=(ad)e(fb)$ — прямая, а по теореме 11 из § 3 отсюда следует наше утверждение.

Теперь пусть $b'\neq b$ — другая прямая, проходящая через P и не соединимая с a. Как и прежде, если провести перпендикуляр $(O, b')=f'$, то его основание $f'b'$ принадлежит h.

Так как b и b' — две разные прямые, проходящие через P, а перпендикуляры на них опущены из точки O, отличной от P, то основания fb, $f'b'$ перпендикуляров различны в силу аксиомы 2.

Проведем в точке P четвертую зеркальную прямую $beb'=e'$. Тогда $(fb)e'(b'f')=fef'$ — прямая, ибо f, e, $f'\,\mathrm{I}\,O$. Следовательно, по теореме 11 из § 3 $e'\perp h$. Таким образом, e и e' — перпендикуляры к h, проходящие через P. Следовательно, $e=e'$, т. е. $b'=b^e$, т. е. $b'=b^g$.

Итак, из леммы E следует, что всякие две различные прямые, проходящие через P и не соединимые с a, симметричны относительно перпендикуляра, опущенного из P на a. Это равносильно аксиоме H.

Очевидно, что если выполняется система аксиом п. 2 § 3, теорема 3 равносильна аксиоме UV1 о произвольных инволютивных элементах (ибо несоединимые инволютивные элементы необходимо являются прямыми). Аналогично, аксиома H равносильна аксиоме UV2; из H следует UV2 (ср. замечание, сделанное в начале п. 2); из UV2 следует H, как в доказательстве теоремы 5, причем надо пользоваться не общим обращением теоремы о трех симметриях, но лишь обращением аксиомы 3.

Итак, из теоремы 6 вытекает

Следствие. *При выполнении системы аксиом* п. 2 § 3 *аксиомы* UV1 *и* UV2 *о произвольных инволютивных элементах равносильны.*

§ 15. Представление гиперболических групп движений бинарными линейными группами

1. Представление гиперболических групп движений. Пусть $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — гиперболическая группа движений. По теореме 4 из § 14 $\mathfrak{G}$ есть H-группа. Тогда из результатов пп. 1—5 § 11 вытекает, что в множестве концов гиперболической группы движений (которое, как отмечалось в п. 2 § 14, совпадает с множеством концов H-группы $\mathfrak{G}$) можно ввести операции сложения и умножения и прийти к некоторому полю K концов характеристики $\neq 2$: оказывается, что $\mathfrak{G}$ изоморфна группе $L_2(K)$ над полем K концов.

В силу теоремы 4′ из § 14 группа $\mathfrak{G}$, а значит, и изоморфная ей группа $L_2(K)$, обладает подгруппой, удовлетворяющей свойству (U). Нам предстоит сейчас изучить смысл этого обстоятельства. Оно приводит, как мы покажем, к тому, что поле концов K упорядочено.

Рассмотрим *произвольную группу $L_2(K)$ над полем K характеристики $\neq 2$, содержащую подгруппу $\mathfrak{U}$ и обладающую свойством* (U). Запишем элемент $\alpha \in L_2(K)$ в виде

$$\alpha = r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \Delta(\alpha) = \{ad - bc\} \neq \{0\}; \tag{1}$$

здесь латинскими буквами обозначены элементы поля K; r — любой отличный от нуля коэффициент пропорциональности; определитель $\Delta(\alpha)$ — это класс квадратичных вычетов из K.

Воспользуемся следующей леммой, уже содержащейся в теореме 8 из § 10:

Лемма. *Во всякой группе $L_2(K)$ над полем K характеристики $\neq 2$ любой элемент, определитель которого равен $\{1\}$, является квадратом.*

Доказательство леммы. Пусть α — элемент (1), где $\Delta(\alpha)=\{1\}$. Тогда тождество

$$\begin{pmatrix} a\pm\sqrt{\Delta} & b \\ c & d\pm\sqrt{\Delta} \end{pmatrix}^2 = (a+d\pm 2\sqrt{\Delta})\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \Delta = ad-bc,$$

показывает, что α является квадратом (так как $\Delta\neq 0$, то из двух элементов $\pm\sqrt{\Delta}$ по крайней мере один таков, что $a+d\pm 2\sqrt{\Delta}\neq\neq 0$).

Если каждому элементу $\alpha\in L_2(K)$ сопоставить его определитель $\Delta(\alpha)$, то получим гомоморфное отображение группы $L_2(K)$ на группу отличных от $\{0\}$ квадратичных классов вычетов из K (на фактор-группу мультипликативной группы поля K по подгруппе квадратов). Ядро гомоморфизма состоит из элементов группы, определитель которых равен $\{1\}$, и принадлежит подгруппе $\mathfrak{U}$, ибо по лемме всякий элемент α, где $\Delta(\alpha)=\{1\}$, является квадратом в группе $L_2(K)$, а подгруппа индекса 2 содержит все квадраты. Таким образом, при гомоморфизме $\alpha\to\Delta(\alpha)$ подгруппе $\mathfrak{U}$ сопоставляется подгруппа индекса 2 в группе квадратичных классов вычетов из поля K.

Теперь назовем элемент $u\neq 0$ из K *положительным* (*отрицательным*), если $\{u\}$ принадлежит этой подгруппе индекса 2 (соответственно ее смежному классу). Тогда *положительные элементы образуют подгруппу индекса 2 в мультипликативной группе поля K, а отрицательные элементы — ее смежный класс.* Таким образом, разбиение всех отличных от нуля элементов поля K на положительные и отрицательные обладает тем мультипликативным свойством, что произведение двух положительных и произведение двух отрицательных элементов положительно, а произведение одного положительного и одного отрицательного элементов отрицательно.

Из того обстоятельства, что $\mathfrak{U}$ не содержит двух инволютивных элементов, произведение которых было бы инволютивно, мы получим утверждения:

1) -1 *отрицательна*;

2) *если u положительно, то $1+u$ положительно.*

Для доказательства 1) рассмотрим инволютивные элементы

$$r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad r\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Их произведение инволютивно. Определитель обоих равен $\{-1\}$. Если бы -1 было положительно, то оба принадлежали бы $\mathfrak{U}$, что противоречит свойству (U).

Для доказательства 2) рассмотрим при данном $u \neq 0, -1$ инволютивные элементы

$$r\begin{pmatrix} 0 & -u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad r\begin{pmatrix} 1 & u \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Их произведение инволютивно; определители равны $\{u\}$ и $\{-(1+u)\}$. Если u положительно, то первый элемент принадлежит $\mathfrak{U}$, а значит, так как $\mathfrak{U}$ не содержит двух инволютивных элементов с инволютивным произведением, второй не принадлежит $\mathfrak{U}$. Следовательно, $-(1+u)$ отрицательно, а так как -1 отрицательно, то по мультипликативному свойству $1+u$ положительно.

Если для произвольного разбиения отличных от нуля элементов некоторого поля на «положительные» и «отрицательные» выполняются вышеназванные мультипликативные свойства и свойства 1) и 2), то каждый отличный от нуля элемент a таков, что из двух элементов a, $-a$ один положителен, а другой отрицателен; далее, сумма и произведение положительных элементов положительны; следовательно, указанное разбиение является упорядочением поля *).

Этим доказана следующая

Теорема 1. *Если группа $L_2(K)$ над полем K характеристики $\neq 2$ содержит подгруппу $\mathfrak{U}$ со свойством* (U), *то в K задается упорядочение, если назвать положительными те элементы $u \in K$, класс вычетов $\{u\}$ которых является определителем какого-то элемента из $\mathfrak{U}$.*

Теперь можно свести воедино теорему 4 из § 14 и теорему 15 из § 11 и получить следующее утверждение о моделировании гиперболической геометрии:

Теорема 2. *Если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — гиперболическая группа движений, то $\mathfrak{G}$ представима в виде группы $L_2(K)$ над полем K концов. K допускает такое упорядочение, что собственные движения представляются элементами из $L_2(K)$ с положительным определителем, зеркальные движения представляются элементами из $L_2(K)$ с отрицательным определителем; элементы системы $\mathfrak{S}$ (осевые симметрии) представляются инволютивными элементами из $L_2(K)$ с отрицательным определителем.*

Справедливо следующее обращение этой теоремы:

*) Очевидно, что обладающее такими свойствами разбиение элементов поля на положительные и отрицательные приводит к линейному упорядочению элементов поля ($a>b$, если $a-b$ положительно), обладающему обычными свойствами (если $a \neq b$, то $a>b$ или $b>a$; если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$ и т. д.; ср. по этому поводу элементарную книгу Беккенбах и Беллман [1] или Бурбаки [1]). (*Прим. ред.*)

Теорема 3. *Всякая группа $L_2(K)$ над упорядоченным полем K является гиперболической группой движений, если рассматривать множество всех инволютивных элементов с отрицательным определителем как систему $\mathfrak{S}$ образующих.*

Теорема 3 вытекает непосредственно из теоремы VIII (§ 10); нужно дополнительно лишь показать, что выполняются аксиомы $\sim V^*$ и H. Попарно несоединимы, например, такие инволютивные элементы:

$$r\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(это элементы конца «бесконечность») с определителем $\{-1\}$. Следовательно, выполняется аксиома $\sim V^*$. То, что выполняется аксиома H, получается, как в доказательстве теоремы 5 из § 14, в силу аксиом T и UV2, которые справедливы во всякой группе $L_2(K)$ (теорема 16 из § 11).

Второе доказательство теоремы 3. Так как группа $L_2(K)$ является H-группой (теорема 16 из § 11), то мы можем вывести справедливость теоремы 3 из теоремы 5 § 14. Надо только показать, что в *группе $L_2(K)$ над упорядоченным полем элементы с положительным определителем образуют подгруппу со свойством* (U). Очевидно, что элементы с положительным определителем образуют подгруппу индекса 2. Остается показать, что для всяких инволютивных элементов π, σ данной группы $L_2(K)$ верно следующее:

Если $\pi|\sigma$, причем $\Delta(\pi)$ положителен, то $\Delta(\sigma)$ отрицателен.

Сначала примем, что π имеет специальный вид:

$$\pi' = r\begin{pmatrix} 0 & b' \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad b' \neq 0.$$

Тот элемент σ', для которого $\pi'|\sigma'$, как легко установить, имеет вид

$$\sigma' = r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \sigma' = r\begin{pmatrix} a & -b' \\ 1 & -a \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad -a^2 + b' \neq 0.$$

Очевидно, что если $\Delta(\pi')$ положителен, то $\Delta(\sigma')$ отрицателен.

По замечанию, предшествовавшему теореме 14' из § 11, всякий инволютивный элемент π (отличный от элементов вида (2), которые нас сейчас не интересуют, ибо их определитель равен $\{-1\}$) можно внутренним автоморфизмом перевести в π'. При этом те σ, для которых $\pi|\sigma$, переходят в такие σ', для которых $\pi'|\sigma'$. А так как при внутренних автоморфизмах определители (как квадратичные классы вычетов) не меняются, то, если $\Delta(\pi)$ положителен, $\Delta(\sigma)$ отрицателен.

В силу теорем 2 и 3 все группы $L_2(K)$ над упорядоченным полем, в которых в качестве образующих выделены инволютивные элементы с отрицательным определителем, представляют все гиперболические группы движений и только их.

Согласно теореме 9′ из § 10 группа $L_2(K)$ над произвольным полем K характеристики $\neq 2$ может быть представлена как группа движений гиперболической проективно-метрической плоскости, получаемой, если в проективной плоскости над K, в которой точки обозначаются $r(a, b, c) = r\boldsymbol{a}$, выделить коническое сечение:

$$g_0(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = -(a^2 + bc) = 0 \tag{3}$$

в качестве абсолютного. Всякому инволютивному элементу из $L_2(K)$, т. е. всякому элементу (1), где $d = -a$, отвечает при этом гармоническая гомология с центром в точке $r\boldsymbol{a}$ и осью — полярой точки $r\boldsymbol{a}$. Определитель инволютивного элемента является значением $\{g_0(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\}$ формы на центре.

В силу теоремы 2 всякая гиперболическая группа движений представляется указанным образом в виде группы движений гиперболической проективно-метрической плоскости над упорядоченным полем. При этом центральным симметриям отвечают гармонические гомологии, центры которых лежат внутри абсолютного конического сечения, а осевым симметриям — гармонические гомологии, оси которых содержат точки внутренности абсолютного конического сечения. Следовательно, точки и прямые гиперболической плоскости всегда могут быть представлены на проективной плоскости над некоторым упорядоченным полем точками внутренности конического сечения и прямыми, пересекающими коническое сечение. Иными словами, для каждой гиперболической плоскости в смысле нашей системы аксиом имеется некоторая «модель Клейна».

Обратно, из теоремы 3 видно, что внутренность конического сечения на проективной плоскости над произвольным упорядоченным полем является гиперболической плоскостью в смысле нашей системы аксиом.

Поля, которые обладают тем свойством, что принадлежащая им группа $L_2(K)$ при подходящем выборе системы образующих представляет гиперболическую группу движений, исчерпывают упорядочиваемые, т. е. формально вещественные поля. Если K — такое поле, то для каждого упорядочивания поля K существует система инволютивных элементов группы $L_2(K)$, которые при этом упорядочивании обладают отрицательным определителем. Всякая такая система по теореме 3 образует систему образующих, вместе с которой $L_2(K)$ является гиперболической группой движений. Таким образом, вообще говоря, одна лишь группа сама по себе еще не определяет разбиение инволютивных элементов на «прямые» и «точки»: это разбиение осуществляется по-разному при разных упорядочениях поля K. Но так как существуют элементы, которые при всех упорядочениях отрицательны (соответственно положительны), то в группе $L_2(K)$ есть инволютивные элементы, которые всегда являются прямыми (соответственно точками). Например, инволютивные элементы с определителем $\{-1\}$ всегда являются прямыми; с определителем $\{1\}$ — всегда точками. Если, как указано выше, трактовать группу $L_2(K)$ как группу движений проективно-метрической плоскости над K, то первым отвечают гармонические гомологии, оси которых пересекают абсолютное коническое сечение (3), а вторым — гармонические гомологии, центры которых лежат в пересечении двух ортогональных прямых, пересекающих абсолютные конические сечения.

Теперь в силу теоремы 9 из § 10 ясно, как представить гиперболические группы движений собственно ортогональными группами с тернарной не отделяющей нуль формой над упорядоченным полем; вместо определителя элемента из $L_2(K)$ здесь надо говорить о норме собственного ортогонального преобразования.

Сведем воедино полученные нами результаты о представлении гиперболической группы движений:

Теорема XI. *Следующие группы, рассматриваемые как порожденные, совпадают:*

1) *гиперболические группы движений* ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$);

2) *H-группы с подгруппой, удовлетворяющей свойству* (U); *образующие H-группы — инволютивные элементы из смежного класса по указанной подгруппе*;

3) *линейные группы $L_2(K)$ при упорядоченном поле K; образующие такой группы — инволютивные элементы с отрицательным определителем*;

4) *группы $O_3^+(K, F)$ над упорядоченным полем при тернарной и не отделяющей нуль форме F; образующие такой группы — симметрии относительно прямых метрического векторного пространства, которые при нормированной форме F имеют отрицательное значение формы* (*симметрии с отрицательной нормой*);

5) *фактор-группы мультипликативной группы системы кватернионов $Q(K; -1, -1)$ при упорядоченном K по ее центру; образующие такой группы — классы пропорциональных чистых кватернионов с отрицательной нормой.*

2. Гиперболические группы движений, в которых каждая прямая принадлежит концу. В гиперболической плоскости, определенной системой аксиом п. 1 § 14 всегда есть некоторая прямая, к которой можно провести две гиперболические параллели через не лежащую на ней точку. То обстоятельство, что в классической гиперболической геометрии *всякая* прямая обладает этим свойством, т. е. принадлежит концу, является дальнейшим аксиоматическим требованием, которое можно выразить в виде усиления аксиомы $\sim V^*$: для каждой прямой найдется несоединимая с ней прямая. Гиперболическая группа движений, в которой всякая прямая принадлежит некоторому концу, допускает аксиоматическую характеристику, если к системе аксиом п. 2 § 3 добавить такую аксиому:

Аксиома H*. *Если $P \not\mathrm{I} g$, то существует точно две прямые a, b такие, что $a, b \,\mathrm{I}\, P$, где a, g и b, g несоединимы.*

Пусть дана гиперболическая группа движений, в которой всякая прямая принадлежит концу. Так как прямые, принадлежащие концам, могут быть переведены внутренним автоморфизмом друг в друга (п. 7 § 11, (I)) и, даже более, этот автоморфизм можно считать порожденным некоторым инволютивным элементом группы, то всякие две прямые можно совместить движением и даже симметрией. Точнее, для всяких двух прямых a и b есть некоторая прямая c, относительно которой a и b симметричны, т. е. $a^c=b$, ибо если есть точка C, для которой $a^C=b$, то a и b имеют общий перпендикуляр v, проходящий через C, и $a^c=b$ для перпендикуляра $c=Cv$, восстановленного к v в C. Итак, всякие две прямые обладают средней линией.

Если представить гиперболическую группу движений, в которой всякая прямая принадлежит концу, в виде группы $L_2(K)$ над ее упорядоченным полем концов, то по п. 7 § 11 всякая прямая представится инволютивным элементом из $L_2(K)$, определитель которого равен $\{-1\}$. Так как всякий квадратичный класс вычетов $\neq\{0\}$ поля K является определителем некоторого инволютивного элемента из $L_2(K)$, то тогда $\{-1\}$ — единственный отрицательный класс вычетов (а $\{1\}$ — единственный положительный). Следовательно, K — упорядоченное поле, содержащее только два квадратичных класса вычетов, отличных от нуля; в частности, K упорядочиваемо единственным образом. Итак:

Теорема 4. *Всякая прямая гиперболической группы движений принадлежит концу тогда и только тогда, когда в упорядоченном поле концов всякий положительный элемент является квадратом* *).

При выполнении аксиом гиперболической группы движений п. 1 § 14 следующие требования о существовании элементов равносильны:

1) всякая прямая принадлежит концу;
2) все прямые совмещаемы движением;
3) все точки совмещаемы движением;
4) всякая центральная симметрия является квадратом (всякий прямой угол можно разделить пополам);
5) всякое собственное движение является квадратом;
6) имеет место свободная подвижность.

Все эти требования вытекают из первого: как мы видели, из 1) вытекает, что две прямые имеют среднюю линию; отсюда сле-

---

*) Такие поля в алгебре называются *евклидовыми полями. (Прим. перев.)*

дуют все требования 2) — 6) (ср. Замечание о свободной подвижности).

Теперь надо убедиться, что ни одно из требований 2) — 6) не слабее, нежели 1). Из 6) следует 2), а из 2) следует 1). Каждое из требований 3, 5) влечет 4) (для того чтобы перейти от 3) к 4), надо заметить, что существует центральная симметрия, являющаяся квадратом, ибо среди прямых, принадлежащих концам, есть пары ортогональных, а прямые такой пары симметричны друг другу). Из 4) следует, что при представлении в виде $L_2(K)$ единственным положительным квадратичным классом вычетов поля концов K является $\{1\}$, а следовательно, по теореме 4 отсюда вытекает 1).

Литература к главе V. Гильберт [2], Бергау [1], Клингенберг [2]. Герретсен [1] на основе исчисления концов излагает гиперболическую тригонометрию.

Глава VI

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Среди частных случаев геометрий, которые можно определить в рамках абсолютной геометрии, эллиптическая геометрия выделяется своей простотой: в ней осевые и центральные симметрии совпадают, и для них выполняются законы об основных соотношениях п. 1 § 3 в чистейшем и самом общем виде. Эллиптическую группу движений можно в силу п. 2 § 7 характеризовать как такую, которая порождается своими инволютивными элементами, в которой выполняется закон T транзитивности и закон V соединимости, и в которой центру не принадлежит ни один инволютивный элемент. Примем это описание в качестве аксиоматической основы.

В этой главе мы заново проведем обоснование эллиптической геометрии самой по себе.

Другой целью этой главы является введение нового методического вспомогательного средства. В то время как мы рассматривали на групповой плоскости только инволютивные элементы эллиптической группы движений в качестве геометрического объекта, теперь мы построим более широкую геометрическую структуру, *групповое пространство*, в котором все элементы группы выступают в качестве объектов. Групповое пространство предназначено для того, чтобы геометрически истолковать в полном объеме теорию эллиптической группы движений, предметом которой являются не только симметрии, но и произвольные произведения симметрий; в частности, доказательства некоторых теорем об элементах групповой плоскости становятся возможными путем введения неинволютивных вспомогательных элементов.

Групповое пространство строится чисто теоретико-групповым образом на основе аксиоматически заданных свойств эллиптической группы движений. Это построение восходит к Райдемайстеру, который совместно с Поделом указал, как можно доказать проективные теоремы с замыканиях для групповой плоскости посредством погружения эллиптической групповой плоскости в групповое пространство. Правда, Райдемайстер и Подел исходили из аксиом эллиптической плоскости, основанных не на понятии симметрии. Позже Арнольд Шмидт дал краткую систему аксиом для эллиптической группы движений, в которой наряду с групповым умножением он пользовался в качестве основной бинарной операции соединимостью двух инволютивных элементов группы; на этой основе он построил групповое пространство. В рамках всеохватывающего исследования об эллиптической группе движений Бэр провел построение группового пространства, исходя из аксиом, касающихся J-символа.

Групповое пространство эллиптической группы движений само по себе представляет интерес в качестве *трехмерного эллиптического пространства.* Геометрия этого пространства является богатым полем применения теоретико-групповых методов. О необходимости его разработки говорил Бочек.

В заключение заметим, что в аналитической теории геометрических групп преобразований хорошо известно групповое пространство группы движений обыкновенной проективно-метрической плоскости; оно называется также представлением Стефаноса-Картана. Моделируя эту группу движений, можно всякому движению сопоставить компоненты (с точностью до множителя) определенного кватерниона с ненулевой нормой в виде четырех однородных параметров из некоторого поля (п. 2 § 10) и тем самым представлять движения точками трехмерного проективного пространства, метризованного посредством формы норм. (В гиперболическом случае те точки, норма которых равна нулю, образуют невырожденную поверхность второго порядка; они не представляют никакого движения.)

§ 16. Обоснование эллиптической геометрии

1. Эллиптические группы движений и их групповые плоскости. Прежде всего напомним основные соотношения между инволютивными элементами $a, b, c\ \ldots$: двуместное отношение

$$ab \text{ инволютивно; сокращенно } a\,|\,b, \tag{1}$$

которое симметрично и нерефлексивно в любой группе, и трехместное отношение

$$abc \text{ инволютивно,} \tag{2}$$

которое рефлексивно и симметрично в любой группе (ср. п. 1 § 3).

Эллиптическую группу движений мы определим такой системой аксиом (п. 2 § 7):

Основное допущение. *Пусть $\mathfrak{G}$ — группа, порождаемая своими инволютивными элементами, в которой ни один инволютивный элемент не коммутирует со всеми инволютивными элементами.*

Инволютивные элементы из $\mathfrak{G}$ обозначаем малыми латинскими буквами.

Аксиома T. *Если $a \neq b$, причем abc, abd инволютивны, то acd инволютивно.*

Аксиома V. *По любым a и b найдется c такое, что $a, b \mid c$.*

Так как в группе $\mathfrak{G}$ отношение (2) в силу аксиомы T является транзитивным, то с его помощью можно разбить множество инволютивных элементов $\mathfrak{G}$ на подмножества (смежные классы), обладающие таким свойством: всякие три элемента одного смежного класса связаны отношением (2), а два разных смежных класса имеют не более одного общего элемента. Если $a \neq b$, то a и b определяют такой смежный класс; он состоит из всех c, для которых abc инволютивно. Обозначим этот класс через $J(ab)$ (ср. п. 5 § 4 и п. 3 § 7).

Как показано в п. 2 § 7, из введенной системы аксиом вытекает, что группа $\mathfrak{G}$ бииволютивна:

Теорема 1. *Всякий элемент из $\mathfrak{G}$ можно представить в виде произведения двух инволютивных элементов.*

Произвольные элементы из $\mathfrak{G}$ мы будем обозначать малыми греческими буквами. Если мы теперь определим для произвольного $\alpha \neq 1$ *множество $J(\alpha)$ тех элементов c, для которых αc инволютивно*, то выполняется

Теорема 1′. *Всякое множество $J(\alpha)$ совпадает с некоторым множеством $J(ab)$.*

Так как множество $J(ab)$ содержит по крайней мере два элемента a и b, то всякое множество $J(\alpha)$ содержит по крайней мере два разных элемента; в силу свойств разбиения на смежные классы справедливы две теоремы:

Теорема 2. *Из $u, v, w \in J(\alpha)$ следует $uvw \in J(\alpha)$.*

Теорема 3. Из $u \neq v$ *и* $u, v \in J(\alpha), J(\beta)$ *следует* $J(\alpha) = J(\beta)$.

Далее следует напомнить, что однозначность соединения E («*Из $a, b \mid c, d$ вытекает $a = b$ или $c = d$*») является следствием аксиомы T (теорема 2 из § 7).

До сих пор мы говорили о тех свойствах эллиптических групп движений, которые справедливы для всех биинволютивных групп, если только для этой группы выполняется аксиома T (ср. п. 4 § 7). Следующие две теоремы, напротив, существенно зависят от аксиомы V:

Теорема 4. *В каждом $J(\alpha)$ есть единственный элемент a такой, что $J(\alpha) = J(a)$.*

Доказательство. В силу теоремы 1′ $J(\alpha)$ совпадает с некоторым множеством $J(uv)$. По аксиоме V существует a такой, что $u, v \mid a$, т. е. $u, v \in J(a)$. Следовательно, по теореме 3 $J(uv) = J(a)$.

Требуемая однозначность: $J(a) = J(a')$ влечет $a = a'$ — получается уже из однозначности E соединения или же из теоремы 3 (ср. п. 4 § 7, (III)).

Теорема 5. *Для любых $J(\alpha)$, $J(\beta)$ найдется такой элемент c, что $c \in J(\alpha), J(\beta)$.*

Доказательство. В силу теоремы 4 $J(\alpha)$ совпадает с некоторым $J(a)$, а $J(\beta)$ совпадает с некоторым $J(b)$. По аксиоме V существует такой элемент c, что $a, b|c$, т. е. $c \in J(a)$, $J(b)$.

Мы сопоставим эллиптической группе движений $\mathfrak{G}$ *групповую плоскость* следующим образом: каждый инволютивный элемент a называется *точкой* групповой плоскости; две точки a и b называются взаимно *полярными*, если выполняется (1), три точки a, b, c называются *коллинеарными*, если выполняется (2).

При этих наименованиях $J(ab)$ представляет собой множество точек, коллинеарных точкам a и b. Мы будем называть это множество точек *прямой, определяемой точками* a, b. По теореме 1′ всякое множество $J(\alpha)$ является прямой. В силу теорем 3 и 5 две разные прямые имеют единственную общую точку.

Прямая $J(a)$ состоит из всех точек, полярных точке a, и называется *полярой* точки a. Всякая прямая в силу теоремы 4 является полярой единственной точки, называемой *полюсом* этой прямой. Если точка a принадлежит поляре точки b, то b принадлежит поляре точки a, ибо из $a \in J(b)$ следует $b \in J(a)$, так как и то и другое равносильно $a|b$. Ни одна точка не принадлежит своей поляре. Всякая прямая содержит по крайней мере три разные точки:

Теорема 6. *Всякое множество $J(\alpha)$ содержит по крайней мере три различных элемента.*

Доказательство. В силу теоремы 4 $J(\alpha)$ совпадает с некоторым множеством $J(a)$. Наше утверждение означает, что множество элементов x, где $x|a$, содержит по крайней мере три различных элемента. По теореме 1 существуют такие элементы b и c, что $a = bc$, а следовательно, $b, c|a$ и $b \neq c$. Допустим, что $x|a$ выполняется только для $x = b$ или $x = c$.

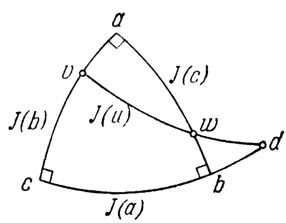


Рис. 134.

Так как по основному допущению b не коммутирует со всеми инволютивными элементами, то существует такой элемент $w \neq b$, что $w \nmid b$ (рис. 134). По аксиоме V существует такой элемент x, что $x|a, w$. По нашему допущению должно быть $x = c$, т. е. $c|w$. Далее, так как по основному допущению и c не коммутирует со всеми инволютивными элементами, то существует такой элемент $v \neq c$, что $v \nmid c$. Как и выше, обнаружим, что в силу нашего предположения должно быть $b|v$.

В силу аксиомы V существует элемент u такой, что $u|v, w$. Так как $b \nmid w$ и $c \nmid v$, то $u \neq b, c$. Далее, $u \nmid b$ и $u \nmid c$: ведь если бы имело место, например, $u|b$, то мы имели бы $u, c|b, w$; $u \neq c$ и

$b \neq w$, что в силу однозначности E соединения невозможно. По той же причине невозможно $u|c$.

Наконец, по аксиоме V существует такой элемент d, что $d|a, u$. В силу $b \nmid u$ и $c \nmid u$ имеем $d \neq b, c$. Существование такого элемента d противоречит нашему допущению.

Резюмируя, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 7. *На групповой плоскости эллиптической группы движений выполняются проективные аксиомы инцидентности. В ней задан некоторый эллиптический поляритет.*

То, что мы назвали здесь *точкой* групповой плоскости любой инволютивный элемент, а множество $J(\alpha)$ — *прямой* групповой плоскости, сделано с учетом удобства построений группового пространства, которое мы и проведем в § 17. В рамках развитого там построения было бы нецелесообразным трактовать инволютивный элемент как прямую групповой плоскости, а $J(\alpha)$ как точку групповой плоскости, хотя такая двойственная трактовка *на плоскости* равноправна нашей.

2. Теорема Паппа — Паскаля. Для эллиптической группы движений справедлива

Лемма о девяти инволютивных элементах. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (где $\alpha_1 \neq \alpha_2$) и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (где $\beta_1 \neq \beta_2$) таковы, что восемь произведений $\alpha_i\beta_k$ (кроме $\alpha_3\beta_3$) инволютивны, то и $\alpha_3\beta_3$ инволютивно.*

Доказательство. Можно считать, что $\beta_3 \neq \beta_1$. По условию $\alpha_1\beta_2 \neq \alpha_2\beta_1$ и $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_1 \in J(\beta_1^{-1}\beta_2), J(\beta_1^{-1}\beta_3)$. Следовательно, по теореме 3 $J(\beta_1^{-1}\beta_2) = J(\beta_1^{-1}\beta_3)$. А так как по условию $\alpha_3\beta_1 \in J(\beta_1^{-1}\beta_2)$, то $\alpha_3\beta_1 \in J(\beta_1^{-1}\beta_3)$, т. е. $\alpha_3\beta_3$ инволютивно. (Надо иметь в виду, что «$c \in J(\alpha)$» равносильно «$c\alpha$ инволютивно».)

Далее, имеет место

Обобщение аксиомы V. *Для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ найдется элемент γ такой, что $\alpha_1\gamma, \alpha_2\gamma, \alpha_3\gamma$ инволютивны.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \neq \alpha_3$. В силу теоремы 5 существует элемент c, для которого $c \in J(\alpha_1\alpha_3^{-1}), J(\alpha_2\alpha_3^{-1})$. Положим $\gamma = \alpha_3^{-1}c$. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, то c можно выбрать произвольно.

Обобщение аксиомы V содержит в себе теорему 5 и аксиому V в качестве частных случаев (здесь надо только взять элементы $\alpha, \beta, 1$ соответственно $a, b, 1$).

Пользуясь леммой о девяти инволютивных элементах (которую можно трактовать как переформулировку аксиомы T, ср. п. 7 § 4) и обобщением аксиомы V, докажем, что на групповой плоскости справедлива

Теорема 8 (теорема Паппа — Паскаля). *Пусть $p_i \in J(\alpha)$, $q_k \in J(\beta)$, $p_i \notin J(\beta)$, $q_k \notin J(\alpha)$, где $i, k = 1, 2, 3$. Далее, пусть*

$J(p_iq_k)\neq J(p_kq_i)$ и $r_{ik}\in J(p_iq_k)$, $J(p_kq_i)$, где $i\neq k$ $(r_{ik}=r_{ki})$. Тогда существует $J(\gamma)$ такая, что r_{12}, r_{13}, $r_{23}\in J(\gamma)$ (рис. 135).

Доказательство. В силу теоремы 5 существует s такой, что $s\in J(\alpha)$, $J(\beta)$. Рассмотрим элементы p_isq_i, где $i=1, 2, 3$. Они все различны (из $p_isq_i=p_ksq_k$ вытекало бы $p_ip_ks=sq_iq_k=q_kq_is$, т. е. $p_iq_k=p_kq_i$) и не инволютивны (ибо p_i, s, q_i не коллинеарны).

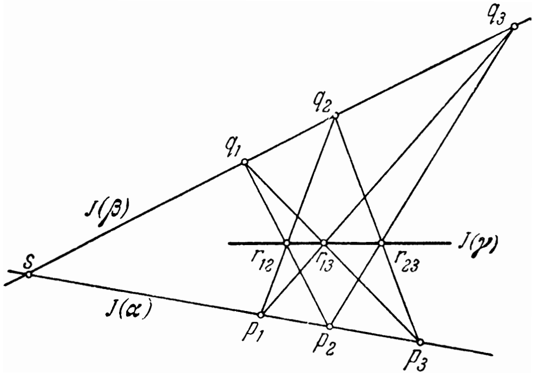


Рис. 135.

В силу обобщения аксиомы V найдется такой элемент γ, что $p_isq_i\gamma$ инволютивны; γ не может равняться 1.

При любой фиксированной паре индексов $i\neq k$ в таблице произведений

	q_ip_k	$\neq q_kp_i$	γ
p_isq_i	p_isp_k	$(sq_iq_k)^{p_i}$	$p_isq_i\gamma$
$\neq$			
p_ksq_k	$(sq_kq_i)^{p_k}$	p_ksp_i	$p_ksq_k\gamma$
r_{ik}	$r_{ik}q_ip_k$	$r_{ik}q_kp_i$	$\boxed{r_{ik}\gamma}$

по условию и по построению восемь произведений (кроме разве последнего) инволютивны. Следовательно, по лемме $r_{ik}\gamma$ инволютивно, что и требовалось доказать.

Всякое доказательство теоремы Паппа — Паскаля на основе метрических соображений означает некоторое метрическое обогащение конфигурации Паппа, а следовательно, содержит в себе некоторое метрическое утверждение.

В нашем доказательстве эту добавочную метрическую часть можно выделить так:

Пересечем несущую прямую $J(\beta)$ прямой Паскаля $J(\gamma)$; точку пересечения обозначим через r. На $J(\beta)$ рассмотрим точки $q_i'=sq_ir$, соответствующие точкам q_i при спаривании, определяемом точками r и s. Пусть теперь t —

точка прямой $J(\gamma)$, определяемая условием $\gamma = rt$. Так как произведения $p_i s q_i \gamma = p_i q_i' t$ инволютивны, то точки p_i, q_i', t при каждом фиксированном i коллинеарны, т. е. три соединительные прямые $J(p_i q_i')$ пересекаются в одной точке прямой Паскаля.

Конфигурация Паппа обладает, таким образом, следующим метрическим свойством:

Пусть a, b, c — тройка непересекающихся прямых конфигурации (ср. п. 1 § 5). Для каждой точки B конфигурации, принадлежащей прямой b построим точку B′, отвечающую ей при спаривании относительно точек пересечения b с a и c. Соединим B′ с той точкой прямой a конфигурации, которая в конфигурации не соединима с B. Тогда получается три соединительные прямые, пересекающиеся в некоторой точке прямой c.

Данному свойству двойственно как раз то метрическое свойство конфигурации Паппа, на котором основано доказательство Гессенберга теоремы Паппа — Брианшона (п. 9 § 4).

3. Представление эллиптической группы движений как группы движений проективно-метрической плоскости. Если γ — элемент $\mathfrak{G}$, то назовем отображение

$$x^* = x^\gamma \tag{3}$$

множества точек групповой плоскости на себя *движением групповой плоскости*. Группа $\mathfrak{G}^*$ движений групповой плоскости является представлением абстрактной группы $\mathfrak{G}$, ибо центр $\mathfrak{G}$ состоит из одной лишь единицы (ср. п. 2 § 7).

Всякое движение (3) переводит три коллинеарные точки в коллинеарные же; прямую $J(\alpha)$ оно переводит в прямую $J(\alpha)^\gamma = J(\alpha^\gamma)$. Значит, оно является коллинеацией. Кроме того, всякое движение (3) переводит две взаимно полярные точки в две взаимно полярные же точки. Значит, оно сохраняет поляритет.

Инволютивное движение

$$x^* = x^c \tag{4}$$

оставляет неподвижной точку c и всякую точку ее поляры $J(c)$, а значит, является инволютивной гомологией с центром c и осью $J(c)$. Назовем его *симметрией относительно c и $J(c)$*.

В силу теоремы 1 всякое движение (3) можно представить в виде произведения двух симметрий:

$$x^* = x^{ab}. \tag{5}$$

При $a \neq b$ движение (5) обладает неподвижной точкой c (для которой $a, b \mid c$) и неподвижной прямой $J(c)$ — полярой точки c. Его можно рассматривать как *поворот* вокруг точки c; тогда (4) есть инволютивный поворот вокруг c.

Из существования инволютивных гомологий вытекает, что в групповой плоскости выполняется также аксиома Фано. Таким образом, групповая плоскость — это проективная плоскость в смысле определения § 5.

Обнаружить, что поляритет групповой плоскости проективен, можно по-разному: или так, как это было сделано при доказательстве следствия 2 к теореме 17 из § 6, основанном на п. 6 § 5 и использующем теорему о спаривании, которая в свою очередь является следствием леммы о девяти инволютивных элементах (п. 8 § 4); или же пользуясь сначала теоремой о высотах (ср. задачу 3 из п. 5 § 5); или же вывести из теоремы 4 § 8.

Таким образом, *групповая плоскость эллиптической группы движений является проективно-метрической плоскостью.* Движения (4) — это порождающие симметрии группы движений проективно-метрической плоскости, а поэтому группа $\mathfrak{G}^*$ является группой движений проективно-метрической групповой плоскости.

Рассуждения этого параграфа заново приводят к теореме, которой заканчиваются рассуждения, связанные с обоснованием эллиптической геометрии, заданной нашей системой аксиом:

Теорема XII. *Всякая эллиптическая группа движений представима в виде группы движений некоторой эллиптической проективно-метрической плоскости.*

§ 17. Групповое пространство эллиптической группы движений

1. Пучки и группы поворотов. Эллиптические группы принадлежат к числу биинволютивных групп, для которых выполняется транзитивность Т. Во всякой такой группе, как мы видели в п. 4 § 7, существуют, с одной стороны, «пучки» $J(\alpha)$ *инволютивных элементов*, а с другой — *«группы поворотов»* $D(\alpha)$, являющиеся абелевыми подгруппами и осуществляющие разделение всей группы.

По всякому элементу группы $\alpha \neq 1$ определяется группа поворотов $D(\alpha)$, содержащая α: это есть, по определению, множество произведений всех пар элементов пучка $J(\alpha)$. В группе, порожденной всеми элементами $J(\alpha)$, группа $D(\alpha)$ является подгруппой индекса 2, а ее смежным классом служит $J(\alpha)$, т. е. $J(\alpha)$ и $D(\alpha)$ связаны так:

Если $u \in J(\alpha)$, *то* $D(\alpha) = J(\alpha)u = uJ(\alpha)$. (1)

Если α, $\beta \neq 1$, то попарно равносильны такие высказывания:

$$J(\alpha) = J(\beta), \tag{2.1}$$

$$\beta \in D(\alpha), \tag{2.2}$$

$$D(\alpha) = D(\beta). \tag{2.3}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать не только группы поворотов, но, более общо, их *правые смежные классы* $D(\alpha)\gamma$.

В представлении $D(\alpha)\gamma$ правого смежного класса элемент γ определен не однозначно; попарно равносильны такие высказывания при $\gamma \neq \delta$:

$$D(\alpha)\gamma = D(\alpha)\delta, \tag{3.1}$$

$$\delta \in D(\alpha)\gamma, \tag{3.2}$$

$$D(\alpha) = D(\gamma\delta^{-1}). \tag{3.3}$$

Правые смежные классы разных групп поворотов все же не могут совпадать:

$$\textit{Из } D(\alpha)\gamma = D(\beta)\delta \textit{ следует } D(\alpha) = D(\beta). \tag{4}$$

(Если $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ — подгруппы произвольной группы и $\mathfrak{U}\gamma = \mathfrak{B}\delta$, то $\mathfrak{U}\gamma\delta^{-1}$ — правый класс вычетов по $\mathfrak{U}$, который в силу $\mathfrak{U}\gamma\delta^{-1} = \mathfrak{B}$ является подгруппой и равен $\mathfrak{U}$; следовательно, $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$.)

Из (1) получаем, что *множество всех комплексов* $J(\alpha)\gamma$ *совпадает с множеством всех правых смежных классов* $D(\alpha)\gamma$. Множество инволютивных элементов группы мы впредь будем обозначать через J. При $\gamma \neq \delta$ равносильны друг другу и утверждению (3) такие высказывания:

$$J(\alpha)\gamma = J(\alpha)\delta, \tag{5.1}$$

$$J(\alpha)\gamma \subset J\delta, \tag{5.2}$$

$$J(\alpha) = J(\gamma\delta^{-1}). \tag{5.3}$$

Имеет место (при $\gamma \neq \delta$):

$$\textit{Из } J(\alpha)\gamma = J(\beta)\delta \textit{ следует } J(\alpha) = J(\beta). \tag{6}$$

Согласно теореме 4 из § 16 для всякого множества $J(\alpha)$ в эллиптической группе движений найдется единственный инволютивный элемент a такой, что $J(\alpha) = J(a)$. По (2) тогда a принадлежит группе поворотов $D(\alpha)$, и это есть *единственный инволютивный элемент из* $D(\alpha)$; $D(\alpha) = D(a)$. Таким образом, группы поворотов $D(a)$ исчерпывают все группы поворотов и $D(a) = D(a')$ возможно только при $a = a'$.

2. Пространственные проективные аксиомы инцидентности. Прежде чем изложить содержание этого параграфа, сформулируем аксиомы инцидентности трехмерного проективного пространства в редакции А. Винтерница:

Даны два множества, элементы которых называем *точками* и *плоскостями* и отношение, называемое *инцидентностью точек и плоскостей*. Выполняются следующие аксиомы, называемые *пространственными проективными аксиомами инцидентности:*

а) *Если две разные точки инцидентны двум разным плоскостям, то всякая точка, инцидентная обеим плоскостям, инцидентна каждой плоскости, инцидентной обеим точкам.*

б) *Для всяких трех точек найдется плоскость, инцидентная им.*

б*) *Для всяких трех плоскостей найдется точка, инцидентная им.*

в) (основная фигура) *Существуют пять точек* P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 *и пять плоскостей* E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 *такие, что* P_i *инцидентна* E_k *тогда и только тогда, когда* $i=k$ *или когда* i *отличается от* k *только на единицу при условии циклического упорядочения индексов* (*т. е.* $i-k\equiv 0, \pm 1 \pmod 5$)).

Эта система вместе с каждой аксиомой содержит двойственную ей (аксиомы а) и в) двойственны каждая сама себе). Данная система независима, т. е. каждая аксиома не зависит от трех остальных.

Аксиому а) можно переформулировать и так: *если для трех точек и трех плоскостей выполняются восемь из девяти возможных инцидентностей, то выполняется и девятая, коль скоро обе точки и обе плоскости, не входящие в заключительную инцидентность, различны* (ср. помещенную ниже схему). Эта аксиома играет роль аксиомы однозначности.

	□	≠	□	□
•	×		×	×
≠				
•	×		×	×
•	×		×	×

Теперь можно определить *прямую* как множество точек, инцидентных двум разным плоскостям. Тогда из аксиомы а) получаем: если две разные точки прямой принадлежат плоскости, то всякая точка этой прямой принадлежит этой плоскости. Очевидно, что две разные точки принадлежат единственной прямой; что прямая и плоскость, не содержащая этой прямой, имеют единственную общую точку; что две прямые, принадлежащие одной плоскости, имеют общую точку, и что справедливы также утверждения, двойственные высказанным.

3. Групповое пространство. Абстрактной группе $\mathfrak{G}$, заданной системой аксиом § 16, мы сопоставили некоторую геометрическую структуру — групповую плоскость; точки групповой плоскости — это инволютивные элементы из $\mathfrak{G}$. Тогда можно представить группу $\mathfrak{G}$ группой отображений

$$x^* = x^{\gamma}, \tag{7}$$

заданных на множестве инволютивных элементов $x \in \mathfrak{G}$, и истолковать ее геометрически как группу движений групповой плоскости. Этот подход привел к существенному для уяснения природы абстрактной группы $\mathfrak{G}$ результату, а именно к теореме о том, что группа $\mathfrak{G}$ представляется в виде проективной группы, точнее, в виде группы движений некоторой эллиптической проективно-метрической плоскости.

Хочется попробовать с самого начала поставить геометрическое изучение абстрактной группы $\mathfrak{G}$ на более широкую основу и сопоставить ей более всеобъемлющую геометрическую структуру: превратить ее в *«пространство», «точками» которого являются все элементы* $\mathfrak{G}$ и которое содержит групповую плоскость как «плоскость инволютивных элементов». Мы будем стремиться при этом в данном пространстве, объектами которого служат все элементы группы, *геометрически истолковать и групповое умножение:* в то время как в групповой плоскости непосредственное геометрическое истолкование допускает только внутренний автоморфизм (7) всех инволютивных элементов (при фиксированном $\gamma \in \mathfrak{G}$), теперь надо указать геометрическое истолкование операции умножения всех элементов из $\mathfrak{G}$ на некоторый фиксированный элемент; иными словами, надо истолковать отображения

$$\xi^* = \xi\gamma, \tag{8}$$

заданные на множестве всех $\xi \in \mathfrak{G}$, а они при $\gamma \neq 1$ не переводят в себя множество инволютивных элементов $\mathfrak{G}$. Группа этих преобразований (переносов), как утверждает известная из элементов теории групп и справедливая для всякой группы теорема Кэли, является представлением группы $\mathfrak{G}$ — так называемым *каноническим представлением* $\mathfrak{G}$ *в виде ее группы переносов.* Эта группа переносов просто транзитивна.

В подлежащем построению пространстве, точками которого будут элементы группы, мы назовем некоторые множества элементов группы плоскостями. При этом мы будем исходить из двух соображений: 1) множество J инволютивных элементов группы, т. е. групповая плоскость, должно быть некоторой плоскостью пространства; 2) отображение (8), которое мы назовем *правым переносом*, должно являться коллинеацией пространства. Эти требования вынуждают нас ввести такие определения точек и плоскостей *группового пространства* данной эллиптической группы движений $\mathfrak{G}$:

Всякий элемент α группы мы называем *точкой* группового пространства. Всякое множество $J\beta$ называем *плоскостью* группового пространства. Точка α принадлежит плоскости $J\beta$

тогда и только тогда, когда

$$\alpha\beta^{-1} \text{ инволютивно.} \tag{9}$$

Равенство $J\beta=J\beta'$ *справедливо только при* $\beta=\beta'$ (из $J=J\beta'\beta^{-1}$, где $\beta'\beta^{-1}\neq 1$, получилось бы при образовании пересечения с J, что $J=J(\beta'\beta^{-1})$, т. е. групповая плоскость совпала бы с некоторой прямой вопреки п. 1 § 16).

Всякой точке α сопоставим плоскость $J\alpha$ как ее *полярную плоскость*, а каждой плоскости $J\alpha$ сопоставим точку α в качестве ее *полюса*. В силу симметрии отношения (9) это есть взаимно однозначное инволютивное соответствие, и оно сохраняет инцидентность:

Из $\alpha\in J\beta$ *следует* $\beta\in J\alpha$, *и наоборот.*

Указанное соответствие полюс — поляра между точками и плоскостями группового пространства в дальнейшем будем считать *«абсолютным» поляритетом* группового пространства. Две точки называются (взаимно) *полярными*, если одна лежит на полярной плоскости другой; две плоскости называются (взаимно) *перпендикулярными*, если одна проходит через полюс другой. В таких терминах отношение (9) получает четыре истолкования: точка α принадлежит плоскости $J\beta$; точка β принадлежит плоскости $J\alpha$; точки α и β взаимно полярны; плоскости $J\alpha$ и $J\beta$ взаимно перпендикулярны. *Ни одна точка не принадлежит своей полярной плоскости*, ни одна точка не полярна самой себе, ни одна плоскость не перпендикулярна самой себе. Очевидно, поляритет сохраняется при всех правых переносах. Из наличия поляритета вытекает, что вместе с каждым утверждением о точках, плоскостях и их инцидентностях в групповом пространстве выполняется и утверждение, двойственное первоначальному.

В групповом пространстве справедливы проективные аксиомы инцидентности, сформулированные в п. 2. В самом деле, аксиома а) — это лемма о девяти инволютивных элементах, переформулированная для элементов группового пространства. Аксиомы б) и б*) — это обобщение аксиомы V, высказанное применительно к элементам группового пространства (п. 2 § 16). Чтобы убедиться в существовании конфигурации, указанной в аксиоме в), возьмем три инволютивных элемента a, b, c, где $abc=1$, и два инволютивных элемента $d\neq b$, c и $e\neq a$, b так, чтобы bcd и abe были инволютивны (теорема 6 из § 16; точки a, b, c образуют полярный треугольник на групповой плоскости, d — точка стороны $J(bc)$, e — точка стороны $J(ab)$). Для точек 1, a, b, c, de и плоскостей Jd, Jc, J, Jdc, Je группового пространства выполняются инцидентности и неинцидентности, предусмотренные аксиомой в).

Итак, имеет место

Теорема 1. *В групповом пространстве эллиптической группы движений $\mathfrak{G}$ выполняются пространственные проективные аксиомы инцидентности. В нем существует поляритет, обладающий тем свойством, что ни одна точка не инцидентна полярной ей плоскости. Группа правых переносов* (8), *изоморфная группе $\mathfrak{G}$, является группой коллинеаций, сохраняющих поляритет.*

Назовем это групповое пространство *эллиптическим пространством.*

Определим в групповом пространстве *прямые* как пересечения двух разных плоскостей. Пересечение двух плоскостей $J\alpha$, $J\beta$ при $\alpha\neq\beta$ — это множество $J(\alpha\beta^{-1})\beta$; так как при $\beta=1$ $J\alpha \cap J=J(\alpha)$, то новое определение прямых групповой плоскости совпадает с прежним; при произвольном β

$$J\alpha \cap J\beta = \left(J\alpha\beta^{-1} \cap J\right)\beta = J\left(\alpha\beta^{-1}\right)\beta.$$

Таким образом, *прямые группового пространства — это множества* $J(\alpha)\gamma$. Согласно (6) при разных представлениях $J(\alpha)\gamma$ некоторой прямой «пучок» инволютивных элементов $J(\alpha)$ однозначно определен, а произвол в выборе γ состоит (см. (5)) в том, что $J\gamma$ — произвольная плоскость, которой принадлежит прямая. С другой стороны, *множество прямых совпадает с множеством правых смежных классов* $D(\alpha)\gamma$ *групп поворотов.* При представлении $D(\alpha)\gamma$ фиксированной прямой, согласно (4), группа поворотов $D(\alpha)$ определяется однозначно, а произвол в выборе γ, как видно из (3), заключается в том, что γ — произвольная точка прямой. Прямая, соединяющая две разные точки α и β, имеет вид $D(\alpha\beta^{-1})\beta$; в частности, если β — точка 1, указанная прямая обращается в группу поворотов $D(\alpha)$.

Прямые $J(\alpha)\gamma$ *и* $D(\alpha)\gamma$ *отвечают друг другу при абсолютном поляритете.* В самом деле, так как (5.2) и (3.2) равносильны, то

из $J(\alpha)\gamma\subseteq J\delta$ *следует* $\delta\in D(\alpha)\gamma$, *и наоборот,*

т. е. точки прямой $D(\alpha)\gamma$ — это полюсы плоскостей, которым принадлежит прямая $J(\alpha)\gamma$. Поэтому мы назовем прямые $J(\alpha)\gamma$ и $D(\alpha)\gamma$ взаимно *полярными.* Поляритет прямых — взаимно однозначное инволютивное соответствие между прямыми группового пространства, которое, очевидно, инвариантно относительно правого переноса.

В связи с нашим построением группового пространства следует заметить, что элементы эллиптической группы движений разбиваются на группы поворотов, всякие две из которых пересекаются только по единице (подразбиение группы). Элементы всякой группы поворотов $D(a)$ представляют повороты групповой плоскости вокруг точки a (ср. п. 3 § 16). В групповом пространстве они трактуются как точки прямой $D(a)$; точка пересечения a прямой $D(a)$ с групповой плоскостью представляет инволютивный поворот вокруг точки a. Все прямые $D(a)$ проходят через точку 1 группового пространства, а так как точка 1 является полюсом групповой плоскости J, то прямые $D(a)$ перпендикулярны групповой плоскости. Поэтому подразбиение группы на группы поворотов — это разбиение всех точек группового пространства по прямым связки прямых с центром 1. При поляритете группового пространства всякой прямой $D(a)$ этой связки отвечает прямая $J(a)$ групповой плоскости J, которая прежде (п. 1 § 16) сопоставлялась в качестве поляры точке a, в которой $D(a)$ пересекает групповую плоскость (рис. 136).

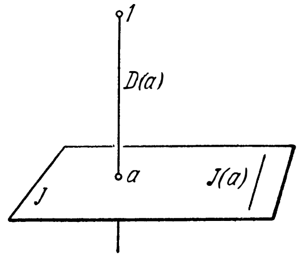


Рис. 136.

Легко видеть, что всякий поляритет группового пространства, который 1) на групповой плоскости J совпадает с ранее введенным полярным соответствием точки a и прямой $J(a)$ и 2) инвариантен относительно правых переносов, необходимо совпадает с введенным нами «абсолютным» поляритетом.

В самом деле, прежде всего полярной плоскостью точки 1 должна быть плоскость J; если эту полярную плоскость обозначить через $J\varepsilon$, то в силу 2) полярная плоскость точки $a \neq \varepsilon$ имеет вид $J\varepsilon a$, а в силу 1) пересечение плоскости $J\varepsilon a$ с J, т. е. прямая $J(\varepsilon a)$, должна равняться $J(a)$. Из $J(\varepsilon a) = J(a)$ следует в силу (2) $\varepsilon \in D(a)$, а так как это верно для всех $a \neq \varepsilon$, то $\varepsilon = 1$. Итак, 1 и J обязательно взаимно полярны, а поэтому в силу 2) любая точка α и плоскость $J\alpha$ взаимно полярны.

Отображение

$$\xi^* = \gamma\xi \tag{10}$$

для каждого $\gamma \in \mathfrak{G}$ также является взаимно однозначным отображением множества точек группового пространства на себя; оно называется *левым переносом*. Левые переносы образуют группу. Сопоставление элементу группы левого переноса (10) является антиизоморфизмом группы $\mathfrak{G}$ и группы левых переносов (если элементу γ сопоставлять левый перенос вида $\xi^* = \gamma^{-1}\xi$, то получается изоморфизм). Соотношения

$$\beta J = J\beta, \quad \gamma J(\alpha) = J\left(\alpha^{\gamma^{-1}}\right)\gamma, \quad \gamma D(\alpha) = D\left(\alpha^{\gamma^{-1}}\right)\gamma \tag{11}$$

показывают, что всякую плоскость $J\beta$ можно записать в виде βJ и что множество всех множеств $\gamma J(\alpha)$, как и множество всех левых смежных классов $\gamma D(\alpha)$, является множеством всех прямых. Из этих же соотношений видно, что и левые переносы являются коллинеациями пространства, сохраняющими поляритет.

Следовательно, при любых γ, $\delta \in \mathfrak{G}$ отображение

$$\xi^* = \gamma\xi\delta \tag{12}$$

является коллинеацией, сохраняющей поляритет. Назовем это произведение левого и правого переноса *собственным движением группового пространства.*

Только тождество одновременно является и левым и правым переносом. В самом деле, если $\gamma\xi = \xi\delta$ при любых ξ, то прежде всего, полагая $\xi = 1$, получаем, что $\gamma = \delta$, поэтому γ принадлежит центру $\mathfrak{G}$, а значит, в силу п. 3 § 16 $\gamma = 1$. В силу ассоциативности умножения в группе всякий левый перенос коммутирует со всяким правым переносом.

Таким образом, *группа собственных движений группового пространства является прямым произведением группы левых переносов и группы правых переносов.*

Подгруппа, изоморфная $\mathfrak{G}$, составляется теми собственными движениями, которые оставляют неподвижной точку 1, а значит, и плоскость J (как целое). Это будут отображения:

$$\xi^* = \xi^{\gamma}; \tag{13}$$

в плоскости J это будут рассмотренные в п. 3 § 16 движения групповой плоскости.

З а д а ч а. $\alpha\beta^{-1}\gamma\alpha^{-1}\beta\gamma^{-1} = 1$ означает, что три точки α, β, γ либо коллинеарны, либо образуют полярный треугольник.

4. Правая и левая параллельности. Поверхности Клиффорда. Всякие две точки, а также всякие две плоскости группового пространства можно перевести друг в друга правым (и также левым) переносом. С прямыми группового пространства дело обстоит не так. Для прямых группового пространства правые и левые переносы приводят к двум новым понятиям: правому и левому параллелизмам.

Мы говорим, что две прямые пространства *правопараллельны*, если существует правый перенос, который переводит одну из них в другую. Так как правые переносы составляют группу, то отношение правой параллельности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Две прямые $D(\alpha)\gamma$ и $D(\beta)\delta$ являются правопараллельными тогда и только тогда, когда $D(\alpha) = D(\beta)$. В частности, всякая прямая правопараллельна своей поляре. Множество всех прямых пространства распадается на классы правопараллельных между собой прямых. Каждый такой класс назовем *правой конгруэнцией*. Прямые всякой правой конгруэнции «расслаивают» групповое пространство: *через каждую точку пространства проходит единственная прямая конгруэнции*, ибо всякий элемент группы принадлежит единственному правому смежному классу какой-либо фиксированной группы $D(\alpha)$ поворотов. Прямая, правопараллельная прямой $D(\alpha)\gamma$ и проходящая через точку δ, — это прямая $D(\alpha)\delta$. Так как две разные правопараллельные прямые не имеют общих точек, то они не лежат в одной плоскости, т. е. скрещиваются. При левом переносе $\xi^*=\alpha\xi$, где $\alpha\neq 1$, всякая прямая правой конгруэнции, представленной прямой $D(\alpha)$, является неподвижной прямой; прямые этой правой конгруэнции будут «траекториями» группы всех левых переносов $\xi^*=\alpha'\xi$, где $\alpha'\in D(\alpha)$.

Совершенно аналогично понятию «правой параллельности» вводится понятие *левой параллельности* и получаются аналогичные утверждения. Всякий класс взаимно левопараллельных прямых мы назовем *левой конгруэнцией*. Прямая, левопараллельная прямой $\gamma D(\beta)$ и проходящая через точку δ, — это прямая $\delta D(\beta)$.

Всякое собственное движение группового пространства переводит левопараллельные прямые в левопараллельные, а правопараллельные прямые — в правопараллельные.

Рассмотрим теперь «двойные смежные классы» групп поворотов, т. е. комплексы

$$D(\alpha)\gamma D(\beta). \tag{14}$$

Для двойного класса (14) возможно одно из двух: 1) γ переводит $D(\alpha)$ в $D(\beta)$: $D(\alpha)^{\gamma}=D(\beta)$; тогда $D(\alpha)\gamma D(\beta)=D(\alpha)\gamma D(\alpha)^{\gamma}=$ $=D(\alpha)D(\alpha)\gamma=D(\alpha)\gamma=\gamma D(\beta)$, т. е. двойной класс (14) является простым смежным классом, другими словами, — прямой группового пространства; 2) $D(\alpha)^{\gamma}\neq D(\beta)$; тогда $D(\alpha)\gamma$ и $\gamma D(\beta)$ — два разных смежных класса, содержащиеся в двойном классе (14), и двойной класс не является смежным классом по какой-либо группе поворотов.

Назовем «двойной смежный класс» группы поворотов, не являющийся прямой группового пространства, *поверхностью Клиффорда*. Иными словами, поверхности Клиффорда — это комплексы:

$$D(\alpha)\gamma D(\beta), \quad \text{где} \quad D(\alpha)^{\gamma}\neq D(\beta). \tag{15}$$

Поверхность Клиффорда (15) содержит все прямые

$$D(\alpha)\gamma\beta', \quad \text{где} \quad \beta'\in D(\beta), \tag{16}$$

которые образуют *семейство взаимно правопараллельных прямых*, и содержит прямые

$$\alpha'\gamma D(\beta) \quad \text{при} \quad \alpha'\in D(\alpha), \tag{17}$$

составляющие *семейство взаимно левопараллельных прямых. Всякие две разные прямые одного семейства скрещиваются*; *но две прямые разных семейств всегда пересекаются*: прямые (16) и (17) различны и обладают общей точкой $\alpha'\gamma\beta'$; поверхность Клиффорда (15) состоит из множества этих точек пересечения. Всякие две пары прямых из разных семейств образуют *параллелограмм Клиффорда*. Рис. 137 изображает параллелограмм Клиффорда, где $\gamma=1$.

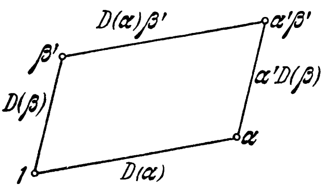


Рис. 137.

Если две разные прямые пространства имеют общую точку, то существует поверхность Клиффорда, содержащая обе эти прямые. В самом деле, назовем одну из этих прямых первой, а другую — второй; проведем через каждую точку второй прямой прямую, правопараллельную первой, а через каждую точку первой прямой прямую, левопараллельную второй; тогда множество точек всех этих прямых явится поверхностью Клиффорда. Если γ — точка перссечения данных прямых, которые представлены в виде $D(\alpha)\gamma$ и $\gamma D(\beta)$, то (15) — описанная поверхность Клиффорда, причем (16) является прямой, правопараллельной $D(\alpha)\gamma$ и проходящей через точку $\gamma\beta'$ на прямой $\gamma D(\beta)$, а (17) — прямой, левопараллельной $\gamma D(\beta)$ и проходящей через точку $\alpha'\gamma$ на прямой $D(\alpha)\gamma$.

При каждом левом переносе $\xi^*=\alpha'\xi$, где $\alpha'\in D(\alpha)$, поверхность Клиффорда (15) переходит в себя: прямые правого семейства будут траекториями группы этих левых переносов. Аналогичное утверждение справедливо для правых переносов $\xi^*=\xi\beta'$, где $\beta'\in D(\beta)$. Суперпозицией левых и правых переносов получаем отображение

$$\xi^*=\alpha'\xi\beta', \quad \text{где} \quad \alpha'\in D(\alpha), \quad \beta'\in D(\beta). \tag{18}$$

Эти отображения составляют группу собственных движений, переводящих поверхность Клиффорда (15) в себя, причем правое семейство переходит в правое, а левое — в левое.

Задача. Справедлива формула $D(\alpha)\gamma D(\beta)=J(\alpha)\gamma J(\beta)$.

5. «Стереометрическое» доказательство теоремы Паппа—Паскаля. Зададимся вопросом о том, как можно с помощью уже найденных свойств группового пространства доказать, что в каждой плоскости группового пространства выполняются *проективные теоремы о замыканиях*. То, что в каждой плоскости выполняется теорема Дезарга, следует, как известно, уже из справедливости пространственных проективных аксиом инцидентности. Но существуют пространства, в которых выполняются пространственные проективные аксиомы инцидентности, но на плоскостях которых теорема Паппа — Паскаля не имеет места. Возникает вопрос, каковы те дополнительные свойства пространства, которые совместно с проективными аксиомами инцидентности приводят к выполнению теоремы Паппа — Паскаля на каждой плоскости пространства? Ответ можно получить из классических результатов Данделена, и он гласит: для того плоского шестиугольника, вокруг которого описана «мистическая гексаграмма» *), теорема Паппа — Паскаля следует из пространственных проективных аксиом инцидентности. Этот факт использовался Ф. Шуром для обоснования метрической «геометрии пространственного куска» (при использовании пространственных аксиом инцидентности, аксиом порядка и движения, без аксиом непрерывности).

Чтобы воспроизвести ход мысли Данделена, возьмем произвольное пространство, в котором выполнены пространственные проективные аксиомы инцидентности. Введем определение:

Мы говорим, что шесть прямых $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{h}_3$ образуют *мистическую гексаграмму*, если каждая прямая $\mathfrak{g}_i$ лежит в одной плоскости с каждой прямой $\mathfrak{h}_k$ $(i, k=1, 2, 3)$, но никакие две из прямых $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, равно как и никакие две из прямых $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$ не принадлежат одной плоскости.

Теперь пусть дана такая мистическая гексаграмма. Ее стороны необходимо различны (если бы было $\mathfrak{g}_i=\mathfrak{h}_k$, то $\mathfrak{h}_k$ и $\mathfrak{h}_l$, где $l=1, 2, 3$, принадлежали бы одной плоскости), а следовательно, $\mathfrak{g}_i$ и $\mathfrak{h}_k$ принадлежат однозначно определенной плоскости и имеют единственную точку пересечения.

Пусть E_{ik} — плоскость, содержащая $\mathfrak{g}_i$ и $\mathfrak{h}_k$ $(i \neq k)$. Под *противолежащей плоскостью* будет пониматься плоскость E_{ki}, содержащая $\mathfrak{g}_k$ и $\mathfrak{h}_i$. Эти плоскости E_{ik} и E_{ki} различны (иначе $\mathfrak{g}_i$ и $\mathfrak{g}_k$ лежали бы в одной плоскости), а поэтому пересекаются по единственной прямой $\mathfrak{r}_{ik}=\mathfrak{r}_{ki}$.

Пусть S_i — точка пересечения *противолежащих сторон* $\mathfrak{g}_i$ и $\mathfrak{h}_i$. При $i \neq k$ точки S_i и S_k различны (иначе $\mathfrak{g}_i$ и $\mathfrak{g}_k$ пересекались бы); так как S_i принадлежит прямым $\mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{h}_i$, а S_k принадлежит прямым $\mathfrak{g}_k$, $\mathfrak{h}_k$, то обе они принадлежат как E_{ik}, так и E_{ki}, т. е. их общей прямой $\mathfrak{r}_{ik}$; следовательно, $\mathfrak{r}_{ik}$ соединяет S_i и S_k (рис. 138). S_1, S_2, S_3 не могут быть коллинеарны, и,

*) Т. е. пространственная конфигурация Паппа — Паскаля; ср. ниже. Термин «мистическая гексаграмма» (hexagramme mistique), был дан этой конфигурации Паскалем. (*Прим. ред.*).

следовательно, образуют собственный треугольник. Итак, справедлива

Лемма о мистической гексаграмме. *Прямые, по которым пересекаются противолежащие плоскости мистической гексаграммы, являются сторонами треугольника, вершины которого представляют собой точки пересечения противолежащих сторон гексаграммы, и, значит, эти прямые принадлежат однозначно определенной плоскости.*

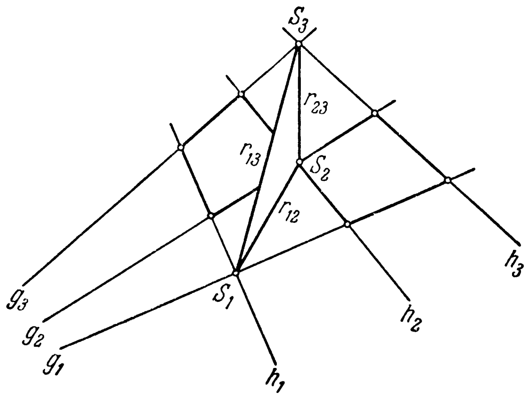


Рис. 138.

Непосредственно из этой леммы следует

Теорема Данделена. *Пусть в пространстве выполняются проективные аксиомы инцидентности. Пусть на плоскости E этого пространства задан шестиугольник P_1, Q_2, P_3, Q_1, P_2, Q_3 с различными вершинами, причем его противоположные стороны (P_i, Q_k) и (P_k, Q_i) различны и пересекаются в точке $R_{ik}=R_{ki}$ $(i\neq k)$. Тогда три точки R_{ik} коллинеарны, если существует мистическая гексаграмма* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{h}_3$, *стороны которой содержат точки P_1, Q_2, P_3, Q_1, P_2, Q_3, но не принадлежат E.*

Доказательство. Пусть опять-таки $i\neq k$. Плоскости E_{ik}, определенные, как выше, отличны от плоскости E и пересекают E по прямым (P_i, Q_k) (рис. 139). Итак, плоскости E_{ik} и E_{ki} пересекают E по разным прямым, и поэтому их линия пересечения $\mathfrak{r}_{ik}$, содержащая точку R_{ik}, не принадлежит E. Таким образом, плоскость треугольника S_1, S_2, S_3, сторонами которого по лемме являются эти прямые $\mathfrak{r}_{ik}$, отлична от E и пересекает E по некоторой прямой, содержащей три точки R_{ik}.

Вернемся к групповому пространству и возьмем в нем шестиугольник, точки которого поочередно принадлежат двум разным прямым некоторой плоскости. Шесть этих вершин должны быть различными и отличными от точки пересечения несущих прямых. По теореме Данделена точки пересечения противоположных сторон шестиугольника коллинеарны, если существует описанная вокруг шестиугольника мистическая гексаграмма. Проведем теперь через каждую из трех вершин шестиугольника, лежащих на одной несущей прямой, прямые, левопараллельные другой несущей прямой, а через каждую из трех вершин, принадлежащих второй несущей прямой, прямые, правопараллельные первой

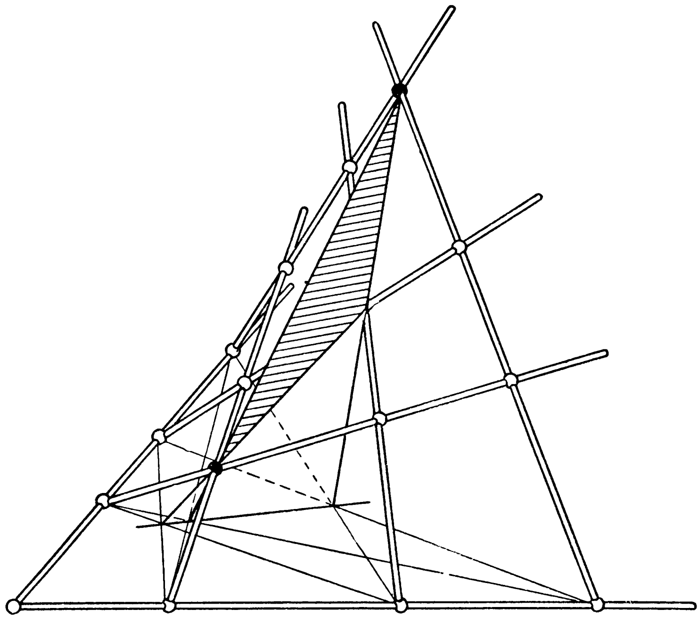


Рис. 139.

несущей прямой. Эти шесть прямых лежат на поверхности Клиффорда, которой принадлежат несущие прямые. (Плоскость шестиугольника — это «касательная плоскость» поверхности Клиффорда.) Из свойств семейств прямых на поверхности Клиффорда вытекает, что шесть прямых, взятых в последовательном порядке, образуют мистическую гексаграмму, удовлетворяющую условиям теоремы Данделена.

Этим доказана

Теорема 2. *Во всякой плоскости группового пространства выполняется теорема Паппа — Паскаля.*

В частности, этим самым доказана теорема Паппа — Паскаля для групповой плоскости J, т. е. дано новое доказательство теоремы 8 из § 16. (Конечно, и обратно, коль скоро доказана теорема Паппа — Паскаля для групповой плоскости, теорему 2 можно доказать, пользуясь проектированием или же правым переносом.) Наше доказательство основано на дополнении групповой плоскости до группового пространства; в групповом пространстве выполняются проективные пространственные аксиомы инцидентности, поэтому удается воспользоваться соображениями Данделена; существование же описанной мистической гексаграммы следует непосредственно из существования в групповом пространстве поверхностей Клиффорда.

Доказательство, данное в п. 2 § 16, содержится в этом доказательстве.

Чтобы сравнить оба доказательства, полезно заметить следующее.

В теореме Данделена вместо существования мистической гексаграммы можно потребовать, *чтобы существовали три разные точки S_1, S_2, S_3, не лежащие на плоскости E данного шестиугольника P_1, Q_2, P_3, Q_1, P_2, Q_3, обладающие тем свойством, что при $i \neq k$ точки S_i, S_k, P_i, Q_k, равно как и точки S_k, S_i, P_k, Q_i, компланарны.*

В самом деле, из существования таких точек последовательно выводится коллинеарность точек R_{ik} пересечения противоположных сторон (P_i, Q_k) и (P_k, Q_i). По условию S_i, S_k, P_i, Q_k принадлежат одной плоскости E_{ik}, а S_k, S_i, P_k, Q_i — плоскости E_{ki}. Пусть далее, E^* — плоскость, которой принадлежат точки S_1, S_2, S_3 (она существует в силу аксиомы б)). Так как две разные точки S_i и S_k принадлежат двум разным плоскостям E_{ik} и E_{ki} и плоскости E^* и так как точка R_{ik} по определению принадлежит двум первым плоскостям, то по аксиоме а) она принадлежит плоскости E^*, а значит, три точки R_{ik}, лежащие в разных плоскостях E и E^*, принадлежат прямой их пересечения.

Краткость доказательства § 16 п. 2 проистекает из того, что мы построили три произведения $p_i s q_i$, рассматриваемые как точки группового пространства, являются точками S_i и удовлетворяют соответствующим требованиям, причем рассуждения проводятся, как выше, но вместо аксиом инцидентности а) и б) используются обобщение аксиомы V и лемма о девяти инволютивных элементах.

Замечание. То, что в групповом пространстве выполняется теорема Паппа — Паскаля, можно получить также из того, что в групповом пространстве существует нуль-система (инволютивная корреляция, при которой сохраняется инцидентность точек и плоскостей). В самом деле, так как в групповом пространстве выполняются проективные аксиомы инцидентности и теорема Дезарга, то его можно представить как проективное пространство над некоторым телом, а из существования нуль-системы следует тогда коммутативность тела (см. Бэр [7], стр. 138), а значит, и теорема Паппа — Паскаля.

Можно получить нуль-систему в групповом пространстве, если устроить суперпозицию абсолютного поляритета с инволютивным правым переносом (ср. п. 7). Тогда нуль-система определяется соответствием $\xi \longleftrightarrow J\xi a$ при фиксированном a.

6. Квадраты в эллиптической группе движений. Аксиома свободной подвижности. При изучении метрических свойств группового пространства часто возникает вопрос, сопряжены ли два данных групповых элемента или же — является ли их частное квадратом. Первый вопрос является усилением второго, ибо сопряженные элементы всегда различаются только квадратом: $\alpha\alpha^{\beta}=(\alpha\beta^{-1})^2\beta^2$ и $\alpha^{-1}\alpha^{\beta}=(\alpha^{-1})^2(\alpha\beta^{-1})^2\beta^2$ ($\alpha^{-1}\alpha^{\beta}$ — коммутатор $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$, а в каждой группе всякий коммутатор является произведением квадратов).

Исследуем вкратце вопрос о *сопряженных элементах* и *квадратах* в эллиптической группе движений $\mathfrak{G}$. Относящиеся к этому теоремы истолкуем как высказывания о подвижности на групповой плоскости. Квадраты из $\mathfrak{G}$ порождают нормальный делитель $\mathfrak{Q}$.

Теорема 3. *Если $b=a^{\gamma}$, то существует c, для которого $b=a^{c}$.*

Эта теорема на групповой плоскости означает, что две точки, переводимые друг в друга движением, симметричны друг другу, т. е. обладают средней точкой (точнее, парой взаимно полярных средних точек). Из-за наличия поляритета выполняется и двойственное утверждение: если прямые можно совместить движением, то они симметричны; у них есть две взаимно перпендикулярные биссектрисы.

Доказательство. В силу теоремы 5 из § 16 существует такой элемент s, что sa и $s\gamma$ инволютивны. Тогда $a^{s}=a$, а значит, $a^{s\gamma}=a^{\gamma}=b$.

Теорема 4. *a и b сопряжены тогда и только тогда, когда ab является квадратом.*

Таким образом, элемент из $\mathfrak{G}$ является квадратом в том и только в том случае, если при представлении его в виде произведения двух инволютивных множителей эти множители сопряжены.

Доказательство. Если a и b сопряжены, то по теореме 3 есть элемент c такой, что $b=a^{c}$. Тогда $ab=aa^{c}=(ac)^2$. Обратно, пусть $ab\neq 1$ является квадратом: $ab=rsrs$. Отсюда следует $r,s\in J(ab)$, т. е. по теореме 2 § 16 ars является инволютивным элементом c, и поэтому $ab=acac$, т. е. $b=a^{c}$.

Теорема 5. *Произведение квадратов (т. е. любой элемент из $\mathfrak{Q}$) является квадратом.*

Доказательство. Возьмем произведение $\alpha^2\beta^2$. По теореме 5 из § 16 существует элемент s такой, что αs и $s\beta$ инволютивны. Тогда $\alpha^2\beta^2=s^{\alpha s}s^{s\beta}$. В правой части стоит произведение двух сопряженных инволютивных элементов, которое по теореме 4 является квадратом.

В силу этой теоремы делимость пополам отрезков и углов на групповой плоскости транзитивна.

Особо интересны те эллиптические группы движений, в которых всякий элемент является квадратом, т. е. $\mathfrak{Q}=\mathfrak{G}$. По теореме 4 это будет тогда и только тогда, когда все инволютивные элементы из $\mathfrak{G}$ сопряжены, т. е. когда выполняется дополнительная

Аксиома В. *Для каждых a и b найдется такой элемент γ, что $a^\gamma = b$.*

Аксиома В утверждает, что на групповой плоскости всякие две точки (а следовательно, и всякие две прямые) совместимы движением. Назовем ее *аксиомой подвижности.* В силу теоремы 3 она равносильна требованию

В* *Для каждых a и b найдется такой элемент c, что $a^c = b$*, которое означает, что всякие две точки на групповой плоскости имеют среднюю точку, всякий угол — биссектрису. Она равносильна также требованию

В**. *Если $a|b$, то существует такой элемент c, что $a^c = b$*, которое означает, что всякие две полярные точки имеют среднюю точку, всякий прямой угол можно разделить пополам. В самом деле, из В** вытекает В: пусть даны a и b. По аксиоме V существует такой элемент v, что $v|a, b$. По В** существуют такие элементы c, c', что $a^c = v$, $v^{c'} = b$. Тогда $a^{cc'} = b$.

Аксиома подвижности В на эллиптической плоскости равносильна также сформулированному в Замечании о свободной подвижности требованию свободной подвижности; именно справедлива

Теорема 6. *Требование свободной подвижности в эллиптической группе движений выполняется тогда и только тогда, когда всякое движение является квадратом.*

В этой связи мы покажем еще, что единственными движениями групповой плоскости, оставляющими неподвижной данную точку a, являются повороты вокруг a и симметрии с центром в точке, полярной a:

Теорема 7. *$a^\gamma = a$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in D(a)$ или $\gamma \in J(a)$.*

Доказательство необходимости. Как при доказательстве теоремы 3, выберем $s \in J(a)$, $J(\gamma)$. Тогда $a^{s\gamma} = a$. Следовательно, для инволютивного элемента $s\gamma$ выполняется либо $s\gamma|a$, либо $s\gamma = a$. В первом случае $s\gamma \in J(a)$, т. е. $\gamma \in sJ(a) = D(a)$. Во втором случае $\gamma = sa$ инволютивно, т. е. $\gamma \in J(a)$.

Теорема 7 отвечает на вопрос о неподвижных точках движения в эллиптической групповой плоскости (ср. п. 10 § 3); она содержится в одном из утверждений теоремы об отношении Томсена (теорема 8 из § 7). Из теоремы 7 вытекает «жесткость» движений групповой плоскости (теорема 26 из § 3).

В силу теоремы 7 нормализатор инволютивного элемента a — это подгруппа, порожденная элементами из $J(a)$. Так как всякая группа поворотов $D(\alpha)$ содержит единственный инволютивный элемент, то отсюда получается аналогичное утверждение для групп поворотов:

Теорема 8. *$D(\alpha)^{\gamma}=D(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\gamma\in D(\alpha)$ или $\gamma\in J(\alpha)$.*

Так как элементы из $D(\alpha)$ переводят всякий элемент группы в себя, а элементы из $J(\alpha)$ переводят α в α^{-1}, то по теореме 8 группу поворотов можно преобразовать в себя внутренним автоморфизмом только так, чтобы либо каждый элемент перешел в себя, либо же каждый элемент перешел в обратный.

Применительно к групповому пространству теорема 8 означает, например, что *две прямые одновременно правопараллельны и левопараллельны в том и только в том случае, когда они либо совпадают, либо взаимно полярны.* В самом деле, две правопараллельные прямые $D(\alpha)\gamma=\gamma D(\alpha)^{\gamma}$ и $D(\alpha)\delta=\delta D(\alpha)^{\delta}$ левопараллельны тогда и только тогда, когда $D(\alpha)^{\gamma}=D(\alpha)^{\delta}$, т. е. $D(\alpha)^{\gamma\delta^{-1}}=D(\alpha)$. По теореме 8 это означает, что либо

$$\gamma\delta^{-1}\in D(\alpha),\quad \text{т. е.}\quad D(\alpha)\gamma=D(\alpha)\delta,$$

либо

$$\gamma\delta^{-1}\in J(\alpha),\quad \text{т. е. по (1)}\quad D(\alpha)=J(\alpha)\gamma\delta^{-1},\quad \text{т. е.}\quad D(\alpha)\delta=J(\alpha)\gamma.$$

7. Движения группового пространства. Кроме собственных движений (12), есть и другие коллинеации группового пространства, которые сохраняют абсолютный поляритет. Ведь единичное преобразование групповой плоскости можно продолжить не только до единичного преобразования $\xi^*=\xi$ группового пространства, но также и до преобразования

$$\xi^*=\xi^{-1}, \tag{19}$$

а это опять-таки коллинеация, сохраняющая поляритет. Инволютивную коллинеацию (19), сохраняющую неподвижными каждую точку плоскости J и точку 1, т. е. некоторую пространственную инволютивную гомологию, назовем *симметрией относительно точки и плоскости* 1, J. Более общо, всякое отображение

$$\xi^*=\gamma\xi^{-1}\delta \tag{20}$$

является коллинеацией группового пространства, сохраняющей поляритет; назовем его *зеркальным движением группового пространства.* Всякое зеркальное движение переводит правопараллельные прямые в левопараллельные, а левопараллельные прямые в правопараллельные. Собственные и зеркальные движения группового пространства образуют группу, называемую *группой движений группового пространства*; собственные движения составляют в ней подгруппу индекса 2.

Если подвергнуть симметрию (19) внутреннему автоморфизму, заданному посредством правого переноса (или же левого переноса), переводящего точку 1 и ее поляру J в точку γ и поляру $J\gamma$, то получим *симметрию относительно точки и плоскости* γ, $J\gamma$: $\xi^* = (\xi\gamma^{-1})^{-1}\gamma$ или же

$$\xi^* = \gamma\xi^{-1}\gamma. \tag{21}$$

Среди зеркальных движений инволютивными являются только такие симметрии относительно точки и плоскости. В самом деле, если зеркальное движение (20) равно своему обратному, то $\gamma\xi^{-1}\delta = (\gamma^{-1}\xi\delta^{-1})^{-1} = \delta\xi^{-1}\gamma$ для всех ξ, и, как в конце п. 3, находим, что в этом случае обязательно $\gamma = \delta$. Собственное движение (12) инволютивно тогда и только тогда, когда $\gamma^2 = \delta^2 = 1$ и γ, δ не равны оба 1, т. е. когда движение является либо *инволютивным переносом* $\xi^* = a\xi$ или $\xi^* = \xi b$, либо произведением таких переносов: $\xi^* = a\xi b$. Как и все отличные от единицы переносы, инволютивные переносы не имеют неподвижных точек, а на каждой из параллельных между собой неподвижных прямых переводят каждую точку в полярную. Такие инволютивные движения, которые не имеют неподвижных точек и порождают группу собственных движений, составляют достопримечательную особенность эллиптического группового пространства.

Те собственные движения (12) и зеркальные движения (20), у которых $\gamma\delta \in \mathfrak{Q}$, образуют в группе движений группового пространства подгруппу (так как вместе с $\gamma\delta$ и $\gamma'\delta'$ в $\mathfrak{Q}$ лежит, например, и $\gamma'\gamma\delta\delta' = \gamma'\delta'(\gamma\delta)^{\delta'}$), называемую *узкой группой движений группового пространства*. При выполнении аксиомы подвижности В узкая группа движений совпадает с полной группой движений группового пространства.

Рассмотрим узкую группу движений подробнее и прежде всего определим *инволютивные движения, принадлежащие узкой группе*. Симметрии относительно точки и плоскости принадлежат узкой группе. В силу теоремы 4 произведение $\xi^* = a\xi b$ двух инволютивных переносов принадлежит узкой группе тогда и только тогда, когда a и b сопряжены, т. е. когда существует элемент γ такой, что $b = a^\gamma$. Инволютивное движение

$$\xi^* = a\xi a^\gamma \tag{22}$$

оставляет неподвижной каждую точку прямой $J(a)\gamma$ и полярной прямой $D(a)\gamma$. В самом деле, если $s \in J(a)$, то $a(s\gamma)a^\gamma = asa\gamma = s\gamma$; если $\alpha \in D(a)$, то $a(\alpha\gamma)a^\gamma = a\alpha a\gamma = \alpha\gamma$. Такие инволютивные движения, которые оставляют неподвижными все точки пары полярных прямых, принадлежат к хорошо известному проективному типу; назовем (22) *симметрией относительно прямых* $J(a)\gamma$,

$D(a)\gamma$. Всякую симметрию относительно пары прямых можно представить как произведение двух симметрий относительно точки и плоскости, центры которых взаимно полярны, а плоскости взаимно перпендикулярны: например, (22) можно представить как произведение симметрии относительно точки и плоскости γ, $J\gamma$ и симметрии относительно $a\gamma$, $Ja\gamma$: $a\gamma(\gamma\xi^{-1}\gamma)^{-1}a\gamma=a\xi a^{\gamma}$.

Наряду с симметриями относительно точек и плоскостей и симметриями относительно пар прямых узкая группа, вообще говоря, содержит инволютивные переносы

$$\xi^*=a\xi \quad \text{и} \quad \xi^*=\xi a \qquad \text{при} \qquad a\in\mathfrak{Q}. \tag{23}$$

Для их существования в узкой группе необходимо и достаточно, чтобы группа $\mathfrak{Q}$ содержала инволютивные элементы, т. е., например, в классическом случае, когда имеет место свободная подвижность (аксиома B), чтобы всякий элемент из $\mathfrak{G}$ являлся квадратом. (То, что существует эллиптическая группа движений, в которой ни один инволютивный элемент не является квадратом, видно из задачи 3 п. 3 § 10.)

Резюмируем:

Теорема 9. *Инволютивными движениями из узкой группы движений группового пространства являются: симметрии относительно точки и плоскости* (21), *симметрии относительно пары прямых* (22), *инволютивные переносы* (23) (*причем последние существуют в узкой группе только тогда, когда в исходной эллиптической группе движений существуют инволютивные элементы, являющиеся квадратами*).

Теорема 10. *Узкая группа движений группового пространства порождается симметриями относительно точек и плоскостей; группа собственных движений узкой группы движений порождается симметриями относительно пар прямых, точнее, всякое собственное движение узкой группы является произведением двух таких симметрий, т. е. произведением четырех симметрий относительно точек и плоскостей, а всякое зеркальное движение узкой группы является произведением одной симметрии относительно точки и плоскости и одной симметрии относительно пары прямых, т. е. произведением трех симметрий относительно точек и плоскостей.*

Доказательство. Для двух элементов группы γ и δ по теореме 5 § 16 найдется элемент s такой, что γs и $s\delta$ будут инволютивными элементами; обозначим их a и b. Если $\gamma\delta$, т. е. ab, принадлежит $\mathfrak{Q}$, то по теореме 4 есть элемент β такой, что $b=a^{\beta}$; тогда γ и δ можно представить в виде $\gamma=as$, $\delta=sa^{\beta}$. Следовательно, всякое собственное движение узкой группы можно представить в виде $\xi^*=as\xi sa^{\beta}$, т. е. как произведение симметрий относительно прямых $J(s)$, $D(s)$ и $J(a)\beta$, $D(a)\beta$. Всякое же зеркальное движение узкой группы представимо в виде $\xi^* = as\xi^{-1}sa^{\beta}$, т. е. как произведение симметрии относительно точки и плоскости s, Js и симметрии относительно прямых $J(a)\beta$, $D(a)\beta$.

Из теоремы 10 следует, что узкая группа движений является нормальным делителем группы движений группового пространства, так как симметрии относительно точек и плоскостей образуют инвариантную систему во всей группе движений.

Всякое произведение двух симметрий относительно точек и плоскостей, плоскости симметрии которых проходят через данную прямую, оставляет каждую точку этой прямой неподвижной и называется *поворотом* вокруг этой прямой.

Плоскости, содержащие прямую $J(a)\gamma$, имеют вид $J\alpha\gamma$, где $\alpha \in D(a)$. Произведение симметрий относительно γ, $J(\gamma)$ и $\alpha\gamma$, $J\alpha\gamma$ порождает такой *поворот вокруг* $J(a)\gamma$:

$$\xi^* = \alpha\xi\alpha^{\gamma}, \quad \text{где} \quad \alpha \in D(a), \tag{24}$$

и всякий поворот вокруг прямой $J(a)\gamma$ можно представить в таком виде. Повороты вокруг прямой $J(a)\gamma$ образуют группу, изоморфную группе поворотов $D(a)$; единственный принадлежащий ей инволютивный элемент — это симметрия относительно прямых $J(a)\gamma$, $D(a)\gamma$.

Повороты вокруг прямой $D(a)\gamma$ имеют вид

$$\xi^* = \alpha^{-1}\xi\alpha^{\gamma}, \quad \text{где} \quad \alpha \in D(a). \tag{25}$$

Так как групповое пространство предназначено, чтобы истолковать геометрически свойства эллиптической группы движений, заметим, что теорема об отношении Томсена (теорема 8 из § 7) равносильна такому утверждению о групповом пространстве: *если поворот отличен от единицы и не инволютивен, то неподвижными точками его являются точки оси поворота, а если он инволютивен, т. е. является симметрией относительно пары прямых* (22), *то его неподвижные точки — это точки оси и точки полярной ей прямой.* (Надо применить теорему 8 из § 7 к α и $\beta = \xi\gamma^{-1}$.)

Задачи. **1.** Движение группового пространства, обладающее неподвижной точкой (неподвижной плоскостью), принадлежит узкой группе движений. Если оно собственное, то это поворот. Движение, обладающее неподвижной прямой, не обязано содержаться в узкой группе движений.

2. Собственное движение $\xi^* = \alpha\xi\beta$ обладает неподвижной прямой в том и только в том случае, когда либо 1) α и β принадлежат сопряженным группам поворотов, либо 2) движение имеет вид $\xi^* = a\xi b$ при несопряженных a и b.

Движения вида 1) — это винтовые движения, т. е. такие движения группового пространства, которые можно представить как произведение поворота вокруг прямой и переноса вдоль этой прямой. Винтовое движение, содержащее множителем правый перенос, можно представить также как винтовое движение, содержащее множителем левый перенос. Всякое винтовое движение, осью которого служит некоторая прямая, является одновременно винтовым движением, осью которого служит прямая, полярная первой. Если выполняется аксиома В, то всякое собственное движение является винтовым движением.

3. Мы говорим, что прямая *перпендикулярна* другой прямой, если она пересекает эту прямую и ее поляру. Следовательно, две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда они различны, не полярны друг другу и каждая из них переводится в себя симметрией относительно другой (и ее поляры), или, иначе говоря, когда они являются примыкающими сторонами параллелограмма Клиффорда, противоположные стороны которого взаимно полярны.

Две прямые

$$D(a)\gamma=\gamma D\left(a^{\gamma}\right), \qquad D(b)\delta=\delta D\left(b^{\delta}\right) \tag{$*$}$$

перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a|b$ и $a^{\gamma}|b^{\delta}$.

Поляра общего перпендикуляра двух прямых сама является их общим перпендикуляром. Две разные параллельные неполярные прямые обладают семейством взаимно параллельных общих перпендикуляров. Две непараллельные прямые $(*)$ имеют общую (полярную) пару перпендикуляров тогда и только тогда, когда общий элемент $J(a)$ и $J(b)$ и общий элемент $J(a^{\gamma})$ и $J(b^{\delta})$ сопряжены.

4. Абсолютный поляритет группового пространства проективен. Движения группового пространства проективны. Группа движений группового пространства состоит из всех проективных коллинеаций, сохраняющих абсолютный поляритет.

8. Порождение поверхностей Клиффорда вращением. Из многих вопросов, касающихся метрических свойств эллиптического группового пространства, мы в качестве примера рассмотрим только один вопрос, а именно: являются ли поверхности Клиффорда поверхностями вращения.

Прежде всего возьмем правую конгруэнцию и левую конгруэнцию. Поставим вопрос, имеют ли они общую прямую. Если у них есть одна общая прямая, то у них есть еще одна общая прямая — поляра первой, и, значит, они обладают общей полярной парой прямых, а по следствию из теоремы 8 у них больше нет общих прямых. Наш вопрос о существовании зависит — и эта зависимость типична — от наличия сопряженности. Каждой правой (соответственно, левой) конгруэнции принадлежит единственная группа поворотов — вокруг той прямой конгруэнции, которая содержит точку 1. Справедлива

Теорема 11. *Правая и левая конгруэнции обладают парой взаимно полярных прямых тогда и только тогда, когда принадлежащие им группы поворотов сопряжены.*

Доказательство. Пусть $D(a)$ и $D(b)$ — группы поворотов, отвечающие данным конгруэнциям. Если $b=a^{\delta}$ то обе взаимно полярные прямые $D(a)\delta=\delta D(a^{\delta})$ и $J(a)\delta=\delta J(a^{\delta})$ принадлежат обеим конгруэнциям. Обратно, если есть прямая $D(a)\delta=\delta D(a^{\delta})$ правой конгруэнции, принадлежащая левой конгруэнции, т. е. представимая в виде $\delta' D(b)$, то $\delta D(a^{\delta})=\delta' D(b)$, т. е. аналогично (4) $a^{\delta}=b$.

Если выполняется аксиома В, то по теореме 11 всякая правая и левая конгруэнции обладают парой общих прямых.

Всякую поверхность Клиффорда можно записать в виде $D(a)\gamma D(b)$, где $a^{\gamma}\neq b$. Выделим подкласс поверхностей Клиффорда, обладающий тем свойством, что правая конгруэнция, принадлежащая правому семейству поверхности Клиффорда, и левая конгруэнция, принадлежащая левому семейству поверхности Клиффорда, имеют общую пару прямых. По теореме 11 такие поверхности могут быть записаны в виде

$$D(a)\,\gamma D\left(a^{\delta}\right), \quad \text{где} \quad a^{\gamma}\neq a^{\delta}. \tag{26}$$

Их общая пара попярных прямых — это $D(a)\delta$, $J(a)\delta$.

Эти две прямые, которые правопараллельны всем прямым правой конгруэнции и левопараллельны всем прямым левой конгруэнции, являются *осями вращения поверхности Клиффорда* (26): если вращать какую-нибудь прямую правого семейства поверхности Клиффорда, например прямую $D(a)\gamma$ вокруг прямой $D(a)\delta$, как вокруг оси, то получатся прямые $\alpha^{-1}(D(a)\gamma)\alpha^{\delta} = D(a)\gamma\alpha^{\delta}$, где $\alpha\in D(a)$, т. е. множество всех прямых правого семейства. Если же вращать прямую левого семейства, например $\gamma D(a^{\delta})$, вокруг прямой $D(a)\delta$, то получатся прямые $\alpha^{-1}(\gamma D(a^{\delta}))\alpha^{\delta}=\alpha^{-1}\gamma D(a^{\delta})$, где $\alpha\in D(a)$, т. е. множество всех прямых левого семейства. Аналогичные результаты касаются вращений вокруг прямой $J(a)\delta$.

Сделаем два замечания: 1) Если три разные точки поверхности Клиффорда принадлежат одной прямой, то эта прямая содержится в правом или левом семействе поверхности Клиффорда. Иначе говоря, кроме прямых этих семейств на поверхности Клиффорда нет никаких других прямых. 2) Всякое собственное движение, переводящее в себя поверхность Клиффорда, переводит прямые ее правого семейства в прямые того же семейства, а прямые левого семейства в прямые левого семейства.

Доказательство 1). Допустим, что рассматриваемая прямая не принадлежит ни одному из двух семейств, и проведем через одну из данных точек прямую левого семейства, а через две другие данные точки — прямые правого семейства. Полученные четыре прямые попарно различны. Так как через данную прямую и прямую левого семейства проходит плоскость и так как эти две прямые пересекают обе прямые правого семейства, то две прямые правого семейства лежат в одной плоскости, что невозможно.

Доказательство 2). Такое движение переводит три разные прямые правого семейства в три разные попарно правопараллельные прямые поверхности Клиффорда. Так как прямые-образы не могут все одновременно принадлежать левому семейству (по следствию теоремы 8 три разные прямые не могут быть попарно и право- и левопараллельными), то в силу 1) по крайней мере одна из этих прямых принадлежит правому семейству, а тогда ему принадлежат и две другие прямые.

Теперь рассмотрим произвольную поверхность Клиффорда $D(a)\gamma D(b)$, где $a^{\gamma}\neq b$. Допустим, что у нее есть ось вращения, т. е. есть прямая $D(l)\delta$ такая, что при всех поворотах вокруг этой прямой поверхность Клиффорда переходит в себя. Поворот вокруг $D(l)\delta$ переводит прямую $D(a)\gamma$ правого семейства, проходящую через точку γ поверхности Клиффорда, в прямую $\lambda^{-1}(D(a)\gamma)\lambda^{\delta}$ $(\lambda\in D(l))$. В силу 2) полученная прямая снова является прямой правого семейства, а именно, той прямой этого семейства, которая проходит через точку-образ $\lambda^{-1}\gamma\lambda^{\delta}$. Итак, $\lambda^{-1}(D(a)\gamma)\lambda^{\delta}=D(a)\lambda^{-1}\gamma\lambda^{\delta}$, т. е. $\lambda^{-1}D(a)=D(a)\lambda^{-1}$ для всех $\lambda\in D(l)$. Следовательно, по теореме 8 $D(l)=D(a)$. Так как при поворотах и прямая левого семейства также переходит в прямую левого семейства, то аналогично получаем, что $D(l)^{\delta}=D(b)$. Таким образом, поверхность Клиффорда имеет специальный вид (26), и ее осью вращения является прямая $D(a)\delta$ — общая прямая той правой конгруэнции, которой принадлежит правое семейство поверхности Клиффорда, и той левой конгруэнции, которой принадлежит левое семейство поверхности Клиффорда.

Таким образом, справедлива

Теорема 12. *Поверхность Клиффорда является поверхностью вращения одной из своих прямых вокруг некоторой оси тогда и только тогда, когда* *правая конгруэнция, которой принадлежит правое семейство поверхности, и левая конгруэнция, которой принадлежит левое семейство этой поверхности, имеют пару общих взаимно полярных прямых.*

Тогда она получается вращением вокруг любой из этих двух прямых, т. е. она есть «дважды» поверхность вращения.

Если в общем случае вращать прямую вокруг прямой, право- (или лево-) параллельной ей, то получится поверхность Клиффорда, если обе прямые различны и не взаимно полярны, т. е. если они не являются одновременно право- и левопараллельными Если вращать прямую вокруг некоторой оси, которая ни право- ни левопараллельна ей, то поверхность Клиффорда не получится. В самом деле, ось вращения поверхности Клиффорда, как мы видели, — это прямая, правопараллельная прямым правого семейства поверхности Клиффорда и левопараллельная прямым левого семейства, а так как поверхность Клиффорда не содержит никаких прямых, отличных от прямых обоих семейств, то ось вращения должна быть право- или левопараллельна каждой прямой этой поверхности. Итак, справедливо

Следствие. *При вращении одной прямой вокруг другой получается поверхность Клиффорда тогда и только тогда, когда эти прямые взаимно параллельны в смысле одного и только одного из двух отношений параллельности.*

Множество точек, получаемых из фиксированной точки при вращении вокруг некоторой оси, назовем *окружностью*, если данная точка не принадлежит ни оси вращения, ни ее поляре. Всякая окружность принадлежит плоскости, перпендикулярной ее оси (полюс плоскости принадлежит оси, плоскость содержит поляру оси). Если поверхность Клиффорда получается вращением вокруг некоторой оси, то она покрывается некоторой системой окружностей; всякие две окружности этой системы можно совместить друг с другом переносом, который переводит поверхность Клиффорда (и ее ось вращения) в себя; так как переносы являются движениями, то всякие две окружности, принадлежащие поверхности Клиффорда, «конгруэнтны». Всякая поверхность Клиффорда, получаемая вращением вокруг оси, может быть также получена вращением вокруг полярной оси. Поэтому она покрыта двумя семействами конгруэнтных окружностей. Две окружности из двух разных семейств лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Если выполняется аксиома В, то можно получить поверхность Клиффорда, вращая одну из этих окружностей вокруг прямой, полярной ее оси. Для этого рассмотрим на поверхности (26) окружность, получаемую вращением точки γ вокруг прямой $D(a)\,\delta$, т. е. множество точек $\alpha^{-1}\gamma\alpha^{\delta}$, где $\alpha \in D(a)$. Вращая ее вокруг прямой, полярной $D(a)\,\delta$, т. е. вокруг $J(a)\,\delta$, получаем множество точек $\alpha'\alpha^{-1}\gamma\alpha^{\delta}\alpha'^{\delta}$, где $\alpha, \alpha' \in D(a)$. Всякая точка поверхности Клиффорда, т. е. всякая точка $\alpha_1\gamma\alpha_2^{\delta}$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in D(a)$, принадлежит этому множеству точек. В самом деле, так как в силу аксиомы В $\alpha_1\alpha_2$ является квадратом, то найдется элемент $\alpha_0' \in D(a)$, для которого $\alpha_0'^2 = \alpha_1\alpha_2$; если положить $\alpha_0 = \alpha_1^{-1}\alpha_0'$, то $\alpha_0'\alpha_0^{-1}\gamma\alpha_0^{\delta}\alpha_0'^{\delta} = \alpha_1\gamma\alpha_2^{\delta}$.

Теорема 13. *Если выполняется аксиома* В, *то у каждой поверхности Клиффорда существуют две взаимно полярные оси вращения. Поверхность Клиффорда получается вращением любой ее прямой вокруг одной из ее осей. Поверхность Клиффорда получается также, если вращать одну ее точку вокруг одной оси, а затем вращать полученную окружность вокруг другой оси.*

Задачи. 1. Если $D(\alpha)$ и $D(\beta)$ — две фиксированные группы поворотов, то «двойные смежные классы» $D(\alpha)\gamma D(\beta)$ образуют семейство поверхностей

Клиффорда, содержащих две взаимно полярные прямые, если $D(\alpha)$ и $D(\beta)$ сопряжены. Через каждую точку пространства проходит единственная поверхность или единственная прямая этого семейства. Если это семейство содержит прямые, то они являются осями вращения всех поверхностей Клиффорда этого семейства.

2. Мы говорим, что поверхность Клиффорда *ортогональна*, если каждая прямая ее правого семейства перпендикулярна каждой прямой ее левого семейства. Это будет в том и только в том случае, когда поверхность вместе с каждой своей прямой содержит ее поляру Ортогональная поверхность Клиффорда имеет вид

$$D(a)\gamma D(b), \quad \text{где} \quad a^{\gamma} \mid b. \qquad (**)$$

Ортогональная поверхность Клиффорда (**) — это множество тех элементов группы, которые при внутренних автоморфизмах переводят a в элемент из $J(b)$. Это фундаментальная поверхность поляритета $\xi \longleftrightarrow Ja\xi b$, коммутирующего с абсолютным поляритетом.

3. Определить группу всех движений группового пространства, которые переводят некоторую поверхность Клиффорда в себя.

9. Полуповороты в групповой плоскости и переносы в групповом пространстве. Полуповорот в эллиптической групповой плоскости — это определенное на групповой плоскости отображение точек на точки и прямых на прямые. Если полуповорот удается описывать в одной лишь групповой плоскости (ср. § 6), то для него существенно, что полуповорот получается умножением элемента группы на фиксированный неинволютивный элемент группы. Дадим теперь новое определение полуповорота, использующее это обстоятельство и непосредственно связывающее полуповороты групповой плоскости с неинволютивным переносом группового пространства, для чего нам придется систематически изучать операцию умножения элемента группы на неинволютивный элемент группы.

В дальнейшем обозначим через η неинволютивный элемент эллиптической группы движений $\mathfrak{G}$. Если комплекс $\mathfrak{N}$ элементов из $\mathfrak{G}$ содержит единственный инволютивный элемент, то в дальнейшем мы будем обозначать этот инволютивный элемент символом $[\mathfrak{N}]$.

Полуповоротом H_η, *принадлежащим элементу* η, назовем следующее отображение множества точек групповой плоскости на себя:

$$aH_\eta = [D(a)\eta]. \qquad (27)$$

Здесь полуповорот определен как теоретико-групповая операция, сопоставляющая каждому инволютивному элементу a инволютивный элемент из некоторого смежного класса группы поворотов $D(a)$.

Сопоставление (27) можно провести с помощью следующих шагов:

$$a \to D(a) \to D(a)\eta \to [D(a)\eta].$$

Применительно к групповому пространству это означает: соединяем точку a групповой плоскости J и точку 1 (полюс плоскости J); на соединительную прямую $D(a)$ действуем правым переносом η и пересекаем полученную прямую $D(a)\eta$ с групповой плоскостью J (рис. 140). (Поскольку η не инволютивен, то $D(a)\eta$ не принадлежит J, и существует единственная точка пересечения.) Итак, имеет место

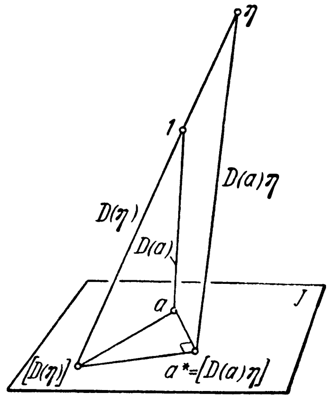


Рис. 140.

Теорема 14. *Пусть связка прямых группового пространства с центром* 1 *при правом переносе* η *переходит в связку прямых с центром* η. *Если отнести точкам пересечения прямых первой связки с групповой плоскостью точки пересечения прямых второй связки с групповой плоскостью, то получается полуповорот* H_η (*рассматриваемый как отображение точек*).

Пространственная конструкция делает очевидным, например, то, что при полуповороте прямые групповой плоскости переходят в прямые групповой плоскости. Полуповорот как отображение прямых получается, если рассмотреть связку плоскостей с центром 1, перевести ее правым переносом η в связку плоскостей с центром η, пересечь плоскость обеих связок с групповой плоскостью и сопоставить прямой пересечения групповой плоскости с некоторой плоскостью первой связки прямую пересечения групповой плоскости с соответствующей плоскостью второй связки.

Плоскость, проходящая через точку 1, имеет вид Ja; плоскость, полученная из нее правым переносом,— вид $Ja\eta$. Прямые пересечения Ja и $Ja\eta$ с групповой плоскостью имеют вид $J(a)$ и $J(a\eta)$. Итак, *отображение прямых групповой плоскости при полуповороте* H_η *задается исключительно простой формулой*

$$J(a)H_\eta = J(a\eta). \tag{28}$$

Ясно, что эту формулу можно рассматривать как определение полуповорота.

Рассматривая в пространстве, кроме плоскостей Ja и $Ja\eta$, их полюсы — точку a групповой плоскости и ее образ $a\eta$ при правом переносе η, — получаем в соответствии с (28), что образ поляры $J(a)$ точки a групповой плоскости при полуповороте H_η будет прямой пересечения полярной плоскости точки с групповой плоскостью.

С помощью такого пространственного истолкования полуповорота устанавливается справедливость *закона Бочека о полуповоротах и поляритете в групповой плоскости*:

$$J(aH_\eta) = J(a)\,H^{-1}_{\eta^{-1}}, \tag{29}$$

который играл такую важную роль в п. 10 § 6.

Для этого сначала построим точку $aH_\eta = a^*$, соединив точку a групповой плоскости с точкой 1, отобразив полученную прямую правым переносом η и найдя пересечение полученной прямой с групповой плоскостью (рис. 141). Точка $a^*\eta^{-1}$, из которой получается точка a^* при правом переносе η, лежит на соединительной прямой точек 1 и a. Полярные плоскости трех коллинеарных точек 1, $a^*\eta^{-1}$, a пересекаются по прямой, т. е. прямая пересечения полярной плоскости точки $a^*\eta^{-1}$ с групповой плоскостью совпадает с прямой пересечения полярной плоскости точки a с групповой плоскостью. Как отмечалось выше, первая прямая — это образ поляры точки a^* при полуповороте $H_{\eta^{-1}}$, а вторая — поляра точки a. Итак, $J(a^*)\,H_{\eta^{-1}} = J(a)$, т. е.

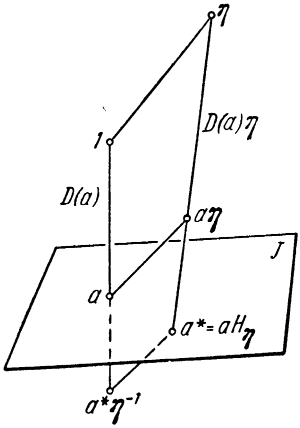


Рис. 141.

$$J(aH_\eta)\,H_{\eta^{-1}} = J(a), \tag{30}$$

а поэтому выполняется (29).

Можно почти непосредственно получить (29) из (27) и (28) вычислениями: в силу (27) $aH_\eta \in D(a)\eta$, т. е. $(aH_\eta)\eta^{-1} \in D(a)$, т. е. $(aH_\eta)\eta^{-1}$ и a принадлежат одной и той же группе поворотов. Следовательно, $J((aH_\eta)\eta^{-1}) = J(a)$, а так как левая часть по (28) равна $J(aH_\eta)\,H_{\eta^{-1}}$, то выполняется (30).

Так как $[D(a)\eta] = [\eta^{-1}D(a)]$ (комплекс $\eta^{-1}D(a)$ состоит в точности из элементов, обратных элементам комплекса $D(a)\eta$), то можно описать полуповорот H_η, заменив в теореме 14 правый перенос η левым переносом η^{-1}. Равенство $J(a\eta) = J(\eta^{-1}a)$ показывает, что отображения прямых при этом совпадают.

В силу (27) из равенства $[D(a)\eta] = [\eta^{-1}D(a)] = [D(a^\eta)\eta^{-1}]$ получаем $aH_\eta = a^\eta H_{\eta^{-1}}$, т. е.

$$aH_\eta H^{-1}_{\eta^{-1}} = a^\eta; \tag{31}$$

таким образом произведение полуповорота H_η на преобразование, обратное полуповороту $H_{\eta^{-1}}$, является поворотом $a^* = a^\eta$ групповой плоскости.

Задачи. 1. Можно описать полуповорот H_η еще так: проектируем точку групповой плоскости из точки 1 на плоскость $J\eta^{-1}$, а затем действуем правым переносом η.

2. Коммутативность полуповоротов вокруг фиксированной точки (теорема о перпендикулярах) приводит в групповом пространстве к утверждению, что некоторый определенный шестиугольник замыкается, если его вершины попеременно лежат на двух прямых, а противоположные стороны параллельны в одном и том же смысле (например, правопараллельны).

10. Истолкование группового пространства на групповой плоскости. Нагляднее представлять себе элементы эллиптической группы движений и их умножение не в групповом пространстве, а на самой групповой плоскости. Тогда получится истолкование группового пространства на групповой плоскости.

При этом полезно определить групповую плоскость эллиптической группы движений, как и прежде, так, чтобы инволютивные элементы группы назывались то точками, то прямыми групповой плоскости (ср. п. 8 § 3). Тогда отношение $a|b$ имеет четыре значения: точка a инцидентна прямой b; прямая a инцидентна точке b; прямые a и b взаимно перпендикулярны; точки a и b взаимно полярны. Если a — точка, а b — прямая, то $a=b$ означает, что a — полюс для b. [Так определенная групповая плоскость — это не плоскость нашего группового пространства. Последняя получится, если (при любом инволютивном элементе b) прямую b заменить точечным множеством $J(b)$.]

Каждому элементу эллиптической группы движений отвечает некоторый поворот групповой плоскости (п. 3 § 16). Привычно представлять поворот на плоскости ориентированным углом. Так, мы можем представить данный элемент группы γ в виде $\gamma=ab$ и изобразить его *углом*, т. е. упорядоченной парой прямых

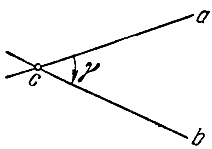


Рис. 142.

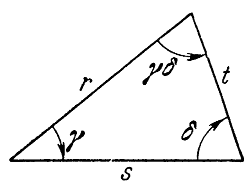


Рис. 143.

a, b на групповой плоскости (рис. 142). [Этот угол равен половине угла поворота.] Вершина угла c тогда является центром поворота. Центром поворота $\gamma=1$ может быть любая точка плоскости. Если $ab=a'b'$, то угол a', b' изображает тот же групповой элемент γ. Итак, существует представляющий γ *класс углов, равных относительно поворотов* Теорема о трех симметриях позволяет так представить γ, чтобы первая или вторая сторона угла была произвольно заданной прямой, проходящей через центр поворота. На этом основывается геометрическое истолкование *произведения* $\gamma\delta$, найденное в посмертных заметках Гаусса: если s — прямая, проходящая через центры поворотов γ и δ, то определим прямые r и t так, чтобы было $\gamma = rs$ и $\delta = st$; тогда угол r, t представляет элемент $\gamma\delta$ (рис. 143).

Таким путем можно представить *точки группового пространства* на групповой плоскости, а также наглядно описать переносы группового пространства на групповой плоскости.

Прямая группового пространства — это смежный класс $D(a)\gamma$ некоторой группы поворотов; в частности, если $\gamma \in D(a)$, то это будет группа $D(a)$, т. е. множество всех поворотов вокруг точки a. Класс $D(a)\gamma$ получается суперпозицией всех поворотов вокруг точки a с некоторым фиксированным поворотом γ. По правилу нахождения произведения это значит, что точку a надо соединить с центром поворота γ прямой v (если $\gamma \in D(a)$, то v — произвольная прямая, проходящая через точку a), а затем определить прямую g, удовлетворяющую равенству $\gamma = vg$

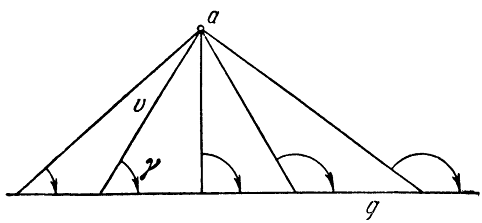


Рис. 144.

(рис. 144). Тогда элементы из $D(a)\gamma$ представляются множеством углов b, g, первая сторона которых принадлежит пучку прямых, носителем которого служит точка a; в частности, если $\gamma \in D(a)$, то и прямая g проходит через точку a.

Заметим, что в силу $v \in J(a)$ имеем $D(a)v = J(a)$ согласно (1), т. е. $D(a)\gamma = J(a)g$. Из представления $J(a)g$ прямой группового пространства сразу получается наш изображающий угол. Каждую прямую группового пространства можно записать в этом виде, т. е. в виде функции от двух инволютивных элементов группы. Элемент a определяется однозначно, а элемент g определен однозначно, если прямая группового пространства не является группой поворотов; в этом же случае $D(a) = J(a)g$ для любого $g \in J(a)$.

Плоскость $J\delta$ группового пространства — это множество поворотов α, для которых $\alpha\delta^{-1}$ инволютивно, т. е. множество поворотов, которые при суперпозиции с фиксированным поворотом

δ^{-1} дают прямой угол (рис. 145). Если элемент δ не инволютивный, то для каждой точки плоскости имеется единственный такой поворот α. Если $\delta = d$ инволютивно, то элементы из $J\delta$ представляются множеством всех углов, для которых прямая d является второй стороной.

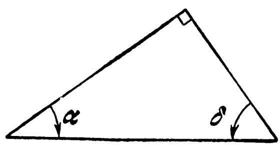


Рис. 145.

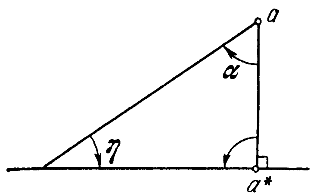


Рис. 146.

Элементы группового пространства можно представлять на групповой плоскости разными другими способами, ибо всякий инволютивный элемент группы является и прямой и точкой групповой плоскости.

Полуповорот $a^* = aH_\eta$, определенный формулой (27) как отображение точек, состоит в том, что в множестве $D(a)\eta$ выбирается инволютивный поворот. Его можно получить, определив среди всех поворотов вокруг точки a поворот α так, чтобы при сложении углов α и η получался прямой угол; тогда $\alpha\eta = [D(a)\eta] = a^*$ (рис. 146). Определение (27) совпадает, таким образом, с указанным в § 6 понятием полуповорота как точечного отображения.

Теорема, утверждающая, что при полуповороте H_η, определенном как точечное отображение, три точки a_1, a_2, a_3, инцидентные некоторой прямой b, переходят в три точки a_1^*, a_2^*, a_3^*, снова инцидентные некоторой прямой, изобразится в нашем истолковании приводимой на рис. 147 конфигурацией.

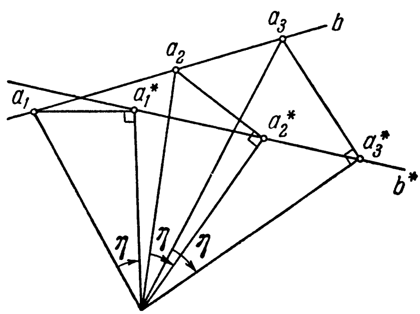


Рис. 147.

Доказательство для этой плоской теоремы проводится посредством формулы (28), которая по существу основана на том, что переносы в групповом пространстве являются коллинеациями. Точнее, формула (28) утверждает, что при полуповороте H_η прямая b переходит в ту прямую b^*, которая удовлетворяет равенству $J(b\eta) = J(b^*)$. Эту прямую можно построить, опустив из центра поворота η перпендикуляр u на прямую b и определив прямую v равенством $\eta=uv$; тогда $b\eta=(bu)v$, значит, как в доказательстве теоремы 4 § 16, $J(b\eta)=J((bu, v))$, т. е. по однозначности, о которой говорится в этой теореме, перпендикуляр (bu, v), опущенный из точки bu на прямую v, является прямой b^* (рис. 148). Указанное в определении (28) отображение прямых групповой плоскости тогда совпадает с определенным в п. 3 § 6 полуповоротом прямых.

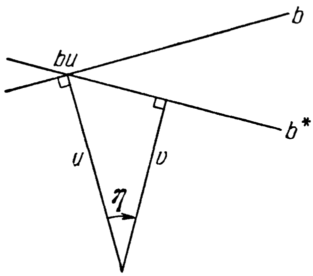


Рис. 148.

Плоское истолкование групповых элементов и их умножения могут сослужить хорошую службу для интуитивного понимания свойственных групповому пространству соотношений, но систематически может применяться только пространственная интерпретация. Двоякая возможность интерпретации приводит к плодотворному попеременному использованию групповой плоскости и группового пространства: то или иное утверждение о групповом пространстве можно истолковать на плоскости и прийти к новой теореме плоской геометрии; с другой стороны, интерпретируя плоскую фигуру в смысле группового пространства, можно получить наводящие соображения относительно доказательства плоской теоремы (ср. наше доказательство теоремы Паппа — Паскаля).

Задача. Ассоциативный закон для суперпозиции поворотов (углов) приводит к конфигурации, в качестве частного случая содержащей конфигурацию теоремы об изогональном соответствии (п. 5 § 1, 9)).

11. Теорема Бэра. Как показано в п. 3, всякая эллиптическая группа движений обладает трехмерным групповым пространством, в котором выполняются проективные аксиомы инцидентности. Докажем сейчас одну интересную теорему Бэра, которая утверждает, что, обратно, эллиптические группы движений — это единственные группы, групповое пространство которых является проективным пространством размерности >1.

Пусть $\mathfrak{G}$ — *произвольная* группа, а J — множество ее инволютивных элементов. Снова обозначаем элементы $\mathfrak{G}$ малыми греческими, а элементы J — малыми латинскими буквами. Элемент $\alpha\in\mathfrak{G}$ назовем *точкой*, а множество точек $J\beta$ — *гиперплоскостью* некоторого пока не уточненного *группового пространства*. (В порядке «взаимности» можно назвать элементы $\mathfrak{G}$ как точками, так и гиперплоскостями группового пространства и положить, что точка α тогда и только тогда инцидентна гиперплоскости β, когда $\alpha\beta^{-1}$ инволютивно.)

Теорема 15а. *Единственными группами, в которых групповое пространство удовлетворяет трехмерным аксиомам инцидентности проективного пространства, являются эллиптические группы движений.*

Возьмем произвольную группу $\mathfrak{G}$, элементы α которой, трактуемые как точки, и множества $J\beta$, трактуемые как плоскости, удовлетворяют указанным в п. 2 аксиомам инцидентности. Докажем, что тогда $\mathfrak{G}$ удовлетворяет системе аксиом эллиптической группы движений п. 1 § 16.

1. *Группа $\mathfrak{G}$ биинволютивна.*

Доказательство. Плоскости, содержащие точку 1, — это плоскости Jb при инволютивном b. Если α — произвольная точка, то существует плоскость, содержащая обе точки 1 и α. Следовательно, существует элемент b такой, что $\alpha \in Jb$. Тогда α является произведением некоторых инволютивных элементов a и b: $\alpha = ab$.

2. *Ни один инволютивный элемент $\mathfrak{G}$ не коммутирует со всеми элементами из $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Допустим, что некоторый инволютивный элемент c коммутирует со всеми инволютивными элементами x. При каждом $x \neq c$ выполнялось бы $x \in Jc$; при этом $c \notin Jc$. Пересечение двух плоскостей J и Jc было бы тогда равно J, из которого выброшен c, т. е. плоскости без точки, что невозможно.

3. *В $\mathfrak{G}$ выполняются аксиомы* T *и* V.

Доказательство. По условию выполнены проективные аксиомы инцидентности а) и б). Следовательно, в $\mathfrak{G}$ выполняется лемма о девяти инволютивных элементах и обобщение аксиомы V (см. п. 3), частным случаем которых являются аксиомы T и V (ср. п. 7 § 4 и п. 2 § 16).

Теорему 15а можно существенно усилить. При подходящем определении группового пространства выполняется

Теорема 15б. *Если в проективном пространстве выполняются проективные аксиомы инцидентности для пространств размерности >1, то оно имеет размерность* 3 (*т. е. его точки и гиперплоскости удовлетворяют аксиомам инцидентности трехмерного проективного пространства*).

Мы не станем формулировать полностью аксиомы инцидентности проективного пространства размерности >1, ибо для доказательства теоремы 15б нам понадобятся только немногие следствия из этих аксиом; их мы и сформулируем. 1) Для всяких двух точек найдется гиперплоскость, которой они принадлежат (в одномерном пространстве не так). 2) Пересечение всех гиперплоскостей, содержащих две разные фиксированные точки, — прямая, соединяющая эти точки, — содержит еще хотя бы одну точку и определяется однозначно любой парой своих различных точек. (Слово «прямая» мы понимаем только как «соединительная прямая некоторой пары точек».) 3) Прямая, не принадлежащая гиперплоскости, пересекает ее в единственной точке. 4) Если существуют две разные гиперплоскости, пересекающиеся по прямой, то размерность пространства равна 3.

Теперь пусть дано групповое пространство, в котором выполнены аксиомы инцидентности проективного пространства размерности >1. Станем рассуждать по К. Беккеру-Берке. Как при доказательстве теоремы 15а, устанавливается, что рассматриваемая группа биинволютивна. Для этого используется лишь то, что есть три инволютивных элемента группы a, b, c, для которых $c=ab$. Фиксируем их впредь. *Прямую, соединяющую точки* 1 *и* c, обозначим через $D(c)$.

Взаимно однозначное инволютивное отображение

$$\xi^* = \xi^c \tag{32}$$

отображает множество точек на себя, множество гиперплоскостей на себя (а именно $J\beta$ на $J\beta^c$) и также множество прямых (соединительных прямых пар точек) на себя.

Лемма. *Множество $F(c)$ неподвижных точек отображения* (32) *состоит из точек из $D(c)$ и точек из $J \cap Jc$.*

Докажем лемму в несколько шагов.

(а) *Точки из $F(c)$, принадлежащие J, — это c и точки из $J \cap Jc$.*

Доказательство. Для элемента $d \neq c$ из J равенство $d^c = d$ означает, что dc инволютивно, т. е. $d \in Jc$.

(б) $D(c) \subseteq Ja \cap Jb \subseteq F(c)$.

Доказательство. Так как две точки 1 и c принадлежат двум гиперплоскостям Ja, Jb, то $D(c) \subseteq Ja \cap Jb$. Далее, если $\delta \in Ja \cap Jc$, то δa, δb инволютивны, т. е. $\delta^a = \delta^{-1}$, $\delta^b = \delta^{-1}$, а следовательно, $\delta^c = \delta^{ab} = \delta$.

(в) *Из $\delta \in F(c)$ и $\delta \notin D(c)$ следует $\delta \in J \cap Jc$.*

Доказательство. Так как $\delta \notin D(c)$, то $\delta \neq 1$. Так как точки 1, δ неподвижны при (32), то соединяющая их прямая (отличная от $D(c)$) неподвижна, и однозначно определяемая точка d пересечения этой прямой с гиперплоскостью J (которая в свою очередь неподвижна при (32)) неподвижна. Следовательно, $d \in F(c)$ и в силу 2) $d \neq c$. По (а) заключаем отсюда, что $d \in Jc$. Так как обе точки 1, d принадлежат гиперплоскости Jc, то ей же принадлежит коллинеарная им точка δ. Итак, $\delta \in F(c)$ и $\delta \in Jc$, т. е. $\delta^c = \delta$ и $\delta^c = \delta^{-1}$. Следовательно, δ инволютивно, а точнее, $\delta \in J \cap Jc$.

Утверждениями (а), (б), (в) лемма доказана.

Вернемся к (б). Пересечение $Ja \cap Jb$ двух гиперплоскостей Ja и Jb *«линейно»* (т. е. вместе с каждой парой точек содержит соединяющую их прямую). Но подмножество множества $F(c)$, строго включающее $D(c)$, не может быть линейным, ибо оно по лемме содержит некоторую точку $d \in J \cap Jc$, но по лемме же не содержит никаких точек соединительной прямой 1, d, кроме 1 и d. Следовательно, $D(c) = Ja \cap Jb$. Так как $a \notin Ja$ и $a \in Jb$, то $Ja \neq Jb$.

Итак, существуют две разные гиперплоскости, пересечением которых служит некоторая прямая, что и требовалось доказать.

Объединяя теоремы 15а и 15б, получаем, что справедлива

Теорема 15 (Бэр). *Единственные группы, групповое пространство которых удовлетворяет аксиомам инцидентности проективного пространства размерности >1, — это эллиптические группы движений (группы движений эллиптических плоскостей).*

В заключение объединим новые признаки эллиптической группы движений с найденными ранее (§§ 9, 10):

Теорема XIII. *Следующие группы совпадают*:

1) *эллиптическая группа движений*;

2) *группа движений эллиптической проективно-метрической плоскости*;

3) *группа $O_3^+(K, F)$ при характеристике поля K, отличной от 2, и форме F, тернарной и отделяющей нуль*;

4) *фактор-группа мультипликативной группы тела кватернионов $Q(K; k_1, k_2)$ по ее центру (при характеристике K, отличной от 2)*;

5) *группа, групповое пространство которой удовлетворяет аксиомам инцидентности проективного пространства размерности > 1.*

Задачи. 1. Возьмем трехмерное метрическое векторное пространство над полем K характеристики $\neq 2$ с тернарной отделяющей нуль формой F. Назовем его группу $O_3^+(K, F)$ *транзитивной* *), если всякие два одномерные подпространства векторного пространства переводимы друг в друга некоторым элементом из $O_3^+(K, F)$.

---

*) В этом случае удобнее было бы назвать группу 1-*транзитивной* (одномерно-транзитивной). (*Прим. перев.*).

Если группа $O_3^+(K, F)$ транзитивна, то, нормируя форму F и выбирая подходящий базис, можно привести форму F к нормальному виду $f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, и поле K — пифагорово поле. Обратно, форма f_1 над всяким пифагоровым полем отделяет нуль, а ее группа $O_3^+(K, f_1)$ транзитивна.

2. Представить групповое пространство эллиптической группы движений и ее группу движений посредством кватернионов.

3. Изучить групповое пространство H-группы.

Литература к гл. VI. Райдемайстер [2], Подел и Райдемайстер [1], Моррис [1], Шмидт [1], [2], Бэр [6], Бочек [1], Беккер-Берке [1], Шютте [5]. К п. 2 § 17: Винтерниц [1]. О понятии «двойного смежного класса» (называемого там двойным модулем) см Шпейзер [1]. О поверхностях Клиффорда см. Клейн [2], Кокстер [1] (а также Каган [1] — *Прим. ред.*). К п. 5 § 17: Шур [1], Паш и Ден [1].

ДОБАВЛЕНИЕ

Евклидовыми, гиперболическими и эллиптическими группами движений, которые мы изучали и алгебраически охарактеризовали в предыдущих главах, не исчерпывается множество групп движений, удовлетворяющих системе аксиом п. 2 § 3. Желая обозреть богатство возможных групп движений (иными словами, метрических плоскостей), надо исходить из Основной теоремы п. 11 § 6. Тогда возникает обратная проблема: определить в проективно-метрических группах движений подгруппы, удовлетворяющие этой системе аксиом. Тут мы попадаем в область, в которой многие вопросы еще остаются открытыми. В § 18 мы сделаем некоторые общие замечания, которые пояснят, с каким кругом проблем мы здесь сталкиваемся, а также приведем дальнейшие примеры метрически-неевклидовых групп движений. В § 19 мы обсудим построение метрически-евклидовых групп движений (плоскостей) более систематически.

В последующем вместо «($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$) — группа движений, удовлетворяющая системе аксиом п. 2 § 3», мы будем говорить «($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$) — *метрическая группа движений*».

§ 18. О метрических группах движений

1. О разных системах образующих одной и той же группы. Начнем с того, что поставим следующий

Вопрос. *Пусть* ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$) — *метрическая группа движений. Существует ли система* $\mathfrak{S}' \neq \mathfrak{S}$ *такая, что* ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}'$) — *также метрическая группа движений?*

Если группа ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$) метрически-евклидова, то ответ отрицателен:

Теорема 1. *Если* ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$) *метрически-евклидова, и* ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}'$)— *метрическая группа движений, то* $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}$.

Доказательство. Так как ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$) метрически-евклидова, то в $\mathfrak{S}$ существуют два разных инволютивных элемента, которые можно соединить друг с другом по-разному (ср. гл. 4, введение). Таким образом, для инволютивных элементов из $\mathfrak{G}$ не выполняется закон E однозначности соединения. Следовательно, ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}'$) также метрически-евклидова (теорема 1 из § 7). Во всякой метрической группе движений тот инволютивный элемент σ, для которого существуют другие инволютивные элементы, многократно соединимые с ним, т. е. инволютивный элемент σ со свойством:

Найдутся инволютивные элементы τ, π, ρ *группы такие, что* $\sigma, \tau \mid \pi, \rho$ *и* $\sigma \neq \tau$, $\pi \neq \rho$, (1)

обязательно является осевой симметрией, т. е. принадлежит системе образующих. Обратно, так как в метрически-евклидовой группе движений всякий элемент $\sigma \in \mathfrak{S}$ обладает свойством (1), то в ней система образующих состоит в точности из тех инволютивных элементов из $\mathfrak{S}$, которые обладают свойством (1). Таким образом, в метрически-евклидовой группе движений система образующих $\mathfrak{S}$ однозначно определяется группой $\mathfrak{G}$. Следовательно, $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}$.

То, что для метрически-неевклидовой группы движений ответ на наш вопрос может быть положительным, показывает

Пример 1. $\mathfrak{G}$ — группа $L_2(K)$ над полем K, обладающим двумя разными упорядочениями; $\mathfrak{S}$ (соответственно $\mathfrak{S}'$) — множество инволютивных элементов из $\mathfrak{G}$, определитель которых при первом (соответственно втором) упорядочении K отрицателен. Тогда $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}'$, а $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ и $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — гиперболические группы движений (теорема 3 из § 15).

Таким образом, для гиперболической группы движений, поле концов которой допускает два разных упорядочения, ответ на наш вопрос положителен. С другой стороны, имеет место

Теорема 2. *Если* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — *гиперболическая, а* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — *метрическая группа движений, где* $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}'$, *то* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — *также гиперболическая группа движений. При представлении* $\mathfrak{G}$ *в виде* $L_2(K)$ *имеются два разных упорядочения поля* K *такие, что* $\mathfrak{S}$ *состоит из тех инволютивных элементов из* $\mathfrak{G}$, *определитель которых отрицателен при одном упорядочении* K, *а* $\mathfrak{S}'$ — *из тех инволютивных элементов из* $\mathfrak{G}$, *определитель которых отрицателен при другом упорядочении.*

Доказательство. Так как $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — гиперболическая группа движений, то в силу аксиомы $\sim V^*$ в $\mathfrak{S}$ существуют несоединимые элементы; они удовлетворяют аксиоме UV2. Во всякой метрической группе движений инволютивный элемент σ, обладающий свойством

Существует инволютивный элемент τ *такой, что* σ *и* τ *несоединимы,* (2)

обязательно принадлежит системе образующих. Инволютивные элементы данной группы $\mathfrak{G}$, обладающие свойством (2), принадлежат, следовательно, и $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$. Поэтому и для элементов $\mathfrak{S}'$ выполняются дополнительные аксиомы $\sim V^*$ и UV2; значит, $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — также гиперболическая группа движений. Вторая часть теоремы 2 получается из теоремы 2 § 15.

Этим мы полностью ответили на наш вопрос в случае, когда $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — гиперболическая группа движений.

Если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — эллиптическая группа движений, а $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — метрическая группа движений и $\mathfrak{S}' \neq \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$, и в силу теоремы 10 из § 10 $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ является подэллиптической группой движений. Из существования подэллиптических групп движений вытекает положительный ответ на наш вопрос, а из теоремы VII получается

Пример 2. $\mathfrak{G}$ — группа $O_3^+(K, F)$ над упорядоченным полем K при тернарной и отделяющей нуль форме F; пусть еще форма F неопределенная и нормированная. $\mathfrak{S}$ — множество симметрий из $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{S}'$ — множество тех симметрий из $\mathfrak{G}$, норма которых отрицательна. Тогда $\mathfrak{S}' \neq \mathfrak{S}$ и $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — эллиптическая, а $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — подэллиптическая группа движений.

Задача нахождения алгебраического критерия всех подэллиптических групп движений все еще не решена.

На вопрос, когда группа $\mathfrak{G}$, рассматриваемая как совместно с системой образующих $\mathfrak{S}$, так и совместно с системой образующих $\mathfrak{S}'$, являющейся собственным подмножеством системы $\mathfrak{S}$, будет метрической группой движений, отвечает

Теорема 3. *Если* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ *и* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — *метрические группы движений, а* $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$, *то* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — *эллиптическая, а* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — *подэллиптическая группа движений.*

Доказательство. Пусть σ_1 — инволютивный элемент из $\mathfrak{S}$ и $\sigma_1 \notin \mathfrak{S}'$. Тогда в $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ элемент σ_1 является центральной симметрией, т. е. представим в виде $\sigma_1 = \sigma_2\sigma_3$, где $\sigma_2, \sigma_3 \in \mathfrak{S}'$. Так как $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$, то $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathfrak{S}$. Следовательно, в $\mathfrak{S}$ имеются элементы, для которых $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$, поэтому $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — эллиптическая группа движений. По теореме 10 из § 10 тогда $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — подэллиптическая группа движений.

2. Проективно-метрические группы движений. Мы видели в главе 3, как можно описать группы движений проективно-метрических плоскостей в виде абстрактных групп, порождаемых своими инволютивными элементами (причем за систему образующих мы всегда принимаем множество «порождающих симметрий», см. п. 5 § 5):

Группы движений особых проективно-метрических плоскостей являются евклидовыми группами движений (теорема IV); система порождающих симметрий при этом всегда является системой образующих евклидовой группы движений, т. е.

множеством инволютивных элементов группы, обладающих свойством (1).

Группы движений эллиптической (соответственно гиперболической) проективно-метрической плоскости — это эллиптическая группа (соответственно H-группа) движений (теоремы V и IX); порождающие симметрии и в том и в другом случае — все инволютивные элементы группы.

Во всякой проективно-метрической группе движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ система порождающих симметрий $\mathfrak{S}$ однозначно определяется группой $\mathfrak{G}$.

3. Полные метрические группы движений. Если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — евклидова или эллиптическая группа движений, то $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ к тому же является проективно-метрической группой движений. Евклидовы и эллиптические группы движений — это единственные метрические группы движений с этим свойством (ср. п. 12 § 6 и п. 1 § 9). Если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — гиперболическая или подэллиптическая группа движений, а $\mathfrak{S}'$ — множество инволютивных элементов из $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$ и $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — проективно-метрическая группа движений (ср. п. 5 § 14 и теорему 21 из § 6); в том и в другом случаях расширением системы образующих получается проективно-метрическая группа движений.

Назовем метрическую группу движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ *полной*, если при подходяще подобранной системе образующих $\mathfrak{S}'$ группа $\mathfrak{G}$ является проективно-метрической группой движений. Тогда справедлива

Теорема 4. *Полные метрические группы движений — это евклидовы, гиперболические, эллиптические и подэллиптические группы движений.*

Доказательство. Остается показать, что только названные группы являются полными метрическими группами движений. Пусть $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — метрическая группа движения, т. е. существует такая система $\mathfrak{S}'$, что $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — проективно-метрическая группа движений, как это описывалось выше.

Если группа $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ евклидова, то по теореме 1 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$, т. е. и группа $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ евклидова. Если группа $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ эллиптическая (система образующих $\mathfrak{S}'$ — множество инволютивных элементов $\mathfrak{G}$), то при $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$ группа $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ эллиптическая, а при $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$ — подэллиптическая (теорема 10 из § 10). Если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — H-группа (система образующих $\mathfrak{S}'$ — множество инволютивных элементов из $\mathfrak{G}$), то группа $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ гиперболическая, ибо, обращаясь к доказательству первого утверждения теоремы 2, получаем, что справедлива общая

Теорема 2′. *Если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — H-группа, а $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — метрическая группа движений, то $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — гиперболическая группа движений.*

Если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — метрическая группа движений, то мы называем систему образующих $\mathfrak{S}$ *максимальной* в $\mathfrak{G}$, если нет никакой системы $\mathfrak{S}'$, строго содержащей $\mathfrak{S}$, такой, что $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ является метрической группой движений. По теореме 3 единственная метрическая группа движений, в которой $\mathfrak{S}$ не максимальна в $\mathfrak{G}$, — это подэллиптическая группа движений. Итак, справедлива

Теорема 5. *Евклидова, гиперболическая и эллиптическая группы движений — это те полные метрические группы движений, в которых система образующих является максимальной.*

4. Метрические подгруппы групп движений. Пусть $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — метрическая или проективно-метрическая группа движений, а $\mathfrak{S}'$ — подсистема $\mathfrak{S}$. Обозначим подгруппу группы $\mathfrak{G}$, порожденную $\mathfrak{S}'$, через $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}')$. Будем говорить, что $\mathfrak{S}'$ *определяет метрическую подгруппу движений группы* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, если $(\mathfrak{G}(\mathfrak{S}'), \mathfrak{S}')$ — метрическая группа движений.

Если собственная подсистема $\mathfrak{S}'$ системы $\mathfrak{S}$ определяет метрическую подгруппу группы $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, то, вообще говоря, $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}')$ — собственная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. В силу теорем 3 и 2′ единственными случаями, когда $\mathfrak{S}' \subsetneq \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}') = \mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{G}$, являются такие: группа $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ эллиптическая, а группа $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ подэллиптическая; $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — H-группа, а $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}')$ — гиперболическая группа движений.

Легко доказать, что справедлива

Теорема 6. *Если $\mathfrak{S}'$ и $\mathfrak{S}''$ определяют метрические подгруппы движений метрической или проективно-метрической группы движений* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, *а в $\mathfrak{S}' \cap \mathfrak{S}''$ существуют три элемента, удовлетворяющие аксиоме* D, *то и $\mathfrak{S}' \cap \mathfrak{S}''$ определяет метрическую подгруппу движений группы* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$.

При этом для группы $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}' \cap \mathfrak{S}'')$ выполняется

Следствие. *Множество собственных движений из $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}' \cap \mathfrak{S}'')$ совпадает с пересечением множеств собственных движений из $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}')$ и собственных движений из $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}'')$; множество зеркальных движений из $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}' \cap \mathfrak{S}'')$ совпадает с пересечением множеств зеркальных движений из $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}')$ и зеркальных движений из $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}'')$.*

5. Подчиненные метрические подгруппы групп движений. В силу Основной теоремы § 6 всякую метрическую группу движений $(\mathfrak{G}', \mathfrak{S}')$ можно представить в виде метрической подгруппы движений группы движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ ее проективно-метрической идеальной плоскости. При этом множество *центральных симметрий* метрической подгруппы $(\mathfrak{G}', \mathfrak{S}')$, т. е. множество инволютивных элементов, представимых в виде $\sigma_1\sigma_2$, где $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}'$, обозначим через $\mathfrak{P}'$. На идеальной плоскости выполняется теорема 6 из § 6: через собственную идеальную точку проходят только *собственные* идеальные прямые. Система $\mathfrak{S}$ всех порождающих симметрий проективно-метрической идеальной плоскости и подсистема $\mathfrak{S}'$ симметрий с собственными осями тогда связаны таким соотношением:

$$\textit{Если } \pi \in \mathfrak{P}', \quad \sigma \in \mathfrak{S} \quad \textit{и} \quad \pi | \sigma, \quad \textit{то} \quad \sigma \in \mathfrak{S}'. \qquad (\mathrm{Z})$$

Вообще если дана проективно-метрическая группа движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, а $\mathfrak{S}'$ — подсистема системы $\mathfrak{S}$, определяющая метрическую подгруппу движений, причем выполняется условие (Z), то мы говорим, что $\mathfrak{S}'$ определяет метрическую подгруппу движений, которая *подчинена* группе движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$.

Если $\mathfrak{S}'$ — такая подсистема, то можно установить (задача из п. 11 § 6), что группа $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ изоморфна группе движений идеальной плоскости $(\mathfrak{G}(\mathfrak{S}'), \mathfrak{S}')$. Таким образом, условие подчиненности (Z) является характеристическим признаком отношения метрической группы движений к проективно-метрической группе движений ее идеальной плоскости.

Следовательно, всякая метрическая группа движений подчинена некоторой однозначно определенной проективно-метрической группе движений как ее метрическая подгруппа движений. Поэтому можно классифицировать метрические группы движений по тому признаку, подчинены ли они особой, гиперболической или эллиптической проективно-метрической группе движений. Задачу определения всех метрических групп движений можно поставить в таком виде: для всех проективно-метрических групп движений найти все подчиненные им метрические подгруппы движений.

Не всякой проективно-метрической группе движений подчинена некоторая метрическая подгруппа движений. Иначе говоря, не всякая проективно-метрическая плоскость является идеальной плоскостью какой-нибудь метрической плоскости. Поэтому, в частности, встает задача: определить *множество* **P** *тех проективно-метрических групп движений, которым подчинена хотя бы одна метрическая подгруппа движений.* Все евклидовы и все эллиптические группы движений принадлежат множеству **P**, ибо всякая из них является подчиненной метрической подгруппой движений самой себя. Вопрос же о том, какие H-группы принадлежат множеству **P**, еще открыт. Например, конечные H-группы в силу теоремы III (§ 6) не принадлежат множеству **P**. С другой стороны, по теореме XI (§ 15) все H-группы, поля концов которых упорядочиваемы, принадлежат множеству **P**.

В этой связи следует упомянуть еще один смежный вопрос: всякая ли метрическая группа движений является метрической подгруппой некоторой евклидовой, гиперболической или эллиптической группы движений? На него надо ответить отрицательно, если в множестве P имеются H-группы с неупорядочиваемыми полями концов. Но мы не станем подробнее задерживаться здесь на этой проблеме.

Задача. Та H-группа, каждый элемент поля концов которой является квадратом, не принадлежит P.

6. Примеры. В силу теоремы 6 о пересечении из двух подчиненных метрических подгрупп движения данной проективно-метрической группы движений снова получается подчиненная метрическая подгруппа движений. Рассмотрим группу $L_2(K)$ над полем K, обладающим двумя разными упорядочениями. Применим теорему о пересечении к двум гиперболическим группам движения, которые получаются каждая при своем упорядочении поля K (ср. пример 1):

Пример 3. $\mathfrak{G}$ — это $L_2(K)$ над полем K, обладающим двумя разными упорядочениями; $\mathfrak{S}$ — множество инволютивных элементов из $\mathfrak{G}$. Подчиненная метрическая подгруппа движений: $\mathfrak{S}^*$ — множество элементов из $\mathfrak{S}$, определитель которых при обоих упорядочениях поля K отрицателен; $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}^*)$ — множество элементов из $\mathfrak{G}$, определитель которых либо при обоих упорядочениях положителен, либо при обоих упорядочениях отрицателен.

Теорему 6 о пересечении можно распространить на пересечение более чем двух подгрупп движения. Можно построить пересечение всех гиперболических групп движений, которые возникают из всех возможных упорядочений формально вещественного поля K для группы $L_2(K)$. Получаем

Пример 4. $\mathfrak{G}$ — это $L_2(K)$ над формально вещественным полем K; $\mathfrak{S}$ — множество инволютивных элементов из $\mathfrak{G}$. Подчиненная метрическая подгруппа движений: $\mathfrak{S}^*$ — множество элементов из $\mathfrak{S}$, определитель которых равен минус сумме квадратов; $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}^*)$ — множество тех элементов из $\mathfrak{G}$, определитель которых равен либо сумме квадратов, либо минус сумме квадратов.

В частности, к $\mathfrak{S}^*$ относятся инволютивные элементы, определитель которых равен $\{-1\}$ и об особых свойствах которых мы говорили в п. 7 § 11. Конкретизацией примера 4 является

Пример 5. $\mathfrak{G}$ — это $L_2(K)$ над пифагоровым полем K; $\mathfrak{S}$ — множество инволютивных элементов из $\mathfrak{G}$. Подчиненная метрическая подгруппа движений: $\mathfrak{S}^*$ — множество тех элементов из $\mathfrak{S}$, для которых определитель равен $\{-1\}$; $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}^*)$ — множество тех элементов из $\mathfrak{G}$, определитель которых равен $\{1\}$ или $\{-1\}$.

Метрические подгруппы движений 3, 4, 5 — это подгруппы движений гиперболической группы движений. В них выполняются все аксиомы гиперболической группы движений, кроме аксиомы H. (Она не выполняется в 3, а в 4 и 5 выполняется только тогда, когда поле K однозначно упорядочиваемо.)

Всякое пифагорово поле упорядочиваемо, а так как евклидова координатная плоскость над упорядоченным пифагоровым полем хорошо известна (это плоскость, в которой выполняются относящиеся к случаю плоскости гильбертовы аксиомы сочетания, порядка, конгруэнтности и евклидовой параллельности), то можно прояснить пример 5, пользуясь интерпретацией на евклидовой координатной плоскости над некоторым упорядоченным пифагоровым полем. Рассмотрим единичную окружность — $x^2 - y^2 + 1 = 0$. «Секущая», т. е. прямая, которая встречает единичную окружность в двух точках, содержит точки внутренности круга. Однако прямая, содержащая точки внутренности круга, не обязана быть секущей. (Она является секущей только в том случае, если каждый положительный элемент поля K является квадратом.) Рассмотрим теперь точки X, обладающие свойством:

Всякая проходящая через X прямая является секущей (3)

(рис. 149). Такой точкой является, например, центр единичной окружности. При $X = (x, y)$ условие (3) равносильно тому, что $-x^2 - y^2 + 1$ является отличным от нуля квадратом в K. *Точки со свойством* (3) *и секущие — это множество точек и прямых метрической плоскости, которое является подплоскостью гиперболической плоскости, образованной всей внутренностью единичной окружности.*

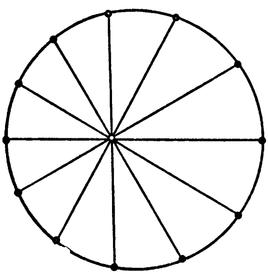


Рис. 149.

На метрической плоскости $E(K)$ всякий угол можно разделить пополам. Отрезок же не всегда можно разделить пополам, как видно из такого частного случая:

Пусть, пользуясь обозначением Гильберта, Ω — наименьшее пифагорово подполе поля вещественных чисел. Ω состоит из всех тех алгебраических чисел, которые получаются из единицы конечным числом рациональных операций и операций $\sqrt{1+c^2}$. Все элементы из Ω *вполне вещественны*, т. е они и сопряженные им числа вещественны. Рассмотрим случай $K = \Omega$. $O = (0, 0)$ и $A = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ — точки метрической плоскости $E(\Omega)$. Точки $M = (2 - \sqrt{3}, 0)$ и $M' = (2 + \sqrt{3}, 0)$ полярны по отношению к единичной окружности, а O, A гармонически разделяют M, M'. Серединой O и A поэтому может быть только точка M внутренности круга. Но M — не точка из $E(\Omega)$, ибо опущенный из M на ось абсцисс перпендикуляр не является секущей. Пересечение перпендикуляра с единичной окружностью имеет ординату $\sqrt{-6+4\sqrt{3}}$, а это число не вполне вещественно и поэтому не содержится в Ω.

Следовательно, *группа движений метрической плоскости $E(\Omega)$ не обладает свободной подвижностью.* Заметим, что движение OA не является квадратом, хотя оба множителя — квадраты. Таким образом, в метрической группе движений произведение двух квадратов не обязано быть квадратом.

Если в проективно-метрической группе движений $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ система $\mathfrak{S}'$ является инвариантной в $\mathfrak{G}$ подсистемой системы $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}')$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$. Если при этом $(\mathfrak{G}(\mathfrak{S}'), \mathfrak{S}')$ — метрическая группа движений, то мы говорим, что $\mathfrak{S}'$ определяет *инвариантную* метрическую подгруппу движений группы $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$.

Очевидно, что гиперболическая группа движений всегда является инвариантной подгруппой движений той H-группы, которой она подчинена. Если, как в примерах 3, 4, 5, в H-группе с формально вещественным полем концов построить по теореме 6 пересечение произвольного числа гиперболических групп движений, которые определены каждая некоторым упорядочением поля концов, то получим снова инвариантную метрическую подгруппу движений данной H-группы (ибо это есть пересечение инвариантных подгрупп).

Зададимся целью определить все инвариантные метрические подгруппы движений H-группы.

Теорема 7. *Если* $(\mathfrak{G}', \mathfrak{S}')$ — *инвариантная метрическая подгруппа движений некоторой* H-*группы* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, *то* $(\mathfrak{G}', \mathfrak{S}')$ *подчинена* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, *а* $\mathfrak{S}'$ *содержит множество* $\mathfrak{T}$ (*определенное в* п. 7 § 11) *всех элементов из* $\mathfrak{S}$, *принадлежащих концам.*

Через $\mathfrak{P}'$ снова обозначим множество *центральных симметрий* группы $(\mathfrak{G}', \mathfrak{S}')$.

Доказательство теоремы 7. Рассмотрим элемент $\pi \in \mathfrak{P}'$ и произвольный элемент $\sigma \in \mathfrak{S}$, где $\sigma|\pi$. Выберем $\rho \neq \pi$, $\pi\sigma$ из $\mathfrak{S}$, где $\rho|\sigma$. Тогда $\pi^\rho \neq \pi$ и $\pi^\rho|\sigma$, т. е. σ соединяет π и π^ρ. В силу инвариантности $\pi^\rho \in \mathfrak{P}'$. Из $\pi, \pi^\rho \in \mathfrak{P}'$ по аксиоме 1 вытекает, что $(\pi, \pi^\rho) = \sigma \in \mathfrak{S}'$. Следовательно, выполняется условие подчиненности:

$$\textit{Если } \pi \in \mathfrak{P}', \quad \sigma \in \mathfrak{S} \quad \textit{и} \quad \sigma|\pi, \quad \textit{то} \quad \sigma \in \mathfrak{S}'. \tag{4}$$

Так как по п. 7 § 11 для заданного $\pi \in \mathfrak{P}'$ найдется $\tau \in \mathfrak{T}$ такой, что $\tau|\pi$, то по (4) существуют элементы из $\mathfrak{T}$, принадлежащие $\mathfrak{S}'$. Так как $\mathfrak{T}$ — класс сопряженных элементов из $\mathfrak{G}$ (п. 7 § 11), а $\mathfrak{S}'$ инвариантна в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{S}'$.

Дополнительно заметим, что так как разные элементы из $\mathfrak{T}$, принадлежащие одному концу, не соединимы уже в $\mathfrak{S}$, то в $\mathfrak{S}'$ имеются несоединимые элементы. Следовательно, группа $(\mathfrak{G}', \mathfrak{S}')$ не эллиптическая; поэтому элементы из $\mathfrak{T}$ не принадлежат $\mathfrak{P}'$.

Если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ — H-группа над полем концов K, то, представляя $\mathfrak{G}$ в виде группы $L_2(K)$, можно каждому $\alpha \in \mathfrak{G}$ сопоставить его определитель (норму) $|\alpha|$ и тем самым гомоморфно отобразить группу $\mathfrak{G}$ на классы квадратов $\neq \{0\}$ из K. При этом $\mathfrak{T}$ состоит из тех инволютивных элементов τ, для которых $|\tau| = \{-1\}$ (п. 7 § 11). Если $\mathfrak{P}$ — комплекс из $\mathfrak{G}$, то обозначим через $|\mathfrak{P}|$ множество всех элементов из K, которые принадлежат классу квадратов $|\alpha|$ при $\alpha \in \mathfrak{P}$.

Пусть снова $(\mathfrak{G}', \mathfrak{S}')$ — инвариантная метрическая подгруппа движений H-группы $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$. Попробуем определить множество $|\mathfrak{S}'|$. Так как группа $(\mathfrak{G}', \mathfrak{S}')$ не эллиптическая, то собственные движения из $\mathfrak{G}'$ образуют подгруппу $\mathfrak{G}'_c$ индекса 2 в $\mathfrak{G}'$ (через $\mathfrak{G}'_з$ обозначаем ее смежный класс — зеркальные движения). Используя то, что $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{S}'$, покажем:

$$|\mathfrak{G}'_c| = -|\mathfrak{G}'_з| = -|\mathfrak{S}'| = |\mathfrak{P}'|. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathfrak{G}'_c$. Тогда α представимо в виде $\alpha = \sigma_1\sigma_2$, где $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}'$. По п. 7 § 11 α (как всякий элемент из $\mathfrak{G}$) имеет также вид $\alpha = \sigma_3\tau$, где $\sigma_3 \in \mathfrak{S}$, $\tau \in \mathfrak{T}$. Как инволютивное произведение трех элементов из $\mathfrak{S}'$, элемент $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2\tau$, согласно теореме 21 из § 3, принадлежит $\mathfrak{S}'$. Тогда $|\alpha| = |\sigma_3\tau| = -|\sigma_3| \subseteq -|\mathfrak{S}'|$; значит, $|\mathfrak{G}'_c| \subseteq -|\mathfrak{S}'|$.

Пусть далее $\sigma \in \mathfrak{S}'$. По п. 7 § 11 существует $\tau \in \mathfrak{T}$, где $\tau|\sigma$. Тогда $\sigma\tau \in \mathfrak{P}'$ и $-|\sigma| = |\sigma\tau| \subseteq |\mathfrak{P}'|$. Значит, $-|\mathfrak{S}'| \subseteq |\mathfrak{P}'|$.

Итак, $|\mathfrak{G}'_c| \subseteq -|\mathfrak{S}'| \subseteq |\mathfrak{P}'|$. В этом соотношении на самом деле даже имеют место знаки равенства, ибо $\mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{G}'_c$, т. е. $|\mathfrak{P}'| \subseteq |\mathfrak{G}'_c|$. Наконец, если фиксировать $\tau \in \mathfrak{T}$, то, когда α пробегает все элементы из $\mathfrak{G}'_c$, произведение $\alpha\tau$ пробегает все элементы из $\mathfrak{G}'_з$. В силу $-|\alpha| = |\alpha\tau|$ поэтому $-|\mathfrak{G}'_c| = |\mathfrak{G}'_з|$.

Так как $\mathfrak{G}'_з$ — группа, то $|\mathfrak{G}'_з|$ замкнуто относительно умножения и содержит определитель единицы, т. е. квадратичный класс $\{1\}$. Так как, как отмечалось, ни один элемент из $\mathfrak{T}$ не принадлежит $\mathfrak{P}'$, то класс $\{-1\}$ не принадлежит $|\mathfrak{P}'|$, а значит, в силу (5) не содержится в $|\mathfrak{G}'_c|$.

Множество $|\mathfrak{G}'_c|$ замкнуто также и относительно сложения. Для этого в силу тождества $x + y = x(1 + (x^{-1})^2xy)$, где $x \neq 0$, достаточно проверить, что

$$\textit{Из } u \in |\mathfrak{G}'_c| \textit{ следует } 1 + u \in |\mathfrak{G}'_c|. \tag{6}$$

Доказательство (6). Имеем $\{u\} \neq \{1\}$, т. е. $-u$ — не квадрат в K.

По условию и (5) существует $\pi \in \mathfrak{P}'$, где $|\pi| = \{u\}$. Элемент π представим в виде $\pi = \sigma_1\sigma_2$, где $\sigma_1 \in \mathfrak{T}$, $\sigma_2 \in \mathfrak{S}'$. Тогда $|\sigma_1| = \{-1\}$ и $|\sigma_2| = -|\sigma_1\sigma_2| = -\pi = -\{u\}$. Определители элементов $\sigma \in \mathfrak{S}$, где $\sigma|\pi$, как мы покажем далее, — это классы квадратов $\{-x^2 - uy^2\} = -\{x^2 + uy^2\}$, где $x, y \in K$, причем x и y не равны нулю одновременно. В силу (4) все эти σ содержатся в $\mathfrak{S}'$. Среди них имеется $\sigma_0 \in \mathfrak{S}'$, где $|\sigma_0| = -\{1 + u\}$. Значит, $-(1 + u) \in |\mathfrak{S}'|$ и по (5) имеем $1 + u \in |\mathfrak{G}'_c|$.

Чтобы восстановить пропущенный пункт, рассмотрим трехмерное векторное пространство («неоднородных») матриц второго порядка **R**, **S**, ... со следом нуль над полем K, метризованное, как в п. 4 § 10, посредством формы g_0. Инволютивные элементы ρ, σ, ... группы $L_2(K)$, которыми мы заменим элементы из $\mathfrak{S}$, — это «однородные» матрицы второго порядка со следом нуль и ненулевым определителем; поэтому они образуют в векторном пространстве неизотропное одномерное подпространство. Если ρ, σ представить матрицами $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ векторного пространства, то $\sigma|\rho$ имеет место тогда и только тогда, когда $g_0(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = 0$, т. е. когда $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ взаимно ортогональны.

Теперь представим данные элементы π, σ_1, σ_2 матрицами $\mathbf{P}$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ с определителями $g_0(\mathbf{P}, \mathbf{P}) = u$, $g_0(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_1) = -1$, $g_0(\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_2) = -u$ и рассмотрим двумерное подпространство T, состоящее из матриц $\mathbf{S}$, где $g_0(\mathbf{S}, \mathbf{P}) = 0$. В силу $\sigma_1, \sigma_2 | \pi$ матрицы $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ принадлежат T, а в силу $\sigma_1 | \sigma_2$ они образуют ортогональный базис в T. Следовательно, элементы $\mathbf{S}$ подпространства T — это матрицы $x\mathbf{S}_1 + y\mathbf{S}_2$, где $x, y \in K$, а для их определителей имеем

$$g_0(\mathbf{S}, \mathbf{S}) = x^2 g_0(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_1) + y^2 g_0(\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_2) = -x^2 - uy^2.$$

Инволютивные элементы группы σ, где $\sigma|\pi$, представляются такими матрицами $\mathbf{S}$ из T, для которых $g_0(\mathbf{S}, \mathbf{S}) \neq 0$. Тогда соответствующие $|\sigma|$ — в точности квадратичные классы $\{-x^2 - uy^2\}$, отличные от $\{0\}$. Так как $-u$ в K не является квадратом, то $-x^2 - uy^2 = 0$ только при $x = y = 0$.

Следовательно, $|\mathfrak{G}'_c|$ — подмножество M поля K, выделяемое свойством:

M замкнуто относительно сложения и умножения, содержит все квадраты ненулевых элементов из K, но не содержит -1. (7)

Из наличия такого подмножества вытекает, так как оно содержит все суммы квадратов ненулевых элементов из K, что -1 не является суммой квадратов в K. Итак, имеет место

Теорема 8. *Только в H-группах с формально вещественным полем концов имеются инвариантные метрические подгруппы движений.*

Рассуждая далее, получаем: если $(\mathfrak{G}', \mathfrak{S}')$ — инвариантная метрическая подгруппа движений H-группы $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ с полем концов K, то существует такое подмножество $M \subseteq K$ со свойством (7), что

$$|\mathfrak{G}'_c| = |\mathfrak{P}'| = M, \quad |\mathfrak{G}'_з| = |\mathfrak{S}'| = -M. \tag{8}$$

Так как всякие два элемента из $\mathfrak{S}$ с равными определителями можно перевести внутренним автоморфизмом $\mathfrak{G}$ один в другой, то $\mathfrak{S}'$ и $\mathfrak{P}'$ в силу инвариантности содержат все элементы из $\mathfrak{S}$, определители которых принадлежат соответственно $-M$ и M; $\mathfrak{G}'_c$ и $\mathfrak{G}'_з$ содержат все элементы из $\mathfrak{G}$, определители которых принадлежат M или соответственно $-M$.

Обратно, если M — произвольное подмножество K со свойством (7), то система $\mathfrak{S}'$ всех элементов из $\mathfrak{S}$, определители которых принадлежат $-M$, инвариантна в $\mathfrak{G}$, так как вместе со всяким элементом из $\mathfrak{S}$ она содержит все элементы из $\mathfrak{S}$ с равными определителями. Эта система, как впервые показал Клингенберг, определяет метрическую подгруппу движений группы $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$. [Мы можем сейчас проверить это проще, чем он, рассуждая как в теореме VII и теореме 5 из § 14. Относительно аксиомы 1 надо иметь в виду, что из $|\pi| = \{u\} \in M$ и $\sigma|\pi$ следует $|\sigma| = -\{x^2 + uy^2\} \in -M$.]

Таким образом, все инвариантные метрические подгруппы движений H-группы, поле концов которой в силу теоремы 8 без ограничения общности можно считать формально вещественным, алгебраически описываются так:

Теорема 9. *Возьмем H-группу $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ с формально вещественным полем концов K, представленную в виде $L_2(K)$, и множества инволютивных элементов этой группы.*

Подсистема $\mathfrak{S}'$ системы $\mathfrak{S}$ определяет инвариантную метрическую подгруппу движений группы $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда существует подмножество M поля K, обладающее свойством (7) *и такое, что $\mathfrak{S}'$ — множество всех элементов из $\mathfrak{S}$, определитель которых принадлежит $-M$.*

Как мы знаем, при этом получается гиперболическая группа движений тогда и только тогда, когда M — *положительная область* формально вещественного поля K, т. е. аддитивно и мультипликативно замкнутое подмножество поля K, содержащее в точности один из двух элементов z и $-z$, где $z \neq 0$, однако не содержащее нуля. Очевидно, пересечение любого числа положительных областей поля K обладает свойством (7). Обратно, как видно из рассуждений Бурбаки ([1], § 2 гл. VI) и Пиккерта ([2], § 38), относящихся к существованию положительных областей в формально вещественных полях, всякое подмножество M поля K, обладающее свойством (7), можно дополнить до положительной области в K, причем M является пересечением всех содержащих его положительных областей K. Итак, *подмножества формально вещественного поля, обладающие свойством* (7), — *это пересечения положительных областей* K. На языке групп движений мы можем переформулировать наш результат следующим образом:

Теорема 10. *Во всякой H-группе те системы инволютивных элементов, которые определяют инвариантные метрические подгруппы движений, являются пересечениями систем инволютивных элементов, которые определяют подчиненные H-группе гиперболические группы движений.*

В частности, всякая инвариантная метрическая подгруппа движений H-группы может быть расширена до гиперболической группы движений.

В заключение напомним о построенных Деном [1] «нележандровых» плоскостях, которые показывают, как в некоторой обыкновенной проективно-метрической группе движений получить неинвариантные метрические подгруппы движений.

Задачи. 1. Особая проективно-метрическая группа движений не содержит, кроме самой себя, никаких инвариантных метрических подгрупп движений.

2. Метрическая подгруппа движений $(\mathfrak{G}', \mathfrak{S}')$ некоторой H-группы $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ инвариантна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}'$ содержит множество $\mathfrak{T}$ всех элементов из $\mathfrak{G}$, которые принадлежат концам.

Литература к § 18. Гильберт [1], Ден [1], Паш и Ден [1], Клингенберг [2], [5]. О теории формально вещественных полей см. Артин и Шрейер [1], Артин [1], Ван дер Варден [1], Бурбаки [1], Пиккерт [2].

§ 19. Метрически-евклидовы плоскости

В этом параграфе мы займемся проблемой определения всех метрически-евклидовых плоскостей. Чтобы упростить рассуждения, мы все же не будем рассматривать те плоскости, в которых прямой угол не имеет биссектрисы.

Для всякой метрически-евклидовой плоскости существует евклидова плоскость, в которой она содержится как подчиненная подплоскость.

Если подплоскость содержит точку евклидовой плоскости, то она содержит все проходящие через нее прямые евклидовой плоскости. (Z′)

Относительно евклидовой плоскости и подчиненной ей метрически-евклидовой подплоскости справедливо утверждение: если прямой угол имеет биссектрису в одной из них, то это верно и в другой. Поэтому сформулируем нашу задачу так: *найти метрически-евклидовы подплоскости, подчиненные евклидовой плоскости, в которой прямой угол делится пополам.* Если такая подплоскость является собственной подплоскостью, то в ней выполняется евклидова аксиома параллельных.

1. Геометрический признак метрически-евклидовых подплоскостей. Теорема 1. *Множество точек и прямых метрической плоскости образует метрическую подплоскость тогда и только тогда, когда оно содержит*:

1) *три прямые, удовлетворяющие аксиоме* D;

2) *соединительную прямую любых двух точек*;

3) *точку пересечения всяких двух перпендикулярных прямых*;

4) *перпендикуляр, опущенный из любой точки на любую прямую*;

5) *четвертую симметричную точку к всякой тройке коллинеарных точек.*

Доказательство. Ясно, что эти требования необходимы. Пусть теперь в метрической плоскости дано множество $\mathfrak{A}$ точек и прямых, удовлетворяющее условиям 1) — 5). Тогда видно, что в $\mathfrak{A}$ выполнены требования существования метрической плоскости (групповой плоскости). Для этого напомним задачу 1 из п. 4 § 3. Особого внимания требует только доказательство того, что $\mathfrak{A}$ вместе со всякими тремя своими прямыми a, b, c, имеющими общую точку P, содержит также четвертую симметричную к ним прямую $d=abc$. Если $a \neq c$, то можно построить d в $\mathfrak{A}$ с помощью конфигурации теоремы о перпендикулярах. Если же $a=c$, то рассмотрим перпендикуляр a' к $a=c$, восставленный в P (a' содержится в $\mathfrak{A}$), и построим содержащуюся в $\mathfrak{A}$ прямую $aba'=d'$, определяемую конфигурацией перпендикуляров, так как $a \neq a'$, а затем определим d как перпендикуляр из P на d'.

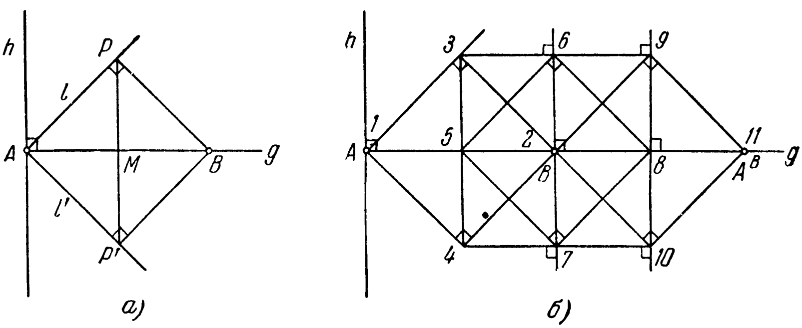


Рис. 150.

Если A и A' — две точки евклидовой плоскости, то множество точек, получаемых пересечением двух ортогональных прямых, одна из которых проходит через A, а другая через A', будем называть *кругом Фалеса с диаметром* A, A'.

Теорема 2. *В евклидовой плоскости, в которой прямой угол имеет биссектрису, множество точек является множеством точек подчиненной метрически-евклидовой подплоскости тогда и только тогда, когда в нем имеются по крайней мере две точки, и вместе с каждой парой* A, A' *точек оно содержит все точки круга Фалеса с диаметром* A, A'.

Доказательство. Опять-таки необходимость критерия очевидна. Пусть, обратно, дано такое точечное множество. Мы утверждаем, что тогда множество $\mathfrak{A}$ этих точек и тех прямых, которые содержат хотя бы одну точку из этого множества, удовлетворяет условиям (Z′) и 1)—5) теоремы 1. То, что в $\mathfrak{A}$ выполняются (Z′) и 1) —4), видно непосредственно. Остается проверить 5). Для этого покажем, что

Вместе с точками A и B множество $\mathfrak{A}$ содержит их середину и симметричную точку A^B.

Середина находится следующей осуществимой в $\mathfrak{A}$ конструкцией. Проведем соединительную прямую $g=(A, B)$ и восставим к ней в A перпендикуляр h (рис. 150, *а*). Затем проведем обе биссектрисы l, l' пары g, h и опустим на них из B перпендикуляры с основаниями P и P'. Соединим P и P' и пересечем эту прямую, перпендикулярную g, с g. Симметричную точку A^B получаем, начиная с той же конструкции и пользуясь указанной на рис. 150, *б* конфигурацией (нумерация соответствует порядку появления точек при построении).

Пусть теперь A, B, C — три коллинеарные точки из $\mathfrak{A}$. Построим середину M точек A и C и симметричную точку B^M. M и B^M содержатся в $\mathfrak{A}$ и $ABC=ABA^M=ABM\cdot AM=MBA\cdot AM=B^M$, т. е. B^M — четвертая симметричная точка к A, B, C.

2. Алгебраический признак метрически-евклидовых подплоскостей. В последующем рассматриваем евклидовы координатные плоскости с постоянной ортогональности 1 над полем K, в котором -1 не является квадратом (ср. § 13). В такой плоскости прямой угол можно разделить пополам.

Определим подчиненные метрически евклидовы подплоскости, содержащие начало $O=(0, 0)$.

Такая подплоскость содержит перпендикулярные координатные оси [0, 1, 0] и [1, 0, 0]. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех абсцисс точек подплоскости. Тогда утверждение: (a, b) принадлежит подплоскости — равносильно тому, что $a, b\in\mathfrak{M}$. В самом деле, если точка (a, b) принадлежит подплоскости, то подплоскости принадлежат основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на оси $(a, 0)$ и $(0, b)$. Вместе с точкой $(0, b)$ подплоскости принадлежит также точка $(b, 0)$, симметричная относительно биссектрисы [1, —1, 0] координатных осей. Значит, $a, b\in\mathfrak{M}$. Рассуждение можно обратить. Так как $\mathfrak{M}$ является и множеством ординат точек подплоскости, то назовем $\mathfrak{M}$ *координатным множеством подплоскости.*

Справедливо утверждение: *координатное множество метрически-евклидовой подплоскости, подчиненной данной евклидовой плоскости и содержащей начало, — это отличный от нуля подмодуль*) поля K, группа мультипликативных операторов*

---

*) Здесь терминология несколько расходится с привычной нашему читателю. *Модулем* (*идеалом*) в кольце принято считать подмножество элементов этого кольца, операторами для которых служат все элементы этого кольца. Поэтому обычно говорится, что поле не имеет подмодулей (собственных идеалов). У автора же множество операторов — это *собственное* подмножество элементов поля. (*Прим. перев.*)

которого содержит элементы поля вида

$$\frac{1}{1+c^2} \quad \textit{при} \quad c \in K. \tag{1}$$

Подмодулем поля K мы называем подгруппу аддитивной группы поля K. То, что $z \in K$ является *мультипликативным оператором* подмодуля $\mathfrak{M}$, означает, что из $a \in \mathfrak{M}$ вытекает $za \in \mathfrak{M}$

Доказательство. Подплоскость вместе с двумя точками $A=(a, 0)$ и $B=(b, 0)$ содержит четвертые симметричные точки $AOB=C$ и $ABO=D$, а именно, $C=(a+b, 0)$ и $D=(a-b, 0)$. Из $a, b \in \mathfrak{M}$ следует тогда $a \pm b \in \mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{M}$ — модуль. Перпендикуляр, опущенный из точки $A=(a, 0)$ подплоскости на проходящую через начало прямую $[c, -1, 0]$, имеет основание с абсциссой $\frac{1}{1+c^2}a$ (рис. 151). Следовательно, элементы (1) будут мультипликативными операторами модуля $\mathfrak{M}$.

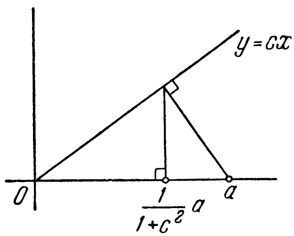


Рис. 151.

Очевидно, сумма, разность и произведение двух операторов подмодуля поля K являются операторами подмодуля поля K. Значит, операторы подмодуля поля K образуют кольцо. Поэтому подмодуль поля K, содержащий элементы (1) в качестве мультипликативных операторов, обладает в качестве таких операторов всеми элементами *кольца, порожденного элементами* (1); это кольцо мы обозначим через $\mathfrak{C}(K)$. Кольцо $\mathfrak{C}(K)$ состоит из всех конечных сумм и разностей произведений конечного числа элементов вида (1). Из тождества

$$\frac{2c}{1+c^2} = \frac{(1+c)^2-(1-c)^2}{(1+c)^2+(1-c)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2}, \tag{2}$$

где $c \neq \pm 1$, и того, что $\frac{1}{2}$ имеет вид (1), получаем, что элементы вида

$$\frac{c}{1+c^2}, \quad \text{где} \quad c \in K, \tag{3}$$

принадлежат кольцу $\mathfrak{C}(K)$. Кольцу принадлежат и элементы

$$\frac{u^2}{u^2+v^2}, \quad \frac{uv}{u^2+v^2}, \quad \text{где} \quad u, v \in K, \quad (u, v) \neq (0, 0). \tag{4}$$

Мы утверждаем, что верно и обратное: *если $\mathfrak{M}$ — отличный от нулевого модуля подмодуль поля K, среди мультипликативных операторов которого имеются элементы* (1), *то определяе-*

мое множеством $\mathfrak{M}$ *множество* $\mathfrak{M}^*$ *точек, т. е. точек* (a, b), *для которых* $a, b \in \mathfrak{M}$, *является координатным множеством, является множеством точек метрически-евклидовой подплоскости, подчиненной данной евклидовой плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим две точки $A=(a,\ b)$ и $A'=(a',\ b')$ из $\mathfrak{M}^*$ и две взаимно перпендикулярные прямые, одна из которых проходит через A, а другая через A'. Эти прямые можно представить в следующем виде: $[u, v,\ -(ua+vb)]$ и $[v,\ -u,\ -(va'-ub')]$, где $(u, v) \neq (0, 0)$. Координаты их точки пересечения имеют вид

$$a+\frac{v^2}{u^2+v^2}(a'-a)-\frac{uv}{u^2+v^2}(b'-b),$$

$$b-\frac{uv}{u^2+v^2}(a'-a)+\frac{u^2}{u^2+v^2}(b'-b).$$

Так как $\mathfrak{M}$ — модуль, а элементы (4) — его операторы, то эти координаты принадлежат $\mathfrak{M}$. Следовательно, точка пересечения двух ортогональных прямых снова принадлежит $\mathfrak{M}^*$. По теореме 2 отсюда вытекает наше утверждение.

Резюмируем:

Теорема 3. *Возьмем евклидову координатную плоскость с постоянной ортогональности* 1 *над полем* K, *в котором* -1 *не является квадратом. Координатное множество подчиненной метрически-евклидовой плоскости, содержащей начало координат, — это отличный от нуля подмодуль поля* K, *содержащий среди своих мультипликативных операторов все элементы вида* (1).

Заданием координатного множества непосредственно определяется лишь множество точек подплоскости. Прямые подплоскости удобно описать так: прямая $[u, v, w]$ принадлежит подплоскости в том и только в том случае, если основание опущенного на нее из начала перпендикуляра принадлежит подплоскости. Координаты этого основания имеют вид

$$-\frac{uw}{u^2+v^2}, \quad -\frac{vw}{u^2+v^2}. \tag{5}$$

Следствие. *Прямая* $[u,\ v,\ w]$ *принадлежит подплоскости с координатным множеством* $\mathfrak{M}$ *тогда и только тогда, когда элементы вида* (5) *принадлежат* $\mathfrak{M}$.

Если подплоскость содержит точки O и $E=(1,\ 0)$, то координатное множество содержит 1, а также операторы вида (1) и кольцо $\mathfrak{C}(K)$. Наименьшее координатное множество такого вида при данном поле K — это кольцо $\mathfrak{C}(K)$.

Мы видим, что от задачи определения подчиненных метрически-евклидовых подплоскостей для евклидовой координатной плоскости с постоянной ортогональности 1 над полем, в котором —1 не является квадратом, мы пришли к алгебраической задаче определения по данному полю K кольца $\mathfrak{C}(K)$. Евклидовой плоскости над K подчинена собственная метрически-евклидова подплоскость тогда и только тогда, когда $\mathfrak{C}(K)$ — собственное подкольцо поля K.

Если поле K конечно, то $\mathfrak{C}(K)=K$ (ср. теорему III § 6). В самом деле, если K конечно, то кольцо $\mathfrak{C}(K)$ является полем, а так как всякий элемент $c \in K$ является частным принадлежащих $\mathfrak{C}(K)$ элементов вида (3) и (1), то $\mathfrak{C}(K)$ не может быть собственным подполем поля K. В качестве другого примера рассмотрим *поле K_0 рациональных чисел*:

Теорема 4. *$\mathfrak{C}(K_0)$ состоит из целых рациональных чисел и тех дробных рациональных чисел, знаменатель которых (при взаимно простых числителе и знаменателе) содержит только простые множители* $p=2$ или $p=4l+1$.

Доказательство. Указанные рациональные числа образуют кольцо $\mathfrak{R}$; его можно рассматривать как порожденное числами, обратными простым числам $p=2$, $4l+1$. Имеем

а) $\mathfrak{C}(K_0) \subseteq \mathfrak{R}$. Для этого покажем, что всякий элемент $\frac{1}{1+c^2}$ при $c \in K_0$, т. е. всякий порождающий элемент кольца $\mathfrak{C}(K_0)$, содержится в $\mathfrak{R}$. При $c=0$ это тривиально. Если $c \neq 0$, то можно считать $c>0$. Положив $c=\frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые положительные целые числа, имеем

$$\frac{1}{1+c^2}=\frac{n^2}{m^2+n^2},$$

причем в правой части числитель и знаменатель взаимно просты. Сумма же m^2+n^2 при взаимно простых слагаемых по элементарной теореме теории чисел разлагается только на простые множители вида $p=2$, $4l+1$ *).

б) $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{C}(K_0)$. Пусть p — простое число вида $2, 4l+1$. По известной теореме теории чисел p представимо в виде $p=m^2+n^2$, где m и n — взаимно простые положительные целые числа *). Так как тогда и m^2, n^2 взаимно просты, то можно представить 1 в виде линейной комбинации m^2 и n^2: $1=rm^2+sn^2$ при целых r и s. Следовательно,

$$\frac{1}{p}=r\frac{m^2}{m^2+n^2}+s\frac{n^2}{m^2+n^2}.$$

Правая часть содержится в $\mathfrak{C}(K_0)$, значит, $\frac{1}{p}$, т. е. всякий порождающий элемент кольца $\mathfrak{R}$, содержится в $\mathfrak{C}(K_0)$.

*) Ср., например, А. А. Бухштаб [1], стр. 296—297. *(Прим. ред.)*

Теоремой 4 определяется наименьшая метрически-евклидова подплоскость, подчиненная евклидовой координатной плоскости с постоянной ортогональности 1 над полем рациональных чисел и содержащая точки O и E. Это собственная подплоскость, ибо она не содержит, например, точку $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Она же является наименьшей метрической подплоскостью обычной евклидовой координатной плоскости над полем вещественных чисел, содержащей точки O, E и $E'=(0, 1)$.

Надо еще упомянуть про тесное родство элементов вида (1) и элементов вида

$$\frac{1-c^2}{1+c^2}, \quad \text{где} \quad c \in K, \ \text{и} \ -1. \tag{6}$$

Это те элементы $x \in K$, для которых

$$1-x^2 \ \text{является квадратом}, \tag{7}$$

т. е. координаты точек единичного круга координатной плоскости над K и одновременно элементы ортогональных матриц второго порядка над K. Непосредственно устанавливается, что для элементов вида (6) выполняется (7). А если для элемента x из K выполняется (7), т. е. $1-x^2=d^2$, то либо $x=-1$, либо $x \neq -1$ и $\frac{1-x}{1+x}=\frac{d^2}{(1+x)^2}$; обозначив здесь правую часть через c^2, получим $x=\frac{1-c^2}{1+c^2}$. Пользуясь тождествами

$$\frac{1-c^2}{1+c^2}=2\frac{1}{1+c^2}-1, \quad \frac{1}{1+c^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-c^2}{1+c^2}\right), \tag{8}$$

получаем, что для *кольца* $\mathfrak{C}'(K)$, *порожденного элементами вида* (6), всегда $\mathfrak{C}'(K) \subseteq \mathfrak{C}(K)$, а $\mathfrak{C}'(K)=\mathfrak{C}(K)$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2} \in \mathfrak{C}'(K)$.

При $K=K_0$ элементы вида (6) — хорошо известные координаты рациональных точек единичного круга (рис. 152). Порожденное ими кольцо $\mathfrak{C}'(K_0)$ состоит из целых и тех дробных рациональных чисел, знаменатель которых содержит только простые множители $p=4l+1$; числа $\frac{1}{2}$ оно не содержит. Точки, координаты которых принадлежат кольцу $\mathfrak{C}'(K_0)$, и соединяющие их прямые дают пример множества точек и прямых рациональной координатной плоскости, которое при всех центральных и осевых симметриях относительно своих точек и прямых и при всех переносах вдоль отрезков этого множества переходит в себя, но все же не является метрической подплоскостью.

Пусть теперь K — формально вещественное поле, а ω — некоторое фиксированное упорядочение его. При заданном упорядочении ω поля K элемент a из K назовем *архимедовым*, если существует такое положительное целое число m, что $-m \leqslant a \leqslant m$; архимедовы элементы составляют кольцо $\mathfrak{R}_\omega(K)$. Упорядочение ω называем *архимедовым*, *если* $\mathfrak{R}_\omega(K) = K$, и *неархимедовым*, если $\mathfrak{R}_\omega(K)$ является собственным подмножеством поля K.

Кольцо $\mathfrak{R}_\omega(K)$ *всегда содержит в себе* $\mathfrak{C}(K)$, *а поэтому по теореме* 3 *кольцо* $\mathfrak{R}_\omega(K)$ *является координатным множеством метрически-евклидовой подплоскости, подчиненной евклидовой координатной плоскости с постоянной ортогональности* 1 *над полем* K *и содержащей точки* O *и* E. Упорядочение ω поля K индуцирует некоторое упорядочение в этой евклидовой координатной плоскости, и в так упорядоченной евклидовой координатной плоскости точки подплоскости образуют открытую выпуклую область, в которой выполнены также гильбертовы аксиомы порядка.

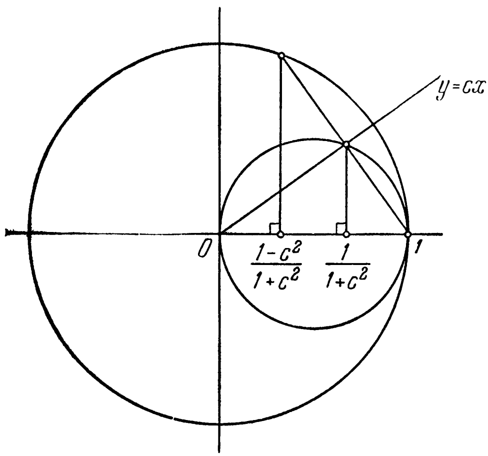


Рис. 152.

Подплоскость над кольцом $\mathfrak{R}_\omega(K)$ является собственной подплоскостью тогда и только тогда, когда упорядочение ω неархимедово.

Впервые применил неархимедовы поля для метрически-евклидовых плоскостей, в которых не выполняется евклидова аксиома о параллельных, Ден, который дополнительно требовал еще свободной подвижности.

Если K — формально вещественное поле, допускающее как неархимедово упорядочение ω, так и архимедово (примером может служить поле $K_0(x)$ рациональных функций одной переменной над полем рациональных чисел), то метрически-евклидова подплоскость, определенная собственным подкольцом $\mathfrak{R}_\omega(K)$, может быть погружена в евклидову координатную плоскость над полем вещественных чисел. Конечно, при этом погружении множество точек подплоскости вовсе не обязано образовывать выпуклое множество.

Задачи. 1. Определить все подмодули поля K_0, содержащие элементы из $\mathfrak{C}(K_0)$ в качестве мультипликативных операторов.

2. Пусть K — произвольное поле, в котором -1 не является квадратом, а $K(x)$ — поле рациональных функций одного переменного с коэффициентами из K. Тогда -1 не является квадратом и в $K(x)$, а $\mathfrak{C}(K(x))$ — собственное подкольцо поля $K(x)$.

3. Метрически-евклидовы подплоскости со свободной подвижностью. Рассмотрим элементы

$$\frac{1}{1+\sum\limits_{\nu} c_\nu^2}, \quad \text{где} \quad c_\nu \in K, \tag{9}$$

некоторого формально вещественного поля K (через $\sum\limits_{\nu}$ обозначена конечная сумма). Порожденное ими кольцо совпадает с кольцом, порожденным элементами

$$\frac{1-\sum\limits_{\nu} c_\nu^2}{1+\sum\limits_{\nu} c_\nu^2}, \quad \text{где} \quad c_\nu \in K, \text{ и } -1. \tag{10}$$

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно заменить в тождествах (8) c^2 на $\sum\limits_{\nu} c_\nu^2$, если дополнительно заметить, что $\frac{1}{2}$ является элементом вида (10).

Элементы вида (9) — это те элементы $x \in K$, для которых $\frac{1-x}{x}$ является суммой квадратов. Так как в формально вещественном поле сумма квадратов — всегда положительный элемент (включая сюда и нуль), то указанное условие равносильно следующему:

$$\frac{1-x}{x} \geqslant 0 \text{ при всяком упорядочении поля } K. \tag{11}$$

Это условие равносильно

$$0 < x \leqslant 1 \text{ при всяком упорядочении поля } K. \tag{12}$$

Элементы вида (10) удовлетворяют, как показывают несложные выкладки, условию

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ при всяком упорядочении поля } K. \tag{13}$$

Назовем элемент $a \in K$ *вполне архимедовым*, если для него существует положительное целое число m такое, что

$$-m \leqslant a \leqslant m \text{ при всяком упорядочении поля } K. \tag{14}$$

Вполне архимедовы элементы из K образуют кольцо. Те элементы из K, которые удовлетворяют условию (13), порождают это кольцо. В самом деле, если a — произвольный вполне архимедов элемент из K, то существует положительное целое m, для которого выполняется (14), а тогда $\frac{a}{m}$ удовлетворяет (13), т. е. a — целое кратное элемента, удовлетворяющего условию (13).

Следовательно, кольцо, порожденное элементами (10), — это кольцо вполне архимедовых элементов поля K. А так как элементы (9) порождают то же самое кольцо, что элементы (10), то справедлива

Теорема 5. *Во всяком формально вещественном поле K кольцо, порожденное элементами вида* (9), *является кольцом вполне архимедовых элементов поля K.*

Пусть K — пифагорово поле, т. е. формально вещественное поле, в котором всякая сумма квадратов является квадратом. В нем элементы вида (9) совпадают с элементами вида (1), и в завершение наших рассуждений получаем такой признак кольца $\mathfrak{C}(K)$ в пифагоровом поле:

Теорема 6. *В пифагоровом поле K кольцо $\mathfrak{C}(K)$ является кольцом вполне архимедовых элементов поля K.*

В группе движений метрически-евклидовой плоскости есть свободная подвижность в том и только в том случае, когда на этой плоскости всякий угол можно разделить пополам. Для евклидовой плоскости и подчиненной ей метрически-евклидовой подплоскости справедливо утверждение: если все углы делятся пополам в одной из них, то они делятся пополам и в другой. Поэтому задача определения всех *метрически-евклидовых плоскостей со свободной подвижностью* сводится к такой: определить в евклидовой плоскости со свободной подвижностью (говоря алгебраически — в евклидовой координатной плоскости с постоянной ортогональности 1 над пифагоровым полем) все подчиненные ей метрически-евклидовы подплоскости. Теоремы 3 и 6 дают искомый признак:

Теорема 7. *На евклидовой координатной плоскости с постоянной ортогональности* 1 *над пифагоровым полем K координатные множества подчиненных метрически-евклидовых подплоскостей, содержащих точки O и E, — это подмодули поля K, которые в качестве мультипликативных операторов содержат вполне архимедовы элементы поля K.*

Наименьшее координатное множество такого вида при данном поле K — это кольцо вполне архимедовых элементов из K. Следовательно, вопрос, подчинена ли данной евклидовой координатной плоскости над пифагоровым полем K некоторая метрически-евклидова собственная подплоскость, зависит от того, найдутся ли в K элементы, не являющиеся вполне архимедовыми.

В наименьшем пифагоровом поле, в поле Гильберта Ω (ср. п. 6 § 18), всякий элемент вполне архимедов. Рассматривавшиеся Гильбертом, а также Деном пифагоровы поля, получаемые из единицы и некоторой переменной использованием рациональных операций и операций $\sqrt{1+c^2}$, могут быть упорядочены как архимедовски, так и неархимедовски; кольцо вполне архимедовых элементов в них является собственным подкольцом.

Во всяком пифагоровом поле, допускающем единственное упорядочение, кольцо всех вполне архимедовых элементов — это кольцо $\mathfrak{R}_\omega(K)$ тех элементов, которые при этом единственном упорядочении ω архимедовы, т. е. $\mathfrak{R}_\omega(K)=K$, если ω архимедово, и $\mathfrak{R}_\omega(K)$ — собственное подкольцо поля K, если ω неархимедово. Пифагорово поле, допускающее только одно упорядочение, — это формально вещественное поле, в котором для всякого $a\neq 0$ либо a, либо $-a$ является квадратом. Сведения о построении таких полей содержатся в теории формально вещественных полей.

Задача (Вольф). а) Пусть K — формально вещественное поле, всякий элемент которого вполне архимедов, а A — формально вещественное алгебраическое расширение поля K. Тогда всякий элемент поля A вполне архимедов.

б) Координатное поле евклидовой плоскости со свободной подвижностью, содержащей собственную подчиненную метрически-евклидову подплоскость, всегда является трансцендентным расширением своего простого поля — поля рациональных чисел.

4. Метрически-евклидовы подгруппы группы движений. В заключение переформулируем общий результат этого параграфа как утверждение о метрически-евклидовой группе движений. Задача определения всех метрически-евклидовых групп движений может быть поставлена в таком виде: определить в евклидовой группе движений подчиненные ей метрически-евклидовы подгруппы движений.

Всякую евклидову группу движений $\mathfrak{G}$ можно по теореме 15 § 6 записать в виде $\mathfrak{G}_O\mathfrak{T}$, где O — точка, $\mathfrak{G}_O$ — подгруппа $\mathfrak{G}$, порожденная прямыми g при $g\,]\!\![\,O$, а $\mathfrak{T}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$, образованный переносами. Если $\mathfrak{G}$ содержит подчиненную метрически-евклидову подгруппу движений $\mathfrak{G}'$, содержащую точку O, то аналогично можно записать $\mathfrak{G}'$ в виде произведения $\mathfrak{G}'_O\mathfrak{T}'$. В силу подчиненности $\mathfrak{G}'_O=\mathfrak{G}_O$. Задача определения в евклидовой группе движений подчиненной ей метрически-евклидовой подгруппы движений сводится, таким образом, к тому, чтобы определить группу переносов этой подгруппы движений (ср. следствие из теоремы 16 § 6). Так как переносы метрически-евклидовой группы движений, содержащей точку O, — это произведения OP, где P — произвольная точка группы движений, то достаточно определить множество точек подчиненной метрически-евклидовой подгруппы движений. Эта же задача сведена теоремой 3 (в случае, когда прямой угол делится пополам) к вопросу из теории полей.

Используем представление евклидовой группы движений $\mathfrak{G}$, в которой прямой угол делится пополам, в виде группы матриц $\overline{\mathfrak{G}}$, указанных в теореме X, при $k=1$ над полем K, в котором -1 не является квадратом. Если O — точка из $\mathfrak{G}$, которая представляется матрицей $S_{0,0}$, то $\mathfrak{G}_O$ представляется группой $\overline{\mathfrak{G}}_O$ матриц (10) § 13 при $a=b=0$ и $k=1$. $\mathfrak{T}$ представляется группой $\overline{\mathfrak{T}}$ матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $a, b \in K$, и при этом $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_O\mathfrak{T}$ дает $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{T}}\overline{\mathfrak{G}}_O$.

Если $\mathfrak{M}$ — подмодуль поля K, то обозначим через $\overline{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{M}}$ подгруппу матриц переносов (15) при $a, b \in \mathfrak{M}$. Далее, назовем $\mathfrak{C}(K)$-*модулем* тот ненулевой модуль поля K, который содержит элементы вида (1) в качестве мультипликативных операторов Тогда в силу теоремы 3 справедлива

Теорема XIV. *Пусть $\overline{\mathfrak{G}}$ — указанное в теореме X представление некоторой евклидовой группы $\mathfrak{G}$ движений, в которой прямой угол имеет биссектрису, в виде группы матриц при $k=1$ над полем K, в котором -1 не является квадратом Подчиненные метрически-евклидовы подгруппы движений группы $\mathfrak{G}$, содержащие $S_{0,0}$ — это группы $\overline{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{M}}\overline{\mathfrak{G}}_O$, где $\mathfrak{M}$ — некоторый $\mathfrak{C}(K)$-модуль.*

Литература к § 19. Гильберт [1], Ден [1], Паш и Ден [1], Бахман [2], Клингенберг [5]. О задачах на построение в евклидовых плоскостях, приводящих к метрически-евклидовым подплоскостям, см. Бибербах [1]. О теории формально вещественных полей см. литературу к § 18.

ТАБЛИЦА АКСИОМ

1. Аксиомы

1, 2, 3, 4 — п. 2 § 3

D (аксиома трехсторонника) — п. 2 § 3

D* (усиление аксиомы D) — п. 1 § 14

P (аксиома полярного трехсторонника) — п. 8 § 3

~P — п. 8 § 3

R (аксиома евклидовой метрики) — п. 7 § 6

~R (аксиома неевклидовой метрики) — п. 7 § 6

R* — п. 1 § 12

V* (аксиома соединимости для прямых) — п. 12 § 6

~V* — п. 1 § 14

V (аксиома соединимости для инволютивных элементов) — п. 2 § 7

~V — п. 1 § 11

T (аксиома транзитивности) — п. 2 § 7 и п. 1 § 11

UV1, UV2 (аксиомы о несоединимых инволютивных элементах) — п. 1 § 11

H (гиперболическая аксиома) — п. 1 § 14

H* (усиление аксиомы H) — п. 2 § 15

B (аксиома подвижности), B* и B** — п. 6 § 17

2. Законы, связывающие инволютивные элементы

E (однозначность соединения) — п. 1 § 7

E′ (частный случай закона E) — п. 1 § 7

S (теорема о трех симметриях) — п. 1 § 7

S′ (дополнение к S) — п. 1 § 7

U (обращение теоремы о трех симметриях) — п. 1 § 7

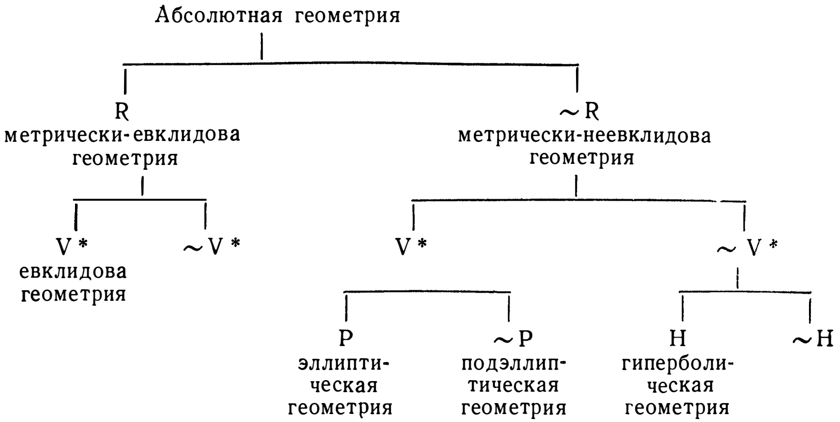
V (закон соединимости) — п. 1 § 7

~V — п. 8 § 9

T (закон транзитивности) — п. 1 § 7

UV1, UV2 (законы о несоединимых инволютивных элементах) — п. 8 § 9

3. Дерево геометрий



При этом, если выполнены аксиомы абсолютной геометрии, *то из* P *следуют* V* *и* ~R; *из* H *и* ~V* *следует* ~R; *из* ~H следует ~V*.

Приложение

МОДЕЛИ ПЛОСКОЙ АБСОЛЮТНОЙ ГЕОМЕТРИИ *)

1. Метрические плоскости. Абсолютная геометрия — это ядро метрической геометрии, могущее служить общей основой для евклидовой и неевклидовых геометрий. В абсолютной геометрии вопрос о параллельных остается открытым. Это значит, грубо говоря, что две прямые на плоскости, вообще говоря, не пересекаются.

Мы рассмотрим только плоскую абсолютную геометрию и используем следующую систему аксиом, основными понятиями которой являются *точка, прямая, инцидентность* точки и прямой, *ортогональность* (перпендикулярность) прямых:

Аксиомы инцидентности. *Существуют две точки* **). *Для всяких двух разных точек существует единственная прямая, инцидентная им.*

Аксиомы ортогональности. *Отношение перпендикулярности симметрично. Перпендикулярные прямые имеют общую точку. Через всякую точку ко всякой прямой можно провести перпендикуляр, причем если точка инцидентна прямой, то этот перпендикуляр единственный.*

Аксиомы симметрии. *Для всякой прямой найдется по крайней мере одна симметрия относительно нее* (т. е. сохраняющая ортогональность инволютивная коллинеация, при которой каждая точка данной прямой является неподвижной). *Произведение трех симметрий относительно прямых, имеющих общую точку или общий перпендикуляр, само является симметрией относительно некоторой прямой.*

Всякую модель этой системы аксиом назовем *метрической плоскостью.* В метрической плоскости нет прямых, ортогональных самим себе, симметрия относительно данной прямой единственна. *Группой движений метрической плоскости* мы называем группу, порожденную осевыми симметриями.

Метрическую плоскость, в которой существует прямоугольник, назовем *метрически-евклидовой*, а метрическую плоскость, в которой нет прямоугольника, — *метрически-неевклидовой.*

Об этой системе аксиом надлежит заметить следующее: 1. Причины, заставляющие выбрать именно такую систему аксиом, состоят в желании дать аксиоматическую основу для развития во всей естественной общности исчисления симметрий как теоретико-группового исчисления 2. По степени общности наш подход в основном отвечает понятию поля ***). 3. Наша система

---

*) F. Bachman, Modelle der ebenen absoluten Geometrie. — Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung **66**, № 4 (1964), 152—170. (Доклад, читанный на годичном заседании Общества немецких математиков во Франкфурте-на-Майне в сентябре 1963.)

**) Из этой системы аксиом вытекает, как показано в работе Бахман и Пейяш [1], система аксиом п. 3 § 2 настоящей книги (на первый взгляд, более ограничительная).

***) Над каждым полем характеристики $\neq 2$, не всякий элемент которого является квадратом, существует хотя бы одна метрическая плоскость, где выполняется евклидова аксиома параллельности.

аксиом существенно более общая, нежели система аксиом, получающаяся из тех плоских аксиом Гильберта, которые не содержат аксиомы о параллельных. В нашей системе аксиом нет отношения и аксиом порядка и нет требования свободной подвижности; ей удовлетворяет и эллиптическая плоскость, исключаемая Гильбертом.

2. Проективно-метрические плоскости. В дальнейшем под *проективной плоскостью* понимается проективная плоскость, в которой выполняется теорема Паппа и аксиома Фано. *Обыкновенной проективно-метрической плоскостью* мы называем проективную плоскость, в которой задан проективный поляритет. Две прямые такой плоскости называются *ортогональными*, если одна из них проходит через полюс другой. Двойственным образом определяется полярность точек. В обыкновенной проективно-метрической плоскости либо существуют ортогональные самим себе прямые и полярные самим себе точки, которые образуют коническое сечение (*абсолютное коническое сечение*), либо таких прямых и точек вообще нет. В первом случае мы говорим о *гиперболической* проективно-метрической плоскости, а во втором — об *эллиптической.*

Наряду с обыкновенной проективно-метрической плоскостью мы рассматриваем один случай вырождения. *Особой проективно-метрической плоскостью* мы называем проективную плоскость, в которой выделена прямая g_∞, а на последней задана проективная инволюция без неподвижных точек. Мы говорим, что две прямые, отличные от g_∞, *ортогональны*, если точки их пересечения с прямой g_∞ находятся в инволютивном соответствии. Прямая g_∞ считается ортогональной каждой прямой.

На каждой проективно-метрической плоскости существует симметрия относительно любой не ортогональной себе прямой (в смысле данного в п. 1 определения). Группу, порожденную этими симметриями, называем *группой движений проективно-метрической плоскости.*

Множество точек и прямых проективно-метрической плоскости, которое относительно заданных отношений инцидентности и ортогональности само является метрической плоскостью, называем *метрической подплоскостью*, если в нем вместе с каждой точкой содержатся также все прямые проективно-метрической плоскости, инцидентные этой точке.

Всякую метрическую плоскость можно погрузить в проективно-метрическую плоскость. Основная теорема (см. § 6) книги гласит:

Всякая метрическая плоскость является метрической подплоскостью некоторой проективно-метрической плоскости.

Точнее, всякая метрически-евклидова плоскость является подплоскостью некоторой особой, а всякая метрически-неевклидова плоскость — подплоскостью обыкновенной проективно-метрической плоскости.

Проективно-метрическую плоскость можно обычным путем алгебраизовать, представив ее как множество подпространств трехмерного метрического векторного пространства над полем характеристики $\neq 2$ с симметрической билинейной формой, ранг которой в обыкновенном случае равен трем, а в особом — двум. Группа движений проективно-метрической плоскости представима в виде собственной ортогональной группы метрического векторного пространства.

3. Проблема. Если поставить проблему нахождения всех метрических плоскостей, то в силу основной теоремы достаточно рассмотреть проективно-метрические плоскости и найти их метрические подплоскости. Каждая метрическая подплоскость однозначно определяется ее множеством точек. От решения этой проблемы мы еще очень далеки. Однако развиты некоторые методы, которые при дополнительных предположениях о метрических или проективно-метрических плоскостях приводят к полному описанию. Об этом мы здесь и расскажем.

4. Какие проективно-метрические плоскости являются метрическими плоскостями? Особые проективно-метрические плоскости, если из них удалить прямую g_∞ и точки этой прямой, являются метрическими плоскостями; это как раз и будут *евклидовы плоскости* в смысле аксиоматической теории. В частности, такая плоскость существует над каждым конечным полем характеристики $\neq 2$. Это единственные конечные метрические плоскости.

Эллиптические проективно-метрические плоскости являются метрическими плоскостями; это будут *эллиптические плоскости* в смысле аксиоматической теории.

Напротив, гиперболические проективно-метрические плоскости, по определению содержащие ортогональные самим себе прямые, не являются метрическими плоскостями.

5. Метрически-евклидовы плоскости. Всякая метрически-евклидова плоскость является метрической подплоскостью некоторой евклидовой плоскости. Проблема их алгебраического описания достаточно полно изложена в книге, и мы здесь ею не станем заниматься.

6. Одно общее соглашение. Значение формы. В дальнейшем мы хотим заняться только метрически-неевклидовыми плоскостями, причем (полные) эллиптические плоскости, которые, как сказано выше, являются полными проективно-метрическими плоскостями, мы рассматривать не станем. В связи с этим введем такое общее условие:

Рассмотрим обыкновенную проективно-метрическую плоскость $\mathfrak{P}(K, F)$, *представленную трехмерным метрическим векторным пространством* $V(K, F)$ *над полем* K *характеристики* $\neq 2$ *с симметрической билинейной формой* F *ранга* 3 *так, что точки являются одномерными подпространствами пространства* V, *а полярность двух точек выражается обращением в нуль формы* F,— и зададимся вопросом о *собственных* метрических подплоскостях плоскости $\mathfrak{P}(K, F)$. Собственная метрическая подплоскость не содержит взаимно полярных точек.

Пусть $\dot{K}$ — мультипликативная группа поля K, $\dot{K}^2$ — подгруппа квадратов. Тогда $K/\dot{K}^2$ — группа, содержащая нуль, элементами которой служат квадратичные классы вычетов поля K, причем нулевой элемент 0 подгруппы $\dot{K}^2$ состоит из одного нуля.

Всякая форма cF, где $c \in \dot{K}$, описывает тот же поляритет, что и форма F, Будем считать, что форма F *нормирована* так, что определитель матрицы коэффициентов F во всяком базисе является элементом из $\dot{K}^2$.

Поэтому в ортогональном базисе пространства V можно записать форму F для векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ так *):

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = k_2k_3x_1y_1 + k_1k_3x_2y_2 + k_1k_2x_3y_3. \tag{1}$$

Вместо формулы (1) мы короче будем писать $F \sim (k_2k_3, k_1k_3, k_1k_2)$. В двойственном «точечному пространству» V «пространстве прямых» V^* обращение в нуль формы, имеющей в двойственном базисе коэффициенты k_1, k_2, k_3, выражает перпендикулярность двух прямых.

Значением формы на векторе $\boldsymbol{x} \in V$ называем элемент $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in K$. Ортогональные себе (изотропные) векторы — это векторы с нулевым значением формы 0. Как пространство $V = V(K, F)$, так и форма F называются *изотропными* или *неизотропными* в зависимости от того, имеются ли в V отличные от нуля изотропные векторы.

---

*) Для каждой тройки элементов из $\dot{K}$, произведение которых принадлежит $\dot{K}^2$, существуют элементы k_1, k_2, $k_3 \in \dot{K}$ такие, что элементы заданной тройки равны k_2k_3, k_1k_3, k_1k_2.

Каждой точке X проективно-метрической плоскости сопоставим множество значений форм на векторах $\boldsymbol{x}$, где $X = K\boldsymbol{x}$. Это множество является классом квадратов из K. Обозначим его $F(X, X)$ и назовем *значением формы на точке* X.

Таким образом, каждой точке проективно-метрической плоскости независимо от базиса сопоставлено некоторое значение формы. Особое геометрическое значение имеют значения формы $\dot{K}^2$, 0, $-\dot{K}^2$. В точках со значением формы $\dot{K}^2$ прямой угол можно разделить пополам. Точки со значением формы 0 образуют абсолютное коническое сечение, а точки со значением формы $-\dot{K}^2$ — это точки пересечения касательных абсолютного конического сечения (полюсы «секущих» абсолютного конического сечения). Точки со значением формы 0 или $-\dot{K}^2$ не могут принадлежать метрической подплоскости, так как они лежат на ортогональных себе прямых (касательных абсолютного конического сечения). Следовательно, точка A может принадлежать метрической подплоскости только тогда, когда

$$F(A, A) \neq 0, \quad F(A, A) \neq -\dot{K}^2. \tag{2}$$

Если при некотором выборе системы координат F представляется в виде (1), то «начало» $K(0, 0, 1)$ принадлежит метрической подплоскости только тогда, когда

$$k_1 k_2 \notin -\dot{K}^2. \tag{3}$$

Если существуют точки, удовлетворяющие условию (2), то каждый элемент K не может быть квадратом.

На гиперболической проективно-метрической плоскости (форма F изотропна) всякий класс квадратов из K является значением формы. На эллиптической (форма F не изотропна) по крайней мере классы квадратов 0 и $-\dot{K}^2$ не являются значениями формы.

Две точки имеют равные значения формы тогда и только тогда, когда при некотором движении проективно-метрической плоскости они переводимы одна в другую. Проективно-метрическая плоскость распадается на классы точек с равными значениями формы; это *классы подвижности* (области транзитивности) *проективно-метрической плоскости.* Метрическая подплоскость, которая при всех движениях проективно-метрической плоскости переходит в себя, т. е. состоит из полных классов подвижности, называется *инвариантной.* Инвариантные метрические подплоскости могут быть описаны значениями формы. Прежде всего рассмотрим некоторые специальные инвариантные подплоскости (теоремы I и II).

7. Гиперболические и подэллиптические плоскости. Классическим примером собственной метрической подплоскости проективно-метрической плоскости является модель Клейна.

Считая, что поле K упорядочено, а форма F изотропна, мы говорим:

X является ***внутренней точкой** абсолютного **конического сечения,***

$$\text{если } F(X, X) > 0. \tag{4}$$

При этом соглашении внутренность абсолюта является собственной метрической подплоскостью. Так построенную метрическую подплоскость гиперболической проективно-метрической плоскости над произвольным упорядоченным полем мы назовем *моделью Клейна* Такая модель Клейна является как раз *гиперболической плоскостью* в смысле системы аксиом, как это показано в книге.

Определение (4) всегда имеет смысл при упорядоченном поле K, если форма F неопределенна, хотя тогда не обязано существовать само абсолютное коническое сечение. Имеет место

Теорема I*). *Если поле K упорядочено, а форма F неопределенна, то внутренность абсолюта является метрической подплоскостью плоскости* $\mathfrak{P}(K, F)$.

Если при этом форма F не изотропна, т. е. плоскость $\mathfrak{P}(K, F)$ эллиптическая, то эта метрическая подплоскость — *«подэллиптическая» плоскость*, т. е. метрическая подплоскость некоторой эллиптической плоскости, в которой содержится ровно одна вершина каждого полярного треугольника (аксиоматическое определение дано в книге).

Однако теорема I дает не все подэллиптические плоскости, а ограничение упорядоченными полями существенно уменьшает общность. Чтобы найти характеристику подэллиптических плоскостей, Пейяш [3] применил введенное Шпернером (Шпернер [1], Бахман и Клингенберг [1]) понятие полуупорядочения поля K. *Полуупорядочение* ω *поля* K есть гомоморфизм мультипликативной группы $\dot{K}$ на группу $\{1, -1\}$. Элемент из $\dot{K}$ называется *положительным* или *отрицательным относительно* ω, смотря по тому, отображается он в 1 или -1 **). Далее, говорим, что форма F *инертна относительно* ω, если при каждом диагональном представлении F получается одно и то же число отрицательных относительно ω коэффициентов. Это число называется *индексом формы F относительно* ω. Посредством этих определений можно так обобщить теорему I:

Теорема II. *Если ω — полуупорядочение поля K, а F инертна относительно ω и имеет индекс 2, то точки X, для которых* $F(X, X) \underset{\omega}{>} 0$, *образуют метрическую подплоскость плоскости* $\mathfrak{P}(K, F)$.

Если форма F неизотропная, то эта подплоскость подэллиптична. Всякую подэллиптическую плоскость можно представить таким образом.

8. Кольцо нормирований. Формы, инертные относительно полуупорядочения. В силу сказанного задача определения подэллиптических подплоскостей эллиптической проективно-метрической плоскости $\mathfrak{P}(K, F)$ приводится к задаче нахождения тех полуупорядочений поля K, относительно которых форма F инертна и имеет индекс 2.

Чтобы получить пример полуупорядочения, не являющегося упорядочением, рассмотрим поля, содержащие нетривиальные кольца нормирований.

Кольца нормирований поля K в дальнейшем будут встречаться неоднократно. При данном кольце нормирований R обозначим через *E группу единиц****) *кольца R*, а через *P — идеал нормирований кольца R* (P состоит из элементов кольца R, отличных от единиц, и является максимальным собственным идеалом, в частности, простым идеалом кольца R). Группой значений будем считать группу K/E. Это мультипликативная абелева группа с нулевым элементом, а канонический гомоморфизм $a \to aE$ сопоставляет каждому $a \in K$ в качестве «нормы a» класс aE, который мы будем называть также *классом величин a*. Через $x \to \bar{x}$ обозначим канонический гомоморфизм R на поле $\bar{K} = R/P$, т. е. *поле классов вычетов кольца нормирований R*.

$1+P$ (полный прообраз единицы из $\dot{\bar{K}}$) является подгруппой группы E единиц. $(1+P)\dot{K}^2$ и $E\dot{K}^2$ — подгруппы $\dot{K}$, состоящие из полных классов

---

*) Это теорема VII настоящей книги.

**) Вместо $a\omega = +1$ мы будем писать $a \underset{\omega}{>} 0$.

***) Здесь и далее «единица» понимается в смысле «делитель единицы». Ср. Бурбаки [1], гл. VI, § 1. (*Прим. перев.*)

квадратов. Имеет место

$$(1+P)\dot{K}^2 \subseteq E\dot{K}^2 \subseteq \dot{K}. \qquad (5)$$

В $E\dot{K}^2$ содержатся как раз те классы квадратов из $\dot{K}$, которые содержат какую-нибудь единицу. Они образуют подгруппу группы классов квадратов группы $\dot{K}$. Эта подгруппа может быть канонически отображена гомоморфно на группу классов квадратов группы $\dot{\overline{K}}$, причем ядро гомоморфизма состоит из классов квадратов, содержащихся в $(1+P)\dot{K}^2$ *). Если в (5) первое включение строгое, то это значит: в фактор-поле $\overline{K}$ не всякий элемент является квадратом.

$E\dot{K}^2$ одновременно состоит из полных классов величин (и является наименьшей подгруппой группы $\dot{K}$, которая состоит как из полных классов квадратов, так и из полных классов величин). Содержащиеся в $E\dot{K}^2$ классы величин образуют в группе классов величин, отличных от нуля, подгруппу квадратов. Если в (5) второе включение строгое, то это значит: в группе значений не всякий элемент является квадратом.

Над каждым полем характеристики $\neq 2$, содержащим кольцо нормирований R, для которого

$$(1+P)\dot{K}^2 \subset E\dot{K}^2 \subset \dot{K},$$

т. е.

$$-(1+P)\dot{K}^2 \subset E\dot{K}^2 \subset \dot{K},$$

существует форма F и собственное полуупорядочение, относительно которого F инертна и имеет индекс 2. Имеет место

Теорема 1 (Пейяш [3]). *Если R — кольцо нормирований поля K, $F \sim (k_2k_3,\ k_1k_3,\ k_1k_2)$; k_1, k_2 — единицы кольца R, для которых выполняется такое усиление условий* (3):

$$k_1k_2 \notin -(1+P)\dot{K}^2, \qquad (6)$$

и если $k_3 \notin E\dot{K}^2$ (т. е. $k_2k_3,\ k_1k_3 \notin E\dot{K}^2$), *то существует по крайней мере одно полуупорядочение поля K, при котором все элементы группы $E\dot{K}^2$ положительны, а k_3 отрицательно* **); *относительно всякого такого полуупорядочения форма F инертна и имеет индекс* 2.

Полуупорядочение, о котором говорится в теореме, не является упорядочением, ибо -1 является единицей, т. е. положительна. Кроме того, при условиях теоремы форма F не изотропна. В самом деле, обращение Бергау теоремы Сильвестра об инертности гласит: если $V(K, F)$ — метрическое векторное пространство размерности $n \geqslant 3$, а форма F изотропна (K имеет характеристику $\neq 2$, а форма F — ранг n), то всякое полуупорядочение поля

---

*) Если $e\dot{K}^2$ при $e \in E$ — класс квадратов, принадлежащий $E\dot{K}^2$, то, пересекая его с E и применяя гомоморфизм $x \to \overline{x}$, отображающий получаемый класс квадратов eE^2 группы единиц E на $\dot{\overline{K}}$, мы видим, что он переходит в класс квадратов $\overline{e}\dot{\overline{K}}^2$ группы $\dot{\overline{K}}$.

**) Если группа значений циклична, то $E\dot{K}^2$ — подгруппа группы $\dot{K}$ индекса 2. Тогда существует единственное полуупорядочение, при котором элементы из $E\dot{K}^2$ положительны, — именно то, при котором элементы смежного класса отрицательны.

K, относительно которого F инертна, является упорядочением поля K (Шерф [1]).

Пример. Пусть Q — поле рациональных чисел, p — простое число вида $p=4l+3$; $F\sim(p,p,1)$. Кроме того, пусть R_p — p-адическое кольцо нормирований поля Q, состоящее из рациональных чисел, знаменатель которых не делится на p; E_p — группа единиц кольца R_p, а P_p — идеал, состоящий из элементов, отличных от единиц Имеем $1\notin -(1+P_p)\dot{Q}^2$, так как в фактор-поле $\overline{Q}$ (простом поле характеристики p) единичный элемент не является минус квадратом. Группа $E_p\dot{Q}^2$ состоит из рациональных чисел, отличных от нуля, содержащих множитель p в четной степени; это подгруппа индекса 2 в $\dot{Q}$, а p принадлежит ее классу смежности. Следовательно, условия теоремы выполнены. Из утверждения теоремы, что форма F при полуупорядочении с положительной областью $E_p\dot{Q}^2$ инертна и имеет индекс 2, и из теоремы II следует: точки X при $F(X,X)\subseteq E_p\dot{Q}^2$ образуют подэллиптическую подплоскость плоскости $\mathfrak{P}(Q,F)$. В выбранном базисе это точки $X=K\ (x_1,\ x_2,\ 1)$, где $x_1,\ x_2\in R_p$.

Усиление этого алгебраического утверждения, данное Дрессом [4], может быть проиллюстрировано таким результатом Пусть p — простое число вида $4l+1$, а K_p — поле p-адических чисел. Тогда эллиптическая плоскость над K_p (она определена однозначно) распадается на три непересекающиеся подэллиптические подплоскости.

Конечно, подобное разбиение эллиптической плоскости невозможно, если есть точка со значением формы $\dot{K}^2$, ибо такая точка по п. 7 принадлежит каждой подэллиптической подплоскости.

Недавно Дресс [3] показал, что вопрос о полуупорядочениях, при которых данная форма инертна, можно свести от глобальных полей к локальным полям *).

9. Метрические плоскости деновского типа. Описанным способом построения метрических подплоскостей, обобщающим классическую модель Клейна, противостоит метод, обобщающий пример, предложенный Деном [1].

Элемент a упорядоченного поля называется *архимедовым*, если для a существует натуральное число n такое, что $|a|<n$. Неархимедовы элементы называются *бесконечно большими*, а обратные им — *бесконечно малыми*.

Ден рассмотрел над неархимедовски упорядоченным полем K форму $F(1,1,1)$, а на эллиптической проективно-метрической плоскости $\mathfrak{P}(K,F)$ выделил точки $X=K(x_1,x_2,1)$ с бесконечно малыми x_1, x_2. Они образуют метрическую подплоскость **).

Во всяком неархимедовски упорядоченном поле архимедовы элементы составляют кольцо нормирований R_0, идеал нормирований которого состоит из бесконечно малых элементов. Построение Дена можно таким образом

---

*) Мы применяем термины «локальное поле», «глобальное поле» в смысле О'Меара [1].

Дресс доказал следующее. Если ω — полуупорядочение глобального поля K, при котором форма F инертна, то существует такая простая точка $\mathfrak{p}$ поля K и полуупорядочение $\omega_{\mathfrak{p}}$ p-адического замыкания $K_{\mathfrak{p}}$ поля K, что F инертна над $K_{\mathfrak{p}}$ относительно $\omega_{\mathfrak{p}}$, а ω и $\omega_{\mathfrak{p}}$ совпадают в K на значениях формы F.

**) Точнее говоря, Ден в [1] дополнительно требовал, чтобы поле K было пифагоровым. Тогда — в нашей терминологии (см. ниже п 11) — получается гильбертова подплоскость.

обобщить на проективно-метрическую плоскость над полем с некоторым кольцом нормирований, для которого первое включение (5) строгое.

Теорема III (Бахман и Пейяш [1], Пейяш [1]). *Пусть R — кольцо нормирований поля K, $F \sim (k_2k_3,\ k_1k_3,\ k_1k_2)$, где k_1, k_2 — единицы из R, для которых выполняется условие* (6). *Пусть M — некоторый R-модуль из K, отличный от нуля и $k_3M^2 \subseteq P$. Тогда точки $X=K\ (x_1,\ x_2,\ 1)$, где $x_1,\ x_2 \in M$, составляют метрическую подплоскость проективно-метрической плоскости $\mathfrak{P}\,(K, F)$.*

Эти метрические подплоскости «деновского типа» обладают тем общим с метрически-евклидовыми плоскостями свойством, что в них выполняется

Аксиома пересечения перпендикуляров (Бахман [6]). *Перпендикуляры к двум взаимно перпендикулярным прямым имеют общую точку.*

Метрические подплоскости деновского типа не обязательно «малы». Среди них будут даже подэллиптические плоскости, каждая из которых покрывает треть проективно-метрической плоскости. Примером может служить приведенная в п. 8 рациональная подэллиптическая плоскость деновского типа. Но и среди подэллиптических плоскостей теоремы 1 имеются плоскости деновского типа: поразительным образом во внутренности абсолютного конического сечения, если точек самого абсолюта не существует, может выполняться аксиома пересечения перпендикуляров, хотя в клейновской модели, где точки абсолюта существуют, она никогда не выполняется (Бахман [6]).

В гиперболической проективно-метрической плоскости над всяким полем, содержащим кольцо нормирований, в фактор-поле которого не всякий элемент является квадратом, существует метрическая подплоскость деновского типа (теорема III). Такое поле не обязательно формально вещественно, но если оно формально вещественно, то в гиперболической проективно-метрической плоскости нет модели Клейна. Следовательно, на вопрос:

Является ли всякая метрически-неевклидова плоскость подплоскостью некоторой гиперболической или эллиптической плоскости?

— надо ответить отрицательно (Бахман и Пейяш [1]).

10. Выпуклость подплоскостей *). Пусть K — упорядоченное поле. Множество точек аффинной плоскости над K называется *выпуклым*, если вместе со всякими двумя своими точками A и B оно содержит все точки C соединительной прямой (A, B), для которых отношение $\frac{AC}{AB} \in (0,\ 1)$. Множество точек проективной плоскости над K называется *выпуклым*, если существует прямая, не содержащая точек множества и такая, что в аффинной плоскости, для которой эта прямая является бесконечно удаленной, данное множество выпукло. Метрическая подплоскость проективно-метрической плоскости над K называется *выпуклой*, если составляющее ее множество точек выпукло.

Проблема метрических плоскостей, структура которых обогащена отношением «между» и которые удовлетворяют дополнительно аксиомам порядка Гильберта (группа II аксиом книги Гильберт [1]), приводит к проблеме выпуклых метрических подплоскостей. В самом деле, в метрической подплоскости проективно-метрической плоскости над полем K отношение «B между A и C», удовлетворяющее аксиомам Гильберта, можно ввести в том и только в том случае, когда K обладает упорядочением, при котором метрическая подплоскость выпукла.

Все метрические подплоскости теоремы I выпуклы.

В проективно-метрической плоскости над полем K с данным кольцом нормирований R можно по-разному определять, что называть выпуклой

*) Пейяш [4].

(*R-выпуклой*) метрической подплоскостью. Введем определение, как выше, только вместо интервала (0, 1) будем говорить о кольце R.

Все метрические подплоскости деновского типа (теорема III) R-выпуклы. Если K упорядочено и $R_0 \subset R$, то эти плоскости тем более выпуклы.

11. Гильбертовы плоскости *). Метрическую плоскость, в которой выполняются гильбертовы аксиомы порядка и в которой имеет место свободная подвижность, мы назовем *гильбертовой плоскостью*, поскольку ее можно описать упомянутыми в п. 1 аксиомами «Оснований геометрии» Гильберта. Чтобы при этом обыкновенная проективно-метрическая плоскость $\mathfrak{P}(K, F)$ содержала гильбертову подплоскость, надо, чтобы форму F можно было записать с единственной метрической константой k в виде $F \sim (k, k, 1)$, а поле K было упорядоченным пифагоровым полем. Вообще говоря, K должно допускать неоднократное извлечение квадратных корней, ибо значение формы на каждой точке подплоскости должно равняться $\dot{K}^2$ **). (Всякая гильбертова подплоскость плоскости $\mathfrak{P}(K, F)$ содержится в классе подвижности точки со значением формы $\dot{K}^2$.)

Если эти условия выполняются, то при неопределенной форме ($k<0$) внутренность абсолютного конического сечения является гильбертовой подплоскостью (в силу теоремы I). Здесь возможно такое обобщение:

Назовем множество точек $X = K(x_1, x_2, 1)$, для которых «неоднородное значение формы» $k\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 1$ принадлежит простому идеалу J бесконечно малых элементов, *бесконечно малой окрестностью абсолюта* (независимо от того, существуют ли точки абсолюта или нет). Тогда точки, содержащиеся во внутренности абсолюта, но не лежащие в бесконечно малой окрестности его, составляют гильбертову подплоскость.

Пейяш характеризовал все метрически-неевклидовы гильбертовы подплоскости и показал, что возможны только два типа:

(I) выпуклые деновского типа;

(II) с неопределенной формой: внутренность абсолютного конического сечения без бесконечно малой окрестности абсолюта (при $J = (0)$ — это вся внутренность).

12. Квадрат косинуса. Описание метрических подплоскостей значениями формы (как в теоремах I и II) имеет то преимущество перед координатным описанием (как в теореме III), что оно не зависит от базиса, но зато оно возможно только для инвариантных метрических подплоскостей. Уже плоскости деновского типа (теорема III), а также, вообще говоря, гильбертовы плоскости типа (II) не инвариантны. Поэтому надо искать иные методы, чтобы описать независимо от базиса и неинвариантные метрические подплоскости.

Во всякой обыкновенной проективно-метрической плоскости для пары точек A, B, если они не полярны каждая себе, можно определить независимо от базиса *квадрат косинуса*

$$c_{AB} = \frac{F^2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}{F(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})F(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})} \qquad (A = K\mathfrak{a},\ B = K\mathfrak{b})$$

и можно попробовать так описать метрическую плоскость: берем точку A подплоскости и на каждой прямой, проходящей через A, указываем с помощью элемента поля c_{AX} принадлежащую подплоскости точку X. При удаче это описание не зависит от выбора прямых.

---

*) Пейяш [2], Бахман [1].

**) Здесь возникает вопрос о построении упорядоченных пифагоровых полей, не всякий положительный элемент которых является квадратом.

В качестве примера сформулируем теорему Пейяша [4] об *общих плоскостях деновского типа*, охватывающую не только теорему III, но и более общий случай, координатная формулировка которого неудобочитаема:

Теорема IV. *Пусть R — кольцо нормирований поля K, а A — точка проективно-метрической плоскости $\mathfrak{P}(K, F)$, значение формы которой удовлетворяет такому усилению требования* (2):

$$F(A, A) \neq 0, \quad F(A, A) \not\subseteq -(1+P)\dot{K}^2. \tag{7}$$

Кроме того, пусть J — идеал из R при $(0) \subset J \subset R$. Тогда точки X, для которых $c_{AX} \in 1+J$, образуют метрическую подплоскость плоскости $\mathfrak{P}(K, F)$.

Эти метрические подплоскости — единственные R-выпуклые метрически-неевклидовы подплоскости *). Если K упорядочено и $R_0 \subseteq R$, то они выпуклы.

Во всех метрических подплоскостях общего деновского типа (теорема IV) имеет место аксиома о пересечении перпендикуляров Однако существуют метрически-неевклидовы неэллиптические плоскости, в которых выполняется аксиома о пересечении перпендикуляров, но которые не принадлежат этому типу.

13. Выпуклые метрические подплоскости. Применяя метод квадрата косинуса, Пейяш [4] описал все выпуклые метрические подплоскости обыкновенной проективно-метрической плоскости над упорядоченным полем. Хотя в отличие от гильбертовых плоскостей здесь не требуется свободная подвижность, а поэтому, вообще говоря, точечные множества разных прямых не конгруэнтны, удается описать множества квадратов косинусов посредством R_0-модулей, подобно тому как это сделано в теореме IV. Кроме двух типов:

(I) выпуклые деновского типа (теорема IV при $R_0 \subseteq R$);

(II) только при неопределенной форме — внутренность абсолютного конического сечения, из которой удалены точки некоторой бесконечно малой окрестности абсолюта, — есть еще один третий тип, которого нет в гильбертовых плоскостях. Тут форма обязательно неопределенная, прямые пучка распадаются на два такие класса, что прямые одного и того же класса почти равны в смысле метрики, а прямые разных классов почти перпендикулярны. Описание точек подплоскости множествами квадратов косинусов проводится по-разному для двух классов прямых.

14. Метрические плоскости со свободной подвижностью. Тем же методом квадрата косинуса Диллер [1] алгебраически характеризовал метрически-неевклидовы неэллиптические плоскости со свободной подвижностью. Назовем их *FB-плоскостями*. Для того чтобы обыкновенная проективно-метрическая плоскость $\mathfrak{P}(K, F)$ содержала FB-плоскость, поле K должно быть пифагоровым, следовательно, упорядочиваемым; но FB-подплоскость не обязана быть выпуклой при всяком упорядочивании. Однако можно для всякого упорядочивания поля K построить выпуклую оболочку FB-подплоскости и среди всех выпуклых оболочек есть по крайней мере одна метрическая плоскость. Далее Диллер доказал, что всякая FB-подплоскость является пересечением тех ее выпуклых оболочек, которые являются метрическими плоскостями. Пользуясь этим, он с помощью множеств квадратов косинусов описал FB-подплоскости посредством определенного подкольца поля K.

---

*) Точнее, метрическая подплоскость, полученная по теореме IV, R'-выпукла для каждого кольца нормирований R' поля K при $R' \subseteq R$; обратно, всякая метрическая подплоскость, R'-выпуклая для некоторого кольца нормирований R', представима по теореме IV при подходящем выборе кольца нормирований R, где $R' \subseteq R$. (Выполненное для R второе условие из (7) не обязательно выполняется для R' при $R' \subseteq R$.)

15. Гомоморфизмы. При изучении метрических подплоскостей оказалось полезным и плодотворным рассматривать образы и прообразы по отношению к некоторым гомоморфизмам.

Пусть $\mathfrak{P}$ и $\overline{\mathfrak{P}}$ — проективные плоскости. Всякое отображение φ множества точек $A, \ldots$ и прямых $a, \ldots$ плоскости $\mathfrak{P}$ на точки и прямые плоскости $\overline{\mathfrak{P}}$, при котором

Если A и b инцидентны, то $A\varphi$ и $b\varphi$ инцидентны,

Клингенберг [7] называет *проективным гомоморфизмом* $\mathfrak{P}$ *на* $\overline{\mathfrak{P}}$. Если $\mathfrak{P}$, $\overline{\mathfrak{P}}$ — проективно-метрические плоскости, то всякий проективный гомоморфизм φ: $\mathfrak{P} \to \overline{\mathfrak{P}}$, для которого

Если a и b ортогональны, то $a\varphi$ и $b\varphi$ ортогональны,

называется *проективно-метрическим гомоморфизмом* $\mathfrak{P}$ *на* $\overline{\mathfrak{P}}$.

Если K — поле с кольцом нормирований R, то, выбирая базис, можно так подобрать координаты x_1, x_2, x_3 любой точки проективной плоскости над K, чтобы все $x_i \in R$, но не все $x_i \in P$.

Соответствие

$$(x_1, x_2, x_3) \to (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \tag{8}$$

тогда определяет отображение точек плоскости $\mathfrak{P}$ на точки проективной плоскости $\overline{\mathfrak{P}}$ над $\overline{K}$. Совместно с индуцируемым отображением прямых получаем некоторый проективный гомоморфизм φ. Если при этом $\mathfrak{P}$ — проективно-метрическая плоскость, то можно так отобразить метрику $\mathfrak{P}$ посредством φ на $\overline{\mathfrak{P}}$, т. е. так метризовать $\overline{\mathfrak{P}}$, что φ будет проективно-метрическим гомоморфизмом $\mathfrak{P}$ на $\overline{\mathfrak{P}}$ (правда, при этом метрика в $\overline{\mathfrak{P}}$ может неожиданным образом вырождаться).

Меняя базис в $\mathfrak{P}$ при данном кольце нормирований, получаем другие гомоморфизмы $\mathfrak{P}$ на $\overline{\mathfrak{P}}$.

Если дан проективно-метрический гомоморфизм φ проективно-метрических плоскостей $\mathfrak{P}$ и $\overline{\mathfrak{P}}$, то возникают два вопроса:

1. *Является ли φ-образ метрической подплоскости $\mathfrak{E}$ плоскости $\mathfrak{P}$ метрической подплоскостью плоскости $\overline{\mathfrak{P}}$?*

2. *Является ли полный φ-прообраз метрической подплоскости $\overline{\mathfrak{E}}$ плоскости $\overline{\mathfrak{P}}$ метрической подплоскостью плоскости $\mathfrak{P}$?*

На первый вопрос можно ответить утвердительно только при дальнейших допущениях. Вообще говоря, φ-образ метрической подплоскости может по-разному вырождаться: он может быть слишком малым или же переводить неортогональные самим себе прямые в ортогональные самим себе прямые и т. п. При подходящих условиях от этих вырождений можно избавиться тем, что вместо φ рассматривать другой гомоморфизм $\mathfrak{P}$ на $\overline{\mathfrak{P}}$. Это систематически исследовал Дресс в [2] и [5].

Ответ же на второй вопрос всегда положителен (Дресс [5], теорема 15).

Пользование гомоморфизмом, если он применим, позволяет самым простым образом усмотреть, является ли множество точек и прямых метрической подплоскостью. Кроме того, гомоморфизм дает дополнительную информацию о геометрической природе этой метрической подплоскости.

Рассмотрим некоторые примеры. Приведенная в п. 8 подэллиптическая плоскость над полем рациональных чисел Q является полным прообразом евклидовой плоскости над простым полем F_p характеристики p. Посредством (8) определяется проективно-метрический гомоморфизм рассматриваемой проективно-метрической плоскости $\mathfrak{P}$ над Q на особую проективно-метрическую плоскость $\overline{\mathfrak{P}}$ над F_p, а этот гомоморфизм переводит точки подэллиптической подплоскости плоскости $\mathfrak{P}$ в точки евклидовой плоскости над F_p (евклидовой подплоскости плоскости $\overline{\mathfrak{P}}$), а все другие точки плоскости $\mathfrak{P}$ — в точки бесконечно удаленной прямой из $\overline{\mathfrak{P}}$. Вообще всякая метрическая подплоскость деновского типа (теорема III) является полным прообразом некоторой евклидовой плоскости, если ее координатный модуль порождается одним элементом (Дресс [5], теорема 17). Во всякой метрической плоскости, являющейся полным прообразом некоторой евклидовой плоскости, имеет место, как непосредственно видно, аксиома пересечения перпендикуляров. Всякая гильбертова плоскость, получаемая из внутренности абсолюта удалением непустой бесконечно малой окрестности абсолюта (независимо от того, существуют ли точки абсолюта или нет), является полным прообразом некоторой модели Клейна (окрестность абсолюта при этом является полным прообразом самого абсолюта плоскости-образа).

Применяя гомоморфизмы, Дресс [4] определил все метрические плоскости над локальными полями. Так как фактор-поле локального поля по определению конечно, то метрические плоскости над фактор-полем только евклидовы. Относительно метрических плоскостей над локальными полями Дресс установил ряд интересных теорем. Упомянем такую (см. Дресс [4]):

Группа движений метрически-неевклидовой неэллиптической плоскости имеет согласующуюся с группой компактную топологию тогда и только тогда, когда координатное поле плоскости является локально компактным несвязным топологическим полем, т. е. по Ковальскому (Понтрягин [1]) *является локальным полем.*

До сих пор нет полного обозрения метрических плоскостей над полем рациональных чисел Q. После того как определены метрические плоскости над локальными полями, возникает вопрос, можно ли получить все метрические плоскости над Q из метрических плоскостей над совершенным замыканием Q посредством редукции и пересечения? То же самое неясно относительно глобальных полей. Для метрических плоскостей, в которых выполняется аксиома о пересечении перпендикуляров, ответ является утвердительным, как сообщил Дресс в докладе на симпозиуме по основаниям геометрии в Обервольфахе в 1963 г *)

16. Нерешенные вопросы. В заключение перечислим некоторые другие остающиеся открытыми вопросы и проблемы.

1) Метрические подплоскости фиксированной метрической плоскости, если к ним добавить пустую метрическую подплоскость, образуют структуру. Надо изучить эту структуру (или структуру подгрупп собственно ортогональной группы, образованных группами движений этих подплоскостей) **).

2) Аренс [1] дал систему аксиом пространственной абсолютной геометрии. Она определяет понятие *«метрического пространства»*, точно соответствующее в трехмерном случае понятию метрической плоскости. Всякая плоскость метрического пространства является метрической плоскостью. Не ясно, какие метрические плоскости являются плоскостями метрического пространства? Например, конечные метрические плоскости п. 4 не погружаемы в метрическое пространство.

3) Пусть $\mathfrak{E}$ — собственная метрическая подплоскость обыкновенной проективно-метрической плоскости. Множество принадлежащих $\mathfrak{E}$ точек некоторой прямой из $\mathfrak{E}$ назовем *линейным метрическим точечным множеством.* Точки такого множества M удовлетворяют условию (2). В M нет поляр-

*) Более общий подход к решению «обратной» проблемы см. Дресс [10]. (*Прим. перев.*)

**) О гильбертовых подплоскостях фиксированной гильбертовой плоскости см. Бахман [6].

ных друг другу точек. M содержит по крайней мере три точки, а вместе с любыми тремя — четвертую зеркальную к ним (в исчислении симметрий это можно записать так, что «отрезки», образованные точками M, образуют абелеву группу, если для них задать отношение равенства связывающим симметрии условием $AB=A'B'$, а операцию ввести так: $AB\bigoplus CD=ABCD=AF$, где F — четвертая зеркальная точка для B, C, D). Далее, M со всякими двумя точками A и B содержит основание перпендикуляра всякого прямоугольного треугольника с гипотенузой A, B. Достаточно ли этих условий, чтобы характеризовать линейное метрическое точечное множество? Каков алгебраический признак линейных метрических точечных множеств?

4) Содержит ли метрическая подплоскость обыкновенной проективно-метрической плоскости вместе с тремя точками A, B, C также точку D, для которой $c_{AB}=c_{CD}$?

5) Пусть $\mathfrak{E}$ — метрическая подплоскость обыкновенной проективно-метрической плоскости $\mathfrak{P}$. Всякое движение α плоскости $\mathfrak{P}$ переводит $\mathfrak{E}$ в «конгруэнтную» метрическую подплоскость $\mathfrak{E}\alpha$. Всегда ли либо $\mathfrak{E}\alpha=\mathfrak{E}$ либо $\mathfrak{E}\alpha$ и $\mathfrak{E}$ не пересекаются?

6) Над каждым полем характеристики $\neq 2$ есть единственная гиперболическая проективно-метрическая плоскость. Какие поля обладают тем свойством, что гиперболическая проективно-метрическая плоскость над ними содержит метрическую подплоскость? Необходимо, чтобы в K не всякий элемент был квадратом. Достаточно любое из двух требований: а) K формально вещественно (теорема I), б) K содержит такое кольцо нормирований, что в группе значений или в фактор-поле $\overline{K}$ не всякий элемент является квадратом (теорема IV).

7) Существует ли метрическая плоскость с не формально вещественным координатным полем, в котором не выполняется аксиома пересечения перпендикуляров?

ЛИТЕРАТУРА *)

Альбада (Albada P. J., van)

[1]* Die Bewegungsgruppen der metrischen Ebenen als Untergruppen der Bewegungsgruppe eines hyperbolischen projectiv-metrischen Raumes betrachtet, Indagationes math. **28**, N 2 (1966), 84—92.

Аренс (Ahrens J.)

[1] Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff, Math Z. **71** (1959), 154—185.

Артин (Artin E.)

[1] Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **5** (1927), 100—115.

[2] Геометрическая алгебра, «Наука», 1968.

Артин и Шрейер (Schreier O.)

[1] Algebraische Konstruktion reeller Körper, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **5** (1927), 85—99.

Бальдус Р.

[1] Неевклидова геометрия, ГТТИ, 1933.

Бахман (Bachmann F.)

[1] Eine Begründung der absoluten Geometrie in der Ebene, Math. Ann. **113** (1936), 424—451.

[2] Geometrien mit Euklidischer Metrik, in denen es zu jeder Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt mehrere Nichtschneidende gibt, I, II, III, Math. Z. **51** (1949), 752—768, 769—779; Math Nachr. **1** (1948), 258—276.

[3] Zur Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Math. Ann. **123** (1953), 341—344.

[4] Eine Kennzeichnung der Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen, Math. Ann. **126** (1953), 79—92.

[5] Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, лекции, читанные в зимнем семестре 1952/53 г., обработано Р. Лингенбергом, размножено фотомеханическим способом, Kiel. 1954.

[6]** Zur Parallelenfrage, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **27** (1964), 173—192.

[7]* Sur la question des parallèles, Simposio di didattica della mathematica, Gubbio (Italia), 1964, 147—152.

[8]* Eine Kostruierbarkeitsfrage für hyperbolische Ebenen, Math. Z. **87** (1965), 27—31.

---

*) По поводу дальнейших литературных ссылок см. библиографию в книгах Дьёдонне [3], Кокстера [1], Пиккерта [1] и в статье Клингенберга [5].

Литературные источники, датированные 1957 и более поздними годами, в тексте существенно не используются. [Относительно помеченных звездочками номеров см. стр. 14; двумя звездочками помечена литература к Приложению. *Прим. ред.*]

[9]* Punkte, Vektoren, Spiegelungen, Math. und naturwiss. Unterricht **18,** N 4 (1965), 97—111.
[10]* Der Höhensatz in der Geometrie involutorischer Gruppenelemente, Canad. J. Math. **19** (1967), 895—903.

Бахман и Вольф (Wolff H.)
[1]* Über die Parallelenfrage, Math. und naturwiss. Unterricht **17, N 4** (1964), 145—150.

Бахман, Вольф и Баур (Baur A.)
[1] Spiegelungen, в книге Grundzüge der Mathematik, под редакцией H. Behnke, F. Bachmann, K. Fladt und W. Süss, т. 2, Geometrie, Göttingen, 1960, 49—94.

Бахман и Клингенберг (Klingenberg W.)
[1] Über Seiteneinteilungen in affinen und euklidischen Ebenen, Math. Ann. **123** (1951), 288—301.

Бахман и Пейяш (Pejas W.)
[1]** Metrische Teilebene hyperbolischer projektiv-metrischer Ebenen, Math. Ann. **140** (1960), 1—8.

Беккенбах Э. и Беллман Р.
[1]* Введение в неравенства, «Мир», 1965.

Беккер-Берке (Becker-Berke K.)
[1] Die Geometrie einer ebenen elliptischen Bewegungsgruppe, диссертация, Kiel, 1957.

Бергау (Bergau P.)
[1] Begründung der hyperbolischen Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, диссертация, Kiel, 1953.

Бет (Beth E. W.) и Тарский (Tarski A.)
[1]* Equilaterality as the only primitive notion of Euclidean geometry, Indagationes math. **18, N 4** (1956), 462—467.

Бибербах (Bieberbach L.)
[1] Theorie der geometrischen Konstruktionen, Basel und Stuttgart, 1952.

Биркгоф (Birkhoff G.) и Маклейн (MacLane S.)
[1] A survey of modern algebra, New York, 1950.

Блюменталь (Blumenthal L. M.)
[1] Theory and applications of distance geometry, Oxford, 1953.

Бляшке (Blaschke W.)
[1] Vorlesungen über Differentialgeometrie, т. III, Berlin, 1929.
[2] Ebene Kinematik, Leipzig und Berlin, 1938.

Бляшке и Мюллер (Müller H. R.)
[1] Ebene Kinematik, München, 1956.

Больаи (или Бойяи) Я.
[1] Аппендикс, Гостехиздат, 1950.

Больдт (Boldt H.)
[1] Raumgeometrie und Spiegelungslehre, Math. Z. **38** (1934), 104—134.

Боттема (Bottema O)
[1] De elementaire meetkunde van het platte vlak, Groningen, 1938.
[2] Eine Geometrie mit unvollständiger Anordung, Math. Ann. **117** (1940), 17—26.

Бочек (Boczeck J.)
[1] Die Geometrie der Gruppenebene und des Gruppenraumes einer elliptischen Bewegungsgruppe, диссертация, Kiel, 1954.

Буземан Г.
[1] Геометрия геодезических, Физматгиз, 1962.

Буземан Г. и Келли П. Дж.
[1] Проективная геометрия и проективные метрики, ИЛ, 1957.

Бурбаки Н.
[1] Алгебра: Многочлены и поля; Упорядоченные группы, «Наука», 1965.

Бухштаб А. А.
[1]* Теория чисел, «Просвещение», 1966.
Бэр Р. (Baer R.)
[1] The fundamental theorems of elementary geometry, an axiomatic analysis, Trans. Amer. math. Soc. **56** (1944), 94—129.
[2] Null systems in projective spaces, Bull. Amer. math. Soc. **51** (1945), 903—906.
[3] Polarities in finite projective planes, Bull. Amer. math. Soc. **52** (1946), 77—93.
[4] The infinity of generalized hyperbolyc planes, Courant Anniversary Volumes, N. Y., 1948, 21—27.
[5] Free mobility and ortogonality, Trans. Amer. math. Soc. **68** (1950), 439—460.
[6] The group of motions of a two-dimensional elliptic geometry, Compositio math. **9** (1951), 241—288.
[7] Линейная алгебра и проективная геометрия, ИЛ, 1955.
Ван дер Варден Б. Л. (Waerden B. L., van der)
[1] Современная алгебра, т. I, Гостехиздат, 1947.
[2] Gruppen linearer Transformationen, Leipzig und Berlin, 1935.
[3] De logische grondslagen der euklidische meetkunde, Groningen, 1937.
Веблен (Veblen O.) и Юнг (Young J. W.)
[1] Projective geometry, т. 1, Boston, 1910; т. 2, Boston, 1918.
Вейль Г. (Weyl H.)
[1]* Raum, Zeit, Materie, Berlin, 1923.
[2]* Симметрия, «Наука», 1968.
Виллерс (Willers H.)
[1]* Die Spiegelung als primitiver Begriff im Unterricht, Z. f. math. u. naturwiss. Unterricht **53** (1922), 3—6.
Винер (Wiener H.)
[1] Die Zussammensetzung zweier endlicher Schraubungen zu einer einzigen; zur Theorie der Umwendungen; Über geometrische Analysen; Über geometrische Analysen, Fortsetzung; Über die aus zwei Spiegelungen zusammengesetzten Verwandtschaften; Über Gruppen Vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften, Ber. Verg. kgl Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, math.-nat. Kl. **42** (1890), 13—23, 71—87, 245—267; **43** (1891), 424—447, 644—673; **45** (1893), 555—598.
Винтерниц (Winternitz A.)
[1] Zur Begründung der projektiven Geometrie: Einführung idealer Elemente unabgängig von der Anordnung, Ann. of Math. **41** (1940), 365—390.
Витт (Witt E.)
[1] Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, J. reine angew. Math. **176** (1937), 31—44.
Вольф (Wolff H.)
[1]* Metrische Ebene mit unverbindbaren Punkten, диссертация, Kiel, 1960.
[2]* Minkowskische und absolute Geometrie, I, II, Math. Ann. **171** (1967), 144—163, 165—193.
Гаусс К. Ф.
[1] Отрывки из писем и черновые наброски, относящиеся к неевклидовой геометрии, Сб. «Об основаниях геометрии», Гостехиздат, 1956, 126—161.
Генкин (Henkin L.)
[1]* Simmetric euclidean relations, Indagationes math. **24**, N 5 (1962), 549—553.

Генш (Gensch W.)
[1] Über die Darstellung von reellen räumlichen Projektivitäten durch Producte von Spiegelungen, диссертация, Rostock, 1935.
Герретсен (Gerretsen J. C. H.)
[1] Die Begründung der Trigonometrie in der hyperbolischen Ebene, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **45** (1942), 360—366, 479—483, 559—566.
Гессенберг (Hessenberg G.)
[1] Neue Begründung der Sphärik, S.-B. Berl. Math. Ges. **3** (1905), 69—77.
[2] Begründung der elliptischen Geometrie, Math. Ann. **61** (1905), 173—184.
[3] Grundlagen der Geometrie, Berlin, 1930.
Гётцки (Götzky M.)
[1]* Eine Kennzeichnung der ortogonalen Gruppen unter den unitären Gruppen, Arch. Math. **15** (1964), 261—265.
Гильберт Д.
[1] Основания геометрии, Гостехиздат, 1948
[2] Новое обоснование геометрии Больяи — Лобачевского (там же, добавление 3).
Грюнвальд (Grunwald J.)
[1] Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft, S.-B. Akad. Wien. math.-nat. Kl. IIa, **80** (1911), 677—741.
Гузе (Guse S.)
[1] Beweise elementargeometrischer Sätze durch Spiegelungsrechnen, диссертация, Kiel, 1952.
Гуревич Г. Б.
[1]* Проективная геометрия, Физматгиз, 1960.
Гюнтер (Günter E.)
[1]* Eine gruppentheoretische Begründung der ebenen äquiaffinen Geometrie, Arch. Math **18**, № 1 (1967), 100—106.
Де Баггис (De Baggis H. F.)
[1] Hyperbolic geometry, Rep. Math. Coll. Notre Dame. II ser. **7** (1946), 3—14; **8** (1948), 68—80.
Делоне Б. Н.
[1]* Элементарное доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского, Гостехиздат, 1956.
Дельсерт (Delessert A.)
[1]* Une construction de la géométrie élémentaire fondée sur la notion de reflexion, Genève, 1963.
[2]* Une construction de la géométrie élémentaire fondée sur la notion de reflexion, L'enseignement mathématique, II ser. **10**, N 1/2 (1964), 2—124.
[3]* Gibt es Darstellungen der euklidischen Geometrie, die sich wesentlich voneinander unterscheiden, Math.-Phys. Semesterberichte **13**, N 2 (1966), 165—173.
Ден (Dehn M.)
[1] Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, Math Ann. **53** (1900), 404—439.
Диксон (Dickson L. E.)
[1] Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich und Leipzig, 1927.
Дикуонцо (Dicuonzo V.)
[1]* Spazi metrici generalizzati, construiti mediante gruppi dotati di un sistema di generatori involutori, nee quale valga il teorema della tre simmetric, Rend. mat. e applic **22**, N 1—2 (1963), 282—294.
[2]* Sulla fondazione della geometria metrica assoluta della spazio tridimensionale in base al concette di simmetria, Rend. mat. e applic. **23**, N 3/4 (1964), 394—400.

[3]* Su una classe di spazi metrici generalizzati, Rend. mat. e applic. **24** (1965), 11—16.
[4]* Sulla construzione gruppale di una geometria metria a debole struttura d'incidenza, Rend. mat. e applic. **25**, N 3—4 (1966—1967), 593—603.
[5]* Sulla fondazione della geometria metrica assoluta in uno spazio di dimensione n mediante il concetto di simmetria, Rend. mat. e applic. **26**, N 1—2 (1967), 99—106.

Диллер (Diller J.)
[1]** Metrische Ebenen mit freier Beweglichkeit, диссертация, Kiel, 1963.
[2]* Algebraisierung euclidischer Ebene, Der Mathematikunterricht, 1964, 83—107.

Дойринг (Deuring M.)
[1] Algebren, Leipzig und Berlin, 1935.

Дресс (Dress A.)
[1]** Konstruktion metrischer Ebenen, диссертация, Kiel, 1962.
[2]** Metrische Ebenen und projektive Homomorphismen, Math. Z. **85** (1964), 116—140
[3]** Träge Formen über globalen Körpern, J. reine und angew. Math. **217** (1965), 133—142.
[4]** Trägheitsstrukturen quadratischer Formen, Math. Ann. **157** (1964), 326—331.
[5]** Der $\mathfrak{p}$-adische Abschluß metrischer Ebenen, Math. Z. **87** (1965), 146—159.
[6]* Eine geometrische Charakterisierung Desarguesscher Ebenen mit bewertetem Koordinatenkörper, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **27**, N 3/4 (1964), 199—205.
[7]* Lotschnittebenen mit halbierbarem rechtem Winkel, Arch. der Math. **16** (1965), 388—392.
[8]* Metrische Ebenen über quadratisch perfekten Körpern, Math. Z. **92** (1966), 19—29.
[9]* Lotschnittebenen: Ein Beitrag zum Problem der algebraischen Beschreibung metrischer Ebenen, J. reine angew. Math. **224** (1966), 90—112.
[10]* Zur arithmetischen Theorie der metrischen Ebenen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **31**, № 3—4 (1967), 141—148.

Дьёдонне (Dieudonné J.)
[1] Sur les groupes classiques, Paris, 1948.
[2] On the automorphisms of the classical groups, Mem. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 1—95.
[3] La géométrie des groupes classiques, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1955.
[4]* Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Paris, 1964.

Евклид
[1] Начала, Гостехиздат, 1948—1950.

Егер (Jeger M.)
[1]* Elementargeometrische Sätze als Abbilder von Gruppenoperationen, Elem. Math. **17**, N 5 (1962), 97—106.
[2]* Über die gruppenalgebraische Struktur der Elementargeometrie, Elem. Math. **19** (1964), 1—8, 29—35.
[3]* Konstruktive Abbildungsgeometrie, Lucerne — Stuttgart, 1964.
[4]* Der Aufbau der Kongruenzgruppe im Raum durch Spiegelungen, Elem. Math. **23**, N 1 (1968), 1—10; N 2, 32—40.

Зетель С. И.
[1]* Новая геометрия треугольника, Учпедгиз, 1962.

Ижерен (Ijzeren J. van)
[1] Moderne vlakke meetkunde, Zutphen, 1941.

Йельмслев (Hjelmslev J.) *)
[1] Neue Begründung der ebenen Geometrie, Math. Ann. **64** (1907), 449—474.
[2] Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre, Danske Ved. selsk., mat.-fys. Medd. **8**, N 11 (1929); **10**, N 1 (1929); **19**, N 12 (1942); **22**, NN 6, 13 (1945); **25**, N 10 (1949).
[3] Die geometrischen Konstruktionen mittels Lineals und Eichmaßes, Opuscula math. A. Wiman dedicata, Uppsala, 1930.
[4] Grundlag for den Projektive Geometri, København, 1943.
[5] Beiträge zur nicht-eudoxischen Geometrie I, II, Danske Vid. selsk., mat.-fys. Medd. **21**, N 5 (1944).
[6] Kongruenslaerens Fundamentalsaetning. Mat. Tidsskr. A, 1948, 16—21.
[7] Om Geometriens almene Grundlag, 11 Skand. Mat. Kongress Trondheim 1949, Oslo, 1952, 3—12.
Каган В. Ф.
[1]* Аксиоматика геометрии, в книге «Очерки по геометрии», Изд-во МГУ, 1963, 522—563.
[2]* Основания геометрии, т. II, Гостехиздат, 1956.
Канненберг (Kannenberg R.)
[1] Grundgedanken einer Theorie der Gebilde zweiter Ordnung in Schiefkörpergeometrien, диссертация, Bonn, 1954.
Картан (Cartan E.)
[1] Leçons sur la géométrie projective complexe, Paris, 1931.
Карцель (Karzel H)
[1] Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie, Arch. Math. **6** (1955), 66—76.
[2] Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotkerngeometrien, Arch. Math. **6** (1955), 284—295.
[3] Gruppentheoretische Begründung der absoluten Geometrie mit abgeschwächtem Dreispiegelungssatz, Habil.-Schr., Hamburg, 1956.
[4] Kennzeichnung der Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen über einem Körper von Charakteristik 2, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **22** (1958), 1—8.
[5] Spiegelungsgeometrien mit echtem Zentrum, Arch. Math. **9** (1958), 140—146.
[6] Zentrumsgeometrien und elliptische Lotkerngeometrien, Arch. Math. **9** (1959), 455—464.
[7] Quadratische Formen von Geometrien der Charakteristik 2, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **23** (1959), 144—162.
[8]* Verallgemeinerte elliptische Geometrien und ihre Gruppenräume, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **24** (1960), 167—188.
[9]* Ebene Inzidenzgruppen, Arch. Math. **15**, № 1 (1964), 10—17.
Карцель и Ленц (Lenz H.)
[1]* Über Hilbertsche und Spernsche Anordnung, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **25**, № 1—2 (1961), 82—88.
Кейне (Kijne D.)
[1] Plane construction field theiry, диссертация, Utrecht, 1956.
Керекьярто (Kerékjártó B.)
[1] Les fondements de la géométrie, т. 1: La construction élémentaire de la géométrie euclidienne, Budapest, 1955.
[2]* То же, т. 2 Géométrie projective, Paris, 1966.

*) Впечатляющее описание математических открытий Ю. Йельмслева содержится в посвященном его памяти докладе, прочитанном И. Нильсеном 12 мая 1950 г. в Датском научном обществе.

К л е й н Ф.
[1] О так называемой неевклидовой геометрии, Сб. «Основания геометрии», Гостехиздат, 1956, 253—303.
[2] Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («эрлангенская программа»), там же, 399—434.
[3] Неевклидова геометрия, ОНТИ, 1936.
К л и н г е н б е р г (K l i n g e n b e r g W.)
[1] Beziehungen zwischen einigen affinen Schließungssätzen, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **18** (1952), 120—143; **19** (1955), 158—175.
[2] Eine Begründung der ebenen hyperbolischen Geometrie, Math. Ann **127** (1954), 340—356.
[3] Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen, Math. Z. **60** (1954), 384—406; Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **20** (1955), 97—110; Math. Ann. **132** (1945), 180—200.
[4] Euklidische Ebenen mit Nachbarelementen, Math. Z. **61** (1954), 1—25.
[5] Grundlagen der Geometrie. В книге Gauss C. F., Gedenkband, редактор H. Reichardt, Leipzig, 1957.
[6] Affine Ebenen mit Orthogonalität, Arch. Math. **8** (1957), 199—202; **9** (1958), 152—154.
[7]** Projektive Geometrien mit Homomorphismus, Math. Ann. **132** (1956), 180—200.
К н е з е р (K n e s e r H.)
[1] Aufgaben und Lösungen, Jahresber. deutsch. Math. Verein. **41** (1932), *69* *).
К о к с т е р (C o x e t e r H. S. M.)
[1] Non-euclidean geometry, Toronto, 1957.
[2] Действительная проективная плоскость, Физматгиз, 1949.
[3] Regular polytopes, London, 1948.
К о к с т е р и М о з е р (M o s e r W. O. J.)
[1] Generators and relations for discrete groups, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1957.
К у р о ш А. Г.
[1] Теория групп, «Наука», 1967.
К э з и (C a s e y J.)
[1] A sequel to the first six Books of the Elements of Euclid, Dublin, 1892.
К э л и А.
[1] Шестой мемуар о формах, Сб. «Об основаниях геометрии», Физматгиз, 1956, 222—252.
Л е в и (L e v i F.)
[1] Geometrische Konfigurationen, Leipzig, 1929.
Л е н ц (L e n z H.)
[1] Zur Begründung der Analytischen Geometrie, S.-B. mat.-nat. Kl. Bayer. Akad. München, 1954, 17—72.
[2] Über die Einführung einer absoluten Polarität in die projektive und affine Geometrie des Raumes, Math. Ann. **128** (1954), 363—372; **133** (1957), 39—40.
[3] Zur Definition der Flächen zweiter Ordnung, Math. Ann. **131** (1956), 385—389.
[4]* Zur Axiomatik der absoluten Geometrie der Ebene, Arch. Math. **12** (1961), 370—373.
[5]* Zur Axiomatik der ebenen euklidischen Geometrie, Elem. Math. **21**, N 6 (1966), 121—132.

*) В этом журнале имеется независимая от основной нумерация курсивных страниц.

[6]* Grundlagen der Elementarmathematik, Berlin, 1967.
[7]* Zur Axiomatik der Absoluten Geometrie des Raumes, Arch. Math **19**, N 2 (1968), 205—213.

Либман (Liebmann H.)
[1] Nichteuklidische Geometrie, Berlin und Leipzig, 1923.

Лингенберг (Lingenberg R.)
[1] Begründung der absoluten Geometrie der Ebene, диссертация, Kiel, 1955.
[2] Zur Einführung von Koordinaten in einer projektiven Ebene mit Hilfe von Endomorphismen transitiver Translationsgruppen, Math. Z. **67** (1957), 332—360.
[3] Euklidische Pseudoebene über einer metrischen Ebene, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **22** (1958), 114—138.
[4] Über Gruppen mit einem invarianten System involutorische Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spigelungen gilt, I, II, Math. Ann. **137** (1959), 26—41, 83—106.
[5]* То же, части III, IV, Math. Ann. **142** (1961), 184—224; **158** (1965), 297—325.
[6]* Zur Kennzeichung der Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen über einem Körper von Charakteristik 2, Arch. Math. **10** (1959), 344—347.
[7]* Einbettung projectiv-metrischer Teilstrukturen in projectivmetrische Ebenen, Math Z. **74** (1960), 367—386.
[8]* Die orthogonalen Gruppen $O_3(K, Q)$ über Körpern von Char. 2, Math. Nachr. **21**, N 6 (1960), 371—380.
[9]* Konstruktion der metrischen Form in der absoluten Geometrie, Arch. Math. **12** (1961), 470—476.
[10]* Kennzeichung der ternären orthogonalen Gruppen, J. reine angew, Math. **209** (1962), 105—143.
[11]* Metrische Geometrie der Ebene und S-Gruppen, Jahresber. deutsch math. Verein. **69** (1966), 9—50
[12]* Absolute Geometrie der Ebene, Math.-Phys Semesterber. **14**, N 1 (1967), 68—78.
[13]* Metrische Ebenen mit dreiseitverbindbaren Punkten, I, II, Math. Z. **100** (1967), 314—350; 351—372.

Лингенберг и Баур
[1] Der Synthetische und der analytische Standpunkt in der Geometrie, Grundzüge der Mathematik, под редакцией H. Behnke, F. Bachmann, K. Fladt und W. Süss, т. 2, Geometrie, Göttingen, 1960, 95—137.

Лобачевский Н. И.
[1] Полное собрание сочинений, т. 1—3, Гостехиздат, 1946—1950.

Менгер (Menger K.)
[1] Non-euclidean geometry of joining and intersecting, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 821—824.
[2] Three lectures on mathematical subjects, The Rice Institute Pamphlet, Houston (Texas) **27**, N 1 (1940).
[3] New projective definition of the concepts of hyperbolic geometry, Rep. Math Coll. Notre Dame, II ser. **7** (1946), 20—28.

Мёбиус (Möbius A. F.)
[1] Gesammelte Werke, т. 2, Leipzig, 1886.

Моррис (Morris W. S.)
[1] The geometry of the rotation group, Princeton, Junior paper, 1936.

Мюллер (Müller H.)
[1]* Zur Begründung der ebenen absoluten Geometrie aus Bewegungsaxiomen, диссертация, München, 1966.

Науман (Naumann H.)
[1] Eine affine Rechtwinkelgeometrie, Math. Ann. **131** (1956), 17—27.
Науман и Райдемайстер (Reidemeister K.)
[1] Über Schließungssätze der Rechtwinkelgeometrie, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **21** (1957), 1—12.
Нольте (Nolte W.)
[1]* Zur Begründung der absoluten Geometrie des Raumes, Math. Z. **94** (1966), 32—60.
Норден А. П.
[1] Элементарное введение в геометрию Лобачевского, Гостехиздат, 1955.
О'Меара (O'Meara O. T.)
[1]** Introduction to quadratic forms, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1963.
Папи (Papy G.)
[1]* Геометрия в современном преподавании математики, Математика в школе, 1967, № 1, 39—42.
[2]* Mathématique moderne, Bruxelles—Paris, т. 1, 1963; т. 2, 1965; т. 5, 1966; т. 6, 1967.
Пас Буханда (Paz Bujanda M.)
[1]* Sobre el caracter algebraica de la geometria, Actas 5 Reun. annual mat. esp. Valencia 1964, Madrid, 1967, 79—89.
Паш (Pasch M.) и Ден
[1] Vorlesungen über neuere Geometrie, Berlin, 1926.
Пейяш (Pejas W.)
[1]** Metrische Teilebenen projektiv-metrischer Ebenen, диссертация, Kiel, 1960.
[2]** Die Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie, Math. Ann. **143** (1961), 212—235.
[3]** Trägheitssatz und halbelliptische Bewegungsgruppen, Math. Ann. **147** (1962), 100—119.
[4]** Eine algebraische Beschreibung der angeordneten Ebenen mit nichteuklidischer Metrik, Math. Z. **83** (1964), 434—457.
Пиери (Pieri M.)
[1]* Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo, Mem. Accad. Sci. Torino (2) **49** (1899), 173—221.
[2]* La geometrie elementare institute sulla nozioni di! «puto» e «sfera», Mem. Math. Fis. Soc. Ital. Schieze (3) **15** (1908), 345—350
Пиккерт (Pickert G.)
[1] Elementare Behandlung des Helmholtzscher Raumproblems, Math. Ann. **120** (1949), 492—501.
[2] Einführung in die höhere Algebra, Göttingen, 1951.
[3] Projektive Ebenen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1955.
Пименов Р. И.
[1]* К основаниям геометрии, ДАН СССР **155** (1964), 44—46.
[2]* Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений, Лит. матем. сб. **5**, № 3 (1965), 457—486.
[3]* Теоретико-групповое описание трех евклидовых плоскостей, Сиб. матем. журн. **8**, № 1 (1967), 49—55.
Подел (Podehl E.) и Райдемайстер
[1] Eine Begründung der ebenen elliptischen Geometrie, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **10** (1934), 231—255.
Понтрягин Л. С.
[1]** Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954.
Прюфер (Prüfer H.)
[1] Projektive Geometrie, Leipzig, 1935.

Райдемайстер
[1] Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie, Berlin, 1930.
[2] Geometria proiettiva non-euclidea, Rend. Sem. mat. Univ. Roma, Ser. III 1, N 2 (1934), 219—228
Робинсон (Robinson G. de B.)
[1] The foundations of geometry, Toronto, 1946.
Саммервиль (Sommerville D. M. Y.)
[1]* Classification of geometries with projective metric, Proc. Edinburgh Math. Soc. 28 (1910), 25—41.
Сас (Szász P.)
[1] Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4 (1953), 243—250; 9 (1958), 29—31.
[2] Unmittelbare Einführung Weierstrassscher homogener Koordinaten in der hyperbolischen Ebene auf Grund der Hilbertschen Endenrechneung, Acta math. Acad. Sci. Hung. 9 (1958), 1—28.
Сегре (Segre C.)
[1] Note sur les homographies binaires et leur faisceaux, J. reine angew. Math. 100 (1887), 317—330.
Сембенотти (Sembenotti L.) и Моргантини (Morgantini E.)
[1]* Sulla construzione gruppale della geometria ellitica della stella, Period. math. 40 (1962), 72—93, 147—162, 193—230, 257—286.
Серве В.
[1]* Аксиоматика и элементарная геометрия, Математика в школе, 1967, № 6, 45—55.
Скотт (Scott D.)
[1]* Simmetric primitive of Euclidean geometry, Indagationes math. 18, N 4 (1956), 456—461.
Стефанос (Stephanos C.)
[1] Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques, Math. Ann. 22 (1883), 299—367.
Тёпкен (Toepken H.)
[1] Zur absoluten Geometrie, Deutsche Math. 5 (1941), 85—94.
[2] Über den Höhensatz in der absoluten Geometrie, Deutsche Math. 5 (1941), 395—401.
Титс (Tits J.)
[1] Généralisations des groupes projectifs basées sur leurs propriétés de transitivité, Acad. roy. Belgique, Mém. Cl. Sci. 27, N 2 (1952).
Томсен (Thomsen G.)
[1] Über einen neuen Zweig geometrischer Axiomatik und eine neue Art von analytischer Geometrie, Math. Z. 34 (1932), 668—720.
[2] Zum geometrischen Spiegelungskalkül, Math. Z. 37 (1933), 561—565.
[3] Grundlagen der Elementargeometrie in gruppenalgebaischer Behandlung, Leipzig und Berlin, 1933.
[4]* The Treatment of Elementary Geometry by a Group-calculus, Math. Gaz. 17, № 224 (1933), 230—242.
Фенхель (Fenhel W.)
[1] Om det projektivgeometriske Grundlag for den ikke-euklidiske Trigonometri, Mat. Tidsskr. B, 1941, 18—30.
Фордер (Forder N. G.)
[1] Foundations of euclidean geometry, Cambridge, 1927.
[2] Geometry, London, 1950.
Фрейденталь (Freudenthal H.)
[1] Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie, Nieuw Arch. Wiskunde (4) 5 (1957), 105—142.

[2]* Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts, Math.-Phys. Semesterberichte **7** N 1 (1960), 2—25.

Ходж В. и Пидо Д.

[1] Методы алгебраической геометрии, т. I, ИЛ, 1954.

Цассенхауз (Zassenhaus H.)

[1] Lehrbuch der Gruppentheorie, Leipzig und Berlin, 1937.

Циммер (Zimmer H. G.)

[1] Über Quadrate der affinen Rechtwinkelgeometrie, Math. Ann. **135** (1958), 340—351.

Шван (Schwan W.)

[1] Streckenrechnung und Gruppentheorie, Math. Z. **3** (1919), 11—28.

[2] Элементарная геометрия, Учпедгиз, 1937.

Шевалле (Chevalley C. C.)

[1] The algebraic theory of spinors, New York, 1954.

Шерф (Scherf H.)

[1]** Begründung der hyperbolischen Geometrie des Raumes, диссертация, Kiel, 1961.

Шиллинг (Schilling F.)

[1] Die Pseudosphäre und die nichteuklidischen Geometrie, Leipzig und Berlin, 1935.

Шмидт (Schmidt A.)

[1] Die Dualität von Inzidenz und Senkrechtstehen in der absoluten Geometrie, Math. Ann. **118** (1943), 609—625.

[2] Über die Bewegungsgruppe der ebenen elliptischen Geometrie, J. reine angew. Math. **186** (1949), 230—240.

Шнейдер (Schneider E.)

[1]* Spiegelungsgeometrie auf der Oberstufe, I, II, Math. und Naturwiss. Unterr. **16** (1964), 388—395, 442—447.

Шоке (Choquet G.)

[1]* L'enseignement de la géométrie, Paris, 1964.

Шпейзер (Speiser A.)

[1] Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin, 1927.

Шпернер (Sperner E.)

[1] Die Ordnungsfunktionen einer Geometrie, Math. Ann. **121** (1949), 107—130.

[2] Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung, S.-B. Heidelberger Akad. Wiss., math.-nat. Kl., 1949, 413—448.

[3] Konvexität bei Ordnungsfunktionen, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **16** (1950), 140—154.

[4] Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik, Arch. Math. **5** (1954), 458—468.

Штаудт (Staudt G. K. C. von)

[1] Geometrie der Lage, Nürnberg, 1847.

[2] Beiträge zur Geometrie der Lage, I, II, III, Nürnberg, 1856, 1857, 1860.

Штрамбах (Strambach K.)

[1]* Salzmann-Ebenen mit hinreichendend vielen Punkt- oder Geradenspiegelungen, Math. Z. **99**, N **3** (1967), 247—269.

Шур (Schur F.)

[1] Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1909

Шютте (Schütte K.)

[1] Eine Schließungssatz für Inzidenz und Orthogonalität, Math. Ann **129** (1955), 424—430.

[2] Die Winkelmetrik in der affin-orthogonalen Ebene, Math. Ann. **130** (1955), 183—195.

[3] Gruppentheoretisches Axiomensystem einer verallgemeinerten euklidischen Geometrie, Math. Ann. **132** (1956), 43—62.

[4] Schließungssätze für ortogonale Abbildungen euklidischer Ebenen, Math. Ann. **132** (1956), 105—120.
[5] Der projektiv erweiterte Gruppenraum der ebenen Bewegungen, Math. Ann. **134** (1957), 62—92.

Эббот (Abbot J. C.)
[1] The projective theory of non-eculidean geometry, Rep. Math. Coll. Notre Dame, II ser. **3** (1941), 13—27; **4** (1943), 22—30; **5/6** (1944), 43—52.

Эйхлер (Eichler M.)
[1] Quadratische Formen und Orthogonale Gruppen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1952.

Эллерс (Ellers E.) и Карцель
[1]* Involutorische Geometrien, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **25** (1961), 93—104.
[2]* Kennzeichung elliptischer Gruppenräume, Abh. math. Sem. Univ. Hamb. **26** (1963), 55—77.

Юнг Дж. В.
[1] On the partitions of a group and the resulting classification, Bull. Amer. Math. Soc. **33** (1927), 453—461.
[2]* Проективная геометрия, ИЛ, 1949.

Яглом И. М.
[1]* Геометрические преобразования I, Движения и преобразования подобия, Гостехиздат, 1955.

Яглом И. М. и Ашкинузе В. Г.
[1]* Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч. I, Аффинная геометрия, Учпедгиз, 1962.

Яглом И. М., Розенфельд Б. А., Ясинская Е. У.
[1]* Проективные метрики, УМН **19**, № 5 (1964), 51—113.

УКАЗАТЕЛЬ СИМВОЛОВ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Фридрих Бахман

Построение геометрии на основе понятия симметрии

М., 1969., 380 стр. с илл.

Редактор *В. В. Донченко*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская*

Корректор *И. Б. Мамулова*

Сдано в набор 10/VI 1968 г. Подписано к печати 23/I 1969 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 23,75. Условн. печ. л. 23,75. Уч.-изд. л. 25,62. Тираж 13500 экз. Цена книги 2 р. 04 к. Заказ № 1333.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.