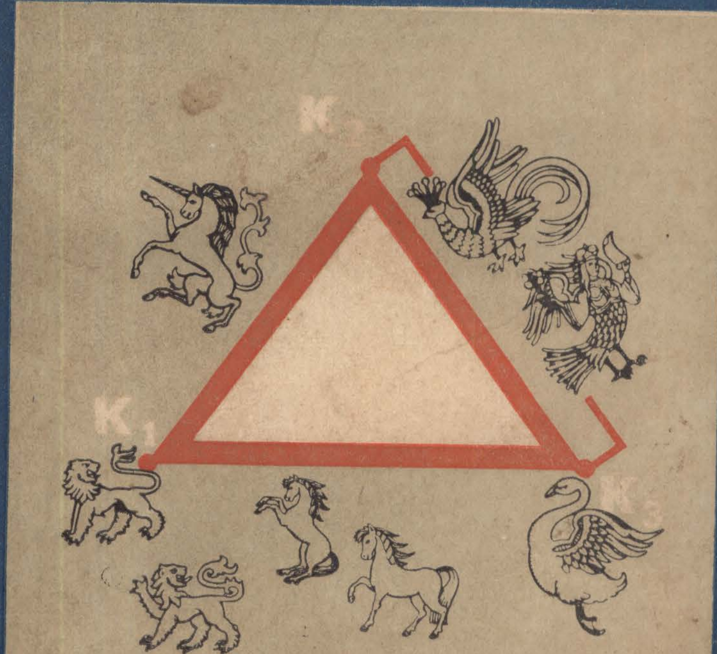
Ю. А. ШРЕЙДЕР

Равенство
сходство
порядок



Ю. А. ШРЕЙДЕР

РАВЕНСТВО СХОДСТВО ПОРЯДОК

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

512
Ш 86
УДК 512

Равенство, сходство, порядок. Ю. А. Шрейдер, Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1971.

В книге рассказывается о том, как можно формально описать свойства хорошо знакомых всем отношений, указанных в заглавии.

На этом примере выясняется, как происходит переход от привычных, но неточных понятий к строгим математическим определениям.

Необходимость строгого описания простейших отношений возникает в математической логике, кибернетике, математической лингвистике и т. п. Простейшим примерам из математической лингвистики посвящена последняя глава книги.

Рис. 72.

9-2-2
72-71

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга писалась как популярное введение в теорию бинарных отношений. Бинарные отношения, изучавшиеся ранее с точки зрения специальных потребностей математической логики, оказались очень простым и удобным аппаратом для весьма разнообразных задач. Язык бинарных (и более общих) отношений очень удобен и естествен для математической лингвистики, математической биологии и целого ряда других прикладных (для математики) областей. Это очень легко объяснить, если сказать, что геометрический аспект теории бинарных отношений есть попросту теория графов. Но насколько геометрическая теория графов известна и хорошо освещена в литературе самого разнообразного жанра — от популярной до монографической, настолько алгебраические аспекты теории отношений изложены весьма скудно.

А между тем алгебра отношений может быть рассказана вполне общедоступно. Так, чтобы ее могли усвоить старшие школьники, занимающиеся в математических кружках, лингвисты, занимающиеся по роду своей работы математическими моделями языка, студенты гуманитарных специальностей, нуждающиеся в определенном математическом образовании, научные работники, занимающиеся какими-либо аспектами кибернетики, и т. п.

Эта книга писалась с расчетом на то, чтобы ее смогли использовать читатели — не математики по профессии. Во всяком случае на такого читателя рассчитан основной материал первых пяти глав. Шестая глава требует некоторого навыка в чтении математической литературы. Седьмая глава написана специально для лингвистов и математиков, занимающихся математической лингвистикой. Для более широкого круга читателей она явится только частным примером.

Как правило, более сложный или более частный материал группируется в конце разделов или выделяется петитом. Так, § 4 главы II является частной геометрической иллюстрацией отношения эквивалентности. Последний параграф главы III предназначен для читателей, намеревающихся специально изучать структуру пространств толерантности — он содержит некоторые новые результаты. Последний параграф главы IV посвящен весьма специальным структурам, возникающим при описании синтаксических отношений во фразе, и предназначен для тех, кто намерен серьезно изучать главу VII.

Пятая глава является несложной иллюстрацией того, какие отношения фактически употребляются в школьной математике.

Формально говоря, чтение этой книги не требует никаких знаний, кроме школьного курса математики и некоторых сведений из теории множеств (эти сведения могут быть почерпнуты, например, из приложения 2). Однако было бы полезно, чтобы читатель обладал знанием основ математики на уровне книги Ю. А. Шихановича «Введение в современную математику» (М., «Наука», 1965). В некотором смысле настоящая книга является естественным продолжением главы VII книги Ю. А. Шихановича, хотя методические установки обоих авторов чуть ли не противоположны.

Дополнительная трудность при написании книги о математике для нематематиков состоит в том, что такая книга должна в определенной степени дать читателю понятие о том, что есть математика. Математик-профессионал получает представление о своей науке из всего процесса обучения, не профессиональный читатель составляет свое представление о математике из доступных ему источников. Ходячие представления о математике очень часто неверны, хотя к математике сейчас обращаются очень многие. Иногда от нее ждут готовых рецептов, как решить ту или иную прикладную задачу — такое представление порой складывается в результате обучения школьному или втузовскому курсу. Очень часто написание сложных формул есть просто мистический ритуал, призванный «освятить» и придать достоверность весьма шатким выводам — это своеобразный симптом общей веры в надежность истины постольку, поскольку она выражена в научной форме.

Мне хотелось в этой небольшой книге показать, как осуществляется переход от привычных интуитивных понятий, вроде одинаковости, сходства *) или порядка, к точно определенным математическим понятиям, позволяющим проводить логически строгие рассуждения. При этом хотелось бы предостеречь от неосторожного перенесения выводов, сделанных для данного конкретного уточнения (или, как принято говорить, экспликации) данного понятия, на общий случай, где эти понятия носят только интуитивный характер. Изучение таких экспликаций показывает, в частности, что одно и то же общее понятие допускает разные уточнения с разными свойствами. Это заставляет особенно осторожно относиться к нестрогим выводам или перенесению строгих выводов на ситуации с не строго определенными понятиями. В сущности здесь действует некий принцип соразмерности строгости вывода с точностью самого утверждения.

На простейшем материале, использованном в этой книге, мне хотелось показать, как происходит переход от абстрактного, аксиоматического определения объекта к его явному описанию. Это одна из очень важных для математики идей, что мы можем в ряде случаев «перечислить» все объекты, обладающие некоторыми заданными свойствами. Или, иначе, разобраться, как устроены объекты с заданными свойствами.

Бинарные отношения дают, кроме всего прочего, хороший запас содержательных примеров для таких важных общеалгебраических понятий, как полугруппа, гомоморфизм и т. п. В этом польза изучения алгебры бинарных отношений для тех, кто потом рассчитывает глубже изучать математику.

---

*) Следует отметить, что понятие отношения толерантности, уточняющее понятие сходства (и родственное ему понятие неразличимости), лишь совсем недавно ввел Э. Зиман. (См., например, Э. Зиман и О. Бьюнеман, Толерантные пространства и мозг, сб. «На пути к теоретической биологии», М., «Мир», 1970.)

Автор хотел бы выразить свою благодарность ряду лиц, разным образом способствовавших появлению на свет этой книги.

С М. В. Араповым мы систематически обсуждали, что в сущности есть математическое описание языка. Эти обсуждения не могли не сказать на изложении и отборе материала.

С В. Б. Борщевым мы совместно создали некоторые языковые модели, отразившиеся в этой книге. Ему я обязан также рядом конкретных замечаний в ходе изложения.

Т. Д. Вентцель я признателен за написанный ею § 4 главы II и обсуждение замысла книги.

Н. Я. Виленкин сделал много ценных замечаний при рецензировании рукописи.

Своему учителю И. М. Гельфанду я глубоко благодарен за принципиальное обсуждение роли «размытых» моделей в лингвистике и других областях. Он же обратил мое внимание на важную работу Зимана о толерантности, что и послужило толчком к моим занятиям в этой области.

Моей ученице Е. Н. Ефимовой я благодарен за неоднократные обсуждения свойств графов, возникающих в лингвистике.

Художнице О. Н. Раздобудько я глубоко признателен за интересное обсуждение смысла иллюстраций, что несомненно оказало влияние на текст книги.

Ряд вопросов, затронутых в этой книге, мне довелось обсуждать с С. Я. Фитиаловым. В частности, в ходе этих бесед возник один из результатов, приведенных в шестой главе.

Многолетнее общение с М. Л. Цетлиным безусловно сказалось на эволюции моих представлений от чисто формальных взглядов на математические модели к идее специфичности моделей живых систем, одной из которых безусловно является язык.

Большую благодарность я испытываю к редактору книги Ю. А. Шихановичу, сумевшему устранить значительное количество имевшихся огрехов, что потребовало очень большого труда.

Своей ученице С. М. Якубович я хотел бы выразить благодарность за активный интерес к совместной работе при изучении свойств отношения толерантности.

ВВЕДЕНИЕ

Мы будем все время иметь дело с простыми категориями, которыми мы повседневно пользуемся, называя определенным образом те или иные ситуации.

Основная трудность (в данном случае — вполне преодолимая) состоит в том, чтобы эти совершенно обыденные категории перевести в ранг точных математических понятий. Подобный перевод весьма типичен для математики. Он даже имеет специальное название. Когда мы переходим от расплывчатого и привычного понятия к точно формулируемому, то это последнее называется экспликацией исходного.

Так, например, математическое понятие «алгорифм» есть экспликация такого обычного понятия как «метод решения задачи».

Возьмем еще пример, требующий большей математической эрудиции: понятие «производная», лежащее в основе дифференциального исчисления, есть не что иное, как экспликация интуитивно ясного понятия «скорость изменения данной величины».

Довольно очевидно, что, поскольку исходное понятие всегда бывает достаточно расплывчатым, оно допускает не одну экспликацию.

В сущности эта книга посвящена экспликации одного существенного понятия, а именно, «отношения», и его основных разновидностей. Что такое отношение, проще всего пояснить примерами. Следующие суждения в действительности выражают отношения между некоторыми объектами:

«Иван — брат Петра»,

«Иван — сосед Петра»,

«Железо тяжелее воды»,

«Киев южнее Москвы»,

«Ночь и день имеют одинаковое количество букв».

Эти пять предложений выражают отношения разного типа. Однако можно заметить родство в характере отношений, утверждаемых первым, вторым и пятым предложениями. Все они говорят о том, что некие два объекта принадлежат общему классу: сыновей общих родителей, жителей одного дома или поселка, слов с фиксированным числом букв. Третье и четвертое отношения имеют то общее, что выражают относительный порядок объектов в системе. Когда мы говорим, что железо тяжелее воды, мы не предполагаем, что вещества делятся на категории легких и тяжелых. И не утверждаем, что железо тяжелое, а вода легкая. Свинец еще тяжелей железа, а водород гораздо легче воды. Точно так же, деление городов на южные и северные отнюдь не обязательно, чтобы четвертое предложение было справедливым. С точки зрения жителей Мурманска, Москва — это весьма и весьма южный город с черными ночами и созревающими фруктами, а для тбилисцев Киев имеет все основания считаться северным. Даже если бы мы предложили условное деление городов на южные и северные, то в каждой из групп можно было бы найти опять-таки более южных и более северных представителей.

В дальнейшем мы сможем четко определить эту интуитивно ощущаемую разницу между отношениями того и другого типа. Мы увидим, что первый, второй и пятый примеры — это отношения типа эквивалентности, определяющие разбиения объектов на классы подобных друг другу. Остальные два примера — это отношения типа порядка, устанавливающие относительное расположение объектов в системе.

Важно обратить внимание на следующее обстоятельство. Во всех пяти примерах четко выделяются названия объектов и названия отношений. Если вместо названия объекта подставить в предложение название другого объекта, то возможны следующие ситуации:

1) отношение опять будет выполнено;
2) отношение перестанет выполняться;
3) отношение потеряет смысл.

Так, если в третье предложение вместо слова «железо» мы подставим слово «медь», то суждение останется справедливым. Если в четвертое предложение вместо слова «Москва» подставить «Ташкент», то оно перестанет быть верным. Если же в четвертое предложение вместо Москвы поставить «железо», то суждение обратится в бессмыслицу. Аналогично, подставив в первое суждение объекты из четвертого, мы получим предложение «Киев — брат Москвы». Можно, конечно, понимать его в переносном смысле, но ясно, что слово «брат» тогда уже не будет значить «сын общих родителей». (Ср. выражение «Киев — мать городов русских».)

Любопытно, что в пятое предложение можно подставлять, казалось бы, любые объекты, поскольку для любого слова имеет смысл говорить о числе букв. Это объясняется тем, что слова «ночь» и «день» в этом предложении употреблены не как имена соответствующих явлений, а как имена самих себя. Более точно это предложение должно было бы звучать так:

«Слово „ночь“ и слово „день“ имеют одинаковое количество букв».

В таком виде уже ясно, что сама форма суждения ограничивает класс объектов — объектами отношения здесь могут быть только сами слова.

Итак, мы видим, что говорить об отношении можно только тогда, когда мы умеем выделять множество объектов, на которых это отношение определено. Значит, прежде чем пытаться формализовать понятие отношения, нужно научиться формально говорить о множествах и их свойствах. Трудность состоит в том, что понятие множества является в математике «первичным»: его обычно не считают нужным определять через другие понятия. Более того, в полной теории множеств имеются парадоксы.

Мы не будем здесь излагать теорию множеств. Автор в сущности надеется, что первоначальные понятия теории множеств читателю уже знакомы. Но, чтобы не отпугнуть читателя, незнакомого с этими понятиями, мы изложим в приложении 2 те сведения о множествах, на которые будем опираться в дальнейшем.

ГЛАВА I

ОТНОШЕНИЯ

§ 1. Как задается отношение

Задать отношение — это значит указать: между какими объектами оно выполняется. Например, отношение «быть братом» полностью определено, если мы составим список всех пар людей таких, что один из них — брат второго.

Заметим, что мы здесь заранее выбрали множество объектов, между которыми определяется отношение. Именно, отношение «быть братом» мы полагаем заданным на множестве людей. Рассмотрим несколько простых примеров. Предположим, что Татьяна, Александр и Михаил — дети одних и тех же родителей, перечисленные в порядке старшинства. Тогда на этом множестве из трех людей отношение «быть братом» выполнено для следующих пар:

«Александр — брат Татьяны»,

«Александр — брат Михаила»,

«Михаил — брат Татьяны»

«Михаил — брат Александра».

В первом и третьем суждении объекты нельзя поменять местами. Это означает, что отношение «быть братом», вообще говоря, не симметрично. Если «x — брат y», то «y — брат x» только в том случае, когда y — мужчина. Полезно обратить внимание, что отношение «Александр — брат Александра» не выполнено, т. е. данное отношение, как принято говорить, не рефлексивно. По этому поводу можно напомнить старую загадку: «Сын моего отца, а мне не брат. Кто это такой?».Ответ теперь ясен: «Я сам».

Отношение «быть старше» выполнено на том же множестве для следующих пар:

«Татьяна старше Александра»,

«Татьяна старше Михаила»,

«Александр старше Михаила».

Следующий пример показывает, что отношения можно устанавливать и между объектами разных множеств. Рассмотрим множество M_1 учащихся некоторой школы и множество M_2 учителей той же школы. Тогда существует естественное отношение «x — ученик y», где x — один из учащихся (элемент множества M_1), а y — один из учителей (элемент множества M_2). Ясно, что для одного и того же ученика x это отношение может выполняться при разных y. И, наоборот, один и тот же учитель y имеет разных учеников.

Отношение может быть определено не только для пар объектов (*бинарные* отношения), но и для троек, четверок и т. д. Например, отношение «образовывать футбольную команду» выполняется для некоторых групп из 11 людей. Оно задается списками основных составов футболистов, участвующих в различных матчах. Это отношение не следует путать с бинарным отношением «входить в одну футбольную команду». Действительно, два игрока из одной команды еще не образуют команды. Команду может образовывать только комплект из 11 игроков.

Хороший пример трехместных (или, как любят говорить математики, *тернарных*) отношений доставляют алгебраические операции. Например, отношение «образовывать сумму» имеет смысл для троек чисел $\langle x, y, z\rangle$ и выполняется в том случае, когда

$$x + y = z.$$

Пропорциональность чисел x, y, z, u:

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{u}$$

есть отношение, выполненное для некоторых четверок чисел $\langle x, y, z, u\rangle$.

Мы будем изучать в основном бинарные отношения, т. е. отношения, которые выполняются (или не выполняются) между двумя объектами. Перейдем к точному определению.

Пусть дано некоторое множество M. Рассмотрим множество всех пар вида $\langle x, y \rangle$, где x и y — элементы множества M. Эти пары мы будем считать упорядоченными, т. е. будем различать пару $\langle x, y \rangle$ и пару $\langle y, x \rangle$ *). Множество таких упорядоченных пар принято обозначать $M \times M$.

Отношением A *на множестве* M мы будем называть подмножество A множества $M \times M$.

Содержательный смысл такого определения состоит как раз в том, что выбор подмножества A во множестве $M \times M$ определяет, какие пары находятся в отношении A. Это обстоятельство подчеркивается следующим соглашением об обозначениях. Если пара $\langle x, y \rangle$ входит в A, т. е. $\langle x, y \rangle \in A$, то мы пишем

$$xAy,$$

что читается: «x находится в отношении A с y». Само выражение xAy мы будем называть *соотношением*.

Подчеркнем, что отношение — это не просто множество соответствующих пар, а подмножество множества пар $M \times M$ при фиксированном множестве M. Говоря более формально, отношением называется упорядоченная пара $\langle A, M \rangle$, где $A \subseteq M \times M$. Итак, отношение — это пара $\langle A, M \rangle$, где M — множество, на котором определено отношение, а A — множество пар, для которых это отношение выполнено. Множество M мы будем называть *областью задания* отношения A.

Множество пар A в книге Ю. А. Шихановича «Введение в современную математику» называется *графиком* отношения $\langle A, M \rangle$. В тех случаях, когда мы рассматриваем отношения на одном и том же множестве M, мы вполне можем позволить себе роскошь не указывать явно область задания. В этом случае можно мысленно отождествлять отношение и множество пар, для которых оно выполнено (график отношения). В частности, мы полагаем вполне допустимым обозначать само отношение и его график одной и той же буквой.

*) Кроме, разумеется, случая, когда x и y совпадают.

Однако бывают ситуации, когда рассматриваются отношения с различными областями задания. Тогда приходится обращаться с более громоздкими обозначениями отношений в виде пар $\langle A, M\rangle$.

Вот одна из типичных ситуаций подобного рода. Мы будем называть отношение $\langle A, M\rangle$ *сужением* отношения $\langle A_1, M_1\rangle$ на множество M, если $M \subseteq M_1$ и $A = A_1 \cap (M \times M)$. Последнее означает, что соотношение xAy между элементами множества M выполнено в том и только том случае, когда выполнено соотношение xA_1y. Если из контекста ясно, что A есть сужение отношения A_1, то мы будем допускать обозначение обоих отношений одной и той же буквой. Сужение отношения $\langle A_1, M_1\rangle$ на множество M мы будем иногда называть просто *отношением* A_1 *на множестве* M.

Приведем несколько примеров отношений. Пусть M — некоторое множество людей. И пусть A — множество таких пар $\langle x, y\rangle$, что «x знаком с y». Сокращением записи в кавычках служит запись «xAy».

Еще одним примером может служить отношение «быть типичным представителем». Существует распространенный тест, когда человеку предлагают написать, не думая, на листе бумаги название фрукта, название домашней птицы и цифру. Большинство дает стандартный ответ: «Яблоко, курица, 7». Этот ответ и говорит о том, кого мы считаем в данном случае типичным представителем (эталоном). На рис. 1.1 изображены три группы геральдических животных, в каждой из которых выбран представитель, типичный для членов этой группы: орел является эталоном для всех геральдических орлов, в том числе и двуглавых; конь — эталон для пегаса, кентавра и единорога; козел наверняка послужил прототипом козерога.

Пусть теперь M — множество участников шахматного турнира. Будем говорить, что «x — победитель y», если x в этом турнире обыграл y. (Предполагается, что турнир игрался в один круг.) Вместо того, чтобы выписывать все пары $\langle x, y\rangle$, для которых выполнено отношение «быть победителем», можно просто выписать турнирную таблицу, заменив половинки нулями. Дело в том, что если участники x и y сыграли вничью, то никто из них не является победителем

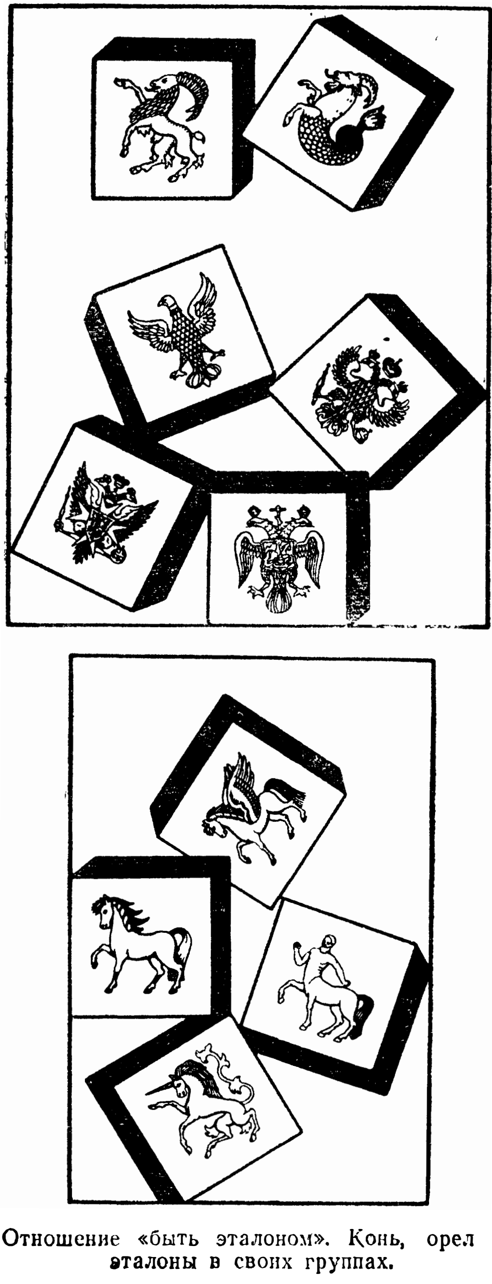


Рис. 1.1. Отношение «быть эталоном». Конь, орел и козел — эталоны в своих группах.

другого. В этом случае не выполнены оба соотношения: «x — победитель y» и «y — победитель x». Мы приведем соответственно откорректированную таблицу мемориала Ласкера (1968 г.). Заметим, что по этой искаженной таблице можно получить всю информацию о результатах встреч. Кроме того, если выполнено соотношение «x — победитель y», то это вовсе не значит, что «x лучше сыграл в турнире, чем y». Это уже совсем другое отношение. Так, «Барцаи — победитель Ульмана», хотя Ульман стоит выше по турнирной таблице.

Участники	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	О	М
1 Бронштейн .		0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	10 1/2	I—II
2 Ульман . . .	1		0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	10 1/2	I—II
3 Суэтин . . .	0	0		0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	9 1/2	III
4 Васюков . .	0	0	0		0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	9	IV—V
5 Барцаи . . .	0	1	0	1		0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	9	IV—V
6 Зайцев А. . .	0	0	0	0	0		0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	8 1/2	VI—VII
7 Фукс	0	1	1	0	1	0		0	1	0	0	0	1	0	0	0	8 1/2	VI—VII
8 Малих . . .	0	0	0	0	0	0	0		0	1	0	0	0	0	0	1	8	VIII—IX
9 Чом	0	0	0	1	0	0	0	0		1	1	0	0	1	0	0	8	VIII—IX
10 Минич . . .	0	0	1	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	1	1	6 1/2	X
11 Хенингс . . .	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	1	6	XI—XII
12 Цинн	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		0	0	1	0	6	XI—XII
13 Радович . . .	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	5 1/2	XIII
14 Шенеберг . .	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0		0	0	5	XIV—XV
15 Эспиг	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		0	5	XIV—XV
16 Ортега . . .	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0		4 1/2	XVI

В действительности, мы получили общий способ задания бинарного отношения на конечном множестве, который называется *матричным*. В общем виде этот способ можно описать так. Пусть M — n-элементное множество и A — отношение на нем. Перенумеруем элементы множества M целыми числами от 1 до n. Построим теперь квадратную таблицу размером $n \times n$. Ее i-я строка соответствует i-му элементу множества M, а j-й столбец — j-му элементу множества M. На пересечении i-й строки и j-го столбца ставится единица, если выполнено соотношение $x_i A x_j$, и нуль —

в противном случае. Обозначим элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, через a_{ij}. Общее правило задания матрицы отношения можно сформулировать так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если выполнено} \quad x_i A x_j, \\ 0, & \text{если не выполнено} \quad x_i A x_j. \end{cases}$$

Матрицу, составленную из элементов a_{ij}, принято обозначать $\|a_{ij}\|$. Очевидно, эта матрица содержит всю информацию о том, для каких пар элементов из M выполнено отношение A.

Итак, отношение A на конечном множестве M может быть задано матрицей $\|a_{ij}\|$. Произвол состоит только в выборе нумерации на M. Легко догадаться, что можно выбрать $n!$ различных нумераций и, соответственно, $n!$ матриц, описывающих данное отношение. Если задана матрица размером $n \times n$ из нулей и единиц и выбрана нумерация на множестве M, то тем самым на M задается некоторое отношение A.

Матрица, для которой $a_{ij} \equiv 0$ (т. е. $a_{ij} = 0$ при всех i и j), задает *пустое отношение* $\varnothing$, которое не выполняется ни для одной пары.

Матрица, для которой $a_{ij} \equiv 1$, задает *полное отношение* $M \times M$, выполненное для всех пар.

Особую роль играет также матрица $\|\delta_{ij}\|$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

(Символ δ_{ij} называется *символом Кронекера* по имени математика, впервые его употребившего.) Этой матрице соответствует так называемое *диагональное отношение* E, или *отношение равенства*: xEy, если x и y — один и тот же элемент множества M.

Матрица $\|\delta_{ij}\|$ имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Полезно также ввести *антидиагональное отношение* условием:

$$a_{ij} = 1 - \delta_{ij}.$$

Для пустого, полного, диагонального и антидиагонального отношений имеет место любопытное свойство — их матрицы не зависят от выбора нумерации элементов множества M. Читатель может убедиться, что это свойство характерно для этих четырех отношений. Иначе говоря, если отношение A таково, что при любом выборе нумерации в M матрицы $\|a_{ij}\|$ совпадают, то A — либо пустое, либо полное, либо диагональное, либо антидиагональное.

Существует еще и другой важный способ задания бинарных отношений на конечных множествах. Изобразим элементы конечного множества M точками на плоскости. Если выполнено соотношение x_iAx_j, то проведем стрелку от x_i к x_j. Если x_iAx_i, то у точки x_i нарисуем петлю, выходящую из x_i и входящую в ту же точку. Такая фигура называется *ориентированным графом*, или просто *графом*, а сами точки — *вершинами* графа. Пустому отношению $\varnothing$ соответствует граф без стрелок и петель. Диагональное отношение изображается графом, в котором присутствуют только петли (рис. 1.2).

Рис. 1.2. Диагональное отношение.

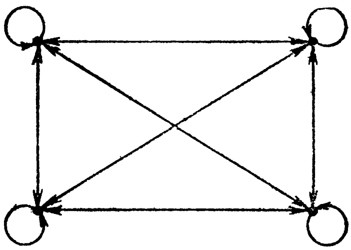


Рис. 1.3. Полное отношение.

Полное отношение изображается так называемым *полным графом*, где все вершины соединены со всеми (см. рис. 1.3).

Изобразим еще в виде графа приведенную ранее турнирную таблицу (рис. 1.4). Ясно, что петель в этом графе нет. Номера вершин соответствуют номерам участников в таблице. Чтобы граф был сравнительно обозрим, мы приводим только часть его, соответствующую первым восьми участникам. В этом графе восьмая вершина изолирована, поскольку Малих сыграл вничью со всеми участниками, ставшими выше его по таблице.

Граф есть геометрическое изображение отношения аналогично тому, как график есть геометрическое изображение функции. Геометрический язык полезен, когда граф достаточно прост. Наоборот, изучать и описывать сложные графы с большим числом вершин удобнее в терминах отношений.

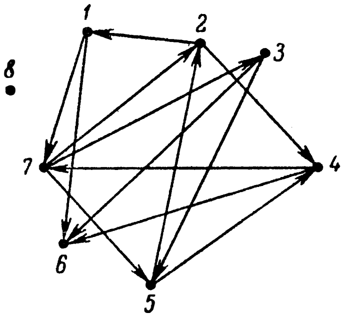


Рис. 1.4. Граф мемориала Ласкера.

Часто приходится рассматривать более общий случай отношений между элементами разных множеств M и L. Такое *отношение* определяется как подмножество A множества $M \times L$. Здесь $M \times L$ обозначает множество пар вида $\langle x, y \rangle$, где $x \in M$, а $y \in L$. Формально такое отношение определяется как тройка вида $\langle A, M, L \rangle$, где $A \subseteq M \times L$ *).

В математике рассматривают также тернарные и, вообще, n-арные отношения. *n-арное отношение* определяется как подмножество A множества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, т. е. множество n-ок вида $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, где $x_i \in M_i$. В частности, все M_i могут совпадать.

§ 2. Функции как отношения

Частным случаем отношений можно считать и функции. Пусть отношение A на множестве M таково, что для всякого $x \in M$ существует ровно один элемент

*) К сожалению, автору нравится различные объекты: пары $\langle A, M \rangle$ и тройки $\langle A, M, L \rangle$ — называть одинаково: отношениями. Однако в нашей литературе существуют и различные термины для таких объектов: пары $\langle A, M \rangle$ такие, что $A \subseteq M \times M$, называют *отношениями*, а тройки $\langle A, M, L \rangle$ такие, что $A \subseteq M \times L$, называют *соответствиями*. См., впрочем, § 2, особенно стр. 24 (*Прим. ред.*).

$y \in M$, для которого справедливо соотношение xAy. Тем самым каждому элементу $x \in M$ сопоставляется некоторый элемент $y \in M$, определенный этим условием. Такое отношение называется *функцией*, или *отображением* (или *однозначным соответствием*), а сам элемент $y \in M$, соответствующий элементу $x \in M$, называется *значением функции A на элементе x*. Эта зависимость между x и y выражается обозначением

$$y = A(x)$$

Множество A тех пар $\langle x, y \rangle$, для которых выполнено соотношение xAy, называется *графиком* функции.

Например, если M — числовая прямая, а отношение A есть отношение равенства $y = x$, то график состоит из всех точек вида $\langle x, x \rangle$ и является биссектрисой координатного угла, т. е. обычным графиком функции $y = x$. Если отношение A выполнено для тех пар, для которых $y = \sin x$ (ясно, что для каждого x существует единственное число y, обладающее этим свойством), то график этой функции есть обычная синусоида.

Итак, наше определение графика является обобщением обычного графика числовых функций.

В данном случае очень полезно рассмотреть отношения на таких парах $\langle x, y \rangle$, где x принадлежит множеству M, а y — другому множеству L. Отношение α этого вида мы снова будем называть *функцией*, или *отображением*, если для каждого $x \in M$ существует единственный элемент $y \in L$, для которого выполнено соотношение $x\alpha y$. Такую функцию α мы будем символически записывать как $\alpha : M \to L$; здесь M называется *областью отправления* функции α, а L — ее *областью прибытия*. Отображение $\alpha : M \to L$ называется также *отображением множества M в множество L*. Элемент множества L, который при этом соответствует элементу x из M, обозначается $\alpha(x)$ и называется *образом* элемента x. Сам элемент x называется *прообразом* элемента $\alpha(x)$. Из определения отображения $\alpha : M \to L$ явствует, что каждый элемент $x \in M$ имеет ровно один образ. Но не всякий элемент $y \in L$ обязан иметь прообраз. Если же такой прообраз существует, то он не обязан быть единственным.

Пример 1. Пусть M — множество людей, а L — множество натуральных чисел. Пусть $\alpha : M \to L$ —

отображение, которое каждому человеку ставит в соответствие его рост, выраженный в сантиметрах (округленный, как принято, до целочисленного значения). Ясно, что каждому человеку соответствует определенный рост, но значение роста: 400 *см* — не соответствует никакому человеку. С другой стороны, существует масса людей, у которых рост — 172 *см*.

Пример 2. Пусть M — множество ныне живущих людей, L — множество всех людей, а отображение $\alpha: M \to L$ ставит в соответствие каждому человеку его отца. Ясно, что у каждого $x \in M$ имеется единственный образ. Но не у всякого $y \in L$ есть прообраз, так как далеко не всякий человек является отцом другого. Например, если y — женщина. Кроме того, несколько человек могут иметь общего отца.

Отображение $\alpha: M \to L$ называется *сюръективным*, если любой элемент y из L имеет прообраз. В этом случае говорят еще, что M отображается *на* L.

Например, пусть M — множество всех русских слов, L — множество частей речи русского языка, а отображение $\alpha: M \to L$ сопоставляет каждому слову часть речи, к которой оно принадлежит. Ясно, что каждая часть речи соответствует по крайней мере одному слову — примеру на эту часть речи. (Мы здесь считаем, что грамматические омонимы каким-то образом уже различены, т. е. про слово «печь» известно, глагол это или существительное.)

Отображение $\alpha: M \to L$ называется *инъективным*, если для каждого элемента $y \in L$ существует не более одного прообраза.

Например, пусть M — множество людей, стоящих в некоторой очереди, L — множество натуральных чисел, а отображение $\alpha: M \to L$ сопоставляет каждому находящемуся в очереди его порядковый номер. Ясно, что каждый номер может быть присвоен лишь одному человеку. С другой стороны, это отображение не сюръективно, так как существуют номера, не присвоенные никому.

Если отображение $\alpha: M \to L$ одновременно сюръективно и инъективно, то оно называется *биективным*. Множества M и L, для которых существует биективное отображение $\alpha: M \to L$, называются *равномощными*. Легко убедиться, что если M конечно, а M и L равномощны, то M содержит такое же число элементов, как L. Для этого достаточно пересчитать все элементы из M; если элементу $x \in M$ приписан номер $n(x)$, то тот же номер следует приписать его образу $\alpha(x)$. Так как отображение сюръективно, то все элементы множества L получат номера. Так как отображение инъективно, то каждый элемент из L получит единственный номер. Тем самым для пересчета элементов множества L требуется ровно столько же номеров, сколько для пересчета элементов множества M. Легко сообразить, что количество элементов не зависит от способа их пересчета.

Для бесконечных множеств равномощность естественно принять в качестве обобщения понятия «иметь одинаковое количество элементов».

Полезно ввести еще такие понятия.

Пусть $\alpha : M \to L$ и M_1 — подмножество множества M. *Образом множества* M_1 (обозначается через $\alpha(M_1)$) мы назовем множество всех образов $\{\alpha(x)\}$, где $x \in M_1$. В частности, $\alpha(M)$ есть образ всего M. Легко видеть, что $\alpha : M \to \alpha(M)$ есть сюръективное отображение.

Аналогично, если $L_1 \subseteq L$, то *полным прообразом множества* L_1 (обозначается через $\alpha^{-1}(L_1)$) называется объединение прообразов всех элементов, входящих в L_1.

Определим теперь так называемое *единичное отображение* множества M:

$$\varepsilon_M : M \to M,$$

которое каждому элементу $x \in M$ сопоставляет этот самый элемент. (Легко видеть, что единичное отображение ε — это то же самое, что и диагональное отношение E.) Пусть $\alpha : M \to L$; отображение $\beta : L \to M$ называется *обратным* к α, если $\alpha\beta = \varepsilon_M$ и $\beta\alpha = \varepsilon_L$, т. е. если отображение β переводит любой образ $\alpha(x)$ в x, а отображение α переводит любой образ $\beta(y)$ в y. В этом случае мы будем писать: $\beta = \alpha^{-1}$. Читатель легко убедится в том, что для существования отображения, обратного к α, необходимо и достаточно, чтобы α было биективным.

Иногда бывает удобно рассматривать функции $\alpha : M \to L$, которые определены не на всем M, а только на некотором его подмножестве M_1, которое тогда называется *областью определения* функции. Тогда удобно пополнить множество L до множества $L_{\#} = L \cup \{\#\}$, т. е. прибавить к L элемент $\#$, не входивший ранее в L. Элемент $\#$ играет роль как бы *пустого* элемента. В таком случае мы считаем (опять-таки, по определению), что отображение $\alpha: M \to L_{\#}$ ставит в соответствие любому элементу из $M \setminus M_1$ пустой элемент $\#$. Часто бывает удобно рассуждать так, как будто пустой элемент $\#$ заранее содержится в любом множестве. Тогда не нужно различать L и $L_{\#}$.

Пример 1. M — некоторое множество людей в данный момент времени, а L — множество их головных уборов. Функция $\alpha: M \to L$ сопоставляет каждому человеку надетый на нем головной убор. Ясно, что функция α определена лишь на подмножестве множества M, состоящем из людей, у которых что-то надето на голову. Остальным, простоволосым, сопоставляется пустой головной убор.

Пример 2. M — множество русских словоформ, а L — множество русских окончаний. Функция α сопоставляет каждой словоформе ее окончание:

бежать — ать
окно — о
столом — ом
. . . . . .

Словоформам «стол», «пальто», «вместе» соответствуют нулевые (пустые) окончания*). (Иногда букву «о» в слове «пальто» неграмотные люди воспринимают как окончание именительного падежа среднего рода и пытаются склонять это слово по падежам. Но это вовсе не русское окончание, а часть французской основы «Paletot».)

Иногда и для произвольного отношения $\langle A, M, L\rangle$ об элементах y таких, что xAy, удобно говорить как об элементах, сопоставленных, или соответствующих, элементу x. В этих случаях отношение $\langle A, M, L\rangle$, которое приобретает, так сказать, функциональный характер, мы будем называть *соответствием*. Таким образом, соответствие — это «многозначная» функция. Запись

$$\psi: M \to L$$

*) Термин «нулевое окончание» (нулевая морфема) принят в научной грамматике. В старой орфографии пустое окончание у склоняемых существительных удобно обозначалось твердым знаком: столъ, снопъ и т. д.

для произвольного отношения $\psi = \langle A, M, L \rangle$ и будет как раз означать, что мы рассматриваем отношение ψ как соответствие.

Можно было бы, разумеется, вместо соответствия ψ: $M \to L$ рассматривать функцию

$$\alpha: M \to 2^L,$$

которая каждому элементу $x \in M$ сопоставляет множество $L_x \subseteq L$ всех тех y, для которых $\langle x, y \rangle \in A$ (L_x может быть, в частности, пустым); однако язык соответствий (= «многозначных функций») часто бывает более удобным.

Как и в случае «однозначных» функций, можно ввести понятия *всюду определенного соответствия* (для любого $x \in M$ множество L_x непусто), *инъективного соответствия* (для любых $x \neq y$ $L_x \cap L_y = \varnothing$) и *сюръективного соответствия* (для всякого $y \in L$ существует $x \in M$, для которого $y \in L_x$).

§ 3. Операции над отношениями

Исходя из операций над множествами, мы можем определить ряд полезных операций над отношениями. В этом параграфе мы будем считать, что все отношения заданы на одном и том же множестве M.

Итак, возьмем два отношения A и B. Каждому из них соответствует некоторое множество пар (подмножества $A \subseteq M \times M$ и $B \subseteq M \times M$).

Пересечением отношений $A \cap B$ мы назовем отношение, определяемое пересечением соответствующих подмножеств. Ясно, что соотношение $x A \cap B y$ выполнено тогда и только тогда, когда одновременно выполнены xAy и xBy.

Пример. Пусть M — множество вещественных чисел, A — отношение «быть не меньше», B — отношение «быть не равным». Тогда $A \cap B$ есть отношение «быть строго больше». В самом деле, xAy равносильно тому, что $x \geqslant y$; xBy равносильно тому, что $x \neq y$. Но эти неравенства выполняются одновременно тогда и только тогда, когда $x > y$.

Аналогично, *объединением* отношений $A \cup B$ мы назовем отношение, определяемое объединением соответствующих множеств. Соотношение $x A \cup B y$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из соотношений xAy или xBy.

Например, если A — отношение «больше» на множестве чисел, а B — отношение «равно», то $A \cup B$ — это отношение $\geqslant$.

Для отношений можно определить понятие включения. Мы будем писать $A \subseteq B$, если множество пар, для которых выполнено первое отношение, содержится во множестве тех пар, для которых выполнено второе отношение. Соответственно, мы будем писать: $A \subset B$, если множество пар A является подмножеством множества B, причем $A \neq B$.

Например, выполнено включение

$$< \subset \leqslant.$$

В самом деле, если $x < y$, то заведомо $x \leqslant y$. Но существуют такие пары, что $x \leqslant y$, но неверно соотношение $x < y$. Это будет в том случае, когда $x = y$.

Очень важно отметить такое (вполне очевидное из определения) свойство включения: если $A \subseteq B$, то из xAy следует xBy. И обратно: если из xAy следует xBy, то $A \subseteq B$.

Отсюда видно, что для любого отношения A

$$\varnothing \subseteq A \subseteq U,$$

где $\varnothing$ — пустое, а U — полное отношения.

Теперь мы введем некоторые операции, не сводящиеся непосредственно к теоретико-множественным.

Простейшая из них — переход к обратному отношению. Если A — отношение на множестве M, то *обратное отношение* A^{-1} определяется условием: $xA^{-1}y$ равносильно yAx.

Например, если A — отношение $>$, то A^{-1} есть отношение $<$. В самом деле, запись $x < y$ равносильна записи $y > x$. Еще пример: если A означает «быть мужем», то A^{-1} — «быть женой».

Очень важную роль играет операция, обозначаемая AB — *произведение* отношений. Эта операция определяется следующим образом: соотношение $xABy$ равносильно тому, что существует такое $z \in M$, для которого выполнены соотношения xAz и zAy.

Пусть A — отношение «быть женой», а B — «быть отцом». Что означает в этом случае соотношение $xABy$? По определению существует такое z, что «x —

жена z» и «z — отец y». Иначе, «x есть жена отца y», т. е. «x — мать или мачеха y».

Пусть A — отношение «быть братом», а B — отношение «быть родителем». Тогда произведение AB есть отношение «быть братом одного из родителей», т. е. «быть дядей».

Раньше в русском языке (как до сих пор в польском) различались дядя — брат отца (стрый) и дядя — брат матери (вуй). Это отличие очень легко формулируется в терминах произведения отношений. Пусть A — отношение «быть братом», B — «быть отцом», а C — «быть матерью». Тогда отношение AB есть «быть стрыем», а отношение AC означает «быть вуем».

Возьмем теперь хорошо знакомые отношения «меньше» (обозначим его A) и «больше» (обозначим его B) на множестве целых чисел. Соотношение $xABy$ выполнено, если существует z такое, что $x < z$ и $z > y$. Ясно, что такое z существует всегда — можно взять, скажем, $z = x + y + 1$. Таким образом, AB есть, в данном случае, полное отношение.

В следующем параграфе мы убедимся, что произведение отношений обладает рядом хороших алгебраических свойств, роднящих его с обычным произведением чисел. А пока попробуйте определить, что за отношение будет AA? А что это за отношение, если A (отношение «меньше») задать на множестве всех вещественных чисел? А какие отношения выражают AB и BA, если A и B — те же отношения неравенства $<$ и $>$ на множестве M, состоящем только из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Определим еще одну важную операцию, которая называется транзитивным замыканием отношения A и будет обозначаться через $\hat{A}$. Смысл этого названия будет ясен из теоремы 1.5 (§ 5).

Если A — некоторое отношение на множестве M, то его *транзитивное замыкание* определяется следующим образом. Соотношение $x\hat{A}y$ считается выполненным, если существует цепочка элементов из M: $z_0 = x$, $z_1, \ldots$ $\ldots, z_n = y$ такая, что между соседями в этой цепочке выполнено отношение A:

$$z_0Az_1, \quad z_1Az_2, \quad \ldots, \quad z_{n-1}Az_n.$$

В частности, эта цепочка может состоять только из двух элементов ($n=1$): $z_0=x$ и $z_1=y$. Значит, если выполнено xAy, т. е. z_0Az_1, то выполнено и соотношение $x\hat{A}y$. Этот факт можно записать в виде соотношения

$$A \subseteq \hat{A}. \tag{1.1}$$

Если цепочка состоит из трех элементов ($n=2$), то это значит, что xAz и zAy. Иначе говоря, $xAAy$. Если цепочка состоит из четырех элементов, то $xAAAy$. Продолжая это рассуждение, мы заключаем, что $x\hat{A}y$ в том и только в том случае, когда выполнено хотя бы одно соотношение вида $xAA\ldots Ay$. Или, сокращенно, xA^ny. Используя операцию объединения, этот факт можно записать в виде равенства

$$\hat{A}=A\cup A^2\cup A^3\cup \ldots \cup A^n\cup \ldots \tag{1.2}$$

Итак, мы доказали, что транзитивное замыкание отношения A есть объединение всех степеней этого отношения.

Теперь выясним, как введенные операции можно выразить с помощью операций над матрицами и графами. Поскольку матрицы, которые нам нужны, состоят только из нулей и единиц, нам будет полезно ввести специальную (так называемую *булеву*) арифметику на множестве из нуля и единицы. Эта арифметика задается следующими двумя таблицами — сложения и умножения:

$$\begin{array}{ll} 0+0=0 & \quad 0\cdot 0=0 \\ 0+1=1 & \quad 0\cdot 1=0 \\ 1+0=1 & \quad 1\cdot 0=0 \\ 1+1=1\ (!) & \quad 1\cdot 1=1 \end{array}$$

Как видим, эта арифметика отличается от обычной только тем, что сложение двух единиц дает в результате единицу. Зато, оперируя над числами 0 и 1, мы не выходим за пределы этих чисел. Легко убедиться, что в этой арифметике мы можем выполнять привычные преобразования, но не можем пользоваться вычитанием: $1-1$ может равняться и нулю и единице.

Теперь мы можем определить операции над матрицами и графами, соответствующие операциям над отношениями.

Далее мы условимся, что нумерация на множестве M уже выбрана и что матрицы, соответствующие (при данной нумерации) отношениям A и B, обозначены $\|a_{ik}\|$ и $\|b_{ik}\|$.

Очевидно, величина

$$c_{ik} = a_{ik} b_{ik} \tag{1.3}$$

равна единице в том и только в том случае, когда выполнены оба соотношения $x_i A x_k$ и $x_i B x_k$, т. е. когда выполнено соотношение $x_i A \cap B x_k$. Значит, матрица $\|c_{ik}\|$, определенная по (1.3), представляет отношение $C = A \cap B$. Этому факту можно придать несколько иное выражение. Назовем *пересечением матриц* $\|a_{ik}\| \cap \|b_{ik}\|$ матрицу $\|c_{ik}\|$, полученную почленным перемножением элементов исходных матриц (согласно (1.3)). Тогда пересечение отношений представляется пересечением матриц.

Например, пусть A и B представляются матрицами четвертого порядка (M содержит четыре элемента):

$$\|a_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \|b_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тогда пересечение $A \cap B$ представляется матрицей

$$\|c_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

В терминах графов пересечение определяется так. Нарисуем множество вершин M и изобразим отношение A пунктирными стрелками, а отношение B — штриховыми стрелками. Теперь соединим простыми стрелками те и только те вершины, которые соединены обоими типами стрелок. Очевидно, что этот граф изображает пересечение отношений $A \cap B$ (рис. 1.5).

Объединение отношений $A \cup B$, представляемых матрицами $\|a_{ik}\|$ и $\|b_{ik}\|$, может быть аналогично выражено с помощью операции *объединения* (сложения) *матриц*. А именно, обозначим через $\|c_{ik}\| = \|a_{ik}\| +$

$+ \|b_{ik}\|$ матрицу, элементы которой определяются условием

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}. \tag{1.4}$$

В формуле (1.4) сложение понимается в смысле булевой арифметики. Посмотрев на таблицу сложения

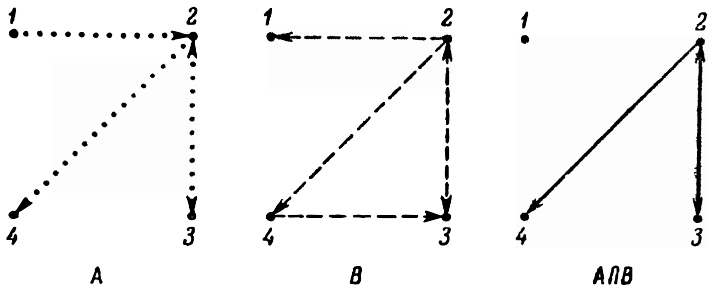


Рис. 1.5. Пересечение отношений.

в этой арифметике, мы легко убеждаемся, что $c_{ik} = 1$ в том и только том случае, когда хотя бы одно из слагаемых a_{ik} или b_{ik} равно единице. Значит, $c_{ik} = 1$ равносильно тому, что $x_i A \cup B x_k$.

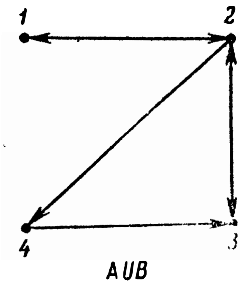


Рис. 1.6. Объединение отношений.

Для предыдущего примера матриц четвертого порядка их объединение представляется матрицей

$$\|c_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Граф объединения строится путем проведения стрелок между всеми вершинами, которые соединены стрелкой хотя бы одного типа. Взяв графы A и B из рис. 1.5, мы получим граф объединения таким, как он изображен на рис. 1.6.

Произведение отношений AB представляется так называемым *произведением матриц*. Эта, играющая большую роль в алгебре, операция над матрицами определяется следующим правилом:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk},$$

или, используя сокращенное обозначение для суммы,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}. \tag{1.5}$$

Число n обозначает здесь порядок матрицы — количество элементов множества M. Несмотря на простоту утверждаемой связи между произведениями отношений и матриц, проведем необходимое доказательство.

Пусть выполнено соотношение x_iABx_k. Покажем, что величина c_{ik}, вычисленная согласно (1.5), равна единице. Действительно, по определению произведения отношений существует элемент $x_j \in M$ такой, что x_iAx_j и x_jBx_k. Это значит, что $a_{ij} = b_{jk} = 1$. Значит, $a_{ij}b_{jk} = 1$. Но по правилам булевой арифметики, если одно из слагаемых равно единице, то сумма (1.5) заведомо равна единице, т. е. $c_{ik} = 1$. Обратно, пусть $c_{ik} = 1$. Тогда среди слагаемых в (1.5) хотя бы одно равно единице. Пусть это будет $a_{ij}b_{jk}$. Но произведение $a_{ij}b_{jk}$ равно 1 только тогда, когда $a_{ij} = b_{jk} = 1$. А это означает, что x_iAx_j и x_jBx_k, т. е. x_iABx_k.

Итак, мы доказали, что произведению отношений соответствует произведение матриц.

Графовая интерпретация произведения такова. Пусть опять отношение A изображается пунктирными стрелками, а B — штриховыми. Соединим вершины x_i и x_k простой стрелкой, если можно пройти из x_i в x_k так: сначала из x_i по пунктирной стрелке в некоторое x_j, а затем из x_j по штриховой стрелке в x_k (рис. 1.7). Эти новые стрелки изображают произведение отношений AB.

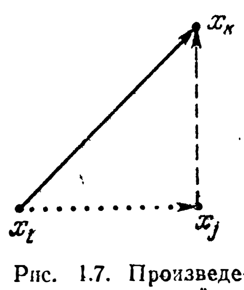
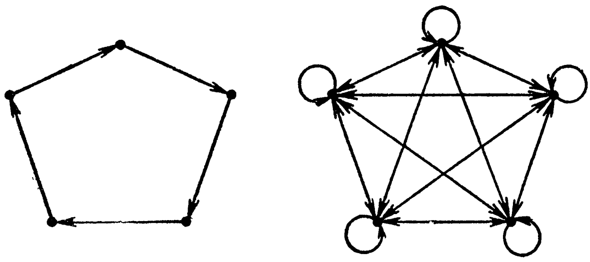


Рис. 1.7. Произведение отношений.

На рис. 1.7 видно, что способ построения графа для произведения отношений напоминает правило параллелограмма для сложения скоростей или сил. Сходство это не случайно. Пусть M — множество точек на плоскости, и соотношение xAy означает, что из точки x можно попасть в точку y за единицу времени, двигаясь со скоростью a, а соотношение xBy означает, что, двигаясь со скоростью b, можно за единицу времени попасть из x в y. Тогда $xABy$ означает, что, двигаясь со скоростью $a + b$, можно за единицу времени попасть из x в y.

Операция A^{-1} в матричной форме выражается весьма просто. Если A представляется матрицей $\|a_{ik}\|$, то A^{-1} изображается матрицей $\|\alpha_{ik}\|$, у которой поменялись ролями строки и столбцы: $\alpha_{ik} = a_{ki}$. Иначе говоря, матрица для A^{-1} получается из исходной матрицы симметричным отражением относительно главной диагонали. Действительно, если $a_{ik} = 1$, то x_iAx_k



A $\hat{A}$

Рис. 1.8. Транзитивное замыкание отношения.

и $x_kA^{-1}x_i$, т. е. $\alpha_{ki} = 1$. Если же $a_{ik} = 0$, то $\alpha_{ki} = 0$.

Пример.

$$A \to \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A^{-1} \to \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Чтобы из графа, изображающего отношение A, получить граф, изображающий отношение A^{-1}, надо все стрелки поменять на противоположно направленные, а все петли оставить на месте.

Операция транзитивного замыкания $\hat{A}$ в матричной форме выражается через объединение степеней матрицы A согласно формуле (1.2). Более наглядным является переход от графа, изображающего отношение A, к графу, изображающему отношение $\hat{A}$. В самом деле, из определения транзитивного замыкания следует, что в новом графе стрелка соединяет вершины x_i и x_k, если в исходном графе существует путь, ведущий из x_i в x_k по направлению стрелок. На рис. 1.8 изображен граф отношения A. Очевидно, что из любой его вершины есть путь, ведущий в любую вершину, в том числе и в ее самое. Таким образом, отношению $\hat{A}$ соответствует в данном случае полный граф.

§ 4. Алгебраические свойства операций

Поскольку операции пересечения и объединения отношений возникли из теоретико-множественных операций пересечения и объединения, то все их свойства в точности таковы, как у теоретико-множественных операций.

Рассмотрим теперь алгебраические свойства остальных операций.

У операции обращения A^{-1} есть важное свойство. Оно выражается равенством

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{1.6}$$

Действительно, $x(A^{-1})^{-1}y$ равносильно тому, что $yA^{-1}x$. А последнее равносильно тому, что xAy.

Операция умножения AB, в отличие от умножения обычных чисел, не перестановочна: в общем случае, $AB \neq BA$. Это можно увидеть на простом примере, когда отношения представляются следующими матрицами:

$$A \to \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B \to \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

В этом случае

$$AB \to \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad BA \to \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Выкладки предоставляем читателю. Впрочем, они хорошо понятны в графовом представлении отношений (рис. 1.9, где отношение A изображено пунктиром, а отношение B — штрихами. При каждой вершине подразумеваются две — пунктирная и штриховая — петли.).

В случае, когда произведение отношений не зависит от порядка: $AB = BA$, говорят, что A и B *коммутируют.*

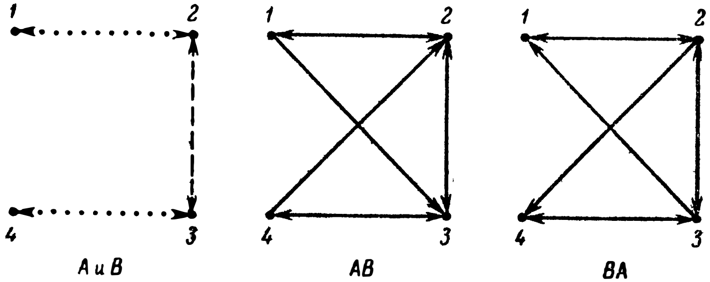


Рис. 1.9. Пример некоммутативности произведения.

Легко проверить, что диагональное отношение E играет роль единицы:

$$AE = EA = A \tag{1.7}$$

для любого отношения A.

Аналогично, для пустого отношения имеем

$$A\varnothing = \varnothing A = \varnothing. \tag{1.8}$$

В самом деле, $x\varnothing Ay$ не может выполняться ни для какой пары, так как $x\varnothing z$ никогда не выполнено. Равенство (1.8) означает, что пустое отношение $\varnothing$ ведет себя относительно умножения отношений как нуль при обычном умножении чисел.

Ассоциативный (сочетательный) закон оказывается справедливым для произведения отношений:

$$(AB)C = A(BC). \tag{1.9}$$

В самом деле. Если $x(AB)Cy$, то существует такое z, что $xABz$ и zCy. Из $xABz$ вытекает существование такого w, что xAw и wBz. Из wBz и zCy следует $wBCy$. Из xAw и $wBCy$ получаем $xA(BC)y$. Аналогично, из $xA(BC)y$ легко вывести $x(AB)Cy$. Итак, (1.9) доказано.

Ассоциативный закон позволяет отказаться от расстановки скобок в произведениях и писать просто:

ABC, $ABCD$ и т. п. Вместо произведений типа AAA, $AAAA$ мы будем писать степени A^3, A^4, ... *).

Теперь рассмотрим свойства, связывающие различные операции.

Простейшее из этих свойств — правило обращения произведения:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{1.10}$$

Действительно, $x(AB)^{-1}y$ означает, что $yABx$, т. е. существует z, для которого yAz и zBx. Но это значит, что $xB^{-1}z$ и $zA^{-1}y$, т. е. $xB^{-1}A^{-1}y$.

Другое свойство, связывающее операции обращения и произведения, состоит в следующем: если для всякого x существует такое z, что xAz, то

$$AA^{-1} \supseteq E. \tag{1.11}$$

Действительно, из xAz следует $zA^{-1}x$, т. е. $xAA^{-1}x$. Но xEy означает, что $x = y$. Значит, из xEy следует $xAA^{-1}y$.

Аналогично, если для всякого x существует такое z, что zAx, то

$$A^{-1}A \supseteq E. \tag{1.12}$$

Доказанные свойства означают, что для отношений, которые выполняются не слишком редко (каждый элемент x хоть с кем-то да находится в отношении A), операция обращения похожа на числовую операцию перехода от a к a^{-1}: включения (1.11) и (1.12) близки к числовому равенству $a^{-1}a = 1$, так как E, как уже говорилось, играет у нас роль единицы.

Следующие два свойства связывают операцию произведения с пересечением и объединением. Они похожи на распределительный (дистрибутивный) закон умножения относительно сложения. Первый из этих «распределительных законов» имеет вид

$$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC). \tag{1.13}$$

Доказывается он таким образом. Сначала предположим, что выполнено соотношение $x(A \cup B)Cy$. Это означает существование такого z, что выполнено по крайней мере одно из соотношений: xAz или xBz — и соотношение zCy. Тогда выполнено либо $xACy$, либо $xBCy$. Значит, выполнено соотношение $x(AC) \cup (BC)y$. Обратно, пусть выполнено $x(AC) \cup (BC)y$. Это значит, что либо $xACy$, либо $xBCy$. То есть либо существует z_1, для которого xAz_1 и z_1Cy, либо существует z_2, для

*) Ассоциативность умножения отношений и обозначение A^n уже использовались в § 3 (см. (1.2)).

которого xBz_2 и z_2Cy. Но так как $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq \subseteq A \cup B$, то в первом случае имеем $x(A \cup B)z_1$ и z_1Cy, т. е. $x(A \cup B)Cy$. Во втором случае: $x(A \cup B)z_2$ и z_2Cy, т. е. опять-таки $x(A \cup B)Cy$. Итак, из выполнения правой части (1.13) следует выполнение левой части и обратно. Тем самым равенство (1.13) доказано.

Второй «распределительный закон» имеет более слабую форму включения:

$$(A \cap B)C \subseteq (AC) \cap (BC). \tag{1.14}$$

Предположим, что выполнено соотношение $x(A \cap \cap B)Cy$. Это означает, что существует z такое, что одновременно выполнены соотношения xAz, xBz и zCy. Значит, одновременно выполнены пары соотношений: xAz и zCy; xBz и zCy. Или $xACy$ и $xBCy$, т. е. $x(AC) \cap \cap (BC)y$, что и требовалось доказать.

Но заменить в (1.14) включение равенством нельзя. Возьмем конкретные отношения A, B, C на множестве из четырех элементов $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, так что выполнены только следующие соотношения (рис. 1.10): x_1Ax_2, x_1Bx_3, x_2Cx_4, x_3Cx_4. Ясно, что $A \cap B = \varnothing$. Стало

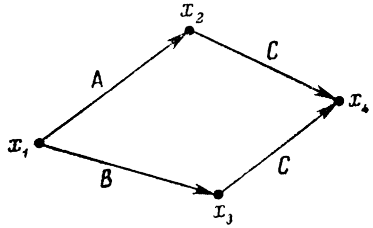


Рис. 1.10.

быть, согласно (1.8), $(A \cap B)C = \varnothing$. С другой стороны, x_1ACx_4 и x_1BCx_4. Следовательно, $x_1(AC) \cap \cap (BC)x_4$, т. е. $(AC) \cap (BC) \neq \varnothing$. В этом случае имеем строгое включение

$$(A \cap B)C \subset (AC) \cap (BC),$$

что показывает невозможность замены в (1.14) включения на равенство.

Предоставляем читателю проверить следующие простые свойства операций:

$$(A \cup B)^{-1} = A^{-1} \cup B^{-1}, \tag{1.15}$$

$$(A \cap B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1}. \tag{1.16}$$

Для операции транзитивного замыкания справедливо следующее важное свойство:

$$\text{если } A \subseteq B, \quad \text{то} \quad \hat{A} \subseteq \hat{B}. \tag{1.17}$$

Доказательство мы предоставляем читателю. Аналогично, подобная «монотонность» выполнена для других операций, а именно:

1) если $A \subseteq B$, то $A^{-1} \subseteq B^{-1}$; (1.18)

2) если $A \subseteq B$, то $AC \subseteq BC$ и $CA \subseteq CB$. (1.19)

Наконец, очевидно следующее свойство:

$$\hat{\hat{A}} = \hat{A}. \tag{1.20}$$

По-видимому, этим исчерпываются основные свойства операций, справедливые для любых отношений. В следующих главах мы изучим алгебраические свойства этих операций для некоторых специальных классов отношений.

В качестве заготовки на дальнейшее мы определим некоторые операции, выражающиеся через исходные:

1) симметризованное произведение —

$$A \circ B = AB \cup BA;$$

2) транзитивное замыкание объединения —

$$A \mathbin{\hat{\cup}} B = \widehat{A \cup B};$$

3) транзитивное замыкание симметризованного произведения —

$$A \mathbin{\hat{\circ}} B = \widehat{A \circ B}.$$

Из определения ясно, что эти три операции коммутативны.

Однако ассоциативный закон для симметризованного произведения уже не обязан быть справедливым в общем случае. В самом деле, пользуясь доказанным ранее распределительным законом, сосчитаем два тройных произведения:

$$(A \circ B) \circ C = (AB \cup BA)C \cup C(AB \cup BA) =$$
$$= ABC \cup BAC \cup CAB \cup CBA; \tag{1.21}$$

$$A \circ (B \circ C) = A(BC \cup CB) \cup (BC \cup CB)A =$$
$$= ABC \cup ACB \cup BCA \cup CBA. \tag{1.22}$$

Если A и C коммутируют, то

$$BAC \cup CAB = BCA \cup ACB.$$

Сравнивая это равенство с (1.21) и (1.22), получаем, что при $AC = CA$

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C).$$

В частности, ассоциативный закон верен, когда все три отношения коммутируют. Тогда $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C) = ABC$.

Для читателя будет полезным упражнением фактически построить пример таких трех отношений, для которых ассоциативный закон не имеет места.

§ 5. Свойства отношений

Здесь мы укажем некоторые важные свойства отношений, которые позволят нам в дальнейшем выделить существенные классы отношений.

Определение 1.1. Отношение A называется *рефлексивным*, если $E \subseteq A$. Иначе говоря, рефлексивное отношение всегда выполнено между объектом и им самим: xAx.

Содержательные примеры рефлексивных отношений: «быть похожим на», «иметь общий признак с» (если каждый объект имеет хоть один признак), «быть не старше». С другой стороны, отношения типа «быть братом», «быть старше» заведомо не рефлексивны.

Рефлексивные отношения всегда представляются матрицей, у которой на главной диагонали стоят единицы. В графе, изображающем рефлексивное отношение, каждая вершина имеет петлю. Именно поэтому, имея дело с заведомо рефлексивным отношением, мы не будем эти петли изображать на чертеже.

Определение 1.2. Отношение A называется *антирефлексивным*, если из xAy следует $x \neq y$, т. е., в алгебраической записи, $A \cap E = \varnothing$. Иначе говоря, $A \subseteq \neq$, т. е. отношение A может выполняться лишь для несовпадающих объектов.

Отношения, приведенные выше в качестве примеров нерефлексивных отношений, являются антирефлексивными. Отношение «быть эталоном для», вообще говоря, не будет ни рефлексивным, ни антирефлексивным.

Матрица, представляющая антирефлексивное отношение, имеет на главной диагонали нули, а в соответствующем графе петли непременно отсутствуют.

Определение 1.3. Отношение A называется *симметричным*, если $A \subseteq A^{-1}$. Иначе говоря, если выполнено соотношение xAy, то выполнено и соотношение yAx.

Содержательными примерами таких отношений служат «быть похожим на», «быть одинаковым с», «быть родственником».

В матрице, представляющей симметричное отношение, элементы, симметрично расположенные относительно главной диагонали, равны между собой:

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

В соответствующем графе вместе с каждой стрелкой, идущей из вершины x_i в вершину x_k, существует и противоположно направленная стрелка. Поэтому в таком графе можно вообще не обозначать стрелки, а рисовать только петли и отрезки, соединяющие разные вершины. Иначе говоря, симметричное отношение естественно изображается неориентированным графом. Так мы и будем впредь изображать графы заведомо симметричных отношений.

Теорема 1.1. *Отношение A тогда и только тогда симметрично, когда*

$$A = A^{-1}.$$

Доказательство. По определению $A \subseteq A^{-1}$, но, в силу (1.18), имеем

$$A^{-1} \subseteq (A^{-1})^{-1}.$$

Отсюда, согласно (1.6), получается

$$A^{-1} \subseteq A.$$

Сравнивая это включение с исходным, приходим к выводу, что $A = A^{-1}$. Обратное утверждение очевидно.

Определение 1.4. Отношение A называется *асимметричным*, если $A \cap A^{-1} = \varnothing$. Это означает, что из двух соотношений xAy и yAx по меньшей мере одно не выполнено.

Для матричных элементов это приводит к равенству:

$$a_{ik}a_{ki} = 0. \qquad (1.23)$$

В соответствующем графе не может быть стрелок, соединяющих две вершины в противоположном направлении, т. е. направление стрелки всегда существенно.

Теорема 1.2. *Если отношение A асимметрично, то оно антирефлексивно.*

Доказательство. Предположим, что для какого-то x выполнено xAx. Тогда верно было бы и $xA^{-1}x$, т. е. $xA \cap A^{-1}x$. Но тогда отношение $A \cap A^{-1}$ не было бы пустым.

Этот факт можно было бы вывести и из уравнений для матричных элементов: подставляя в (1.23) $i = k$, получаем $a_{kk}^2 = 0$, т. е. $a_{kk} = 0$.

Из теоремы 1.2 вытекает, что граф асимметричного отношения не может иметь петель.

Определение 1.5. Отношение A называется *антисимметричным*, если $A \cap A^{-1} \subseteq E$. Это означает, что оба соотношения xAy и yAx выполняются одновременно только тогда, когда $x = y$.

Для матричных элементов это приводит к утверждению:

$$a_{ik}a_{ki} = 0, \quad \text{если} \quad i \neq k.$$

Определение 1.6. Отношение A называется *транзитивным*, если $A^2 \subseteq A$. Раскрывая алгебраическое условие, приходим к следующему: если xAz и zAy, то выполнено и xAy. По индукции отсюда следует такое свойство: если xAz_1, z_1Az_2, $\ldots$, $z_{n-1}Ay$, то xAy.

Это свойство хорошо интерпретируется на графе, изображающем отношение A. Именно, если точки x и y соединены путем, проходимым по направлению стрелок, то существует стрелка, непосредственно идущая из вершины x в вершину y.

Замечание. Нетрудно показать, что для рефлексивного отношения A транзитивность эквивалентна равенству $A^2 = A$.

Теорема 1.3. *Если A транзитивно, то $A = \hat{A}$.* Иными словами, *транзитивное замыкание транзитивного отношения совпадает с ним самим.*

Доказательство. Сначала докажем, что для транзитивного отношения A верно включение:

$$A^n \subseteq A. \tag{1.24}$$

В самом деле, при $n = 2$ это есть определение транзитивности отношения. Предположим, что (1.24) уже доказано для некоторого n. Тогда, по ассоциативному закону $A^{n+1} = A^n A$; учитывая предположение индукции (1.24) и (1.19), имеем

$$A^{n+1} = A^n A \subseteq AA \subseteq A.$$

Итак, индукция у нас прошла благополучно. Теперь обратимся к формуле (1.2), определяющей транзитивное замыкание $\hat{A}$, и заменим каждый член объединения на больший согласно (1.24). Получаем

$$\hat{A} = A \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots \cup A^n \cup \ldots$$
$$\ldots \subseteq A \cup A \cup \ldots \cup A \cup \ldots = A.$$

Итак, $\hat{A} \subseteq A$. Но, с другой стороны, согласно (1.1), всегда $A \subseteq \hat{A}$. Значит, $A = \hat{A}$. Теорема доказана.

Легко видеть, что имеет место и обратная

Теорема 1.4. *Если $A = \hat{A}$, то A транзитивно.*

Доказательство. Из формулы (1.2) следует, что $A^2 \subseteq \hat{A}$. Так как $\hat{A} = A$, то и $A^2 \subseteq A$.

Теорема 1.5. *Для любого отношения A транзитивное замыкание $\hat{A}$ равно пересечению $\bigcap B$ всех транзитивных отношений B, содержащих A.*

Доказательство. Поскольку $\hat{\hat{A}} = \hat{A}$, из теоремы 1.4 вытекает, что отношение $\hat{A}$ всегда транзитивно. Кроме того, $A \subseteq \hat{A}$. Значит, $\hat{A}$ — одно из B, о которых говорилось в условии. Следовательно, $\hat{A} \supseteq \bigcap B$. Для доказательства обратного включения предположим, что B — произвольное транзитивное отношение, содержащее A. Итак, $A \subseteq B$. По (1.17) $\hat{A} \subseteq \hat{B}$. Но по теореме 1.3 $\hat{B} = B$. Следовательно, $\hat{A} \subseteq B$. Теорема доказана.

Если отношение $\langle A, M \rangle$ есть сужение отношения $\langle A_1, M_1 \rangle$, на него автоматически переносятся все введенные выше свойства последнего отношения. Так, рефлексивность отношения $\langle A_1, M_1 \rangle$ влечет рефлексивность сужения $\langle A, M \rangle$. Действительно, если для любого $x \in M_1$ верно xA_1x, то при $x \in M$ будет также выполнено xAx. Симметричность отношения $\langle A_1, M_1\rangle$ влечет симметричность сужения, поскольку при $x \in M$ и $y \in M$ из xAy следует yAx. Проверку для остальных свойств предоставляем читателю.

§ 6. Инвариантность свойств отношений

В этом параграфе мы изучим случаи, когда те или иные свойства результата операции над отношениями определяются аналогичными свойствами операндов *).

Лемма 1.1. *Если отношения A и B рефлексивны, то рефлексивны и следующие отношения:*

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A^{-1}, \quad AB, \quad \hat{A}.$$

Доказательство непосредственно вытекает из соответствующих определений. Например, из того, что для всякого x выполнены соотношения xAx и xBx, следует, что выполнено $x A\cap B x$ и, подавно, $x A\cup B x$.

Несколько сложнее обстоит дело со свойством антирефлексивности. В этом случае справедлива

Лемма 1.2. *Если отношения A и B антирефлексивны, то антирефлексивны и следующие отношения: $A \cup B$, $A \cap B$, A^{-1}.*

Доказательство этих утверждений проводится столь же легко, как и в предыдущем случае.

Что касается произведения AB и транзитивного замыкания $\hat{A}$ антирефлексивных отношений, то они уже могут и не быть антирефлексивными **). Примером может послужить отношение A, задаваемое на множестве M из двух элементов матрицей

$$A \to \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Легко видеть, что квадрат этой матрицы

$$A^2 \to \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

*) Полезно отметить, что автор несколько нестандартно употребляет термин «лемма». Он называет леммами не только вспомогательные утверждения, но и просто менее значительные теоремы. (*Прим. ред.*)

**) Легко видеть, что произведение AB антирефлексивных отношений A и B тогда и только тогда антирефлексивно, когда $A \cap B^{-1} = \varnothing$. (*Прим. ред.*)

задает уже рефлексивное отношение, а транзитивное замыкание

$$\hat{A} \to \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

как полное отношение, тоже рефлексивно. Советуем читателю нарисовать соответствующие графы.

Теперь рассмотрим, как ведет себя при различных операциях свойство симметричности отношений.

Лемма 1.3. *Если отношения A и B симметричны, то симметричны и следующие отношения: $A \cup B$, $A \cap B$, A^{-1}.*

Доказательство. В силу (1.6) и теоремы 1.1 имеем $(A^{-1})^{-1} = A = A^{-1}$, т. е. отношение A^{-1} также симметрично. Из равенства (1.15) получаем

$$(A \cup B)^{-1} = A^{-1} \cup B^{-1} = A \cup B,$$

т. е. объединение $A \cup B$ симметрично. Из равенства (1.16) имеем

$$(A \cap B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1} = A \cap B,$$

следовательно, симметричность пересечения доказана.

Что касается симметричности произведения, то полный ответ дает здесь

Лемма 1.4. *Чтобы произведение AB симметричных отношений A и B было симметрично, необходимо и достаточно, чтобы отношения A и B коммутировали.*

Доказательство. Пусть $AB = BA$. Тогда, согласно (1.10), имеем

$$(AB)^{-1} = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = AB,$$

т. е. произведение AB симметрично. Обратно, если AB симметрично, то по теореме 1.1 $AB = (AB)^{-1}$. Но тогда по (1.10) получаем $AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$, т. е. $AB = BA$. Лемма доказана.

Знакомые с линейной алгеброй читатели наверняка уже догадались, что эта теорема является просто вариантом известной теоремы о том, что произведение симметричных матриц симметрично в том и только том случае, когда эти матрицы перестановочны (коммутируют).

Следствие. *Транзитивное замыкание $\hat{A}$ симметричного отношения A есть симметричное отношение.*

Действительно, из леммы 1.4 и (1.9) легко вывести, что отношения A^2, A^3, ..., A^n, ... симметричны. Но тогда, согласно (1.2) и лемме 1.3, транзитивное замыкание

$$\hat{A} = A \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots$$

также симметрично.

Советуем читателю доказать это утверждение без леммы 1.4, исходя непосредственно из определения транзитивного замыкания.

Для свойства асимметричности справедлива

Лемма 1.5. 1) *Если отношение A асимметрично, то пересечение $A \cap B$ асимметрично при любом B.* 2) *Если отношение A асимметрично, то асимметрично также и отношение A^{-1}.*

Доказательство. 1) По определению 1.4 $A \cap A^{-1} = \varnothing$. Тогда, согласно (1.16), имеем

$$(A \cap B) \cap (A \cap B)^{-1} = A \cap B \cap A^{-1} \cap B^{-1} =$$
$$= A \cap A^{-1} \cap B \cap B^{-1} = \varnothing \cap B \cap B^{-1} = \varnothing,$$

т. е. $A \cap B$ асимметрично.

2) Аналогично, учитывая (1.6), имеем также

$$A^{-1} \cap (A^{-1})^{-1} = A^{-1} \cap A = A \cap A^{-1} = \varnothing,$$

что означает сохранение асимметричности у обратного отношения.

Объединение асимметричных отношений может уже не быть асимметричным*). Также не обязаны быть асимметричными произведение и транзитивное замыкание асимметричных отношений.

Лемма 1.6. *Если отношения A и B антисимметричны, то антисимметричны также и следующие отношения: $A \cap B$, A^{-1}.*

Доказательство. Для обратного отношения фактически воспроизводится предыдущее рассуждение. Для пересечения доказательство почти совпадает с доказательством леммы 1.5:

$$(A \cap B) \cap (A \cap B)^{-1} = (A \cap A^{-1}) \cap (B \cap B^{-1}) \subseteq E \cap E = E.$$

---

*) Объединение $A \cup B$ асимметричных отношений A и B тогда и только тогда асимметрично, когда $A \cap B^{-1} = \varnothing$. (*Прим. ред.*)

Антисимметричность может не сохраняться при объединении*), произведении и транзитивном замыкании отношений.

Про свойство транзитивности можно утверждать следующее:

Лемма 1.7. *Если отношения A и B транзитивны, то транзитивны также следующие отношения:*

$$A \cap B, \quad A^{-1}, \quad \hat{A}.$$

Доказательство. Пусть справедливы соотношения $x A \cap B y$ и $y A \cap B z$. Тогда справедливы и соотношения xAy, yAz, xBy, yBz. Но в силу транзитивности отношений A и B имеем отсюда $x A \cap B z$, т. е. $A \cap B$ транзитивно. Если верно $xA^{-1}y$ и $yA^{-1}z$, то по определению обратного отношения имеем zAy и yAx, т. е. zAx и $xA^{-1}z$. Это и означает, что A^{-1} транзитивно. Наконец, транзитивность отношения $\hat{A}$ вытекает из (1.20) и теоремы 1.4.

---

*) Объединение $A \cup B$ антисимметричных отношений A и B тогда и только тогда антисимметрично, когда $A \cap B^{-1} \subseteq E$. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА II

ОДИНАКОВОСТЬ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

§ 1. От одинаковости к эквивалентности

В обыденной речи мы часто говорим об одинаковости (о равенстве) каких-то объектов (предметов, множеств, абстрактных категорий), не заботясь о надлежащем уточнении смысла, который мы вкладываем в слово «одинаковый». Попробуем выявить этот смысл, проанализировав различные ситуации, когда мы уверенно считаем некоторые объекты одинаковыми.

Возьмем стандартный комплект шахматных фигур. С точки зрения шахматного игрока все белые пешки в нем одинаковы. Расставляя их на шахматной доске, шахматист будет выбирать их из коробки в произвольном порядке. В начальной позиции все они будут поставлены на вторую горизонталь и шахматист не будет размышлять над вопросом, куда ему лучше поставить выбранную наугад пешку. Точно так же любая из черных ладей при расстановке фигур перед игрой может с равным успехом попасть на королевский или ферзевый фланг. Эти ладьи одинаковы.

Но представим себе другую ситуацию: этот же комплект шахмат отдан ребенку, который играет в солдатики. Для него отдельные пешки могут приобрести индивидуальность, получить имена и метки. Однако в тот момент, когда этот же мальчик начнет использовать шахматы по прямому назначению, пешки одного цвета опять станут одинаковыми.

Возьмем еще одну ситуацию: шахматные фигуры в процессе игры. Предположим, что шахматист стоит перед выбором: отдать ли противнику пешку, проникшую уже на седьмую горизонталь и грозящую вот-вот превратиться в ферзя, или пешку, мирно стоящую в начальной позиции. Ясно, что (при прочих равных условиях) первая пешка гораздо ценней и шахматист уже не считает обе свои пешки одинаковыми. Правда, в этой ситуации объектами являются не сами по себе деревянные фигурки, а «пешки в данной позиции». В позиции этюдного характера каждая пешка играет свою индивидуальную роль, и они, разумеется, не одинаковы для хорошего шахматиста.

Разница здесь того же характера, как между словом русского языка и словом в данном контексте. Например, слова «пешка» и «*пешка*», хотя и напечатаны разным шрифтом, одинаковы, как слова русского языка. Но в контекстах «Гроссмейстер эффектно пожертвовал пешку» и «Он был только пешкой в чужих руках» это слово имеет разные значения. Иначе говоря, слова одинаковы, а значения различаются.

Аналогично, об одинаковости людей мы можем говорить в различном смысле. С профессиональной точки зрения продавца готового платья люди, имеющие один и тот же пол, рост и размер, неразличимы. Они одинаковы в том смысле, что им нужно демонстрировать одни и те же вещи. Впрочем, хороший продавец различает покупателей по их вкусам, а хороший портной понимает, что кроме роста и размера есть индивидуальные особенности фигуры. Но для работника склада, который выдает форму (скажем, штормовые костюмы для альпинистов), существен только размер. Для профессора анатомии малосущественно, на чьем трупе он будет демонстрировать студентам устройство человеческих органов. Но уже для профессора психиатрии нет одинаковых больных.

С точки зрения инспектора по кадрам люди с тождественными анкетными данными одинаковы. Но для научного руководителя лаборатории нет одинаковых и взаимозаменимых сотрудников.

Когда мы приглашаем к себе гостей, то нам совершенно не все равно, кто придет и кого приведет с собой. С точки зрения индивидуальных человеческих взаимоотношений ни один человек не равен другому. Когда мы говорим о всеобщем равенстве людей, то понимаем под этим в действительности равенство прав перед законом, равноценность личностей, но не равенство индивидуальностей.

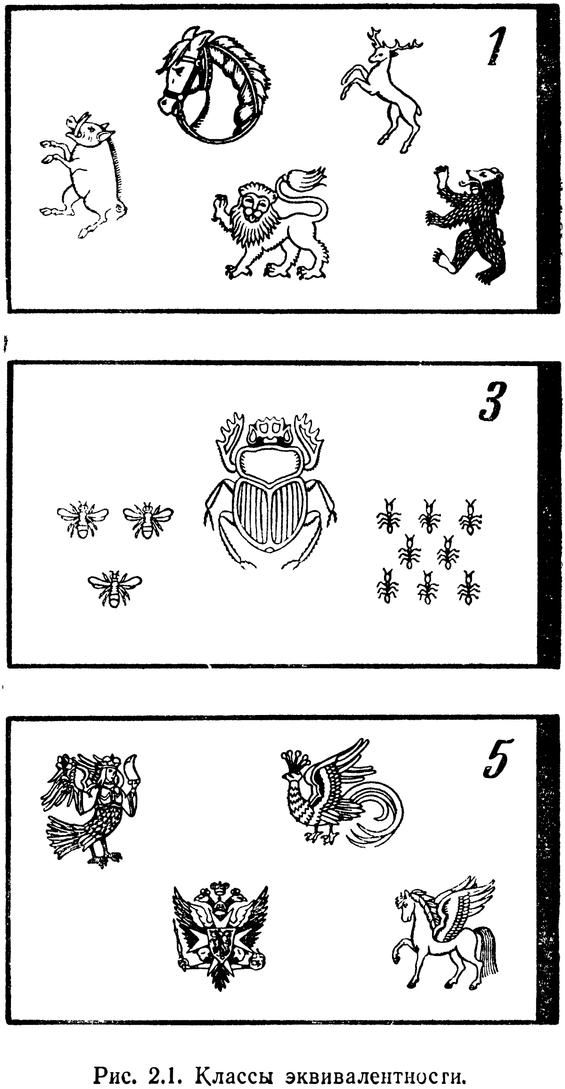


Рис. 2.1. Классы эквивалентности.

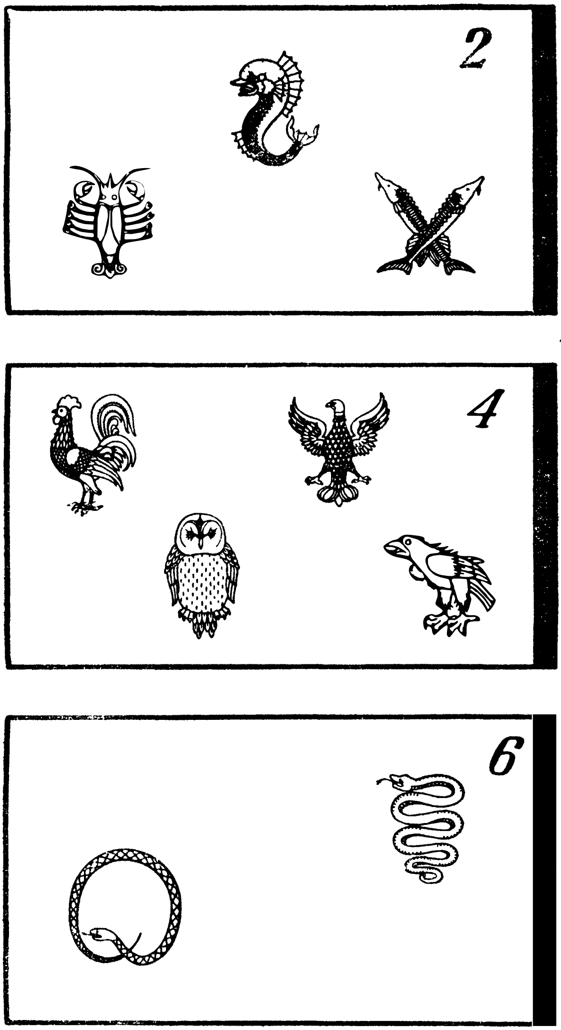


Рис. 2.1. Классы эквивалентности.

Рассмотрим множество животных, изображенных на рис. 2.1. Мы разбили их на следующие шесть групп: (1) сухопутные млекопитающие, (2) обитающие в воде, (3) насекомые, (4) птицы, (5) мифические существа и (6) пресмыкающиеся. Будем считать по определению животных, входящих в одну группу, одинаковыми. Можно вообразить ситуацию, когда одинаковые в этом смысле животные взаимозаменимы. Например, когда учителю биологии надо показать ученикам представителей разных типов.

Если мы внимательно проанализируем, что общего в употреблении слова «одинаковость» во всех приведенных примерах (а также в примерах, которые читатель сумеет теперь составить сам), то мы увидим следующее. Во-первых, *одинаковость* всегда понимается как бинарное отношение на некотором множестве объектов. Во-вторых, содержание этого отношения зависит от ситуации, в которой мы рассматриваем эти объекты, или от наблюдателя, который с выбранной им точки зрения судит об одинаковости объектов. В-третьих, слово «одинаковость» попадает в один синонимический ряд со словом «взаимозаменимость» (объектов в данной ситуации).

Действительно, одинаковость белых пешек или других одноименных и одноцветных фигур состоит в том, что любая из них может заменить другую. Каким бы шрифтом мы ни печатали слово в словаре, оно останется таким же словом. Кажется очень естественным предположить, что в данной ситуации взаимозаменимы те и только те объекты, которые обладают одним и тем же набором формальных признаков, существенных в данной ситуации. В следующем параграфе мы убедимся, что это предположение справедливо и ему можно придать точный смысл, если само понятие одинаковости, или взаимозаменимости, сформулировано точно.

Пусть теперь M — некоторое множество объектов, в котором некоторые объекты взаимозаменимы. Обозначим через M_x множество всех объектов, взаимозаменимых с объектом x. Очевидно, что $x \in M_x$ и объединение всех M_x (при всевозможных x из M) совпадает со всем множеством M:

$$M = \bigcup_{x \in M} M_x. \tag{2.1}$$

Предположим, что $M_x \cap M_y \neq \varnothing$. Это значит, что существует некоторый элемент z такой, что он одновременно принадлежит M_x и M_y. Значит, x взаимозаменим с z и z взаимозаменим с y. Следовательно, x взаимозаменим с y, а значит и с любым элементом из M_y. Таким образом, $M_x \supseteq M_y$. Симметричным рассуждением можно показать, что $M_y \supseteq M_x$. Таким образом, встречающиеся в объединении (2.1) множества M_x либо целиком совпадают, либо не пересекаются.

Проведенное выше рассуждение наводит нас на мысль, как можно строго определить отношение одинаковости, или взаимозаменимости. В связи с этим полезно обратить внимание на способ употребления слов в математике. До сих пор мы имели дело со словами «одинаковость», «взаимозаменимость» (в данной ситуации). Эти слова никак не определялись, а использовались так, как мы привыкли их употреблять в обыденной речи. Но теперь, когда мы хотим дать точное определение (экспликацию), мы выберем и новое название. А именно, мы сейчас определим отношение эквивалентности, которое является экспликацией понятия одинаковости. Все же предыдущие соображения следует рассматривать как мотивировку именно такой экспликации.

Определение 2.1. Систему*) непустых подмножеств $\{M_1, M_2, \ldots\}$ множества M мы будем называть *разбиением* этого множества, если

1) $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots$

и

2) $M_i \cap M_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Сами множества M_1, M_2, ... называются при этом *классами* данного разбиения.

Определение 2.2. Отношение A на множестве M называется *эквивалентностью* (или *отношением эквивалентности*), если существует разбиение $\{M_1, M_2, \ldots\}$ множества M такое, что соотношение xAy выполняется тогда и только тогда, когда x и y принадлежат некоторому общему классу M_i данного разбиения.

*) Нам совершенно несущественно, конечна эта система или бесконечна.

Пусть $\{M_1, M_2, \ldots\}$ — разбиение множества M. Определим, исходя из этого разбиения, отношение A на M: xAy, если x и y принадлежат некоторому общему классу M_i данного разбиения. Очевидно, отношение A является эквивалентностью. Назовем A отношением эквивалентности, *соответствующим* исходному разбиению.

Например, на рис. 2.1 изображено разбиение некоторого множества животных на шесть подмножеств. Соответствующее отношение эквивалентности — это определенное выше отношение одинаковости.

Еще пример: разбиение состоит из подмножеств множества M, содержащих ровно по одному элементу. Соответствующее отношение эквивалентности есть отношение равенства E. Наконец, если разбиение множества M состоит из одного подмножества, совпадающего с самим M, то соответствующее отношение эквивалентности есть полное отношение: любые два элемента являются эквивалентными.

Читатель легко убедится, что пустое отношение (на непустом множестве!) не является эквивалентностью.

Мы подошли к эквивалентности через понятие взаимозаменимости. Но что значит, что два объекта x и y взаимозаменимы в данной ситуации? Это всегда можно понимать так, что каждый из них содержит всю информацию о другом объекте, небезразличную в данной ситуации. Это утверждение не столь уж глубоко; оно означает только то, что взаимозаменимость объектов есть совпадение признаков, существенных в данной ситуации.

Например, пусть мы считаем одинаковыми автомобили, выпущенные в одной и той же серии одним и тем же заводом. Тогда, разобрав один экземпляр «Волги», мы в принципе можем составить комплект рабочих чертежей, который годится для выпуска однотипных «Волг». Однако, изучив один экземпляр «Волги», мы не можем угадать окраску кузова или характер вмятин на бампере у других односерийных экземпляров.

Когда мы выбираем из комплекта одну шахматную фигуру, то мы знаем, куда ее можно поставить в начальной позиции и как ходят все взаимозаменяемые с ней, т. е. одноименные и одноцветные, фигуры. В примере с животными на рис. 2.1, если мы выберем крылатого коня — пегаса, то уже тем самым знаем, что все эквивалентные ему животные возникли из мифов. А это и есть вся информация, существенная в данной классификации.

В данном случае все очень примитивно — объект заключает в себя полную информацию о каждом из эквивалентных ему объектов и не несет никакой информации о всех остальных объектах. Но для других типов отношений (ср. гл. III) эта идея оценки информации, содержащейся в данном объекте относительно другого объекта, может быть развита несколько глубже.

Пусть теперь задано разбиение $\{M_1, M_2, \ldots\}$ множества M. Выберем в каждом множестве M_i некоторый содержащийся в нем элемент x_i. Этот элемент мы будем называть *эталоном* для всякого элемента y, входящего в то же множество M_i. Мы будем — по определению — полагать выполненным соотношение x_iAy. Так определенное отношение A назовем отношением *«быть эталоном»*.

Легко видеть, что эквивалентность $\langle A\rangle$, соответствующая исходному разбиению, может быть определена так: $y\langle A\rangle z$, если y и z имеют общий эталон: x_iAy и x_iAz.

Ясно, что любое отношение эквивалентности может быть таким образом определено с помощью отношения «быть эталоном» и, наоборот, любое отношение «быть эталоном» определяет некоторую эквивалентность.

Пусть A — отношение эквивалентности, а $Эт_A$ — такое отношение «быть эталоном», что xAy выполнено в том и только том случае, когда x и y имеют общий эталон z.

Иначе говоря, xAy равносильно существованию такого z, что $z\,Эт_A\,x$ и $z\,Эт_A\,y$. Поскольку $z\,Эт_A\,x = x(Эт_A)^{-1}z$, это означает, что

$$A = (Эт_A)^{-1}\,Эт_A.$$

Иначе говоря, эквивалентность можно алгебраически выразить через более простое отношение «быть эталоном». То, что отношение «быть эталоном» устроено более просто, видно из следующих соображений. Отношение $Эт_A$ на множестве из n элементов можно задать графом, имеющим ровно $n - m$ стрелок, где m — число классов эквивалентности: каждый элемент соединяется со своим единственным эталоном*). Граф, изображающий отношение эквивалентности, состоит из m полных подграфов, содержащих по n_i вершин $(n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n)$. Таким образом, общее число ребер в этом графе равно

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i (n_i - 1)}{2}.$$

Пример. Рассмотрим в качестве M множество всех целых неотрицательных чисел и возьмем его разбиение на множество M_0 четных чисел и множество M_1 нечетных чисел. Соответствующее отношение эквивалентности на множестве целых чисел обозначается так:

$$n \equiv m \pmod 2$$

и читается: *n сравнимо с m по модулю* 2. В качестве эталонов здесь естественно выбрать 0 — для четных чисел и 1 — для нечетных чисел. Аналогично, разбивая то же множество M на k подмножеств $M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}$, где M_j состоит из всех чисел, дающих при делении на k в остатке j, мы придем к отношению эквивалентности:

$$n \equiv m \pmod k,$$

которое выполняется, если n и m имеют одинаковый остаток при делении на k. В качестве эталона в каждом M_j естественно выбрать соответствующий остаток j.

§ 2. Формальные свойства эквивалентности

Мы определили выше отношения эквивалентности с помощью разбиений, т. е. фактически задали их некоторой конструкцией. Можно было бы и по-другому определить эквивалентности: можно сформулировать свойства (аксиомы), которые выделяют отношения эквивалентности среди прочих бинарных отношений. Вместо определения 2.2 мы можем ввести следующее

Определение 2.3. Отношение A на множестве M называется *эквивалентностью* (или *отношением эквивалентности*), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Мы сейчас нарушили правила хорошего тона, принятые обычно в математике, тем, что дали два неза-

*) Эталоны можно и не соединять сами с собой.

висимых определения одного и того же понятия. Сделали мы это для того, чтобы показать и сравнить два разных способа введения математических понятий: конструктивный и аксиоматический. Но теперь нам следует убедиться, что кроме правил хорошего тона ничто не нарушено, т. е. что оба определения эквивалентности равносильны. Соответствующим оправданием послужит

Теорема 2.1. *Если отношение A на множестве M рефлексивно, симметрично и транзитивно, то существует разбиение $\{M_1, M_2, \ldots\}$ множества M такое, что соотношение xAy выполнено в тех и только тех случаях, когда x и y принадлежат общему классу разбиения.*

Обратно: *если задано разбиение $\{M_1, M_2, \ldots\}$ множества M и бинарное отношение A определено как* «принадлежать общему классу разбиения», *то A рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Доказательство первой части. Рассмотрим рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение A на M. Пусть для любого $x \in M$ множество M_x состоит из всех таких элементов z, для которых xAz.

Лемма. Для любых x и y либо $M_x = M_y$, либо $M_x \cap M_y = \varnothing$.

Доказательство леммы. Пусть пересечение $M_x \cap M_y$ не пусто. Покажем, что $M_x = M_y$. Пусть $z \in M_x \cap M_y$, тогда выполнено xAz и yAz по самому определению множеств M_x и M_y. По симметричности имеем zAy, а по транзитивности из xAz и zAy следует xAy. Возьмем теперь произвольный элемент $w \in M_y$. По определению yAw. Но из xAy и yAw следует xAw, т. е. $w \in M_x$. Итак, $M_y \subseteq M_x$.

Возьмем произвольный элемент $v \in M_x$; для него выполнено xAv. По симметричности отношения A имеем yAx. Но из yAx и xAv следует yAv. Значит, $v \in M_y$. Тем самым, мы показали, что $M_x \subseteq M_y$. В итоге можно заключить, что $M_x = M_y$. Лемма доказана.

Из леммы и рефлексивности отношения A следует, что множества вида M_x образуют разбиение множества M. (Это разбиение естественно назвать разбиением, *соответствующим* исходному отношению.) Пусть теперь выполнено соотношение xAy. Это значит, что

$y \in M_x$. Но и $x \in M_x$ в силу xAx. Следовательно, оба элемента x и y входят в M_x. Итак, если xAy, то x и y входят в общий класс разбиения. Наоборот, пусть $u \in M_x$ и $v \in M_x$. Покажем, что uAv выполнено. Действительно, имеем xAu и xAv. Отсюда по симметричности uAx. По транзитивности из uAx и xAv следует uAv. Первая часть теоремы доказана.

Доказательство второй части. Пусть дано разбиение $\{M_1, M_2, \ldots\}$ множества M. Так как объединение всех классов разбиения совпадает с M, то всякий $x \in M$ входит в некоторый класс M_i. Отсюда следует xAx, т. е. отношение A рефлексивно. Если x и y входят в класс M_i, то y и x входят в тот же класс. Это означает, что из xAy вытекает yAx, т. е. отношение A симметрично. Пусть теперь выполнено xAy и yAz. Это означает, что x и y входят в класс M_i, а y и z — в класс M_j. Поскольку M_i и M_j имеют общий элемент y, M_i и M_j совпадают. Значит, x и z входят в M_i, т. е. выполнено xAz. Итак, отношение A транзитивно, чем и завершается доказательство теоремы 2.1.

Заметим, что мы нигде не пользовались предположением о конечности ни множества M, ни его разбиения.

Из доказанной теоремы легко получается

Теорема 2.2. *Если M — конечное множество и A — отношение эквивалентности на нем, то существуют такие n и m, что каждому элементу $x \in M$ можно сопоставить кортеж* (упорядоченный набор) *из $n + m$ двоичных признаков* (нулей или единиц):

$$x \to \langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+m} \rangle,$$

$$y \to \langle \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n; \eta_{n+1}, \ldots, \eta_{n+m} \rangle$$

и т. д.,

так что 1) *разным элементам соответствуют разные кортежи признаков и* 2) *для того, чтобы было xAy, необходимо и достаточно, чтобы первые n признаков этих элементов совпадали*: $\xi_1 = \eta_1, \xi_2 = \eta_2, \ldots, \xi_n = \eta_n$.

Доказательство. Возьмем разбиение $\{M_1, M_2, \ldots\}$ множества M, соответствующее отношению A. В силу конечности множества M это разбиение конечно и каждый класс конечен. Перенумеруем элементы каждого класса. Тогда каждому элементу x можно сопоставить пару целых чисел: $x \to \langle p, q \rangle$, где p — номер класса M_p, в который попал x, а q — номер элемента x в своем классе. Ясно, что если $x \to \langle p_1, q_1 \rangle$, $y \to \langle p_2, q_2 \rangle$ и $x \neq y$, то $\langle p_1, q_1 \rangle \neq \langle p_2, q_2 \rangle$. Действительно, либо элементы x и y попали в разные классы — тогда у них различные первые номера: $p_1 \neq p_2$; либо они различаются номером в классе — тогда $q_1 \neq q_2$. Представим теперь числа p и q в двоичной системе счисления. Пусть n — наибольшее число разрядов у чисел p, а m — наибольшее число разрядов у чисел q. Если некоторое p имеет меньше, чем n разрядов, то дополним его слева нулями. Так же поступим и со вторыми номерами. Тем самым каждому элементу будет сопоставлен кортеж из $n + m$ двоичных признаков.

Для завершения доказательства достаточно заметить, что эквивалентность элементов x и y означает попадание в общий класс, т. е. совпадение первых номеров (первых n признаков).

Эта теорема оправдывает сделанное ранее утверждение, что любая эквивалентность (правда, на конечном множестве) может быть задана как совпадение некоторого набора общих признаков.

Итак, оба наши определения эквивалентности равносильны. Но теперь возникает вопрос, не являются ли некоторые аксиомы эквивалентности излишними. Например, быть может, из рефлексивности и симметричности уже следует транзитивность отношения? В следующей главе мы будем как раз изучать рефлексивные и симметричные отношения и увидим, что для них транзитивность вовсе не обязательна. В четвертой главе мы будем заниматься рефлексивными и транзитивными отношениями и покажем, что они отнюдь не обязаны быть симметричными. Наконец, попробуем доказать следующее

Утверждение. *Если отношение A симметрично и транзитивно, то оно рефлексивно.*

Будем рассуждать так. Возьмем произвольный элемент x и такое y, что выполнено соотношение xAy. Тогда, в силу симметричности, верно и соотношение yAx. Напишем эти соотношения рядом: xAy и yAx. В силу транзитивности отсюда следует xAx, т. е. A рефлексивно. Предоставим читателю поразмыслить над тем, действительно ли мы доказали сформулированное утверждение.

Пример. Пусть M — система каких-то множеств. В § 2 главы I мы определили, какие множества называются равномощными. Тем самым на M задано бинарное отношение «быть равномощными». Равномощность пары множеств V и W мы будем символически обозначать через $V \sim W$. По определению $V \sim W$ означает, что существует биективное отображение φ: $V \to W$. Ясно, что $V \sim V$, поскольку единичное отображение ε_V: $V \to V$ является биективным. Если существует биективное отображение φ: $V \to W$, то обратное отображение φ^{-1}: $W \to V$ также биективно, т. е. из $V \sim W$ вытекает $W \sim V$. Наконец, пусть выполнены соотношения $V \sim W$ и $W \sim U$. Тогда существуют биективные отображения φ: $V \to W$ и ψ: $W \to U$. Легко видеть, что их произведение $\varphi\psi = \theta$ есть биективное отображение θ: $V \to U$ и, таким образом, $V \sim U$. Итак, мы доказали, что «равномощность» есть рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на системе M. Тем самым множества из произвольной системы M можно разбить на классы равномощных между собой. Например, если наша система множеств M состоит из всех подмножеств числовой прямой (т. е. множества действительных чисел), то она разбивается на классы из пустого множества, одноэлементных множеств, двухэлементных и т. д. Среди бесконечных множеств имеется по крайней мере два класса — счетные множества и множества, равномощные всей прямой (множества мощности континуума). Вопрос о существовании других классов бесконечных множеств составляет предмет так называемой проблемы континуума. Мы не беремся здесь обсуждать, в чем состоит недавно полученный Коэном замечательный результат, в некотором смысле решающий эту проблему.

Вернемся к обсуждению отношения A: «x является эталоном для y». Мы уже дали в конце предыдущего параграфа конструктивное определение этого отношения. Из него легко можно получить следующие свойства отношения A (быть эталоном):

1) для всякого y существует эталон x: xAy.

2) Если xAy, то xAx, т. е. любой эталон есть эталон для самого себя.

3) Эталон единствен, т. е. из xAy и zAy следует $x = z$.

Эти три свойства можно объявить аксиомами отношения «быть эталоном». Покажем, что из них следует определение эталона с помощью разбиения. Для этого сначала по отношению A построим новое отношение $\langle A \rangle$, определяемое правилом: $x\langle A \rangle y$, если x и y имеют общий эталон. Иначе говоря, если существует такое z, что zAx и zAy. Покажем, что $\langle A \rangle$ есть отношение эквивалентности. Действительно, по свойству 1) у каждого x есть эталон и, стало быть, $x\langle A\rangle x$. Значит, $\langle A\rangle$ рефлексивно. Симметричность отношения $\langle A\rangle$ очевидна. Если $x\langle A\rangle y$ и $y\langle A\rangle z$, то это значит, что x и y имеют общий эталон, а y не может иметь эталона, отличного от эталона для z. Значит, $x\langle A\rangle z$.

Итак, доказано, что $\langle A\rangle$ есть отношение эквивалентности. Но тогда по теореме 2.1 существует разбиение $\{M_1, M_2, \ldots\}$ множества M на классы эквивалентных друг другу элементов — так называемые *классы эквивалентности.*

Очевидно, каждый класс эквивалентности M_i состоит из всех элементов, имеющих общий эталон x_i. По свойству 2) x_iAx_i и, значит, $x_i \in M_i$. Таким образом, отношение A, определенное аксиоматически свойствами 1)—3), всегда может быть задано разбиением с выбранными представителями (эталонами) в каждом классе.

Пусть $\varphi\colon M \to S$ — сюръективное отображение множества M на некоторое множество S. Рассмотрим на множестве M отношение «иметь общий образ» и обозначим это отношение A_φ. Иначе говоря, $xA_\varphi y$, если $\varphi(x) = \varphi(y)$. Обозначим через M_ξ множество всех элементов $x \in M$, имеющих данный образ $\xi \in S$, т. е. таких, что $\varphi(x) = \xi$. Ясно, что $\bigcup\limits_{\xi \in S} M_\xi = M$, так как любой элемент из M имеет образ. Далее, при разных ξ и η, $M_\xi \cap M_\eta = \varnothing$, так как иначе элемент, попавший в пересечение $M_\xi \cap M_\eta$, имел бы два разных образа: ξ и η. Поскольку φ сюръективно, $M_\xi \neq \varnothing$ для любого $\xi \in S$. Итак, множества M_ξ образуют разбиение множества M, а отношение A_φ есть эквивалентность, соответствующая этому разбиению. Последнее следует из того, что $xA_\varphi y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат общему множеству M_ξ.

Множество классов эквивалентности по отношению A принято обозначать M/A (читается: *фактормножество множества M по отношению A*). Наши рассуждения показывают, что для всякого сюръективного отображения $\varphi\colon M \to S$ существует отношение эквивалентности A на множестве M такое, что M/A и S могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие.

Наоборот, если имеется произвольное отношение эквивалентности A на M, то по нему можно построить отображение φ: $M \to S$, где $S = M/A$ и $\varphi(x)$ есть класс эквивалентности, содержащий x. Легко проверить, что φ сюръективно и построенное по этому отображению отношение эквивалентности A_φ есть исходное отношение A.

Рассмотрим частный случай, когда φ: $M \to S$ и $S \subseteq M$. Пусть, далее, отображение φ обладает тем свойством, что, при $x \in S$, $\varphi(x) = x$ или, как говорят в таких случаях, подмножество S *неподвижно* при отображении φ. Отсюда видно, что φ сюръективно. Действительно, всякий $x \in S$ есть образ по крайней мере самого x: $x = \varphi(x)$. Итак, каждому $y \in M$ однозначно сопоставлен некоторый элемент $x \in S$. При этом, если x сопоставлен какому-то элементу, то самому x сопоставлен он же.

Сравнивая с соответствующими свойствами, определяющими отношение «быть эталоном», мы видим, что отображение φ: $M \to S$ множества M на неподвижное подмножество S задает на M отношение A «быть эталоном» так, что xAy в том и только том случае, когда $\varphi(y) = x$.

Посмотрим теперь, что получится, если отказаться от условия, что φ определено на всем M. Рассмотрим функцию φ: $M \to S$, которая некоторым элементам x из M сопоставляет единственный образ $\varphi(x)$ из S. По отображению φ можно опять-таки построить отношение A_φ по правилу: $xA_\varphi y$, если $\varphi(x) = \varphi(y)$. Легко проверить, что A_φ будет симметрично и транзитивно. Выберем подмножество $M_0 \subseteq M$, состоящее из тех элементов, на которых определено отображение φ. Тогда если либо x, либо y не принадлежат M_0, то $xA_\varphi y$ заведомо не выполняется. Значит, если x не входит в M_0, то $xA_\varphi x$ также не выполнено. Следовательно, отношение A_φ теперь уже не обязано быть рефлексивным.

Читатель, дойдя до этого места, наверняка уже нашел ошибку в «доказательстве» того, что рефлексивность отношения следует из симметричности и транзитивности. Она состояла в том, что мы незаконно предположили для произвольного $x \in M$ существование такого y, что xAy. Для вышеопределенного отношения A_φ видно, что как раз при x, не входящих в M_0 (в область определения отображения φ), $xA_\varphi y$ не выполнено ни для какого y.

Отсюда сразу видно, как построить содержательный пример симметричного и транзитивного, но не рефлексивного отношения. Пусть M — множество людей, а отношение A означает «быть уроженцем одного города». Легко видеть, что A симметрично и транзитивно, но если x родился не в городе, а в деревне, или, вообще, во время путешествия по морю, то xAx не выполнено. В этом примере S — множество городов, а отображение φ: $M \to S$ сопоставляет каждому человеку город, где он был рожден.

Из сказанного видно также, что условие рефлексивности можно в определении эквивалентности заменить более слабым. Достаточно потребовать, чтобы

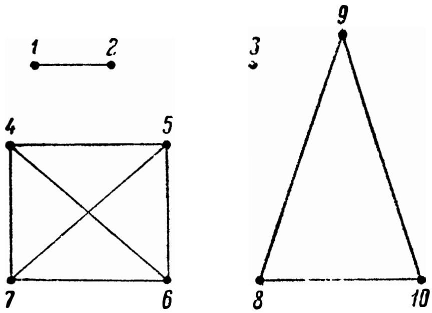


Рис. 2.2. Граф эквивалентности.

для каждого x существовал такой элемент y, что выполнено либо xAy, либо yAx. Тогда из этого свойства, а также симметричности и транзитивности можно получить рефлексивность отношения A.

Граф, изображающий отношение эквивалентности, выглядит следующим образом. Пусть M — множество его вершин. Тогда $M = \bigcup\limits_i M_i$, где M_i — классы эквивалентности. Ясно, что в каждом подмножестве M_i все вершины соединены друг с другом. Но никакая из них не соединена с вершинами, не входящими в M_i. Итак, граф, изображающий отношение эквивалентности, состоит из отдельных, не связанных друг с другом полных подграфов.

На рис. 2.2 представлен граф отношения эквивалентности на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

с классами эквивалентности $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{3\}$, $M_3 = \{4, 5, 6, 7\}$, $M_4 = \{8, 9, 10\}$. В соответствии с тем, что говорилось в § 5 главы I, на графах отношений эквивалентности можно не изображать петель и стрелок. Так мы и поступили.

Пусть в нашем распоряжении имеются теперь два множества: M_1 и M_2, на каждом из которых задано отношение эквивалентности (соответственно, A_1 и A_2). Спрашивается: каким способом можно из них соорудить одно множество с отношением эквивалентности на нем?

Вспомним, что, строго говоря, отношение — это пара $\langle A, M\rangle$, где M — множество элементов, вступающих в отношение, а A — множество пар, для которых выполняется данное отношение.

Один из наиболее простых типов композиции отношений дает следующее

Определение 2.4. *Прямой суммой* отношений $\langle A_1, M_1\rangle$ и $\langle A_2, M_2\rangle$ называется отношение $\langle A_1 \cup A_2, M_1 \cup M_2\rangle$. Прямую сумму отношений $\langle A_1, M_1\rangle$, $\langle A_2, M_2\rangle$ мы будем обозначать через $\langle A_1, M_1\rangle \oplus \langle A_2, M_2\rangle$. Итак,

$$\langle A_1, M_1\rangle \oplus \langle A_2, M_2\rangle = \langle A_1 \cup A_2, M_1 \cup M_2\rangle.$$

Таким образом, если $\langle A_1, M_1\rangle \oplus \langle A_2, M_2\rangle = \langle A, M\rangle$, то $M = M_1 \cup M_2$ и $A = A_1 \cup A_2$. Следовательно, соотношение xAy выполнено в следующих случаях: 1) $x \in M_1$, $y \in M_1$ и xA_1y; 2) $x \in M_2$, $y \in M_2$ и xA_2y.

На рис. 2.3 приведены два отношения: $\langle A_1, M_1\rangle$ и $\langle A_2, M_2\rangle$ — и их прямая сумма. Из этого рисунка видно, что даже когда A_1 и A_2 — эквивалентности, прямая сумма A не обязана быть эквивалентностью. Однако, имеет место

Теорема 2.3. *Если $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, а отношения A_1 и A_2 — эквивалентности, то их прямая сумма $\langle A, M\rangle = \langle A_1, M_1\rangle \oplus \langle A_2, M_2\rangle$ также является эквивалентностью.*

Доказательство. Рефлексивность проверяется просто: если $x \in M_i$, то выполнено xA_ix и, следовательно, xAx. Симметричность также очевидна: если выполнено xAy, то либо x и y входят в M_1 и xA_1y, а значит, и yA_1x, т. е. yAx, либо x и y входят в M_2 и xA_2y, поэтому yA_2x и yAx. Докажем транзитивность отношения A. Пусть выполнены соотношения xAy и yAz. Рассмотрим случай, когда $x \in M_1$,

$y \in M_1$ и xA_1y. Так как $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, то y не входит в M_2. Но тогда соотношение yAz может выполняться только при $z \in M_1$ и yA_1z. Однако, из xA_1y и yA_1z вытекает xA_1z и xAz. Случай, когда x и y принадлежат M_2, исследуется аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Из этого доказательства видно, что условие непустоты пересечения работало только при проверке транзитивности. Значит, справедлива

Теорема 2.4. *Если отношения* $\langle A_1, M_1\rangle$ *и* $\langle A_2, M_2\rangle$ *рефлексивны и симметричны* (в частности,

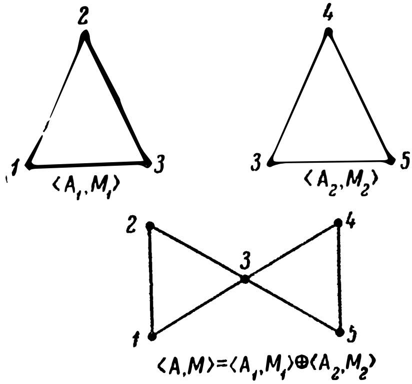


Рис. 2.3. Прямая сумма.

являются эквивалентностями), *то их прямая сумма* $\langle A_1, M_1\rangle \oplus \langle A_2, M_2\rangle$ *также рефлексивна и симметрична.*

Полное исследование условий, при которых прямая сумма эквивалентностей является эквивалентностью, можно провести с помощью теоремы 2.6 (§ 3).

Замечание. Если $\langle A, M\rangle = \langle A_1, M_1\rangle \oplus \langle A_2, M_2\rangle$, то каждое из отношений $\langle A_1, M_1\rangle$ и $\langle A_2, M_2\rangle$ есть сужение отношения $\langle A, M\rangle$ на свою область задания.

§ 3. Операции над эквивалентностями

Посмотрим, какие операции над отношениями эквивалентности и при каких условиях дают в результате эквивалентность.

Первый результат такого типа был нами уже получен в § 5 главы I. Мы установили там, что транзитивное замыкание транзитивного отношения совпадает с ним самим. Значит, транзитивное замыкание $\hat{A}$ отношения эквивалентности A является отношением эквивалентности.

В том же параграфе мы установили, что для симметричного отношения A обратное совпадает с ним самим: $A^{-1} = A$. Значит, отношение, обратное к эквивалентности, является эквивалентностью.

Из лемм 1.1, 1.3 и 1.7 вытекает, что если A и B — эквивалентности, то их пересечение $A \cap B$ также является отношением эквивалентности.

Пусть теперь $\{M_1^A, M_2^A, \ldots\}$ — разбиение множества M на классы эквивалентности, соответствующее отношению A, а $\{M_1^B, M_2^B, \ldots\}$ — разбиение множества M на классы эквивалентности по B. Пусть

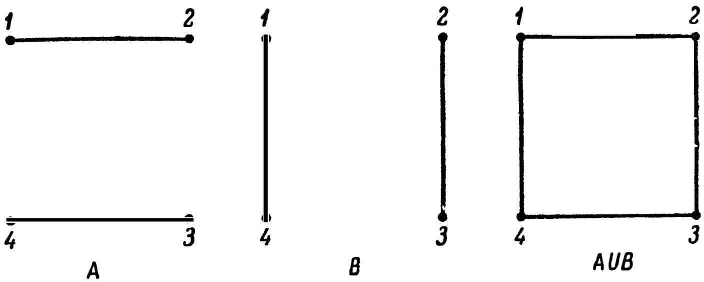


Рис. 2.4. Объединение эквивалентностей.

$x \in M_i^A$ и одновременно $x \in M_j^B$. Элементы, с которыми x находится в отношении $A \cap B$, заполняют множество $M_i^A \cap M_j^B$. Таким образом, классы эквивалентности по $A \cap B$ суть пересечения классов эквивалентности по A и по B. Легко видеть, что система пересечений $M_i^A \cap M_j^B$ есть разбиение множества M, соответствующее отношению $A \cap B$.

Сложнее обстоит дело с объединением отношений эквивалентности. Вообще говоря, объединение эквивалентностей уже не обязано быть эквивалентностью.

Это видно из примера на рис. 2.4. Действительно, отношение A дает разбиение на два класса $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$, отношению B соответствует разбиение $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, а отношение $A \cup B$ дает неполный связный граф.

Теперь попробуем разобраться, когда объединение эквивалентностей дает в результате эквивалентность. Отметим сначала следующее тривиальное обстоятельство. Пусть $A \subseteq B$, тогда из свойств теоретико-множественных операций следует

$$A \cup B = B,$$

т. е. $A \cup B$ есть эквивалентность. Точно так же, если $B \subseteq A$, то $A \cup B$ является эквивалентностью.

Рассмотрим более общий случай, когда множество M можно разбить на два непересекающихся подмножества M_1 и M_2 (из которых одно может быть пустым) так, что

$$\begin{cases} \langle A, M \rangle = \langle A_1, M_1 \rangle \oplus \langle A_2, M_2 \rangle, \\ \langle B, M \rangle = \langle B_1, M_1 \rangle \oplus \langle B_2, M_2 \rangle, \end{cases} \tag{2.2}$$

и при этом

$$A_1 \subseteq B_1 \quad \text{и} \quad B_2 \subseteq A_2. \tag{2.3}$$

В этом случае отношения A и B мы назовем *когерентными*.

Легко видеть, что если $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$, то отношения A и B когерентны (надо положить $M_1 = M$, $M_2 = \varnothing$). Таким образом, сравнимость относительно «порядка», задаваемого включением (см. гл. IV), есть частный случай когерентности.

Из (2.3) следует, что для когерентных отношений эквивалентности A и B:

$$\langle A_1 \cup B_1, M_1 \rangle = \langle B_1, M_1 \rangle$$

и

$$\langle A_2 \cup B_2, M_2 \rangle = \langle A_2, M_2 \rangle.$$

Используя определение прямой суммы и (2.2), получаем

$$\langle A \cup B, M \rangle = \langle B_1, M_1 \rangle \oplus \langle A_2, M_2 \rangle.$$

Здесь $\langle B_1, M_1 \rangle$ и $\langle A_2, M_2 \rangle$ — эквивалентности (как сужения эквивалентностей $\langle B, M \rangle$ и $\langle A, M \rangle$), а M_1 и M_2 не пересекаются. По теореме 2.3 отсюда следует, что $A \cup B$ есть отношение эквивалентности.

Оказывается, когерентность отношений A, B является не только достаточным, но и необходимым условием для того, чтобы объединение $A \cup B$ эквивалентностей A и B было эквивалентностью.

Теорема 2.5. *Для того чтобы объединение $A \cup B$ эквивалентностей A и B само было отношением эквивалентности, необходимо и достаточно, чтобы A и B были когерентными.*

Нам понадобятся некоторые простые свойства разбиений на классы эквивалентности, которые мы сформулируем в виде самостоятельных лемм. Мы будем далее использовать некоторые словесные сокращения. Если A — эквивалентность и xAy, то мы будем говорить, что x и y *A-эквивалентны*. Разбиение, соответствующее эквивалентности A, мы будем называть *A-разбиением*; классы этого разбиения — *A-классами* и т. п.

Лемма 2.1. *Для того чтобы $A \subseteq B$, необходимо и достаточно, чтобы каждый A-класс содержался в некотором B-классе.*

Действительно, если $A \subseteq B$, то из xAy следует xBy. Значит, множество всех y, A-эквивалентных элементу x, содержится во множестве всех y, B-эквивалентных этому x. Обратный вывод столь же очевиден.

Лемма 2.2. *Для того чтобы $B \subseteq A$, необходимо и достаточно, чтобы каждый A-класс M_i^A целиком содержал любой B-класс M_j^B, имеющий с M_i^A непустое пересечение.*

Для доказательства необходимости выберем произвольный элемент $x \in M_j^B \cap M_i^A$. По предыдущей лемме M_j^B целиком содержится в некотором классе M_k^A. Но если бы M_k^A был бы отличен от M_i^A, то элемент x лежал бы сразу в двух классах A-разбиения, что невозможно. Значит, $M_j^B \subseteq M_i^A$. Для доказательства достаточности нужно только вспомнить, что из $M_j^B \cap M_i^A \neq \varnothing$ по условию вытекает $M_j^B \subseteq M_i^A$, и применить лемму 2.1.

Лемма 2.3. *Для того чтобы эквивалентности A и B были когерентными, необходимо и достаточно, чтобы всякий A-класс M_i^A либо содержался в некотором B-классе M_j^B, либо целиком содержал любой B-класс M_j^B, имеющий с M_i^A непустое пересечение*).*

*) Очевидна следующая перефразировка этой леммы: *отношения эквивалентности A и B когерентны тогда и только тогда, когда любая пара классов эквивалентности M_i^A и M_j^B либо не пересекается, либо один из этих классов содержит другой.*

Доказательство. Если A и B когерентны, то $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ и на M_1 имеем $A \subseteq B$, а на M_2 $A \supseteq B$. Тогда по лемме 2.1 для каждого класса M_i^A, содержащегося в M_1, существует такой класс $M_j^B \subseteq M_1$, что $M_i^A \subseteq M_j^B$. По лемме 2.2 каждый класс M_i^A, содержащийся в M_2, целиком содержит любой класс M_j^B, имеющий с M_i^A непустое пересечение. Поскольку M_1 и M_2 не пересекаются, из (2.2) вытекает, что всякий класс эквивалентности M_i^A содержится либо в M_1, либо в M_2; значит, наше рассуждение охватывает все классы.

Поведем доказательство в обратную сторону. Пусть каждый класс M_i^A обладает сформулированным в лемме 2.3 свойством. Обозначим через M_1 объединение всех тех классов M_i^A, для которых существует такой M_j^B, что $M_i^A \subseteq M_j^B$, а через M_2 — объединение остальных классов M_i^A. Ясно, что $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, $M_1 \cup M_2 = M$ и

$$\langle A, M\rangle = \langle A_1, M_1\rangle \oplus \langle A_2, M_2\rangle,$$
$$\langle B, M\rangle = \langle B_1, M_1\rangle \oplus \langle B_2, M_2\rangle,$$

где A_i и B_i — сужения отношений A и B на M_i. Наконец, очевидно, что $A_1 \subseteq B_1$ и $A_2 \supseteq B_2$, т. е. A и B когерентны.

Теперь мы подготовили все необходимое для доказательства теоремы 2.5. Будем вести доказательство от противного, т. е. предположим, что A и B не когерентны. Тогда по лемме 2.3 существует класс M_i^A и класс M_j^B такие, что $M_i^A \cap M_j^B \neq \varnothing$, но ни один из них не содержит другой. Значит, существует $x \in M_i^A \setminus M_j^B$, существует $y \in M_i^A \cap M_j^B$ и существует $z \in M_j^B \setminus M_i^A$ (рис. 2.5). Имеем следующие соотношения: xAy и yBz, следовательно, $x\,A \cup B\,y$ и $y\,A \cup B\,z$. По транзитивности должно было бы быть также $x\,A \cup B\,z$. Однако, соотношения: xAz и xBz — оба не выполнены, так как x не лежит с z ни в общем A-классе, ни

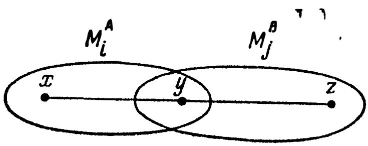


Рис. 2.5

в общем B-классе. Значит, соотношение $x A \cup B z$ не выполнено. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Понятие когерентности имеет смысл для любых отношений A и B. Но для эквивалентностей когерентность отношений A и B легко формулируется в терминах классов эквивалентности (лемма 2.3).

Лемма 2.4. *Если A и B рефлексивны, то*

$$A \cup B \subseteq AB. \tag{2.4}$$

Доказательство. Если xAy, то, в силу yBy, выполнено и соотношение $xABy$, т. е. $A \subseteq AB$. Аналогично получается $B \subseteq AB$. Из этих двух включений следует (2.4).

Теорема 2.6. *Для того чтобы объединение $A \cup B$ эквивалентностей A и B само было отношением эквивалентности, необходимо и достаточно, чтобы*

$$AB = A \cup B. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $A \cup B$ — эквивалентность. По лемме 2.4 $A \cup B \subseteq AB$. Для доказательства (2.5) остается доказать

$$AB \subseteq A \cup B. \tag{2.6}$$

Пусть $xABy$. Тогда для некоторого z имеем xAz и zBy. Следовательно, $x(A \cup B)z$ и $z(A \cup B)y$. Значит, $x(A \cup B)y$ и (2.6) доказано. Пусть теперь выполнено (2.5). По лемме 1.3 отношение $A \cup B$ симметрично. По (2.5) тогда симметрично и отношение AB. По лемме 1.4 $AB = BA$. По теореме 2.7 (см. ниже) получаем, что отношение AB — эквивалентность. Из (2.5) вытекает, что и $A \cup B$ — эквивалентность. Теорема доказана.

Условие, при котором произведение AB двух отношений эквивалентности A и B само является эквивалентностью, было получено чешским математиком Шиком в 1954 г. Прежде всего отметим, что когда мы в § 4 главы I приводили пример не коммутирующих отношений A и B, то A и B там были отношениями эквивалентности, но их произведение AB уже не было таковым (и даже не было симметричным). Связь с перестановочностью произведения здесь отнюдь не случайна, как показывает принадлежащая Шику

Теорема 2.7. *Для того чтобы произведение AB отношений эквивалентности A и B было эквивалентностью, необходимо и достаточно, чтобы A и B коммутировали.*

Доказательство. Пусть сначала

$$AB = BA. \tag{2.7}$$

По лемме 1.1 AB рефлексивно. По лемме 1.4 AB симметрично. Транзитивность произведения доказывается так:

$$(AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = AB$$

— здесь мы использовали ассоциативный закон для произведения отношений, условие (2.7), а также транзитивность и рефлексивность отношений A и B (см. замечание на стр. 40). Итак,

$$(AB)(AB) = AB,$$

но это и означает транзитивность отношения AB, поскольку AB рефлексивно. Пусть теперь произведение AB есть эквивалентность. Тогда по лемме 1.4 $AB = BA$.

В первой главе мы ввели еще операции $A \mathbin{\hat{\cup}} B$ и $A \mathbin{\hat{\circ}} B$. Легко проверить, что если A и B — эквивалентности, то $A \mathbin{\hat{\cup}} B$ и $A \mathbin{\hat{\circ}} B$ также будут эквивалентностями.

Проверим это для первой операции. (Как мы увидим дальше, для второй из них надобности в проверке не будет.) Рефлексивность отношения $A \mathbin{\hat{\cup}} B$ вытекает из леммы 1.1. Симметричность вытекает из леммы 1.3 и следствия из леммы 1.4. Транзитивность следует из того, что любое отношение вида $\hat{C}$ транзитивно (теорема 1.4 и (1.20)).

Итак, операция $A \mathbin{\hat{\cup}} B$, будучи выполнена над отношениями эквивалентности, не выводит за этот класс отношений.

Оказывается, эта операция (ее иногда называют *объединением эквивалентностей*, имея в виду, что обычное объединение эквивалентностей может не быть эквивалентностью) ассоциативна, т. е. является «хорошей» алгебраической операцией.

Теорема 2.8. *Для любых транзитивных отношений A, B и C справедлив ассоциативный закон:*

$$(A \hat{\cup} B) \hat{\cup} C = A \hat{\cup} (B \hat{\cup} C). \tag{2.8}$$

Докажем сначала две леммы.

Лемма 2.5. *Для любых отношений P, Q*

$$P \leqslant P \hat{\cup} Q, \tag{2.9}$$

$$Q \leqslant P \hat{\cup} Q. \tag{2.10}$$

(2.9) вытекает из $P \subseteq P \cup Q$ и (1.1). (2.10) доказывается аналогично.

Лемма 2.6. *Для любых транзитивных отношений P, Q, R из $P \subseteq R$ и $Q \subseteq R$ вытекает $P \hat{\cup} Q \subseteq R$.*

Из $P \subseteq R$ и $Q \subseteq R$ вытекает $P \cup Q \subseteq R$. Из (1.17) и теоремы 1.3 получаем $P \hat{\cup} Q \subseteq R$.

Доказательство теоремы 2.8 Из леммы 2.5

$$B \subseteq B \hat{\cup} C \tag{2.11}$$

$$B \hat{\cup} C \subseteq A \hat{\cup} (B \hat{\cup} C). \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12)

$$B \subseteq A \hat{\cup} (B \hat{\cup} C). \tag{2.13}$$

Из леммы 2.5

$$A \subseteq A \hat{\cup} (B \hat{\cup} C). \tag{2.14}$$

Из (2.13), (2.14), леммы 2.6 и того, что любое отношение вида $\hat{C}$ транзитивно,

$$A \hat{\cup} B \subseteq A \hat{\cup} (B \hat{\cup} C). \tag{2.15}$$

Подобно тому, как мы доказали (2.13), доказывается

$$C \subseteq A \hat{\cup} (B \hat{\cup} C). \tag{2.16}$$

Подобно тому, как мы из (2.13) и (2.14) вывели (2.15), из (2.15) и (2.16) выводится

$$(A \hat{\cup} B) \hat{\cup} C \subseteq A \hat{\cup} (B \hat{\cup} C). \tag{2.17}$$

Из (2.17) и аналогично доказываемого «обратного» включения вытекает (2.8). Теорема доказана.

Нетрудно убедиться, что для любой эквивалентности A

$$A \hat{\cup} E = A, \tag{2.18}$$

где E — диагональное отношение. Это следует из того, что $E \subseteq A$ (в силу рефлексивности отношения A); значит, $A \cup E = A$ и $A \hat{\cup} E = \hat{A} = A$.

Покажем теперь, что операция $A \hat{\circ} B$ не дает ничего нового:

Теорема 2.9. *Если A и B — эквивалентности, то*

$$A \hat{\cup} B = A \hat{\circ} B. \tag{2.19}$$

Доказательство. Заметим сначала, что, учитывая лемму 2.4,

$$A \cup B \subseteq AB \subseteq AB \cup BA = A \circ B.$$

Применяя транзитивное замыкание к обеим частям, ввиду свойства монотонности транзитивного замыкания (1.17) имеем

$$A \hat{\cup} B \subseteq A \hat{\circ} B. \tag{2.20}$$

Далее, применяя распределительный закон (1.13), получим

$$\begin{aligned}(A \cup B)^2 &= A^2 \cup AB \cup BA \cup B^2 = A \cup AB \cup BA \cup B = \\ &= AB \cup BA = A \circ B. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Мы использовали здесь замечание на стр. 40 и тот факт, что для рефлексивного A выполнено включение $B \subseteq BA$, а следовательно, $BA \cup B = BA$. Запишем теперь выражение (1.2) для транзитивного замыкания, используя (2.21):

$$\begin{aligned}A \hat{\cup} B &= (A \cup B) \cup (A \cup B)^2 \cup (A \cup B)^3 \cup (A \cup B)^4 \cup \ldots = \\ &= (A \cup B) \cup (A \circ B) \cup (A \cup B)^3 \cup (A \circ B)^2 \cup \ldots\end{aligned}$$

Отсюда ясно, что

$$A \hat{\cup} B \supseteq (A \circ B) \cup (A \circ B)^2 \cup \ldots,$$

т. е.

$$A \hat{\cup} B \supseteq A \hat{\circ} B. \tag{2.22}$$

Сравнивая включения (2.20) и (2.22), получим искомое соотношение (2.19).

Отсюда вытекает следующий результат, также принадлежащий Шику:

Теорема 2.10. *Если A и B — эквивалентности и $AB = BA$, то*

$$AB = A \hat{\cup} B. \tag{2.23}$$

В самом деле, по теореме 2.7 произведение AB является эквивалентностью, а стало быть отношение $AB = AB \cup BA = A \circ B$ совпадает со своим транзитивным замыканием: $AB = A \mathbin{\hat{\circ}} B$. Но тогда из теоремы 2.9 $AB = A \mathbin{\hat{\cup}} B$.

На этом мы закончим исследование свойств операций над эквивалентностями.

Полученные результаты об операциях над отношениями допускают алгебраическую интерпретацию. Множество $\mathfrak{M}$ всех отношений на M обладает структурой моноида относительно операции произведения отношений*). Пусть множество $\mathfrak{M}_э \subseteq \mathfrak{M}$ состоит из всех отношений эквивалентности. Любое подмножество множества $\mathfrak{M}_э$, замкнутое относительно операции произведения AB, является коммутативным моноидом (теорема 2.7). Так как для множества M, содержащего не менее трех элементов, существуют некоммутирующие эквивалентности, то само $\mathfrak{M}_э$ не образует моноида относительно произведения отношений. Однако $\mathfrak{M}_э$ обладает структурой коммутативного моноида относительно операции $A \mathbin{\hat{\cup}} B$ (теорема 2.8) или, что то же самое, $A \mathbin{\hat{\circ}} B$ (теорема 2.9). На подмоноидах из $\mathfrak{M}_э$ моноида $\mathfrak{M}$ (относительно AB) операция $A \mathbin{\hat{\cup}} B$ совпадает с операцией произведения AB (теорема 2.10).

§ 4. Отношения эквивалентности на числовой прямой

Пусть задано отношение A на множестве M. В случае, когда M — числовая прямая, отношение A отождествляется с некоторым подмножеством числовой плоскости, т. е. прямого произведения $M \times M$. В этом параграфе будут рассмотрены геометрические свойства множества A на плоскости в случае, когда отношение A есть эквивалентность.

Согласно определению 2.3 отношение A называется *эквивалентностью*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Каждое из этих свойств порождает некоторое геометрическое свойство множества A. Координаты точки на плоскости будем обозначать $\langle x, y \rangle$.

1. Рефлексивность. Из того, что xAx для всех x, следует, что множество A содержит главную диагональ (*свойство R*).

---

*) Если на некотором множестве $\mathfrak{M}$ определена ассоциативная операция и существует элемент E, ведущий себя, как единица при этой операции, то говорят, что на множестве $\mathfrak{M}$ задана *структура моноида*.

2. Симметричность. Симметричность означает, что если $\langle x, y\rangle \in A$, то и $\langle y, x\rangle \in A$, т. е. что множество A симметрично относительно главной диагонали (*свойство* S).

3. Транзитивность. Транзитивность означает, что если $\langle x, y\rangle \in A$ и $\langle y, z\rangle \in A$, то и $\langle x, z\rangle \in A$. Точка $\langle x, z\rangle$ является четвертой вершиной прямоугольника, три вершины которого находятся в точках $\langle x, y\rangle$, $\langle y, z\rangle$ и $\langle y, y\rangle$. Заметим, что вершина $\langle y, y\rangle$ лежит на биссектрисе координатного угла — главной диагонали координатной плоскости. Поэтому геометрически свойство транзитивности можно сформулировать следующим образом:

Множество A на плоскости определяет транзитивное отношение тогда и только тогда, когда для любого прямоугольника, одна вершина которого α лежит на главной диагонали, а две соседние с α вершины принадлежат A, вершина α', противоположная α, также принадлежит A (*свойство* T_1; см. рис. 2.6).

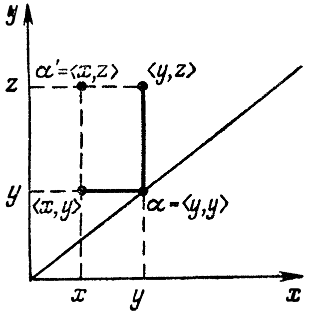


Рис. 2.6. Геометрический смысл транзитивности.

Замечание. Если отношение A является симметричным, то геометрическая формулировка транзитивности несколько упрощается. А именно:

Множество A на плоскости, симметричное относительно главной диагонали, определяет транзитивное отношение тогда и только тогда, когда для любого прямоугольника, одна вершина которого лежит на главной диагонали, а две другие принадлежат A, четвертая вершина также принадлежит A (*свойство* T_2).

Разница с предыдущим утверждением состоит в том, что вершины, принадлежащие A, не обязаны быть соседними с вершиной, лежащей на диагонали. Покажем, что для симметричного A свойство T_1 влечет T_2. Пусть, например, вершина, лежащая на диагонали, имеет координаты $\langle y, y\rangle$ и $\langle x, z\rangle \in A$ и $\langle y, z\rangle \in A$; покажем, что $\langle x, y\rangle \in A$. В самом деле, в силу симметрии, вместе с $\langle y, z\rangle \in A$ имеем $\langle z, y\rangle \in A$. Если в качестве вершины на диагонали взять теперь $\langle z, z\rangle$, а в качестве соседних с ней вершин, принадлежащих A, $\langle x, z\rangle$ и $\langle z, y\rangle$, то, в силу свойства T_1, получаем $\langle x, y\rangle \in A$.

Заметим, что класс эквивалентности, содержащий точку x_0, есть проекция пересечения множества A и прямой $x = x_0$ на ось ординат.

Сейчас мы приведем некоторые примеры множеств на плоскости, определяющих отношение эквивалентности.

Пример 1 (тривиальный). Множество A — вся плоскость. Выполнение свойств R, S, T очевидно. Все точки исходной прямой M отождествляются, т. е. входят в один класс эквивалентности.

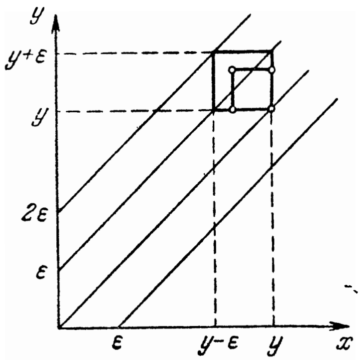


Рис. 2.7.

Замечание. Для любого $\varepsilon > 0$, если множество A, определяющее отношение эквивалентности, содержит полосу $|x - y| < \varepsilon$, то оно совпадает со всей плоскостью. В самом деле, из рис. 2.7 видно, что вместе с любой точкой $\langle y, y\rangle$ множество A содержит все внутренние точки квадрата с вершинами $\langle y - \varepsilon, y\rangle$, $\langle y, y\rangle$, $\langle y, y + \varepsilon\rangle$, $\langle y - \varepsilon, y + \varepsilon\rangle$, т. е. полосу $|x - y| < 2\varepsilon$. Ясно, что таким образом свойство «принадлежать A» распространяется на все точки плоскости.

Пример 2 (периодичность). Возьмем некоторое число. Пусть множество A состоит из прямых $x - y = kc$, где k — произвольное целое число. Выполнение свойств R и S очевидно, и если $x - y = k_1c$, $y - z = k_2c$, то $x - z = (k_1 + k_2)c$.

Пример 3. «Все константы равны единице, кроме нуля». (Такое утверждение высказал И. М. Гельфанд на одной из своих лекций.)

В этом примере множество A есть вся плоскость с выброшенными осями координат и добавленным началом координат. Иначе говоря, $\langle x, y\rangle \in A$ всегда,

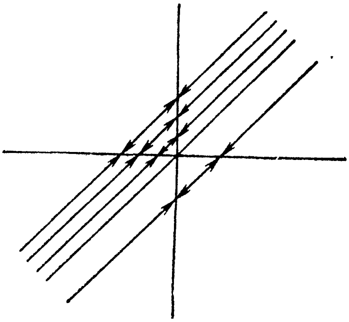


Рис. 2.8.

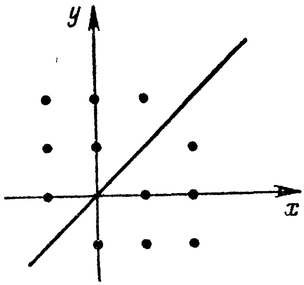


Рис. 2.9.

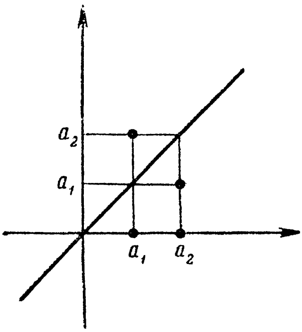


Рис. 2.10.

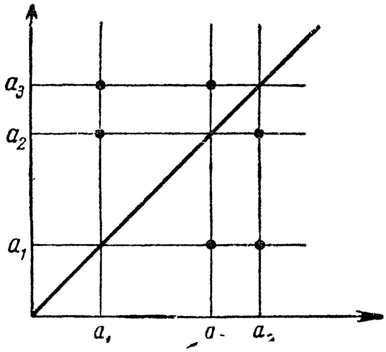


Рис. 2.11.

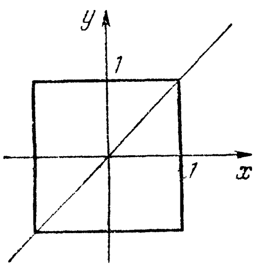


Рис. 2.12.

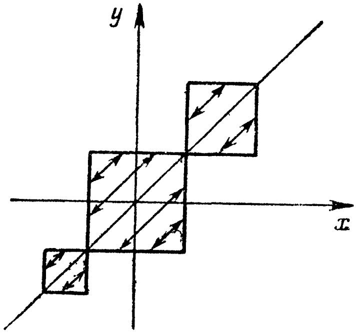


Рис. 2.13.

кроме случая $x = 0$, $y \neq 0$ и ему симметричного. Если точки $\langle x, y\rangle$, $\langle y, z\rangle$ принадлежат A, то либо $x = 0$, и тогда $y = 0$, $z = 0$, либо $x \neq 0$, и тогда $y \neq 0$ и $z \neq 0$. В обоих случаях $\langle x, z\rangle \in A$ (рис. 2.8).

В дальнейших примерах проверка свойств R, S, T будет предоставляться читателям.

Пример 4. (Все целые числа равны друг другу.) (Рис. 2.9.) Множество A состоит из главной диагонали и всех точек с целыми координатами.

Очевидно, можно рассматривать и конечные варианты такой эквивалентности типа $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (рис. 2.10 и 2.11).

Пример 5. (Все числа, не большие единицы по модулю, равны друг другу.) Множество A состоит из диагонали и замкнутого единичного квадрата (рис. 2.12). Очевидно, множество, состоящее из открытого (или полузамкнутого: $-1 \leqslant x < 1$, $-1 \leqslant y < 1$) квадрата, также дает эквивалентность.

На рис. 2.13 изображен еще один пример эквивалентности. (Стрелки на рисунке означают, что границы квадратов, кроме точек, лежащих на прямой $y = x$, не входят в график отношения.) Заметим, что если взять аналогичное множество с замкнутыми

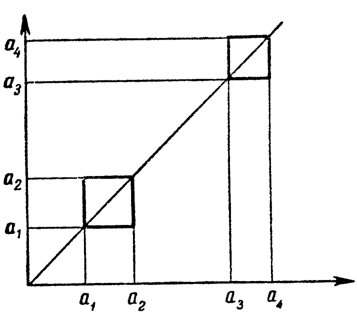


Рис. 2.14.

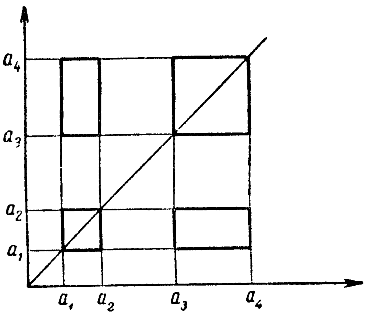


Рис. 2.15.

квадратами, оно уже не будет удовлетворять свойству T_1, и наименьшее множество, содержащее его и обладающее свойством T_1, есть вся плоскость.

Пример 6. (Все числа от a_1 до a_2 равны друг другу и все числа от a_3 до a_4 равны друг другу.) (Рис. 2.14.)

Пример 7. На рис. 2.15 изображено отношение: «Все числа от a_1 до a_2 и от a_3 до a_4 равны друг другу».

Пример 8. (Ковры Серпинского.) В заключение приведем два примера с множествами A, аналогичными «ковру Серпинского». На рис. 2.16 изображено

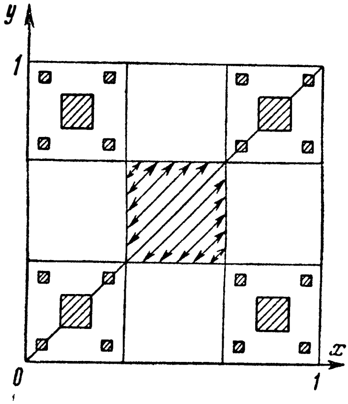


Рис. 2.16.

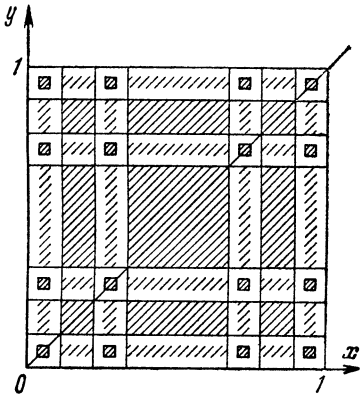


Рис. 2.17.

множество A для следующего отношения эквивалентности: берется так называемое канторово совершенное множество и отождествляются точки каждого из интервалов, выбрасываемых из отрезка $[0, 1]$ на n-м шаге (на рисунке $n = 3$). Если отождествляются все точки дополнения к канторову совершенному множеству, множество A имеет вид, изображенный на рис. 2.17. (Автор книги приносит извинения читателю, не знающему, что такое канторово множество.)

ГЛАВА III

СХОДСТВО И ТОЛЕРАНТНОСТЬ

§ 1. От сходства к толерантности

В предыдущей главе мы подробно обсудили содержательный смысл отношения одинаковости объектов. Не менее важной является ситуация, когда нам приходится устанавливать сходство объектов. Если одинаковость объектов обозначает их полную взаимозаменимость в некоторой ситуации, то сходство — это частичная взаимозаменимость, т. е. возможность взаимной замены с некоторыми (допустимыми в данной ситуации) потерями, с допустимым риском.

Например, две новые «Волги» одного выпуска и цвета с точки зрения покупателя вполне одинаковы и, стало быть, взаимозаменимы. Но две «Волги» разного выпуска (или новая и старая «Волги» одного выпуска) только похожи. При отсутствии необходимого выбора одна может заменить другую, если покупатель готов согласиться с подобной заменой.

Двое близнецов бывают настолько одинаковыми, что без всякого риска могут сдавать экзамены друг за друга. Если два студента только похожи, то такая жульническая проделка, хотя и осуществима, но рискована.

Рисунок голландского художника Эсхера (рис. 3.1) подсказывает читателю, что накапливание несущественных различий у сходных объектов может приводить к совершенно непохожим объектам.

Если для объектов указано только сходство, то невозможно их разбить на четкие классы так, что внутри класса объекты похожи, а между объектами разных классов сходства нет. В случае сходства возникает размытая ситуация без четких границ.

Каждый элемент множества несет определенную информацию о похожих на него элементах. Но не всю информацию, как в случае одинаковых элементов. Здесь уже нет дилеммы: «Все или ничего» или «Полная информация — отсутствие информации». Здесь возможны разные степени информации, которую один элемент содержит относительно другого.

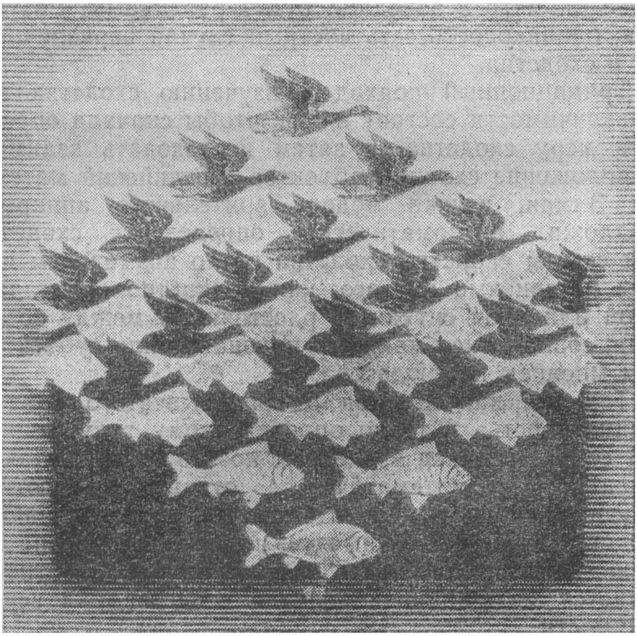


Рис. 3.1. Небо и вода (гравюра М. К. Эсхера).

Превосходная степень от сходства — неразличимость, а вовсе не одинаковость, как может показаться на первый взгляд. Одинаковость — свойство качественно иное. Дело в том, что неразличимые объекты (так же, как и сходные) не разбиваются, вообще говоря, на классы так, чтобы в каждом классе элементы не различались, а элементы разных классов заведомо различались.

В самом деле. Возьмем множество точек на плоскости. Пусть величина d лежит ниже порога разрешимости глаза, т. е. d — такое расстояние, при котором точки, находящиеся на этом расстоянии, неразличимы зрительно (при выбранном удалении плоскости от наблюдателя). Возьмем теперь n точек, лежащих на одной прямой и отстоящих (каждая — от соседних) на расстоянии d. Каждая пара соседних точек неразличима, но если n достаточно велико, то первая и последняя точки будут отстоять друг от друга на метр и заведомо будут различимы. Разумеется, одинаковость есть частный случай неразличимости и сходства.

Традиционный подход к изучению сходства или неразличимости состоит в том, чтобы сначала определить меру сходства, а затем исследовать взаимное расположение сходных объектов. Английский математик Зиман, изучая модели зрительного аппарата, предложил аксиоматическое определение сходства. Тем самым свойства сходства стало возможным изучать независимо от того, как конкретно оно задано в той или иной ситуации: расстоянием между объектами, совпадением каких-то признаков или субъективным мнением наблюдателя.

Так же, как переход от расплывчатого понятия «одинаковость» к точно определенному типу отношений сопровождался введением нового термина «эквивалентность», математическое отношение, соответствующее нашему интуитивному представлению о сходстве или неразличимости, получило у Зимана название «толерантность». Иначе говоря, толерантность является экспликацией понятия сходства или неразличимости.

Введем следующее

Определение 3.1. Отношение A на множестве M называется *толерантностью* (или *отношением толерантности*), если оно рефлексивно и симметрично.

Естественность такого определения видна из того, что всякий объект заведомо неразличим сам с собой и, уж подавно, похож на себя (это и выражает рефлексивность отношения). Ясно также, что два объекта сходны или не сходны независимо от порядка, в котором мы их рассматриваем. Это обстоятельство выражается симметричностью отношения толерантности. Из примера со зрительной неразличимостью видно, что транзитивность сходства (толерантности) отнюдь не обязательна. Ясно также, что поскольку одинаковость есть частный случай сходства, то эквивалентность должна быть частным случаем толерантности. Сравнивая соответствующие определения мы легко убеждаемся, что так оно и есть. Эквивалентность есть тот частный случай толерантности, когда кроме симметричности и рефлексивности выполняется еще и транзитивность

Рассмотрим теперь серию примеров, где сходство (толерантность) задается разными способами.

Пример 1. Множество M состоит из четырехбуквенных русских слов — нарицательных существительных в именительном падеже. Будем называть такие слова *сходными*, если они отличаются не более чем на одну букву. Известная задача «Превращение мухи в слона» в точных терминах формулируется так:

> Найти такую последовательность слов, начинающуюся словом «муха» и кончающуюся словом «слон», любые два соседних слова в которой сходны (в смысле только что данного определения).

Приведем решение этой задачи, которая может служить своеобразным образцом студенческого фольклора:

Муха — мура — тура — тара — кара — каре — кафе — кафр — каюр — каюк — крюк — крок — срок — сток — стон — слон.

Очевидно, что в этой задаче самое трудное — найти переход к иной расстановке гласных и согласных (кафе — кафр — каюр — каюк — крюк).

Пример 2. На рис. 3.2 изображены геральдические звери и существа. Между ними существуют разные признаки сходства. В частности, никто нам не мешает принять следующее определение сходства, которое, во всяком случае, ничем не хуже других:

Змея, гидра и дракон сходны как пресмыкающиеся. Гидра, кентавр и вепрь участвуют в мифах о Геракле. Единорог и кентавр сходны очевидным образом: оба суть мифические варианты коня. Единорог и двуглавый орел — мифические существа, изображенные на государственных гербах. Орел и алконоста (женщина-птица) принадлежат к классу птиц, алконоста и дракон сходны потому, что имеют крылья.

Именно это отношение сходства выразил художник на рис. 3.2: изображения сходных существ заключены в соприкасающихся кубах.

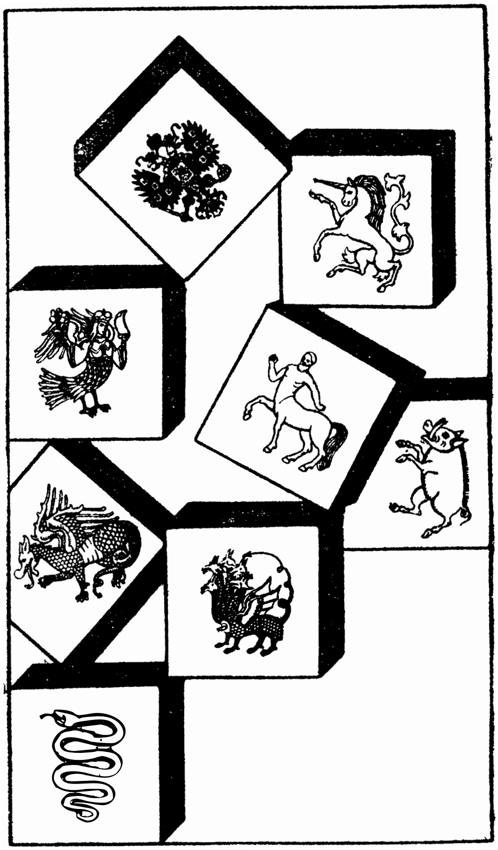


Рис. 3.2. Сходство геральдических существ.

Пример 3. А на рис. 3.3 тем же способом изображена другая группа геральдических существ.

Рыбы и дельфин принадлежат водному царству. Дельфин, изображенный на этом рисунке, внешне сходен с обычным конем *). Конь, пегас и единорог

*) Другим оправданием этого сходства может послужить отрывок из В. Брюсова: «Предадим молитве душу, а тебя из мглы пучин тихо вынесет на сушу на спине своей дельфин».

сходны чисто анатомически. Единорог, пегас и двуглавый орел образуют группу мифических существ. Сова, орел, двуглавый орел и пегас имеют крылья и этим схожи.

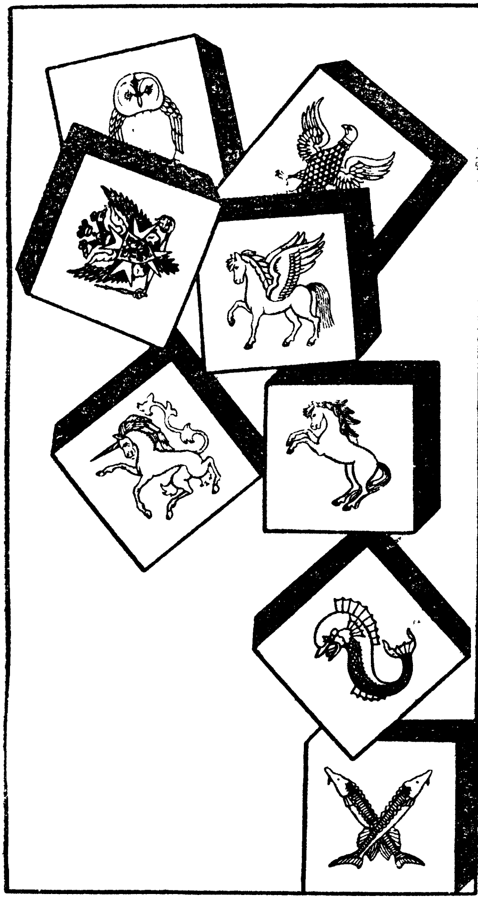


Рис. 3.3. Сходство геральдических существ.

Следующая группа примеров носит более академический характер.

Пример 4. Пусть p — натуральное число. Обозначим через S_p совокупность всех непустых подмножеств множества $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$. Два таких подмножества объявим *толерантными*, если у них есть хотя бы один общий элемент. Законность такого определения очевидна: рефлексивность и симметричность данного отношения легко проверяются.

Множество S_p называется $(p-1)$*-мерным симплексом.* Это понятие обобщает понятия отрезка, треугольника и тетраэдра на многомерный случай. Числа

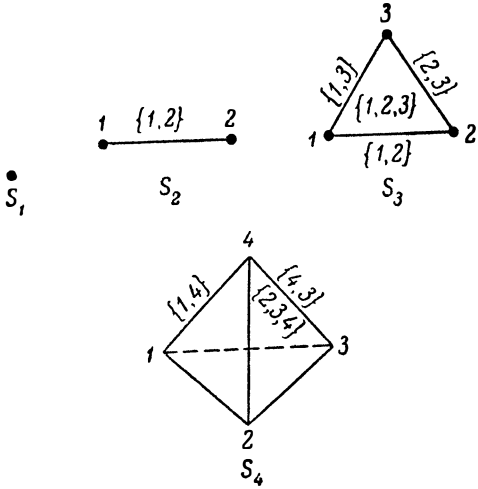


Рис. 3.4. Сходство граней в симплексе.

1, 2, ..., p интерпретируются как *вершины* симплекса. Двухэлементные подмножества — как *ребра*, трехэлементные — как *плоские* (двумерные) *грани*, k-элементные подмножества — как $(k-1)$*-мерные грани.* На рис. 3.4 изображены симплексы S_1, S_2, S_3 и S_4. Толерантность граней симплекса S_p означает их геометрическую инцидентность — наличие общих вершин.

Число всех элементов из S_p равно 2^p-1.

Мы можем элементы множества S_p изобразить в виде вершин графа, тогда ребра, как обычно, будут изображать выполнение соответствующего соотношения. На рис. 3.5 дано изображение для S_3. Предоставляем читателю сделать аналогичное изображение для S_4.

Нам будет удобно использовать

Определение 3.2. Множество M с заданным на нем отношением толерантности τ называется *пространством толерантности*. Таким образом, пространство толерантности есть пара $\langle M, \tau \rangle$.

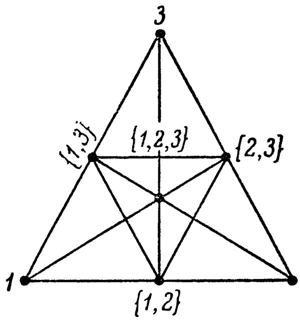


Рис. 3.5.

Пример 5. Пространство толерантности S_p допускает изящное обобщение на бесконечный случай. Пусть H — произвольное множество. Обозначим через S_H совокупность всех непустых подмножеств множества H. Толерантность τ на S_H задается условием: $X\tau Y$, если $X \cap Y \neq \varnothing$. Симметричность и рефлексивность этого отношения очевидны. Пространство толерантности S_H будет играть в дальнейшем особую роль — роль «универсального» пространства толерантности.

Пример 6. Пусть p — натуральное число. Обозначим через B_p множество всех *двоичных кортежей* длины p. Таким образом, любой элемент $x \in B_p$

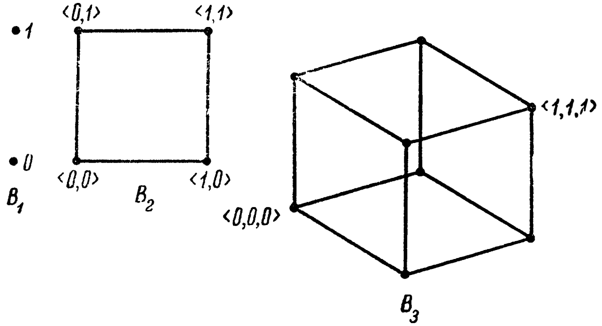


Рис. 3.6.

имеет вид $x = \langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p \rangle$, где $\xi_i = 0$ или 1. Толерантность τ в B_p задается правилом: если $x = \langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p \rangle$ и $y = \langle \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p \rangle$, то $x\tau y$ означает, что хотя бы при каком-нибудь i: $\xi_i = \eta_i$. Иначе говоря, толерантность двух элементов: $x\tau y$ — означает, что у них есть хотя бы одна общая компонента. Общее количество элементов в B_p равно, очевидно, 2^p. Для каждого $x = \langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p \rangle$ имеется ровно один не толерантный к нему элемент $y = \langle 1 - \xi_1, 1 - \xi_2, \ldots$ $\ldots, 1 - \xi_p \rangle$, у которого отличны от x все компоненты.

Для тех, кто отчетливо понимает, что компоненты кортежа длины p — это координаты точки в p-мерном пространстве, будет ясно, что B_p состоит из всех вершин p-мерного единичного куба (рис. 3.6; при изображении пространства B_3 мы опустили в графе все диагональные связи: чтобы изобразить все толерантности между элементами, следовало бы провести все диагонали на гранях куба.)

Пример 7. Простым обобщением пространства B_p является пространство толерантности B_p^m, где компоненты ξ_i принимают любые целые значения от 0 до $m - 1$, а толерантность определяется как совпадение хотя бы одной компоненты. Очевидно, $B_p = B_p^2$.

Пример 8. Следующее обобщение состоит в том, чтобы рассмотреть пространство толерантности B_p^∞, компоненты элементов которого принимают любые вещественные значения.

В частности, B_2^∞ есть множество всех пар вида $x = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$, где ξ_1 и ξ_2 — произвольные вещественные числа. Элементы пространства B_2^∞ можно изображать точками на плоскости, если ξ_1 и ξ_2 интерпретировать как декартовы координаты. Толерантность двух точек означает совпадение хотя бы одной координаты. Стало быть, две толерантные точки всегда находятся либо на общей вертикали, либо на общей горизонтали. На рис. 3.7 изображена координатная плоскость, на которой точки x_1 и x_2 толерантны, а также толерантны x_2 и x_3. Точки x_1 и x_3 уже не являются толерантными.

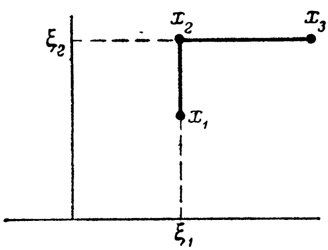


Рис. 3.7.

При других p пространство B_p^∞ можно интерпретировать как множество точек p-мерного пространства.

Но интересней другая интерпретация пространства B_p^∞. Каждый кортеж $x = \langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p \rangle \in B_p^\infty$ можно считать числовой функцией, заданной на множестве $\{1, 2, \ldots, p\}$: каждому числу j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ функция x сопоставляет число ξ_j. Толерантность двух функций x и y означает, что они хотя бы в одной точке принимают одинаковое значение (рис. 3.8).

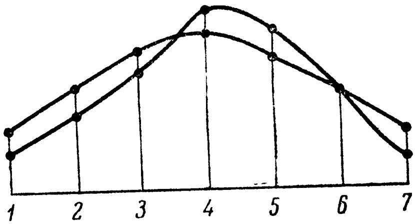


Рис. 3.8. От p-мерных векторов к функциям.

Пример 9. Возьмем теперь произвольное множество M (для наглядности можно представить себе отрезок на прямой). Пространство толерантности B_M^∞ состоит из всех *числовых функций*, определенных на этом множестве*). Две функции объявляются толерантными, если хотя бы на одном элементе из M эти функции принимают одно и то же значение (если, другими словами, графики этих функций пересекаются).

Так как B_p^∞ можно рассматривать как совокупность точек p-мерного пространства, то B_M^∞ — совокупность всех функций на некотором бесконечном множестве — естественно считать типовым бесконечномерным пространством. (Эта идея — считать совокупность функций обобщением многомерного пространства — лежит в основе важного раздела математики, так называемого функционального анализа.)

Существует еще один важный способ задания отношений толерантности. Рассмотрим соответствие

$$\varphi\colon M \to L.$$

Множество всех образов элемента x при соответ-

---

*) То есть функций, которые каждому элементу из M сопоставляют некоторое число.

ствии φ (т. е. множество элементов, соответствующих элементу x при соответствии φ) мы обозначим $\Phi(x)$. Отношение A_φ на множестве M задается условием: $xA_\varphi y$, если у элементов x и y существует общий образ, т. е. если $\Phi(x) \cap \Phi(y) \neq \varnothing$.

Установим основные свойства отношения A_φ:

Свойство 1. Отношение A_φ всегда симметрично. Это следует просто из того, что $\Phi(x) \cap \Phi(y) = \Phi(y) \cap \Phi(x)$.

Свойство 2. Отношение A_φ рефлексивно тогда и только тогда, когда соответствие φ определено на всем M. В самом деле, в этом и только этом случае множество $\Phi(x) \cap \Phi(x) = \Phi(x)$ не пусто для любого $x \in M$.

Свойство 3. Если на элементе x отношение A_φ не рефлексивно (не выполняется $xA_\varphi x$ или, что то же, $\Phi(x) = \varnothing$), то соотношение $xA_\varphi y$ не выполнено ни для какого y, так как $\Phi(x) \cap \Phi(y) = \varnothing \cap \Phi(y) = \varnothing$.

Это свойство имеет простой геометрический смысл: если вершина x в графе, изображающем A_φ, не имеет петли, то она не связана ни с какой другой вершиной. Иначе говоря, для отношений типа A_φ нерефлексивность может быть только такого типа: если на элементе x отношение A_φ не рефлексивно, то этот элемент уже ни с кем не вступает в отношение.

Свойство 4. Если соответствие φ: $M \to L$ является функцией, т. е. для любого $x \in M$ $\Phi(x)$ состоит не более чем из одного элемента *), то отношение A_φ транзитивно.

Действительно, пусть $xA_\varphi y$ и $yA_\varphi z$. Это значит, что $\varphi(x) = \varphi(y)$ и $\varphi(y) = \varphi(z)$. Следовательно, $\varphi(x) = \varphi(z)$, т. е. $xA_\varphi z$.

Из этих свойств следует, что всюду определенное соответствие φ: $M \to L$ определяет на M симметричное и рефлексивное отношение A_φ, т. е. толерантность. В § 3 мы увидим, что любое отношение толерантности может быть определено как отношение A_φ по некоторому соответствию φ (теорема 3.4).

Если соответствие φ вдобавок является функцией, то отношение A_φ — эквивалентность. В предыдущей

---

*) В этом случае $xA_\varphi y$ равносильно $\Phi(x) = \Phi(y)$ или $\varphi(x) = \varphi(y)$ (ср. с определением отношения A_φ в § 2 гл. II).

главе мы убедились, что любое отношение эквивалентности может быть определено как A_φ, где φ есть отображение множества M на некоторое множество L *).

Конец этого параграфа не имеет прямого отношения к изучаемому понятию толерантности. Однако описываемые далее типы отношений естественно возникают в ряде ситуаций и заслуживают некоторого рассмотрения. Но их роль не настолько велика, чтобы посвящать им отдельную главу или параграф.

Всякое транзитивное и симметричное отношение A на множестве M можно представить как отношение типа A_φ. Для доказательства этого утверждения нужно вспомнить следующее свойство отношений, одновременно транзитивных и симметричных: если существует y такое, что xAy, то выполнено xAx (xAy влечет yAx, а отсюда, по транзитивности, вытекает xAx). Таким образом, элементы, на которых отношение A не рефлексивно, ни с кем не связаны отношением A. Возьмем теперь подмножество M_0 множества M, состоящее из всех *рефлексивных элементов* (таких, что xAx выполнено). Тогда на M_0 мы имеем отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначим через L. Определим теперь функцию φ: $M \to L$ условием: если $x \in M_0$, то $\varphi(x)$ есть класс эквивалентности, содержащий x; если x не входит в M_0, то $\varphi(x)$ не определено. Отношение A_φ, определенное по этому φ, на M_0 совпадает с сужением отношения A на M_0, а, при $x \in M \setminus M_0$, $\Phi(x) = \varnothing$ и $xA_\varphi y$ не выполнено ни для какого y.

Когда отношение A транзитивно и симметрично, то нерефлексивность может быть только типа, описанного свойством 3.

Если же A только симметрично, то элемент может быть не рефлексивным, но вступать в отношения с другими элементами. Поэтому далеко не все симметричные отношения могут быть представлены в форме A_φ. Легко показать, что симметричное отношение представляется в форме A_φ, если оно обладает свойством 3

Однако есть другой способ задавать отношение через соответствие φ. Пусть задано соответствие φ: $M \to L$, а отношение B_φ на M задается условием: $xB_\varphi y$, если множества образов $\Phi(x)$ и $\Phi(y)$ имеют ровно один общий элемент.

Разница между A_φ и B_φ состоит содержательно в том, что A_φ есть отношение «иметь хотя бы один общий признак», а B_φ — «иметь ровно один общий признак». Нетрудно заметить, что B_φ — обязательно симметричное отношение. Если соответствие φ: $M \to L$ является функцией, то $A_\varphi = B_\varphi$. Смысл предыдущего определения показывает

Теорема 3.1. *Пусть отношение B на множестве M симметрично и антирефлексивно. Тогда существует соответствие φ: $M \to L$ такое, что $B = B_\varphi$.*

---

*) См. предыдущую сноску.

Доказательство. Рассмотрим граф, изображающий отношение B *). Пусть L — множество всех его вершин и ребер. Пусть соответствие φ: $M \to L$ определяется следующим образом. Если $x \in M$ — изолированная вершина (x не связан отношением B ни с кем), то соответствие φ на x не определено, т. е. элементу x ничего не сопоставляется. Если x — неизолированная вершина, то $\Phi(x)$ состоит из всех ребер, содержащих вершину x, и самой вершины x. Ясно, что $\Phi(x)$ содержит в этом случае более одного элемента (самое вершину и еще хотя бы одно ребро, так как вершина не изолирована). Таким образом, $xB_\varphi x$ всегда не выполнено. Пусть теперь имеет место соотношение xBy. Это значит, что $x \neq y$ и вершины x и y графа соединены общим ребром (единственным). Это ребро является единственным общим элементом множеств $\Phi(x)$ и $\Phi(y)$, т. е. $xB_\varphi y$ также выполнено. С другой стороны, выполнение соотношения $xB_\varphi y$ означает, что $x \neq y$ и у вершин x и y есть общее ребро. Стало быть, выполнено соотношение xBy. Теорема доказана.

Итак, симметричное и антирефлексивное отношение B на множестве M всегда можно описать, задав на M такую систему признаков, что соотношение xBy будет выполнено в том и только том случае, когда x и y имеют ровно один общий признак.

Примером симметричного и антирефлексивного отношения служит отношение «рифмоваться» на множестве русских слов. Очевидно, что, если слово x рифмуется со словом y, то и y рифмуется с x. По традициям русского стихосложения рифмовать слово с самим собой не полагается **), т. е. это отношение естественно считать антирефлексивным. Заметим, что уже отсюда следует нетранзитивность отношения «рифмоваться». Действительно, из транзитивности и симметричности вытекало бы, что для всякого слова x, имеющего хоть какую-то рифму y, выполнено: «x рифмуется с x». Впрочем, для современных рифм легко указать цепочку слов, в которой каждые соседние слова рифмуются, а первое и последнее совершенно не созвучны: пли — пари — тариф — рифм — ритм.

§ 2. Операции над толерантностями

Алгебраические свойства операций над толерантностями сравнительно просты. Большую часть этих свойств мы фактически уже получили в § 6 главы I. Тем не менее мы систематизируем имеющиеся у нас сведения, добавив необходимые новые.

Лемма 3.1. *Если A — толерантность, B — эквивалентность и $A \subseteq B$, то $\hat{A} \subseteq B$.*

Доказательство получается применением транзитивного замыкания к обеим частям включения $A \subseteq B$.

---

*) Причем, как мы уже уславливались, поскольку B симметрично, элементы x и y, находящиеся в отношении B, мы будем вместо двух стрелок соединять одним ребром.

**) Несомненно, читатель найдет опровергающие примеры.

Смысл этой леммы в том, что транзитивное замыкание $\hat{A}$ отношения толерантности A есть минимальная эквивалентность, включающая эту толерантность.

Из лемм 1.1, 1.3 и следствия из леммы 1.4 следует, что если отношения A и B суть толерантности, то толерантностями также являются и следующие отношения: $A \cup B$, $A \cap B$, A^{-1} и $\hat{A}$.

Из лемм 1.1 и 1.4 сразу следует

Теорема 3.2. *Для того чтобы произведение AB отношений толерантности A и B было толерантностью, необходимо и достаточно, чтобы A и B коммутировали. В этом случае $AB = A \circ B$.*

Симметризованное произведение $A \circ B$ толерантностей A и B всегда будет толерантностью. В самом деле, рефлексивность вытекает из леммы 1.1. Симметричность симметризованного произведения $A \circ B$ следует из того, что

$$(A \circ B)^{-1} = (AB \cup BA)^{-1} = (AB)^{-1} \cup (BA)^{-1} =$$
$$= B^{-1}A^{-1} \cup A^{-1}B^{-1} = BA \cup AB = AB \cup BA = A \circ B.$$

Можно ввести еще один вариант симметризованного произведения: $A * B = AB \cap BA$. Легко показать, что $A * B$ будет толерантностью, если A и B — толерантности.

Полезно еще заметить, что для любого рефлексивного отношения A отношения $A \cup A^{-1}$, $A \cap A^{-1}$, $A \circ A^{-1}$ будут толерантностями.

§ 3. Классы толерантности

Мы займемся здесь изучением структуры пространств толерантности и попробуем различными способами представить, как устроены произвольные пространства толерантности. Содержательно, общий результат состоит в том, что любое отношение толерантности может быть задано набором признаков так, что толерантные элементы суть те, которые имеют общие признаки.

Охарактеризовать некоторую совокупность объектов *признаками* означает, строго говоря, следующее. Возьмем множество M всех этих объектов и множество N всех возможных признаков. Установим теперь соответствие

$$\varphi\colon M \to N,$$

сопоставляющее каждому объекту из M все те признаки, которыми он обладает. Наоборот, любое соответствие $\psi\colon M \to N$ можно содержательно интерпретировать как присвоение некоторым объектам (элементам множества M) некоторых признаков (элементов из N).

Итак, строгое понятие «соответствие» позволяет придать точный смысл обиходному выражению «иметь признаки». В § 1 мы показали, что всякое всюду определенное на M соответствие φ задает на множестве M отношение толерантности A_φ, определяемое как совпадение хотя бы одного признака (наличие общего признака).

Мы покажем, что любое отношение толерантности можно задать таким образом. Более того, существует некоторая каноническая совокупность признаков, которая строится по данному отношению толерантности независимо от способа его конкретного задания.

Отношение толерантности A_φ на множестве M может быть определено также на языке покрытий. (Система множеств П называется *покрытием* множества M, если $\bigcup\limits_{A \in \Pi} A \supseteq M$.) В самом деле. Пусть $\varphi\colon M \to N$ — всюду определенное соответствие. Сопоставим каждому «признаку» $\xi \in N$ множество $M(\xi)$ всех элементов из M, обладающих признаком ξ, т. е. множество $\varphi^{-1}(\{\xi\})$. Система всех множеств $M(\xi)$ образует покрытие множества M: $M = \bigcup\limits_{\xi} M(\xi)$, поскольку любой элемент $x \in M$ входит в некоторое $M(\xi)$. Легко видеть, что $xA_\varphi y$ тогда и только тогда, когда существует такой признак ξ, что $x \in M(\xi)$ и $y \in M(\xi)$. Таким образом, толерантность A_φ может быть задана так: $xA_\varphi y$, если x и y принадлежат некоторому общему классу покрытия $\{M(\xi)\}$. В этом параграфе мы построим каноническое покрытие пространства толерантности.

Теоремы этого параграфа — хороший пример так называемых классификационных теорем, когда объекты, заданные абстрактными аксиомами, «материализуются» в виде конкретной и обозримой конструкции.

Перейдем к формальным построениям. Пусть задано пространство толерантности $\langle M, \tau \rangle$.

Определение 3.3. Множество $L \subseteq M$ называется *предклассом* в $\langle M, \tau \rangle$, если любые два его элемента x и y толерантны, т. е. для них выполнено соотношение $x \tau y$.

Лемма 3.2. *Для того чтобы два элемента x и y были толерантны, необходимо и достаточно, чтобы существовал предкласс L, содержащий оба эти элемента.*

Доказательство. Если x и y лежат в предклассе L, то по определению предкласса выполнено соотношение $x \tau y$. Если $x \tau y$, то множество $\{x, y\}$ само образует предкласс, так как, кроме исходного соотношения, выполнены также соотношения $x \tau x$, $y \tau y$ и $y \tau x$.

Определение 3.4. Множество $K \subseteq M$ называется *классом толерантности* *) в $\langle M, \tau \rangle$, если K есть максимальный предкласс.

Это значит, что любое множество $R \supset K$ уже не является предклассом. Или, иначе, для всякого элемента $z \in M$, не входящего в K, существует элемент $x \in K$, не толерантный к z.

Лемма 3.3 (о пополнении предклассов). *Всякий предкласс содержится хотя бы в одном классе K.*

Доказательство мы проведем лишь для случая, когда само множество M конечно, так как в общем случае необходимо использовать так называемую трансфинитную индукцию.

Итак, пусть L — предкласс. Если само L есть класс, то лемма доказана. Если L — не класс, то в множестве $M \setminus L$ существует элемент z, толерантный ко всякому элементу из L. Добавим такой элемент z к L, т. е. рассмотрим множество $L_1 = L \cup \{z\}$. Тогда $L_1 \supset L$ и L_1 снова является предклассом. Либо L_1 — класс, либо мы продолжаем дальше этот процесс расширения предкласса до класса. Поскольку множество M конечно, через конечное число шагов наше построение класса закончится. Лемма доказана.

Следствие. Всякий элемент $x \in M$ содержится в некотором классе, т. е. *система классов*

---

*) Там, где не будет опасности недоразумений, мы будем говорить просто о *классе*.

толерантности образует покрытие множества M. В самом деле, в силу рефлексивности, $x\tau x$ и множество $\{x\}$, состоящее из одного элемента x, образует предкласс.

Из лемм 3.2, 3.3 непосредственно вытекает

Лемма 3.4. *Для того чтобы два элемента x и y были толерантны, необходимо и достаточно, чтобы существовал класс, содержащий оба эти элемента.*

Теперь у нас все подготовлено к тому, чтобы сформулировать и доказать основную классификационную теорему. Напомним еще раз определение пространства толерантности S_H. Оно состоит из всех непустых подмножеств множества H. Подмножества считаются толерантными в S_H, если их пересечение непусто.

Теорема 3.3. *Пусть $\langle M, \tau\rangle$ — произвольное пространство толерантности, а H — множество всех его классов толерантности. Тогда существует отображение*

$$\varphi\colon\ M \to S_H \tag{3.1}$$

такое, что элементы из M толерантны в том и только том случае, когда толерантны их образы в S_H.

Доказательство. Выберем в качестве φ отображение, которое каждому элементу $x \in M$ сопоставляет множество $H(x)$, состоящее из всех содержащих его классов. По следствию из леммы 3.3 $H(x) \neq \varnothing$ для любого x. По лемме 3.4 отношение $x\tau y$ выполнено в том и только том случае, когда $H(x) \cap H(y) \neq \varnothing$, т. е. $H(x)$ и $H(y)$ содержат общий класс.

Если M конечно, то количество всех его подмножеств конечно и, стало быть, конечно пространство S_H. Поэтому вместо отображения (3.1) можно взять отображение $\varphi\colon M \to S_p$, где p — число классов толерантности в $\langle M, \tau\rangle$, которое каждому элементу x сопоставляет множество номеров, содержащих его классов:

$$x \to \{n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k\} \tag{3.2}$$

(здесь $n_i \leqslant p$). Толерантность элементов x и y означает, что среди номеров, сопоставленных элементам x и y согласно (3.2), есть хотя бы один общий. Иными словами, x и y имеют общий числовой признак.

Рассмотрим в качестве примера множество геральдических существ на рис. 3.9. Будем полагать толерантными те из них, которые имеют общим один из следующих признаков: 1) быть млекопитающим; 2) быть мифическим существом; 3) быть птицей. Легко видеть, что все существа, обладающие одним из этих признаков, толерантны меж собой и тем самым образуют предкласс. Можно проверить, что для множества существ на рис. 3.9 эти предклассы суть классы толерантности. Львы и кони обладают только

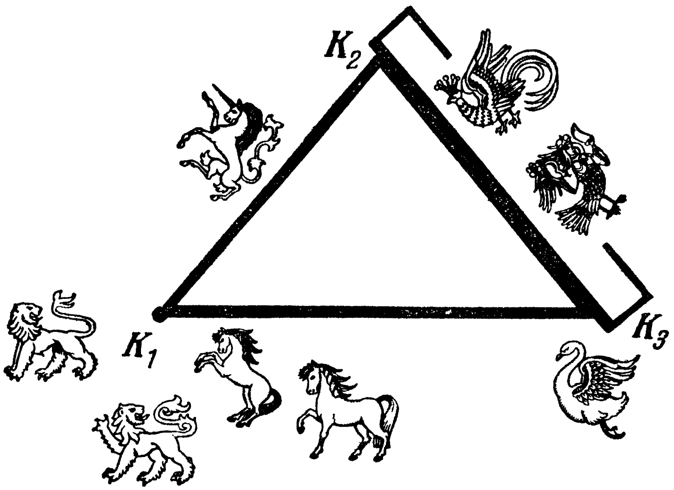


Рис. 3.9. Группировка по классам толерантности.

первым признаком и им соответствует вершина K_1 трехмерного симплекса (попросту говоря, треугольника). Единорог обладает первым и вторым признаком и поэтому изображен на ребре K_1K_2. Алконоста и райская птица обладают вторым и третьим признаком*). Им соответствует ребро K_2K_3. Лебедь помещен в вершину K_3, поскольку он обладает только третьим из признаков.

Рассмотрим теперь всюду определенное соответствие

$$\varphi\colon M \to H,$$

*) Впрочем, возможно, алконоста одновременно является и птицей и млекопитающим; рис. 3.9 нуждается тогда в исправлении.

которое каждому $x \in M$ сопоставляет все классы, в которые он входит. Из леммы 3.4 вытекает, что $x\tau y$ равносильно тому, что у x и y имеется общий образ в H. Тем самым доказана анонсированная в § 1.

Теорема 3.4. (Л. Кальмар — С. Якубович). *Произвольное отношение толерантности τ на множестве M можно задать как отношение A_φ с помощью некоторого всюду определенного соответствия*

$$\varphi: M \to H.$$

* * *

Рассмотрим теперь, как выглядят классы толерантности в некоторых конкретных пространствах толерантности.

Пространство S_p. Напомним, что это пространство толерантности состоит из множеств номеров вида $x = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, где все $n_i \leqslant p$, причем элементы x и y толерантны, если они содержат общий номер.

Обозначим через K_i множество всех элементов, содержащих номер i. Например, при $p = 3$ и $i = 1$, K_1 состоит из элементов $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$. Ясно, что если $x \in K_i$ и $y \in K_i$, то они заведомо имеют общий номер i, и потому $x\tau y$. Стало быть, K_i есть предкласс. Пусть теперь z — произвольный элемент, не входящий в K_i, а $x = \{i\}$ — тот элемент из K_i, который имеет единственный номер i. Ясно, что $x\tau z$ не выполнено, поскольку z не содержит номера i, а x содержит только этот номер. Значит, предкласс K_i нельзя расширить и справедлива

Лемма 3.5. *Множество K_i является классом толерантности.*

Так как K_i состоит из всех множеств вида $\{i, n_1, \ldots, n_k\}$, то число элементов множества K_i равно 2^{p-1} — число всех подмножеств множества из оставшихся $p - 1$ номеров. Геометрически K_i составляет совокупность всех граней (любых размерностей) симплекса, содержащих i-ую вершину.

Фактически найденных классов K_i достаточно, чтобы задать толерантность в S_p. Точный смысл этого утверждения состоит в том, что соотношение $x\tau y$ выполняется тогда и только тогда, когда существует класс K_i, содержащий одновременно x и y. Действительно, если $x\tau y$, то x и y содержат некоторый общий номер i, и тем самым входят в класс K_i. Обратное столь же очевидно. Таким образом, лемма 3.4 допускает для пространства S_p уточнение. Для проверки толерантности достаточно ограничиться проверкой вхождения в один из классов K_i. Меньшим запасом классов ограничиться уже нельзя, поскольку толерантность элементов $\{i\}$ и $\{i, j\}$ определяется их вхождением именно в класс K_i (см. ниже лемму 3.6). Однако в S_p кроме K_i есть еще классы толерантности — в указанном смысле избыточные. Так, в S_3 множество $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$ образует класс. (Это проверяется непосредственным перебором.) Ясно, что этот класс не совпадает ни с одним K_i, так как не содержит элементов вида $\{i\}$. Замеченный факт о существовании «необходимых» и «избыточных» классов естественным образом приводит к понятию базиса.

Определение 3.5. Совокупность $H_B = \{K^1, K^2, \ldots\}$ классов в пространстве толерантности $\langle M, \tau\rangle$ называется *базисом*, если 1) для всякой толерантной пары x и y существует класс $K^i \in H_B$, содержащий оба этих элемента: $x \in K^i$, $y \in K^i$; 2) удаление из H_B хотя бы одного класса приводит к потере этого свойства, т. е. для всякого $K^i \in H_B$ существует толерантная пара x, y, для которой K^i является единственным общим классом толерантности в H_B.

Замечание. Произвольная система классов толерантности, обладающая свойством 1) из определения 3.5, содержит базис. Чтобы выделить этот базис, достаточно последовательно удалить «лишние» классы. Правда, для проведения этой процедуры в случае бесконечной системы классов понадобится уже упоминавшаяся трансфинитная индукция.

В качестве исходной системы можно выбрать все множество классов. Отсюда следует существование базиса в любом пространстве толерантности.

Используя понятие базиса, мы сформулируем следующее утверждение:

Теорема 3.3′. *Пусть $\langle M, \tau\rangle$ — произвольное пространство толерантности, а H_B — базис. Тогда существует отображение*

$$\varphi\colon M \to S_{H_B}$$

такое, что элементы из M толерантны в том и только том случае, когда толерантны их образы в S_{H_B}.

Эта теорема доказывается почти буквальным повторением доказательства теоремы 3.3, а смысл ее состоит в том, что любое пространство толерантности реализуется (с точностью до склеек) как система множеств классов из базиса с естественной толерантностью типа S_{H_B}.

Выше мы показали, что в пространстве толерантности S_p набор классов $K_1, K_2, \ldots, K_p$ образует базис, не совпадающий с совокупностью всех классов.

С. М. Якубович (НТИ, сер. 2, 1968, № 10) описала все классы толерантности в S_p. Мы не будем приводить здесь это описание, а только установим одно простое свойство этих классов.

Лемма 3.6. *Если K — класс толерантности в S_p, содержащий элемент $\{i\}$, то $K = K_i$.*

Действительно, все элементы, толерантные к $\{i\}$, обязаны содержать номер i в своем наборе. Значит, $K \subseteq K_i$. Но K есть класс, т. е. по определению не может целиком содержаться в другом классе. Значит, $K = K_i$.

Отсюда сразу получается

Лемма 3.7 (С. М. Якубович). *В пространстве S_p существует единственный базис*: $\{K_1, K_2, \ldots, K_p\}$.

Доказательство. Пусть H_B — базис в S_p. Тогда в нем обязан существовать класс, содержащий элемент $\{i\}$. По предыдущей лемме таким классом может быть только K_i. Стало быть, базис H_B должен содержать все классы $K_1, K_2, \ldots, K_p$. Но они уже сами образуют базис, т. е. $H_B = \{K_1, K_2, \ldots, K_p\}$.

В силу определения базиса толерантность в S_p можно задать (как она, впрочем, и задана заранее) только p признаками, соответствующими p базисным классам $K_1, K_2, \ldots, K_p$. При этом не надо думать, в какие паразитические классы входит еще каждый элемент.

Итак, в пространстве S_p остальные классы играют чисто паразитическую роль, не участвуя ни в одном базисе. Вообще говоря, существуют пространства толерантности с неединственным базисом. Такой пример легче всего построить геометрически.

Заметим, что в графе, изображающем множество с некоторым отношением толерантности, класс толерантности образует максимальный полный подграф в том смысле, что все вершины, входящие в один класс толерантности, соединены в графе ребрами (поскольку класс является предклассом), а любая другая вершина не соединена ребром хотя бы с одной вершиной из данного класса. На рис. 3.5 легко выделяются группы вершин, образующие максимальные полные подграфы в S_3. Это $\{\{1\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$; $\{\{2\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$; $\{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, соответствующие базисным классам K_1, K_2, K_3, и группа

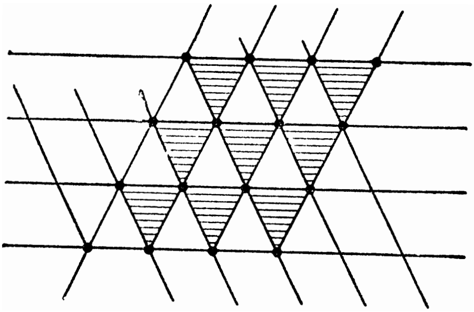


Рис. 3.10. Два базиса.

$\{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$, образующая паразитический класс.

Граф на рис. 3.10 изображает бесконечное пространство толерантности — правильную треугольную решетку, в которой соседние узлы толерантны между собой. Классом здесь будет каждый треугольник. Один базис H_B^1 образуют все зачерненные треугольники, а другой H_B^2 — все белые треугольники. Действительно, каждое ребро (т. е. каждая пара x, y различных толерантных элементов) принадлежит двум треугольникам — светлому и темному. Поэтому для толерантности пары x и y необходимо и достаточно, чтобы эта пара входила в общий темный (светлый) треугольник.

Пространство толерантности на рис. 3.11 образует конечную вырезку из предыдущего. В нем есть очевидный базис H_B^1, состоящий из всех затемненных треугольников — всего 10 классов, но в нем можно обнаружить и другой базис H_B^2, состоящий из всех треугольников, отмеченных крестиками. Этот базис состоит уже из 12 классов. Таким образом, число классов в базисе не инвариантно относительно выбора базиса. Предоставляем читателю проверить, что в примере на рис. 3.11 имеется только два указанных базиса.

Пространство B_p^m. Определение этого пространства дано в § 1. Оно состоит из целочисленных кортежей $x = \langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p \rangle$ длины p, где $0 \leqslant \xi_i \leqslant m - 1$. Обозначим через K_i^j множество, состоящее из всех элементов, для которых $\xi_i = j$ ($i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 0, 1, \ldots, m - 1$). Легко проверить, что эти множества образуют классы толерантности. Итак, класс K_i^j — это совокупность кортежей, у которых фиксированная координата принимает фиксированное значение. Из определения толерантности в B_p^m сразу следует, что классы K_i^j образуют базис. Общее количество этих классов равно pm, а каждый класс содержит m^{p-1} элементов. Менее очевиден тот факт, что в B_p^m существуют и другие классы толерантности *).

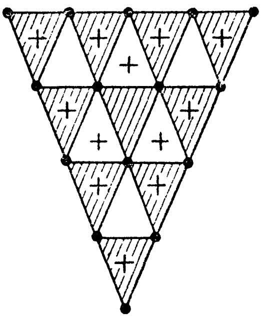


Рис. 3.11. Два базиса с разным числом классов.

* * *

Когда отношение толерантности оказывается транзитивным, т. е. превращается в свой частный случай — в отношение эквивалентности, то классы толерантности превращаются, очевидно, в классы эквивалентности. Так как классы эквивалентности не пересекаются, справедлива

Лемма 3.8. *Отношение толерантности* τ *является отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда классы толерантности не пересекаются друг с другом.*

*) См. Ю. А. Шрейдер, Пространства толерантности, Кибернетика, 1970, № 2.

Вернемся теперь к изучению отображения φ, построенного в процессе доказательства теоремы 3.3, и выясним, какие элементы из M имеют одинаковый образ при отображении φ, т. е. отчего φ бывает не инъективным.

Определение 3.6. Пусть $\langle M, \tau \rangle$ — пространство толерантности. Множество $L \subseteq M$ называется *ядром*, если существует такая совокупность классов K^1, $K^2, \ldots$, что L есть совокупность всех элементов из M, каждый из которых входит во все эти и только эти классы.

Ядра — это прообразы при отображении φ. Действительно, ядро $Я(K^1, K^2, \ldots)$ состоит из всех тех элементов x, для которых образ $\varphi(x)$ есть именно это множество классов толерантности: $\{K^1, K^2, \ldots\}$. Отсюда ясно, что непустые ядра образуют разбиение множества M и тем самым задают отношение эквивалентности. Мы попробуем разобраться, как это отношение связано с исходной толерантностью.

Пусть задано пространство толерантности $\langle M, \tau \rangle$. Далее мы будем обозначать через T_x множество всех элементов, толерантных к x. Отношение θ на M определим условием

$$x\theta y, \quad \text{если} \quad T_x = T_y. \tag{3.3}$$

Иначе говоря, $x\theta y$ означает, что x и y толерантны к одним и тем же элементам.

Лемма 3.9. *Для того чтобы выполнялось соотношение $x\theta y$, необходимо и достаточно, чтобы x и y лежали в одном и том же ядре* $Я(K^1, K^2, \ldots)$.

Доказательство. Пусть x и y принадлежат ядру $Я(K^1, K^2, \ldots)$. По лемме 3.4 множество T_x состоит из всех элементов, входящих хотя бы в один из классов $K^1, K^2, \ldots$: $T_x = K^1 \cup K^2 \cup \ldots$ Но то же самое справедливо и для множества T_y, т. е. $T_x = T_y$ или $x\theta y$. Обратно. Предположим, что $x\theta y$, и пусть x принадлежит некоторому классу K. Тогда для любого $z \in K$ будет выполнено соотношение $x\tau z$. В силу (3.3), выполнено и $y\tau z$. Значит, $y \in K$ (поскольку K — максимальный предкласс). Аналогично показывается, что всякий класс, содержащий y, содержит одновременно x. Итак, x и y принадлежат одной и той же совокупности классов, а значит, и общему ядру. Лемма доказана.

Отсюда вытекает важное

Следствие. *Отношение* θ *есть эквивалентность, а непустые ядра служат для* θ *классами эквивалентности.*

Отметим очевидное включение

$$Я(K^1, K^2, \ldots) \subseteq K^1 \cap K^2 \cap \ldots \tag{3.4}$$

В случае эквивалентности классы не пересекаются и каждое ядро совпадает со своим классом толерантности:

$$Я(K) = K,$$

и, кроме того, для любого $x \in Я(K)$

$$T_x = Я(K).$$

Любопытно заметить, что при обобщении понятия эквивалентности — переходе к толерантности — понятие класса эквивалентности расщепляется на два разных понятия — класс толерантности и ядро. Это довольно часто встречающаяся в математике ситуация — расщепление понятий при переходе от частного понятия к общему.

Определение 3.7. Пространство толерантности $\langle M, \tau \rangle$ называется *безъядерным*, если каждое ядро состоит не более чем из одного элемента.

Примером безъядерного пространства может служить пространство, изображенное на рис. 3.10. Каждая точка принадлежит ровно шести треугольникам — классам толерантности. Одной шестерке примыкающих треугольников соответствует ровно одна точка — определяемое этими классами ядро. Любой другой совокупности треугольников соответствует пустое ядро. Для безъядерных пространств толерантности основная классификационная теорема (теорема 3.3) может быть уточнена так:

Теорема 3.3″. *Пусть* $\langle M, \tau \rangle$ *— безъядерное пространство толерантности, а* H *— множество всех его классов толерантности. Тогда существует* ***инъективное*** *отображение*

$$\varphi\colon\ M \to S_H$$

такое, что элементы из M *толерантны в том и только в том случае, когда толерантны их образы в* S_H.

Для конечных пространств с нетривиальными ядрами можно применить тот же прием, который был уже использован для задания признаками эквивалентности. А именно, выберем в каждом ядре свою нумерацию. Сопоставим каждому элементу x конечного пространства $\langle M, \tau \rangle$ набор номеров

$$x \to (n_0;\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k),$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — те же самые номера, что и в (3.2), а n_0 — номер элемента в своем ядре. Ясно, что элемент однозначно определяется целочисленными признаками $n_0; n_1, n_2, \ldots, n_k$, а толерантность пары определяется совпадением одного из признаков $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Пусть теперь $\langle M, \tau \rangle$ — произвольное пространство толерантности. Обозначим через $M^{Я}$ множество его ядер и определим толерантность ядер $Я_1$ и $Я_2$ условием: $Я_1 \tau_Я Я_2$, если существуют представители $x_1 \in Я_1$ и $x_2 \in Я_2$, толерантные в $\langle M, \tau \rangle$. Так как элементы одного ядра имеют общее множество толерантных с ними элементов, то из $Я_1 \tau_Я Я_2$ следует, что для любого $x_1 \in Я_1$ и любого $x_2 \in Я_2$ выполнено $x_1 \tau x_2$. Иначе говоря, если $x_1 \tau x_2$, $x_1' \theta x_1$, $x_2' \theta x_2$, то также $x_1' \tau x_2'$. Мы получили новое пространство $\langle M^Я, \tau_я \rangle$. Можно убедиться, что оно-то уж будет безъядерным. Ясно также, что $x \tau y$ равносильно $Я(x) \tau_Я Я(y)$, где $Я(x)$ и $Я(y)$ — содержащие эти элементы ядра.

Теперь заметим, что ядра можно было бы определять не с помощью полного запаса классов, а только с помощью классов, принадлежащих некоторому базису H_B. Пусть $\{K_1', K_2', \ldots\}$ — некоторая совокупность классов из базиса H_B. *Ядром* $Я(K_1', K_2', \ldots)$ *относительно базиса* H_B мы назовем совокупность всех элементов из M, каждый из которых входит во все эти классы и не входит ни в какие другие классы из данного базиса H_B (ср. с определением 3.6). Верна следующая

Лемма 3.10. *Разбиение множества M на ядра относительно базиса H_B совпадает с разбиением множества M на обычные ядра.*

Доказательство. Буквально повторяя доказательство леммы 3.9, мы получим, что ядра, определенные по базису H_B, суть классы эквивалентности по θ. Стало быть, они совпадают с исходными ядрами.

Рассмотрим еще раз пространство B_p^m. Легко видеть, что $K_i^j \cap K_i^k = \varnothing$ при $j \neq k$. (Один и тот же набор $\langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p \rangle$ не может иметь два разных значения координаты ξ_i.) Каждый элемент $x = \langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p \rangle$ входит ровно в p классов: $K_1^{\xi_1}, K_2^{\xi_2}, \ldots, K_p^{\xi_p}$. Таким образом, все непустые базисные ядра здесь имеют вид $Я\left(K_1^{\xi_1}, K_2^{\xi_2}, \ldots, K_p^{\xi_p}\right)$ и состоят ровно из одного элемента: пространство B_p^m безъядерно. Заметим, что в случае пространства толерантности B_p^m включение (3.4) обращается в равенство

$$Я\left(K_1^{\xi_1}, K_2^{\xi_2}, \ldots, K_p^{\xi_p}\right) = K_1^{\xi_1} \cap K_2^{\xi_2} \cap \ldots K_p^{\xi_p}.$$

В некоторых случаях оказывается полезной

Теорема 3.5. *Если пространство толерантности $\langle M, \tau \rangle$ имеет конечный базис H_B, то совокупность всех классов толерантности в $\langle M, \tau \rangle$ конечна.*

Доказательство. В силу леммы 3.10 число ядер конечно, т. е. конечно пространство ядер $\langle M^Я, \tau_Я \rangle$. Значит, $\langle M^Я, \tau_Я \rangle$ имеет конечное число классов толерантности. Но так как $x\tau y$ равносильно $Я(x)\tau_Я Я(y)$, то каждый класс толерантности в $\langle M, \tau \rangle$ есть объединение ядер, образующих соответствующий класс толерантности в $\langle M^Я, \tau_Я \rangle$. Таким образом, совокупность всех классов толерантности в $\langle M, \tau \rangle$ конечна.

Обратим внимание, что ни в формулировке теоремы, ни в ее доказательстве не предполагается, что $\langle M, \tau \rangle$ конечно. Оно и фактически может быть бесконечным за счет бесконечности ядер.

§ 4. Дальнейшее исследование структуры толерантностей

Рассмотрим множество M и его покрытие П. Пару $\langle M, П \rangle$ мы будем далее называть *картой*.

Произвольная карта $\langle M, П \rangle$ позволяет ввести на множестве M отношение толерантности τ, определенное условием: $x\tau y$, если существует такое $A \in П$, что одновременно $x \in A$ и $y \in A$. Так определенную толерантность τ мы назовем *толерантностью, порожденную картой* $\langle M, П \rangle$. Очевидно, каждое $A \in П$ является предклассом порожденной толерантности τ.

Если $\langle M, \tau \rangle$ — пространство толерантности и H — множество всех классов толерантности в этом пространстве, то, в силу леммы 3.4, толерантность, порожденная картой $\langle M, H \rangle$, совпадает с исходной толерантностью τ. Аналогичное утверждение справедливо и для произвольного базиса H_B в пространстве $\langle M, \tau \rangle$.

Карта $\langle M, \Pi \rangle$ называется *канонической*, если каждый элемент A покрытия Π оказывается классом толерантности, порожденной исходной картой $\langle M, \Pi \rangle$. Легко видеть, что если карта $\langle M, \Pi \rangle$ является канонической, то Π содержит некоторый базис H_B порожденной толерантности: $\Pi \supseteq H_B$.

На рис. 3.12 слева изображена некоторая карта $\langle M, \Pi \rangle$, а справа — система классов порожденной

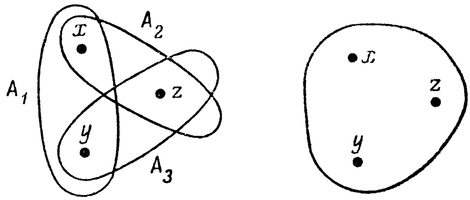


Рис. 3.12.

толерантности (впрочем, в данном случае эта система состоит из одного класса). Этот пример показывает, в частности, существование неканонических карт.

Каждая карта $\langle M, \Pi \rangle$ естественным образом приводит к всюду определенному соответствию

$$\psi\colon M \to \Pi, \tag{3.5}$$

которое каждому элементу $x \in M$ сопоставляет все те $A \in \Pi$, для которых $x \in A$. Наоборот, если дано некоторое всюду определенное соответствие $\psi'\colon M \to L$, то оно порождает покрытие Π множества M, состоящее из прообразов элементов из L при соответствии ψ'. Таким образом, $A \in \Pi$ тогда и только тогда, когда существует такое $\xi \in L$, что A есть множество элементов из M, которым соответствие ψ' сопоставляет ξ. Обозначим для дальнейшего прообраз элемента $\xi \in L$ при соответствии ψ' через $M(\xi)$.

По соответствию (3.5) можно построить отображение

$$\varphi\colon M \to S_{\Pi}, \tag{3.6}$$

которое каждому элементу $x \in M$ сопоставляет непустое множество элементов $A \in \Pi$, для которых $x \in A$. С помощью отображения (3.6) толерантность τ, порожденная исходной картой $\langle M, \Pi\rangle$, выражается условием: $x\tau y$, если $\varphi(x) \cap \varphi(y) \neq \varnothing$. Можно ввести еще и отношение θ_{Π}, определяемое условием: $x\theta_{\Pi}\, y$, если $\varphi(x) = \varphi(y)$. Отношение θ_{Π}, очевидно, является эквивалентностью.

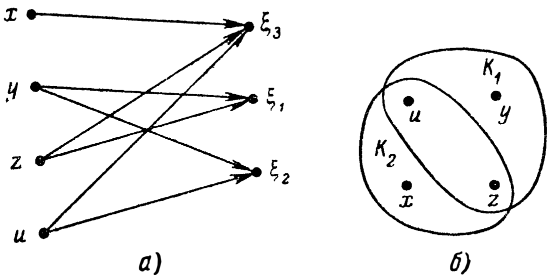


Рис. 3.13.

В соответствии с ранее принятым словоупотреблением мы будем говорить, что отображение φ сопоставляет элементу x множество $\varphi(x) \subseteq \Pi$ его признаков. Тем самым множество Π будет интерпретироваться как множество признаков, заданных для объектов из множества M. Признаками каждого элемента $x \in M$ являются те множества $A \in \Pi$, для которых $x \in A$. Таким образом, любая карта $\langle M, \Pi\rangle$ есть способ описания системы признаков, заданных на множестве M. Высказывание «элемент x обладает признаком A» равносильно включению $x \in A$. Классы порожденной толерантности называются *каноническими признаками*. Канонические признаки определяются самой толерантностью, а не способом ее задания.

Интересно посмотреть на примерах, как канонические признаки выражаются через исходные признаки карты.

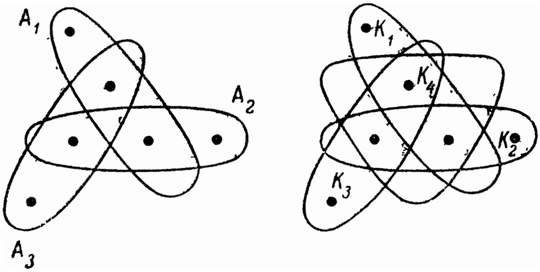
В примере на рис. 3.12 имеем

$$K = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

В примере на рис. 3.13, *а* изображено соответствие: ψ': $M \to L$, где $L = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, а $M = \{x, y, z, u\}$. На рис. 3.13, *б* изображены классы порожденной толерантности. Легко проверить, что

$$K_1 = M(\xi_1) \cup M(\xi_2), \quad K_2 = M(\xi_3).$$

На рис. 3.14 исходная карта уже является канонической. Но если взять каноническую карту $\langle M, H \rangle$



а) *б)*

Рис. 3.14.

с полным набором классов толерантности, то получим, что

$$K_4 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_1).$$

Мы изучим далее, каким образом и всегда ли канонические признаки могут быть выражены через исходные. Ответ на поставленный вопрос дает

Теорема 3.6. *Для произвольной карты $\langle M, \Pi \rangle$ любой класс порожденной толерантности K всегда может быть выражен через элементы покрытия Π с помощью операций пересечения и объединения.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый класс толерантности K. Пусть $x \in K$. По определению класса, для всякого $y \in K$, $x\tau y$, а по определению толерантности существует признак $A_{xy} \in \Pi$ такой, что $x \in A_{xy}$ и $y \in A_{xy}$. Тогда 1) $x \in \bigcap\limits_{y \in K} A_{xy}$; 2) $\bigcap\limits_{y \in K} A_{xy} \subseteq K$. Действительно, 1) следует из того, что $x \in A_{xy}$ для всех признаков A_{xy}, а 2) следует из того, что всякий z, принадлежащий A_{xy}, толерантен к y. Поскольку y — произвольный элемент из K, по свойству максимальности класса $z \in K$. Отсюда вытекает, что

$$K = \bigcup_{x \in K} \bigcap_{y \in K} A_{xy}, \tag{3.7}$$

что доказывает теорему.

Подчеркнем, что канонические признаки определяются через исходные без перехода к дополнениям. О связи между исходными и каноническими признаками говорит также

Теорема 3.7. *Существует такой базис классов порожденной толерантности, что каждый из классов этого базиса содержит некоторое множество $A \in \Pi$.*

Доказательство. По определению толерантности в M для всякого $A \in \Pi$ любая пара $x \in A$ и $y \in A$ толерантна, т. е. $x\tau y$. Значит, A есть предкласс. Тогда по лемме 3.3 существует класс $K_A \supseteq A$. Выберем для каждого A один из классов K_A. Очевидно, выбранная совокупность классов удовлетворяет условию 1) из определения 3.5. Значит, она содержит некоторый базис H_B.

Следствие. *Когда M конечно, то существует базис классов толерантности, число классов в котором не превышает количества исходных признаков.*

В самом деле. Каждому исходному признаку $A \in \Pi$ мы поставили в соответствие некоторый класс K_A. Таким образом, множество этих классов $\{K_A\}$ содержит не больше элементов, чем число признаков A. Выбирая в $\{K_A\}$ базис, мы можем только уменьшить число классов.

Рассмотрим исходную карту $\langle M, \Pi\rangle$ и полученную из нее каноническую карту $\langle M, H_B\rangle$, где H_B — базис. Как мы уже отмечали, отношения толерантности, задаваемые на множестве объектов M обеими картами, совпадают.

Несколько иначе обстоит дело с отношением эквивалентности θ_Π, задаваемым на M с помощью определения, приведенного в начале параграфа. Пусть θ_Π — отношение эквивалентности, заданное исходным множеством признаков Π, а θ — отношение эквивалентности, заданное по (3.3). Как показывает пример на рис. 3.12, отношения θ_Π и θ могут и не совпадать. Именно, для этого примера отношение θ_Π выполнено только для совпадающих объектов, так как каждому объекту соответствует различный набор исходных признаков. Отношение θ, напротив, выполнено для любой пары объектов.

В общем случае справедлива

Теорема 3.8. *Если выполнено соотношение* $x\theta_{\Pi}y$, *то выполнено и соотношение* $x\theta y$, *т. е.* $\theta_{\Pi} \subseteq \theta$.

Доказательство. Если $x\theta_{\Pi}y$, то совокупности исходных признаков $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$, выполненных для x и y, совпадают. Это означает, что, для каждого элемента покрытия A, x и y одновременно содержатся или не содержатся в A. Из теоремы 3.6 (см., в частности, (3.7)) вытекает, что для каждого класса толерантности x и y одновременно содержатся или не содержатся в нем. Таким образом, x и y имеют одинаковые наборы канонических признаков, т. е. $x\theta y$. Теорема доказана.

Следующая теорема, принадлежащая С. М. Якубович, дает условия того, что некоторое множество $A \in \Pi$ является классом толерантности, т. е. того, что некоторый признак является каноническим.

Теорема 3.9. *Пусть имеется карта* $\langle M, \Pi\rangle$. *Для того чтобы элемент покрытия* $A \in \Pi$ *являлся классом порожденной толерантности* τ, *необходимо и достаточно, чтобы для любого подмножества* $\Pi_0 \subseteq \Pi$, *из* $A \subseteq \bigcup_{B \in \Pi_0} B$ *следовало бы* $\bigcap_{B \in \Pi_0} B \subseteq A$.

Доказательство. Сначала предположим, что множество $A \in \Pi$ не является классом толерантности. Так как A является предклассом, то единственная причина, по которой A может не быть классом, состоит в том, что существует z, не входящий в A и толерантный ко всем элементам $x \in A$. Значит, для всякого $x \in A$ существует множество $B_x \in \Pi$, содержащее x и z. Таким образом, множества B_x образуют покрытие множества A: $A \subseteq \bigcup_{x \in A} B_x$. Но все B_x содержат элемент z, не входящий в A. Следовательно, пересечение $\bigcap_{x \in A} B_x$ не содержится в A. Итак, мы доказали достаточность условия, указанного в теореме 3.9. Докажем теперь необходимость. Пусть существует такое подмножество $\Pi_0 \subseteq \Pi$, что $A \subseteq \bigcup_{B \in \Pi_0} B$, но $\bigcap_{B \in \Pi_0} B \nsubseteq A$.

Значит, существует элемент z, не входящий в A, но входящий во все $B \in \Pi_0$. Этот элемент толерантен ко всем $x \in A$. Значит, A не является максимальным предклассом, т. е. не является классом толерантности. Теорема доказана.

Предоставляем читателю применить теорему 3.9 к примерам на рис. 3.12, 3.13, 3.14.

Рассмотрим еще так называемые сопряженные и производные пространства толерантности.

Пусть $\langle M, \tau \rangle$ — произвольное пространство толерантности, и пусть H_0 — некоторая совокупность классов толерантности. Множество H_0 естественным образом превращается в пространство

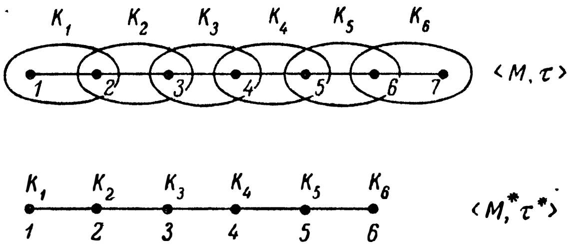


Рис. 3.15. Пространство, сопряженное к линейному.

толерантности $\langle H_0, \tau^* \rangle$ при помощи следующего определения: $K\tau^*K'$, если $K \cap K' \neq \varnothing$.

Определение 3.8. Если H_0 совпадает с множеством H всех классов, то пространство $\langle H, \tau^* \rangle$ называется *сопряженным* к $\langle M, \tau \rangle$ и обозначается $\langle M^*, \tau^* \rangle$ (таким образом, $H = M^*$).

Рассмотрим несколько примеров.

Если τ — полное отношение, то сопряженное пространство состоит из одного элемента.

В пространстве S_p элемент $x_0 = \{1, 2, \ldots, p\}$, содержащий все числа, толерантен ко всем элементам и, стало быть, входит во все классы толерантности. Значит, в пространстве $\langle S_p^*, \tau^* \rangle$ τ^* — полное отношение.

На рис. 3.15 изображен линейный граф из 7 вершин. Классами толерантности являются «ребра», а толерантны классы, соответствующие смежным ребрам. Ясно, что для линейного графа из k вершин сопряженным является линейный граф из $k-1$ вершин.

На рис. 3.16 изображен циклический граф. Сопряженным к нему будет циклический граф из того же числа вершин (если количество вершин исходного графа было больше трех).

На рис. 3.17 изображено пространство толерантности $\langle M, \tau \rangle$, состоящее из двух циклов, зацепленных в одной точке. Сопряженное пространство $\langle M^*, \tau^* \rangle$ состоит из таких же циклов с более

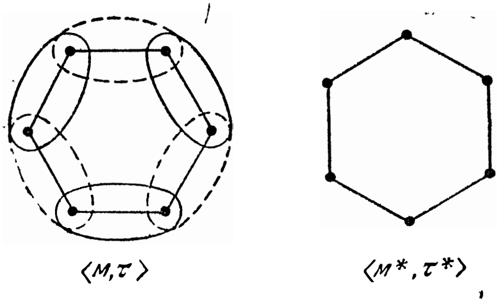


Рис. 3.16. Пространство, сопряженное к циклическому.

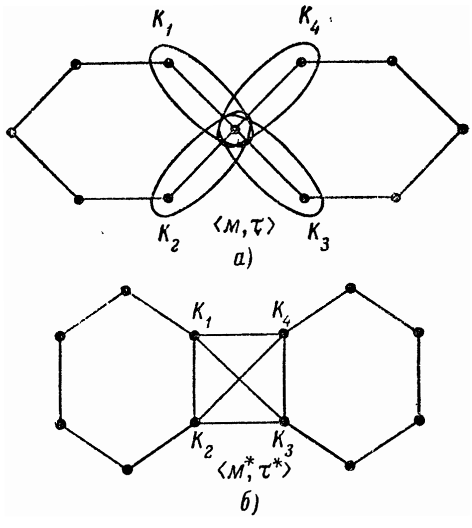


Рис. 3.17. Два зацепленных цикла и сопряженное пространство.

сложным зацеплением. Но сопряженное к последнему пространство $\langle M^{**}, \tau^{**} \rangle$ по существу совпадает с исходным пространством $\langle M, \tau \rangle$. Аккуратную проверку этого факта мы предоставляем читателю.

Определение 3.9. Пусть H_B — базис. Тогда пространство $\langle H_B, \tau^* \rangle$ называется *сопряженным* к $\langle M, \tau \rangle$, *относительно данного базиса* H_B.

Определение 3.10. Второе сопряженное пространство относительно некоторого базиса H_B в $\langle M, \tau\rangle$ и базиса H_B^* в $\langle H_B, \tau^*\rangle$ называется *производным* от исходного пространства толерантности $\langle M, \tau\rangle$.

Итак, производное пространство толерантности $\langle M', \tau'\rangle$ определяется не однозначно, а с точностью до выбора базисов. Этот произвол исключается, когда $\langle M, \tau\rangle$ и $\langle H_B, \tau^*\rangle$ имеют по единственному базису. (Например, когда все H образует базис в $\langle M, \tau\rangle$, и базис в $\langle H, \tau^*\rangle$ тоже содержит все соответствующие классы.)

Рассмотрим несколько примеров, понятных из предыдущих иллюстраций:

1. Для линейного графа с k вершинами ($k \geqslant 3$) производное пространство есть также линейный граф, но с $k-2$ вершинами (см. рис. 3.15).

2. Для циклического графа из k вершин ($k \geqslant 4$) производное пространство толерантности «совпадает» с исходным (см. рис. 3.16).

3. Для зацепленных циклических графов (см. рис. 3.17) производное пространство «совпадает» с исходным пространством.

4. Для пространства S_p производное S'_p состоит из одного элемента.

5. Если в пространстве B_p^m выбрать канонический базис $\{K_i^j\}$, то $(B_p^m)'$ «устроено» так же, как и само B_p^m. Проверку этого факта предоставляем читателю.

Приведенные выше примеры наводят на мысль о том, что производное пространство $\langle M', \tau'\rangle$ устроено как «часть» исходного пространства $\langle M, \tau\rangle$. На самом деле это не совсем так.

Точную формулировку соответствующего факта составляет

Теорема 3.10. *Если $\langle M, \tau\rangle$ — произвольное пространство толерантности, а H_B — произвольный базис в нем, то существуют такой базис H_B^* в сопряженном пространстве $\langle H_B, \tau^*\rangle$ и такое инъективное отображение*

$$\delta\colon H_B^* \to M,$$

что при $K_1^* \in H_B^*$ и $K_2^* \in H_B^*$ из $\delta(K_1^*)\tau\delta(K_2^*)$ следует $K_1^*\tau^{**}K_2^*$.

Доказательство. Обозначим через $H_B(x)$ множество классов из базиса H_B, содержащих x. Для любых классов K_1 и K_2 из $H_B(x)$ имеем $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$, т. е. $K_1\tau^*K_2$. Итак, множества $H_B(x)$ суть предклассы в $\langle H_B, \tau^*\rangle$. Значит, для всякого $x \in M$ существует класс K_x^* в $\langle H_B, \tau^*\rangle$, для которого $H_B(x) \subseteq K_x^*$. Зафиксируем для каждого x некоторый класс K_x^* и множество этих классов $\{K_x^*\}$ обозначим через $\mathfrak{H}$. Мы имеет теперь сюръективное отображение

$$f\colon M \to \mathfrak{H},$$

которое каждому $x \in M$ сопоставляет класс $K_x^* \in \mathfrak{H}$. Покажем, что $\mathfrak{H}$ содержит некоторый базис H_B^*. Действительно, если $K_1\tau^*K_2$, то существует $x \in M$, содержащийся в K_1 и K_2. Тогда K_1 и K_2

содержатся в $H_B(x)$, а значит, $K_1 \in K_x^*$ и $K_2 \in K_x^*$. Теперь для каждого $K^* \in H_B^*$ выберем ровно один элемент $x \in M$, для которого $f(x) = K^*$. Множество таких элементов обозначим через M_1. Ясно, что $M_1 \subseteq M$ и возникающее при этом сюръективное отображение множества M_1 на H_B^* инъективно. Тогда обратное к нему отображение

$$f^{-1}\colon H_B^* \to M_1$$

инъективно отображает H_B^* на подмножество M_1 множества M. Поэтому его можно рассматривать как инъективное (но уже не сюръективное в общем случае) отображение

$$\delta\colon H_B^* \to M.$$

Пусть теперь $K_x^* \in H_B^*$ и $K_y^* \in H_B^*$, где $x = \delta\left(K_x^*\right)$ и $y = \delta\left(K_y^*\right)$ и $x\tau y$. Тогда существует класс K, содержащий x и y. Значит, $H_B(x) \cap H_B(y) \neq \varnothing$. Но из $K_x^* \supseteq H_B(x)$ и $K_y^* \supseteq H_B(y)$ следует, что $K_x^* \cap K_y^* \neq \varnothing$, т. е. $K_x^* \tau^{**} K_y^*$. Теорема доказана.

Отсюда для конечных множеств M следует, что с какого-то номера должна наступить стабилизация и последовательные производные не будут по существу отличаться.

С. М. Якубович доказала, что для любого $\langle \widehat{M}, \widehat{\tau} \rangle$ существует «первообразное» $\langle M, \tau \rangle$ такое, что $\langle M', \tau' \rangle$ «совпадает» с $\langle \widehat{M}, \widehat{\tau} \rangle$.

ГЛАВА IV

УПОРЯДОЧЕННОСТЬ

§ 1. Что такое порядок?

В этой главе мы переходим к изучению нового типа отношений — не менее важного и не менее распространенного, чем предыдущие. Речь идет о ситуациях, когда объекты некоторого множества соотносятся по взаимному старшинству, по важности, по «первичности» и т. д. Подобные отношения, по-видимому, не симметричны. Мы начнем с обсуждения содержательных примеров, чтобы понять, какие свойства этих отношений являются настолько существенными и общими, что их следует включить в аксиоматическое определение интересующего нас типа отношений.

Простейшим примером могут служить целые числа. Для любых двух различных целых чисел мы умеем определять, какое из них больше другого. Это случай, когда все объекты строго расставлены по величине.

Вообще говоря, далеко не всегда все объекты можно сравнить друг с другом. Рассмотрим таблицу мемориала Ласкера (см. гл. I). Мы могли бы ввести такое определение: шахматист x сильнее шахматиста y, если x выиграл партию у y. Тогда силу игроков, сыгравших вничью, нам придется признать равной. Но этот, казалось бы, очень естественный способ упорядочивания игроков заведомо не годится для выявления победителя — самого сильного игрока: вполне реальной является ситуация, когда x обыграл y, y выиграл у z, а z, в свою очередь, разгромил x а. Поэтому место в турнире определяется по общей сумме набранных очков. Но и в этом случае не всегда победитель выявляется однозначно. Так, в мемориале Ласкера оказалось два победителя — Бронштейн и Ульман. При этом бывает, что шахматисту, занявшему среднее положение в таблице, удается разгромить призеров турнира. Шахматистам известна так называемая таблица

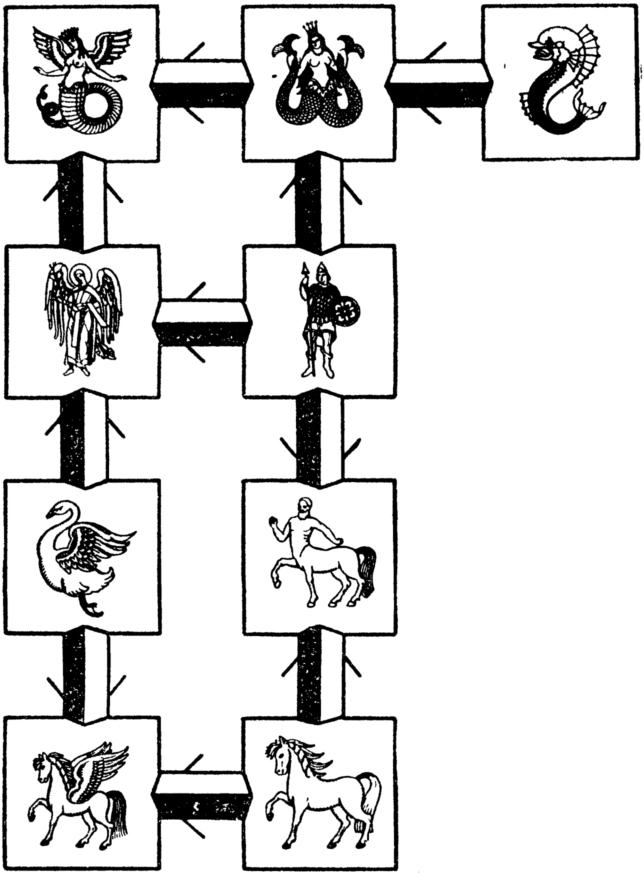


Рис. 4.1. Взаимоотношения мифических образов.

коэффициентов, по которой можно сравнивать игроков, набравших одинаковое количество очков. Идея этой таблицы состоит в том, что при равном общем количестве очков больший вес приписывается выигрышам у сильных соперников. Однако в ответственных соревнованиях, таких как первенство СССР, при дележе первых мест победитель часто выявляется в дополнительном матче.

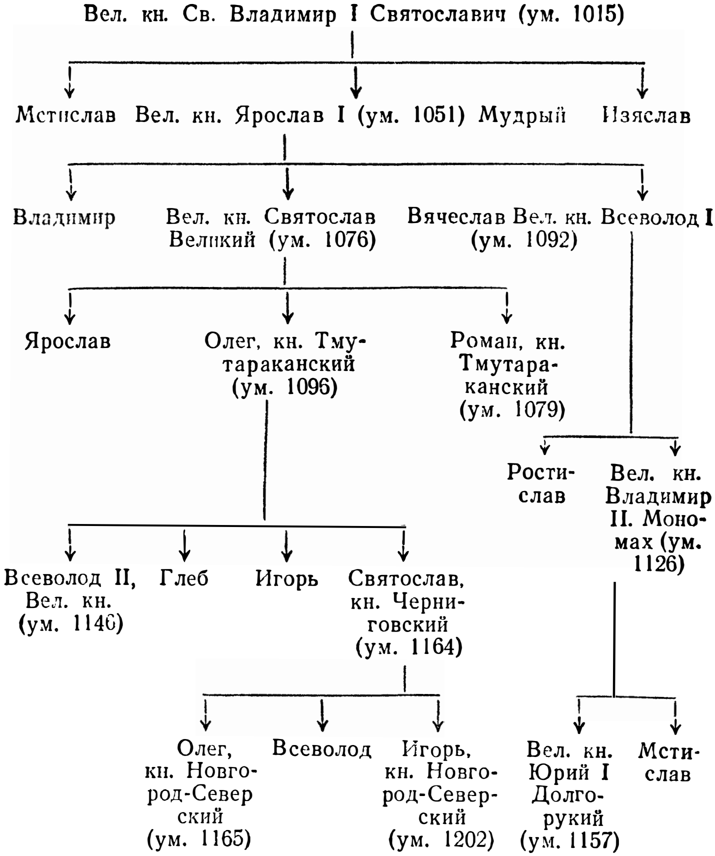
Изображения на рис. 4.1 являются геральдическими символами. Мы упорядочили эти изображения, пытаясь представить, как могло быть создано представление о том или ином мифологическом существе. Например, представление о кентавре возникает путем смешения образов человека и коня. Пегас несет черты птицы и лошади. Образ русалки явно возник путем придания человеческой фигуре черт рыбы. Сирена отличается от русалки тем, что имеет еще и крылья. Надо сразу оговориться, что этот рисунок никак не отражает исторического возникновения мифов, а призван только иллюстрировать наше представление об упорядоченности. Ясно одно, что в этом примере имеет смысл говорить о взаимном старшинстве («первичности») только для некоторых пар. Пегас и русалка, например, в данной системе никак не соотносятся.

Следующий пример — это множество людей, для которых старшинство определяется как происхождение по прямой линии. Отец, дед, прадед и т. д. считаются старшими по отношению (соответственно) к сыну, внуку, правнуку и т. д. Но уже дядя и племянник несравнимы. Такая упорядоченность изображается родословными, или генеалогическими, деревьями. К первому изданию «Слова о полку Игореве» приложена «Поколѣнная роспись россiйскихъ великихъ и удѣльныхъ князей, въ сей пѣсни упоминаемыхъ». Приведем ту часть росписи, которая непосредственно относится к главному герою песни (см. стр. 117):

Из этой росписи видно, что наследование Киевского престола и уделов происходило не только от отца к сыну, но и от старшего брата к младшему (даже при наличии сыновей у старшего). Таким образом, отношение престолонаследия не совпадает с вышеуказанным отношением старшинства. Дядя иногда оказывается «старше» своих племянников.

Во Франции действовал другой закон престолонаследия. Брат умершего короля мог занять его трон только, если не осталось наследников по прямой линии (сыновей, внуков или правнуков покойного*)).

*) Французский трон стал наследственным, а не выборным от царствования Филиппа-Августа (1180—1223 гг.). До этого пер-

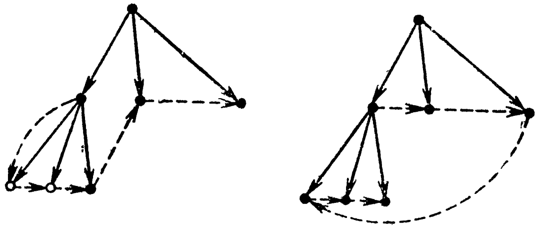


Итак, на династическом родословном древе кроме отношения происхождения по прямой линии есть еще дополнительное отношение — отношение порядка наследования. На рис. 4.2 изображен фрагмент родословного древа с указанием двух рассмотренных выше вариантов порядка престолонаследия. (Старшинство по возрасту в одной семье дается слева направо.

вые из капетингов (прямых потомков Юга Капета (987—996), занимавших французский престол до 1848 г.) короновали сыновей еще при своей жизни, чтобы закрепить права династии. Сам Филипп-Август был помазан на царствование в 1179 г. еще при жизни своего отца — Людовика VII.

Пунктирные стрелки определяют отношение ближайшего наследования.)

Рассмотрим теперь множество M всех русских слов. Будем говорить, что слово x *старше* слова y, если слово y можно получить из слова x вычеркиванием в слове x нескольких букв слева и справа (или только с одной стороны). Это отношение (обозначим



а) б)

Рис. 4.2. Порядок престолонаследия: *а*) по прямой линии; *б*) от брата к брату.

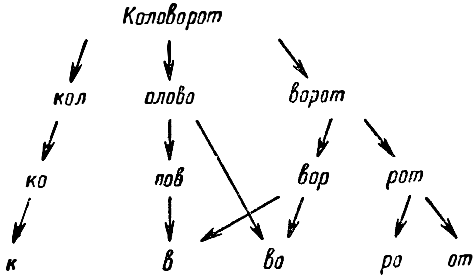


Рис. 4.3.

его: $y < x$) задает на множестве русских слов некую упорядоченность. Например, «стол» $<$ «столовая», «беда» $<$ «победа». (Помните, как нечаянно изменилось название знаменитой яхты капитана Врунгеля?) Но слова «облако» и «облатка» несравнимы — ни одно из них не старше другого. На рис. 4.3 показан фрагмент графа, изображающего старшинство русских слов.

Аналогичное отношение старшинства по вхождению можно определить на множестве структурных формул органической химии.

Пусть M — некоторое множество, а 2^M — множество всех его подмножеств. Включение $M_1 \subseteq M_2$ является соотношением, устанавливающим порядок на 2^M.

Упорядоченность на множестве B_p^m всех кортежей длины p, состоящих из целых чисел от 0 до $m-1$, можно определить следующим образом. Будем говорить, что кортеж $\langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p \rangle$ *старше* кортежа $\langle \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p \rangle$, если каждая координата первого кортежа не меньше соответствующей координаты второго кортежа: $\xi_i \geqslant \eta_i$, и хотя бы одна из координат при этом фактически больше своей одноименной. Например, в B_4^4 кортеж $\langle 1, 0, 3, 2 \rangle$ старше кортежа $\langle 1, 0, 2, 2 \rangle$, но несравним с кортежем $\langle 1, 1, 0, 0 \rangle$.

Заметим, что мы всегда имели возможность двоякого введения упорядочения. От нас зависело выбрать, считаем ли мы каждый объект подчиненным самому себе (как в случае нестрогого неравенства $\leqslant$ или нестрогого включения $\subseteq$), или, наоборот, считаем, что объект не может быть старше самого себя (как в случае строгих неравенств $<$ и включений $\subset$). Поэтому нам придется ввести два варианта аксиоматических определений — для строгой и нестрогой упорядоченности. Впрочем, как мы увидим, строгая и нестрогая упорядоченность весьма просто связаны между собой.

Сначала мы разберем случай со строгой упорядоченностью. Мы примем за основу

Определение 4.1. Отношение A на множестве M называется *отношением строгого порядка* (или *строгим порядком*), если оно антирефлексивно и транзитивно.

Примерами строгого порядка могут, очевидно, служить отношение $<$ для целых или вещественных чисел и отношение включения $\subset$ для множеств.

Теорема 4.1. *Если отношение A есть отношение строгого порядка, то оно асимметрично.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $A \cap A^{-1}$ непусто, т. е. существует пара элементов $\langle x, y \rangle$ из множества M таких, что одновременно xAy и $xA^{-1}y$. Иначе говоря, xAy и yAx. По транзитивности отсюда вытекает xAx, что противоречит антирефлексивности.

Итак, отношение строгого порядка на множестве M обладает следующими свойствами:

1) ни для какого $x \in M$ не выполнено xAx;

2) если xAy и yAz, то выполнено xAz, и

3) если выполнено xAy, то невозможно yAx. Первые два свойства образуют определение строгого порядка, а третье из них следует.

Если A — отношение строгого порядка, то граф отношения A не содержит контуров *). Обратно. Пусть мы имеем граф без контуров. Определим на множестве M вершин этого графа отношение A: xAy, если существует путь по направлению стрелок, ведущий из x в y. Легко видеть, что ввиду отсутствия контуров отношение A является отношением строгого порядка.

Множество M с заданным на нем отношением строгого порядка A, т. е. пару $\langle M, A \rangle$, естественно называть *упорядоченным множеством.*

Определение 4.2. Отношение строгого порядка A называется *совершенным строгим порядком*, если для всякой пары не совпадающих элементов x и y из M верно либо xAy, либо yAx.

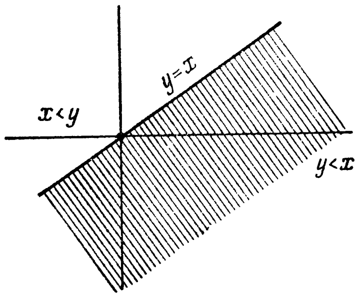


Рис. 4.4.

В силу теоремы 4.1 последние два соотношения не могут выполняться одновременно. Таким образом, если на множестве M задано отношение совершенного строгого порядка A, то на множестве M^2 всех пар возникает разбиение на три класса: класс пар вида $\langle x, x \rangle$, класс пар $\langle x, y \rangle$ таких, что xAy, и класс пар $\langle x, y \rangle$ таких, что yAx.

Например, если множество M — прямая линия с отношением $<$, то M^2 — это плоскость пар $\langle x, y \rangle$. Класс пар вида $\langle x, x \rangle$ — это диагональная прямая $y = x$, класс пар $\langle x, y \rangle$ таких, что $x < y$, состоит

*) *Контур* (в ориентированном графе) — это такая последовательность вершин $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, что $x_n = x_0$ и от вершины x_i к вершине x_{i+1} проходит стрелка. Частным случаем контура является петля ($n = 1$).

из точек, лежащих выше диагонали, а класс пар $\langle x, y\rangle$ таких, что $y < x$, — из точек, лежащих ниже диагонали (рис. 4.4).

Мы сейчас опишем структуру конечных множеств с совершенным строгим порядком.

Теорема 4.2. *Пусть дано отношение совершенного строгого порядка $<$ на конечном множестве M. Тогда на M можно выбрать такую нумерацию $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, что соотношение $x_i < x_j$ будет выполняться в том и только том случае, когда $i < j$.*

Предварительно установим, что справедлива

Лемма 4.1. *Если на конечном (непустом) множестве M задан совершенный строгий порядок $<$, то существует единственный элемент $x \in M$ такой, что для всякого y из M, не совпадающего с x, выполнено соотношение $x < y$.*

(Элемент x, обладающий указанным свойством, называется *наименьшим элементом* в упорядоченном множестве $\langle M, <\rangle$.)

Доказательство леммы. Возьмем произвольный элемент $y_0 \in M$. Если y_0 — наименьший, то существование искомого элемента доказано. Если нет, то поскольку $<$ — совершенный строгий порядок, существует такой элемент $y_1 \neq y_0$, что $y_1 < y_0$. Опять-таки либо y_1 — наименьший, либо существует $y_2 \neq y_1$ такой, что $y_2 < y_1$. Будем продолжать этот процесс. Предположим, что уже выбрано $n + 1$ элементов, для которых

$$y_n < y_{n-1},\ y_{n-1} < y_{n-2},\ \ldots,\ y_1 < y_0.$$

В силу транзитивности ясно, что $y_i < y_j$ при $i > j$. Значит, в силу антирефлексивности, все выбранные элементы попарно не равны. Стало быть, ввиду конечности множества M процесс выбора должен оборваться на некотором конечном шаге. Элемент y_n, выбранный на последнем шаге, будет, очевидно, искомым. Итак, для любого $z \neq y_n$ выполнено $y_n < z$. Покажем, что этот элемент единствен. В самом деле, пусть существует другой элемент y'_n такой, что, для всякого $z \neq y'_n$, $y'_n < z$. Тогда одновременно выполняется $y_n < y'_n$ и $y'_n < y_n$, что невозможно в виду асимметричности. Лемма доказана.

Заметим, что если на M задан совершенный строгий порядок, то на любом непустом подмножестве Q

множества M естественно возникает совершенный строгий порядок, и, стало быть, в Q (если оно конечно) существует единственный наименьший элемент.

Теперь перейдем к доказательству теоремы.

Пусть x_1 — наименьший элемент во множестве M, выбранный согласно лемме 4.1. Обозначим через M_1 множество $M \setminus \{x_1\}$. Обозначим через x_2 наименьший элемент множества M_1. Ясно, что $x_1 < x_2$. Выкинем из M_1 элемент x_2 и оставшееся множество обозначим через M_2. Его наименьший элемент x_3 удовлетворяет условию: $x_2 < x_3$. Процедура нумерации уже ясна: перебирая по указанному методу последовательно все элементы из M, мы их выстроим в цепочку:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_p,$$

где p — количество элементов в M. В силу транзитивности и асимметричности ясно, что $x_i < x_j$ в том и только том случае, когда $i < j$. Теорема доказана.

Эта теорема в сущности означает, что любой совершенный строгий порядок на конечном множестве M равносилен обычному порядку на некотором отрезке натурального ряда.

Рассмотрим некоторое множество M из каких-то твердых тел (предметов). Будем говорить, что $x < y$, если предмет x весит меньше предмета y. Это — довольно типичный пример определения порядка. Опишем теперь соответствующий общий прием.

Пусть на множестве M определена инъективная функция

$$f\colon M \to \mathbf{R},$$

принимающая вещественные числовые значения ($\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел). Зададим отношение $<$ на M условием: $x < y$, если $f(x) < f(y)$. Так определенное отношение $<$ антирефлексивно, так как не может быть $f(x) < f(x)$. Транзитивность отношения $<$ столь же очевидна. Наконец, для любой пары различных элементов x, y из M верно либо $f(x) < f(y)$, либо $f(y) < f(x)$, так как f — инъекция. Значит, порядок $<$ является совершенным. Функция f взаимно-однозначно отображает наше множество M на некоторое подмножество множества $\mathbf{R}$ вещественных чисел, так что соотношение $x < y$ для любых элементов множества M равносильно неравенству $f(x) < f(y)$.

Например, когда функция f сопоставляет предмету x его вес $f(x)$, мы получаем описанный выше порядок.

Если порядок на конечном множестве M не является совершенным, то, очевидно, элементы этого множества нельзя перенумеровать так, чтобы бо́льшим номерам соответствовали старшие элементы.

Определение 4.3. Пусть на множестве M задано отношение строгого порядка $<$. Тогда элемент $x \in M$ называется *минимальным* (*максимальным*) в упорядоченном множестве $\langle M, < \rangle$, если не существует никакого элемента y, для которого $y < x$ (соответственно $y > x$).

Если, как обычно, в случае $x < y$ проводить стрелку от x к y, то в графе отношения минимальный элемент — это тот, в который не входят стрелки, а максимальный — из которого не выходят стрелки.

В случае совершенного строгого порядка минимальный элемент x обладает тем дополнительным свойством, что для всякого $y \neq x$ выполнено $x < y$. Тем самым для случая совершенных порядков понятие минимального элемента совпадает с понятием наименьшего элемента. В общем случае может оказаться так, что элемент x минимален, но не находится в соотношении $x < y$ с какими-то иными элементами. Так, на рис. 4.3 слова «к», «в», «ро» и «от» суть минимальные элементы, но друг с другом они не находятся в рассматриваемом отношении порядка (несравнимы!). Элементы x и y называют *сравнимыми* в данном упорядоченном множестве $\langle M, < \rangle$, если $x < y$, или $x = y$, или $y < x$.

Определение 4.4. Пусть на множестве M задано отношение строгого порядка $<$. Подмножество $Q \subseteq M$ называется *максимальным совершенным*, если 1) отношение $<$ задает на Q совершенный строгий порядок и 2) на любом подмножестве R_1 множества M таком, что $R_1 \supset Q$, отношение $<$ уже не является совершенным строгим порядком.

Теорема 4.3 (Хаусдорф). *Пусть $\langle M, < \rangle$ — упорядоченное множество. Для любого элемента $y \in M$ существует максимальное совершенное подмножество Q множества M, содержащее y.*

Доказательство. Мы проведем доказательство для конечного множества M. Однако — с помощью аксиомы Цермело — это доказательство может быть проведено и для бесконечных множеств*). Пусть множество Q_1 состоит из исходного элемента y. Очевидно, отношение $<$ на Q_1 является совершенным строгим порядком (график отношения $<$ на Q_1 пуст). Если Q_1 уже является максимальным совершенным, то теорема доказана. Предположим, что мы построили множество Q_n, на котором отношение $<$ является совершенным строгим порядком. Если оно максимально, то теорема доказана. Если нет, то существует некоторый элемент из M, сравнимый со всеми элементами из Q_n. Присоединив его к Q_n, мы получим множество $Q_{n+1} \supset Q_n$ с совершенным строгим порядком. Из-за конечности самого M этот процесс оборвется на конечном шаге, и мы получим искомое максимальное совершенное множество $Q \ni y$.

Теорема 4.4. *Если $<$ — отношение строгого порядка на конечном множестве M, то для любого элемента $y \in M$ существует минимальный элемент $x \in M$ такой, что $x < y$ или $x = y$.*

Доказательство. Если y — минимальный элемент, то $x = y$. В противном случае существует такой элемент z, что $z < y$. Если z — минимальный элемент, то $x = z$. В противном случае существует такой элемент u, что $u < z$, и т. д. Поскольку M — конечное множество, через конечное число шагов наша «убывающая цепочка» $y > z > u > \ldots$ оборвется на искомом элементе. Теорема доказана.

В этой теореме конечность множества M уже существенна, так как, например, во множестве всех целых чисел, упорядоченных по возрастанию, нет минимального элемента. Однако существует класс отношений порядка на бесконечных множествах, для которого теорема о существовании минимальных элементов тоже может быть доказана.

Следующий, выделенный петитом кусок написан для читателей, знакомых с элементами теоретико-множественной топологии.

Пусть на множестве M заданы отношение строгого порядка $<$ и некоторая топология. Порядок $<$ будем предполагать непрерывным относительно данной топологии. Это означает следующее. Пусть $Q \subseteq M$. Элемент $x \in M$ называется *нижней* (*верхней*) *границей* множества Q, если для всякого элемента $y \in Q$

---

*) См. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, гл. 1 (М., ФМ, 1962).

либо $x < y$, либо $x = y$ (либо $y < x$, либо $y = x$). Через $\overline{Q}$ будем обозначать замыкание множества Q. Порядок $<$ называется *непрерывным* относительно данной топологии, если любая нижняя и любая верхняя граница произвольного $Q \subseteq M$ являются нижней и соответственно верхней границей и для его замыкания $\overline{Q}$.

Быть может, более естественно было бы определить непрерывность отношения порядка условием, что график отношения при объединении с диагональю будет замкнут на $M \times M$. Легко показать, что из такого определения наше вытекает.

Например, естественный порядок на числовой прямой непрерывен относительно естественной топологии этой прямой.

Лемма 4.2. *Если порядок непрерывен, то множество R_x всех элементов $y \in M$, для которых либо $y < x$, либо $x = y$, является замкнутым.*

Действительно, по определению x является верхней границей для R_x; в силу непрерывности x является верхней границей и для $\overline{R}_x$. Возьмем произвольный $y \in \overline{R}_x$. Тогда либо $y < x$, либо $y = x$. В обоих случаях $y \in R_x$. Значит, $\overline{R}_x \subseteq R_x$. Но всегда $\overline{R}_x \supseteq R_x$. Следовательно, $\overline{R}_x = R_x$.

Лемма 4.3. *Если порядок непрерывен, то любое максимальное совершенное множество Q замкнуто.*

Доказательство. В силу того, что на Q порядок совершенный, для любого $x \in Q$ множество Q может быть разбито на две части $Q = Q_x^+ \cup Q_x^-$. Здесь Q_x^+ — множество тех элементов $y \in Q$, для которых $y < x$ либо $y = x$, а Q_x^- — множество тех элементов y, для которых $x < y$ либо $x = y$ (пересечение $Q_x^+ \cap Q_x^-$ состоит из одного элемента x). Так как замыкание объединения равно объединению замыканий, то

$$\overline{Q} = \overline{Q}_x^+ \cup \overline{Q}_x^-.$$

С другой стороны, $Q_x^+ \subseteq R_x$ и $\overline{Q}_x^+ \subseteq \overline{R}_x$. Стало быть, по лемме 4.2 $\overline{Q}_x^+ \subseteq R_x$. Таким образом, любой элемент $y \in \overline{Q}_x^+$ либо совпадает с x, либо удовлетворяет соотношению $y < x$. Аналогично показывается, что любой элемент $z \in \overline{Q}_x^-$ либо совпадает с x, либо удовлетворяет соотношению $x < z$. Итак, любой элемент из замыкания $\overline{Q}$ сравним с x. Это утверждение справедливо для любого $x \in Q$. Итак, любой элемент $w \in \overline{Q}$ сравним с любым элементом $x \in Q$. Следовательно, если бы существовал элемент, принадлежащий множеству $\overline{Q} \setminus Q$, то этот элемент можно было бы добавить к множеству Q, сохранив совершенный порядок. Но это сделать невозможно в силу максимальности Q. Стало быть, $\overline{Q} \subseteq Q$, а значит $\overline{Q} = Q$. Лемма доказана.

Из этих лемм следует, что пересечения $F_x = R_x \cap Q$ — замкнутые множества. Если $x_1, x_2, \ldots$ — элементы из Q, то пересечение любой конечной группы этих множеств $F_{x_1} \cap F_{x_2} \cap \ldots \cap F_{x_n}$ не пусто. Действительно, поскольку $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq Q$, порядок $<$ на $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$—совершенный. Так как $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$— конечное множество, в нем есть наименьший элемент. Пусть этот наименьший элемент есть x_1. Тогда ясно, что $F_{x_1} \cap F_{x_2} \cap \ldots \cap F_{x_n} = F_{x_1}$; следовательно, интересующее нас пересечение непусто, так как содержит элемент x_1. Итак, система множеств $\{F_x\}$ $(x \in Q)$ является центрированной системой замкнутых множеств.

Теорема 4.5. *Пусть M — компактное топологическое пространство, а $<$ — непрерывный порядок на нем. Тогда для любого элемента $y \in M$ существует минимальный элемент x_0 такой, что $x_0 < y$ либо $x_0 = y$.*

Доказательство. По теореме 4.3 существует максимальное совершенное множество $Q \subseteq M$, содержащее y. По одному из определений компактного пространства пересечение системы множеств $\{F_x\}$ $(x \in Q)$ непусто. Пусть x_0 — элемент этого пересечения. Так как $x_0 \in Q$, то x_0 сравним с y. Покажем, что x_0 — минимальный элемент множества Q. Действительно, если существует $z \in Q$, для которого $z < x_0$, то R_z не содержит элемента x_0 и, следовательно, F_z не содержит x_0, т. е. x_0 не входит в пересечение всех F_x. Итак, x_0 является минимальным элементом множества Q. Значит, $x_0 < y$ или $x_0 = y$. Но если бы x_0 не был минимальным элементом множества M, то нашелся бы $w \in M$ такой, что $w < x_0$. Этот элемент w можно было бы присоединить к Q, не нарушая совершенства порядка. В силу максимальности Q это невозможно. Итак, x_0 есть минимальный элемент в M, причем $x_0 < y$ или $x_0 = y$. Теорема доказана.

Легко получить следующее обобщение этой теоремы:

Теорема 4.5′. *Пусть M — топологическое пространство, а $<$ — непрерывный порядок на нем. Тогда, если любое множество R_x всех элементов $y \in M$, для которых $y < x$ или $y = x$, компактно, то для любого $y \in M$ существует минимальный элемент x_0 такой, что $x_0 < y$ или $x_0 = y$.*

Теперь перейдем к изучению нестрогих порядков. Введем следующее

Определение 4.5. Отношение A на множестве M называется *отношением нестрогого порядка* (или *нестрогим порядком*), если оно может быть представлено в виде

$$A = A_1 \cup E, \tag{4.1}$$

где A_1 — строгий порядок на M, а E — диагональное отношение.

Отсюда следует, что отношение нестрогого порядка рефлексивно. Легко проверить, что оно и транзитивно. Однако, в отличие от строгого порядка, оно не асимметрично, а только антисимметрично. Более того, $A \cap A^{-1} = E$. В самом деле, из (4.1) и (1.15)

$$A \cap A^{-1} = (A_1 \cup E) \cap (A_1^{-1} \cup E) =$$
$$= (A_1 \cap A_1^{-1}) \cup (A_1 \cap E) \cup (A_1^{-1} \cap E) \cup E.$$

В силу свойств строгого порядка *) все члены в скобках суть пустые множества.

Любое отношение нестрогого порядка рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Легко видеть, что если A рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то A — нестрогий порядок, так как $A = (A \setminus E) \cup E$, а $A \setminus E = A_1$ — строгий порядок. Таким образом, нестрогий порядок можно было бы ввести аксиоматически как рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение. Ни одно из этих свойств не следует из других, что легко проверить соответствующими примерами.

Нестрогий порядок A мы назовем *совершенным*, если для любой пары x, y верно либо xAy, либо yAx. Из антисимметричности нестрогого порядка следует, что одновременное выполнение xAy и yAx означает совпадение $x = y$. Легко проверить, что справедлива

Лемма 4.4. *Если A — совершенный нестрогий порядок, то $A_1 = A \setminus E$ есть совершенный строгий порядок. Обратно, если A_1 — совершенный строгий порядок, то $A = A_1 \cup E$ есть совершенный нестрогий порядок.*

Полезно ввести такое

Определение 4.6. Отношение A на множестве M называется *отношением квазипорядка* (или *квазипорядком*), если оно рефлексивно и транзитивно.

Очевидно, отношения квазипорядка являются обобщением отношений эквивалентности и одновременно обобщением отношений нестрогого порядка. Пусть теперь квазипорядок A является одновременно эквивалентностью и нестрогим порядком. Предположим, что выполнено xAy и $x \neq y$. Тогда по симметричности эквивалентности верно yAx. С другой стороны, в силу антисимметричности нестрогого порядка yAx не выполняется. Отсюда вытекает

Лемма 4.5. *Если отношение A есть одновременно эквивалентность и нестрогий порядок, то оно есть отношение равенства.*

Пример. Пусть имеется отображение

$$f\colon M \to \mathbf{R},$$

---

*) В частности, в силу того, что A_1^{-1} также будет строгим порядком.

где $\mathbf{R}$ — множество всех вещественных чисел (числовая ось). Введем на M отношение A условием:

$$xAy, \quad \text{если} \quad f(x) \leqslant f(y).$$

Ясно, что A рефлексивно, так как $f(x) \leqslant f(x)$. Транзитивность отношения A видна из следующего рассуждения: если xAy и yAz, то $f(x) \leqslant f(y)$ и $f(y) \leqslant f(z)$, а значит, и $f(x) \leqslant f(z)$, т. е. xAz. Если $x \neq y$ и $f(x) = f(y)$, то xAy и yAx. Таким образом, если отображение f не инъективно, то A не антисимметрично. Очевидно, для любой пары x и y выполнено либо $f(x) \leqslant f(y)$, либо $f(y) \leqslant f(x)$, т. е. либо xAy, либо yAx.

Теперь покажем, что каждый квазипорядок порождает некоторый порядок. Для этого нам нужна

Теорема 4.6. *Если A — квазипорядок, то отношение $B = A \cap A^{-1}$ есть эквивалентность.*

Доказательство. Рефлексивность отношения B вытекает из леммы 1.1, транзитивность — из леммы 1.7. Докажем симметричность отношения B. Пусть выполнено xBy. Это значит, что одновременно выполнены соотношения xAy и yAx. Но это равносильно выполнению соотношений yAx и $yA^{-1}x$, т. е. $y\,A \cap A^{-1}\,x = yBx$. Значит, B симметрично. Лемма доказана.

Пусть A — квазипорядок на множестве M. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность классов эквивалентности по отношению $B = A \cap A^{-1}$. Будем говорить, что два класса X и Y из $\mathfrak{M}$ находятся в отношении A^*, если в этих классах можно выбрать по представителю $x \in X$ и $y \in Y$, так что выполнено xAy. Мы будем говорить, что отношение A^* *индуцируется* квазипорядком A.

Теорема 4.7. *Отношение A^* на множестве классов эквивалентности $\mathfrak{M}$, индуцированное квазипорядком A, является нестрогим порядком.*

Доказательство. Рефлексивность отношения A^* следует из того, что для любого класса X и любого представителя $x \in X$ верно xAx, а следовательно, справедливо XA^*X. Транзитивность проверяется немного сложнее. Пусть для классов верны соотношения XA^*Y и YA^*Z. Это значит, во-первых, что для некоторых представителей $x \in X$, $y_1 \in Y$ выполнено соотношение xAy_1, и, во-вторых, что для некоторых представителей $y_2 \in Y$, $z \in Z$ выполнено соотношение y_2Az. Поскольку $y_1 \in Y$ и $y_2 \in Y$, имеем y_1By_2 и, значит, y_1Ay_2. Из xAy_1, y_1Ay_2 и y_2Az по транзитивности квазипорядка A получаем xAz. Значит, для классов XA^*Z. Наиболее нетривиальным является доказательство антисимметричности отношения A^*. Пусть выполнено XA^*Y. Это значит, что для некоторых представителей $x \in X$ и $y \in Y$ верно

$$xAy. \tag{4.2}$$

Предположим, что одновременно верно YA^*X, т. е. существуют такие представители $x' \in X$ и $y' \in Y$, что

$$y'Ax'. \tag{4.3}$$

По определению класса эквивалентности $yA \cap A^{-1} y'$. Тогда по транзитивности из (4.2) и yAy' следует

$$xAy'. \tag{4.4}$$

С другой стороны, из (4.3) и $x'Ax$ вытекает

$$y'Ax = xA^{-1}y'. \tag{4.5}$$

Сравнивая (4.4) и (4.5), получаем

$$x\left(A \cap A^{-1}\right) y',$$

т. е. x и y принадлежат общему классу по $A \cap A^{-1}$. Значит, $X \cap Y \neq \varnothing$ и, следовательно, $X = Y$, что доказывает антисимметричность отношения A^*. Тем самым наша теорема доказана.

Итак, по квазипорядку на множестве M можно сконструировать нестрогий порядок, «склеив» некоторые объекты из M.

Для предыдущего примера квазипорядка A, задаваемого числовой функцией f на M, элементами множества $\mathfrak{M}$ служат такие множества, где функция f принимает фиксированное значение. Такие множества обычно называются *областями уровня*. Порядок A^*, индуцированный квазипорядком A на множестве $\mathfrak{M}$, определяется условием: $E \leqslant E'$ ($E \leqslant E'$ означает, конечно, EA^*E'), если для любого $x \in E$ и для любого $x' \in E'$ имеем $f(x) \leqslant f(x')$.

Пусть, в частности, множество M есть множество точек на топографической карте, а квазипорядок задается условием: $x \leqslant y$, если высота $f(x)$ точки x над уровнем моря не превосходит высоту $f(y)$ точки y над уровнем моря. Тогда элементами множества $\mathfrak{M}$ являются горизонтали, а порядок A^* совпадает с порядком «отметок высоты» на этих горизонталях.

Если квазипорядок A был *совершенным* *), то легко убедиться, что порядок A^* на классах также будет совершенным. В самом деле, возьмем два произвольных класса: X и Y — и в них два произвольных представителя: $x \in X$ и $y \in Y$. Поскольку A — совершенный квазипорядок, выполнено по крайней мере одно из соотношений: xAy или yAx. Значит, верно либо XA^*Y, либо YA^*X.

В заключение параграфа рассмотрим пример. Пусть M — множество ситуаций, между которыми требуется произвести выбор. Например, множество мест возможной работы. (Разумеется, можно подставить сюда десятки других примеров разной степени серьезности.) В теории исследования операций существует следующая рекомендация, как выполнить обоснованный выбор. Сопоставим каждому месту работы набор признаков. Например, (1) расстояние от места жительства, (2) творческая удовлетворенность, (3) зарплата, (4) перспективы роста, (5) наличие интересных коллег. Каждому из этих факторов сопоставим вес, отражающий наше представление о значении данного фактора. Скажем, веса 30, 10, 40, 10, 10 означают, что мы ищем близкую прибыльную работу, а веса 20, 30, 10, 10, 30 выражают наше стремление найти работу, дающую максимальное удовлетворение, не забывая при этом о минимуме жизненных удобств. Затем опишем каждое из предполагаемых мест, давая ему оценки по всем показателям так, чтобы максимальная оценка не превосходила веса, который мы уже приписали данному фактору. В следующей таблице мы приводим

Признак	Максимальный вес	I	II	III	IV	V
(1) Расстояние от дома	10	5	10	0	10	5
(2) Творческая удовлетворенность	30	20	10	30	15	20
(3) Зарплата	10	10	10	0	5	0
(4) Перспективы роста	20	20	15	20	10	15
(5) Интересные коллеги	30	10	15	15	5	10
Суммарная оценка . . .	100	65	60	65	45	50

*) То есть для любых x и y либо xAy, либо yAx.

возможную расстановку весов для пяти предполагаемых мест работы.

Итак, мы на множестве возможных ситуаций M задали оценочную функцию f, которая определяет совершенный квазипорядок на M. По теореме 4.7, склеив равноценные ситуации (в нашем случае I и III), мы получим совершенный нестрогий порядок. Стало быть, мы можем найти оптимальный класс ситуаций. В этом классе мы можем выбирать случайно — скажем, бросая монетку. Это все очень хорошо, так как дает уверенность в обоснованности выбора. Но, с другой стороны, этот метод навязывает совершенный порядок там, где его по существу нет. Скажем, в нашем примере довольно ясно, что I и III места работы, набравшие одинаковые веса и формально равноценные, совсем не равноценны с точки зрения нашего выбора. Эти места работы существенно различны (одно — лучше по одним факторам, другое — по другим), и нам надо опять задать себе вопрос, чего мы хотим в действительности. Здесь математическая модель явления создала иллюзию простоты ситуации там, где ее в действительности нет. Таким образом, с числовыми оценками реальных явлений следует обращаться осторожно. Это не компрометирует сам метод весовых оценок — из него видно, что IV место работы заведомо не стоит рассматривать.

Но применять подобные оценки можно, лишь понимая их ограниченность и грубость. В реальных ситуациях выбора обычно нет совершенного порядка. Вводя этот порядок в модели, нужно отдавать себе отчет в степени допускаемого произвола.

§ 2. Операции над отношениями порядка

Начнем опять с простейшей операции A^{-1}. Из лемм 1.1, 1.2, 1.6, 1.7 вытекает

Теорема 4.8. *Если отношение A является строгим порядком (нестрогим порядком, квазипорядком), то и отношение A^{-1} является строгим порядком (соответственно нестрогим порядком, квазипорядком).*

Легко проверить также, что если отношение A является совершенным строгим порядком (совершенным нестрогим порядком, совершенным квазипорядком), то и отношение A^{-1} является совершенным строгим порядком (соответственно совершенным нестрогим порядком, совершенным квазипорядком).

Из лемм 1.1, 1.2, 1.6, 1.7 вытекает

Теорема 4.9. *Если A и B — строгие порядки (нестрогие порядки, квазипорядки), то пересечение $A \cap B$ также является строгим порядком (соответственно нестрогим порядком, квазипорядком).*

Замечание. Пусть A — строгий порядок, а B — нестрогий порядок. Тогда $B = B_1 \cup E$, где B_1 — строгий порядок. Поскольку

$$A \cap B = A \cap (B_1 \cup E) = (A \cap B_1) \cup (A \cap E) = A \cap B_1,$$

пересечение строгого и нестрогого порядка есть строгий порядок.

Свойство «быть совершенным порядком» не обязано сохраняться при пересечении. Это проще всего увидеть из следующих соображений. Пусть A — совершенный порядок (строгий или нестрогий), тогда $A \cap A^{-1} = \varnothing$ (или $=E$). Значит, $A \cap A^{-1}$ на множестве более чем из одного элемента не является совершенным порядком.

Объединение порядков в общем случае не является порядком. Это хорошо видно на таком примере. Пусть A — совершенный нестрогий порядок, тогда A^{-1} — есть отношение того же типа. Однако объединение $A \cup A^{-1}$ есть полное отношение, и, следовательно, не является порядком. Условие, когда объединение порядков есть снова порядок, дает

Теорема 4.10. *Если A и B — строгие порядки, то объединение $A \cup B$ является строгим порядком в том и только том случае, когда*

$$BA \cup AB \subseteq A \cup B. \tag{4.6}$$

Доказательство. Антирефлексивность объединения вытекает из леммы 1.2. Достаточно убедиться, что условие (4.6) равносильно транзитивности объединения. В самом деле, транзитивность отношения $A \cup B$ означает, что $(A \cup B)(A \cup B) \subseteq A \cup B$, или что (см. (1.13)) $A^2 \cup B^2 \cup BA \cup AB \subseteq A \cup B$. Если выполнено это последнее условие, то $BA \cup AB \subseteq A^2 \cup \cup B^2 \cup BA \cup AB \subseteq A \cup B$. Если же выполнено (4.6), то, учитывая $A^2 \subseteq A$, $B^2 \subseteq B$, получаем

$$A^2 \cup B^2 \cup BA \cup AB \subseteq A \cup B \cup BA \cup AB \subseteq$$
$$\subseteq A \cup B \cup A \cup B = A \cup B.$$

Теорема доказана.

Для нестрогих порядков это условие выглядит несколько иначе:

Теорема 4.11. *Для того чтобы объединение $A \cup B$ нестрогих порядков A и B было нестрогим порядком, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} BA \cup AB \subseteq A \cup B, \\ A \cap B^{-1} \subseteq E. \end{cases} \tag{4.7}$$

Доказательство. Пусть сначала выполнены условия (4.7). Рефлексивность объединения $A \cup B$ вытекает из рефлексивности операндов. Имеем, далее, $(A \cup B)^{-1} = A^{-1} \cup B^{-1}$ согласно (1.15). Отсюда

$$(A \cup B) \cap (A \cup B)^{-1} = (A \cup B) \cap (A^{-1} \cup B^{-1}) =$$
$$= (A \cap A^{-1}) \cup (B \cap B^{-1}) \cup (B \cap A^{-1}) \cup (A \cap B^{-1}) =$$
$$= E \cup E \cup (A \cap B^{-1})^{-1} \cup (A \cap B^{-1}) = E.$$

Значит, объединение $A \cup B$ антисимметрично. Далее,

$$(A \cup B)(A \cup B) = A^2 \cup AB \cup BA \cup B^2 \subseteq A \cup B \tag{4.8}$$

и $A \cup B$ тем самым транзитивно. Пусть, наоборот, $A \cup B$ — нестрогий порядок. Тогда, в силу транзитивности, имеем условие (4.8). Из него следует, что $BA \cup AB \subseteq A \cup B$. Условие антисимметричности $(A \cup B) \cap (A \cup B)^{-1} \subseteq E$ мы можем записать в виде

$$(A \cap A^{-1}) \cup (B \cap B^{-1}) \cup (B \cap A^{-1}) \cup (A \cap B^{-1}) \subseteq E.$$

Отсюда уже вытекает, что $A \cap B^{-1} \subseteq E$. Теорема доказана.

Замечание. При помощи леммы 2.4 легко проверяется, что если A и B — рефлексивные отношения, то условие (4.6) равносильно условию

$$AB = BA = A \cup B.$$

Произведение порядков AB также не обязано быть порядком. Это видно из того хотя бы, что для совершенного нестрогого порядка A произведение

$$AA^{-1} \supseteq A \cup A^{-1}$$

есть полное отношение. Было бы любопытно отыскать простое необходимое и достаточное условие, при выполнении которого произведение AB порядков A и B было бы порядком. Достаточным условием является, например, такое: если A и B — строгие порядки и выполнены соотношения

$$\begin{cases} AB = BA, \\ A \cap B^{-1} = \varnothing, \end{cases}$$

то AB — строгий порядок*).

Доказательство этого утверждения предоставляем читателю.

По поводу транзитивного замыкания $\hat{A}$ заметим, что оно всегда совпадает с исходным порядком A в силу его транзитивности.

В заключение данного параграфа мы рассмотрим еще одну операцию, которая для порядков, в некотором смысле, обратна к транзитивному замыканию. Идея явного определения этой операции и ее последовательного применения принадлежит С. Я. Фиталову.

Определение 4.7. *Редукцией* отношения A называется отношение A^r, определяемое условием:

$$A^r = A \setminus A^2. \tag{4.9}$$

Это означает, что xA^ry выполняется в тех и только тех случаях, когда выполнено само отношение xAy, но не существует «промежуточного» z такого, что xAz и zAy. Отношение xA^ry означает «непосредственное подчинение» элемента x элементу y.

Отметим, что

$$A^r \subseteq A. \tag{4.10}$$

Легко проверить также, что для любого отношения A

$$(\hat{A})^r \subseteq A. \tag{4.11}$$

На рис. 4.1 — 4.3 мы фактически изображали графы для отношения A^r, а не A. Дело в том, что отношение A^r (для случая отношений порядка на конечных множествах) содержит всю нужную информацию

---

*) Отсюда видно, что надо быть осторожным в попытках построить иерархическую классификацию путем комбинирования разных отношений порядка: род — вид, часть — целое и т. п.

об отношении A (см. теорему 4.12), но изображается существенно более простым графом. Сравните, например, граф отношения A и граф его редукции A^r на рис. 4.5. Обычно вместо графа отношения порядка A принято изображать граф отношения A^r, хотя это далеко не всегда оговаривается. Основанием для этого как раз и служит теорема 4.12 (см. ниже). Чтобы перейти в этом случае от отношения A^r к A, надо выделить все пути на графе отношения A^r и замкнуть их стрелками.

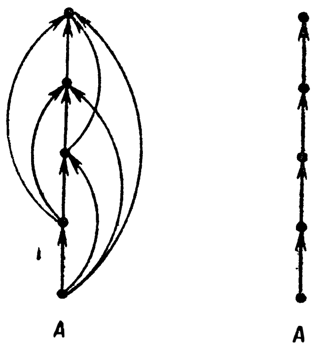


Рис. 4.5.

Сам факт, что отношение A восстанавливается по его редукции, не столь тривиален. Так, из (4.9) видно, что, для рефлексивного отношения A, $A_r = \varnothing$ и, стало быть, редукция A^r не позволяет восстановить исходное отношение A.

Теорема 4.12. *Если A — строгий порядок на конечном множестве M, то транзитивное замыкание редукции совпадает с исходным порядком:*

$$\widehat{A^r} = A\,. \tag{4.12}$$

Доказательство. Из (4.10), (1.17) и теоремы 1.3 $\widehat{A^r} \subseteq \widehat{A} = A$. Докажем обратное включение. Пусть xAy. Отметим, что если

$$xAz_1,\quad z_1Az_2,\ \ldots,\ z_{k-1}Az_k,\quad z_kAy, \tag{4.13}$$

то ввиду транзитивности и антирефлексивности отношения A в цепочке элементов x, z_1, z_2, $\ldots$, z_k, y любые два элемента различны. Рассмотрим всевозможные цепочки элементов z_1, z_2, $\ldots$, z_k $(k \geqslant 0)$ такие, что выполняется (4.13). Поскольку M — конечное множество и ввиду сделанного только что замечания, таких цепочек конечное число. Значит, среди них существует цепочка максимальной длины. Возьмем ее. (Если цепочек максимальной длины несколько, возьмем любую из них.) Из (4.13) и того, что цепочка

$z_1, z_2, \ldots, z_k$ имеет максимальную длину, вытекает

$$xA^r z_1, \quad z_1 A^r z_2, \ldots, z_{k-1} A^r z_k, \quad z_k A^r y. \qquad (4.14)$$

В самом деле. Если, к примеру, не выполняется $z_1 A^r z_2$, то $z_1 A^2 z_2$, т. е. существует такое u, что $z_1 A u$ и $u A z_2$. Но тогда цепочка $z_1, u, z_2, \ldots, z_k$ имеет большую длину и обладает свойством (4.13). Из (4.14) вытекает $x\widehat{A^r}y$. Значит, $A \subseteq \widehat{A^r}$. Мы получили (4.12). Теорема доказана.

К сожалению, теорема 4.12 не переносится на бесконечные множества. Например, если A — обычный порядок $<$ на множестве действительных чисел, то $A^r = \varnothing$. Тем самым $\widehat{A^r} = \varnothing$ и $\widehat{A^r} \neq A$.

Теорема 4.12 означает, что для строгих порядков на конечных множествах по отношению A^r можно однозначно восстановить исходное отношение A. Более того, редукция A^r есть минимальное отношение, позволяющее восстановить A. Точный смысл этого утверждения раскрывает

Теорема 4.13. *Если отношение B таково, что $\widehat{B} = A$, то $A^r \subseteq B$.*

Доказательство. Предположим, что выполнено xA^ry. Из (4.10) xAy; по условию теоремы тогда существует такое n, что xB^ny. Однако, в силу $B \subseteq \widehat{B}$, справедливы включения $B \subseteq A$ и $B^n \subseteq A^n$. Значит, верно соотношение xA^ny. Поскольку xA^ry, $n = 1$. Значит, xBy. Теорема доказана.

Из теоремы 4.12 вытекает, что если A — строгий порядок на конечном множестве и выполнено xAy, то существует минимальное число n, при котором $x(A^r)^n y$. Это n характеризует длину минимального пути в графе отношения A^r, который надо пройти, чтобы из вершины x попасть в y.

Установим некоторые свойства редукций строгих порядков.

Определение 4.8. Отношение B называется *антитранзитивным*, если при всех $n \geqslant 2$

$$B \cap B^n = \varnothing. \qquad (4.15)$$

Иначе говоря, если выполнена цепочка соотношений $xBx_1, x_1Bx_2, \ldots, x_nBy$, то невозможно xBy. В сущности, это значит, что непосредственная связь в графе отношения B между вершинами x и y исключает обходный путь *).

Теорема 4.14. *Если A — строгий порядок, то отношение A^r антитранзитивно.*

Доказательство. Предположим, что существует цепочка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такая, что

$$xA^rx_1, \quad x_1A^rx_2, \ldots, x_nA^ry.$$

Но тогда

$$xAx_1, \quad x_1Ax_2, \ldots, x_nAy.$$

Ввиду транзитивности отношения A x_1Ay. Из xAx_1 и x_1Ay вытекает xA^2y и, следовательно, xA^ry не верно. Теорема доказана.

Полезно рассмотреть отношение, изображенное на рис. 4.6: это циклический граф, его транзитивным замыканием служит полный граф, поскольку, двигаясь по циклу, можно из любой точки попасть в любую, в том числе — в самое себя. Это отношение не является антитранзитивным, поскольку $A^{n+1} = A$, где n — число вершин.

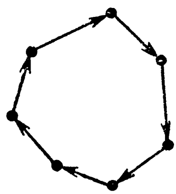


Рис. 4.6.

Лемма 4.6. *Если отношение B антитранзитивно, то*

$$(\hat{B})^r = B. \tag{4.16}$$

Доказательство. Ввиду (4.11) достаточно доказать включение $B \subseteq (\hat{B})^r$. Пусть для некоторой пары x, y выполнено соотношение xBy и не выполнено $x(\hat{B})^ry$. Так как $B \subseteq \hat{B}$, то $x\hat{B}y$ тоже выполнено. Стало быть, $x(\hat{B})^2y$. Но тогда существует $n \geqslant 2$, для которого xB^ny, а это по (4.15) не совместимо с xBy. Полученное противоречие доказывает (4.16).

Равенство (4.16) естественно сопоставить с (4.12).

Если в графе отношения B имеется контур

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1,$$

то $(\hat{B})^r \neq B$, так как x_1Bx_2, но не выполнено $x_1(\hat{B})^rx_2$. (Поскольку x_1Bx_2, значит, $x_1\hat{B}x_2$. Поскольку $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1$ — контур, $x_2\hat{B}x_2$. Из $x_1\hat{B}x_2$ и $x_2\hat{B}x_2$ вытекает $x_1(\hat{B})^2x_2$. Из $x_1\hat{B}x_2$ и $x_1(\hat{B})^2x_2$ следует, что не верно

*) Отметим, что любое антитранзитивное отношение асимметрично и, следовательно (теорема 1.2), антирефлексивно.

$x_1(\hat{B})^r x_2$.) Однако из отсутствия в графе отношения B контуров не вытекает $(\hat{B})^r = B$. Например, если B — обычный строгий порядок на множестве действительных чисел, то в графе отношения B нет контуров, но $\hat{B} = B$, $(\hat{B})^r = B^r = \varnothing \neq B$.

Легко видеть, что, каково бы ни было отношение B, транзитивное замыкание $\hat{B}$ тогда и только тогда не является антирефлексивным, когда в графе отношения B есть контуры. Отсюда вытекает

Лемма 4.7. *Каково бы ни было отношение B, транзитивное замыкание $\hat{B}$ тогда и только тогда является строгим порядком, когда в графе отношения B нет контуров.*

Теперь может быть легко получена обратная к теореме 4.14

Теорема 4.15. *Если отношение B антитранзитивно, то B есть редукция некоторого строгого порядка.*

Доказательство. Согласно лемме 4.6 $B = (\hat{B})^r$. По лемме 4.7 достаточно убедиться, что в графе отношения B нет контуров. Предположим, что в этом графе есть контур

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1.$$

Тогда имеем $x^1 B^{n+1} x_2$, т. е. $B \cap B^{n+1} \neq \varnothing$, что противоречит антитранзитивности отношения B. Теорема доказана.

§ 3. Древесные порядки

В этом параграфе мы будем изучать важный специальный класс отношений порядка — так называемые *древесные порядки*.

Пусть имеется множество M с отношением строгого порядка $<$. Элемент x_0 мы будем называть *наибольшим*, если для всякого элемента $y \in M$, отличного от x_0, выполнено соотношение $y < x_0$. Легко видеть, что наибольший элемент (если он существует) единствен. Полезно отметить также, что для любого строгого порядка, в котором существует наибольший элемент, этот элемент является единственным максимальным *).

*) Если строгий порядок на конечном множестве имеет единственный максимальный элемент, то этот элемент является наибольшим. (*Прим. ред.*)

Определение 4.9. Отношение строгого порядка $<$ на множестве M называется *отношением древесного порядка* (или *древесным порядком*), если

1) из того, что $x < y$ и $x < z$ следует, что y и z сравнимы;

2) во множестве $\langle M, <\rangle$ существует наибольший элемент.

Множество M с заданным на нем древесным порядком, т. е. пару $\langle M, <\rangle$, мы будем называть *деревом*, а наибольший элемент — *корнем* дерева.

Условие 1) означает, что для любого элемента $x \in M$ на множестве элементов, больших чем x, исходный древесный порядок превращается в совершенный порядок.

Нетрудно видеть, что совершенный порядок, в котором существует наибольший элемент, есть частный случай древесного.

Установим несколько свойств древесного порядка.

Лемма 4.8. *Если A — древесный порядок на M, то на множестве $M(x)$*, состоящем из самого x и всех элементов $y \in M$ таких, что yAx, *отношение A также задает древесный порядок.* (Множество $M(x)$ с порядком A естественно назвать *поддеревом* дерева $\langle M, A\rangle$.)

Доказательство. Первое условие выполняется, очевидно, для любого подмножества множества M. Очевидно также, что наибольшим элементом в $M(x)$ является сам x.

Лемма 4.9. *Если A — древесный порядок на конечном множестве M, то для всякого x, отличного от корня x_0, существует ровно один y, для которого выполнено xA^ry.*

Доказательство. Предположим сначала, что существуют такие y и z $(y \neq z)$, что xA^ry и xA^rz. По определению древесного порядка, поскольку xAy, xAz и $y \neq z$, имеем yAz или zAy. Для определенности положим yAz. Тем самым получается, что выполнены два соотношения xAy и yAz. Следовательно, невозможно xA^rz. Итак, мы доказали, что не может быть двух разных элементов, «непосредственно старших», чем данный. Предположим теперь, что для элемента x не существует такого y, что xA^ry. Тогда, легко видеть, не существует такого y, что $x\widehat{A^r}y$. Поскольку M — конечное множество, не существует такого y, что xAy (теорема 4.12). Значит, x — максимальный элемент, т. е. $x = x_0$. Лемма доказана.

Если M — множество неположительных действительных чисел с отношением $<$, то этот древесный порядок не удовлетворяет заключению леммы 4.9.

Лемма 4.10. *Пусть $<$ — древесный порядок на конечном множестве M. Тогда для любых несравнимых элементов $x \in M$ и $y \in M$ существует единственный элемент $z \in M$, для которого* 1) $x < z$; 2) $y < z$; 3) *если $x < w$ и $y < w$, то $z \leqslant w$.*

Доказательство. Поскольку x и y несравнимы, ни один из них не является корнем дерева. Обозначим через M_x множество всех элементов z, для которых $x < z$, а через M_y — аналогичное множество для y. В силу условия 1) определения 4.9 отношение $<$ на M_x (и на M_y) является совершенным строгим порядком. Так как M_x и M_y содержат корень, то $M_x \cap M_y \neq \varnothing$ и отношение $<$ на $M_x \cap M_y$ является совершенным строгим порядком. Ясно, что множество $M_x \cap M_y$ состоит из всех элементов w, для которых одновременно $x < w$ и $y < w$. Поскольку это множество конечно, то в нем есть наименьший элемент z (лемма 4.1); для любого $w \in M_x \cap M_y$ имеем $z \leqslant w$.

Следующий пример показывает, что в этой лемме условие конечности существенно. Пусть M является объединением полупрямой $(-\infty, 0]$ и двух элементов x и y. Порядок на полупрямой — обычное числовое отношение $<$, а любая точка на полупрямой больше x и y. Сами элементы x и y не сравнимы. Для этих двух элементов утверждение леммы не верно, хотя определенный нами порядок — древесный.

С помощью доказанных лемм можно убедиться, что граф, изображающий редукцию A^r древесного порядка A на конечном множестве M, действительно имеет древовидную структуру. Назовем *окрестностью* элемента y совокупность элементов z, для которых выполнено zA^ry. Будем изображать A^r по ярусам (рис. 4.7). В первом ярусе поместим корень дерева — наибольший элемент x_0. Во втором ярусе поместим элементы, входящие в окрестность элемента x_0. В третьем ярусе поместим элементы, входящие в окрестности элементов второго яруса, и т. д. Ясно, что стрелки в графе могут идти только от яруса к ярусу. При этом от каждого элемента к верхнему ярусу идет ровно одно ребро, а к нижнему может идти сколько угодно ребер. Итак, мы видим, что граф имеет структуру дерева. Общее число ярусов называется *высотой* дерева. Максимальное число элементов в одной окрестности (максимальное число ростков, выходящих из одной вершины) называется *шириной* дерева.

Высота дерева h, ширина d и общее число вершин n связаны очевидным неравенством

$$n \leqslant 1 + d + d^2 + \ldots + d^{h-1} = \frac{d^h - 1}{d - 1}.$$

Это неравенство обращается в равенство в том и только том случае, когда окрестность каждого элемента (кроме, конечно, элементов самого нижнего яруса) состоит из d элементов.

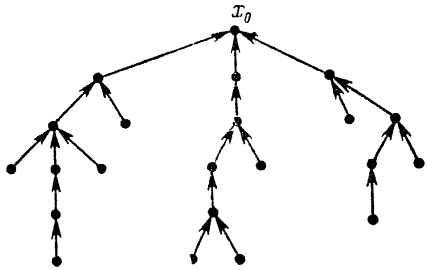


Рис. 4.7. Древесный порядок.

М. В. Арапов предложил следующим образом характеризовать *сложность* **конечного** *дерева*. Обозначим через $d(x)$ число элементов в окрестности элемента x. Определим *сложность* $\sigma(x)$ *вершины* x следующим рекуррентным правилом:

$$\sigma(x) = d(x) + \sigma(y), \tag{4.17}$$

где y — тот единственный элемент, для которого xA^ry. Иначе говоря, сложность вершины x складывается из количества ростков, выходящих вниз из этой вершины, и сложности вершины предыдущего яруса, соединенной с x. При $x = x_0$ принимаем $\sigma(y) = 0$. *Сложность дерева* $\sigma(D)$ определяется как суммарная сложность его вершин:

$$\sigma(D) = \sum_{x \in M} \sigma(x). \tag{4.18}$$

Из равенства (4.17) легко вывести, что

$$\sigma(x) = d(x) + \sum_{x<y} d(y).$$

(Знак $x < y$ под знаком суммы показывает, что сумма берется по всем таким y, для которых $x < y$.) Подставляя это выражение для $\sigma(x)$ в (4.18), получаем

$$\sigma(D) = \sum_{y \in M} d(y)\, k(y), \tag{4.19}$$

где через $k(y)$ обозначено, сколько раз величина $d(y)$ участвует в выражении для $\sigma(D)$. Ясно, что $k(y)$ есть число тех x, для которых $x \leqslant y$. Иначе говоря, $k(y)$

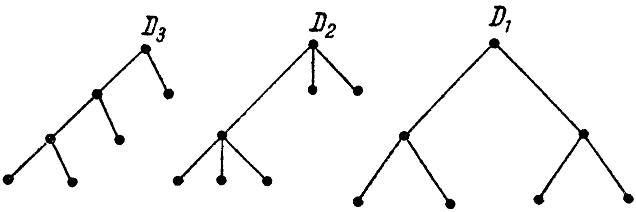


Рис. 4.8. Деревья различной сложности.

равно числу вершин в поддереве, для которого y является корнем. Для деревьев D_1, D_2 и D_3, изображенных на рис. 4.8, сложности равны соответственно:

$$\sigma(D_1) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 26,$$

$$\sigma(D_2) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 4 = 33,$$

$$\sigma(D_3) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 30.$$

Мы здесь специально выбирали деревья с одинаковым количеством вершин, чтобы была заметной зависимость сложности от структуры дерева.

Обозначим через σ_n минимальную сложность дерева с n вершинами. Для вычисления σ_n можно получить рекуррентную формулу. Пусть D_n — дерево минимальной сложности с n вершинами. Пусть $m = d(x_0)$ — число отростков, выходящих из его корня. Пусть, наконец, D^1, D^2, ..., D^m — поддеревья дерева D_n, начинающиеся со второго яруса. Тогда на основании (4.19)

$$\sigma(D_n) = d(x_0) \cdot n + \sum_{x \in D^1} d(x)\, k(x) + \ldots + \sum_{x \in D^m} d(x)\, k(x).$$

Или, что то же самое,

$$\sigma(D_n) = mn + \sigma(D^1) + \ldots + \sigma(D^m). \qquad (4.20)$$

Но для дерева минимальной сложности поддеревья также должны иметь минимальную сложность. Иначе мы могли бы уменьшить сумму в (4.20). Обозначим через k_i число вершин в D^i. Сумма чисел k_i равна числу всех вершин в D_n, за исключением корня. Итак,

$$\sigma_n = mn + \sum_{i=1}^{m} \sigma_{k_i},$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n - 1$. В силу минимальности величины $\sigma(D_n)$ строение поддеревьев должно быть таково, чтобы эта сумма обратилась в минимум. Значит, окончательно, для отыскания σ_n можно написать рекуррентное уравнение

$$\sigma_n = \min\left(mn + \sum_{i=1}^{m} \sigma_{k_i}\right).$$

В этом уравнении минимум берется по всевозможным m и наборам $\langle k_1, k_2, \ldots, k_m\rangle$, для которых $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n - 1$. Заметим, что идея получения этого уравнения фактически взята из динамического программирования.

Е. Н. Ефимова сумела получить для величины σ_n асимптотику вида

$$\sigma_n \sim n \ln n.$$

* * *

Древесные порядки можно рассматривать не только для конечных множеств. Только леммы 4.9, 4.10 и возможность пользоваться редукцией (теорема 4.12) зависели от конечности множества M.

Хороший пример бесконечного дерева можно получить следующим образом. Пусть M — множество всех кортежей $x = \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\rangle$, где $\varepsilon_0 = 0$, а ε_1, ε_2, ... принимают значения 0 или 1. Порядок A зададим следующим условием. Пусть $x = \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\rangle$ и $y = \langle \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m\rangle$. Мы будем считать выполненным соотношение xAy, если $m < n$ и, для всех $i \leqslant m$, $\varepsilon_i = \eta_i$. Таким образом, xAy означает, что кортеж y «вложен» в кортеж x. Нетрудно видеть, что если y и z оба «вложены» в один и тот же кортеж x, то кто-то из них «вложен» в другой. Кортеж $x_0 = \langle 0 \rangle$ является, очевидно, наибольшим: поскольку 0 начинает любой кортеж из M, то для всех $x \neq x_0$ имеет место xAx_0. В данном случае утверждение леммы 4.9 остается справедливым. Этот порядок можно представлять себе как дерево бесконечной высоты, в котором каждая вершина пускает два ростка.

В предыдущем примере полностью сохранилось понятие яруса. Именно, n-й ярус состоял из всех кортежей из M длины n. Следующий пример является по существу обобщением предыдущего на «кортежи континуальной длины».

Рассмотрим множество M, состоящее из функций f, определенных при $0 \leqslant t < +\infty$, принимающих значения 0 и 1 и таких, что $f(0) = 0$. Определим на M отношение строгого порядка $<$ условием: $f < g$, если f и g не совпадают и существует такое $a \geqslant 0$, что $g(t) = f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant a$ и $g(t) = 0$ при $t > a$.

Проверим, что этот порядок является древесным. В самом деле, пусть $f < g$ и $f < g_1$. Тогда существуют a и a_1 такие, что при $t > a$ $g(t) = 0$, при $t > a_1$ $g_1(t) = 0$, при $0 \leqslant t \leqslant a$ $f(t) = g(t)$ и при $0 \leqslant t \leqslant a_1$ $f(t) = g_1(t)$. Примем, что $a_1 \geqslant a$. Тогда из вышенаписанного вытекает, что, при $0 \leqslant t \leqslant a$, $g(t) = g_1(t)$ и, при $t > a$, $g(t) = 0$. Это означает, что либо g и g_1 совпадают, либо $g_1 < g$. Обозначим через f_0 функцию, тождественно равную нулю. Ясно, что, какова бы ни была функция $f \in M$, отличная от f_0, $f < f_0$. Таким образом, f_0 — наибольший элемент (корень).

В этом примере мы имеем ситуацию, которую можно было бы интерпретировать как непрерывное ветвление. Для любого $t_0 > 0$ совокупность всех функций f таких, что $f(t_0) = 1$ и $f(t) = 0$ при $t > t_0$, как бы образует ярус ранга t_0.

Отметим одно важное обстоятельство. Если в определении древесного порядка отказаться от существования наибольшего элемента, то для конечного множества M мы получим вместо дерева объединение некоторого множества попарно непересекающихся деревьев. Поэтому в случае конечного M вместо условия 2) в определении 4.9 можно взять любое условие, гарантирующее связность соответствующего графа.

Например, возможны следующие условия:

2′) максимальный элемент единствен;

2″) для любых несравнимых элементов x и y существует такой элемент z, что $x < z$ и $y < z$.

В случае бесконечного множества M ситуация оказывается другой. Так, для множества M действительных чисел с обычным порядком выполнено условие 1) определения 4.9 и не выполнено условие 2). Максимальных элементов в этом упорядоченном множестве нет, т. е. условие 2′) выполнено. Условие 2″) здесь также выполнено.

Приведем в заключение пример «почти-древесного» порядка. Множество M состоит из всех пар вида $\langle m, n\rangle$, где m и n — целые числа и $m \geqslant 0$ (M образует целочисленную решетку на полуплоскости). Определим на множестве M отношение A. Фиксируем произвольное целое число n. Положим по определению:

$$\begin{array}{ll} \langle 0, n+1\rangle A \langle 0, n\rangle, & \langle 1, n+1\rangle A \langle 0, n\rangle, \\ \langle 2, n+1\rangle A \langle 1, n\rangle, & \langle 3, n+1\rangle A \langle 1, n\rangle, \\ \langle 4, n+1\rangle A \langle 2, n\rangle, & \langle 5, n+1\rangle A \langle 2, n\rangle, \\ \langle 6, n+1\rangle A \langle 3, n\rangle, & \langle 7, n+1\rangle A \langle 3, n\rangle \end{array}$$

и т. д. В общем виде:

$$\langle 2k, n+1\rangle A \langle k, n\rangle, \quad \langle 2k+1, n+1\rangle A \langle k, n\rangle.$$

(Советуем читателю попробовать нарисовать граф отношения A.) Легко видеть, что граф отношения A не имеет контуров. Поэтому отношение $B = \widehat{A}$ есть строгий порядок (лемма 4.7).

Этот строгий порядок удовлетворяет условию 1) из определения 4.9 и не удовлетворяет условию 2) того же определения. Однако для этого порядка выполняются условия 2′) и 2″). Полезно заметить, что для него выполнены заключения лемм 4.9 и 4.10. (В предыдущем примере заключение леммы 4.9 не выполнено.) В отличие от предыдущего примера здесь мы имеем $\widehat{B^r} = B$, поскольку $B^r = A$ (см. лемму 4.6).

Для любой пары $\langle m, n\rangle$ множество всех пар $\langle l, p\rangle$, для которых $\langle l, p\rangle B \langle m, n\rangle$, образует дерево.

§ 4. Множества с несколькими порядками

Мы будем в этом параграфе рассматривать только *конечные* множества (причем конечность будет подразумеваться, а не указываться явно) с несколькими отношениями порядка, связанными определенными условиями «согласования». Содержательные примеры подобных ситуаций, играющих важную роль в математической лингвистике, будут рассмотрены в последней главе. Поэтому ниже мы будем вести изложение на формальном уровне.

Пусть дано множество M, отношение совершенного строгого порядка $<$ на нем и отношение строгого порядка $\Rightarrow$. Редукцию последнего отношения мы будем обозначать через $\rightarrow$. Соотношение $x \Rightarrow y$ мы советуем читателю воспринимать как «*x больше y*». Поэтому, в отличие от §§ 1—3, в графе отношения $\Rightarrow$ стрелка редукции $\rightarrow$ будет вести от *большего* элемента к *меньшему*. Множество M с двумя такими отношениями $\langle M, <, \Rightarrow \rangle$ мы будем называть *дважды упорядоченным множеством*.

Если выполнено либо $x < z < y$, либо $y < z < x$, то мы будем говорить, что z находится *между* x и y. Мы будем говорить, что дважды упорядоченное множество M удовлетворяет *условию* Π_1, если из $x \rightarrow y$ и того, что z находится между x и y, следует соотношение $x \Rightarrow z$.

Для элемента $x \in M$ мы обозначим через $M(x)$ множество, состоящее из самого x и всех элементов y, для которых $x \Rightarrow y$.

Лемма 4.11. *Пусть $\langle M, < \rangle$ — отношение совершенного строгого порядка. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные элементы из M и w находится между x_1 и x_n, то либо w совпадает с некоторыми x_i $(2 \leqslant i \leqslant n-1)$, либо существует такое i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, что w находится между x_i и x_{i+1}.*

Доказательство. Пусть для определенности $x_1 < w < x_n$. Допустим, что w отлично от $x_2, x_3, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}$. Тогда либо $x_2 > w$, либо $x_2 < w$. Если $x_2 >$ $> w$, то $x_1 < w < x_2$. Если $x_2 < w$, рассмотрим x_3. Либо $w < x_3$, либо $x_3 < w$. Если $w < x_3$, $x_2 < w < x_3$. Если $x_3 < w$, рассмотрим x_4 и т. д. Поскольку $w < x_n$ и $\{x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}\}$ — конечное множество, через конечное число шагов мы найдем искомое x_i.

Теорема 4.16. *Дважды упорядоченное множество M тогда и только тогда удовлетворяет условию* Π_1, *когда из* $y \in M(x)$, $z \in M(x)$ *и* $y < w < z$ *вытекает* $w \in M(x)$.

Доказательство. Пусть сначала M удовлетворяет условию Π_1. Если w совпадает с x, то $w \in M(x)$. Рассмотрим случай $w < x$. Поскольку $y < w$, $x \neq y$. Вследствие $x \Rightarrow y$ существует последовательность $x = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ такая, что при всех i $x_i \rightarrow x_{i+1}$. Поскольку $x_n = y < w < x = x_1$, по лемме 4.11 либо, для некоторого i, $w = x_i$, либо существует такое i, что w находится между x_i и x_{i+1}. В первом случае $x \Rightarrow w$ и $w \in M(x)$. Во втором случае, в силу условия Π_1, $x_i \Rightarrow w$. Поскольку $x \Rightarrow x_i$, имеем $x \Rightarrow w$ и $w \in M(x)$. В случае $x < w$ рассуждения проходят таким же образом, если заметить, что w находится теперь между x и z. Доказательство в обратную сторону предоставляем читателю.

В силу теоремы 4.2 дважды упорядоченное множество M можно изображать отрезком натурального ряда $\{1, 2, \ldots, m\}$, а отношение $<$ понимать как соответствующее числовое неравенство. *Интервалом* мы будем называть любое множество $[i, j]$, состоящее из всех натуральных чисел l, удовлетворяющих неравенствам: $i \leqslant l \leqslant j$. Предыдущая теорема означает: условие Π_1 равносильно тому, что все множества $M(x)$ суть интервалы.

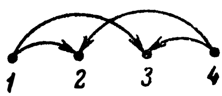


Рис. 4.9.

Пример. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4\}$, а отношение $\rightarrow$ определено условиями $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 3$. Тогда $M(1) = \{1, 2, 3\}$, $M(2) = \{2\}$, $M(3) = \{3\}$ и $M(4) = \{2, 3, 4\}$. Нетрудно проверить, что это дважды упорядоченное множество удовлетворяет условию Π_1 (рис. 4.9). Отметим, что $M_1(1) \cap M(4) \neq \varnothing$, но ни одно из этих множеств не содержится в другом.

Полезную информацию о взаимном расположении множеств $M(x)$ дает

Теорема 4.17. *Если отношение* $\langle M, \Rightarrow \rangle$ *есть древесный порядок, то для любых несовпадающих* x *и* y *либо* $M(x) \cap M(y) = \varnothing$, *либо* $M(x) \subset M(y)$, *либо* $M(y) \subset M(x)$.

Доказательство. Пусть $M(x) \cap M(y) \neq \varnothing$ и $w \in M(x) \cap M(y)$. Если $w \neq x$ и $w \neq y$, то имеем $x \Rightarrow w$ и $y \Rightarrow w$. В силу древесности порядка и несовпадения x и y имеем либо $x \Rightarrow y$, либо $y \Rightarrow x$. Если же $w = x$, то $y \Rightarrow x$, а при $w = y$ имеем $x \Rightarrow y$. Если $x \Rightarrow y$, то по транзитивности имеем $x \Rightarrow z$ для любого $z \in M(y)$, т. е. $M(x) \supset M(y)$. Если же $y \Rightarrow x$, то получаем обратное включение.

Условимся теперь изображать множество M на горизонтальной оси, а стрелки, выражающие отношение $\rightarrow$, проводить только сверху этой оси. Мы будем говорить, что дважды упорядоченное множество M удовлетворяет *условию* Π_2, если можно все стрелки $\rightarrow$ провести так, чтобы они не пересекались и не накрывали максимальные элементы*).

Теорема 4.18. *Условие* Π_2 *влечет условие* Π_1.

Доказательство. Пусть дважды упорядоченное множество M удовлетворяет условию Π_2. Проведем стрелки, выражающие отношение $\rightarrow$, соответствующим «хорошим» образом. Пусть $x \rightarrow y$, а z находится между x и y. Элемент z не может быть максимальным элементом, поскольку он накрывается стрелкой, ведущей из x в y. Тогда существует z_1, для которого $z_1 \rightarrow z$. Элемент z_1 находится между x и y, либо совпадает с x или y, ибо иначе стрелка $z_1 \rightarrow z$ пересекалась бы со стрелкой $x \rightarrow y$. Аналогичным рассуждением мы построим цепочку $z_n \rightarrow z_{n-1} \rightarrow \ldots \rightarrow$ $\rightarrow z_1 \rightarrow z$, где либо все z_i лежат между x и y, либо z_n совпадает с x или y. Так как все z_i различны и множество M конечно, то для какого-то n элемент z_n совпадает с x или y. Но тогда будем иметь $x \Rightarrow z$. Таким образом, дважды упорядоченное множество M удовлетворяет условию Π_1.

Пример на рис. 4.9 показывает, что условие Π_1 может выполняться, когда условие Π_2 не выполнено. Однако когда $\Rightarrow$ является древесным порядком, условия Π_1 и Π_2 равносильны. А именно, имеет место

Теорема 4.19. *Если отношение* $\Rightarrow$ *является древесным порядком и дважды упорядоченное множество удовлетворяет условию* Π_1, *то оно удовлетворяет условию* Π_2.

---

*) То есть элементы x, для которых соотношение $y \rightarrow x$ не выполнено ни при каком y.

Доказательство. Пусть x_0 — корень дерева, а $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — все те элементы, для которых выполнено $x_0 \to x_i$. Ясно, что все стрелки, исходящие из x_0, можно провести без пересечений. Множества $M(x_1), M(x_2), \ldots, M(x_n)$ являются по теореме 4.16 интервалами. Включение $M(x_i) \supset M(x_j)$ невозможно, так как влекло бы условие $x_i \Rightarrow x_j$; следовательно, по теореме 4.17 эти интервалы не могут пересекаться. Между разными множествами $M(x_i)$ и $M(x_j)$ не могут проходить стрелки; иначе было бы выполнено $x_i \Rightarrow w$, где $w \in M(x_j)$. Если все элементы из $M(x_i)$, кроме самого x_i, лежат между x_{i-1} и x_i, то стрелки внутри $M(x_i)$ можно провести так, чтобы они не пересекались со стрелками, идущими от корня. Аналогично будет и в случае, когда $M(x_i)$ лежит между x_i и x_{i+1}. Пусть теперь $M(x_i) = M^1(x_i) \cup \{x_i\} \cup M^2(x_i)$, где $M^1(x_i)$ лежит между x_{i-1} и x_i, а $M^2(x_i)$ лежит между x_i и x_{i+1}. Покажем, что нет ни одной стрелки, ведущей из $M^1(x_i)$ в $M^2(x_i)$ (и соответственно в обратном направлении). Действительно, существование такой стрелки означало бы, что $y \to z$, где $y \in M^1(x_i)$ и $z \in M^2(x_i)$. Но так как $y < x_i < z$, то, согласно условию Π_1, было бы $y \Rightarrow x_i$, что невозможно. Итак, все остальные стрелки, не идущие из x_0, можно провести без пересечений со стрелками, идущими из x_0. Но каждое из $M(x_i)$ является дважды упорядоченным множеством, удовлетворяющим условию Π_1, и сужение $\Rightarrow$ на $M(x_i)$ является древесным порядком. Поэтому и стрелки внутри $M(x_i)$ можно провести без пересечений со стрелками, выходящими из x_i. Продолжая это рассуждение, мы легко убедимся, что все стрелки можно провести без пересечений. Так как корень x_0 не входит ни в одно из множеств $M(x_i)$ и никакое $M(x_i)$ не расположено по обе стороны x_0, то, очевидно, все стрелки можно провести так, чтобы x_0 не накрывалось. Теорема доказана.

Заметим, что решающую роль в доказательстве играл тот факт, что все $M(x_i)$ либо не пересекаются, либо вложены одно в другое. Поэтому формулировку последней теоремы можно было бы несколько уточнить.

Существует еще одна полезная формулировка связи между обоими отношениями порядка на дважды упорядоченном множестве. Она имеет смысл только для случая, когда отношение $\Rightarrow$ является древесным порядком. (Правда, ее можно расширить на те «недревесные» ситуации, для которых удается ввести понятие яруса.)

Сначала изобразим элементы множества M целочисленными точками от 1 до n на оси абсцисс в координатной плоскости. Затем каждой точке $x \in M$ сопоставим такую точку x' на восстановленном из x перпендикуляре к оси абсцисс, чтобы расстояние от x' до x равнялось уменьшенному на единицу номеру яруса, на котором находится x. Если $x \rightarrow y$, то точки x' и y' соединим отрезком. На рис. 4.10, 4.11 и 4.12 проведены соответствующие построения.

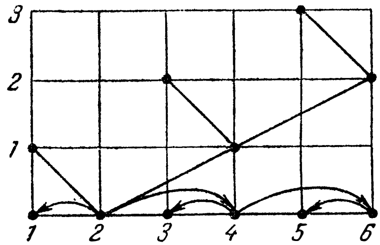


Рис. 4.10.

Условие Π_3 состоит в том, что а) проведенные отрезки не пересекаются и б) продолжение перпендикуляра выше любой точки x' не пересекает ни одного отрезка.

На рис. 4.10 условие Π_3 выполнено, а на рис. 4.11 и 4.12 не выполнено.

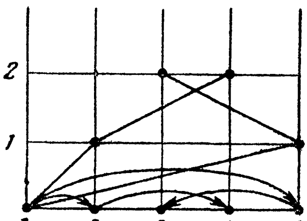


Рис. 4.11.

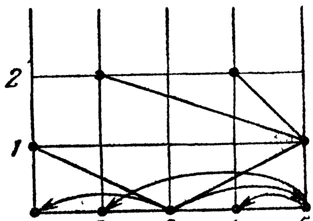


Рис. 4.12.

Теорема 4.20. *Если отношение* $\Rightarrow$ *является древесным порядком, то условие* Π_3 *равносильно условию* Π_1.

Доказательство. Покажем сначала, что из Π_3 следует Π_1. Предположим, что существуют x, y и z, для которых $x \rightarrow y$, z находится между x и y и не выполнено $x \Rightarrow z$. Пусть z_0 — максимальный элемент среди всех таких z (при фиксированных x и y). Из условия Π_3 следует, что точка z'_0 не может лежать под отрезком, соединяющим x', y'. Отсюда, в частности, вытекает, что z_0 не может быть корнем дерева. Но в силу древесности порядка тогда существует w, для которого $w \rightarrow z_0$. По принятому предположению w не находится между x и y и не совпадает с x или y. Возможны следующие варианты расположения:

$$x < z_0 < y < w;$$
$$w < x < z_0 < y;$$
$$y < z_0 < x < w;$$
$$w < y < z_0 < z.$$

Рассмотрим первый случай. Так как z'_0 лежит выше отрезка $x'y'$, то либо отрезок z'_0w' пересекает отрезок $x'y'$, либо отрезок z'_0w' лежит выше точки y'. В обоих случаях условие Π_3 нарушается. Остальные три варианта исследуются совершенно аналогично. Итак, мы доказали, что из Π_3 следует Π_1.

Покажем теперь, что из Π_1 следует Π_3. Предположим, что Π_3 не выполнено. Рассмотрим сначала случай, когда продолжение перпендикуляра, проходящего через точку x', пересекает выше точки x' отрезок $y'z'$. Это означает, что точка x расположена между y и z, $y \rightarrow z$ (или $z \rightarrow y$), и хотя бы одна из точек y' или z' лежит выше, чем x'. Тогда другая лежит не ниже, чем x'. Следовательно, невозможно $y \Rightarrow x$, что противоречит условию Π_1. Второй случай состоит в том, что некоторые отрезки $x'y'$ и $z'u'$ пересекаются. Это возможно только при условии, что нижние и верхние концы этих отрезков лежат соответственно на одном уровне. Но тогда невозможно ни одно из соотношений $x \Rightarrow z$, $x \Rightarrow u$, $y \Rightarrow z$, $y \Rightarrow u$. С другой стороны, либо z, либо u находится между x и y, т. е. согласно Π_1 одно из перечисленных соотношений должно было бы выполняться. Итак, теорема доказана.

Следствие. *Если* $\Rightarrow$ *есть древесный порядок, то* Π_3 *равносильно* Π_2.

* * *

Перейдем теперь к изучению другого типа множеств с двумя отношениями порядка.

Упорядоченным деревом мы будем называть множество M с заданными на нем отношением древесного порядка $\subset$ и отношением строгого порядка $<$ (т. е. тройку $\langle M, \subset, < \rangle$), если выполнены следующие условия:

1) если $x \subset y$, $z \subset u$, $y < u$, то $x < z$;

2) если x и y несравнимы по отношению $\subset$, то они сравнимы по отношению $<$.

В частности, на подмножестве концевых вершин дерева $\langle M, \subset \rangle$ отношение $<$ образует совершенный порядок. Обозначим через $Q(x)$ окрестность элемента x (см. стр. 140). Тогда на множестве $Q(x)$ отношение $<$ также задает совершенный порядок.

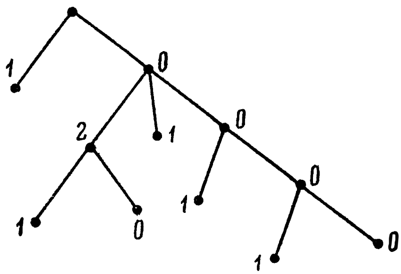


Рис. 4.13.

Поскольку M конечно, любое множество $Q(x)$ можно перенумеровать так, что максимальный (по отношению $<$) элемент получит номер 0, следующий за ним номер 1 и т. д. Так как каждый элемент y входит ровно в одно множество $Q(x)$ (благодаря древесности порядка $\subset$), то тем самым любой вершине y (кроме корня дерева) оказался приписан некоторый целочисленный вес $m(y)$. На рис. 4.13 изображено дерево с весами вершин, на котором порядок $<$ в каждом $Q(x)$ выражается размещением вершин слева направо.

Для концевой вершины y определим величину

$$\gamma(y) = \Sigma m(x),$$

равную сумме весов вершин, лежащих на пути из корня дерева в вершину y, включая вес самой вершины y. Так, для семи концевых вершин дерева на рис. 4.13 мы получаем, идя слева направо, следующие значения для $\gamma(y)$:

$$1, 3, 2, 1, 1, 1, 0.$$

Глубиной дерева мы будем, следуя В. Ингве (V. H. Yngve), называть величину

$$\gamma = \max_y \gamma(y).$$

Так, дерево на рис. 4.13 имеет глубину $\gamma = 3$. Полезно заметить, что глубина имеет смысл только для упорядоченного дерева, а просто для дерева она не определена. Малая величина глубины означает геометрически, что ветвления идут, в основном, вправо, т. е. что дерево устроено асимметрично.

* * *

В заключение параграфа изучим некоторые свойства множеств с тремя отношениями порядка. Пусть на множестве M заданы три отношения строгого порядка: $<$, $\subset$ и $\Rightarrow$, для которых выполняются следующие условия:

1) Множество M с отношениями $\subset$ и $<$ является упорядоченным деревом;

2) отношение $\Rightarrow$ определено на множестве концевых вершин $M_k \subset M$ предыдущего дерева и образует на M_k древесный порядок;

3) обозначим через $S(x) \subset M_k$ множество концевых вершин y, для которых $y \subset x$. Тогда $S(x)$ должно быть деревом по отношению $\Rightarrow$.

4) если $S(x) \cap S(x_1) = \varnothing$, $y \in S(x)$, $z \in S(x_1)$ и $y \to z$, то y — корень дерева $S(x)$. (Ясно, что z является в этом случае корнем дерева $S(x_1)$.)

5) если существует такое u, что $y < u < z$, то существуют x и x_1 такие, что $y \in S(x)$, $z \in S(x_1)$, и не существует w, для которого $x < w < x_1$. (Легко проверить, что в этом случае $S(x) \cap S(x_1) = \varnothing$.)

Теорема 4.21. *При сформулированных выше условиях дважды упорядоченное множество $\langle M_k, <, \Rightarrow \rangle$ удовлетворяет условию* Π_1.

Доказательство. Пусть $y \to z$ и u находится между y и z. Покажем, что $y \Rightarrow u$. Рассмотрим случай $y < u < z$. (Противоположный случай исследуется аналогичным способом.) Согласно свойству 5) выберем $S(x)$ и $S(x_1)$, для которых $y \in S(x)$ и $z \in S(x_1)$. В силу $y \to z$ и свойства 4) y и z суть корни деревьев

$S(x)$ и $S(x_1)$. Покажем, что u входит либо в $S(x)$, либо в $S(x_1)$.

Действительно, пусть $u \notin S(x)$ и $u \notin S(x_1)$. Тогда элемент u заведомо несравним с x и x_1, поскольку $u \subset x$ и $u \subset x_1$ отрицается предположением, а соотношения $u \supset x$ или $u \supset x_1$ невозможны, поскольку $u \in M_k$. Тогда элемент u должен быть сравнимым с x и x_1 по отношению $<$. В силу свойства 1) упорядоченного дерева и условия $y < u < z$ должно быть $x < u < x_1$. Но это противоречит выбору x и x_1 (условию 5). Значит, непременно $u \in S(x)$ или $u \in S(x_1)$. В первом случае $x \Rightarrow u$, а во втором случае $y \Rightarrow u$, т. е. опять-таки $x \Rightarrow u$. Теорема доказана.

ГЛАВА V

ОТНОШЕНИЯ В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

§ 1. Отношения между геометрическими объектами

Многие хорошо известные из школьной математики понятия в сущности являются названиями бинарных отношений, а основные связанные с ними теоремы выражают свойства этих отношений.

Пусть M — множество всех прямых на плоскости. Соотношение $X \parallel Y$ означает, что прямые X и Y параллельны *). Установим некоторые свойства этого отношения.

1. Отношение $\parallel$ антирефлексивно. Действительно, никакая прямая не параллельна сама себе.

2. Отношение $\parallel$ симметрично. Это видно из того, что в определении параллельности обе прямые равноправны.

3. Отношение $\parallel$ почти транзитивно, а именно: если $X \parallel Y$ и $Y \parallel Z$, то либо $X \parallel Z$, либо прямые X и Z совпадают. Действительно, если бы это было не так, то прямые X и Z пересекались бы **). Но, как известно из геометрии, если прямая Z пересекается с одной из параллельных X, то она пересекается и с другой из параллельных Y, т. е. было бы невозможно соотношение $Z \parallel Y$.

Таким образом, отношение параллельности между прямыми не обладает еще хорошими свойствами. Но сказанное выше позволяет легко сообразить, какое отношение, родственное параллельности, будет отношением эквивалентности. А именно, определим отношение

$$\parallel\!\!\!\mid = \parallel \cup E,$$

*) То есть не имеют общих точек.

**) То есть имели бы ровно одну общую точку.

которое выполняется, когда прямые либо параллельны, либо совпадают. По определению $X \parallel\!\mid X$ для любой прямой X. Симметричность отношения $\parallel\!\mid$ также очевидна. Наконец, если $X \parallel\!\mid Y$ и $Y \parallel\!\mid Z$, то $X \parallel\!\mid Z$. В самом деле, если $X \parallel Y$ и $Y = Z$, то $X \parallel Z$; если $X = Y$ и $Y \parallel Z$, то $X \parallel Z$. Наконец, если $X \parallel Y$ и $Y \parallel Z$, то по сказанному ранее либо $X \parallel Z$, либо $X = Z$. Во всех случаях имеем $X \parallel\!\mid Z$.

Отношение $\parallel\!\mid$ на множестве прямых очень естественно выглядит в алгебраической форме. Если на плоскости ввести декартовы координаты x и y, то всякая прямая, не перпендикулярная к оси Ox (не вертикальная), задается уравнением $y = kx + b$. Иначе говоря, любая (за указанным исключением) прямая X определяется парой чисел $\langle k, b \rangle$. Пусть прямая X задается уравнением $y = kx + b$, а прямая Y — уравнением $y = k'x + b'$. Тогда соотношение $X \parallel\!\mid Y$ выполняется в том и только том случае, когда $k = k'$. Соотношение $X \parallel Y$ означает, что $k = k'$ и одновременно $b \neq b'$, т. е. прямые различны. Это видно из того, что $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона прямой к оси Ox. Для вертикальных прямых можно положить $k = \infty$ $(\alpha = 90°)$, и условие $k = k'$ будет по-прежнему означать $X \parallel\!\mid Y$. Однако это соглашение не очень красиво, так как при $k = \infty$ у нас не определен второй параметр, различающий параллельные прямые.

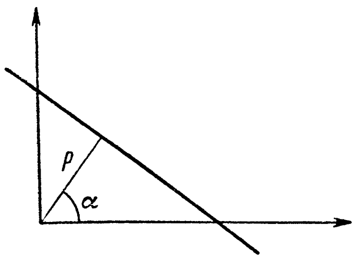


Рис. 5.1.

В аналитической геометрии дается более универсальная (так называемая *нормальная*) форма уравнения прямой:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

которая описывает прямую любого вида. Здесь p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую (рис. 5.1), α — угол наклона этого перпендикуляра к оси абсцисс. Тем самым каждой прямой взаимно-однозначно сопоставлена пара чисел $\langle \alpha, p \rangle$, где $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ и $0 \leqslant p < +\infty$. Соотношение $X \parallel\!\mid Y$ означает, что для соответствующих прямых $\alpha = \alpha'$ или $\alpha = \alpha' + \pi$. Каждой прямой соответствует точка на плоскости параметров α и p, лежащая в области, указанной на рис. 5.2. Пары вертикальных прямых $\alpha = \mathrm{const}$ и $\alpha + \pi = \mathrm{const}$ $(0 \leqslant \alpha < \pi)$ суть классы эквивалентности отношения $|||$.

На множестве прямых на плоскости существует еще одно важное отношение: $X \perp Y$ (X перпендикулярна к Y). Отношение перпендикулярности обладает следующими важными свойствами:

1. Антирефлексивность. Невозможно $X \perp X$.

2. Симметричность. Если $X \perp Y$, то $Y \perp X$.

3. Если $X \perp Y$ и $Y \perp Z$, то невозможно $X \perp Z$. Из $X \perp Y$ и $Y \perp Z$ следует, очевидно, $X ||| Z$. Обратно, если $X ||| Z$, то существует общий перпендикуляр Y к прямым X и Z, т. е. такое Y, что $X \perp Y$ и $Y \perp Z$. Оба эти утверждения означают, что квадрат отношения перпендикулярности есть отношение $|||$ «усиленной параллельности»:

$$\perp\perp = \perp^2 = |||.$$

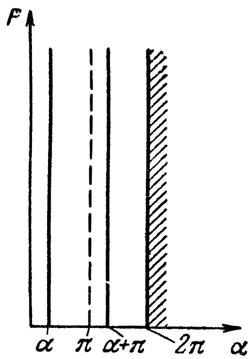


Рис. 5.2.

Введем на M еще одно отношение X Пер Y, означающее, что прямые X и Y имеют хотя бы одну общую точку, т. е. пересекаются или совпадают. Ясно, что отношение Пер рефлексивно и симметрично (но не транзитивно) и является, стало быть, отношением толерантности.

Выберем на плоскости некоторую точку P и рассмотрим множество K_P всех прямых, проходящих через эту точку. Легко видеть, что K_P есть класс толерантности. Действительно, любые прямые из K_P имеют общую точку, а именно, саму точку P. С другой стороны, любая прямая X, не входящая в K_P, не пересекается с некоторой прямой из K_P, а именно, с прямой, проходящей через точку P и параллельной прямой X. Предоставляем читателю проверить, что классы K_P образуют базис.

Существуют и другие классы толерантности. Например, множество всех прямых, касающихся некоторой полуокружности с выкинутой концевой точкой, образуют класс толерантности. Действительно, среди этих прямых нет параллельных друг другу. А для любой прямой, не входящей в данное множество, можно построить параллельную к ней прямую, касающуюся данной полуокружности.

Пусть теперь M — множество всех треугольников на плоскости. Читатель легко убедится, что равенство и подобие треугольников суть отношения эквивалентности *).

Обозначим через $M_К$ множество окружностей на плоскости и определим отношение $X \sqsubset Y$ условием, что окружность X находится внутри окружности Y. Ясно, что это отношение антирефлексивно и транзитивно, т. е. является строгим порядком. Этот порядок не является совершенным, так как существуют пары окружностей, из которых ни одна не лежит внутри другой.

Множеству всех прямых присвоим обозначение $M_П$. Тогда мы можем рассмотреть отношения между прямыми и окружностями. Примером такого отношения является X Кас Y — прямая X касается окружности Y.

Произведение Кас$(\text{Кас})^{-1}$ есть отношение на множестве прямых и XКас$(\text{Кас})^{-1}Y$ равносильно тому, что существует окружность V такая, что X Кас V и Y Кас V. Итак, X Кас$(\text{Кас})^{-1}Y$ означает, что у прямых X и Y существует общая касательная окружность V. Но такая окружность существует для любых двух прямых. Стало быть, отношение Кас$(\text{Кас})^{-1}$ выполнено для любых двух прямых, а, значит, является полным отношением на $M_П$.

Отношение $(\text{Кас})^{-1}$Кас определено на множестве окружностей $M_К$ и $X(\text{Кас})^{-1}$КасY означает, что существует прямая W, для которой W Кас X и W Кас Y, т. е. что к окружностям X и Y можно провести общую касательную.

§ 2. Отношения между уравнениями

Пусть теперь множество M состоит из уравнений вида

$$f(x) = g(x). \qquad (\xi)$$

Рассматриваемое уравнение мы будем обозначать гре-

*) Заметим, что равенство треугольников в геометрии вовсе не означает их тождества (совпадения). Один треугольник может находиться в Москве, а другой во Владивостоке, как любила говорить Нина Карловна Бари.

ческой буквой, которую мы для этого поставили в одной строчке с уравнением.

Корнем уравнения называется такое действительное число a, что при подстановке в обе части уравнения числа a вместо x мы получаем равные числа. Множество всех корней уравнения ξ мы будем обозначать R_ξ.

Например, для уравнения

$$x^2 = x^3 \qquad (\xi_1)$$

множество R_{ξ_1} состоит из чисел 0 и 1. Для уравнения

$$\cos x = \sin x \qquad (\xi_2)$$

множество R_{ξ_2} состоит из всех чисел вида

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n \qquad (n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$$

и является бесконечным. Для уравнения

$$1 + x^2 = -1 \qquad (\xi_3)$$

множество корней R_{ξ_3} пусто, поскольку при любом действительном значении x левая часть положительна, а правая отрицательна. Зато для уравнения

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \qquad (\xi_4)$$

множество корней R_{ξ_4} есть множество всех действительных чисел.

Введем теперь отношения между уравнениями:

Определение 5.1. Уравнения ξ и η называются *равносильными*:

$$\xi \approx \eta$$

если их множества корней совпадают: $R_\xi = R_\eta$.

Из того, что равенство двух множеств есть отношение эквивалентности, легко получается, что отношение равносильности $\approx$ есть отношение эквивалентности. В школьной алгебре изучаются преобразования уравнений, которые переводят уравнение ξ в равносильное ему уравнение η.

Определение 5.2. Уравнение ξ *не сильнее* уравнения η: $\xi \Rightarrow \eta$, если $R_\xi \subseteq R_\eta$. В этом случае естественно говорить также, что уравнение η *не слабее* уравнения ξ *).

*) В этом случае уравнение η называют также *выводным* из уравнения ξ (или *следствием* уравнения ξ). (*Прим. ред.*)

Легко проверить, что отношение $\Rightarrow$ рефлексивно и транзитивно, т. е. является квазипорядком. Ясно также, что из $\xi \Rightarrow \eta$ и $\eta \Rightarrow \xi$ вытекает равносильность $\xi \approx \eta$. Обратно, из равносильности $\xi \approx \eta$ следует $\xi \Rightarrow \eta$ и $\eta \Rightarrow \xi$. Таким образом, $\approx \; = \; \Rightarrow \cup (\Rightarrow)^{-1}$.

На множестве уравнений, имеющих хотя бы один корень, легко определить естественное отношение толерантности — наличие общих корней: $R_\xi \cap R_\eta \neq \varnothing$.

Можно ввести еще отношение $\approxeq$ эффективной равносильности уравнений. Уравнения ξ и η мы будем называть *эффективно равносильными*, если каждое из них можно преобразовать в другое с помощью конечного числа применений разрешенных приемов из фиксированного списка (предполагается, конечно, что преобразования, входящие в этот фиксированный список, сохраняют равносильность).

В силу транзитивности отношения $\approx$ любое число применения таких приемов не нарушает равносильности уравнений. Поэтому эффективно равносильные уравнения являются равносильными, что можно записать как включение одного из этих отношений в другое:

$$\approxeq \; \subseteq \; \approx .$$

Так, уравнения

$$\frac{x-1}{x^2+1} = 2 \qquad (\xi_5)$$

и

$$2x^2 - x + 3 = 0 \qquad (\xi_6)$$

эффективно равносильны:

$$\xi_5 \approxeq \xi_6,$$

так как уравнение ξ_6 можно получить из уравнения ξ_5 с помощью цепочки известных из школьной алгебры преобразований, и обратно.

С другой стороны, уравнения

$$x - 1 = 0 \qquad (\xi_7)$$

и

$$2^x - 1 - x = 0 \qquad (\xi_8)$$

равносильны (оба имеют один корень: $x = 1$), но не эффективно равносильны, так как ξ_8 нельзя получить из ξ_7 алгебраическими преобразованиями. Таким образом, справедливо строгое включение:

$$\approxeq \; \subset \; \approx .$$

ГЛАВА VI

ОТОБРАЖЕНИЯ ОТНОШЕНИЙ

§ 1. Гомоморфизмы и корреспонденции

Нам уже неоднократно приходилось сопоставлять разные множества и отношения на них. Например, произвольное пространство толерантности и множество S_H непустых подмножеств множества H (теорема 3.3). Или множество с заданным на нем квазипорядком и множество классов эквивалентности и индуцированным порядком. В этой главе мы введем важные общие понятия, позволяющие говорить о сопоставлении различных множеств с заданными на них отношениями. Пусть имеются два отношения: $\langle A, M\rangle$ и $\langle B, L\rangle$. Сопоставить эти отношения — это значит соотнести элементам множества L какие-то элементы множества M и указать, какую информацию о выполнении отношения B несет тот факт, что между некоторыми элементами множества M выполнено отношение A. Запись α: $\langle A, M\rangle \rightarrow \langle B, L\rangle$ будет обозначать далее, что α — отображение множества M в множество L, а $\langle A, M\rangle$ и $\langle B, L\rangle$ — отношения. Советуем читателю вспомнить определения сюръективного, инъективного и биективного отображения (§ 2 гл. I).

Определение 6.1. Отображение α: $M \rightarrow L$ называется *гомоморфным отображением* (или *гомоморфизмом*) отношения $\langle A, M\rangle$ в отношение $\langle B, L\rangle$, если из xAx' следует $\alpha(x)B\alpha(x')$.

Иначе говоря, из того, что выполняется отношение A для прообразов, следует, что выполняется отношение B для образов. На рис. 6.1 показаны два примера гомоморфизмов отношений. Чтобы не проводить лишних стрелок, соответствие вершин указано их нумерацией. В частности, на рис. 6.1,*а* указано, что вершины *2* и *3* переходят при отображении в одну вершину.

На рис. 6.1 (а также на рис. 6.2 и 6.3) изображены симметричные отношения и поэтому в графах не проведены стрелки.

Определение 6.2. Отображение α: $M \to L$ называется *корреспонденцией* отношения $\langle A, M\rangle$ в отношение $\langle B, L\rangle$, если из $\alpha(x) B \alpha(x')$ следует xAx'.

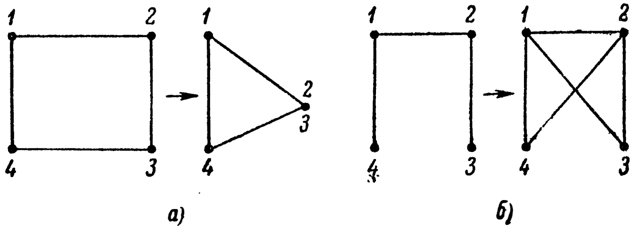


Рис. 6.1. Гомоморфизмы отношений.

Иначе говоря, выполнение отношения B для пары образов влечет выполнение отношения A для любой пары их прообразов. (Термин «корреспонденция» для таких отображений впервые использовал С. К. Шаумян.)

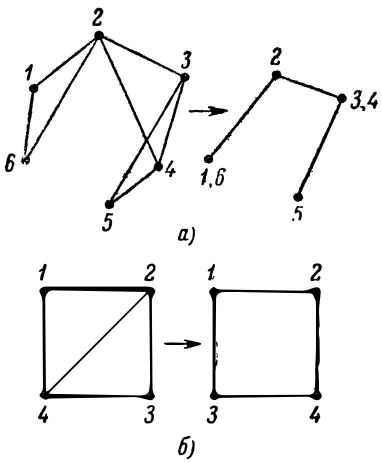


Рис. 6.2. Корреспонденции отношений.

На рис. 6.2 приведены два примера корреспонденций между отношениями. Поучительно проанализировать, какие ребра на отображаемом графе необходимы, чтобы отображение было корреспонденцией. На рис. 6.2, *а* не обязательны (их изъятие не нарушит корреспонденцию) только ребра $\langle 1, 6\rangle$ и $\langle 3, 4\rangle$.

Если отображение α: $M \to L$ биективно, то α тогда и только тогда является корреспонденцией, когда обратное отображение α^{-1}: $L \to M$ является гомоморфизмом. Если обратного отображения не существует, то понятие корреспонденции не сводится к понятию гомоморфизма.

Понятие корреспонденции оказалось полезным в задачах математической лингвистики.

Если отображение α сюръективно, то гомоморфизм α мы будем называть *эпиморфизмом*; если α инъективно, то гомоморфизм α называется *мономорфизмом*; если, наконец, α биективно, гомоморфизм α называется *изоморфизмом* *). Гомоморфизм (эпиморфизм, мономорфизм, изоморфизм) α называется *k-гомоморфизмом* (соответственно *k-эпиморфизмом*, *k-мономорфизмом*, *k-изоморфизмом*), если α одновременно является корреспонденцией.

Хороший пример k-гомоморфизма можно извлечь из предыдущей главы. Пусть M — множество уравнений, а L — множество, состоящее из множеств действительных чисел. Рассмотрим отображение φ: $M \to L$, сопоставляющее каждому уравнению $\xi \in M$ множество его корней $R_\xi \in L$. Ясно, что разным уравнениям может соответствовать одно и то же множество корней. Но, согласно определению 5.1, отображение φ является k-гомоморфизмом отношения $\langle \approx, M \rangle$ в отношение $\langle =, L \rangle$, поскольку равносильным уравнениям соответствуют совпадающие множества корней и, обратно, если множества корней для двух уравнений совпадают, то сами уравнения равносильны. Аналогично, согласно определению 5.2, то же отображение φ будет также k-гомоморфизмом отношения $\langle \Rightarrow, M \rangle$ в отношение $\langle \subseteq, L \rangle$.

Теорема 3.3 означает, что для любого пространства толерантности $\langle M, \tau \rangle$ существует k-гомоморфизм пространства $\langle M, \tau \rangle$ в $\langle S_H, \hat{\tau} \rangle$, где S_H — множество непустых подмножеств множества H; при этом $F_1 \hat{\tau} F_2$ означает, что $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$. В частном случае, когда пространство $\langle M, \tau \rangle$ — безъядерное, существует даже k-мономорфизм пространства $\langle M, \tau \rangle$ в пространство $\langle S_H, \hat{\tau} \rangle$ (теорема 3.3″).

*) Таким образом, для любого множества M тождественное отображение ε множества M на себя является изоморфизмом пустого отношения $\langle \varnothing, M \rangle$ в полное отношение $\langle M^2, M \rangle$, что, конечно, мало согласуется с тем, что обычно в математике связывается со словом «изоморфизм». Более разумным является вводимое в следующей фразе понятие k-изоморфизма. (*Прим. ред.*)

Рассмотренное в главе IV взаимоотношение между квазипорядками и порядками допускает следующую интерпретацию в новых терминах. Пусть $\langle A, M\rangle$ — квазипорядок. Тогда существует k-эпиморфизм

$$\alpha\colon \langle A,\ M\rangle \to \langle B,\ L\rangle,$$

где B — нестрогий порядок, а $L = M/A \cap A^{-1}$.

Покажем теперь, что всякий гомоморфизм может быть расширен до k-гомоморфизма:

Лемма 6.1. *Пусть* $\alpha\colon M \to L$ — *отображение и* $\langle C, L\rangle$ — *отношение. Тогда* 1) *существует единственное отношение* $\langle D, M\rangle$ *такое, что* α *является* k-*гомоморфизмом отношения* $\langle D, M\rangle$ *в отношение* $\langle C, L\rangle$; 2) *для любого отношения* $\langle B, M\rangle$, *для которого* α *является гомоморфизмом отношения* $\langle B, M\rangle$ *в отношение* $\langle C, L\rangle$, $B \subseteq D$.

Доказательство. 1) Определим отношение D на множестве M условием:

$$xDx', \quad \text{если} \quad \alpha(x) C \alpha(x'). \tag{6.1}$$

Очевидно, α является k-гомоморфизмом отношения $\langle D, M\rangle$ в отношение $\langle C, L\rangle$. Докажем теперь единственность. Пусть α является также k-гомоморфизмом отношения $\langle A, M\rangle$ в отношение $\langle C, L\rangle$. Пусть сначала xAx'. Поскольку α — гомоморфизм отношения $\langle A, M\rangle$ в отношение $\langle C, L\rangle$, $\alpha(x) C \alpha(x')$. Из (6.1) вытекает xDx'. Значит, $A \subseteq D$. Пусть теперь xDx'. Из (6.1) имеем $\alpha(x) C \alpha(x')$. Поскольку α является корреспонденцией отношения $\langle A, M\rangle$ в отношение $\langle C, L\rangle$, xAx'. Значит, $D \subseteq A$. Итак, $A = D$.

2) Включение $B \subseteq D$ доказывается так же, как мы в первой части доказывали включение $A \subseteq D$.

Пусть ε — тождественное отображение множества M на себя, а B и C — отношения на M. Легко видеть, что отображение

$$\varepsilon\colon \langle B,\ M\rangle \to \langle C,\ M\rangle$$

тогда и только тогда является гомоморфизмом, когда $B \subseteq C$ (см. рис. 6.1, *б*). С другой стороны, чтобы отображение ε было корреспонденцией, необходимо и достаточно обратное включение $B \supseteq C$ (см., в частности, рис. 6.2, *б*).

Рассмотрим теперь, какие свойства отношений сохраняются при различных типах отображений.

Лемма 6.2. *Пусть* α: $\langle A, M\rangle \to \langle B, L\rangle$ — *гомоморфизм. Тогда* 1) *если* α *сюръективно и* A *рефлексивно, то* B *рефлексивно*; 2) *если* B *антирефлексивно, то* A *антирефлексивно.*

Доказательство. 1) В силу сюръективности отображения α для всякого $y \in L$ существует прообраз x, для которого $\alpha(x) = y$. Так как выполнено xAx, по определению эпиморфизма выполнено yBy. Таким образом, рефлексивность отношения A влечет рефлексивность отношения B. 2) Пусть теперь B антирефлексивно. Предположим, что существует такой $x \in M$, что xAx. Тогда для образа $y = \alpha(x)$ справедливо yBy, что противоречит антирефлексивности отношения B. Лемма доказана.

Аналогично этому имеет место

Лемма 6.3. *Пусть* α: $\langle A, M\rangle \to \langle B, L\rangle$ — *корреспонденция. Тогда* 1) *из рефлексивности отношения* B *следует рефлексивность отношения* A, 2) *если* α *сюръективно, то из антирефлексивности отношения* A *следует антирефлексивность отношения* B.

Доказательство. Действительно, если всегда $\alpha(x) B \alpha(x)$, то по определению корреспонденции справедливо и xAx, т. е. A рефлексивно. Если бы хотя бы для одного элемента из L выполнялось $\alpha(x) B \alpha(x)$, то A не могло бы быть антирефлексивным.

Для сохранения остальных свойств отношений необходимо, чтобы отображение α было одновременно и эпиморфизмом и корреспонденцией.

Лемма 6.4. *Если* α: $\langle A, M\rangle \to \langle B, L\rangle$ *есть k-эпиморфизм, то* B *симметрично тогда и только тогда, когда симметрично* A.

Доказательство. Предположим, что A симметрично. Тогда если yBy', $y = \alpha(x)$, $y' = \alpha(x')$, то (по определению корреспонденции) xAx'. Отсюда $x'Ax$ и (по определению гомоморфизма) $y'By$. Пусть теперь B симметрично, и пусть xAx', тогда $\alpha(x) B \alpha(x')$ (по определению гомоморфизма). Значит, $\alpha(x') B \alpha(x)$ и (по определению корреспонденции) $x'Ax$. Лемма доказана.

Из лемм 6.2, 6.3 и 6.4 непосредственно вытекает

Теорема 6.1. *Если* α: $\langle A, M\rangle \to \langle B, L\rangle$ — *k-эпиморфизм, то отношение* B *тогда и только тогда является толерантностью, когда* A — *толерантность.*

Имеет место также

Лемма 6.5. *Если α: $\langle A, M\rangle \to \langle B, L\rangle$ — k-изоморфизм, то B антисимметрично тогда и только тогда, когда антисимметрично A.*

Лемма 6.6. *Если α: $\langle A, M\rangle \to \langle B, L\rangle$ — k-эпиморфизм, то B транзитивно тогда и только тогда, когда транзитивно A.*

Доказательство. Предположим сначала, что B транзитивно. Пусть xAx' и $x'Ax''$. Тогда $\alpha(x)B\alpha(x')$ и $\alpha(x')B\alpha(x'')$; из-за транзитивности отношения B верно $\alpha(x)B\alpha(x'')$. Но тогда и xAx''. Предположим теперь, что A транзитивно. Пусть yBy' и $y'By''$. Тогда для любых прообразов xAx' и $x'Ax''$. Стало быть, ввиду предположенной транзитивности отношения A, xAx''. Значит, yBy''.

Из доказанных лемм вытекает

Теорема 6.2. *Если отображение α: $\langle A, M\rangle \to \langle B, L\rangle$ является k-эпиморфизмом, то отношение B тогда и только тогда является эквивалентностью (квазипорядком), когда A — эквивалентность (соответственно квазипорядок).*

Теорема 6.3. *Пусть отображение α множества M на множество L является гомоморфизмом (корреспонденцией) отношения $\langle A, M\rangle$ в отношение $\langle B, L\rangle$ и гомоморфизмом (корреспонденцией) отношения $\langle A_1, M\rangle$ в отношение $\langle B_1, L\rangle$. Тогда отображение α является также гомоморфизмом (корреспонденцией) отношений $\langle A \cup A_1, M\rangle$, $\langle A \cap A_1, M\rangle$, $\langle AA_1, M\rangle$ в отношения $\langle B \cup B_1, M\rangle$, $\langle B \cap B_1, M\rangle$, $\langle BB_1, M\rangle$ соответственно.*

Доказательство предоставляем читателю.

§ 2. Минимальный образ и каноническое пополнение отношения

Начнем с доказательства необходимых лемм.

Лемма 6.7. *Пусть α: $M \to L$ — сюръективное отображение, $\langle B, M\rangle$ — произвольное отношение, $\langle A, M\rangle$ — такое отношение, что*

$$x_1Ax_2 \text{ равносильно } \alpha(x_1) = \alpha(x_2).$$

Тогда, 1) если существует такое отношение $\langle C, L\rangle$, что α является k-эпиморфизмом отношения $\langle B, M\rangle$ в отношение $\langle C, L\rangle$, то

$$ABA = B, \tag{6.2}$$

2) *если выполняется* (6.2), *то существует такое отношение* $\langle C, L\rangle$, *что* α *является* k*-эпиморфизмом отношения* $\langle B, M\rangle$ *в отношение* $\langle C, L\rangle$.

Доказательство. 1) Поскольку A рефлексивно, $B \subseteq ABA$. Докажем, что $ABA \subseteq B$. Пусть $xABAx'$. Тогда существуют такие x_1, x_2, что

$$xAx_1,\ x_1Bx_2,\ x_2Ax'.$$

Из x_1Bx_2 и того, что α — гомоморфизм, вытекает

$$\alpha(x_1)C\alpha(x_2).$$

Из xAx_1 получаем $\alpha(x)=\alpha(x_1)$, из x_2Ax' вытекает $\alpha(x_2)=\alpha(x')$. Значит,

$$\alpha(x)C\alpha(x').$$

Поскольку α — корреспонденция, xBx'. Следовательно, $ABA \subseteq B$.

2) Пусть y, $y' \in L$. Поскольку α — сюръекция, существуют такие x, $x' \in M$, что $\alpha(x)=y$, $\alpha(x')=y'$. Определим на L отношение C:

$$yCy',\text{ если } xBx'.$$

Наше определение не зависит от выбора прообразов x, x'. В самом деле. Пусть x_1, x_1' — другие прообразы элементов y, y' соответственно. Таким образом, $\alpha(x_1)= y$, $\alpha(x_1')=y'$. Покажем, что xBx' тогда и только тогда, когда x_1Bx_1'. Допустим, что xBx'. Докажем x_1Bx_1'. Поскольку $\alpha(x_1)=\alpha(x)$, x_1Ax. По аналогичной причине $x'Ax_1'$. Из x_1Ax, xBx' и $x'Ax_1'$ вытекает x_1ABAx_1'. Из (6.2) получаем x_1Bx_1'. Аналогично из x_1Bx_1' выводится xBx'. Из определения отношения C, очевидно, вытекает, что xBx' тогда и только тогда, когда $\alpha(x)C\alpha(x')$. Значит, α — k-эпиморфизм. Лемма доказана.

Легко видеть, что для произвольных эквивалентностей A и B равенство (6.2) равносильно включению $A \subseteq B$. Ясно, что (6.2) всегда выполняется при $A = E$, т. е. тогда, когда α — биекция.

Интересно выяснить, когда для отношения $\langle B, M\rangle$ существуют неинъективные k-эпиморфизмы (т. е. k-эпиморфизмы, не являющиеся k-изоморфизмами). Из леммы 6.7 следует, что отношение $\langle B, M\rangle$ допускает неинъективные k-эпиморфизмы только в том случае, когда существует отношение эквивалентности A на множестве M (отличное от отношения равенства) такое, что $ABA = B$. В частности, при $B = E$ такого A не существует.

Определение 6.3. Пусть B — отношение. Определим отношение B^+ условием: xB^+y, если 1) xBz тогда и только тогда, когда yBz; 2) zBx тогда и только тогда, когда zBy. Таким образом, соотношение xB^+y означает, что в графе отношения B из x и y выходят стрелки к одним и тем же вершинам и в x и y входят стрелки из одних и тех же вершин. Назовем B^+ отношением, *ассоциированным* с B.

Тривиальным образом можно убедиться, что B^+ будет эквивалентностью для любого исходного отношения B. Отношение B^+ склеивает в классы все элементы, имеющие одинаковые связи в графе отношения B.

Отметим, что в главе III мы уже рассматривали фактически переход от отношения B к отношению B^+: если τ — отношение толерантности, а θ — отношение из (3.3), то $\tau^+ = \theta$.

Лемма 6.8. *Имеет место тождество*

$$B^+BB^+ = B. \tag{6.3}$$

Доказательство. Ясно, что $B \subseteq B^+BB^+$. Докажем обратное включение: $B \supseteq B^+BB^+$. Пусть выполнено xB^+BB^+y. Тогда существуют z, w такие, что xB^+z, zBw и wB^+y. Из xB^+z и zBw вытекает xBw. Аналогично, из wB^+y и xBw вытекает xBy. Значит, $B^+BB^+ \subseteq B$, и тем самым (6.3) доказано.

Лемма 6.9. *Для того чтобы для отношения эквивалентности A и для произвольного отношения B выполнялось равенство $ABA = B$, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$A \subseteq B^+. \tag{6.4}$$

Доказательство. Пусть выполнено (6.4). Тогда имеем, учитывая лемму 6.8, $B \subseteq ABA \subseteq B^+BB^+ = B$, т. е. $ABA = B$. Пусть теперь выполнено $ABA = B$. Допустим, что xAy. Докажем, что xB^+y. По определению отношения B^+ надо доказать, что xBz тогда и только тогда, когда yBz, и что zBx тогда и только тогда, когда zBy. Докажем, что xBz влечет yBz. Итак, пусть xBz. Поскольку A — эквивалентность, из xAy вытекает yAx. Кроме того, zAz. Из yAx, xBz и zAz следует $yABAz$, а значит, и yBz. Остальное доказательство предоставляем читателю. Лемма доказана.

Из леммы 6.9 и леммы 6.7 вытекает

Теорема 6.4. *Для того чтобы существовал неинъективный k-эпиморфизм отношения $\langle B, M\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы отношение B^+ не было отношением равенства.*

(Доказывая достаточность, надо, чтобы использовать лемму 6.7, положить $L = M/B^+$ и в качестве α взять отображение, которое каждый элемент переводит в свой класс эквивалентности.)

Последнее утверждение было получено в результате обсуждения этих вопросов с С. Я. Фитиаловым.

Легко проверить, что если B — эквивалентность, то $B^+ = B$. Если же B — толерантность, то xB^+y означает, что x и y принадлежат общему ядру (см. гл. III). Тем самым выясняется, что пространство толерантности тогда и только тогда не допускает нетривиальных k-эпиморфизмов, когда оно безъядерное.

Вообще говоря, отношение B несравнимо с ассоциированным с ним отношением B^+. Однако имеет место

Лемма 6.10. *Если B рефлексивно, то $B^+ \subseteq B$.*

Доказательство. Ввиду (6.3) и рефлексивности отношений B, B^+ имеем $B^+ \subseteq B^+BB^+ = B$, т. е. лемма доказана.

Рассмотрим теперь отображение α: $M \to L$ и отношение B на M. Пусть $\mathfrak{M}_B(\alpha)$ — множество всех отношений C на L таких, что α: $\langle B, M\rangle \to \langle C, L\rangle$ — гомоморфизм. Множество $\mathfrak{M}_B(\alpha)$ непусто, так как в него всегда входит полное отношение.

Обозначим через B^α пересечение всех отношений из $\mathfrak{M}_B(\alpha)$. По теореме 6.3 (точнее — некоторому ее обобщению) отображение

$$\alpha\colon \langle B, M\rangle \to \langle B^\alpha, L\rangle \tag{6.5}$$

есть гомоморфизм. Отношение B^α обладает свойством минимальности: если C таково, что α: $\langle B, M\rangle \to \langle C, L\rangle$ — гомоморфизм, то $B^\alpha \subseteq C$. Легко видеть, что верно и обратное: если $B^\alpha \subseteq C$, то α: $\langle B, M\rangle \to \langle C, L\rangle$ — гомоморфизм.

Определение 6.4. Отношение B^α называется *α-образом* отношения B.

Пример на рис. 6.3 показывает, что α-образ отношения B не обязан быть эквивалентностью даже,

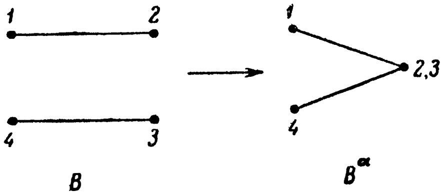


Рис. 6.3. Эквивалентность переходит в толерантность.

если B — эквивалентность. (На рисунке мы не изображаем петли, которые имеются в каждой точке обоих графов.)

Лемма 6.11. *Если α — сюръективное отображение и B — толерантность, то B^α — толерантность.*

Доказательство. Рефлексивность отношения B^α следует из леммы 6.2. Симметричность отношения B^α получается так. Докажем сначала, что если $yB^\alpha y'$, то хотя бы для одной пары прообразов верно xBx'. В противном случае мы могли бы взять отношение $\tilde{C}$ на L такое, что $y\tilde{C}y'$ не выполнено, а для всех остальных пар $y_1\tilde{C}y_2$ тогда и только тогда, когда $y_1B^\alpha y_2$. Очевидно, что $\tilde{C}\subset B^\alpha$ и α: $\langle B, M\rangle \to \langle \tilde{C}, L\rangle$ — гомоморфизм. Но это невозможно в силу минимальности отношения B^α. Теперь из xBx' следует $x'Bx$ и $y'B^\alpha y$.

Из примера на рис. 6.3 видно, что если B — эквивалентность, то B^α может оказаться только толерантностью.

Ввиду леммы 6.1 мы можем сформулировать

Определение 6.5. Пусть α: $M\to L$ — отображение и B — отношение на M. *α-пополнением* отношения B называется такое отношение B_α, для которого отображение

$$\alpha:\ \langle B_\alpha,\ M\rangle \to \langle B^\alpha,\ L\rangle \tag{6.6}$$

есть k-гомоморфизм.

Из леммы 6.1 вытекает

$$B\subseteq B_\alpha. \tag{6.7}$$

Теорема 6.5. *Пусть A — произвольная эквивалентность на M, α: $M \to M/A$ — отображение, переводящее каждый элемент $x \in M$ в его класс эквивалентности по A, и B — отношение на M. Тогда*

$$B_\alpha = ABA. \tag{6.8}$$

Доказательство. Мы используем еще раз свойство α-образа B^α, установленное в доказательстве леммы 6.11: соотношение $yB^\alpha y'$ выполнено тогда и только тогда, когда существует пара прообразов x и x' ($\alpha(x) = y$, $\alpha(x') = y'$) таких, что xBx'. Пусть $xB_\alpha x'$. Поскольку α является гомоморфизмом отношения $\langle B_\alpha, M\rangle$ в отношение $\langle B^\alpha, L\rangle$, $\alpha(x)B^\alpha\alpha(x')$. Тогда ввиду вышеуказанного свойства α-образа B^α существуют такие z, $z' \in M$, что $\alpha(z) = \alpha(x)$, $\alpha(z') = \alpha(x')$ и zBz'. Из $\alpha(z) = \alpha(x)$ вытекает xAz. По аналогичной причине $z'Ax'$. Из xAz, zBz' и $z'Ax'$ вытекает $xABAx'$. Аналогично доказывается, что $xABAx'$ влечет $xB_\alpha x'$. Тем самым (6.8) доказано.

Из (6.8) легко следует, что α-пополнение B_α удовлетворяет условию (6.2). Действительно,

$$AB_\alpha A = A(ABA)A = A^2BA^2 = ABA = B_\alpha.$$

Итак,

$$B_\alpha = AB_\alpha A. \tag{6.9}$$

Теперь мы исследуем, когда α-пополнение B_α принадлежит тому же типу, что и исходное отношение B. Благодаря (6.8) вопрос сводится к чисто алгебраической задаче: когда произведение ABA, где A — эквивалентность, принадлежит к тому же типу, что и B?

Сначала исследуем случай, когда B — отношение эквивалентности. Простой алгебраический критерий дает

Теорема 6.6. *Если A и B — эквивалентности на множестве M, то для того, чтобы произведение ABA было эквивалентностью, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$ABA = A \hat{\cup} B. \tag{6.10}$$

Доказательство. Так как $A \hat{\cup} B$ — эквивалентность, то условие (6.10) достаточно. Пусть теперь ABA — эквивалентность. Из очевидных включений $A \subseteq ABA$ и $B \subseteq ABA$ следует $A \cup B \subseteq ABA$. Беря транзитивное замыкание от обеих частей и учитывая теорему 1.3, получаем

$$A \hat{\cup} B \subseteq ABA. \tag{6.11}$$

С другой стороны, в силу

$$ABA \subseteq BAB \cup ABAB \cup ABA \cup BABA = (AB \cup BA)^2$$

и (1.2), имеем

$$ABA \subseteq A \hat{\circ} B. \tag{6.12}$$

Но по теореме 2.9 $A \hat{\cup} B = A \hat{\circ} B$; сравнивая включения (6.11) и (6.12), получаем (6.10). Теорема доказана.

Более простое достаточное условие состоит в том, что $AB = BA$. Тогда $ABA = AAB = AB$, но по теореме Шика (теорема 2.7) AB является эквивалентностью.

В. Б. Борщев построил любопытный пример двух отношений эквивалентности A и B, для которых $AB \neq BA$ и $ABA \neq BAB$, но ABA есть эквивалентность. Этот пример состоит в следующем. Классы по отношению B суть $\{1\}$, $\{2, 3\}$ и $\{4\}$, а по отношению A — $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$. Легко подсчитать, что отношение ABA — полное. Произведения AB, BA и BAB показаны на рис. 6.4.

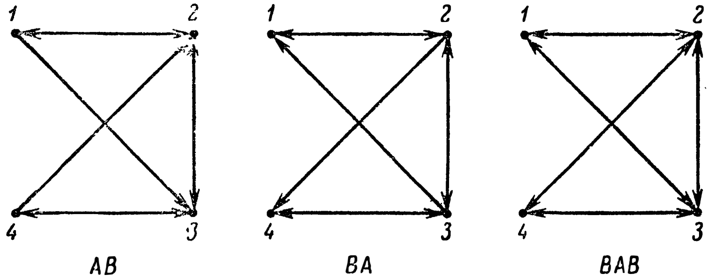


Рис. 6.4.

Можно сформулировать необходимые и достаточные условия в терминах «почти-коммутативности» отношений A и B. Соответствующий результат выглядит таким образом:

Теорема 6.7. *Если A и B — отношения эквивалентности, то произведение ABA будет эквивалентностью в том и только в том случае, когда*

$$BAB \subseteq ABA. \tag{6.13}$$

Доказательство. Докажем сначала, что если имеет место (6.13), то ABA — эквивалентность. Поскольку $(ABA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}A^{-1} = ABA$, ABA симметрично. Докажем еще транзитивность отношения ABA. Из (6.13) следует

$$(ABA)(ABA) = A(BAAB)A = A(BAB)A \subseteq A(ABA)A = ABA.$$

Значит, ABA транзитивно. Пусть теперь ABA — эквивалентность. Поскольку ABA транзитивно, имеем $(ABA)(ABA) \subseteq ABA$. Но отсюда следует

$$BAB \subseteq A(BAB)A = (AB)A(BA) = (AB)(AA)(BA) = (ABA)(ABA) \subseteq ABA.$$

Теорема доказана.

Сходный результат получается и для порядков. Он выглядит следующим образом:

Теорема 6.8. *Пусть A — эквивалентность, B — строгий порядок. Для того чтобы произведение ABA являлось строгим порядком, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\begin{cases} BAB \subseteq ABA, \\ A \cap B = \varnothing. \end{cases} \tag{6.14}$$

Доказательство. 1) Достаточность. Пусть выполнено (6.14). Сначала докажем антирефлексивность отношения ABA. Предположим, что для некоторого x выполнено $xABAx$. Тогда существуют y и z такие, что одновременно xAy, yBz и zAx. Из zAx и xAy следует zAy, а затем и yAz. Итак, выполнено yBz и yAz. Но это невозможно в силу $A \cap B = \varnothing$. Ввиду полученного противоречия антирефлексивность отношения ABA доказана. Транзитивность произведения ABA доказывается в точности, как в предыдущей теореме.

2) Необходимость. Пусть ABA является строгим порядком. Предположим, что $A \cap B \neq \varnothing$, т. е. что существует пара элементов x и y такая, что выполнены одновременно соотношения xAy и xBy. Тогда выполнена тройка соотношений: xAx, xBy и yAx, т. е. выполнено $xABAx$ и ABA не является тем самым строгим порядком. Отсюда следует, что $A \cap B = \varnothing$.

Включение $BAB \subseteq ABA$ доказывается в точности, как в предыдущей теореме.

Теорема доказана.

Рассуждая аналогично, читатель легко сумеет доказать, что если B — квазипорядок и A — эквивалентность, то ABA будет квазипорядком в том и только том случае, когда $BAB \subseteq ABA$.

Подведем некоторый итог проделанной работе. Пусть имеется отношение $\langle B, M\rangle$ и отображение α множества M в некоторое множество L:

$$\alpha\colon\ M \to L.$$

Тогда на множестве L однозначно определяется *минимальный образ* B^α отношения B. Иными словами, по отношению B и отображению α строится отношение B^α на L, так что отображение

$$\langle B,\ M\rangle \xrightarrow{\alpha} \langle B^\alpha,\ L\rangle$$

оказывается гомоморфизмом, обладающим следующим свойством: если D — некоторое отношение на L, то отображение $\alpha\colon M \to L$ будет гомоморфизмом $\alpha\colon\ \langle B, M\rangle \to \langle D, L\rangle$ в том и только том случае, когда

$$D \supseteq B^\alpha.$$

Гомоморфизм α отношения $\langle B, M\rangle$ в его минимальный образ $\langle B^\alpha, L\rangle$, вообще говоря, не является корреспонденцией. Однако существует единственное *каноническое пополнение* B_α отношения B, $B_\alpha \supseteq B$, для которого отображение

$$\alpha\colon\ \langle B_\alpha,\ M\rangle \to \langle B^\alpha,\ L\rangle$$

является k-гомоморфизмом.

Иными словами, отображение $\alpha\colon\ M \to L$ для каждого отношения B на M «вкладывается» в диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\langle B,M\rangle \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \langle B^\alpha,L\rangle \\
\langle B_\alpha,M\rangle \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Здесь $\varepsilon\colon\ M \to M$ — тождественное отображение, задающее гомоморфизм $\langle B, M\rangle \xrightarrow{\varepsilon} \langle B_\alpha, M\rangle$, горизонтальная стрелка является гомоморфизмом, а диагональная стрелка является k-гомоморфизмом. Отношения B^α и $B_\alpha \supseteq B$ определены однозначно по отношению B и отображению α. Подчеркнем важность формулы (6.8), выражающей явным образом каноническое пополнение B_α отношения B через отношение B.

Полученные в этом параграфе результаты имеют некоторое значение для математической теории классификационных систем.

Всякая классификация элементов некоторого множества M основана на выборе системы разбиений этого множества на классы. Тем самым на M возникает некоторая система отношений эквивалентности $S = \{A_1, A_2, \ldots\}$. Любое из отношений эквивалентности, принадлежащих S, например, A_1, порождает сюръективное отображение

$$\alpha\colon M \to L,$$

где L — множество классов эквивалентности по A_1 и отображение α сопоставляет каждому элементу из M соответствующий класс эквивалентности по A_1. Таким образом, xA_1y равносильно тому, что $\alpha(x) = \alpha(y)$. Тогда отношение $A_2 \in S$ индуцирует на множестве L отношение A_2^α. Из леммы 6.11 и примера на рис. 6.3 видно, что отношение A_2^α, индуцируемое эквивалентностью A_2 на классах эквивалентности по другому отношению, может оказаться только толерантностью. Стало быть, при описании достаточно сложной классификационной системы нельзя ограничиться отношениями эквивалентности, а приходится рассматривать более общие отношения толерантности. Это связано с тем, что в классификационных системах всегда изучаются не только отношения между самими объектами, но и отношения между классификационными рубриками, являющимися по существу классами эквивалентности по одному из отношений, характеризующих классификационную систему.

ГЛАВА VII

ПРИМЕРЫ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИНГВИСТИКИ

§ 1. Синтаксические структуры

Между словами, образующими правильную русскую фразу, существуют различные лингвистические отношения. Указать явным образом эти отношения — это и значит описать синтаксическую структуру фразы.

Формальное описание свойств таких отношений и методов их выделения во фразе является одной из важных задач математической лингвистики. Поскольку здесь мы не имеем в виду обсуждать связь математической лингвистики с общей лингвистикой, то мы не будем углубляться в анализ лингвистического характера вводимых отношений, а будем апеллировать к тому знанию русского языка и его грамматики, которым наверняка обладает любой читатель данной книги.

Пусть дана некоторая русская фраза, и пусть M — множество вхождений слов в эту фразу. Мы фиксируем на M несколько важнейших грамматических отношений, определяемых ролью в этой фразе данного вхождения слова.

В дальнейшем мы говорим о *вхождении* слов, а не о словах, поскольку одно и то же слово может во фразе повторяться несколько раз, причем разные вхождения одного и того же слова могут играть разную роль и иметь разные связи.

Например, «Лазурь да глина, глина да лазурь, чего ж тебе еще? Скорей глаза сощурь, как близорукий шах над перстнем бирюзовым, над книгой звонких глин, над книжною землей, над гнойной книгою, над глиной дорогой, которой мучимся, как музыкой и словом».

В этом стихотворении Осипа Мандельштама («Новый мир», 1931 г., кн. 3, цикл «Армения») несколько раз повторяются слова: «как», «над», «книга», «глина».

В математической лингвистике изучаются также отношения между словами, не зависящие от их вхождений в тексты (скажем, «принадлежность одному роду» или «принадлежность одной части речи»). Но эти отношения (так называемые *парадигматические отношения*) являются отношениями на другом множестве — на множестве слов русского языка *). Мы же в этом параграфе изучаем только отношения между вхождениями слов в некоторую фразу (так называемые *синтагматические отношения*).

Начнем с того, что перечислим основные отношения между словами во фразе.

Простейшее из возможных отношений на M — это отношение следования: x *левее* y. Далее мы будем обозначать следование знаком неравенства. Таким образом, запись $x < y$ означает, что y расположен во фразе правей, чем x. Легко видеть, что отношение «быть левее» задает совершенный **) строгий порядок на множестве M.

Редукцию отношения следования $<$ мы обозначим символом Δ. Соотношение $x \Delta y$ означает, что y является непосредственным правым соседом слова x. Легко видеть, что $x \Delta^n y$ выполняется в том и только том случае, когда слово y отстоит от x ровно на n позиций вправо.

Казалось бы, такое чисто геометрическое отношение не имеет особого лингвистического смысла. Так естественно думать ввиду того, что в русском языке порядок слов сравнительно свободен. (Кстати, это связано с тем, что в русском языке имеется богатая система окончаний, достаточно полно показывающих связи слов в предложении. Поэтому русский язык может позволить себе роскошь меньше заботиться о порядке слов, чем, скажем, английский.) Однако и в

---

*) Отметим, что термин «множество» здесь не вполне уместен, поскольку не существует общепринятого соглашения, что считать словами русского языка.

**) Но, как во всех лингвистических формальных моделях, здесь возможны исключения: сноски нарушают линейность расположения слов в тексте и тем самым совершенность порядка.

русском языке порядок слов не вполне произволен с точки зрения грамматики и смысла текста. Например, отрывок «возьмем такое четное число, что...» не переделывается в отрывок «возьмем четное такое число, что...». В качестве второго примера укажем, что в русском языке существуют такие слова (предлоги), которые в тексте всегда предшествуют соответствующим существительным.

Второй важный тип отношений — это грамматическое управление. Управление — это отношение, обобщающее такие привычные типы отношений, как «определяемое — определение», «сказуемое — подлежащее», «сказуемое — дополнение» и т. п. Например, известные из грамматики утверждения «предлог „к“ требует дательного падежа», «предлог „о“ управляет предложным падежом» и т. д. означают именно то, что тот или иной предлог управляет существительным в таком-то падеже. В последнем случае мы имеем пример так называемого обязательного управления — предлог не может «повиснуть» в правильной русской фразе без управляемого существительного. Фразу «мой коллега был в кино с» можно даже понять, счесть осмысленной, но уже никак нельзя полагать грамматически правильной.

И. А. Мельчук *) выделяет в русском языке 33 типа грамматических управлений (или отношений непосредственной доминации). Но мы здесь будем называть *управлением* объединение всех этих отношений. Управление, обозначаемое далее символом $\rightarrow$, является асимметричным отношением. Чтобы были понятны дальнейшие примеры, мы условимся, согласно сложившейся традиции, считать, что управление идет от определяемого к определению, от сказуемого к подлежащему, от предлога к существительному, от глагола к прямому дополнению, от глагола к предлогу. На основе этих соглашений и их естественных аналогов можно усвоить, как расставляются управления в конкретных текстах. (Признаемся, что есть сложные ситуации, когда разные лингвисты по-разному расставят управления в одной и той же фразе.) Ниже дается фраза с изображенным графом упра-

*) И. А. Мельчук, Автоматический синтаксический анализ, Новосибирск, Сибирское отделение АН СССР, 1964.

вления. Сначала мы приведем саму фразу с нумерацией слов, а затем уже на рис. 7.1 дадим граф управления:

« И сатана, привстав, с веселием на лике лобзанием своим
1 2 3 4 5 6 7 8 9

насквозь прожег уста, в предательскую ночь лобзавшие Христа».
10 11 12 13 14 15 16 17

(А. С. Пушкин, Соч., т. III)

Союз «и», стоящий впереди, является тем самым сомнительным случаем. Его можно было бы рассматривать здесь просто как ритмическую вставку в текст. Обратите внимание на то, что стрелки на рис. 7.1 не пересекаются друг с другом. Как мы увидим ниже, это обстоятельство отнюдь не случайно.

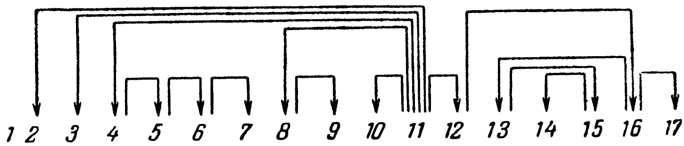


Рис. 7.1.

Транзитивное замыкание отношения управления называется *руководством* и обозначается символом $\Rightarrow$. Так, в графе на рис. 7.1 выполнено соотношение $x_{11} \Rightarrow x_7$. В силу леммы 4.7, если в графе управления нет контуров, то отношение руководства является строгим порядком. Отношение руководства — это косвенное управление, управление через промежуточные инстанции.

Третий тип отношений между вхождениями слов во фразу — это с о г л а с о в а н и е. Вообще говоря, под *согласованием* понимается наличие явно выраженных общих грамматических признаков, связывающих данную пару слов в коллектив. Например, согласование прилагательного и существительного по роду, числу и падежу. Отношение согласования мы будем обозначать символом σ. В предыдущей фразе мы имеем, например, соотношения $x_{14}\sigma x_{15}$ и $x_{15}\sigma x_{14}$, в то время как управление выполняется лишь в одну сторону: $x_{15} \to x_{14}$. Здесь видно уже одно отличие согласования от управления. Первое симметрично: определяемое и определение имеют, вообще говоря, согласованные грамматические показатели. Управление имеет направленность, оно асимметрично. Но согласование вовсе не является только «симметризацией» отношения управления. Во-первых, возможно управление без всякого согласования. Например, управление от глагола к обстоятельству типа «Вчера он уехал». Здесь согласованы (по роду и числу) только глагол и местоимение, но не наречие и глагол. Во-вторых, согласование может быть не связано ни с каким управлением.

Это обстоятельство проще пояснить не на русском тексте, а на алгебраических выражениях *). В этих выражениях «согласованы» соответствующие друг другу левая и правая скобки.

В русском языке роль скобок выполняют конструкции вида: «если..., то...»; «или..., или...» и т. п. Соответствующие друг другу парные союзы находятся в отношении согласования, но ни один из них не управляет другим.

Четвертый важный тип синтагматического отношения — это о т н о ш е н и е о д н о р о д н о с т и («быть однородными членами предложения»). Мы будем обозначать это отношение символом $\vee$. Типичный пример предложения с однородными членами:

«Швед, русский — колет, рубит, режет».

(А. С. П у ш к и н).

Здесь — два однородных подлежащих и три однородных сказуемых. Пример на однородные дополнения можно найти в других отрывках из А. С. Пушкина: «Сват Иван, как пить мы станем, непременно уж помянем трех Матрен, Луку с Петром, да Пахомовну потом». Или еще: «И твое воспоминанье заменит душе моей силу, гордость, упованье и отвагу юных дней».

Пятый тип отношений носит несколько отличный от предыдущих характер. Дело в том, что всякая фраза русского языка довольно естественно членится на коллективы. Мелкие коллективы сами входят в более крупные. Такое членение фразы на коллективы (или, как принято говорить в лингвистике, *составляющие*) обеспечивает, в частности, возможность понимания

*) Алгебраические формулы вполне естественно рассматривать как тексты некоторого искусственного языка.

фразы. Наша языковая интуиция позволяет нам довольно однозначно выделять составляющие в русской фразе. В следующем примере составляющие выделены скобками:

«(Все^{1} это^{2}) (сильно^{3} (поколебало^{4} (мою^{5} (авторскую^{6} уверенность^{7}))))».

В сущности кавычки здесь тоже играют роль скобок, выделяющих максимальную составляющую. В число составляющих мы будем включать и отдельные слова. Итак, множество $\tilde{M}$ составляющих состоит из некоторых непустых множеств вхождений слов в данную фразу. Отношение в х о ж д е н и я в с о с т а в л я ю щ у ю на множестве $\tilde{M}$ мы будем обозначать далее обычным знаком включения $\subset$. Тогда запись $y \subset \alpha_i$ обозначает: $x_j \in \alpha_i$, если $y = x_j$ — слово из фразы, и $\alpha_j \subset \alpha_i$, если $y = \alpha_i$ — составляющая этой фразы, отличная от α_i. Из определения явствует, что *вхождение в составляющую* является строгим порядком. В рассмотренном примере мы выделим следующие составляющие:

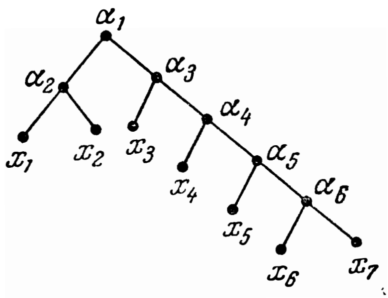


Рис. 7.2. Дерево составляющих.

$$\alpha_1 = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\},$$
$$\alpha_2 = \{x_1,\ x_2\}, \quad \alpha_3 = \{x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\},$$
$$\alpha_4 = \{x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\},$$
$$\alpha_5 = \{x_5,\ x_6,\ x_7\}, \quad \alpha_6 = \{x_6,\ x_7\}.$$

Граф для редукции данного отношения изображен на рис. 7.2. Обратите внимание на то, что этот граф является несимметричным деревом, которое наиболее сильно ветвится вправо. Это обстоятельство есть проявление языкового правила, а не случайное свойство примера.

* * *

Система отношений между элементами фразы (словами и составляющими) описывает формальным образом синтаксическую структуру фразы. Выбирая различные наборы содержательно определяемых отношений и описывая их формальные свойства, мы получаем ту или иную формальную модель синтаксической структуры фразы. До того, как говорить дальше о конкретных отношениях и их свойствах, полезно уточнить, что мы можем ожидать от формального описания лингвистических объектов и отношений между ними. Типичная ситуация в математической лингвистике может быть описана следующим образом. Мы исходим из некоторого класса однотипных лингвистических объектов (например, из совокупности фраз русского языка). Обычно каждый из этих объектов естественным образом расчленяется на элементы, т. е. его можно рассматривать как множество элементов определенного типа. Так, фразу можно рассматривать как множество вхождений слов (или слов и составляющих). Слово можно, в свою очередь, рассматривать как состоящее из морфем: корней, суффиксов, приставок, окончаний. Обычно мы, используя знание языка и его грамматики, умеем не только выделить элементы, составляющие данный лингвистический объект, но и установить между этими элементами некоторые отношения. Например, мы умеем указать управления во фразе, выделить согласования, однородные члены и составляющие.

Мы можем выделить некоторые, инвариантные относительно замены объекта, свойства этих отношений, т. е. свойства, которыми одноименные отношения обладают для любого объекта из выбранного класса. Например, отношение следования является для некоторого достаточно широкого класса фраз русского языка совершенным порядком.

Итак, нас интересуют отношения, которые могут быть более или менее однозначно определены на любом из лингвистических объектов, принадлежащих некоторому классу, и те свойства этих отношений, которые выполнены (вообще говоря) для любого объекта из этого класса.

Иными словами, когда мы употребляем словосочетание «Отношение управления», то мы имеем в виду класс отношений*), каждое из которых на основе

*) Это обстоятельство мы подчеркнули, написав «Отношение» с большой буквы.

принятых соглашений определено на некоторой фразе русского языка. При этом для любой фразы русского языка определено некоторое отношение управления. Когда же мы в рамках математической лингвистики говорим о свойствах Отношения управления, то мы имеем в виду такие свойства, которые выполнены (опять-таки, вообще говоря!) для любого отношения управления в любой фразе. Например, свойство «каждое слово управляет не более, чем одним словом» выполняется в следующей фразе:

«Идёт, гудёт зелёный шум».

Однако это свойство не выполняется в очень многих других фразах, и оно, в нашем понимании, является не свойством Отношения управления, а только свойством данной фразы (или же — отношения управления в данной фразе).

Нас будут интересовать только инвариантные свойства Отношений. Однако дело обстоит не столь просто и с инвариантными свойствами. Некоторые свойства Отношений вытекают логически из их определений. Например, асимметричность управления означает просто, что мы условились считать, что управление может идти только от одного слова к другому (от сказуемого к подлежащему, но не наоборот). Свойство Отношения «входить в составляющую» быть строгим порядком проистекает из того, что это Отношение определено через включение множеств. Свойства лингвистических Отношений принципиально не могут быть незыблемыми просто потому, что носитель языка — человек — обладает свободой воли. Следовательно, он волен нарушать любое формальное правило или сознательно следовать ему. Когда мы пытаемся установить систему формальных правил, описывающих структуру языка, у нас часто возникает иллюзия, что дальнейшее развитие и уточнение этой системы когда-то в светлом будущем даст полностью адекватное описание языка. Но любая самая подробная система общих правил непрерывно нарушается живым развитием языка. Даже такое простое правило, что длина фразы не может быть слишком большой, может нарушаться. В книге современного польского писателя Ежи Анджеевского «Врата Рая» всего две фразы. Вторая из них такая: «И шли целую ночь».

Но, разумеется, текст первой фразы очень четко членится на коллективы. В частности, когда мы описываем свойства лингвистических Отношений и обнаруживаем, что эти свойства не столь просты, как казалось, то перед нами возникают два очевидных пути. Первый состоит в уточнении и поиске более сложной формулировки этих свойств *). Второй путь — попытаться по-иному определить сами эти отношения во фразе **).

Попробуем выразить эту же мысль несколько строже. Переход от лингвистики к математической лингвистике состоит в том, что классу лингвистических (наблюдаемых или мыслимых) объектов мы соотносим список Отношений и их свойств (аксиом). Этот список будем, в соответствии с имеющейся в математике терминологией, называть *Теорией*. В этой Теории Отношения являются всего лишь названиями классов наблюдаемых в лингвистике отношений. Свойства Отношений должны быть сформулированы так, чтобы они имели смысл для настоящих отношений.

Множество с заданными на нем отношениями A_1, A_2, ..., A_n называется *моделью Теории*, если установлено биективное соответствие между списком Отношений Теории и совокупностью отношений $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ и соответствующие отношения обладают всеми свойствами, предусмотренными данной Теорией.

Теория считается состоятельной для класса лингвистических объектов, если эти объекты, как множества элементов с соответствующими отношениями, в подавляющем большинстве являются моделями этой Теории. В нашем основном примере наблюдаемый лингвистический объект — это фраза русского языка.

Теория содержит пять перечисленных выше Отношений (в качестве вариантов можно рассматривать Теории, содержащие только часть этих Отношений). Свойства Отношений в этой Теории постулируются таким образом, чтобы они удовлетворялись для

*) Сюда относятся поиски обобщенных определений проективности, введение разрывных составляющих и т. п.

**) Так, существуют различные соглашения о расстановке управлений в случае однородных членов, придаточных предложений и т. п.

одноименных отношений в основной массе фраз русского языка *). (Можно строить Теорию и с таким расчетом, чтобы она обслуживала все языки мира; аксиомы такой Теории являются лингвистическими универсалиями.)

Первый путь уточнения Теории состоит в более сложной формулировке свойств Отношений с тем, чтобы они удовлетворялись на большем количестве фраз. Второй путь — в уточнении соглашений об определении отношений во фразах.

Оба эти пути относительно полезны, но настоящего решения проблемы не дают. Остается третий путь — признать, что все наши формальные Теории (формальные модели языка) являются не самодовлеющими, а только отражающими глубинные объективные свойства живого языка. Эти модели отражают какую-то языковую норму, но язык может ее нарушать ради сохранения чего-то в данной ситуации более существенного. Для языка важно не перейти некоторый допустимый предел сложности, после которого речь перестает быть понятной. Поэтому нарушения формальных законов в живой речи возникают в сущности из-за стремления языка к сохранению глубинных законов. В силу этого стремления наблюдаемые свойства лингвистических Отношений приобретают гораздо больший смысл. Они перестают быть умозрительной или эмпирической схемой, а становятся характеристикой языковой нормы, отражающей глубинные свойства языка. Закон не теряет своей объективности, но оказывается глубже, чем выражающая его Теория. Однако вне формальных Теорий мы никогда и не подойдем к пониманию лингвистических законов. Более того, чем яснее Теория, чем она более явно выражена, тем легче уяснить ее связь с глубинными законами. Когда мы понимаем истинную цену формальной Теории (модели языка), мы яснее видим, что при всех кажущихся нарушениях языковых норм глубинные законы языка чрезвычайно устойчивы, а попытки их нарушить приводят к невосполнимым потерям.

---

*) Подчеркнем, что моделью языка (в том смысле, как это понимают лингвисты) является Теория, а моделями Теории (в математическом смысле) служат, в частности, лингвистические объекты, моделируемые этой Теорией!

Здесь напрашивается аналогия с глубинными нравственными законами. Ввиду очевидной условности любой формальной системы морали может показаться, что здесь вообще нет априорных законов, а существуют только созданные людьми соглашения. Однако в сфере нравственных законов действует эффект компенсации, о котором Вл. Соловьев выразился так: «Человек может не исполнить своей нравственной обязанности, но тогда он неизбежно теряет свое нравственное достоинство».

* * *

После этих небольших общих рассуждений перейдем к описанию формальных свойств введенных выше классов отношений.

1. Следование. Об этом отношении нельзя сказать ничего другого, кроме того, что оно есть совершенный строгий порядок. Ясно, что случаи типа подстрочных примечаний к середине фразы, подстрочных или надстрочных пометок к отдельным словам нарушают совершенность (линейность) порядка, но являются теми самыми исключениями, которыми следует пренебречь в формальной модели.

2. Управление. В нормальном случае отношение управления обладает следующими свойствами:

1. Если выполнены соотношения $x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n$ $(n > 2)$, то невозможно $x_1 \to x_n$ (антитранзитивность).

2. Существует единственный элемент x, для которого соотношение $y \to x$ не выполнено ни при каком y.

3. Для всякого x существует не более одного такого y, что $y \to x$.

Из свойства 1 вытекает, что отношение управления асимметрично и его граф не содержит контуров. Лемма 4.7 позволяет тогда заключить, что транзитивное замыкание отношения управления (отношение руководства) является строгим порядком. Из условий 2, 3 можно вывести, что руководство является древесным порядком.

Нарушений свойства 1, по-видимому, не отмечалось в реальных фразах, т. е. руководство всегда является строгим порядком. Однако нарушение древесного порядка для руководства может возникнуть по причинам нарушений свойств 2 и 3. По существующим соглашениям вершиной графа управления может быть только сказуемое, т. е. лишь сказуемое во фразе может никем не управляться. Остальные члены предложения всегда имеют старшего (управляющего) в этой фразе. Но, когда во фразе имеются два однородных сказуемых, условие 2 автоматически нарушается. Так как, с другой стороны, подлежащее управляется всеми сказуемыми, при этом нарушится и условие 3. Это можно увидеть на следующем отрывке из стихотворения А. С. Пушкина:

«Всех чаще мне она приходит на уста и падшего
1 2 3 4 5 6 7 8 9

крепит неведомою силой».
10 11 12

На рис. 7.3 показан граф управления для этой фразы; отклонение от древесности проявляется в том,

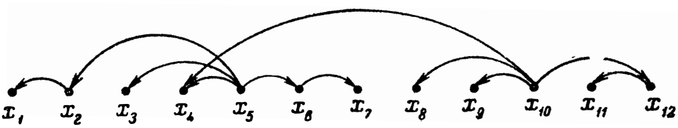


Рис. 7.3. Недревесная структура руководства.

что подлежащее «она» имеет два управляющих слова. (Стрелка управления $10 \to 8$ поставлена условно, чтобы избежать изолированных вершин.) Наблюдаемое пересечение стрелок (которое ниже мы назовем отклонением от проективности) связано не только с нарушением древесной структуры руководства, но и с нарушением естественного порядка слов ради поэтического ритма. При нормальном порядке: «Она приходит мне на уста всех чаще...» пересечения стрелок исчезнут. Отметим, что и при отклонении от древесности граф обычно остается связным.

3. Согласование. Это отношение симметрично и антирефлексивно *). В общем случае оно не транзитивно. Хороший пример нетранзитивности согласований дает фраза из следующего за этим абзаца: «...во фразе могут быть выделены группы, каждая из которых содержит...». Здесь согласованы пары

*) Поскольку автору кажется неестественным полагать слово согласующимся с самим собой. Возможны, разумеется, и иные соглашения.

«которых» — «группы» (по числу) и «группы» — «каждая» (по роду), но не согласована пара «которых» — «каждая».

4. Однородность. Это отношение симметрично и транзитивно. Будем считать, что слово, не входящее в группу однородных, не однородно и к самому себе, т. е. что однородность есть свойство группы, а не отдельного слова. Тогда во фразе могут быть выделены группы, каждая из которых содержит по несколько однородных членов, а остальные не входят ни в одну из групп.

5. Вхождение в составляющие. Уже из определения следовало, что вся фраза есть (максимальная) составляющая. Это дает нам условия:

1. Для всякого $x \in \tilde{M}$ существует такое y, что либо $y \subset x$, либо $x \subset y$ *).

2. Существует единственный элемент, который не входит ни в какую составляющую.

Следующее содержательное лингвистическое утверждение состоит в том, что составляющие не могут частично перекрываться. Они либо не содержат общих элементов, либо одна содержит другую. В формальных терминах это означает:

3. Если $x \subset y$ и $x \subset z$, то либо $y \subset z$, либо $z \subset y$, либо $y = z$.

К этим свойствам можно добавить

4. Антирефлексивность.

5. Транзитивность,

вытекающие из определения строгого порядка.

Эти пять условий означают, что отношение «входить в составляющую» является древесным порядком. Этот лингвистический факт — возможность представления любой фразы в виде дерева составляющих — явился основой для создания серии формальных моделей (начиная с наиболее известной порождающей модели Н. Хомского), описывающих процесс «порождения» фразы языка путем последовательной подстановки вместо каждой составляющей содержащихся в ней составляющих или слов русского языка.

Подчеркнем важное обстоятельство, которое иной раз забывается. Свойство текста расчленяться в де-

---

*) Если фраза состоит больше чем из одного слова (*Прим. ред.*)

рево составляющих есть первичный лингвистический факт, полученный в результате осмысления конкретных лингвистических наблюдений, а не следствие принятой модели порождения. Наоборот, создание моделей порождения текстов стало возможным только после осознания того, что текст естественно членится на составляющие и это членение обладает древесным порядком. После этого можно уже искать различные формальные интерпретации этого факта и строить всевозможные модели порождения (кроме модели Н. Хомского можно указать на реляционные грамматики Ирены Беллертовой, матричные грамматики С. Абрахама, диспозиционные грамматики В. Б. Борщева и Ю. А. Шрейдера, грамматики с управлением Э. Д. Стоцкого). В. Б. Борщев обратил внимание на то, что и в формальных грамматиках, не описывающих процесса порождения (имеются в виду так называемые окрестностные грамматики В. Б. Борщева), возникает естественная структура составляющих. Мы подчеркиваем данное обстоятельство именно потому, что в результате изучения математической лингвистики возникает часто впечатление о том, что возможность членения на составляющие есть исключительно свойство языков, описываемых порождающими подстановочными грамматиками. На самом же деле ситуация в точности противоположна — возможность описать естественный язык порождающей грамматикой есть следствие существования составляющих в языке и некоторых гипотез о составляющих, в которые мы здесь не имеем возможности вникать.

* * *

До сих пор мы рассматривали только свойства, присущие каждому из отношений отдельно, но более содержательны свойства, связывающие различные отношения. К изучению таких свойств мы и приступим.

Следование и управление

Отношения следования и управления во фразе нормально связаны так называемым условием проективности. Фраза называется ***проективной***, если дважды упорядоченное множество $\langle M, <, \Rightarrow \rangle$ удовлетворяет условию Π_1 (здесь M — множество вхождений слов во фразу, $<$ — отношение следования, $\Rightarrow$ — отношение руководства; см. § 4 главы IV).

На рис. 7.4 изображены два примера проективных фраз.

Условимся рисовать граф управления так, чтобы слова во фразе располагались на прямой в их естественном порядке, задаваемом отношением следования,

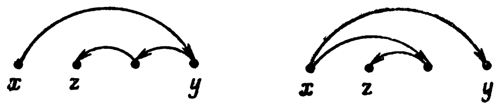


Рис. 7.4. Свойство проективности.

а все стрелки, изображающие управления, проводились бы с одной стороны этой прямой (над ней). При таком соглашении часто используют иное определение проективности. Фраза называется *проективной*, если дважды упорядоченное множество $\langle M, <, \Rightarrow \rangle$ удовлетворяет условию Π_2. Так как, согласно теореме 4.18, условие Π_2 влечет условие Π_1, то проверка непересечения стрелок и непокрытия максимальных элементов гарантирует проективность в обоих смыслах.

Из теоремы 4.19 следует, что в случае, когда руководство образует древесный порядок, оба определения проективности равносильны. В случае недревесной структуры, изображенной на рис. 7.3, мы имеем пример непроективной фразы (в обоих указанных смыслах).

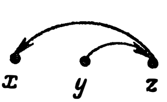


Рис. 7.5. Квазипроективная структура.

Фраза называется *квазипроективной*, если стрелки управления можно провести так, чтобы они не пересекались.

На рис. 7.5 изображена квазипроективная, но не проективная фраза. В этой фразе выполнены соотношения $z \rightarrow x$ и $x < y < z$, но не выполнено $z \Rightarrow y$.

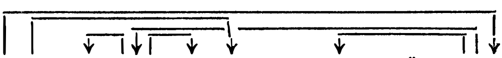
Удобную формулировку условия проективности можно получить еще следующим образом. Условимся проводить дополнительную стрелку управления от знака препинания, отмечающего конец фразы, к сказуемому. Фразу*) можно назвать *проективной*, если пополненный указанным способом граф управления можно нарисовать без пересечения стрелок. В самом деле, последнее условие равносильно тому, что основные стрелки управления не дают пересечений и путь к корню дерева не перекрыт накрывающей стрелкой.

Существует и четвертый вариант определения проективности. Пусть отношение руководства является деревом. Фразу можно назвать *проективной*, если выполняется условие $П_3$. Из теоремы 4.20 вытекает, что при сделанном допущении это определение проективности равносильно предыдущим.

В этом варианте определения виден содержательный смысл слова «проективность»: отмеченные точки должны беспрепятственно проектироваться на горизонтальную прямую, лежащую выше всех точек, а отрезки должны не перепутываться при таком проектировании.

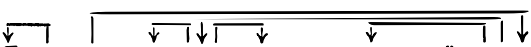
К сожалению, в некоторых лингвистических работах это определение приводится неточно. Так, в книге Ю. Д. Апресяна «Идеи и методы современной структурной лингвистики» (Москва, «Просвещение», 1966, стр. 248) опущено условие непересечения отрезков. Но тогда, как показывает пример на рис. 4.12, фраза может быть непроективной в смысле первых двух определений. В частности, фраза «Читал человек раскрытую веселый книгу» имеет как раз ту структуру управлений, что дана на рис. 4.12. Однако по определению Ю. Д. Апресяна ее пришлось бы счесть за проективную.

Приведем еще пример непроективной структуры из А. Блока:



Решал все тот же я мучительный вопрос.

Ясно, что такой порядок слов возник из-за внутренней ритмики стиха. В нормальном для прозы порядке слов и нормальной прозаической ритмике все вполне проективно:



Я решал все тот же мучительный вопрос.

*) Отношение руководства которой является деревом (*Прим. ред.*)

К счастью для поэтов, русский язык дает широкие возможности образования непроективных структур, но не создает их без особой на то надобности. Впрочем, в современной русской литературной прозе попадаются неслыханно непроективные структуры.

Однородность, следование и управление

Можно сформулировать несколько простых свойств, связывающих порядок слов во фразе, отношение управления и отношение однородности. Предположим, что выполнено соотношение $x \vee y$. Тогда, вообще говоря, справедливы следующие утверждения:

1) Если $z \to x$, то $z \to y$ и z не находится между x и y.

2) Если $x \to z$ и $y \to z$, то z не находится между x и y.

3) Если $x < y$, $x \to z$ и $y \to w$, то $z < w$, $x < w$, $z < y$.

Первое свойство означает, что однородными членами управляют одни и те же слова и что управляющее находится по одну сторону от обоих управляемых:

Большой зеленый карандаш лежит на столе.

Второе свойство означает, что общее управляемое находится по одну сторону от однородных управляющих:

Дрессированные львы танцуют и поют.

Третье свойство состоит в том, что области управления однородных слов не перепутываются:

Красный мак и белый ландыш стоят в вазе.

Можно показать, что, при указанных условиях на однородности, во фразе можно ввести разумную скобочную структуру *).

*) К. И. Бабицкий, О дистрибутивной теории предложений с сочиненными частями, НТИ, 1967, № 6.

Составляющие и следование

Основное условие, которое лежит в основе всех подстановочных грамматик, состоит в неразрывности составляющих. Составляющая α называется *неразрывной*, если из того, что $x \in \alpha$, $y \in \alpha$ и z находится между x и y, следует $z \in \alpha$.

Неразрывная составляющая занимает целый отрезок во фразе. Представление о том, что все составляющие неразрывны, лежит в основе упоминавшихся выше подстановочных порождающих грамматик. На самом деле в русском языке (а также английском, немецком и др.) существуют и разрывные составляющие. Например, сложное глагольное время легко приводит к разрывным составляющим: «Он *будет* завтра *читать* лекцию». Такой порядок слов возможен в русском языке, а для немецкого языка вынесение инфинитива в конец фразы является нормой. Можно такие случаи рассматривать как трансформации нормальных предложений или же по-иному выделять составляющие во фразе, не считая обязательным включение основного и вспомогательного глагола в одну составляющую.

Гипотеза о том, что все составляющие неразрывны, равносильна следующему. Возьмем каждую составляющую в скобки. В силу неразрывности составляющих на каждую из них уйдет одна пара скобок. В силу древесности структуры составляющих и неразрывности для двух пар скобок возможны лишь такие варианты расположения [( )], [ ]( ) и невозможно расположение вида ([ )]. Такая расстановка скобок называется *правильной скобочной структурой*.

Пусть $\tilde{M}$ — множество составляющих некоторой фразы. Отношение следования $<$ во фразе индуцирует на $\tilde{M}$ строгий порядок, определяемый следующим образом. Будем полагать $\alpha_i < \alpha_j$, если для любых представителей $x_i \in \alpha_i$ и $x_j \in \alpha_j$ выполнено $x_i < x_j$. Аналогично устанавливается отношение следования между словом x_i и составляющей $\alpha_j : x_i < \alpha_j$, если x_i лежит левее любого представителя из этой составляющей, и $\alpha_j < x_i$, если x_i лежит правее составляющей. Ясно, что отношение следования на $\tilde{M}$ уже не является совершенным порядком, т. к. при $\alpha_i \subset \alpha_j$ не выполняется ни $\alpha_i < \alpha_j$, ни $\alpha_j < \alpha_i$. Более того, отношение следования выполняется на тех и только тех парах, для которых не выполняется отношение включения.

Нетрудно видеть, что множество $\tilde{M}$ с отношениями $\sqsubset$ и $<$ является упорядоченным деревом (в смысле § 4 гл. IV). Глубина этого дерева является важной лингвистической характеристикой фразы. На рис. 7.6

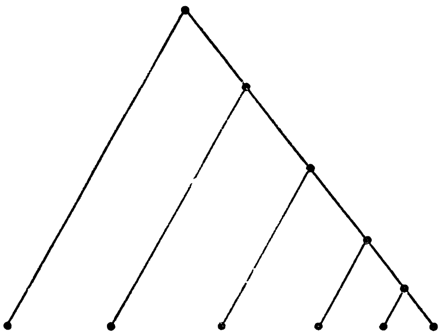


Рис. 7.6.

приведено дерево составляющих для простой фразы. Глубина этого дерева или, как часто говорят в математической лингвистике, *глубина* этой *фразы* равна единице.

Эту характеристику фраз впервые ввел В. Ингве, обративший внимание на тот факт, что глубина реальных фраз в языке ограничена. Он же высказал гипотезу, что ограниченность глубины связана с ограниченностью человеческой памяти, сказывающейся в процессе порождения речи или ее восприятия.

Количественная формулировка гипотезы Ингве состоит в том, что для любой фразы естественного языка глубина γ дерева составляющих ограничена:

$$\gamma \leqslant 9\,^{*}). \tag{7.1}$$

Эта гипотеза эмпирически оправдывается. Средняя глубина, посчитанная по фразам русского языка, оказывается заметно меньшей, чем 9.

---

*) Ортодоксальные лингвисты пишут вместо (7.1) неравенство

$$\gamma \leqslant 7 \pm 2.$$

Подчеркнем два важных обстоятельства. Первое из них состоит в том, что гипотеза Ингве в сущности прямо не связана с какими-то предположениями о процессе порождения речи. Она говорит только об асимметрии дерева составляющих, построенного над фразой русского или другого естественного языка. При этом не имеет никакого значения, применима ли к данному языку та или иная формальная модель порождения. Второе обстоятельство состоит в том, что в оценке (7.1) существенны не какие-либо мистические свойства числа 7*). Этой оценке можно придать следующую формулировку: глубина фразы естественного языка не выходит за пределы «средних по А. Н. Колмогорову» чисел. Напомним, что число n называется «средним по Колмогорову»**), если человек практически способен перебрать все подмножества множества из n элементов.

В отличие от числа 7***) это обстоятельство не кажется ни мистическим, ни случайным.

Если мы все же будем рассматривать схему порождения фразы в какой-либо подстановочной грамматике, то оказывается, что глубина дает оценку для минимально необходимой памяти, используемой в процессе порождения. Именно, если σ есть минимальное количество символов, которое мы обязаны хранить на каждом шаге порождающей процедуры, то можно доказать, что

$$\gamma + 1 \leqslant \sigma \qquad (7.2)$$

и для контекстно-свободной грамматики Хомского это неравенство обращается в равенство****).

Равенство $\gamma + 1 = \sigma$ для контекстно-свободных грамматик Хомского принадлежит Ингве.

Составляющие и управление

Связь между структурой составляющих и управлениями во фразе можно выразить (в нормальном

*) См. предыдущую сноску.

**) См. А. Н. Колмогоров, Автоматы и жизнь, сборник «Кибернетика ожидаемая и кибернетика неожиданная», Москва, «Наука», 1968.

***) См. сноску на предыдущей странице.

****) См. Ю. А. Шрейдер, Характеристики сложности структуры текста, НТИ, 1966, № 7.

случае) в виде следующих свойств. Пусть $S(\alpha)$ — совокупность всех слов, входящих в составляющую α. Тогда

1) Каждое $S(\alpha)$ есть дерево по отношению руководства.

2) Если α и α_1 — составляющие, то отношение управления может выполняться только для корней деревьев $S(\alpha)$ и $S(\alpha_1)$.

Иначе говоря, управление от одной составляющей к другой может передаваться только через главные элементы этих составляющих. При некоторых дополнительных условиях свойства 1) и 2) гарантируют проективность управлений. Будем говорить, что α_1 и α_2 суть *соседние составляющие*, если $\alpha_1 < \alpha_2$ (или $\alpha_2 < \alpha_1$) и не существует никакого элемента z, лежащего между ними: $\alpha_1 < z < \alpha_2$ $(\alpha_2 < z < \alpha_1)$.

Система составляющих называется *полной* *), если для любых двух несовпадающих и несоседних элементов фразы (слов) x и y существуют такие соседние составляющие α_1 и α_2, что $x \in S(\alpha_1)$ и $y \in S(\alpha_2)$.

Оказывается, если система составляющих полна и выполняются условия 1), 2), то фраза проективна. Это следует непосредственно из теоремы 4.21.

* * *

Остановимся еще раз на причинах, по которым в реальных фразах нарушаются описанные свойства синтаксической структуры.

Первая из них: говорящий сознательно нарушает нормальную структуру предложения, чтобы добиться выполнения какого-то иного свойства. Мы уже видели, что ради сохранения поэтического ритма часто привлекают непроективные структуры. Ингве убедительно показал, что непроективность может возникнуть и тогда, когда порядок слов, обеспечивающий проективность, ведет к нежелательному росту глубины фразы.

Другая важная причина возникновения отклонений от нормы и, в частности, от проективности со-

---

*) Легко убедиться, что полнота системы составляющих равносильна тому, что дерево составляющих *бинарно*, т. е. из каждой вершины выходит не более двух отростков.

стоит в наличии эллипсисов. Рассмотрим следующий пример непроективной фразы:

На собрание явились важные персоны и не очень.

Ясно, что это предложение является эллипсисом от следующего проективного предложения:

На собрание явились важные персоны и не очень важные персоны.

Итак, мы имеем исходное предложение с отношениями следования и управления и его гомоморфизмы в другое предложение, на котором эти отношения индуцируются как α-образы (см. § 2 гл. VI). Но мы уже видели, что при переходе к α-образам свойства отношений могут портиться. То же происходит и здесь. В некотором смысле эллипсис можно также рассматривать как своего рода компенсацию: экономится число слов в предложении за счет ухудшения синтаксической структуры.

Третья причина в сущности двойственна предыдущей. Появление однородных членов можно рассматривать как «расклеивание» некоторого исходного предложения без однородностей. В данном случае мы имеем дело с корреспонденцией исходных отношений следования и управления, при которой также портятся свойства отношений.

Проведенный анализ синтаксических структур около 11 000 английских предложений (большей частью сложных) показал, что около 500 из них являются непроективными. Подавляющее большинство этих непроективностей было связано с эллипсисами и однородными членами.

§ 2. Общее понятие текста

Как мы увидели из предыдущего параграфа, фраза естественного языка есть не просто цепочка слов, а множество с системой отношений.

С другой стороны, *текст* можно представлять составленным из слов, букв, слогов, словосочетаний и т. д. Поэтому оказывается удобным сформулировать общее понятие текста, которое годилось бы для весьма разнообразных лингвистических ситуаций.

Мы попробуем изложить здесь некоторое достаточно общее представление о понятии текста, возникшее у автора совместно с М. В. Араповым и В. Б. Борщевым из попыток единообразного подхода к различным лингвистическим объектам. Интуитивно, текст — это первичный материал лингвистического исследования. Поэтому естественно требовать, чтобы слово, фраза или последовательность фраз русского языка могли быть интерпретированы как текст с формальной точки зрения. Однако не менее естественно требовать, чтобы таблица, набор дескрипторов (ключевых слов), химическая или математическая формула также могли рассматриваться как частный случай общего понятия текста. Такое требование во всяком случае оправдано захватническими устремлениями современной лингвистики.

Представим себе теперь, что текст подвергнут предварительной формальной обработке; стоит ли считать, что теперь это не текст, но некоторый иной объект высшей (или низшей) природы? Нам представляется, что фразу с расставленными управлениями (или преобразованную каким-то другим способом) стоит рассматривать как некоторую разновидность текста. Ведь и самый классический лингвист редко имеет дело с непосредственной речью. Сама запись речи через формальные значки-буквы есть уже некоторая обработка исходного материала. Филолог, интересующийся древнерусским языком, имеет дело не столько с рукописями, сколько с печатными их публикациями, где слова расчленены, буквы стандартизованы...

Попробуем, сначала — не формально, разобраться, из каких существенных компонент слагается текст. Разумеется, текст составлен из знаков. Но еще до расстановки конкретных знаков нужно определить позиции (места), где разрешается ставить знаки, и отношения между этими местами. Следующий шаг состоит в том, чтобы осознать первоочередную роль отношений между местами. Так, структура обычного текста определяется прежде всего тем, что знаковые позиции образуют линейную последовательность, т. е. между местами определено отношение совершенного порядка. Структура таблицы определяется тем, что между местами в таблице существуют два отношения порядка: «горизонтальное» и «вертикальное».

Поэтому целесообразно «места» рассматривать как элементы абстрактного множества M, на котором определена система отношений. Отсюда естественно возникает

Определение 7.1. *Синтаксической схемой* $S = \langle M; A_1, \ldots, A_n \rangle$ называется множество M с заданными на нем отношениями $A_1, \ldots, A_n$.

Это понятие по существу совпадает с понятием *модели* по А. Тарскому. Важность математической теории моделей для описания лингвистических ситуаций, по-видимому, впервые четко сформулировали В. Б. Борщев и М. В. Хомяков в работе «Окрестностные грамматики и модели перевода» (НТИ, сер. 2, 1970, № 3 и № 4).

Множество M мы будем называть *несущим множеством.*

Пусть теперь зафиксировано некоторое множество $\mathfrak{A}$, которое мы будем называть *алфавитом.* Тогда отображение φ: $M \to \mathfrak{A}$ можно интерпретировать как расстановку знаков алфавита на местах: каждому месту (элементу множества M) сопоставляется некоторый знак (элемент алфавита $\mathfrak{A}$).

Мы получаем

Определение 7.2. *Текстом* $T = \langle S, \varphi \rangle$ называется синтаксическая схема S с заданным отображением φ несущего множества M в алфавит $\mathfrak{A}$.

Хотя это определение может показаться чересчур абстрактным для такого простого и, казалось бы, первоначального понятия как текст, оно в сущности только выражает в точных терминах все то, что мы обычно вкладываем в понятие текста: выбор исходного алфавита, т. е. набора простейших символов, выбор синтаксической схемы, помещение символов алфавита в различные места синтаксической схемы, отношения между различными вхождениями символов в данную синтаксическую схему. Следующий ряд примеров показывает, насколько данное определение текста является общим.

Пример 1. Алфавит $\mathfrak{A}$ есть список словоформ русского языка, S — конечное множество M с единственным отношением $<$ совершенного строгого порядка. Тогда текст — это отрезок натурального ряда с приписанными каждому номеру словоформами. Говоря менее формально, текст — это любая линейная последовательность русских словоформ, может быть, с повторениями. Иначе говоря, такой текст — это просто цепочка вида

$$x_1 x_2 \ldots x_n,$$

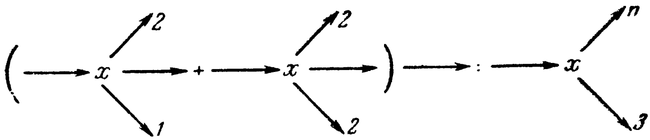
где все x_i — русские словоформы. В частности, любая фраза русского языка может рассматриваться как текст такого вида. Можно было бы также расширить алфавит $\mathfrak{A}$, внеся туда все знаки препинания и цифры.

Пример 2. Алфавит $\mathfrak{A}$ — тот же, что и раньше, но M — конечное множество с четырьмя отношениями: следования, управления, согласования и однородности — обладающими свойствами, описанными в предыдущем параграфе. Тогда текст — это последовательность русских словоформ с основными синтаксическими отношениями.

Пример 3. Пусть $\mathfrak{A}$ — кириллический алфавит, а на множестве M задан совершенный строгий порядок. Тогда текст — это конечная последовательность знаков Кириллицы. В частности, каждое русское слово можно рассматривать как текст такого вида, т. е. последовательность букв обычного русского алфавита (одного из основных современных вариантов Кириллицы).

Удобно рассматривать синтаксические схемы вида $S = \langle M; R_1, R_2, R_3 \rangle$, где M — конечное множество, каждое из отношений R_1, R_2, R_3 есть редукция отношения строгого порядка и между любыми двумя элементами множества M может выполняться только одно из этих отношений. Эти отношения имеют следующую содержательную интерпретацию: R_1 — «непосредственно следовать», R_2 — «стоять над, быть верхним индексом», R_3 — «стоять под, быть нижним индексом». С помощью таких синтаксических схем можно ввести классы текстов в двух следующих примерах:

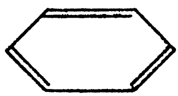
Пример 4. Пусть $\mathfrak{A}$ — алфавит, составленный из латинских и греческих букв, цифр и алгебраических знаков (скобки и знаки операций). Тогда любая алгебраическая формула может рассматриваться как текст с описанной выше синтаксической схемой. Например, формула $(x_1^2 + x_2^2) : x_3^n$ имеет синтаксическую структуру вида



где стрелками указано выполнение отношений R_1, R_2, R_3.

Пример 5. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество цифр и символов химических элементов. Текстами здесь являются обычные линейные химические формулы типа H_2O.

Пример 6. Пусть теперь алфавит $\mathfrak{A}$ состоит из текстов предыдущего вида. Синтаксическая схема имеет вид $S = \langle M, R_1, R_2, \ldots \rangle$, где R_1, R_2, ... — отношения, интерпретируемые как типы химических связей. При этом для любой пары элементов из M может быть выполнено только одно из отношений R_1, R_2, ... Например, изображение бензольного кольца



есть синтаксическая схема с двумя типами отношений валентности. Тем самым задается класс текстов, имеющих вид структурных формул органической химии.

Здесь мы столкнулись с важной ситуацией, когда тексты одного уровня образуют алфавит для текстов следующего уровня. Впрочем, мы уже видели, что словоформы русского языка суть тексты в обычном русском (кириллическом) алфавите. Сами же словоформы могут рассматриваться как элементы алфавита, в котором записаны русские предложения. (Кстати, и сами буквы можно рассматривать как тексты в алфавите Морзе из точки и тире.)

Пример 7. Пусть алфавит $\mathfrak{A}$ состоит из совокупности дескрипторов для некоторой области науки или техники (грубо говоря, *дескрипторы* — это основные термины данной области, с помощью которых можно охарактеризовать содержание некоторого документа — статьи, реферата и т. п.). Множество M не имеет никаких отношений. Тогда текст — это просто набор дескрипторов без всяких связей между ними *). Такие тексты используются в так называемых *информационно-поисковых системах без грамматики* в качестве *индексов* (или *поисковых образов*) документов, позволяющих автоматически отыскивать нужный потребителю документ.

Обсудим несколько подробней пример 2 с точки зрения традиционной лингвистической терминологии. В обычном русском тексте явно задается только одно отношение — линейный порядок слов во фразе. Итак, синтаксическая схема для обычного текста T — это конечное множество M с совершенным порядком. Текст над этой синтаксической схемой — это цепочка словоформ русского языка, т. е. текст в обычном смысле. В процессе понимания текста мы явно или неявно устанавливаем дополнительные грамматические и смысловые отношения между словами и, в частности, можем вносить в текст новые элементы (например, символы составляющих). Тем самым в процессе понимания (или в процессе автоматического анализа) образуется новый текст T' над несущим множеством $M' \supseteq M$ с заданной системой отношений (управление, согласование, однородность, вхождение в составляющую и, быть может, многие другие). Формально текст T' является также текстом в смысле нашего определения. Но лингвистический смысл текста T' отличен от смысла исходного текста T. Для лингвиста естественно было бы тексту T' присвоить специальное название (например, *проанализированный текст* или *ультратекст* или что-нибудь более красивое). Мы не будем здесь нарушать привилегии лингвистов и не будем вводить нового термина. Нам важно только отметить формальное сходство T и T' (и тот и другой суть тексты над некоторым множеством с отношениями) и различие по существу: первый есть текст, данный в непосредственном наблюдении, а второй — некоторая конструкция, описывающая (скорее всего неполно) процесс понимания (а, может быть, и порождения). Синтаксическая схема

*) Тексты с тривиальной синтаксической схемой — без отношений — называются иногда *мешками*.

текста T' определяет структуру синтаксических отношений исходного текста T, которые в исходном тексте T не выражены явно. Итак, синтаксическая структура — это текст, очищенный от конкретных слов, но с явно указанными контекстными отношениями. Иногда *синтаксической структурой* называют то, что мы обозначили T', но это не естественно. Синтаксическая структура — это не конкретный текст T', а то общее, что есть у одинаково синтаксически устроенных текстов. Например, если есть два исходных текста $T =$ «Маша ест кашу» и $T_1 =$ «Петя читает книгу», то проанализированные тексты T' и T будут различны, хотя синтаксические схемы здесь, очевидно, одинаковы.

В действительности, интересно рассматривать не отдельные тексты, а классы однотипных текстов — текстов с аналогичной синтаксической схемой и общим алфавитом. Что такое «общий алфавит», понять легко, но что такое «аналогичная синтаксическая схема» — это еще требует разъяснения. Заметим, что в каждом из рассмотренных примеров мы имели дело именно с классами текстов.

Так, в примере 1 синтаксической схемой являлось любое конечное множество с совершенным порядком. В этом примере мы фактически имели дело с некоторой знаковой системой, определяемой выбором алфавита и условием, что «места» в текстах упорядочены.

В примере 2 мы задали класс текстов тем условием, что на несущем множестве обязаны быть определены четыре отношения с фиксированными свойствами.

Теперь мы попробуем несколько точнее определить понятие знаковой системы. Напомним, что в § 1 мы условились называть *Теорией* список символов отношений и свойств этих отношений («аксиом»). Подразумевается, что свойства разрешается формулировать в таком виде, чтобы они обретали смысл, если символы отношений интерпретированы как отношения на некотором непустом множестве. Например, Теория может состоять из одного символа $<$ и «аксиом»:

1) ни для какого x невозможно $x < x$;

2) если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$;

3) для любых несовпадающих x и y выполнено либо $x < y$, либо $y < x$.

Эти аксиомы являются бессмысленными (но синтаксически правильными) фразами, пока не указана интерпретация, т. е. конкретное множество с отношением. Но как только переменные x, y, z, ... мы станем интерпретировать как элементы некоторого множества M, эти аксиомы превратятся в осмысленные утверждения, говорящие, что отношение $<$ есть совершенный строгий порядок на M.

Более точно (с точным определением понятия синтаксически правильной фразы) понятие Теории определяется в математической теории моделей.

Пусть теперь выбраны некоторая Теория и алфавит $\mathfrak{A}$.

Определение 7.3. *Знаковой системой* называется множество текстов $T = \langle S, \varphi\rangle$ с синтаксическими схемами $S = \langle M, A_1, \ldots, A_n\rangle$, у которых отношения A_1, A_2, ..., A_n взаимно-однозначно соответствуют символам отношений данной Теории и удовлетворяют аксиомам этой Теории, а φ есть отображение несущего множества M в фиксированный алфавит $\mathfrak{A}$.

Подчеркнем, что в знаковой системе зафиксированы только алфавит и Теория, а множества M могут быть разными.

Например, знаковая система может состоять из всех линейных последовательностей русских словоформ. Здесь фиксирован алфавит (множество русских словоформ), Теория (указано, что в синтаксических схемах есть единственное отношение — совершенный строгий порядок), но несущее множество, задающее длину цепочки, может быть произвольным.

Языком в математической лингвистике обычно называется некоторое множество текстов в фиксированной знаковой системе. Примером языка может служить множество таких цепочек, составленных из знаков алфавита, которые удовлетворяют определенным условиям или порождаются некоторой процедурой (т. е. описываются некоторой «грамматикой»). Если же класс синтаксических схем состоит из конечных множеств с совершенным порядком, то язык — это некоторое множество конечных цепочек, составленных из элементов алфавита $\mathfrak{A}$.

В рамках математической теории моделей знаковая система — это множество моделей некоторой теории, для которых заданы отображения в фиксированный алфавит.

Следует подчеркнуть одно очень важное обстоятельство. Когда мы рассматриваем знаковую систему естественного языка, то, как бы мы ни выбирали допустимый класс синтаксических схем, или, что равносильно, Теорию, множество реально встречающихся текстов представляет всегда очень малую долю от всех возможных текстов данной знаковой системы.

По-видимому, здесь мы сталкиваемся с принципиальным отличием лингвистических структур от привычных физических моделей. В физике мы привыкли, что все фазовые пространства, т. е. совокупности возможных состояний физической системы, устроены как гладкие многообразия в эвклидовом (или ином) пространстве. Множество всех осмысленных текстов естественного языка имеет какую-то принципиально иную геометрическую структуру, для понимания которой у нас еще не выработалась соответствующая математическая интуиция. В этом, по-видимому, коренятся многие существенные трудности описания естественных языков. Весьма вероятно, что это обстоятельство есть общая трудность для математического моделирования биологических систем.

Рассмотрим теперь множество M с заданными отношениями $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Возникает естественная проблема экономного описания этих отношений. С такой проблемой мы уже столкнулись при описании строгих порядков (на конечных множествах): оказалось, что отношение порядка можно задать с помощью редукции этого отношения.

Следующая постановка этой проблемы принадлежит К. И. Бабицкому *). Пусть отношения $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n$ обладают следующими свойствами:

1) $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

2) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ есть полное отношение.

Эти свойства означают, что для каждой пары $\langle x, y \rangle$ выполнено ровно одно соотношение xA_iy. Проблема в простейшем варианте состоит в том, чтобы определить на множестве M такие отношения $B_1, B_2, \ldots, B_m$,

*) К. И. Бабицкий, О синтаксической синонимии предложений в естественных языках, НТИ, 1965, № 6.

чтобы 1) каждое отношение B_j выполнялось ровно для одной пары элементов и 2) для любой пары x и y было однозначно определено произведение $B = B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_k}$ так, что $xA_i y$ равносильно либо xBy, либо yBx.

Простейшее решение этой проблемы состоит в том, что на множестве M любым способом устанавливается совершенный порядок, а следовательно, нумерация: $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Тогда мы полагаем $x_i B_i x_{i+1}$.

Недостаток этого решения в том, что оно определяется не самой Теорией, т. е. свойствами отношений A_i, а проводится для конкретной реализации Теории на множестве M.

Ясно, что более общее решение может быть осуществлено только в предположении каких-то существенных алгебраических свойств синтаксической схемы.

§ 3. Модели сочетаемости

В этом параграфе мы рассмотрим сравнительно частную модель, иллюстрирующую полезность рассмотрения в математической лингвистике отношений толерантности. Начнем с нескольких замечаний общего порядка.

Разработанные в математической лингвистике методы имеют известный предел применимости, обусловленный, по-видимому, ограниченностью концепций, на которых эти методы основываются. Как только нам хочется учесть при описании языка сравнительно тонкие индивидуальные свойства языковых единиц (слов, морфем, предложений), для описания которых требуется учитывать десятки и даже сотни признаков, мы вынуждены констатировать отсутствие адекватного математического аппарата. Не хватает способа описания «размытых» моделей. Так, например, существует значительная разница между математическим описанием семантических и синтаксических структур. В задачах синтаксиса всегда выделяется важное понятие *правильной* (или, как часто говорят, *отмеченной*) *структуры*. В силу этого основные задачи синтаксиса сводятся к нахождению способа удобного перечисления (порождения, распознавания) текстов с отмеченной структурой из данной знаковой системы. Аналогичные задачи могут возникать и при переходе к семантике: задание множества осмысленных текстов данного языка, задание множества фраз (текстов), имеющих тот же смысл, что и наперед указанная фраза, и т. п. Решая эти задачи с помощью готового аппарата порождающих грамматик, мы наталкиваемся на следующую принципиальную трудность: при решении синтаксических проблем часто можно с полным правом огрубить ситуацию, считая, что существует четкое разбиение всех текстов на множество отмеченных и дополнительное к нему множество неотмеченных. Однако в более тонких проблемах, в частности, в семантике, появляется «размытая» картина — наряду с текстами, безусловно осмысленными (семантически отмеченными), есть еще больше текстов, об осмысленности которых можно спорить. Причем, уменьшая от текста к тексту совсем немного степень осмысленности, мы за несколько шагов можем прийти к текстам, весьма далеким от правильно составленных. Точно так же, допуская перифразы с небольшим отклонением смысла, мы приходим за серию шагов к тексту, имеющему существенно иной смысл.

Аналогично, устанавливая смысловую близость слов или оборотов, интересно рассматривать не столько случаи полного тождества (одинаковости) смыслов (такие ситуации сравнительно бедны), сколько случаи сходства смыслов или, что то же самое, наличие достаточно большого множества общих значений.

Таким образом, при переходе к изучению семантики речь идет не просто о новой интерпретации синтаксических моделей (например, отмеченные тексты интерпретируются не как синтаксически правильные, а как осмысленные), а о новом классе «размытых» математических моделей.

Эти модели должны задавать не просто множества отмеченных текстов, а «облако» из таких множеств, так что при переходе от множества к множеству отмеченность «почти» сохраняется.

Суть дела состоит, конечно, не в том, чтобы перейти от точных синтаксических моделей к неточным семантическим. Это было бы просто отходом от принципов математической лингвистики. Речь идет о более трудной вещи: о переходе к точно задаваемым моделям, описывающим в точных терминах расплывчатость семантических явлений, без навязывания самим явлениям не присущей им излишней определенности и однозначности.

Для пояснения этого принципиального тезиса приведем аналогию из физики. В классической механике движения характеризуются точно определяемыми координатой и импульсом. Эксперименты над микрочастицами показали, что координату и импульс нельзя одновременно задавать с произвольной точностью. Можно было бы на этой основе вообще отказаться от точного математического аппарата при описании динамики микрочастиц. Но квантовая механика пошла по иному пути: был создан точный аппарат, позволяющий говорить на точном языке о возникающих неопределенностях. Этот аппарат основан на принципиально новом способе описания состояний микромира: вместо координаты и импульса вводится так называемая волновая функция, описывающая «размазанность» частицы в фазовом пространстве. Заметим, что аппарат квантовой физики сам по себе не менее точно сформулирован, чем классический.

Перейдем теперь к формальному описанию модели сочетаемости. Рассмотрим два множества M и L и соответствие φ между ними. Обозначим через $\mathfrak{M}$ график соответствия φ, т. е. множество пар $\langle x, \xi \rangle$, где $x \in M$, $\xi \in L$, а x и ξ находятся в указанном соответствии.

На множестве пар $\mathfrak{M}$ мы будем считать заданным отношение «подобнозначности», обозначаемое через τ. Запись

$$\langle x, \xi \rangle \tau \langle y, \eta \rangle$$

читается: ξ имеет относительно x значение, подобное тому, что η имеет относительно y. Относительно τ будем предполагать, что оно симметрично и рефлексивно, т. е. является отношением толерантности. Мы будем обозначать через $\langle \mathfrak{M}, \tau \rangle$ соответствующее пространство толерантности.

Рассмотрим следующий пример. Множество M состоит из основ русских существительных, а множество L из падежных окончаний. Пару $\langle x, \xi \rangle$ мы включим в график соответствия, если основа x сочетается с окончанием ξ, т. е. если в русском языке существует словоформа, полученная прибавлением к основе x окончания ξ. Грубо говоря, пара $\langle x, \xi \rangle$ — это и есть словоформа, образованная из основы x с помощью окончания ξ. Отношение $\langle x, \xi \rangle \tau \langle y, \eta \rangle$ в данном случае, по определению, означает, что словоформы $\langle x, \xi \rangle$ и $\langle y, \eta \rangle$ могут выражать один и тот же падеж. Например,

ран-а τ стол

и

стол τ книг-у,

поскольку первая пара словоформ может выражать именительный падеж, а вторая — винительный.

Однако словоформы «ран-а» и «книг-у» не могут выражать общего падежа; таким образом, отношение τ в данном случае не транзитивно.

Ясно, что этот пример можно развить для других типов основ и для других интерпретаций отношения τ (совпадения рода, числа и падежа или времени, лица и числа, или еще каких-либо комбинаций грамматических признаков).

Во всяком случае, как показывает анализ ранее приведенного примера, отношение подобнозначности τ, вообще говоря, не является транзитивным.

Вопрос о том, между какими парами фактически имеет место отношение подобнозначности, стоит вне рамок математической модели и решается информантами по соглашению.

Следующий пример состоит в том, что для слов «голос», «ветер», «игла», «течение», образующих множество M, можно образовывать пары путем приписывания эпитетов из множества $L =$ {большой, громкий, сильный, острая, бурное}. В русском языке заведомо допустимо образование осмысленных пар: бурное течение, сильный голос, острая игла, большой ветер, но сомнительны выражения вроде: бурная игла, громкий ветер. Возможны различные точки зрения на то, какие из этих пар имеют подобные (сходные) значения. Можно считать, что все пары выражают значение усиления и поэтому равнозначны. Можно считать пары типа «острая игла» и «большая игла» или «большое течение» и «бурное течение» неподобнозначными.

Можно было бы пойти с самого начала по другому пути: выделить заранее некоторые (смысловые) признаки и объявить подобнозначными те пары, в которых эти признаки можно найти. Тогда отношение τ автоматически оказалось бы транзитивным, поскольку любое отношение, определяемое как совпадение некоторой фиксированной группы признаков (попадание в общий класс), транзитивно.

Мы же принимаем противоположную точку зрения: сначала определяется подобнозначность конкретных пар (в пределах точности, принимаемой информантом), а лишь затем выясняется, можно ли подобнозначные пары («синонимы») классифицировать на группы.

Определение 7.4. Назовем *предсемьей* пару вида $\langle \varphi, \tau \rangle$, где $\varphi = \langle \mathfrak{M}, M, L \rangle$ — соответствие, а τ — отношение толерантности на $\mathfrak{M}$.

Понятие предсемьи определяет важный тип структуры, который можно наглядно изобразить следующим образом. Сопоставим элементам множеств M и L вершины некоторого графа $\mathfrak{M}$. Элемент $x \in M$ будем соединять с элементом $\xi \in L$ ребром, если x и ξ находятся в соответствии φ, т. е. если $\langle x, \xi \rangle \in \mathfrak{M}$. На множестве ребер $\mathfrak{M}$ задается толерантность τ.

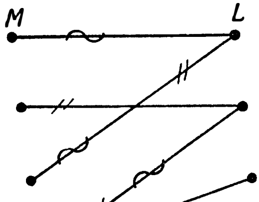


Рис. 7.7. Предсемья.

Например, имеется множество клиентов M и множество обслуживающих мастеров L. Некоторые мастера обслуживают некоторых клиентов. Про некоторые пары таких обслуживаний утверждается, что они сходны. В частности, может оказаться, что эти обслуживания можно разбить на непересекающиеся классы сходных: починка обуви, химчистка, ремонт часов и т. п. Это соответствует случаю транзитивности отношения τ.

На рис. 7.7 толерантные ребра помечены одинаковым способом. В этом примере отношение τ не транзитивно. В транзитивном случае ребра каждого типа можно выкрасить в особый цвет.

Определение 7.5. Предсемья $\langle \varphi, \tau \rangle$ называется *связной*, если а) соответствие φ всюду определено;

б) соответствие φ сюръективно;

в) множество M непусто.

Очевидно, в случае связной предсемьи множество L также непусто и соответствующий граф не имеет изолированных вершин.

Иными словами, в связной предсемье всякий клиент обслуживается хотя бы одним мастером и, наоборот, каждый мастер обслуживает хотя бы одного клиента.

Определение 7.6. Связная предсемья $\langle\varphi, \tau\rangle$ называется *семьей*, если

а) для любых $x \in M$ и $y \in M$ и любого $\xi \in L$ такого, что $\langle x, \xi\rangle \in \mathfrak{M}$, существует $\eta \in L$ такое, что $\langle y, \eta\rangle \in \mathfrak{M}$ и $\langle x, \xi\rangle \tau \langle y, \eta\rangle$.

б) для любых $\xi \in L$ и $\eta \in L$ и любого $x \in M$ такого, что $\langle x, \xi\rangle \in \mathfrak{M}$, можно найти $y \in M$ такое, что $\langle y, \eta\rangle \in \mathfrak{M}$ и $\langle x, \xi\rangle \tau \langle y, \eta\rangle$.

Свойство а) можно назвать *полнотой*: если в семье может быть выражен некоторый смысл относительно слова x, то тот же смысл можно выразить и относительно любого другого слова y.

Свойство б) можно назвать *однородностью*: если ξ выражает некоторый смысл относительно слова x, то любой другой элемент $\eta \in L$ для каких-то слов выражает тот же смысл.

Иначе говоря, все типы обслуживаний, которые имеет один клиент, имеют и все остальные. И все виды обслуживания, которые выполняет один мастер, выполняет и любой другой, хотя, возможно, для других клиентов.

Определение 7.7. Семья $\langle\varphi, \tau\rangle$ называется *примитивной*, если τ — полное отношение.

Может быть полезным исследование ситуаций, когда описание семьи сводится к заданию одной или нескольких примитивных. Такое сведéние возможно для случая транзитивности отношения τ (теорема 7.3).

Теорема 7.1. *Если в семье $\langle\varphi, \tau\rangle$ отношение τ транзитивно и существует элемент $\xi \in L$ такой, что для любых $x \in M$ и $y \in M$ из $\langle x, \xi\rangle \in \mathfrak{M}$ и $\langle y, \xi\rangle \in \mathfrak{M}$ вытекает $\langle x, \xi\rangle \tau \langle y, \xi\rangle$, то семья $\langle\varphi, \tau\rangle$ примитивна.*

Доказательство. Покажем, что для любых $\langle x, \eta\rangle \in \mathfrak{M}$ и $\langle y, \zeta\rangle \in \mathfrak{M}$ выполнено $\langle x, \eta\rangle \tau \langle y, \zeta\rangle$. По определению 7.6 найдутся такие $z \in M$ и $u \in M$, что

$\langle x, \eta\rangle \tau \langle z, \xi\rangle$ и $\langle y, \zeta\rangle \tau \langle u, \xi\rangle$. Так как по условию $\langle z, \xi\rangle \tau \langle u, \xi\rangle$ и отношение τ симметрично и транзитивно, получаем $\langle x, \eta\rangle \tau \langle y, \zeta\rangle$.

Эта теорема допускает следующую наглядную интерпретацию: если есть один элемент $\xi \in L$, выражающий для всех элементов из M общий смысл, и τ транзитивно, то все пары выражают один и тот же смысл.

Тот же вывод верен, если семью можно пополнить таким оператором ξ. Например, если к средствам естественного языка добавить формальные выражения операторов типа Мельчука—Жолковского *) и включение такого оператора в семью позволяет выразить тот же смысл для любого слова, то (разумеется, если отношение τ было транзитивно) исходная семья автоматически оказывается примитивной.

Теорема 7.2. *Если в семье $\langle \varphi, \tau\rangle$ множество L одноэлементное, то семья $\langle \varphi, \tau\rangle$ примитивна.*

Действительно, пусть $L = \{\xi\}$ и $x \in M$, $y \in M$. По определению 7.5 $\langle x, \xi\rangle \in \mathfrak{M}$ и $\langle y, \xi\rangle \in \mathfrak{M}$. Из $\langle x, \xi\rangle \in \mathfrak{M}$ по определению 7.6 вытекает существование такого $\eta \in L$, что $\langle x, \xi\rangle \tau \langle y, \eta\rangle$. Поскольку по условию теоремы $\xi = \eta$, $\langle x, \xi\rangle \tau \langle y, \xi\rangle$, ч. т. д.

Здесь мы доказали примитивность семьи $\langle \varphi, \tau\rangle$, не используя транзитивность отношения τ.

Для транзитивного отношения τ любая семья может быть представлена как несложная композиция примитивных. Разберем этот случай немного подробней. В этом случае множество пар (ребер графа) разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности.

Определение 7.8. Семья $\Sigma_1 = \langle \varphi_1, \tau_1\rangle = \langle\langle \mathfrak{M}_1, M_1, L_1\rangle, \tau_1\rangle$ называется *простым сужением* семьи $\Sigma = \langle \varphi, \tau\rangle = \langle\langle \mathfrak{M}, M, L\rangle, \tau\rangle$, если $M_1 \subseteq M$, $L_1 \subseteq L$, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ и $\tau_1 \subseteq \tau$.

Пусть в семье $\Sigma = \langle \varphi, \tau\rangle$ отношение τ транзитивно и K — некоторый класс эквивалентности для этого отношения. Тогда можно рассмотреть простое сужение $\Sigma_K = \langle\langle K, M, L\rangle, \tau_K\rangle$ семьи $\Sigma = \langle\langle \mathfrak{M}, M, L\rangle, \tau\rangle$, получаемое, если оставить только пары, входящие в класс K. Легко проверить, что Σ_K действительно является семьей. В самом деле, существует хотя бы одна пара $\langle x, \xi\rangle$, принадлежащая классу K. Но тогда по определению семьи для всякого $y \in M$ существует $\eta \in L$

*) А. К. Жолковский и И. А. Мельчук, Проблемы кибернетики, вып. 19.

такое, что $\langle x, \xi \rangle \tau \langle y, \eta \rangle$. Следовательно, $\langle y, \eta \rangle \in K$. Аналогично, для любого $\eta \in L$ существует $y \in M$ такое, что $\langle x, \xi \rangle \tau \langle y, \eta \rangle$. Таким образом, сужение Σ_K является семьей, причем, очевидно, примитивной семьей. Беря все классы эквивалентности, мы приходим к результату, формулируемому как

Теорема 7.3. *Пусть Σ — семья с транзитивным отношением τ. Тогда существует множество примитивных семей Σ_{K_1}, Σ_{K_2}, ... таких, что*

1) *каждая семья Σ_{K_i} есть простое сужение семьи Σ;*

2) *для каждой пары $\langle x, \xi \rangle \in \mathfrak{M}$ существует ровно одно K_i, для которого $\langle x, \xi \rangle \in K_i$;*

3) *если $\langle x, \xi \rangle \tau \langle y, \eta \rangle$, то пары $\langle x, \xi \rangle$ и $\langle y, \eta \rangle$ принадлежат общему K_i.*

Теорема 7.3 дает в сущности перечисление всех возможных семей с транзитивным отношением τ. Геометрически такие семьи строятся так: берутся множества M и L и строятся m графов. В каждом из графов любая вершина из M соединена с некоторой вершиной из L и любая вершина из L соединена с некоторой вершиной из M. В каждом графе ребра окрашены в свой цвет. Наконец, каждая пара $\langle x, \xi \rangle$ может соединяться только в одном из графов, т. е. каждая пара может соединяться ребром только одного цвета. Теперь берется объединение всех ребер и полагается $\langle x, \xi \rangle \tau \langle y, \eta \rangle$, если соответствующие ребра одинаково окрашены. Эта конструкция и дает общий вид транзитивной семьи. Ее одноцветные части являются составляющими примитивными семьями.

В нетранзитивном случае роль примитивных семей играют неразложимые семьи. Именно, семья $\langle \varphi, \tau \rangle$ называется *неразложимой*, если транзитивное замыкание $\hat{\tau}$ отношения τ является полным отношением. Для произвольной семьи имеет место точный аналог теоремы 7.3 с заменой термина «примитивная» на «неразложимая». Таким образом, все сводится к алгебраической проблеме описания всех неразложимых семей.

§ 4. Формальная задача теории дешифровки

В области дешифровки неизвестных письменностей и языков (и в других родственных лингвистических проблемах) явным образом возникают задачи об установлении изоморфных соответствий между множествами с отношениями.

В предыдущей главе было определено, что такое изоморфизм двух множеств, на которых задано по отношению. Пусть теперь имеется два множества, на каждом из которых определено по n отношений: $\langle M^1, A_1^1, A_2^1, \ldots, A_n^1\rangle$ и $\langle M^2, A_1^2, A_2^2, \ldots, A_n^2\rangle$. Мы говорим, что эти два множества с отношениями *изоморфны*, если существуют такие взаимно-однозначное соответствие ψ между множествами M^1, M^2 и взаимно-однозначное соответствие θ между множествами $\{A_1^1, A_2^1, \ldots, A_n^1\}$ и $\{A_1^2, A_2^2, \ldots, A_n^2\}$, что между соответствующими друг другу элементами множеств выполнены соответствующие друг другу отношения. Именно, если x^1 и y^1 принадлежат M^1 и выполнено соотношение $x^1A_i^1y^1$, то для их образов $x^2 = \psi(x^1)$ и $y^2 = \psi(y^1)$ должно выполняться соотношение $x^2A_j^2y^2$, где $A_j^2 = \theta(A_i^1)$. Обратно, из $x^2A_j^2y^2$ должно следовать $x^1A_iy^1$ *).

В задачах дешифровки часто возникает задача поиска соответствия (перевода) между двумя множествами (слов или других элементов языка) и между отношениями на этих множествах так, чтобы это соответствие устанавливало изоморфизм множеств с отношениями. В качестве примера мы приведем искусственно придуманную задачу, которая давалась на Второй традиционной олимпиаде по языковедению и математике на филологическом факультете Московского государственного университета.

Дан перечень из следующих десяти арабских слов, записанных в латинской транскрипции (знак ᶜ означает специфический согласный арабского языка): miγzal, maᶜbud, mahzan, maᶜmil, mirgab, maᶜbar, maγzul, maᶜbad, miᶜbar, maᶜmal. Это множество мы обозначим через $M_{\text{ар}}$. Множество $M_{\text{рус}}$ русских слов состоит из переводов этих слов на русский язык: кумир, рабочий, речная переправа, склад, пряжа, паром, завод, веретено, святилище (место поклонения), телескоп. Требуется для каждого из арабских слов

*) Таким образом, введенное здесь понятие изоморфизма является аналогом не понятия изоморфизма из § 1 гл. VI, а понятия k-изоморфизма. (Ср. со сноской на стр. 163). (*Прим. ред.*)

определить его русский перевод. Иными словами, требуется (не обращаясь к словарям и лицам, знающим оба языка) найти правильное соответствие:

$$\psi\colon M_{\text{ар}} \to M_{\text{рус}}.$$

Задача на первый взгляд не может иметь однозначного решения. Любое из взаимно-однозначных отображений $M_{\text{ар}} \to M_{\text{рус}}$ в равной степени может быть формальным ответом. Общее число возможных отображений равно числу перестановок из 10 элементов, т. е. $10! = 3\,628\,800$. Оказывается, простой факт, что мы имеем множества из осмысленных слов, сокращает степень неопределенности задачи в более чем три с половиной миллиона раз и позволяет получить однозначное решение задачи с высокой степенью надежности. Дело в том, что в нашем множестве русских слов отчетливо выделяются некоторые смысловые отношения. Это отношения R_1 — «относиться к общему семантическому полю» и R_2 — «выражать общий семантический класс». Оба эти отношения суть эквивалентности и определяют разбиения множества $M_{\text{рус}}$ на классы. Классы по R_1 имеют вид:

{веретено, пряжа}, {телескоп}, {паром, переправа},

{кумир, святилище}, {склад}, {завод, рабочий}.

Классы по R_2 имеют вид: {веретено, телескоп, паром} — инструмент, которым производится действие, {пряжа, кумир} — объект, над которым производится действие, {переправа, святилище, склад, завод} — место действия, {рабочий} — субъект действия. Но между соответствующими арабскими словами выполнены те же самые смысловые отношения. ***Правдоподобно предположить, что эти отношения как-то выражены во внешней форме слов.*** Посмотрим теперь, какие формальные отношения существуют между арабскими словами из $M_{\text{ар}}$. На множестве $M_{\text{ар}}$ легко выделяются два отношения: Q_1 — «иметь одинаковую структуру согласных» и Q_2 — «иметь одинаковую структуру гласных». Оба эти отношения суть отношения эквивалентности*). По отношению Q_1 мы имеем следующие

*) Разумеется, эти отношения легче выделить, если заранее знать, что в семитских языках (к этому классу языков относятся арабский, иврит, эфиопский, аккадский и многие другие жи-

классы: {miγzal, maγzul}, {mirgab}, {miʿbar, maʿbar}, {maʿbud, maʿbad}, {mahzan}, {maʿmal, maʿmil}. По отношению Q_2 получаем классы {miγzal, mirgab, miʿbar}, {maγzul, maʿbud}, {maʿbar, maʿbad, mahzan, maʿmal}, {maʿmil}.

Сравнивая числа элементов в классах разбиений множеств $M_{\text{ар}}$ и $M_{\text{рус}}$, мы видим, что отождествить следует отношения R_1 и Q_1, а также R_2 и Q_2. Теперь надо установить такое соответствие между арабскими и русскими словами, чтобы словам, входящим в общий класс по Q_1, соответствовали слова, входящие в общий класс по R_1. Аналогично, если арабские слова имеют общую структуру гласных (находятся в отношении Q_2), то их русские переводы должны выражать общий семантический класс (находиться в отношении R_2). Соберем арабские и русские слова в таблицы, где столбцы и строки обязаны соответствовать друг другу в смысле совпадения числа элементов в соответствующих классах (см. стр. 217):

Из этих таблиц видно, что изоморфное соответствие (перевод с сохранением указанных отношений) возможно только при выбранном соответствии строк (классов по R_1 и Q_1) и столбцов (классов по R_2 и Q_2).

Более того, в скобках мы указали русские и арабские слова, на которые наша таблица дает основание экстраполировать полученное соответствие. Эта процедура напоминает заполнение Менделеевым пустых мест в открытой им таблице химических элементов. Заметьте, что таблицу Менделеева тоже можно интерпретировать как установление соответствия между классами элементов с данными химическими свойствами и классами элементов с данными типами атомных весов и номеров.

В реальных задачах дешифровки трудность заключается в том, что чистого изоморфизма никогда не бывает, а нужно искать простые множества слов (слогов, букв) и их соответствия, для которых изоморфизм выполняется. Читатель теперь может сам обратиться к литературе о дешифровке Гротефендом персидской клинописи, Вентрисом — крито-микен-

---

вые и мертвые языки народов передней Азии и северо-восточной Африки) последовательности согласных и гласных имеют смыслоразличительный характер.

Гласные / Согласные	*ia*	*au*	*aa*	*ai*
mγzl	*miγzal*	*maγzul*		
mrgb	*mirgab*		(*margab*)	(*margib*)
mᶜbr	*miᶜbar*		*maᶜbar*	
mᶜbd		*maᶜbud*	*maᶜbad*	(*maᶜbid*)
mhzn			*mahzan*	
mᶜml			*maᶜmal*	*maᶜmil*

Класс / Поле	инструмент	объект	место	субъект
Прядение	Веретено	Пряжа		
Астрономия	Телескоп		(Обсерватория)	(Астроном)
Перевоз	Паром		Переправа	
Культ		Кумир	Святилище	(Жрец)
Хранение			Склад	
Производство			Завод	

ского слогового письма и др., чтобы убедиться в том, что в каждом случае речь шла о выборе изоморфизма между теми или иными лингвистическими отношениями.

§ 5. О дистрибуциях

В структурной лингвистике широко используется понятие так называемой *дистрибуции*, или *дистрибутивного отношения*. Это понятие применимо к любым элементам, образующим тексты: словам, слогам, морфемам, буквам, звукам и т. д. Мы дадим здесь основные определения, связанные с этим понятием.

Пусть задан некоторый язык $Я$, т. е. некоторое множество текстов, принадлежащих фиксированной знаковой системе. Таким образом, мы здесь понимаем язык как запас текстов определенного вида.

Определим теперь *операцию замены* $(x;\ a \to b)$ *). Пусть имеется некоторый текст $T = \langle S, \varphi \rangle$, где $S = \langle M, A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$. *Результатом замены* $(x;\ a \to b)$ мы будем называть текст $T' = \langle S, \varphi' \rangle$, где $\varphi'(y) = \varphi(y)$ для всех элементов y несущего множества M, отличных от x, и

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если} \quad \varphi(x) \neq a, \\ b, & \text{если} \quad \varphi(x) = a. \end{cases}$$

В случае $\varphi(x) \neq a$ результирующий текст T' совпадает с исходным. В этом случае замену мы будем называть *фиктивной*. Иначе говоря, замена $(x;\ a \to b)$ состоит в том, что текст в фиксированном месте x меняется: если в этом месте текста T стоял знак a, то в T' на этом же месте будет стоять b.

Например, пусть синтаксическая схема есть множество $\{1, 2, 3, 4\}$ с совершенным порядком, а текст T есть цепочка $abca$. Тогда замены

$$(1;\ a \to b),\ (2;\ a \to b),\ (3;\ a \to b),\ (4;\ a \to b)$$

дают, соответственно, следующие цепочки:

$$bbca,\ abca,\ abca,\ abcb.$$

Текст T', полученный в результате данной замены $(x;\ a \to b)$ из текста T, вообще говоря, не обязан принадлежать тому же самому языку. Поэтому, если дан алфавит $\mathfrak{A}$ и зафиксирован язык, то возможность выполнять замены некоторых знаков алфавита, не выходя за пределы этого языка, определяет *дистрибутивные отношения* на алфавите $\mathfrak{A}$, т. е. отношения, связанные со свойствами распределения знаков алфавита в тексте. Введем соответствующие определения, считая каждый раз, что язык $Я$ уже зафиксирован.

*) Здесь a и b — элементы алфавита $\mathfrak{A}$, а x — элемент несущего множества M для текста T.

Определение 7.9. Элемент a *мажорирует* элемент b, если для всякого текста $T \in Я$ результат замены вида $(x;\ a \to b)$ при любом x есть текст T', принадлежащий языку $Я$.

Это отношение мы будем обозначать через $\Rightarrow$. Легко проверить, что оно рефлексивно и транзитивно, т. е. является квазипорядком. Отношение

$$\Leftrightarrow = \Rightarrow \cap (\Rightarrow)^{-1}$$

является отношением эквивалентности (теорема 4.6) и означает *взаимозаменимость*. Именно, $a \Leftrightarrow b$ означает, что текст T и результат любой замены $(x;\ a \to b)$ одновременно принадлежат или не принадлежат языку $Я$. Действительно, соотношение $a \Leftrightarrow b$ означает, что одновременно выполнено $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow a$. Таким образом, если $T \in Я$, то и результат замены $(x;\ a \to b)$ $T' \in Я$. Если же $T' \in Я$, то результат обратной замены $(x;\ b \to a)$, совпадающий с исходным текстом T, также принадлежит $Я$.

Например, в языке, состоящем из цепочек abb, bbb, aba и bba, над алфавитом из двух элементов a и b выполнено соотношение $a \Rightarrow b$, но не выполнено $b \Rightarrow a$; таким образом, отношение $\Rightarrow$ является здесь настоящим порядком.

Определение 7.10. Элементы a и b находятся в *отношении общей дистрибуции*, если существуют такой текст $T = \langle S,\ \varphi \rangle \in Я$ и такая замена $(x;\ a \to b)$, что результат замены T' принадлежит языку $Я$, причем $\varphi(x) = a$.

Последнее означает, что замена $(x;\ a \to b)$ не фиктивна, но в позиции x действительно присутствует элемент алфавита a, заменяемый на b. Отношение общей дистрибуции симметрично, так как, если существует нефиктивная замена $(x;\ a \to b)$ в тексте T, то в результирующем тексте T' существует нефиктивная замена $(x;\ b \to a)$. Отношение общей дистрибуции, вообще говоря, не рефлексивно. Для рефлексивности этого отношения необходимо и достаточно, чтобы в алфавите $\mathfrak{A}$ не было «безработных» элементов, т. е. чтобы для всякого элемента $a \in \mathfrak{A}$ существовал текст $T = \langle S,\ \varphi \rangle \in Я$ и позиция x, для которой $\varphi(x) = a$. Тогда в этом тексте возможна замена $(x;\ a \to a)$. Таким образом, отношение общей дистрибуции является (при разумных ограничениях на язык) толерантностью.

Мы могли бы ввести другой вариант этого отношения, потребовав в определении 7.10, чтобы T не совпадал с T'. Условие $\varphi(x)=a$ было бы этим обеспечено, но никакой элемент a не был бы тогда в отношении общей дистрибуции сам с собой. Такое отношение было бы симметричным и антирефлексивным.

Наконец, важный тип дистрибутивных отношений дает

Определение 7.11. Элементы a и b находятся в *отношении дополнительной дистрибуции*, если для всякого текста $T=\langle S, \varphi\rangle \in Я$ результат T' любой замены $(x;\ a\rightarrow b)$ при $\varphi(x)=a$ не принадлежит языку $Я$.

Соотношение дополнительной дистрибуции между элементами алфавита a и b мы будем обозначать через $a \operatorname{Com} b$. Отношение дополнительной дистрибуции очевидным образом антирефлексивно *). Докажем, что отношение дополнительной дистрибуции симметрично. Пусть выполнено $a \operatorname{Com} b$, но неверно, что $b \operatorname{Com} a$. Тогда существует текст $T \in Я$ и нефиктивная замена $(x;\ b\rightarrow a)$, дающая текст $T' \in Я$. Тогда в тексте T' можно проделать нефиктивную замену $(x;\ a\rightarrow b)$, т. е. соотношение $a \operatorname{Com} b$ не выполнено. Полученное противоречие доказывает симметричность дополнительной дистрибуции. По теореме 3.1 на алфавите $\mathfrak{A}$ можно ввести такую систему признаков, что соотношение $a \operatorname{Com} b$ будет выполнено в том и только том случае, когда a и b имеют ровно один общий признак.

В качестве примера рассмотрим язык $Я$, состоящий из цепочек $abbc$, $bbbc$, $baba$, $abbb$, $abbd$ и $bbbd$. В этом языке a и b находятся в отношении общей дистрибуции, b и c также находятся в отношении общей дистрибуции, но a и c находятся в дополнительной дистрибуции. Элементы c и d взаимозаменимы: $c \Leftrightarrow d$. Элемент d находится с элементами a и b в тех же дистрибутивных отношениях, что и элемент c.

*) Если в алфавите $\mathfrak{A}$ нет «безработных» элементов. (*Прим. ред.*)

Нетрудно доказать, что справедлива следующая

Лемма 7.1. *Если элементы a и b взаимозаменимы, а элемент c находится в одном из двух дистрибутивных отношений с a, то он находится в том же отношении с b.*

Так как отношение взаимозаменимости есть эквивалентность, то можно ввести разбиение алфавита $\mathfrak{A}$ на классы эквивалентности по этому отношению. Эти классы называются *дистрибутивными классами*.

В качестве примера возьмем множество синтаксически правильных русских фраз. Это множество можно рассматривать как язык $Я_г$ над алфавитом $\mathfrak{A}$, состоящим из всех русских словоформ. Этот язык, вообще говоря, нельзя отождествлять с русским языком в классическом понимании. Так, в язык $Я_г$ нам пришлось бы включить тексты типа

«Огненный стул задумчиво преобразовывал сапоги».

С другой стороны, в $Я_г$ не войдет, скорее всего, фраза «Я для нее — все равно», хотя этот пример взят из Лермонтова («Княгиня Лиговская»).

В языке $Я_г$ дистрибутивные классы состоят из словоформ, имеющих тождественную грамматическую структуру — совпадающий набор грамматических признаков. (Мы не уточняем здесь полного списка признаков: в зависимости от того, что мы принимаем в качестве признаков, исчерпывающих грамматическую характеристику словоформы, мы можем получить разные языки $Я_г$.) Дистрибутивные классы будут состоять из множеств словоформ вида {стул, стол, столб, катер, ...} или {зеленого, большого, прекрасного, ...}. Эти множества состоят из грамматически одинаковых форм разных слов, поскольку, заменяя слово в некоторой форме на другое слово в той же форме, мы будем получать грамматически правильную фразу. Так, приведенный выше пример имеет вполне осмысленный прототип:

«Огненный столб медленно окутывал дома».

Если мы возьмем две словоформы существительных, стоящие в разных падежах, то они будут находиться, вообще говоря, в дополнительном распределении, поскольку, изменив в правильной русской фразе падеж существительного, мы получаем обычно неправильную фразу.

Формально, существуют примеры текстов, где различные падежи существительных могут заменять друг друга. Скажем, одинаково возможны фразы «Врач осматривает глаза» и «Врач осматривает глазами». Но по существу здесь взаимозаменимость происходит от незаполненности всех мест. В «полных» фразах, где явно указаны «мнимые» члены предложения, взаимозаменимости уже не будет: «Врач осматривает чем-то глаза» и «Врач осматривает глазами что-то». Аналогично, прилагательные, не совпадающие по роду, числу и падежу, также находятся в дополнительном распределении.

Представим теперь, что в некотором языке *Я* в каждом дистрибутивном классе выбран эталонный элемент. Тогда в любом тексте языка любой элемент алфавита может быть заменен эталонным элементом из того же класса. В силу взаимозаменимости любых элементов одного класса мы получим опять текст из языка *Я*. Запас таких текстов мы будем называть *эталонным*. Обратно, любой текст языка *Я* можно получить из эталонного с помощью ряда замен вида $(x;\ a \rightarrow b)$, где a и b лежат в одном классе. Итак, вместо того, чтобы указывать все множество текстов языка, достаточно задать эталонный запас и правила замены, т. е. дистрибутивные классы. Тем самым более экономно кодируется информация об языке. В сущности изучение грамматики чужого языка обычно идет путем задания эталонных текстов и дистрибутивных классов (перечня типов склонений и спряжений). Разумеется, так можно изучить лишь грамматическую структуру языка, а не фразеологические обороты, смысловую сочетаемость и оттенки значений.

М. В. Арапов заметил, что школьное обучение грамматике родного языка путем так называемой *постановки вопросов* есть в сущности обучение подстановке вопросительного местоимения вместо словоформы. Например, переход от фразы «Маша кушает кашу» к вопросительным фразам «Кто кушает кашу?» и «Маша кушает что?» есть переход к эталонным местоимениям, для которых ученик заранее запоминает название падежа.

Заметим, что можно изучать дистрибутивные отношения в фиксированной позиции текста, зафиксировав во всех предыдущих определениях значение x в заменах $(x;\ a \to b)$.

Следующие рассуждения годятся лишь для случая, когда язык $Я$ есть множество конечных цепочек (синтаксическая схема есть конечное множество с одним отношением — совершенным порядком).

Будем далее употреблять знак включения $A \subseteq B$ для того, чтобы указать тот факт, что цепочка A является *связной частью* цепочки B, т. е. что знаки алфавита, стоящие в серии последовательных позиций цепочки B, образуют цепочку A *).

Например, если $B = abcabb$ и $A = cabb$, то $A \subseteq B$.

Пусть A, B и A' — три цепочки и $A \subseteq B$. *Результатом замены* $A \to A'$ называется цепочка B', полученная из B зачеркиванием цепочки A и вписыванием на ее место цепочки A' **). При такой замене длина цепочки может измениться.

Определение 7.12. Цепочки A и A' называются *взаимозаменимыми*, если для любой замены $A \to A'$ в любой цепочке B такой, что $A \subseteq B$, результат замены принадлежит $Я$ в том и только том случае, когда $B \in Я$, и обратно: для любой замены $A' \to A$ в любой цепочке B такой, что $A' \subseteq B$, результат замены принадлежит $Я$ в том и только том случае, когда $B \in Я$.

Лемма 7.2. *Отношение взаимозаменимости цепочек является эквивалентностью.*

Доказательство предоставляем читателю.

Обозначим отношение взаимозаменимости цепочек тем же символом $\Leftrightarrow$, что и аналогичное отношение для элементов алфавита.

Множество всех «безработных» цепочек, т. е. цепочек, не входящих ни в одну цепочку языка $Я$, образует класс эквивалентности по отношению взаимозаменимости, который мы обозначим $K_{\text{бр}}$.

---

*) $A \subseteq B$ означает существование таких цепочек C, D, что цепочка B получается последовательным приписыванием к цепочке C сначала A, потом $D (B = CAD)$. (*Прим. ред.*)

**) Поскольку цепочка A может входить в цепочку B несколько раз, результат замены не однозначно определяется цепочками A, B, A'. (*Прим. ред.*)

Пример 1. Язык $Я_1$ состоит из всех цепочек вида $a^m b^n$, т. е. $\underbrace{aa \ldots a}_{m \text{ раз}} \underbrace{bb \ldots b}_{n \text{ раз}}$ $(m \geqslant 0,\ n \geqslant 0, m + n > 0)$. В данном случае имеются четыре следующих класса взаимозаменимых цепочек:

$$K_{\text{бр}},\ K_a = \{a, aa, \ldots\},\ K_b = \{b, bb, \ldots\},\ K_{ab} = \{a^m b^n\},$$

где $m > 0$ и $n > 0$.

Пример 2. Язык $Я$ состоит из всех цепочек вида $a^m b^m$. В этом случае количество классов оказывается бесконечным: $K_{\text{бр}}$, $K_n = \{a^p b^q\}$, где $q - p = n$ $(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$, а также одноэлементные классы $K_a^j = \{a^j\}$ и $K_b^i = \{b^i\}$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3 \ldots)$.

Аккуратное вычисление классов в этих примерах предоставляем читателю.

Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех конечных цепочек над алфавитом $\mathfrak{A}$. Нетрудно видеть, что если $\mathfrak{S}$ рассматривать как язык, то в нем есть ровно один класс взаимозаменимых цепочек. Множество $\mathfrak{S}$ является полугруппой относительно операции приписывания цепочек (так называемой *конкатенации*).

Результат приписывания цепочки B справа к цепочке A мы будем обозначать через AB. Например, если $A = aba$ и $B = aab$, то $AB = abaaab$ и $BA = aababa$.

Лемма 7.3. *Пусть $A \Leftrightarrow A'$ и $B \Leftrightarrow B'$. Тогда $AB \Leftrightarrow A'B'$.*

Доказательство предоставляем читателю.

Итак, результат операции приписывания разных представителей классов лежит всегда в одном и том же классе. Это означает, что можно определить операцию приписывания самих классов взаимозаменимости. Именно, пусть даны два класса K_1 и K_2. Выберем в них по представителю $A \in K_1$ и $B \in K_2$. Тогда через $K_1 K_2$ мы обозначим класс, в котором находится цепочка AB. В силу леммы 7.3 определение класса $K_1 K_2$ не зависит от выбора цепочек в классах K_1 и K_2 *).

---

*) Заметим, что класс $K_1 K_2$ может быть шире, чем множество всех цепочек AB при $A \in K_1$, $B \in K_2$.

В первом примере мы имеем следующие правила «перемножения» классов:

$$K_{бр}K_a = K_{бр}K_b = K_{бр}K_{ab} = K_{бр}K_{бр} =$$

$$= K_aK_{бр} = K_bK_{бр} = K_{ab}K_{бр} = K_{бр};$$

$$K_aK_b = K_{ab}; \quad K_bK_a = K_{бр}; \quad K_bK_b = K_b; \quad K_aK_a = K_a$$

$$K_{ab}K_b = K_aK_{ab} = K_{ab};$$

$$K_bK_{ab} = K_{ab}K_a = K_{ab}K_{ab} = K_{бр}.$$

Во втором примере «таблица умножения» имеет вид

	$K_{бр}$	K_n	K_a^m	K_b^m
$K_{бр}$	$K_{бр}$	$K_{бр}$	$K_{бр}$	$K_{бр}$
K_r	$K_{бр}$	$K_{бр}$	$K_{бр}$	K_{r+m}
K_a^j	$K_{бр}$	K_{n-j}	K_a^{j+m}	K_{m-j}
K_b^j	$K_{бр}$	$K_{бр}$	$K_{бр}$	K_b^{j+m}

Обозначим через $\mathfrak{G}_Я$ полугруппу классов, определяемую языком $Я$. Очевидно, отображение

$$\theta: \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_Я,$$

которое каждой цепочке ставит в соответствие ее класс, является гомоморфизмом свободной полугруппы $\mathfrak{G}$ на полугруппу $\mathfrak{G}_Я$ классов взаимозаменимости относительно языка $Я$.

Известно, что множество классов взаимозаменимости конечно в том и только том случае, когда язык $Я$ принадлежит к типу так называемых *автоматных языков*. Интересно выяснить, какие условия на полугруппу $\mathfrak{G}_Я$ следуют из условия, что язык $Я$ описывается некоторым типом порождающих грамматик. Е. Пущинский в дипломной работе описал класс таких полугрупп, для которых существует язык $Я$, при котором исходная полугруппа изоморфна $\mathfrak{G}_Я$.

Рассмотрим, наконец, некоторый гомоморфизм $\psi: \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_1$ свободной полугруппы $\mathfrak{G}$ в какую-то полугруппу $\mathfrak{G}_1$. Будем называть этот гомоморфизм *нормальным* относительно языка $Я$, если из того, что $A \in Я$ и $\psi(B) = \psi(A)$, следует, что $B \in Я$. Иначе говоря, если A и B имеют общий образ, то они одновременно принадлежат или не принадлежат языку $Я$. Оказывается, любой нормальный гомоморфизм продолжаем до гомоморфизма θ в полугруппу классов:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathfrak{S}_{Я} \\
& \mathfrak{S}_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Нетрудно видеть, что, наоборот, всякий гомоморфизм, для которого нарисованная диаграмма коммутативна, нормален относительно языка $Я$. В этом построении интересно, как произвольному языку $Я$ сопоставляются алгебраические объекты: полугруппа классов и нормальные гомоморфизмы свободной полугруппы. Интересно было бы исследовать, как связаны алгебраические свойства этих объектов и свойства языка. Например, что означает изоморфизм полугрупп $\mathfrak{S}_{Я}$?

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Сводка основных типов отношений и их свойств

В нижеследующей таблице мы для сравнения приводим список основных типов отношений и определяющих их свойств. Знаком + мы обозначаем, что данное свойство входит в определение данного типа отношения. Знак (+) показывает, что данное свойство отношения вытекает из остальных.

Тип отношения	Рефлексивность	Симметричность	Транзитивность	Антирефлексивность	Асимметричность	Антисимметричность
Эквивалентность	+	+	+			
Толерантность	+	+				
Строгий порядок			+	+	(+)	(+)
Квазипорядок	+		+			
Нестрогий порядок	+		+			+

2. Первоначальные сведения о множествах

Любой реальный или воображаемый объект может являться элементом каких-то множеств. Некоторые объекты сами являются множествами. Термины «элемент» и «множество» являются исходными и поэтому неопределяемыми понятиями. Тем не менее мы считаем, что интуитивный смысл этих понятий известен каждому. В сущности он определяется для нас положением этих слов в ряду почти синонимов:

Множество, совокупность, класс, группа,

коллектив, собрание, ансамбль, ряд ...

и, соответственно:

элемент, участник, представитель, член, ...

Выделяя первых представителей в этих рядах, мы тем самым декларируем, что в точных формулировках будут участвовать только они.

Мы считаем множество заданным, если для каждого объекта можно судить, является ли он элементом этого множества (принадлежит ли он этому множеству) *).

Чтобы суждение о принадлежности объекта данному множеству могло быть достаточно определенным, надо под объектом понимать нечто достаточно четко определенное и способ описания множества задавать достаточно ясным образом. Например, не стоит рассматривать множество моих воспоминаний, поскольку не очень ясно, что есть единичное воспоминание, т. е. в данном случае объекты определены весьма нечетко.

Трудно было бы рассматривать множество хороших писателей, так как вряд ли можно прийти к разумному соглашению, каких писателей следует считать хорошими. Зато не вызывает сомнения правомерность понятия «множество членов союза писателей». Для того чтобы судить, является ли данный человек объектом из этого множества, достаточно посмотреть, числится ли он в соответствующем списке.

Можно ввести точные ограничения на то, какие суждения о принадлежности объекта множеству следует признавать убедительными. Из этой идеи возникло важное понятие *разрешимого множества* **). Однако

---

*) Я имею много претензий к этой фразе, однако я не смог убедить автора. (*Прим. ред.*)

**) *Разрешимое множество* — это такое множество, для которого существует эффективный способ (алгоритм) решения вопроса, является ли тот или иной объект элементом данного множества. (*Прим. ред.*)

математики вынуждены были допустить возможность не придерживаться всегда столь строгих ограничений, поскольку в противном случае им пришлось бы отказаться от рассмотрения многих привычных множеств.

То обстоятельство, что объект x входит элементом во множество M, записывается с помощью специального символа принадлежности:

$$x \in M.$$

(Читается: «x входит в M» или «x есть элемент множества M» или «x принадлежит множеству M».)

Можно рассматривать, например, такие множества:

Множество всех натуральных чисел (число 5 входит в это множество, а числа $\sqrt{2}$ и $1 + i$, очевидно, не входят; не входит в это множество и книга «Война и мир»).

Множество всех космонавтов, летавших в космосе до сегодняшнего дня. Это множество легко задать списком. В него заведомо не входит автор данной книги, но не исключено, что входит читатель. Заметим, что определение этого множества зависит от того, когда Вы читаете эту книгу. В тот день, когда эти строки писались, это множество увеличилось на 3 элемента. (На орбиту в этот день вышли корабли «Союз-4» и «Союз-5».) Пессимизм автора, проявившийся в утверждении, что это множество легко перечислить, относится не к полетам в космос, а к судьбе книги. Вероятнее всего, к тому времени, когда в космос будут регулярно летать пассажиры, и мы не будем воспринимать каждый полет как событие, эта книжка будет уже прочно забыта.

Профессор И. И. Жегалкин любил приводить пример множества из солнца, разума и апельсина.

Еще один пример множества — это множество всех русских слов, входящих в текст этой книги. В него заведомо входят слова: «пример», «множество», «заведомо», «яичница», но не входит предмет, обозначаемый последним словом, или слово «the fake». Заметьте, что слово «яичница» употреблено в этой книге всего два раза — в этой и предыдущей фразах, но этого достаточно, чтобы считать его входящим в текст книги*). Слово «the fake» хотя и входит в текст этой книги, но не является русским.

А вот совокупность всех русских слов фактически нельзя рассматривать как множество. В самом деле, про многие слова мы заведомо можем утверждать, что они являются словами русского языка и, следовательно, входят в рассматриваемую совокупность. Но у нас нет точного определения, позволяющего для любой комбинации русских букв проверять, выражает ли она слово русского языка. Можно было бы, например, условиться считать русскими словами те и только те, которые входят в последнее издание толкового словаря. Но тогда наверняка окажется, что в печатных изданиях на русском языке используются не только «русские» слова. Некоторые из них не попали еще в словарь и имеют шанс попасть в следующие издания. Некоторые — слишком специальны, чтобы попасть в словарь. Они в сущности являются диалектизмами — территориальными (Орловский, Вологодский и т. п.) или профессиональными (научные термины специального характера). Можно принять иное определение русского слова — считать принадлежащими русскому языку все слова, встречающиеся в печатных изданиях. Но это нисколько не избавляет нас от аналогичных трудностей. Во-первых, мы будем вынуждены включать в число русских слов всевозможные транскрипции с других языков. Во-вторых, все равно останутся невключенными в состав русских слов словообразования, являющиеся «потенциально» русскими словами, т. е. построенные в соответствии с возможностями нашего языка. Например, слово «девяностопроцентник», возможно, никогда не встречалось в русской литературе. Тем не менее мы легко себе представим ситуации, когда это слово могло бы быть употреблено и воспринято как законное слово русского языка. Например,

---

*) Любое утверждение типа «слово „хлеб" не входит в текст данной книги» заведомо не верно. Тем не менее ясно, что в рассматриваемое множество входят не все слова русского языка.

Чтобы указать конкретное русское слово, не входящее в множество слов этой книги, приходится использовать обходной маневр. Так, в тексте этой книги не содержится слово, указанное в таком-то месте словаря Даля. Аналогично, в этой книге не содержатся слова, обозначающие вид транспорта.

может возникнуть движение девяностопроцентников. Или представим себе какой-либо тест, где 90% правильных ответов показывают высокий уровень интеллекта испытуемого. Тогда «девяностопроцентник» окажется похвальным словом вроде «отличника» или «ударника», Правда, Корней Иванович Чуковский вряд ли одобрил бы это языковое новшество.

А вот еще одна ситуация. В одной из научных публикаций применено выражение «читабельность текста». Слово «читабельность» образовано скрещиванием русской основы и англо-немецкого суффикса. Собственно, это словообразовательная калька с английского слова «readability». Законно ли это слово как русское? Заметим, что сходно образованный термин «сепарабельность» вполне привился в русской научной литературе.

Так или иначе, но слова руского языка образуют то, что называется *открытой совокупностью*, или *классом*, но не *множеством* в определенном выше смысле слова. В математике предпочитают употреблять термин «класс».

Вернемся к настоящим множествам. В каком случае про два множества M и M_1 следует говорить, что они совпадают? Естественно принять следующее

Определение П.1. Множества M и M_1 *совпадают*, если любой объект x, являющийся элементом множества M, входит в M_1 и, наоборот, любой элемент множества M_1 входит в M.

В дальнейшем совпадающие множества мы будем рассматривать как одно и то же множество.

В этом определении (и ряде следующих) мы неявно использовали умозрительную возможность рассуждать о любых объектах, проверяя, входят ли они в данное множество. Ведь мы не можем проверить, являются ли два множества одинаковыми, если не проверим для каждого объекта, входит ли он в каждое из этих множеств.

Вообще говоря, определения конкретных множеств строятся так, что в самом определении ограничивается класс возможных объектов. Например, когда мы говорим о множестве всех чисел, делящихся на три, то становится ясной ненужность проверки, входят ли в него слоны. Удобно это соглашение ввести явным образом и считать, что заранее зафиксирован класс допустимых объектов. Говоря далее одновременно о нескольких множествах, мы имеем в виду, что в них входят только объекты, принадлежащие этому классу. Этот класс принято называть *универсумом*. Так, в серии примеров этой книги мы строим множества, где объекты берутся из класса геральдических символов. Большинство нужных нам объектов из этого класса изображены на рис. П.1.

Впрочем, и сделанное ограничение еще не снимает всех трудностей. Рассмотрим множество M, состоящее из всех целых чисел, больших двойки. Это можно записать так:

$$M = \{3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}.$$

Пусть теперь множество M_1 состоит из всех натуральных чисел n, для которых уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет положительных целочисленных решений. Спрашивается, определили ли мы одно и то же или разные множества? Ответ на этот вопрос в точности равносилен решению знаменитой (и считающейся безнадежной) проблемы Ферма. Несмотря на то, что мы достаточно ограничили класс возможных элементов наших множеств, процедура проверки совпадения этих множеств оказывается не под силу современной науке. Заметим, что здесь дело не столько в трудности, связанной с бесконечностью множеств, сколько в том, что мы определили эти два множества существенно разными свойствами, связь между которыми нам недостаточно хорошо известна.

Чтобы это осознать, возьмем еще один пример. Пусть M — множество всех живших до настоящего времени слонов. Это множество мы можем считать заведомо конечным, так как каждый год на земле существовало конечное множество слонов и жизнь на земле существует лишь конечное время. (Весьма правдоподобно предположить, что слонов в иных звездных мирах не существует.) Пусть M_1 — множество всех млекопитающих, имеющих бивни и хобот. Сейчас нам ясно, что M_1 не совпадает с M, поскольку мамонты входят в M_1, но не входят в M. Однако до открытия первого ископаемого мамонта этот факт не был столь уж очевиден. Рассуждение становится еще яснее, если в качестве множества M_2 мы возьмем

Рис. П.1. Множество геральдических существ.

множество всех слонов и всех мамонтов. Спрашивается, совпадают ли M_2 и M_1? Вопрос опять же сводится к проблеме, существовали ли когда-нибудь млекопитающие с бивнями и хоботом, отличные от слонов и мамонтов. Ведь природа наших знаний такова, что мы можем точно знать о существовании некоего биологического вида, но никогда не можем быть уверены, что некоторый вид заведомо не существовал.

Здесь мы сталкиваемся с тем важным обстоятельством, что множество можно задавать двумя разными способами.

Первый способ (*экстенсиональный*) состоит в том, что некоторым образом «указываются» все элементы универсума, которые принадлежат данному множеству. Тогда, чтобы проверить совпадение множеств M и M_1, надо «перебрать» все элементы из M и для каждого из них убедиться в его принадлежности множеству M_1; а затем для каждого элемента из M_1 надо убедиться, что он принадлежит и множеству M. Именно такой способ рассуждений лежит в основе теории множеств.

Второй способ (*интенсиональный*) состоит в том, что множество задается неким свойством, выделяющим часть элементов универсума. При таком подходе надо проверять, что всякий элемент универсума, обладающий первым свойством, обладает и вторым. И, наоборот, что каждый элемент универсума, обладающий вторым свойством, обладает и первым. Два свойства называются *интенсионально равными* (совпадающими по содержанию), если, независимо от универсума, каждое из них влечет выполнение другого. Из предыдущего примера ясно, что свойства «иметь хобот и бивни» и «быть слоном» не совпадают по содержанию. Но если выбрать в качестве универсума класс всех живущих в нашу эпоху млекопитающих, то эти свойства определят одно и то же множество, т. е. будут *экстенсионально равными* (будут иметь одинаковый объем).

Различие в экстенсиональном и интенсиональном подходе существенно при формальном анализе смысла. Так, Р. Карнап заметил, что если мы в некотором высказывании заменим некоторое участвующее в нем свойство на другое, экстенсионально с ним совпадающее, то смысл всего высказывания может измениться. Например, возьмем предложение

«Слоны суть животные с хоботом и бивнями»

и заменим в нем второе свойство на экстенсионально совпадающее «быть слоном». Мы придем к высказыванию

«Слоны суть слоны».

Оба высказывания истинны, но первое выражает некий содержательный факт, а второе является тавтологией. Таким образом, смысл этих двух высказываний различен.

Иначе обстоит дело со свойствами, которые интенсионально совпадают. Так, свойство «быть слоном» интенсионально совпадает со свойством «быть животным, описанным в таком-то месте у Брэма». Если в первом высказывании произвести замену свойства «быть слоном» на интенсионально совпадающее с ним, то получим равносильное по смыслу высказывание:

«Животные, описанные в таком-то месте у Брэма, суть животные с хоботом и бивнями».

Трудности с подстановкой могут возникнуть в высказываниях типа: «x думает, что...»; «x полагает, что...», «x знает, что...» и т. д.

Например, высказывание:

«Мальчик знает, что слоны имеют хобот и бивни»

может быть истинным. Но высказывание:

«Мальчик знает, что животные, описанные в таком-то месте у Брэма, имеют хобот и бивни»

может быть уже ложным, так как мальчик может и не знать о существовании книги Брэма.

Интенсиональные связи между свойствами можно рассматривать как логические связи идей. Или, с несколько иной точки зрения, связи между понятиями в некоторой системе знаний. Так, в нашей системе знаний свойства «быть целым числом, большим, чем 2» и «быть таким целым положительным показателем, для которого уравнение $x^n + y^n = z^n$ не решается в целых положительных числах» различны, поскольку мы не знаем решения проблемы Ферма. В системе знаний среднеобразованного человека понятия «слон» и «животное, описанное в таком-то месте у Брэма» интенсионально совпадают. Но в системе знаний мальчика, не читавшего Брэма и не знающего о существовании такой книги, эти понятия интенсионально различны.

Экстенсиональные связи — это связи между объектами универсума. Тот факт, что интенсиональные связи между понятиями согласуются с экстенсиональными связями между обозначаемыми ими объектами есть важное свойство мира, в котором мы живем. Но более подробное обсуждение этого вопроса увело бы нас к глубоким философским проблемам, отвлекая от основного предмета настоящей книги.

Нам нужно теперь ввести некоторые основные понятия теории множеств, активно используемые в данной книге.

Множество M *содержится* во множестве M_1, если всякий элемент множества M является одновременно элементом множества M_1. Это обстоятельство символически записывается так:

$$M \subseteq M_1.$$

Например, множество M всех животных в московском зоопарке содержится во множестве M_1 всех животных, живущих в настоящее время на земле.

Из определения П. 1 вытекает следующий важный принцип, который часто используется в рассуждениях о множествах:

Для того чтобы множества M и M_1 совпадали, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одновременно $M \subseteq M_1$ и $M_1 \subseteq M$.

Если $M \subseteq M_1$, то говорят еще, что множество M есть *подмножество* множества M_1.

Так, множество слов, употребляемых на этой странице, есть подмножество множества всех слов, употребляемых в этой книге.

Так же как в арифметике для стройности изложения необходимо было ввести понятие нуля, так и в теории множеств очень полезно ввести понятие *пустого множества*. Пустое множество обозначается специальным символом $\varnothing$.

По определению любой объект универсума не входит в пустое множество $\varnothing$. Тем самым всякий элемент пустого множества содержится в любом множестве M. А значит, любое множество M содержит в качестве подмножества пустое множество:

$$\varnothing \subseteq M.$$

Кроме того, очевидно, что всякое множество M содержит в качестве подмножества самого себя:

$$M \subseteq M.$$

Если множество M содержится в M_1, но не совпадает с M_1, то мы будем писать:

$$M \subset M_1.$$

Разница между символами $\subseteq$ и $\subset$ аналогична разнице между нестрогим $\leqslant$ и строгим $<$ неравенствами в обычной алгебре.

Подмножества множества M, отличные от самого M и $\varnothing$ называются *собственными подмножествами* множества M.

На рис. П. 2 изображены собственные подмножества множества M из четырех геральдических животных: {агнец, лев, сова, единорог}. Количество всех подмножеств этого множества M (включая само M и пустое множество $\varnothing$) равно, как легко видеть, 16, т. е. 2^4.

В общем случае, если множество состоит из n элементов, то количество его подмножеств равно 2^n. Это утверждение легко доказать по индукции.

Множество из одного элемента содержит ровно два подмножества: самого себя и пустое множество. Поскольку $2 = 2^1$, при $n = 1$ наше утверждение верно. Предположим, что это утверждение верно для множества M_n из n элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Присоединив к нему элемент x_{n+1}, мы получим множество M_{n+1} из $n + 1$ элемента. Любое подмножество множества M_{n+1} либо является подмножеством множества M_n, либо состоит из подмножества множества M_n с присоединенным элементом x_{n+1}. Таким образом, общее число подмножеств множества M_{n+1} ровно вдвое больше числа 2^n подмножеств множества M_n. Иначе говоря, число подмножеств множества M_{n+1} равно

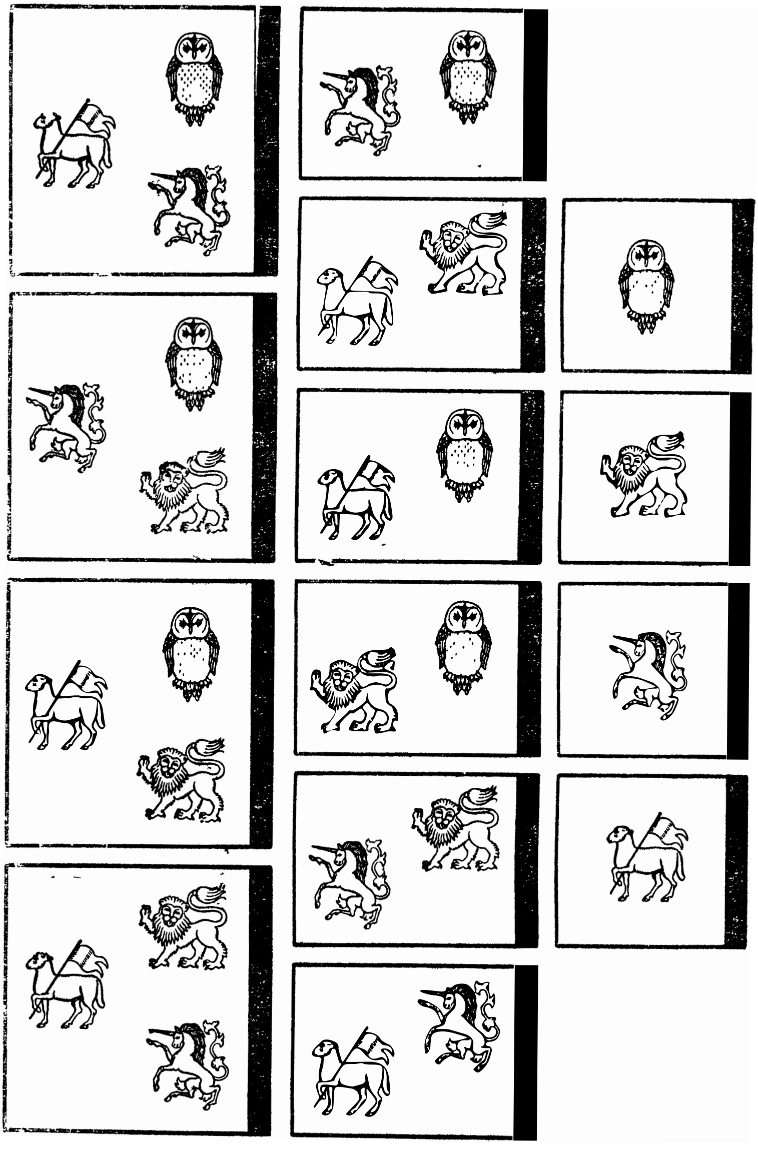


Рис. П.2. Собственные подмножества четырехэлементного множества.

$2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Итак, мы доказали, что число подмножеств множества из n элементов равно 2^n.

Это же число можно сосчитать и по-другому. Число всех подмножеств множества из n элементов, имеющих по m элементов, равно числу сочетаний C_n^m. Поэтому число всех подмножеств равно

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n,$$

где первое слагаемое учитывает пустое подмножество. Эта сумма равна 2^n, что получается в алгебре на основе бинома Ньютона, так как

$$2^n = (1 + 1)^n.$$

Множество всех подмножеств множества M имеет специальное обозначение: 2^M. В данном случае 2^M обозначает не числовую операцию возведения в степень, а «операцию» над множеством M, которая состоит в переходе от M к множеству его подмножеств. Это обозначение напоминает о доказанном выше для конечных множеств результате, что число элементов множества 2^M равно двум в степени, равной числу элементов множества M.

Рассмотрим два множества M и M_1. Множество M_2 называется *объединением* множеств M и M_1 и обозначается:

$$M_2 = M \cup M_1,$$

если оно состоит из всех элементов, которые содержатся, по крайней мере, в одном из множеств M или M_1.

Например, если M — множество четных чисел, а M_1 — множество нечетных чисел, то их объединение есть множество всех целых чисел.

Еще пример. Пусть M — множество всех произведений, в написании которых участвовал И. Ильф, а M_1 — множество произведений, одним из авторов которых является Е. Петров. Тогда объединение $M_2 = M \cup M_1$ образует собрание сочинений И. Ильфа и Е. Петрова. В этом примере M_2 состоит из элементов, входящих только в M (произведения самого И. Ильфа), из элементов, принадлежащих только M_1 (сочинения Е. Петрова или Е. Петрова с иными соавторами), и из произведений, написанных совместно.

Множество последних обозначается:

$$M_3 = M \cap M_1$$

и называется *пересечением* множеств M и M_1. Вообще, *пересечение* двух множеств — это такое множество, которое состоит из элементов, содержащихся сразу в обоих множествах.

Так, если M — множество четных чисел, а M_1 — множество чисел, кратных трем, то $M \cap M_1$ состоит из чисел, одновременно делящихся на два и на три, т. е. кратных шести.

Разностью множеств M и M_1:

$$M_2 = M \setminus M_1$$

называется множество, состоящее из всех элементов множества M, не содержащихся в M_1.

Например, если M — множество всех млекопитающих, а M_1 — множество всех обитателей морей и океанов, то $M \setminus M_1$ состоит из всех млекопитающих, ведущих наземный образ жизни. Множество $M_1 \setminus M$ состоит из всех рыб, членистоногих, морских звезд и т. д., но не содержит китов, дельфинов и т. п.

Объединение, пересечение и разность можно рассматривать как операции над множествами*), аналогично тому, как сложение, умножение, вычитание и деление суть операции над числами.

Операции над множествами обладают рядом специфических свойств. Мы перечислим наиболее важные для нас свойства этих операций, предоставляя читателю соответствующие доказательства:

1) $$(M \cup N) \cup L = M \cup (N \cup L);$$
2) $$(M \cap N) \cap L = M \cap (N \cap L).$$

Эти два правила выражают *ассоциативный закон* для объединения и пересечения и дают основание не писать скобок в выражениях вида $M \cup N \cup L$ или $M \cap N \cap L$.

3) $$M \cup N = N \cup M;$$
4) $$M \cap N = N \cap M.$$

Эти соотношения выражают *коммутативность* (пере-

*) Заметим, что «объединение» обозначает и саму операцию и ее результат, в то время как в алгебре мы привыкли различать «сложение» и «сумму», «умножение» и «произведение».

становочность) операций объединения и пересечения.

5) Если $M \subseteq N$, то $M \cup N = N$;

6) если $M \subseteq N$, то $M \cap N = M$.

Эти правила указывают, что когда один из операндов*) есть подмножество другого, то результаты объединения и пересечения равны одному из операндов.

7) $\varnothing \cup M = M$;

8) $\varnothing \cap M = \varnothing$;

9) $M \setminus \varnothing = M$;

10) $\varnothing \setminus M = \varnothing$.

Эти правила выражают важные свойства пустого множества.

11) $(M \cup N) \cap L = (M \cap L) \cup (N \cap L)$;

12) $(M \cap N) \cup L = (M \cup L) \cap (N \cup L)$.

Здесь выписаны оба *дистрибутивных закона*, справедливых для теоретико-множественных операций.

13) $(M \setminus N) \cap (M \setminus L) = M \setminus (N \cup L)$;

14) $(M \setminus N) \cup (M \setminus L) = M \setminus (N \cap L)$.

Эти законы выражают *принцип двойственности* теоретико-множественных операций. Он состоит в том, что когда мы переходим от множеств к их *дополнениям* относительно некоторого множества M, то объединение и пересечение меняются ролями.

15) $(M \setminus N) \cap (M \cap N) = \varnothing$;

16) $M \setminus N \subseteq M$;

17) $(M \setminus N) \cap (N \setminus M) = \varnothing$;

18) $M \cup N = (M \setminus N) \cup (M \cap N) \cup (N \setminus M)$.

Последнее свойство означает, что объединение $M \cup N$ состоит из элементов, входящих только в M, элементов, входящих только в N, и элементов, содержащихся в обоих операндах.

---

*) Слово *«операнд»* обозначает участников операции. Например, операнды при сложении — *слагаемые*, операнды при умножении — *сомножители*.

3. Что такое модель?

На материале этой книги можно удобно проиллюстрировать очень важное для математики понятие модели. Мы подошли уже к нему вплотную в определении 7.1 (стр. 199) и в рассуждениях на стр. 184—185 (см. также стр. 203—204). Теперь мы дадим точные определения для использованных в этих рассуждениях понятий *).

Определение П. 2. *Моделью* называется кортеж

$$\mathfrak{M} = \langle M;\ R_1, \ldots, R_m \rangle,$$

где M — некоторое множество, а $R_1, \ldots, R_m$ — отношения на этом множестве (не обязательно — бинарные).

Пример 1. Упорядоченное множество есть модель $\langle M, < \rangle$ с одним (бинарным) отношением порядка.

Пример 2. Пространство толерантности есть модель, в которой задано единственное отношение (бинарное) — толерантность.

Пример 3. Дважды упорядоченное множество — модель $\langle M, <, \Rightarrow \rangle$ с двумя (бинарными) отношениями.

Пример 4. Упорядоченное дерево — это модель $\langle M, \subset, < \rangle$ с тремя (бинарными) отношениями.

На стр. 153 была рассмотрена модель с тремя (бинарными) отношениями.

В теории моделей одинаково употребительны выражения «n-местное отношение» и «n-арное отношение». Эти выражения имеют понятный смысл при натуральных n. В частности, одноместное отношение на M — это подмножество R множества M. Мы говорим, что это отношение выполнено для любого элемента из R и не выполнено для любого элемента из $M \setminus R$.

Удобно ввести еще понятие нульместного (нульарного) отношения. Задать нульместное отношение на множестве M означает просто выделить в этом множестве фиксированный элемент.

Пример (для тех, кто знает, что такое «группа»): вместо того, чтобы говорить о существовании

*) Подробнее об этих понятиях см. в книге А. И. Мальцева «Алгебраические системы», М., «Наука», 1970.

единицы в группе, можно говорить о том, что в группе задано нульместное отношение.

Предлагаем читателю сформулировать общее определение *изоморфизма* (или, как правильно отмечено в сноске редактора на стр. 214, k-изоморфизма) *моделей* (на стр. 214 соответствующее определение было дано для случая, когда все отношения бинарны).

Определение П. 3. Кортеж символов $\Sigma = \left\langle \mathfrak{R}_1^{(n_1)}, \ldots, \mathfrak{R}_m^{(n_m)} \right\rangle$, помеченных целыми числами, называется *сигнатурой*.

Сами символы $\mathfrak{R}_i^{(n_i)}$ мы будем называть *именами отношений* или (в соответствии с терминологией стр. 182—185) *Отношениями* (с большой буквы!). Мы будем говорить, что *модель* $\mathfrak{M} = \langle M;\ R_1, \ldots, R_m \rangle$ *имеет сигнатуру* Σ, если при всех i число аргументов («арность») отношения R_i равно n_i и если мы уславливаемся обозначать отношение R_i символом $\mathfrak{R}_i^{(n_i)}$.

С помощью символов, входящих в некоторую сигнатуру Σ, и операций алгебры отношений можно составлять различные формулы, которые можно затем интерпретировать как утверждения об отношениях. Точнее говоря, пока мы пишем формулы из символов сигнатуры (имен отношений), их можно понимать только как чисто формальные выражения, составленные по правилам алгебры отношений. Но, если вместо всех имен отношений подставить в эти формулы отношения от соответствующего числа аргументов, заданные на одном и том же множестве M, то эти формулы превратятся в утверждения об отношениях.

Например, пусть $\Sigma = \{\mathfrak{R}^{(2)}\}$, т. е. Σ состоит из одного имени бинарного отношения. Тогда формула

$$\mathfrak{R}^{(2)}\mathfrak{R}^{(2)} \subseteq \mathfrak{R}^{(2)} \qquad (\text{П. } 1)$$

сама по себе ничего не означает. Но, если вместо символа $\mathfrak{R}^{(2)}$ подставить в нее любое бинарное отношение R, то она будет означать условие транзитивности отношения:

$$RR \subseteq R,$$

введенное нами на стр 40 в определении 1.6. Поэтому имеет смысл говорить, что сама формула (П. 1) выражает условие транзитивности. Только она выражает это условие символически для целого класса отношений, которые можно именовать через $\mathfrak{R}^{(2)}$.

Аналогично можно принять, что условие

$$\mathfrak{R}^{(2)} = \left(\mathfrak{R}^{(2)}\right)^{-1} \qquad (\text{П. } 2)$$

выражает условие (или аксиому) симметричности.

Введем теперь следующее соглашение. Будем считать, что символ $\mathfrak{R}_0^{(2)}$ всегда интерпретируется как диагональное отношение E (отношение равенства). Иначе говоря, если в сигнатуру входит символ $\mathfrak{R}_0^{(2)}$, то ему всегда ставится в соответствие отношение равенства на соответствующей модели. Можно просто условиться, что сигнатура всегда записывается в виде кортежа, начинающегося с $\mathfrak{R}_0^{(2)}$:

$$\Sigma = \left\langle \mathfrak{R}_0^{(2)},\ \mathfrak{R}_1^{(n_1)},\ \ldots \right\rangle,$$

а модель всегда записывается в виде

$$\mathfrak{M} = \langle M;\ E,\ R_1,\ \ldots \rangle.$$

Тогда формула

$$\mathfrak{R}_0^{(2)} \subseteq \mathfrak{R}_1^{(2)} \qquad (\text{П. } 3)$$

означает условие рефлексивности для $\mathfrak{R}_1^{(2)}$. Более точно, речь идет о следующем. Если некоторая модель $\mathfrak{M} = \langle M; E, R_1, \ldots \rangle$ имеет сигнатуру $\Sigma = \langle \mathfrak{R}_0^{(2)}, \mathfrak{R}_1^{(2)} \ldots \rangle$, то формула (П. 3) есть требование рефлексивности отношения R_1. Фактически мы подошли сейчас к очень важному понятию — *аксиоматике* теории.

Пусть задана некоторая сигнатура Σ. Мы будем называть *аксиоматикой* (над этой сигнатурой) любое множество формул, составленных из символов, входящих в эту сигнатуру.

Определение П.4. *Формальной теорией* $\mathfrak{T} = \langle \Sigma, \mathfrak{A} \rangle$ называется пара из сигнатуры и некоторой аксиоматики над этой сигнатурой.

Пример 5. Пара из сигнатуры $\Sigma = \langle \mathfrak{R}_0^{(2)}, \mathfrak{R}_1^{(2)} \rangle$ и аксиоматики $\mathfrak{A}$, состоящей из формул (П.1), (П.2), (П. 3), образует формальную теорию.

Определение П. 5. Модель $\mathfrak{M} = \langle M; E, R_1, \ldots$ $\ldots, R_m \rangle$ называется *моделью теории* $\mathfrak{T} = \langle \Sigma, \mathfrak{A} \rangle$, если 1) эта модель имеет сигнатуру Σ и 2) подставив в каждую формулу аксиоматики $\mathfrak{A}$ вместо каждого символа из Σ соответствующее ему отношение из модели $\mathfrak{M}$, мы получим истинное высказывание.

Например, модель $\mathfrak{M} = \langle M;\ E,\ R_1\rangle$ есть модель теории, описанной в примере 5, тогда и только тогда, когда R_1 — отношение эквивалентности.

Если теория $\mathfrak{T} = \langle \Sigma, \mathfrak{A}\rangle$ имеет ту же самую сигнатуру и аксиоматику, состоящую из (П. 2) и (П. 3), то ее моделями будут любые пространства толерантности и только они.

Если мы при той же сигнатуре Σ выберем аксиоматику, состоящую из (П. 1) и аксиомы

$$\mathfrak{R}_1^{(2)} \cap \mathfrak{R}_0^{(2)} = \varnothing, \tag{П.4}$$

то в качестве моделей мы получим класс упорядоченных множеств.

Отметим допущенную сейчас нестрогость: мы должны были бы оговорить, что символ $\varnothing$ входит в сигнатуру и всегда интерпретируется как пустое отношение.

Рассмотрим еще теорию $\mathfrak{T} = \langle \Sigma, \mathfrak{A}\rangle$, где $\Sigma = \langle \mathfrak{R}_0^{(2)},\ \mathfrak{R}_1^{(2)},\ \mathfrak{R}_2^{(2)}\rangle$ и аксиоматика $\mathfrak{A}$ содержит аксиомы (П. 1), (П. 2) и (П. 3) для каждого из символов $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ и $\mathfrak{R}_2^{(2)}$ и еще следующую аксиому:

$$\mathfrak{R}_1^{(2)} \cap \mathfrak{R}_2^{(2)} \subseteq \mathfrak{R}_0^{(2)}. \tag{П.5}$$

Нетрудно проверить, что моделями этой теории служат множества M с парой эквивалентностей R_1 и R_2, обладающей таким свойством: если элементы x и y данного множества M входят в общий класс эквивалентности и по R_1 и по R_2, то они совпадают. Модели такого типа рассматривались нами в § 4 главы VII.

Полезно заметить, что, вообще говоря, в понятие формальной теории обычно вкладывается еще и система правил логического вывода, позволяющая из аксиом теории выводить всевозможные теоремы. Эти теоремы должны превращаться в истинные высказывания на любой модели данной теории. Мы не рассматриваем специально вопрос о правилах вывода, так как не занимаемся сравнительным анализом разных формальных систем вывода, изучаемых в метаматематике. Мы как бы молчаливо предполагаем, что способы логического вывода заранее находятся в голове человека и при этом они одинаковы *).

Так, используя привычные средства доказательства, читатель мог бы сам убедиться, что в последнем примере теории верна следующая теорема:

$$\mathfrak{R}_1^{(2)} \cap \mathfrak{R}_2^{(2)} = \mathfrak{R}_0^{(2)},$$

являющаяся усилением аксиомы (П. 5).

Теперь обратим внимание на тот факт, что мы можем легко расширить понятие теории, допустив более широкий класс формул. Иначе, оставаясь в рамках языка алгебры отношений, мы не могли бы даже сформулировать теорию, для которой моделями являются произвольные деревья. Язык алгебры отношений слишком слаб, чтобы на нем можно было определить понятие дерева. Но, если в качестве исходного языка использовать язык узкого исчисления предикатов (мы не можем здесь дать строгое описание этого языка; фактически представление о нем можно получить из книги Ю. А. Шихановича «Введение в современную математику»), то соответствующая теория легко может быть сформулирована.

Далее символы $\vee$, &, $\Rightarrow$ означают, соответственно, дизъюнкцию, конъюнкцию и импликацию, а символы $(\forall x)$ и $(\exists x)$ читаются как «для всех x» и «существует такое x, что». Пусть $\Sigma = \langle \mathfrak{R}_0^{(2)}, \mathfrak{R}_1^{(2)} \rangle$ и аксиоматика $\mathfrak{A}$ состоит из аксиом (П. 1), (П. 4) и следующих аксиом:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[((x\mathfrak{R}_1 y) \,\&\, (x\mathfrak{R}_1 z)) \Rightarrow ((y\mathfrak{R}_1 z) \vee \\ \vee (z\mathfrak{R}_1 y) \vee (z\mathfrak{R}_0 y))],$$

$$(\exists x)(\forall y)(y\mathfrak{R}_1 x).$$

Сравнивая эти аксиомы с определением 4.9, мы легко убедимся, что построенная теория $\mathfrak{T} = \langle \Sigma, \mathfrak{A} \rangle$ описывает в точности класс деревьев.

Итак, теория — это формальное описание, определяющее некий класс множеств с конкретными отношениями, в которых воплощается эта теория. В частности, формальная теория может не иметь ни единого воплощения, когда она внутренне противоре-

*) Это предположение было бы недопустимо в книге по метаматематике.

чива. Мы уже видели, как теория может иметь неизоморфные друг другу модели: например, все пространства толерантности. Бывают и такие теории, у которых все модели изоморфны друг другу. Такая теория получится, в частности, если мы возьмем аксиоматику эвклидовой плоскости.

Пусть теперь имеется некоторый класс моделей (с общей сигнатурой), для которого можно построить *полную теорию*, т. е. такую теорию, что все модели из данного класса суть модели этой теории и любая модель этой теории входит в данный класс. Такой класс называется *аксиоматизируемым классом моделей*. В сущности, это класс моделей, определяемый некими точно формулируемыми на некотором языке свойствами, а не случайное собрание моделей. Мы уже говорили, что тексты естественного языка можно рассматривать как модели. Математическая лингвистика была бы в каком-то смысле исчерпана, если бы удалось обнаружить, что тексты естественного языка образуют аксиоматизируемый класс моделей, и удалось бы построить соответствующую теорию. Скорее всего, в такой форме эта задача неразрешима.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ*)

*) Данный указатель не охватывает приложения 3.

УКАЗАТЕЛЬ СИМВОЛОВ

Юлий Анатольевич Шрейдер

РАВЕНСТВО, СХОДСТВО, ПОРЯДОК

М., 1971 г., 256 стр. с илл.

Редактор *Ю. А. Шиханович*
Техн. редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *З. В. Автонеева, Л. С. Сомова*

Сдано в набор 28/XI 1970 г. Подписано к печати 8/VI 1971 г. Бумага 84×108$^1/_{32}$. Физ. печ. л. 8. Условн. печ. л. 13,44. Уч.-изд. л. 13,05. Тираж 100 000 экз. Т-09633. Цена книги 44 коп. Заказ № 874.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете
Министров СССР, Измайловский проспект, 29.