

Mitteilungen der Preußischen  
Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin

Heft 4

# Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern

von Kreis- und Brückenpfeilerquerschnitt

Von

**Dr.-Ing. F. Eisner**

Regierungsbaumeister, Privatdozent an der Techn. Hochschule  
Berlin

Mit 63 Textabbildungen



**Berlin**  
Verlag von Julius Springer  
1929

ISBN 978-3-7091-5246-1    ISBN 978-3-7091-5394-9 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-7091-5394-9

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1929 by Julius Springer in Berlin.

# Vorwort.

## Zweck und Übersicht.

Die nachstehende Arbeit ist ein experimenteller Beitrag zur Frage des Bewegungswiderstandes von festen Körpern in Flüssigkeiten. Sie ist der erste fertige Teil eines umfangreichen systematischen Versuchsprogramms zur Ermittlung des Widerstandes von brückenpfeilerähnlichen Einbauten in offene Gerinne, wie sie mit ähnlicher Querschnittsform, aber mit anderem „Verbauungsverhältnis“, d. h. Verhältnis von eingeschränktem Querschnitt an der Einbaustelle zu ungestörtem Querschnitt auch für Stabrechen u. a. Verwendung zu finden pflegen.

Der vorliegende Teil der Untersuchungen gliedert sich in drei Teile und behandelt folgende Fragen:

In Teil I wird die Druckverteilung und die Größe des Widerstandes bei kreiszylindrischen Körpern untersucht, und zwar

A. die Druckverteilung,

B. der Widerstand bei vollkommener Tauchung, d. h. ohne Beeinflussung einer freien Oberfläche und unter Ausschaltung der Zylinderendflächen (zur Erzielung zweidimensionaler Strömung). Die unter A und B erzielten Ergebnisse stimmen mit den im Göttinger Luftkanal für aerodynamische Zwecke ausgeführten Messungen sehr gut überein und bestätigen dadurch die Richtigkeit der Messungen. Sie gehen aber hinsichtlich der Ermittlung der Druckverteilung bei hohen Kennzahlen<sup>1</sup> über das bisher Bekannte hinaus und vertiefen so die geringe Kenntnis von den Strömungsverhältnissen „oberhalb“ des plötzlichen Abfalls des Widerstandsbeiwertes, der an sich bekannt ist. Der Vergleich mit den Ergebnissen anderer Forscher ist in Abschnitt

C durchgeführt worden.

D betrifft die Beeinflussung der — wie bei einem Brückenpfeiler — vom vertikal stehenden Körper durchsetzten freien Flüssigkeitsoberfläche bei Vorhandensein einer — die Gerinnesohle vertretenden — unteren Abschlußplatte. Die Höhenschichten der gestörten Oberfläche sind am Stereoautographen ausgewertet und aufgezeichnet worden. Die Ergebnisse sind neu.

In Teil II, der wesentlich theoretischer Natur ist, ist der heutige Stand der Hydrodynamik hinsichtlich des Widerstandsproblems eines zweidimensional angeströmten Kreiszyinders dargestellt. Nach einem Überblick über alle bisherigen um Errechnung eines Widerstandes bemühten Ansätze sind vor allem die neuesten, wenngleich mathematisch nicht einfachen Überlegungen und Rechnungen von Oseen und namentlich von Zeilon möglichst durchsichtig und gedrängt mitgeteilt worden. Zeilon gelang es nämlich 1926/27 verblüffend gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zu erzielen. Schließlich wird eine Anregung zu einem Versuch gegeben, die noch bestehenden Widersprüche vielleicht zu beseitigen. Der Anhang enthält einen Auszug aus einem nach Fertigstellung der Arbeit stattgehabten Briefwechsel mit Herrn Prof. Dr. L. Prandtl, Göttingen, und ein Referat des Vortrages, den Verfasser auf der Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik im Herbst 1928 in Hamburg hielt.

Teil III beschäftigt sich bereits mit brückenpfeilerähnlichen Körpern, die teils unter Ausschaltung der Oberfläche, teils diese durchsetzend geschleppt wurden. Die Versuche sind noch nicht abgeschlossen. Das noch zu erledigende Versuchsprogramm, welches insbesondere auch die Verluste zum Gegenstand hat, die bei der Wiedererweiterung der Strömung vom ein-

---

<sup>1</sup> Über den Begriff der Kennzahl und ihr Verhältnis zur „Reynoldsschen Zahl“ s. Teil I, S. 1.

geschränkten Querschnitt auf den uneingeschränkten bei verschiedenen Verbauungsverhältnissen und verschieden starker „Plötzlichkeit“ der Erweiterung (d. h. Pfeilerform) auftreten, wird im einzelnen genau mitgeteilt<sup>2</sup>.

Alle Versuche sind im Wasser angestellt. Wie man aus der Abb. 1<sup>3</sup> ersehen kann, ist das Verhältnis der Zähigkeiten von Wasser und Luft bei Vornahme der Versuche im Wasser der Erreichung großer Reynoldsscher Zahlen<sup>4</sup> günstiger als in Luft; ebenso ist man bei Vorhandensein eines großen Versuchstanks mit der Körpergröße ziemlich frei, so daß schon bei mäßigen Schleppgeschwindigkeiten große Reynoldssche Zahlen bequem erreichbar sind. Dies ist der Grund, weshalb die Druckverteilung in Gebieten untersucht werden konnte, die anderen Forschern bisher nicht zugänglich waren<sup>5</sup>.

Die Durchführung der Versuche in der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau erstreckt sich über eine lange Reihe von Jahren. Die ersten Versuche führte im Jahre 1913 auf Anregung von Herrn Oberbaurat Prof. Dr.-Ing. e. h. H. Krey Herr Dr.-Ing. L a c m a n n aus; die letzten Versuche sind erst vor kurzem vom Verfasser ausgeführt worden. Insbesondere ist die systematische Verarbeitung der Versuchsergebnisse und ihr Vergleich mit der Theorie erst in der letzten Zeit vom Verfasser durchgeführt worden. Hierüber wurde auszugsweise im Jahre 1925 auf der Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Danzig berichtet; wiederum nur ein kurzer Auszug aus diesem Bericht ist in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1925, S. 486, erschienen.

Hiermit werden nunmehr die ausführlichen Messungen an Kreiszyindern, ihr Vergleich mit der Theorie und die ersten Messungen an Brückenpfeilern der Öffentlichkeit übergeben.

Verfasser ist insbesondere Herrn Oberbaurat Prof. Dr.-Ing. e. h. H. Krey zu besonderem Dank verpflichtet, der die Ausführung der Versuche zielgebend und beratend beeinflußt und die Auswertung und Niederschrift der Arbeit veranlaßt und zum Teil vorbereitet hat.

Berlin, im Januar 1929.

**Der Verfasser.**

---

<sup>2</sup> Aus der vorliegenden Arbeit und dem mitgeteilten weiteren Versuchsprogramm wird ersichtlich, daß dem Problem „Stau durch Brückenpfeiler“ hier in der Weise nachgegangen wird, wie es Krey in seiner Arbeit: Berechnung des Staues infolge von Querschnittsverengungen, Zentralbl. der Bauverw. 1919, S. 472—475 angegeben hat.

<sup>3</sup> Die neuesten Werte verdanke ich Herrn Dr. Erk von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, Berlin.

<sup>4</sup> Definiton der Zähigkeit und der Reynoldsschen Zahl s. S. 1.

<sup>5</sup> Vgl. jedoch Ermisch: Strömungsverlauf und Druckverteilung an Widerstandskörpern in Abhängigkeit von der Kennzahl, Abhandl. aus dem Aerodynam. Institut Aachen, Heft 6.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>I. Druckverteilungs- und Widerstandsmessungen an umströmten Kreiszyllindern . . . . .</b>	<b>1</b>
A. Druckverteilungsmessungen . . . . .	1
1. Kreiszyllinder von $2a = 50$ mm äußerem Durchmesser . . . . .	2
2. Kreiszyllinder von $2a = 200$ mm äußerem Durchmesser . . . . .	3
B. Widerstandsmessungen an Kreiszyllindern bei vollkommener Tauchung . . . . .	11
1. Glatte Zylinder . . . . .	11
2. Ein rauher Zylinder . . . . .	16
C. Vergleich der Druckverteilungs- und Widerstandsmessungen mit Ergebnissen von anderer Seite . . . . .	17
D. Messungen an lotrechten, die freie Oberfläche durchsetzenden Kreiszyllindern	21
1. Vorbemerkung . . . . .	21
2. Zylinder von 200 mm Durchmesser . . . . .	22
3. Der Zylinder von 400 mm Durchmesser . . . . .	29
4. Bemerkung . . . . .	29
<b>II. Stand der Hydrodynamik hinsichtlich des Widerstandsproblems eines angeströmten sehr langen Kreiszyllinders (ebenes Problem) . . . . .</b>	<b>30</b>
A. Der Widerstand in reibungsloser Flüssigkeit . . . . .	31
1. Potentialtheorie; D'Alembertsches Paradoxon . . . . .	31
2. Umströmter Halbkörper in unbegrenztem Medium . . . . .	32
3. Diskontinuierliche Potentialbewegung; symmetrisch angeströmtes, vorn kreisförmig gewölbtes Hindernis (krumme Platte) mit Helmholtz-Kirchhoffschen Diskontinuitätsflächen und Totwasser . . . . .	33
4. Kreiszyllinder mit anschließender Kármánscher Wirbelstraße . . . . .	35
5. Jacobs empirischer Ansatz für ein un stetiges Potential, 1921 . . . . .	37
B. Der Widerstand in zäher Flüssigkeit (erster Teil) . . . . .	38
1. Die „vollständigen“ Grundgleichungen der Theorie der Flüssigkeitsbewegung mit Reibung	38
2. Flüssigkeit mit „kleiner Reibung“ im Sinne der Prandtlschen Theorie . . . . .	39
3. Die Stokesschen Gleichungen der „langsamen Bewegung“; das „Stokessche Paradoxon“; Oseens Gedanke der Berücksichtigung der „halbquadratischen Glieder“ 1910 und Noethers Einwand 1911 . . . . .	39
C. Der Widerstand in zäher Flüssigkeit (zweiter Teil). Angenäherte Lösung der „erweiterten Stokesschen Gleichungen“ für das zweidimensionale stationäre Problem des Kreiszyllinders (sog. „Lambische Lösung“ 1911) . . . . .	41
1. Die Ausgangsgleichungen . . . . .	41
2. Umformung der Gleichungen und Partikularlösungen nach Lamb . . . . .	43
3. Bemerkung zur Oseenschen Lösung . . . . .	44
4. Zweiter Lösungsansatz im Anschluß an Oseen . . . . .	45
5. Vergleich beider Lösungen . . . . .	46
6. Angenäherte Befriedigung der Randbedingungen am Zylinder . . . . .	46
7. Werte von $u$ , $v$ , $p$ am Zylinder und Berechnung des Widerstandes . . . . .	47
D. Oseens „asymptotische“ Theorie der Bewegung von Flüssigkeiten mit verschwindend kleiner Zähigkeit, dargelegt für den zweidimensionalen Fall eines stationär bewegten Kreiszyllinders und Oseen-Zeilons Druckverteilung an der Zylinderoberfläche 1924. . . . .	48
1. Der Inhalt der „asymptotischen Theorie“ . . . . .	48
2. Durchführung der asymptotischen Diskussion im vorliegenden Sonderfall . . . . .	50
3. Zurückführung auf ein Potentialproblem . . . . .	52
4. Lösung des Problems . . . . .	53

	Seite
E. Zeilons „verbesserte“ Berechnung des Kielwasserdruckes in der asymptotischen Widerstandstheorie 1926/27 . . . . .	56
1. Vorbemerkung . . . . .	56
2. Kurze Darlegung der Zeilonschen Weiterführung der Theorie, soweit sie für die folgende Widerstandsrechnung gebraucht wird und das Verständnis des Oseenschen Vorgehens vertieft	56
3. Schlußfolgerung aus Ziffer 2 . . . . .	58
4. Bemerkung zur Oseenschen Theorie . . . . .	59
5. Einführung einer modifizierten Primärströmung . . . . .	59
6. Einführung von Gleitintervallen . . . . .	61
7. Bemerkung zur Einführung von $U(y)$ als Gesamtgeschwindigkeit des Wirbelabflusses relativ zum Körper an der Rückseite gemäß Ziffer 5 und kleiner Gleitintervalle gemäß Ziffer 6	61
8. Druckverteilung im Grenzfall verschwindender Gleitintervalle (rein Oseensche Strömung) .	61
9. Druckverteilung und Widerstand bei Annahme endlicher Gleitintervalle . . . . .	62
10. Zeilons Kurve III, starke Gleitung. Fast völlige Übereinstimmung mit den experimentellen Werten bei hohen Kennzahlen . . . . .	65
F. Ausblick . . . . .	66
1. Vorschlag zur Vereinigung der „asymptotischen“ und der Grenzschichttheorie . . . . .	66
2. Vorschlag zur Vereinigung der klassischen Theorie der Diskontinuitätsflächen und der Grenzschichttheorie . . . . .	67
Anhang: Ein Briefwechsel mit Prof. Dr. L. Prandtl . . . . .	68
Physikalisches zur Vereinigung der Grenzschichttheorie mit der asymptotischen Widerstandstheorie	71
<b>III. Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern mit brückenpfeilerähnlichem Querschnitt</b>	<b>73</b>
A. Allgemeines . . . . .	73
B. Widerstandsmessungen an Brückenpfeilern, die die freie Flüssigkeitsoberfläche lotrecht durchsetzen . . . . .	74
1. Ermittlung des Widerstandes des Abschlußbleches . . . . .	74
2. Widerstandsmessungen an den Pfeilerformen I bis VI . . . . .	76
3. Oberflächenwillen . . . . .	76
4. Diskussion der Widerstandsbeiwerte . . . . .	86
C. Widerstandsmessungen an Zylindern mit brückenpfeilerähnlichem Querschnitt bei vollkommener Tauchung . . . . .	86
D. Ein Ähnlichkeitsversuch bei ausgeschalteter Oberfläche . . . . .	93
E. Einige Schlußfolgerungen . . . . .	94
F. Das weitere Versuchsprogramm. . . . .	95
1. Versuche mit Brückenpfeilern bei freier Flüssigkeitsoberfläche . . . . .	96
2. Versuche unter Ausschaltung der freien Oberfläche . . . . .	96
3. Energieverlust bei der mehr oder weniger plötzlichen Wiedererweiterung . . . . .	97
4. Brückenpfeilereinbauten im offenen Glasgerinne . . . . .	98

## Berichtigungen.

S. 13, Unterschrift zu Abb. 13	lies: $W = \zeta \cdot F \cdot \frac{\gamma U^3}{2g}$ anstatt: $\varrho \cdot F \cdot \frac{\gamma U^2}{2g}$ .
S. 22, Z. 13 von oben	lies: in anstatt: im.
S. 32, Z. 2/3 von oben	lies: $ b $ anstatt: $b $ .
S. 71, Z. 16 von unten	lies: 19. IX. anstatt: 19. X.
S. 71, Fußnote 110	lies: Abb. 45 anstatt: Abb. 44.
S. 72, in der Tabelle, Spalte 2, rechts Z. 4	lies: am Körper anstatt: der Körper.
S. 95, Z. 9 von oben	lies: 0,05 anstatt: 0,5.

# I. Druckverteilungs- und Widerstandsmessungen an umströmten Kreiszyklindern.

## A. Druckverteilungsmessungen.

Die Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, besitzt außer kleineren Versuchsrinnen verschiedener Größe eine große Schlepprinne von 150 m Länge<sup>1</sup>, rund 4,20 m Tiefe und 8,20 m oberer Breite. In dieser Schlepprinne wurden in aufrechter Lage am Schleppwagen gehaltene, glatte, kreiszylindrische Hohlkörper mit verschiedenen Geschwindigkeiten quer zur Zylinderachse durch das ruhende Wasser der Rinne geschleppt. Die etwa 1,00 m lange Meßstrecke jedes Zylinders lag an dessen unterem Ende und war unten und oben je durch ein horizontales, dünnes, nach außen zugeschärftes Blech begrenzt (s. Abb. 2). Dies bewirkte am unteren Ende die Ausschaltung einer sonst eintretenden Umströmung der Zylinderendfläche und oben, wo das Blech stets wenige Zentimeter (im Ruhezustand etwa 10 cm) unter dem Wasserspiegel lag, die Ausschaltung der Beeinflussung der Oberfläche (Wellen, Ansaugen von Luft neben und hinter dem Zylinder u. ä.). Man durfte hiernach erwarten, daß der Strömungsvorgang in der Mitte der Meßstrecke der ebenen Anströmung eines sehr langen Zylinders entsprach und wesentlich nur von Zähigkeitskräften beeinflusst war. Er mußte sich daher — von Rauigkeitseinflüssen abgesehen — in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl  $\frac{2a \cdot U}{Z}$  bzw. von der Kennzahl<sup>2</sup>  $U \cdot 2a \cdot \rho_K$  einwandfrei erfassen lassen. Hierbei ist  $2a$  der Zylinderdurchmesser,  $U$  die Schleppgeschwindigkeit,  $Z$  die durch den Newtonschen Ansatz für die innere Zähigkeitsspannung in Flüssigkeiten  $\tau = -Z \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dU}{dn}$  definierte Zähigkeitszahl ( $\gamma$  = spez. Gewicht der Flüssigkeit,  $g$  = Erdbeschleunigung,  $\vec{n}$  = Richtung der Normalen auf dem zu der Spannung  $\tau$  gehörigen Flächenelement, also  $\frac{dU}{dn}$  = Geschwindigkeitsgefälle

Tabelle 1.

°C	sek/m <sup>2</sup>
0	$\rho_K = 0,68$
5	0,79
10	0,92
13,2	1,00
15	1,05
20	1,19
25	1,32
30	1,45
50	2,14
100	3,87

in Normalenrichtung) und für Wasser  $\rho_K = \frac{1,2}{10^6 Z} \cong 1 \text{ sek/m}^2$  für mittlere, in der Natur häufig vorkommende Temperaturen (s. Tabelle).

Die Versuchseinrichtung zur Messung der Druckverteilung längs eines Horizontalschnittes der Zylinder war außerordentlich einfach. Die Messung des Druckes erfolgte in der Mittelebene

<sup>1</sup> Die Rinne ist inzwischen auf rd. 200 m verlängert worden.

<sup>2</sup> Es hat sich — nach Kreys Vorgang in der Hydraulik als sehr praktisch erwiesen, an Stelle der Reynoldsschen Zahl die durch Vervielfältigung mit  $\frac{1,2}{10^6}$  aus dieser hervorgehende Kennzahl  $U \cdot 2a \cdot \rho_K$  einzuführen, weil  $\rho_K$  (vgl. Abb. 1 und die obige Tabelle) für übliche Temperaturen rund den Wert 1 sek/m<sup>2</sup> besitzt. Dadurch ist bei Angabe von  $2a$  in m,  $U$  in m/sek in sehr schnell zu ermittelnder und anschaulicher Weise durch Bildung von  $2a \cdot U$  ein sehr handliche Werte annehmender „Kennwert“ der Strömung (entsprechend etwa dem „Kennwert  $E$ “ der Aerodynamik) festgelegt ( $2aU \cong E$ : 13000 bis 14000, bei mittleren Temperaturen). In dieser Arbeit, die gleichzeitig den praktischen Wasserbau und die mehr theoretische Strömungslehre betrifft, werden Kennzahl und Reynoldssche Zahl nebeneinander benutzt werden. Mit Rücksicht auf die im theoretischen Teil II erforderliche Bezeichnungsweise ist hier die Geschwindigkeit mit  $U$  und nicht, wie üblich, mit  $V$  bezeichnet worden.

zwischen den beiden genügend weit voneinander entfernten Abschlußplatten. Zu diesem Zweck war die metallische Zylinderwandung in der Mittelebene mit kleinen Löchern sauber durch-

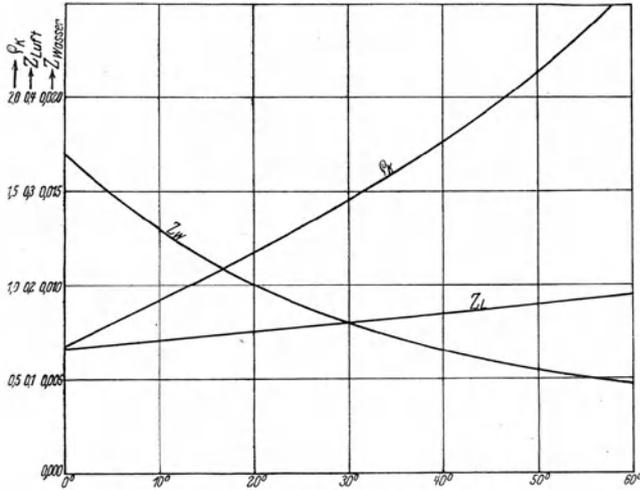


Abb. 1. Kinematische Zähigkeit  $Z$  von Luft und Wasser in  $\text{cm}^2/\text{sek}$  und Beiwert  $e_K = \frac{1,2}{10^6 Z}$  in  $\text{sek}/\text{m}^2$  für Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur in Celsiusgrad.

bohrt. Von jedem Loch führte durch das Innere des Zylinders ein angelötetes dünnes Metallröhrchen (Messing) mit Schlauchansatz über einen Paragummischlauch auf die Plattform des Schleppwagens zu je einem Rohr eines Glasmanometers mit Röhren von 5 mm lichter Weite. An diesem konnte während der Schleppfahrt Über- oder Unterdruck gegenüber dem Druck in einem anderen Manometerrohr abgelesen werden, welches mit einem festen Wasserniveau in einem Vergleichstopf in Verbindung stand.

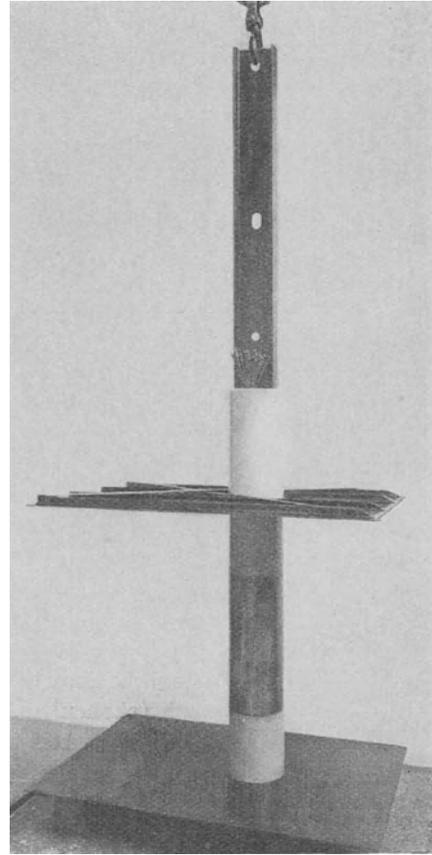


Abb. 2. Kreiszyylinder an durchgesteckter Profileisen-Halttestange mit Abdeckplatten (ohne Holzfutter, vgl. Abb. 4).

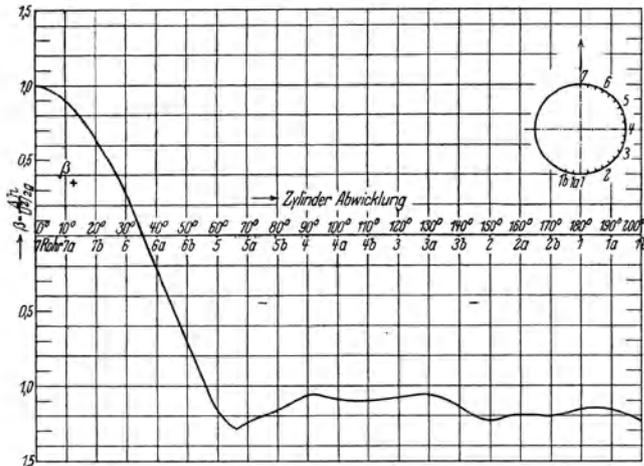


Abb. 3. Druckverteilung an einem Kreiszyylinder von 50 mm Durchmesser bei der Bewegung im Wasser senkrecht zur Achse. Druckhöhen angegeben im Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe:  $\beta = \frac{\Delta h}{U^2/2g}$ , gemittelt für Geschwindigkeiten von etwa  $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{3}{4}$  m/sek.

### 1. Kreiszyylinder von $2a = 50$ mm äußerem Durchmesser.

Der Zylinder war ein gezogenes Messingrohr und besaß in der Mittelebene auf der einen Hälfte seines Umfanges 7 feine Löcher, die um je  $30^\circ$  längs des Umfanges auseinander lagen. Bei der ersten Versuchsreihe lag die Mündung von Rohr 7 im vorderen Staupunkt, d. h. bei  $0^\circ$  gegenüber der Fahrtrichtung und Rohr 1 bei  $180^\circ$ , d. h. im hinteren Staupunkt. Bei zwei weiteren Versuchsreihen wurde dann der Zylinder je um  $10^\circ$  zur Fahrtrichtung weiter verdreht, so daß für je  $10^\circ$  Abstand längs des Zylinderumfanges zwischen  $0^\circ$  (vorderer Staupunkt)

und  $200^\circ$  für den bei den drei Versuchsreihen gleichmäßig eingehaltenen Geschwindigkeitsbereich von rund 0,1 bis rund 3,5 m/sek Meßwerte ermittelt werden konnten.

In den Tabellen 2 bis 4 (s. Seite 4 bis 7) sind die Ergebnisse wiedergegeben, und zwar sowohl die absolute Größe des Überdruckes bzw. Unterdruckes (Sog)  $\Delta h$  in cm Wassersäule, als auch das Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe:

$$\beta = \frac{\Delta h}{U^2} = \frac{\Delta p}{U^2} \cdot \frac{\gamma}{2g}$$

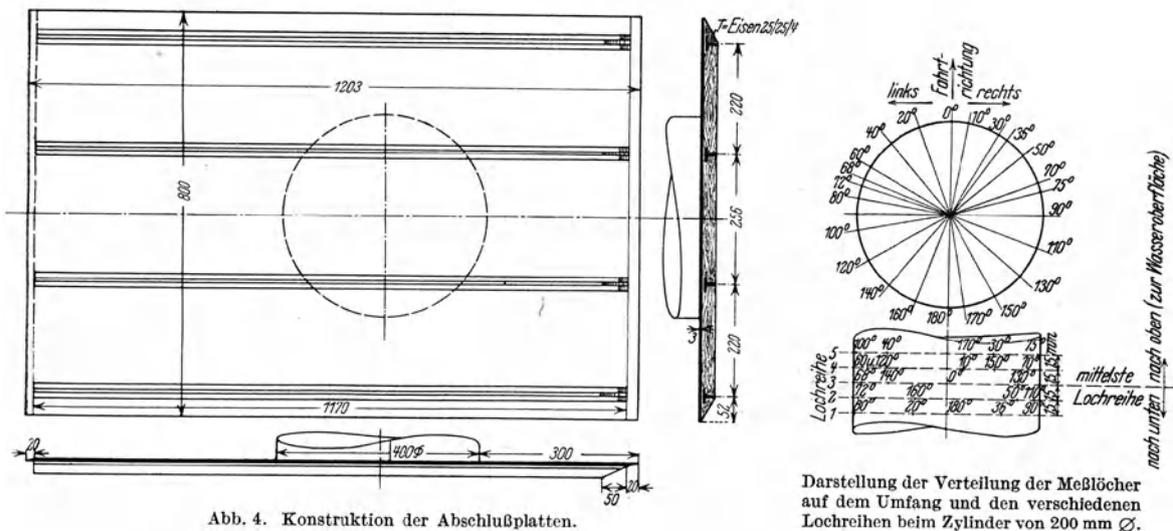
Die Tabellenwerte sind durch Mittelbildung zusammengefaßt worden. Mit Ausnahme der unsicheren Ablesungen bei kleinen Geschwindigkeiten, die für die Mittelbildung nicht benutzt sind, ist nämlich  $\beta$  bei allen, dem angegebenen Geschwindigkeitsbereich angehörigen Geschwindigkeiten an den einzelnen Stellen ziemlich gleich groß geblieben. In Abb. 3 sind die Mittelwerte der Druckverteilung aufgetragen worden. Die Druckhöhe schwankt zwischen dem  $+1$  und etwa dem  $-1,25$ fachen der Geschwindigkeitshöhe. Nur auf einem schmalen Streifen der Vorderfläche bis etwa  $\vartheta = 35^\circ$  beiderseits der Mitte herrscht Überdruck. Im übrigen tritt am Umfang des Zylinders überall starker Sog auf. Der Gesamtwiderstand des Zylinders infolge Normaldruck  $W = \int \gamma \cdot \Delta h \cdot dF \cdot \cos \vartheta$  errechnet sich aus den gemittelten Meßwerten zu

$$W = 1,22 \cdot F \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$$

Auf der Vorderfläche heben sich Überdruck und Sog annähernd auf, so daß die Vorderseite (für sich allein) so gut wie gar keinen Beitrag zum (Gesamt-)Widerstand des Zylinders bei der Bewegung liefert; der gesamte Widerstand des Zylinders wird fast lediglich durch den Sog auf der Rückseite erzeugt, wie dies bereits bekannt ist.

## 2. Kreiszyylinder von $2a = 200$ mm äußerem Durchmesser.

Der Zylinder bestand aus lackiertem Holz, nur auf die Länge der Anbohrungen (s. u.) bestand die Wandung aus Messing. Die Anordnung der Abschlußbleche war die gleiche wie bei dem



Zylinder von  $50$  mm Durchmesser. Um aber das Verdrehen zu vermeiden und an allen, je um  $10^\circ$  auseinander liegenden Meßstellen gleichzeitig während ein- und derselben Fahrt ablesen zu können, waren  $23$  Meßlöcher auf  $5$  verschiedene in  $15$  mm lotrechttem Abstand voneinander liegende Querschnittsebenen des Zylinders verteilt (s. Abb. 4 und Photo Abb. 2). Die Löcher lagen auf beiden Seiten bei verschiedenen Winkeln und waren in der Gegend, wo der Überdruck in Unterdruck übergeht, an den Stellen der größten Druckänderung und besonders im Gebiet der zu erwartenden Ablösung in engeren Abständen angeordnet.

Tabelle 2. Druckverteilung an einem Zylinder von  $2a = 50$  mm äußerem

Fahrt-Nr.	Geschwindigkeit $U$ m/sek	Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$ mm	Ablesung der manometrischen					
			Rohr 7 (0°)		Rohr 6 (30°)		Rohr 5 (60°)	
			Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$	Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$	Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,100	0,50	0,40		0,3		- 0,4	
2	0,211	2,27	2,10		0,1		- 2,6	-1,145
3	0,337	5,77	5,40		0,3		- 6,6	-1,144
4	0,426	9,25	7,80		1,1		- 11,1	-1,200
5	0,545	15,13	14,90	0,99	4,5	0,297	- 17,3	-1,142
6	0,630	20,24	20,10	0,99	6,1	0,301	- 21,8	-1,076
7	0,714	26,0	25,9	0,996	6,9	0,265	- 29,8	-1,146
8	0,828	34,9	34,3	0,983	8,3	0,238	- 40,7	-1,167
9	1,010	52,0	51,8	0,996	12,8	0,246	- 58,2	-1,119
10	1,222	76,15	75,8	0,996	21,3	0,279	- 82,7	-1,086
11	1,420	102,8	102,3	0,995	29,3	0,285	- 110,7	-1,077
12	1,642	137,3	137,3	1,000	39,3	0,286	- 144,7	-1,053
13	1,825	169,7	168,8	0,995	47,3	0,279	- 180,7	-1,065
14	2,038	211,5	210,3	0,994	59,3	0,280	- 220,7	-1,042
15	2,230	253,7	250,3	0,985	69,3	0,273	- 271,7	-1,070
16	2,457	307,7	306,3	0,995	89,3	0,290	- 321,7	-1,045
17	2,650	358,0	355,3	0,992	100,3	0,280	- 377,7	-1,055
18	2,870	419,7	419,7	0,999	115,3	0,275	- 437,7	-1,043
19	3,068	479,6	477,3	0,995	126,3	0,264	- 515,7	-1,075
20	3,274	546,0	544,3	0,997	135,3	0,248	- 595,7	-1,090
21	3,262	543,0	540,3	0,995	142,3	0,262	- 612,7	-1,128
				$\beta = \text{im Mittel}$ $+0,994$		$\beta = \text{im Mittel}$ $+0,273$		$\beta = \text{im Mittel}$ $-1,158$

Tabelle 3. Druckverteilung an einem Zylinder von  $2a = 50$  mm äußerem

Fahrt-Nr.	Geschwindigkeit $U$ m/sek	Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$ mm	Ablesung der manometrischen					
			Rohr 7 (10°)		Rohr 6 (40°)		Rohr 5 (70°)	
			Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$	Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$	Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,228	2,65	0,7		- 1,3		- 4,9	
2	0,434	9,60	7,1		- 2,9		- 14,4	
3	0,637	20,70	18,4	0,889	- 5,0	-0,242	- 28,0	
4	0,815	33,85	28,5	0,842	- 7,5	-0,222	- 43,5	-1,285
5	1,212	74,90	66,0	0,881	- 18,0	-0,240	- 95,0	-1,268
6	1,653	139,40	118,0	0,846	- 32,0	-0,229	-168,0	-1,205
7	1,795	164,3	145,0	0,882	- 36,0	-0,219	-196,0	-1,192
8	2,038	211,8	188,0	0,888	- 45,5	-0,215	-257,0	-1,213
9	2,232	254,0	228,0	0,898	- 52,0	-0,205	-317,0	-1,248
10	2,463	309,3	302,0	0,976	- 49,0	-0,158	-362,0	-1,170
11	2,651	358,5	329,0	0,918	- 66,0	-0,184	-436,0	-1,216
12	2,871	420,0	370,0	0,880	- 101,0	-0,240	-550,0	-1,310
13	3,100	489,9	437,0	0,892	- 110,0	-0,225	-604,0	-1,233
14	3,300	555,0	499,0	0,899	- 128,0	-0,231	-720,0	-1,297
15	3,475	615,0	537,0	0,873	- 161,0	-0,262	-815,0	-1,325
				$\beta \text{ im Mittel}$ $= + 0,889$		$\beta \text{ im Mittel}$ $= - 0,221$		$\beta \text{ im Mittel}$ $= - 1,247$

Durchmesser, der aufrechtstehend quer zur Achse geschleppt wurde.

Druckhöhe gegenüber der Ruhe								Bemerkungen
Rohr 4 (90°)		Rohr 3 (120°)		Rohr 2 (150°)		Rohr 1 (180°)		
Druckhöhe	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe							
$\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	$\beta = \frac{p \cdot U^2}{\gamma \cdot 2g}$	$\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	$\beta = \frac{p \cdot U^2}{\gamma \cdot 2g}$	$\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	$\beta = \frac{p \cdot U^2}{\gamma \cdot 2g}$	$\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	$\beta = \frac{p \cdot U^2}{\gamma \cdot 2g}$	
10	11	12	13	14	15	16	17	
0,1		0,1		0,1		0,1		
2,2		2,2		2,7	-1,189	2,1		
6,1	-1,057	6,1	-1,057	6,8	-1,178	6,6	-1,144	
10,3	-1,113	10,3	-1,113	11,2	-1,211	10,8	-1,168	
15,7	-1,037	16,5	-1,090	17,2	-1,136	17,2	-1,136	
20,8	-1,027	21,1	-1,042	25,4	-1,254	23,9	-1,180	
29,1	-1,119	29,3	-1,127	34,6	-1,331	32,1	-1,234	
38,7	-1,108	40,7	-1,167	45,7	-1,310	42,7	-1,223	
54,2	-1,042	57,2	-1,100	64,2	-1,235	61,2	-1,177	
80,7	-1,059	81,7	-1,073	94,7	-1,244	88,7	-1,165	
106,7	-1,038	110,7	-1,077	125,7	-1,222	121,7	-1,184	
140,7	-1,024	144,7	-1,053	163,7	-1,192	156,7	-1,141	
176,7	-1,042	178,7	-1,053	203,7	-1,200	192,7	-1,136	
216,7	-1,024	218,7	-1,034	247,7	-1,170	234,7	-1,108	
273,7	-1,078	273,7	-1,078	319,7	-1,260	300,7	-1,185	
326,7	-1,061	319,7	-1,038	384,7	-1,250	342,7	-1,113	
390,7	-1,091	375,7	-1,049	436,7	-1,220	405,7	-1,133	
460,7	-1,097	429,7	-1,023	493,7	-1,176	462,7	-1,102	
565,7		512,7	-1,069	604,7	-1,262	547,7	-1,142	
682,7		588,7	-1,078	712,7	-1,305	618,7	-1,133	
717,7		613,7	-1,129	744,7	-1,371	639,7	-1,177	
	$\beta =$ im Mittel -1,064		$\beta =$ im Mittel -1,076		$\beta =$ im Mittel -1,236		$\beta =$ im Mittel -1,157	

Durchmesser, der aufrechtstehend quer zur Achse geschleppt wurde.

höhe gegenüber der Ruhe.								Bemerkungen
Rohr 4 (100°)		Rohr 3 (120°)		Rohr 2 (160°)		Rohr 1 (190°)		
Druckhöhe	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe							
$\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	$\beta = \frac{p \cdot U^2}{\gamma \cdot 2g}$	$\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	$\beta = \frac{p \cdot U^2}{\gamma \cdot 2g}$	$\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	$\beta = \frac{p \cdot U^2}{\gamma \cdot 2g}$	$\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	$\beta = \frac{p \cdot U^2}{\gamma \cdot 2g}$	
10	11	12	13	14	15	16	17	
3,2		3,1		3,4		3,5		
10,9	-1,136	11,4		12,9		12,9		
22,5	-1,087	23,3	-1,126	25,5	-1,232	25,0	-1,207	
35,5	-1,048	36,5	-1,078	39,5	-1,167	39,5	-1,167	
81,0	-1,082	84,0	-1,122	95,0	-1,268	91,0	-1,215	
146,0	-1,047	149,0	-1,068	165,0	-1,183	159,0	-1,140	
166,5	-1,013	163,0	-0,992	178,0	-1,083	176,0	-1,070	
231,0	-1,091	225,0	-1,062	247,0	-1,266	242,0	-1,142	
278,0	-1,095	271,0	-1,067	300,0	-1,181	289,0	-1,138	
321,0	-1,037	307,0	-0,992	349,0	-1,127	341,0	-1,102	
389,0	-1,085	370,0	-1,032	425,0	-1,185	413,0	-1,152	
482,0	-1,147	453,0	-1,078	518,0	-1,233	497,0	-1,183	
541,0	-1,105	500,0	-1,020	572,0	-1,167	561,0	-1,145	
634,0	-1,142	572,0	-1,030	652,0	-1,175	631,0	-1,137	
734,0	-1,193	654,0	-1,063	749,0	-1,218	719,0	-1,169	
	$\beta$ im Mittel =-1,093		$\beta$ im Mittel =-1,056		$\beta$ im Mittel =-1,191		$\beta$ im Mittel =-1,151	

Tabelle 4. Druckverteilung an einem Zylinder von  $2a = 50$  mm äußerem

Fahrt-Nr.	Geschwindigkeit $U$ m/sek	Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$ mm	Ablesung der manometrischen					
			Rohr 7 (20°)		Rohr 6 (50°)		Rohr 5 (80°)	
			Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$	Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$	Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$
			4	5	6	7	8	9
1	0,226	2,61	0,3		- 3,2		- 4,4	
2	0,444	10,02	4,4		- 9,6		- 14,1	
3	0,632	20,30	12,4	0,611	- 16,1		- 26,1	
4	0,838	35,80	22,4	0,626	- 26,6	- 0,743	- 43,1	- 1,203
5	1,039	55,05	33,4	0,606	- 40,6	- 0,737	- 65,6	- 1,192
6	1,214	75,10	47,4	0,631	- 54,6	- 0,727	- 89,1	- 1,186
7	1,425	103,5	67,4	0,651	- 72,6	- 0,701	- 118,6	- 1,146
8	1,650	138,8	88,4	0,637	- 96,1	- 0,692	- 157,6	- 1,135
9	1,819	168,7	114,4	0,660	- 110,6	- 0,656	- 196,6	- 1,166
10	2,061	216,4	141,4	0,653	- 147,6	- 0,682	- 245,6	- 1,134
11	2,245	256,7	171,9	0,670	- 170,1	- 0,663	- 294,1	- 1,146
				$\beta$ im Mittel = + 0,638		$\beta$ im Mittel = - 0,700		$\beta$ im Mittel = - 1,164

Tabelle 5. Druckverteilung an einem Zylinder von  $2a = 200$  mm

Geschwindigkeit $U$ m/sek	rechts 10°		30°		36°		50°		70°		72°
	links 0°	20°	20°	30°	40°	50°	60°	68°	70°		
0,424	+ 8	+ 8	+ 5	+ 3	- 4	- 4	- 9	- 11	- 12	- 12	- 11
0,518	+ 12	+ 12	+ 8	+ 3	- 2	- 3	- 12	- 16	- 18	- 17	- 17
0,611	+ 17	+ 16	+ 11	+ 3	- 4	- 8	- 18	- 24	- 27	- 25	- 26
0,811	+ 34	+ 32	+ 22	+ 8	- 3	- 10	- 27	- 39	- 44	- 40	- 43
1,007	+ 52	+ 47	+ 34	+ 13	- 2	- 12	- 36	- 52	- 56	- 51	- 51
1,091	+ 60	+ 54	+ 39	+ 12	- 3	- 20	- 45	- 69	- 69	- 70	- 55
1,185	+ 72	+ 69	+ 33	+ 26	+ 5	- 55	- 48	- 147	- 74	- 84	- 187
1,225	+ 72	+ 64	+ 49	+ 13	- 6	- 19	- 57	- 79	- 73	- 95	- 70
1,286	+ 85	+ 76	+ 49	+ 10	- 21	- 51	- 98	- 161	- 195	- 172	- 211
1,400	+ 99	+ 87	+ 58	+ 5	- 32	- 55	- 117	- 170	- 202	- 195	- 216
1,500	+ 114	+ 101	+ 68	+ 9	- 34	- 60	- 118	- 194	- 231	- 221	- 248
1,595	+ 129	+ 115	+ 76	+ 14	- 37	- 72	- 144	- 231	- 276	- 250	- 299
1,695	+ 148	+ 131	+ 88	+ 14	- 41	- 76	- 132	- 253	- 303	- 278	- 327
1,780	+ 162	+ 143	+ 106	+ 15	- 47	- 86	- 178	- 280	- 335	- 306	- 363
1,882	+ 179	+ 169	+ 107	+ 15	- 51	- 82	- 138		- 368	- 344	- 397
1,994	+ 201	+ 179	+ 121	+ 18	- 59	- 105	- 223	- 340	- 407	- 384	- 437
2,231	+ 252	+ 222	+ 154	+ 24	- 73	- 120	- 221	- 416	- 501	- 478	- 550
2,500	+ 323	+ 285	+ 200	+ 34	- 84	- 152		- 504	- 611	- 581	- 670

In den Tabellen 5 und 6 (s. Seite 6 bis 9) sind die Ergebnisse der durchgeführten Versuchsreihen mitgeteilt worden. Obwohl als Manometerröhren hierbei 9 mm weite Glasröhren verwendet wurden, sind die Ablesungen bei kleineren Geschwindigkeiten etwas unsicher geworden. Man erkennt aber auf den ersten Blick, daß die Druckverteilung bei den drei niedrigsten Geschwindigkeiten: 0,42 m/sek; 0,52 m/sek; 0,61 m/sek unter sich nahezu gleich geblieben ist und auch im wesentlichen gute Übereinstimmung mit den Messungen am 50-mm-Zylinder zeigt. Diese Tatsache rechtfertigt die Zulässigkeit der gewählten Anordnung und bestätigt das Ähnlichkeitsgesetz (s. u.). In Abb. 5 sind die zeichnerisch ausgeglichenen Mittelwerte aus den Messungen bei den drei genannten Geschwindigkeiten aufgetragen. Der Druck fällt vom vorderen Staupunkt seitwärts schnell ab und wird bei etwa  $\vartheta = 33^\circ$  (beim Zylinder von 50 mm Durchmesser bei  $\vartheta = 35^\circ$ ) gleich Null. In der Gegend von etwa  $\vartheta = 68^\circ$  erreicht er seinen tiefsten

Durchmesser, der aufrechtstehend quer zur Achse geschleppt wurde.

Druckhöhe gegenüber der Ruhe								Bemerkungen
Rohr 4 (110°)		Rohr 3 (140°)		Rohr 2 (170°)		Rohr 1 (200°)		
Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$	Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$	Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$	Druckhöhe $\Delta h = \frac{p}{\gamma}$ mm	Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe $\beta = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{U^2}{2g}$	
10	11	12	13	14	15	16	17	
- 4,4		- 2,7	- 1,035	- 3,7		- 2,7		
- 13,3		- 12,6	- 1,257	- 14,6		- 13,1	- 1,307	
- 24,6		- 24,6	- 1,212	- 26,1	- 1,286	- 26,1	- 1,286	
- 40,6	- 1,134	- 42,1	- 1,176	- 43,6	- 1,218	- 43,1	- 1,203	
- 60,6	- 1,101	- 63,6	- 1,155	- 68,6	- 1,246	- 68,1	- 1,237	
- 83,6	- 1,113	- 85,6	- 1,140	- 94,6	- 1,260	- 92,6	- 1,233	
- 114,6	- 1,107	- 118,6	- 1,146	- 128,6	- 1,242	- 128,6	- 1,242	
- 149,6	- 1,077	- 158,6	- 1,142	- 167,6	- 1,207	- 173,6	- 1,251	
- 186,6	- 1,106	- 175,6	- 1,041	- 184,6	- 1,095	- 212,6	- 1,260	
- 229,6	- 1,060	- 236,6	- 1,092	- 253,6	- 1,171	- 255,6	- 1,180	
- 276,1	- 1,076	- 283,1	- 1,103	- 308,1	- 1,201	- 311,1	- 1,213	
	$\beta$ im Mittel = -1,097		$\beta$ im Mittel = -1,136		$\beta$ im Mittel = -1,214		$\beta$ im Mittel = -1,241	

äußerem Durchmesser. Druckhöhe  $\Delta h = \frac{\Delta p}{\gamma}$ .

75°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
- 11	- 11	- 10	- 10	- 10	- 10	- 10	- 10	- 11	- 10	- 12	- 11
- 17	- 16	- 15	- 16	- 15	- 15	- 15	- 15	- 16	- 16	- 17	- 17
- 24	- 23	- 22	- 24	- 22	- 22	- 20	- 21	- 22	- 22	- 24	- 25
- 37	- 36	- 33	- 34	- 30	- 30	- 29	- 30	- 31	- 30	- 31	- 30
- 45	- 44	- 41	- 38	- 33	- 32	- 33	- 34	- 33	- 33	- 33	- 31
- 76	- 50	- 46	- 48	- 38	- 37	- 38	- 39	- 42	- 40	- 42	- 39
- 86	- 195	- 63	- 176	- 42	- 62	- 39	- 38	- 39	- 38	- 37	- 36
- 104	- 59	- 57	- 67	- 44	- 40	- 46	- 44	- 48	- 45	- 47	- 43
- 185	- 229	- 163	- 203	- 58	- 83	- 40	- 38	- 40	- 37	- 37	- 36
- 210	- 220	- 188	- 202	- 50	- 49	- 46	- 47	- 47	- 44	- 44	- 38
- 237	- 252	- 213	- 234	- 56	- 57	- 54	- 55	- 55	- 54	- 53	- 47
- 265	- 320	- 237	- 278	- 61	- 86	- 59	- 61	- 59	- 60	- 54	- 56
- 298	- 343	- 277	- 313	- 71	- 77	- 70	- 67	- 70	- 68	- 67	- 59
- 324	- 386	- 289	- 339	- 77	- 100	- 78	- 82	- 76	- 83	- 72	- 75
- 367	- 419	- 331	- 381	- 90	- 91	- 90	- 84	- 91	- 85	- 89	- 75
- 410	- 454	- 366	- 409	- 96	- 95	- 96	- 93	- 97	- 93	- 95	- 84
- 509	- 575	- 463	- 494	- 122	- 127	- 122	- 119	- 123	- 121	- 117	- 114
- 620	- 711	- 558	- 625	- 142	- 144	- 143	- 143	- 147	- 147	- 144	- 132

Stand mit rund  $-1,35 \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$  (bzw.  $-1,30 \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$  beim Zylinder von  $50$  mm Durchmesser). Bald dahinter, im Gebiet des „Druckwiederanstieges“ tritt dann die Ablösung der „gesunden“ Strömung von der Zylinderwandung ein, so daß sich das „Kielwasser“ in diesem Bereich der Geschwindigkeiten beim  $200$ -mm-Zylinder, d. h. allgemeiner: in dem entsprechenden Bereich Reynoldsscher Zahlen um die Seite des Zylinders noch etwas nach vorn herumzieht; das Kielwasser muß sonach eine größere Breite haben als der Zylinder. Da das Kielwasser in den sehr spitzen Winkel zwischen Zylinderwandung und abgelöster Strömung eindringen und dort auch umkehren muß, weil es immer wieder mitgerissen wird, wird der Ablösungspunkt auch in diesem Bereich Reynoldsscher Zahlen nicht dauernd festliegen, sondern um eine Mittellage pendeln.

Tabelle 6. Druckverteilung an einem Zylinder von  $2a = 200$  mm äußerem Durchmesser.

Geschwindigkeit $U$ m/sek	rechts $10^\circ$		$20^\circ$	$30^\circ$	$36^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$68^\circ$	$70^\circ$	$72^\circ$
	links $0^\circ$										
0,424	0,869	0,87	0,543	0,326	-0,435	-0,435	-0,978	-1,195	-1,305	-1,305	-1,195
0,518	0,876	0,876	0,584	0,219	-0,146	-0,219	-0,876	-1,169	-1,314	-1,242	-1,242
0,611	0,895	0,842	0,579	0,158	-0,211	-0,421	-0,947	-1,263	-1,421	-1,316	-1,368
Mittel für $U=0,42-0,61$ rechts und links nach Zeichnung gemittelt	+0,880	+0,863	+0,569	+0,234	-0,264	-0,358	-0,934	-1,209	-1,347	-1,288	-1,268
	+1	+0,87	+0,59	+0,15		-0,43	-0,94	-1,21		-1,31	
0,811	+1,015	+0,955	+0,657	+0,239	-0,090	-0,297	-0,806	-1,163	-1,314	-1,194	-1,283
1,007	+1,006	+0,91	+0,658	+0,252	-0,039	-0,232	-0,697	-1,006	-1,083	-0,987	-0,987
1,091	+0,988	+0,891	+0,643	+0,098	-0,049	-0,329	-0,742	-1,138	-1,138	-1,154	-0,907
1,185	+1,006	+0,964	+0,461	+0,363	+0,070	-0,768	-0,671	-2,05(?)	-1,033	-1,172	-2,615
1,225	+0,941	+0,837	+0,641	+0,170	-0,078	-0,248	-0,745	-1,033	-0,954	-1,242	-0,915
1,286	+1,008	+0,902	+0,582	+0,119	-0,249	-0,666	-1,162	-1,910	-2,315	-2,040	-2,501
1,400	+0,990	+0,871	+0,581	+0,050	-0,320	-0,550	-1,170	-1,700	-2,020	-1,950	-2,160
1,500	+0,990	+0,881	+0,593	+0,078	-0,296	-0,523	-1,029	-1,691	-2,014	-1,926	-2,162
1,595	+0,995	+0,887	+0,587	+0,108	-0,285	-0,555	-1,110	-1,781	-2,128	-1,928	-2,306
1,695	+1,011	+0,895	+0,601	+0,096	-0,280	-0,519	-0,902	-1,728	-2,070	-1,900	-2,234
1,780	+1,003	+0,885	+0,656	+0,093	-0,291	-0,532	-1,102	-1,734	-2,074	-1,895	-2,248
1,882	+0,992	+0,936	+0,593	+0,083	-0,282	-0,454	?	?	-2,039	-1,906	-2,200
1,994	+0,992	+0,883	+0,597	+0,089	-0,291	-0,518	-1,100	-1,677	-2,007	-1,894	-2,156
2,231	+0,993	+0,875	+0,607	+0,095	-0,288	-0,473	-0,871	-1,640	-1,975	-1,884	-2,168
2,500	+1,014	+0,895	+0,628	+0,107	-0,264	-0,477	?	-1,582	-1,918	-1,824	-2,103
Mittel für $U=1,4-2,5$ rechts und links nach Zeichnung gemittelt	+0,998	+0,890	+0,605	+0,089	-0,289	-0,511	-1,041	-1,692	-2,027	-1,901	-2,193
	+1,0	+0,89	+0,60	+0,09		-0,51	-1,07	-1,59		-2,00	

Der Unterdruck nimmt mit wachsenden  $\vartheta$  schnell weiter ab und bleibt, abgesehen von den unruhigen Schwankungen im Kielwasser infolge der pulsierenden Wanderung des Ablösungspunktes, im Mittel auf der ganzen Körperperrückseite auf etwa  $-1,15 \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$ . Der Gesamtwiderstand des Zylinders infolge Normaldruck errechnet sich nach der gemittelten Verteilungslinie der Abb. 5 zu

$$W = 1,13 \cdot F \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$$

gegenüber  $1,22 \cdot F \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$  beim Zylinder von 50 mm Durchmesser; da für den Zylinder von 200 mm Durchmesser nur drei Versuche benutzt sind und außerdem die Ablesungen bei den geringen Geschwindigkeiten nicht ganz sicher waren, muß dies Ergebnis als genügende Übereinstimmung angesehen werden.

Bei weiterer Vergrößerung der Schleppgeschwindigkeit wird die

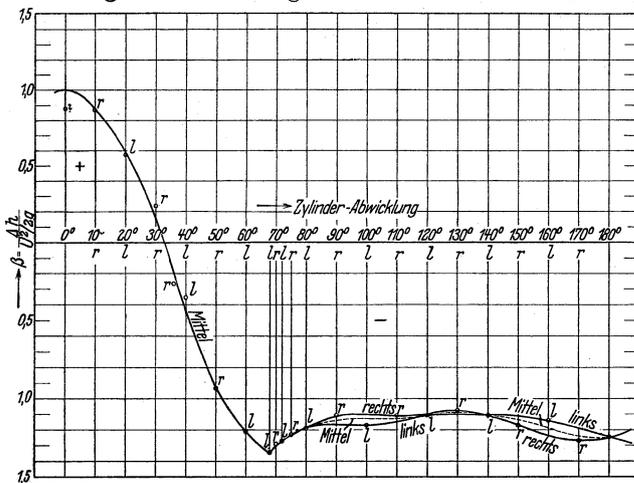


Abb. 5. Druckverteilung an einem Kreiszyylinder von 200 mm Durchmesser bei der Bewegung im Wasser senkrecht zur Achse. Druckhöhen angegeben im Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe  $\beta = \frac{\Delta h}{U^2/2g}$ , gemittelt für Geschwindigkeiten von 0,42 bis 0,61 m/sek.

Druckverteilung eine grundsätzlich andere. Nach Durchschreitung eines Überganggebietes tritt offenbar ein anderer, dann anscheinend wieder gleichblei-

Verhältnis der Druckhöhe zur Geschwindigkeitshöhe  $\beta = \frac{\Delta p/\gamma}{\frac{U^2}{2g}}$

75°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
-1,195	-1,195	-1,087	-1,087	-1,087	-1,087	-1,087	-1,087	-1,195	-1,087	-1,305	-1,195
-1,242	-1,169	-1,095	-1,169	-1,095	-1,095	-1,095	-1,095	-1,169	-1,169	-1,242	-1,242
-1,263	-1,211	-1,158	-1,263	-1,158	-1,158	-1,053	-1,105	-1,158	-1,158	-1,263	-1,316
-1,233	-1,192	-1,113	-1,173	-1,113	-1,113	-1,078	-1,096	-1,174	-1,138	-1,270	-1,251
	-1,19	-1,14	-1,13	-1,12	-1,11	-1,09	-1,10	-1,14	-1,18	-1,23	-1,25
-1,104	-1,074	-0,985	-1,015	-0,895	-0,895	-0,865	-0,895	-0,925	-0,895	-0,925	-0,895
-0,870	-0,852	-0,793	-0,735	-0,639	-0,619	-0,639	-0,658	-0,639	-0,639	-0,639	-0,601
-1,252	-0,824	-0,758	-0,791	-0,627	-0,610	-0,627	-0,643	-0,692	-0,659	-0,692	-0,643
-1,201	-2,725	-0,880	-2,460	-0,586	-0,866	-0,545	-0,531	-0,545	-0,531	-0,517	-0,503
-1,360	-0,772	-0,745	-0,676	-0,576	-0,523	-0,602	-0,576	-0,627	-0,588	-0,614	-0,562
-2,195	-2,703	-1,935	-2,406	-0,688	-0,984	-0,474	-0,451	-0,474	-0,439	-0,439	-0,427
-2,100	-2,200	-1,880	-2,020	-0,500	-0,490	-0,460	-0,470	-0,470	-0,440	-0,440	-0,380
-2,066	-2,197	-1,857	-2,040	-0,488	-0,497	-0,471	-0,479	-0,479	-0,471	-0,462	-0,410
-2,043	-2,467	-1,827	-2,143	-0,470	-0,663	-0,455	-0,470	-0,455	-0,463	-0,416	-0,432
-2,036	-2,348	-1,892	-2,138	-0,585	-0,526	-0,478	-0,458	-0,478	-0,464	-0,458	-0,403
-2,006	-2,390	-1,789	-2,099	-0,477	-0,619	-0,483	-0,508	-0,471	-0,514	-0,446	-0,464
-2,033	-2,321	-1,834	-2,111	-0,499	-0,504	-0,499	-0,465	-0,504	-0,471	-0,493	-0,416
-2,023	-2,240	-1,806	-2,018	-0,474	-0,469	-0,474	-0,459	-0,479	-0,459	-0,469	-0,414
-2,006	-2,266	-1,825	-1,947	-0,481	-0,501	-0,481	-0,469	-0,485	-0,477	-0,461	-0,449
-1,946	-2,232	-1,752	-1,962	-0,446	-0,452	-0,449	-0,449	-0,461	-0,461	-0,452	-0,414
-2,029	-2,296	-1,829	-2,053	-0,491	-0,525	-0,472	-0,470	-0,476	-0,469	-0,455	-0,420
	-2,20	-2,18	-1,11	-0,57	-0,49	-0,47	-0,47	-0,48	-0,47	-0,45	-0,42

bender Strömungszustand ein. Zuerst äußert sich die Abweichung darin, daß der Sog im Kielwasser an der Hinterseite des Zylinders kleiner wird. Während er bei  $U = 0,61$  m/sek noch etwa  $-1,15$  bis  $-1,20 \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$  beträgt, fällt er bereits bei  $U = 0,81$  m/sek auf rund  $-0,9$ , bei  $U = 1,09$  bzw.  $1,29$  m/sek auf rund  $-0,65$  bzw.  $-0,45 \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$ .

Ferner verschiebt sich die Stelle maximalen Unterdruckes von etwa  $\vartheta = 68^\circ$  bis nach etwa  $\vartheta = 80^\circ$  und infolgedessen auch die im Gebiet des „Druckwiederanstieges“ liegende Ablösungsstelle; damit scheint auch die Drucksteigerung im Kielwasser ursächlich im Zusammenhang zu stehen. Gleichzeitig tritt aber als besonders charakteristisches Merkmal eine sehr starke Steigerung des seitlichen Unterdrucks bis auf etwa  $-2,70 \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$  ein.

Im Übergangsgebiet wechselt die Form des Druckverlaufs in der Nähe der Ablösungsstelle bei Geschwindigkeiten von rund 1 bis 1,3 m/sek bzw. bei entsprechenden Reynoldsschen Zahlen sehr stark und ist zuweilen auf beiden Seiten ganz verschieden, so daß ein starker Quertrieb entsteht. So ergibt sich z. B. aus der Auftragung der Druckverteilung für  $U = 1,185$  m/sek (s. Abb. 6) ein Seitendruck von rechts nach links in Höhe von  $0,86 \cdot F \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$ , ein Wert, der in diesem Falle viel größer ist, als der Widerstand in Fahrtrichtung. Diese Einseitigkeit der Druckverteilung wechselt und der größere Sog liegt bald links, bald rechts. Bei  $U = 1,10$  und  $1,23$  m/sek überwiegt der Sog auf der rechten Seite, während sonst fast durchweg der Sog auf der linken Seite größer ist. Da immer der gleiche, glatte und kreisrund abgedrehte Zylinder bei unveränderter Einspannung am Schleppwagen benutzt wurde und Unsymmetrie beim Fahren bzw. etwa vorhandene Seitenströmungen in der Flüssigkeit nicht erkennbar waren, ist keine

Seite für das Auftreten des größeren Unterdruckes bevorzugt. Die Unsymmetrie wechselt zuweilen auch unter kurzen Schwingungen plötzlich von der einen zur anderen Seite<sup>3</sup>. Hierin kommt augenscheinlich zum Ausdruck, daß man sich bei den entsprechenden Geschwindigkeiten

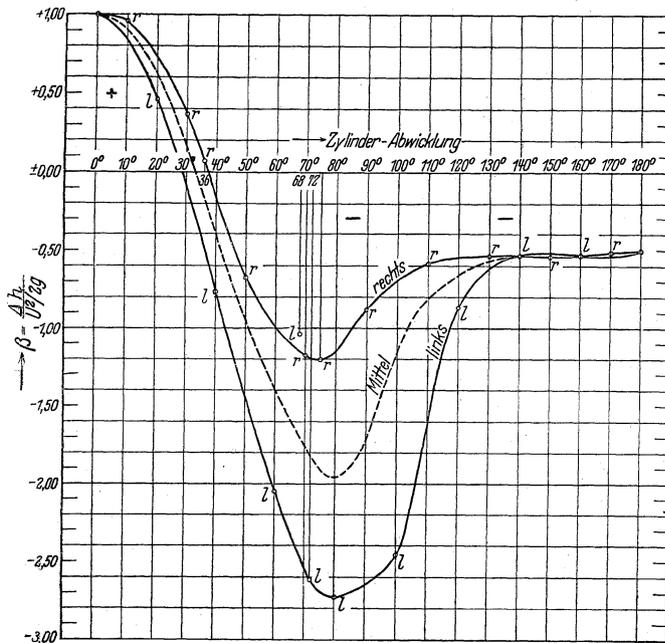


Abb. 6. Druckverteilung an einem Kreiszyylinder von 200 mm Durchmesser bei der Bewegung im Wasser senkrecht zur Achse. Druckhöhen angegeben im Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe

$$\beta = \frac{\Delta h}{U^2/2g} \text{ für eine Geschwindigkeit von 1,185 m/sek.}$$

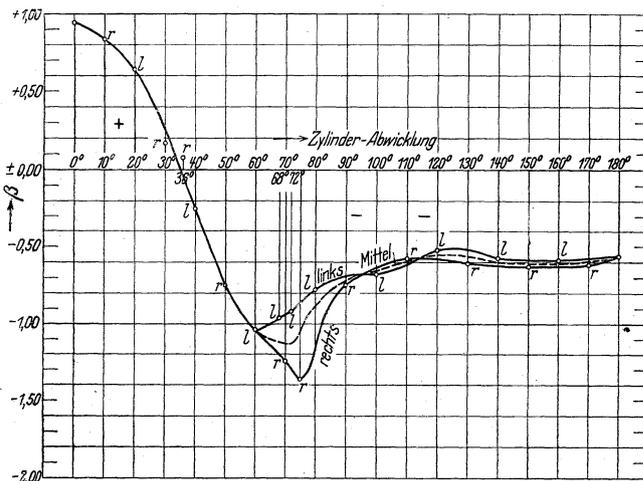


Abb. 7. Druckverteilung an einem Kreiszyylinder von 200 mm Durchmesser bei der Bewegung im Wasser senkrecht zur Achse. Druckhöhen angegeben im Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe

$$\beta = \frac{\Delta h}{U^2/2g} \text{ für eine Geschwindigkeit von 1,225 m/sek.}$$

gleichbleibend mit etwa  $0,47 \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$  (gegenüber rund  $-1,15 \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$  unterhalb des Übergangsbereiches). Die großen seitlichen „Unterdrucklappen“ und der verkleinerte Kielwasserunter-

bzw. Reynoldsschen Zahlen in einem Übergangsbereich von der einen Strömungsform zur anderen (s. u.) befindet. — In den Abb. 6, 7, 8 sind drei besonders ausdrucksvolle Druckverteilungen bei 1,185; 1,23 und 1,29 m/sek Geschwindigkeit dargestellt worden. Die Verteilung bei der Geschwindigkeit  $U = 1,29$  m/sek hat in ihrer Form schon große Ähnlichkeit mit der Druckverteilung, die oberhalb des Überganges bei höheren Geschwindigkeiten (bzw. entsprechenden Reynoldsschen Zahlen) dauernd zu werden scheint.

Von  $U = 1,4$  m/sek an — geschleppt wurde bis zu  $U = 2,5$  m/sek — ist die Druckverteilung und damit auch der Strömungsvorgang bei allen Geschwindigkeiten wieder als gleichbleibend anzusehen. Die in Tabelle 6 angegebenen Verhältniszahlen von Druckhöhe zur Geschwindigkeitshöhe weichen — von unvermeidlichen Schwankungen abgesehen — kaum voneinander ab. Der Charakter der Druckverteilung ist aber bei diesen höheren Reynoldsschen Zahlen, d. h. größeren Geschwindigkeiten bzw. größerem Zylinderdurchmesser ein grundsätzlich anderer geworden, wie ein Vergleich der Abb. 9 mit Abb. 3 und 5 zeigt.

In Abb. 9 sind die Mittelwerte der Druckhöhenverhältniszahlen  $\beta$  aus neun Versuchen für Geschwindigkeiten von 1,4 bis 2,5 m/sek aufgetragen worden. In der Gegend von  $\vartheta = 80^\circ$  wächst der seitliche Sog (jetzt wieder beiderseits symmetrisch) auf  $-2,2$  bis  $-2,3 \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$  an, fällt dann sehr schnell wieder ab und ist auf der ganzen Zylinderrückseite ziemlich

<sup>3</sup> Die jedem Praktiker bekannten, in fließendem Wasser auftretenden Schwankungen von Peilstangen, Haltestangen für hydrometrische Flügel u. ä. werden zuweilen mit dieser Erscheinung in Verbindung gebracht werden können.

druck sind also im Gebiet großer Reynoldsscher Zahlen (d. h. oberhalb des Übergangsgebietes) für die Druckverteilung charakteristisch. Der Widerstand bei der Bewegung des Zylinders infolge Normaldruck errechnet sich aus Abb. 9 für alle gefahrenen Geschwindigkeiten über 1,4 m/sek bei 200 mm Zylinderdurchmesser zu

$$W = \text{rund } 0,33 F \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$$

gegenüber 1,13 bzw. 1,2  $F \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}$  unterhalb des Übergangsgebietes.

Auf den Vergleich vorstehender Ergebnisse der Druckverteilungsmessungen mit den Messungen anderer Forscher und auf den Zusammenhang der Druckverteilung und der Größe des Kielwasserunterdruckes (auch innerhalb des Übergangsgebietes) mit dem Gesamtzylinderwiderstand wird nach Mitteilung der weiteren Widerstandsmessungen (s. den folgenden Abschnitt B) in Abschnitt C genauer eingegangen; hinsichtlich des Vergleichs mit den Ergebnissen der rechnenden Hydrodynamik bzw. wie die Theorie sich den vorstehenden Meßergebnissen anzupassen verstanden hat, s. Teil II, insbesondere Abschnitt D und E.

## B. Widerstandsmessungen an Kreiszyindern bei vollkommener Tauchung.

### 1. Glatte Zylinder.

In Ergänzung der unter A beschriebenen Druckverteilungsmessungen ist eine Reihe reiner Widerstandsmessungen (ohne Ermittlung der Druckverteilung im einzelnen) an vier Kreiszyindern verschiedenen Durchmessers durchgeführt worden. Die Zylinderdurchmesser lagen zwischen  $2a = 15$  und 150 mm, die Schleppgeschwindigkeiten  $U$  zwischen rund 0,1 und rund 4,0 m/sek. Diesmal lagen die Zylinder jedoch horizontal; sie wurden wieder quer zur Längsachse geschleppt. Die Ausschaltung einer Einwirkung des Wasserspiegels und der Endumströmung geschah in der Weise, daß die Zylinder in einen U-förmigen Halbrahmen aus steifem, 6 mm starkem Blech nach Abb. 10 eingebaut wurden. Die ganze Anordnung Rahmen plus Zylinder

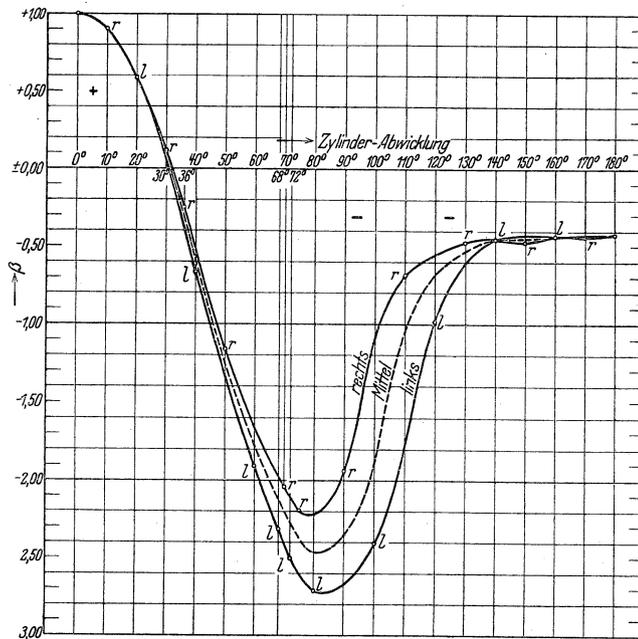


Abb. 8. Druckverteilung an einem Kreiszyylinder von 200 mm Durchmesser bei der Bewegung im Wasser senkrecht zur Achse. Druckhöhen angegeben im Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe

$$\beta = \frac{\Delta h}{U^2/2g} \text{ für eine Geschwindigkeit von 1,286 m/sek.}$$

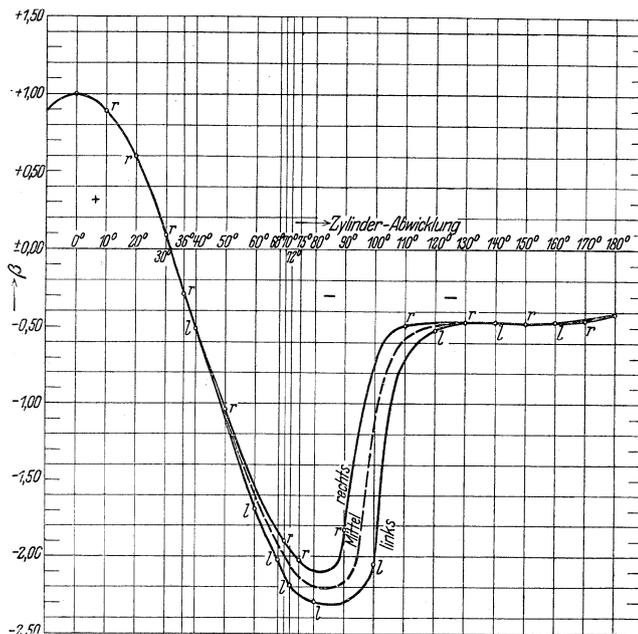


Abb. 9. Druckverteilung an einem Kreiszyylinder von 200 mm Durchmesser bei der Bewegung im Wasser senkrecht zur Achse. Druckhöhen angegeben im Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe

$$\beta = \frac{\Delta h}{U^2/2g}, \text{ gemittelt für Geschwindigkeiten von 1,40 bis 2,50 m/sek.}$$

der wirkte auf das Widerstandsdynamometer des Schleppwagens. Die Bleche und Aussteifungswinkel des Rahmens waren vorn und hinten schlang zugeschräuft, um den Formwiderstand des Rahmens möglichst gering zu halten und die durch den Rahmen erzeugte Störungsströmung so klein wie möglich zu machen; deshalb war auch die Zuschärfung ganz auf die Außenflächen gelegt, so daß die Innenflächen des Rahmens vollkommen eben waren. Alle von der Wasserströmung berührten Flächen waren glatt und mit Siderosten-Anstrich versehen.

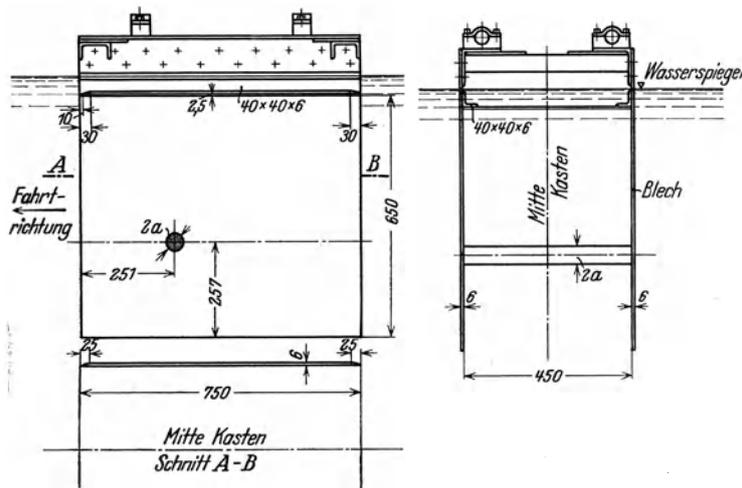


Abb. 10. Rahmen zum Schleppen der Zylinder unter Ausschaltung der Wasseroberfläche.

Der Widerstand des Rahmens ohne eingebauten Zylinder wurde für den in Betracht kommenden Geschwindigkeitsbereich durch besondere Versuche ermittelt und — s. die folgenden Tabellen — bei Ermittlung des Zylinderwiderstandes auf Grund dieser Messungen von dem Gesamtwiderstand von Rahmen plus Zylinder in Abzug gebracht.

In den Tabellen 7, 8, 9, 10 (s. Seite 14/15) sind die Ergebnisse mitgeteilt worden. In Abb. 12

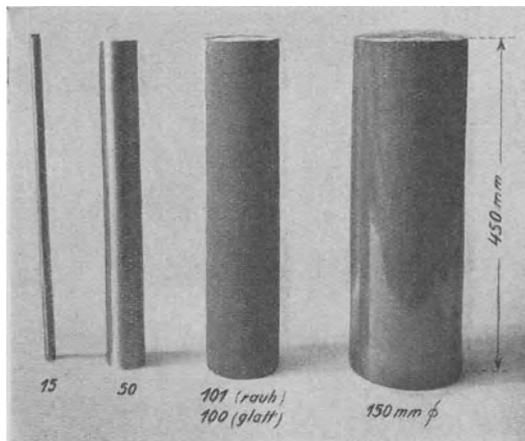


Abb. 11. Die unter Wasser untersuchten Kreiszyllinder.

und 13 sind nach diesen Tabellen die Widerstandsbeiwerte  $\zeta = \frac{W}{F \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}}$  in Abhängigkeit von den Kennzahlen<sup>4</sup>  $2a \cdot U \cdot \rho_K$  aufgetragen worden, und zwar in Abb. 12 in gewöhnlichem, in Abb. 13 in logarithmischem Maßstabe. In diese Darstellung sind auch die aus dem Widerstand nur infolge Normaldruck errechneten Widerstandsbeiwerte für den 200 mm starken Zylinder nach Tabelle 6 mit eingetragen worden, da der Widerstand infolge Tangentialkräften demgegenüber als vernachlässigbar klein angesehen werden kann. Die Versuche bestätigen und ergänzen die unter A mitgeteilten Druckmessungen. Die Widerstandsbeiwerte gehören augenscheinlich zwei verschiedenen Strömungszuständen mit einem dazwischen liegenden ausgeprägten Übergangsbereich an. Auf die Kennzahl  $2a \cdot U \cdot \rho_K$  bezogen, ist der Widerstandsbeiwert  $\zeta$  bis etwa zu einer Größe  $2a \cdot U \cdot \rho_K = 0,1$  im wesentlichen gleichbleibend gleich rund 1,2; von etwa  $2a \cdot U \cdot \rho_K = 0,35$  an aufwärts ist der Widerstandsbeiwert ebenfalls annähernd gleich, aber bedeutend kleiner, nämlich etwa 0,33 bis 0,34. Der Übergang zwischen beiden Strömungszuständen liegt nach den Messungen nicht für alle Durchmesser in dem gleichen Kennzahlenbereich. Für

<sup>4</sup> Siehe S. 1.

$2a = 200$  mm war er zwischen  $2a U \varrho_K = 0,10$  und  $0,26$  festzustellen; für  $2a = 150$  mm liegt er nach Abb. 12 zwischen  $2a U \varrho_K =$  etwa  $0,14$  bis  $0,35$ , für  $2a = 100$  mm etwa zwischen  $0,17$  und  $0,38$ .

Mit den Zylindern von  $2a = 15$  und  $50$  mm Durchmesser ist das Übergangsgebiet nicht mehr erreicht worden. Die anscheinend gleichsinnige Abhängigkeit der Lage des Überganges vom Durchmesser scheint nicht nur auf evtl. Rauigkeitsunterschiede, sondern zum überwiegenden Teil dadurch bedingt zu sein, daß der Rahmenkasten für alle Zylinder der gleiche war und nicht ähnlich mitverändert wurde<sup>5</sup> (vgl. auch unter C, Vergleich mit den Göttinger Messungen).

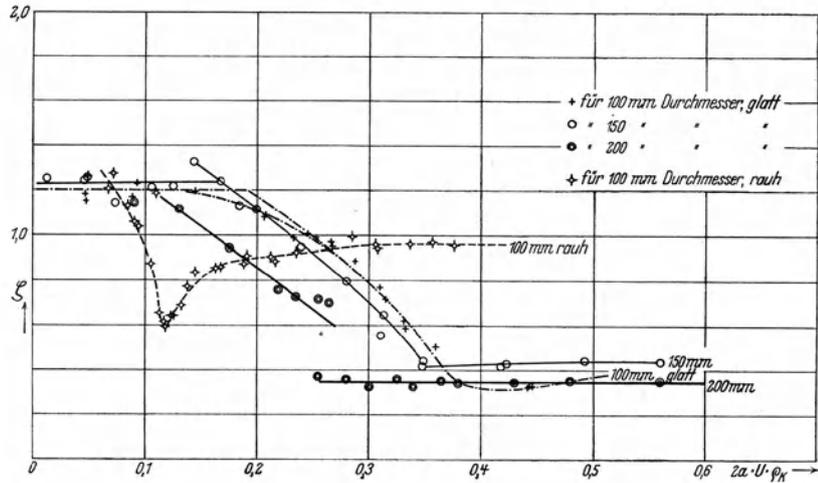


Abb. 12. Widerstand von Kreiszyllindern von 100, 150 und 200 mm Durchmesser bei der Bewegung im Wasser quer zur Achse.

$$W = \zeta \cdot F \cdot \frac{\gamma \cdot U^2}{2g}$$

$\zeta$  aufgetragen in Abhängigkeit von der Kennziffer  $2a \cdot U \cdot \varrho_K$ ; Wassertemperatur  $10^\circ \text{C}$ ;  $\varrho_K = 0,92 \text{ sek/m}^2$ .

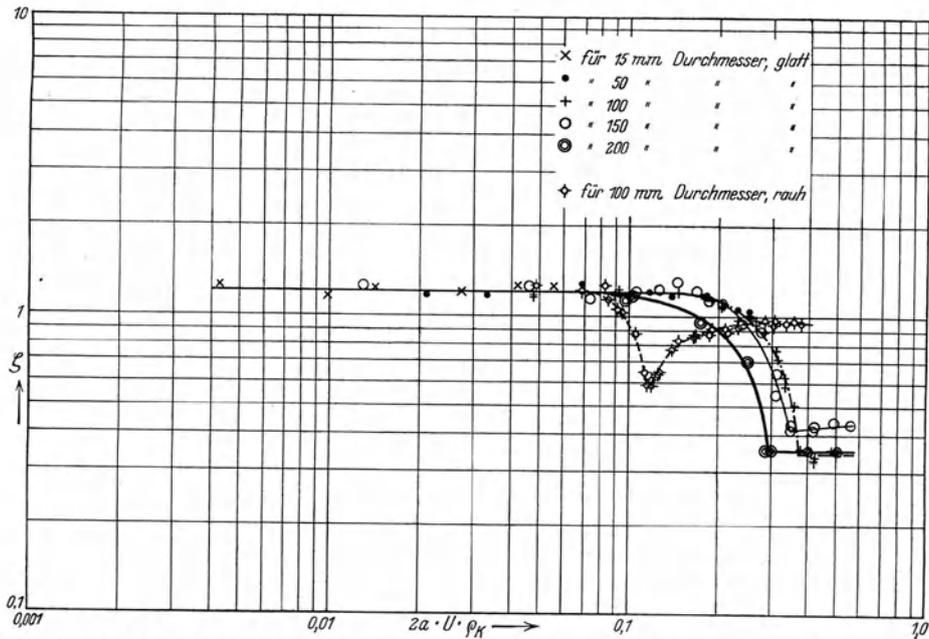


Abb. 13. Widerstand von Kreiszyllindern von 15, 50, 100, 150 und 200 mm Durchmesser bei der Bewegung im Wasser quer zur Achse.

$$W = \varrho \cdot F \cdot \frac{\gamma \cdot U^2}{2g}$$

$\zeta$  aufgetragen in Abhängigkeit von der Kennziffer  $2a \cdot U \cdot \varrho_K$  (logarithmische Maßstäbe).

<sup>5</sup> Auf dem Vortrag in Danzig 1925 (s. Einleitung) über diese Messungen war Verfasser noch der Meinung, die Unterschiede müßten sich lediglich auf Rauigkeitsverschiedenheiten zurückführen lassen. Nach erneuter Durcharbeitung der Messungen scheint aber der oben angegebene Grund stichhaltiger zu sein. Über einen möglichen Einfluß der Rahmengröße s. Teil III, Abschnitt E.

Tabelle 7. Bewegungswiderstand eines horizontal liegenden Zylinders im Wasser, der quer zur Achse geschleppt wurde.

 $2a=0,015$  m, Wassertemperatur  $10^{\circ}$  C,  $\rho_K=0,92$  sek/m<sup>2</sup>.

Fahrt Nr.	Geschwindigkeit $U$ m/sek	Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$ m	Widerstand			Beiwert $\zeta = \frac{W_Z}{F \cdot \gamma \cdot U^2 / 2g}$	Kennwert $2aU\rho_K$	Reynoldssche Zahl $\Re = \frac{2aU}{Z}$
			des Kastens u. Zylinders $W_{KZ}$ kg	des Kastens allein $W_K$ kg	des Zylinders allein $W_Z$ kg			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 <sup>1</sup>	0,1072	0,00059	0,090	0,068	0,022	5,43	0,00148	$1,23 \cdot 10^3$
2 <sup>1</sup>	0,2202	0,00247	0,134	0,087	0,047	2,785	0,003038	$2,53 \cdot 10^3$
3	0,3120	0,00497	0,147	0,105	0,042	1,253	0,004305	$3,59 \cdot 10^3$
4 <sup>1</sup>	0,4840	0,01194	0,307	0,192	0,115	1,427	0,00668	$5,56 \cdot 10^3$
5	0,7200	0,02640	0,536	0,330	0,206	1,156	0,00994	$8,28 \cdot 10^3$
6	1,021	0,05316	1,040	0,600	0,440	1,226	0,01409	$1,17 \cdot 10^4$
7	1,994	0,2026	3,936	2,300	1,636	1,197	0,0275	$2,29 \cdot 10^4$
8	3,055	0,4758	9,234	5,300	3,934	1,226	0,04215	$3,51 \cdot 10^4$
9	4,060	0,8400	16,216	9,280	6,936	1,223	0,0560	$4,67 \cdot 10^4$

<sup>1</sup> Bem.: unsichere Messung.

Tabelle 8. Bewegungswiderstand eines horizontal liegenden Zylinders im Wasser, der quer zur Achse geschleppt wurde.

 $2a=0,05$  m, Wassertemperatur  $10^{\circ}$  C,  $\rho_K=0,92$  sek/m<sup>2</sup>.

Fahrt Nr.	Geschwindigkeit $U$ m/sek	Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$ m	Widerstand			Beiwert $\zeta = \frac{W_Z}{F \cdot \gamma \cdot U^2 / 2g}$	Kennwert $2aU\rho_K$	Reynoldssche Zahl $\Re = \frac{2aU}{Z}$
			des Kastens u. Zylinders $W_{KZ}$ kg	des Kastens allein $W_K$ kg	des Zylinders allein $W_Z$ kg			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,4635	0,01095	0,476	0,186	0,290	1,177	0,0213	$1,78 \cdot 10^4$
2	0,7220	0,0266	1,040	0,340	0,700	1,170	0,0332	$2,77 \cdot 10^4$
3	0,9920	0,0502	1,953	0,560	1,393	1,233	0,0456	$3,80 \cdot 10^4$
4	1,4930	0,1136	4,444	1,280	3,164	1,239	0,0687	$5,72 \cdot 10^4$
5	2,0210	0,2081	7,856	2,320	5,536	1,185	0,0929	$7,74 \cdot 10^4$
6	2,545	0,3300	12,588	3,650	8,938	1,205	0,1171	$9,76 \cdot 10^4$
7	3,035	0,4695	17,664	5,250	12,414	1,175	0,1396	$1,16 \cdot 10^5$
8	3,895	0,7735	28,578	8,540	20,038	1,171	0,1791	$1,49 \cdot 10^5$
9	3,945	0,7940	29,478	8,760	20,718	1,180	0,1816	$1,51 \cdot 10^5$
10	4,000	0,8160	30,148	8,820	21,328	1,161	0,1840	$1,53 \cdot 10^5$
11	5,088	1,3200	46,134	14,380	31,754	1,069	0,2340	$1,95 \cdot 10^5$
12	5,435	1,5080	51,294	15,860	35,434	1,046	0,2502	$2,08 \cdot 10^5$

Das Ähnlichkeitsgesetz bei Vorwiegen der Zähigkeitskräfte, d. h. die Abhängigkeit des Vorganges von der Reynoldsschen Zahl bzw. der Kennzahl oder dem Kennwert (s. o.), findet sich naturgemäß vollauf bestätigt. Alle an Zylindern verschiedenen Durchmessers vorgenommenen Versuche ergeben nämlich — von der kurzen Stelle des Abfalls aus den genannten Gründen abgesehen — ein eindeutiges Widerstandsgesetz. Für die Baupraxis, der solche Erwägungen ungewohnt sind, sei an dieser Stelle hervorgehoben, daß in gewissen Fällen der Bewegungswiderstand dünner Zylinder absolut größer sein kann, als der Widerstand doppelt oder dreifach so starker Zylinder bei gleicher Länge und derselben Geschwindigkeit. Dies ist der Fall, wenn dabei der Strömungszustand aus dem Bereich hoher Widerstandsbeiwerte in den Zustand mit kleinen Widerstandsbeiwerten hinüber wechselt bzw. umgekehrt. Bei den vorliegenden Versuchen ist beispielsweise bei rund 4 m/sek Geschwindigkeit der Widerstand des Zylinders mit 50 mm Durchmesser erheblich größer als der des gleich langen Zylinders mit 100 mm Durchmesser bei gleicher Geschwindigkeit; und ebenso ist bei z. B. 1,5 m/sek Geschwindigkeit der Widerstand des letzteren merklich größer als der Widerstand des 200 mm starken Zylinders.

Tabelle 9. Bewegungswiderstand eines horizontal liegenden Zylinders im Wasser, der quer zur Achse geschleppt wurde.  
 $2a = 0,100$  m (glatt), Wassertemperatur  $10^{\circ}$  C,  $\rho_K = 0,92$  sek/m<sup>2</sup>.

Fahrt Nr.	Geschwindigkeit $U$ m/sek	Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$ m	Widerstand			Beiwert $\zeta = \frac{W_Z}{F \cdot \gamma \cdot U^2 / 2g}$	Kennwert $2aU\rho_K$	Reynoldssche Zahl $\Re = \frac{2aU}{Z}$
			des Kastens u. Zylinders $W_{KZ}$ kg	des Kastens allein $W_K$ kg	des Zylinders allein $W_Z$ kg			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,515	0,0135	0,923	0,210	0,713	1,178	0,04732	$3,94 \cdot 10^4$
2	0,517	0,0136	0,916	0,210	0,706	1,154	0,04756	$3,96 \cdot 10^4$
3	0,973	0,0483	3,073	0,540	2,533	1,167	0,08970	$7,48 \cdot 10^4$
4	1,009	0,0519	3,454	0,585	2,869	1,228	0,09285	$7,74 \cdot 10^4$
5	1,483	0,1122	7,366	1,350	6,016	1,192	0,1436	$1,20 \cdot 10^5$
6	2,001	0,2042	12,752	2,380	10,372	1,128	0,1842	$1,54 \cdot 10^5$
7	2,248	0,2577	15,580	3,050	12,530	1,081	0,2068	$1,72 \cdot 10^5$
8	2,262	0,2616	15,764	2,970	12,794	1,086	0,2082	$1,74 \cdot 10^5$
9	2,529	0,3260	17,924	3,670	14,254	0,972	0,2328	$1,94 \cdot 10^5$
10	2,727	0,3790	21,371	4,220	17,152	1,006	0,2510	$2,09 \cdot 10^5$
11	2,747	0,3850	21,050	4,290	16,760	0,991	0,2530	$2,11 \cdot 10^5$
12	2,890	0,4260	23,354	4,740	18,614	0,971	0,2660	$2,22 \cdot 10^5$
13	2,913	0,4330	23,252	4,820	18,432	0,974	0,2680	$2,23 \cdot 10^5$
14	3,083	0,4840	24,772	5,400	19,372	0,887	0,2840	$2,37 \cdot 10^5$
15	3,352	0,5740	30,960	6,400	24,560	0,949	0,3080	$2,57 \cdot 10^5$
16	3,368	0,5780	26,385	6,400	19,985	0,769	0,3100	$2,58 \cdot 10^5$
17	3,420	0,5960	25,771	6,640	19,131	0,713	0,3150	$2,63 \cdot 10^5$
18	3,600	0,6605	25,868	7,340	18,528	0,623	0,3310	$2,76 \cdot 10^5$
19	3,615	0,6660	24,906	7,400	17,506	0,584	0,3330	$2,77 \cdot 10^5$
20	3,910	0,7793	26,467	8,620	17,847	0,501	0,3600	$3,00 \cdot 10^5$
21	4,095	0,8540	23,080	9,420	13,660	0,360	0,3770	$3,14 \cdot 10^5$
22	4,600	1,0785	27,980	11,860	16,120	0,333	0,4230	$3,52 \cdot 10^5$
23	4,605	1,0810	27,874	11,900	15,974	0,328	0,4240	$3,53 \cdot 10^5$
24	4,630	1,0920	28,214	12,000	16,214	0,330	0,4260	$3,55 \cdot 10^5$
25	5,230	1,3950	37,606	15,140	22,460	0,357	0,4810	$4,01 \cdot 10^5$

Tabelle 10. Bewegungswiderstand eines horizontal liegenden Zylinders im Wasser, der quer zur Achse geschleppt wurde.  
 $2a = 0,150$  m, Wassertemperatur  $10^{\circ}$  C,  $\rho_K = 0,92$  sek/m<sup>2</sup>.

Fahrt Nr.	Geschwindigkeit $U$ m/sek	Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$ m	Widerstand			Beiwert $\zeta = \frac{W_Z}{F \cdot \gamma \cdot U^2 / 2g}$	Kennwert $2aU\rho_K$	Reynoldssche Zahl $\Re = \frac{2aU}{Z}$
			des Kastens u. Zylinders $W_{KZ}$ kg	des Kastens allein $W_K$ kg	des Zylinders allein $W_Z$ kg			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,094	0,00045	0,084	0,046	0,038	1,250	0,013	$1,08 \cdot 10^4$
2	0,334	0,00570	0,549	0,070	0,479	1,241	0,0461	$3,84 \cdot 10^4$
3	0,534	0,01455	1,286	0,168	1,118	1,140	0,0737	$6,14 \cdot 10^4$
4	0,768	0,0301	2,772	0,320	2,452	1,207	0,106	$8,84 \cdot 10^4$
5	0,910	0,0422	3,940	0,480	3,460	1,214	0,126	$1,05 \cdot 10^5$
6	1,042	0,0553	5,560	0,625	4,935	1,322	0,144	$1,20 \cdot 10^5$
7	1,216	0,0754	7,168	0,870	6,298	1,238	0,168	$1,40 \cdot 10^5$
8	1,334	0,0907	7,988	1,080	6,908	1,128	0,185	$1,54 \cdot 10^5$
9	1,495	0,1140	9,926	1,360	8,566	1,114	0,207	$1,72 \cdot 10^5$
10	1,740	0,1550	11,716	1,800	9,916	0,948	0,240	$2,00 \cdot 10^5$
11	2,029	0,2098	13,674	2,420	11,254	0,795	0,280	$2,33 \cdot 10^5$
12	2,251	0,2583	12,576	2,960	9,616	0,552	0,311	$2,59 \cdot 10^5$
13	2,272	0,2632	14,490	2,990	11,500	0,648	0,314	$2,62 \cdot 10^5$
14	2,528	0,3258	12,820	3,660	9,160	0,416	0,349	$2,91 \cdot 10^5$
15	2,528	0,3258	13,304	3,660	9,644	0,438	0,349	$2,91 \cdot 10^5$
16	3,032	0,4690	18,348	5,220	13,128	0,415	0,419	$3,49 \cdot 10^5$
17	3,068	0,4797	19,320	5,370	13,950	0,430	0,423	$3,53 \cdot 10^5$
18	3,561	0,6467	26,572	7,200	19,372	0,443	0,492	$4,10 \cdot 10^5$
19	4,056	0,8385	33,952	9,260	24,692	0,436	0,560	$4,67 \cdot 10^5$

## 2. Ein rauher Zylinder.

(Siehe Abb. 11 und größer Abb. 14.)

Das Ergebnis, daß der Widerstandsbeiwert für den Zylinder von 150 mm Durchmesser im Bereich oberhalb des Abfalls durchweg etwas, wengleich unwesentlich, höher liegt als bei den Zylindern von 100 und 200 mm Durchmesser, wurde z. Z. der Messungen darauf zurückgeführt, daß möglicherweise etwaige Rauigkeitsunterschiede des lackierten Holzes und der sauber abgedrehten Metalloberfläche in diesem Sinne wirken könnten. Es lag daher nahe, den Einfluß absichtlicher Rauigkeit unmittelbar durch Versuche festzustellen. Zu diesem Zweck wurde der 100 mm starke Zylinder mit Siderosten gestrichen und noch feucht mit gleichmäßig feinem Sande von 0,3 bis 0,45 mm Korngröße bedeckt. Dadurch erhielt die Oberfläche die Rauigkeit etwa von feinem Schmirgelpapier. Der Durchmesser des Zylinders vergrößerte sich durch den Überzug um etwa 1 mm.

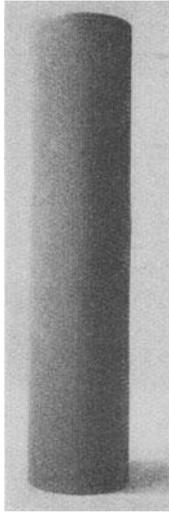


Abb. 14.  
Rauher Zylinder.

Die Ergebnisse der mit dem rauhen Zylinder ausgeführten Versuche sind in Tabelle 11 mitgeteilt worden. Die Widerstandsbeiwerte  $\zeta$  sind in die Abb. 12 und 13 miteingetragen worden. Das Resultat ist überraschend, und die Gründe sind noch nicht völlig aufgeklärt. Während bei geringen Geschwindigkeiten der Widerstand durch die Rauigkeit nicht merklich beeinflusst wird, fällt er zwischen  $U =$  rund 0,8 und 2,9 m/sek merklich unter den Widerstand des glatten Zylinders und ist bei  $U = 1,3$  m/sek kaum halb so groß. Bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit kehrt sich das Verhältnis wieder um. Der Widerstand des rauhen Zylinders ist bei höheren Kennzahlen wesentlich größer

Tabelle 11. Bewegungswiderstand eines horizontal liegenden Zylinders im Wasser, der quer zur Achse geschleppt wurde.

$2a = 0,101$  m, Wassertemperatur  $10^{\circ}\text{C}$ ,  $\rho_K = 0,92$  sek/m<sup>2</sup>.

Fahrt Nr.	Geschwin- digkeit $U$  m/sek	Geschwin- digkeits- höhe $\frac{U^2}{2g}$  m	Widerstand			Beiwert $\zeta = \frac{W_Z}{F \cdot \gamma \cdot U^2 / 2g}$	Kennwert $2a U \rho_K$	Reynolds- sche Zahl $\Re = \frac{2a U}{Z}$
			des Kastens u. Zylinders $W_{KZ}$  kg	des Kastens allein $W_K$  kg	des Zylin- ders allein $W_Z$  kg			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,983	0,0493	2,928	0,560	2,368	1,057	0,0913	$7,61 \cdot 10^4$
2	1,255	0,0803	3,032	0,885	2,147	0,589	0,1166	$9,72 \cdot 10^4$
3	1,490	0,1132	5,224	1,280	3,944	0,766	0,1385	$1,15 \cdot 10^5$
4	1,755	0,1570	7,840	1,740	6,100	0,855	0,1631	$1,36 \cdot 10^5$
5	2,020	0,2080	10,624	2,390	8,234	0,871	0,1877	$1,57 \cdot 10^5$
6	2,290	0,2673	14,026	3,040	10,986	0,904	0,2128	$1,77 \cdot 10^5$
7	2,350	0,2815	14,452	3,200	11,252	0,881	0,2183	$1,82 \cdot 10^5$
8	2,530	0,3263	17,396	3,660	13,736	0,925	0,2350	$1,96 \cdot 10^5$
9	3,070	0,4803	26,500	5,360	21,140	0,968	0,2852	$2,38 \cdot 10^5$
10	3,310	0,5583	30,132	6,220	23,912	0,943	0,3075	$2,56 \cdot 10^5$
11	3,290	0,5515	30,314	6,140	24,174	0,964	0,3057	$2,55 \cdot 10^5$
12	3,610	0,6642	36,228	7,400	28,828	0,956	0,3353	$2,79 \cdot 10^5$
13	3,830	0,7477	41,088	8,280	32,808	0,966	0,3560	$2,97 \cdot 10^5$
14	4,070	0,8443	45,932	9,330	36,602	0,953	0,3780	$3,15 \cdot 10^5$
15	0,525	0,01405	0,964	0,162	0,802	1,255	0,0488	$4,07 \cdot 10^4$
16	0,733	0,0274	1,814	0,317	1,497	1,202	0,0681	$5,68 \cdot 10^4$
17	0,898	0,0411	2,844	0,465	2,379	1,272	0,0834	$6,95 \cdot 10^4$
18	1,280	0,0835	3,176	0,940	2,236	0,588	0,1190	$9,91 \cdot 10^4$
19	1,533	0,1197	5,948	1,420	4,528	0,833	0,1424	$1,19 \cdot 10^5$
20	1,794	0,1641	8,320	1,920	6,400	0,858	0,1666	$1,39 \cdot 10^5$
21	2,056	0,2153	11,324	2,480	8,844	0,904	0,1910	$1,59 \cdot 10^5$
22	0,912	0,0424	2,656	0,480	2,176	1,129	0,0847	$7,06 \cdot 10^4$
23	1,015	0,0525	3,060	0,590	2,470	1,035	0,0943	$7,86 \cdot 10^4$
24	1,129	0,0650	3,184	0,610	2,574	0,872	0,1045	$8,70 \cdot 10^4$
25	1,220	0,0759	3,092	0,850	2,242	0,650	0,1134	$9,45 \cdot 10^4$
26	1,276	0,0830	3,240	0,930	2,310	0,613	0,1186	$9,88 \cdot 10^4$
27	1,346	0,0924	3,800	1,100	2,700	0,643	0,1250	$1,04 \cdot 10^5$
28	1,339	0,0914	3,748	1,080	2,668	0,642	0,1244	$1,04 \cdot 10^5$

als der Widerstand des glatten Zylinders, wie man auch ohne genaue Überlegung erwartet hätte; aber bei genauerer Überlegung ist auch dies Ergebnis wieder überraschend, weil die Widerstandserhöhung auf etwa den 1½fachen Betrag<sup>6</sup> erfolgt und man sonach wohl auf einen wieder geänderten (rückgebildeten?) Strömungsvorgang schließen muß. Dabei liegen hier sicher keine Zufallsergebnisse vor; die Messungen haben auch nicht den Charakter, der einem Übergangsbereich zukommt. Sie sind durch weitere Kontrollfahrten — allerdings stets mit der gleichen Apparatur — immer wieder bestätigt worden und harren noch der Aufklärung.

### C. Vergleich der Druckverteilungs- und Widerstandsmessungen mit Ergebnissen von anderer Seite.

Soweit die unter A und B mitgeteilten experimentellen Ergebnisse nicht neu sind, befinden sie sich mit den wenigen, in der Literatur verfügbaren Meßergebnissen von anderer Seite in guter Übereinstimmung. Sie sind zu diesem Zwecke noch einmal in den Abb. 15, 15a, 16 neben den Versuchsergebnissen anderer Forscher und den Ergebnissen der Theorie aus Teil II dieser Arbeit dargestellt worden. Abb. 15 zeigt in logarithmischer Auftragung über der Reynoldsschen Zahl  $Re = \frac{2a \cdot U}{Z}$  bzw. der Kennzahl  $2a \cdot U \cdot \rho_K$  den Widerstandsbeiwert  $\zeta = \frac{W}{F \cdot \gamma \cdot \frac{U^2}{2g}}$  im ganzen,

<sup>6</sup> Vgl. auch die von Wieselsberger, Z. F. M. 1920, S. 54, schon bei verhältnismäßig geringer Rauigkeitsvermehrung erhaltenen Widerstandsbeiwerte von stoffüberspannten Flugzeugstreben in Luft.

Eisner, Widerstandsmessungen.

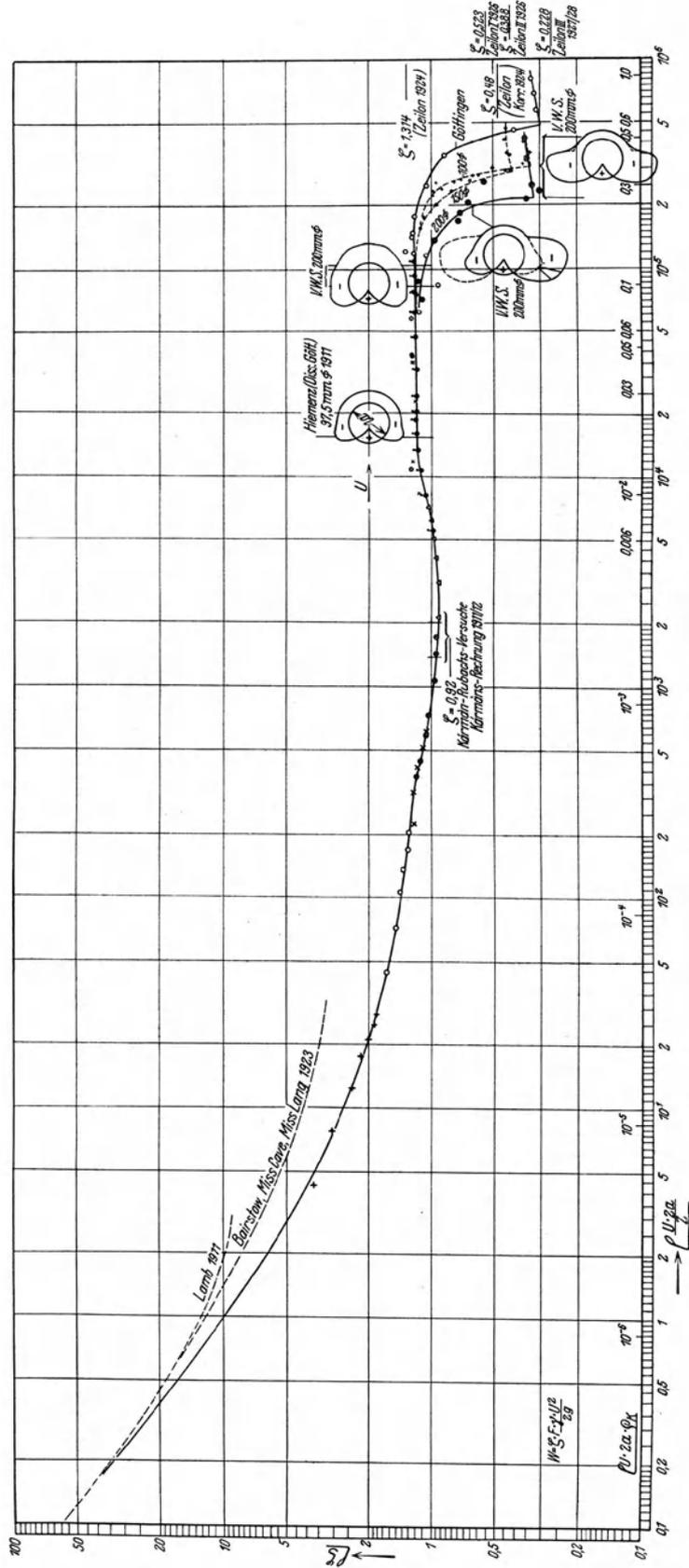


Abb. 15. Widerstandsbeiwert und Druckverteilung für einen unströmten Kreiszyylinder.

durch Messungen und Rechnungen bisher überdeckten Bereich. Neben den beschriebenen Messungen sind die Göttinger Ergebnisse eingetragen worden<sup>7</sup>. Der charakteristische Widerstandsabfall liegt zwischen den Werten  $\Re = 10^5$  und  $10^6$ . In der Gegend unterhalb von  $\Re = 1$  sind die Widerstandsbeiwerte eingetragen, wie sie sich nach Lambs Rechnung von 1911 ergeben (s. Teil II, Abschnitt C) und darüber hinaus durch die Rechnung von Bairstow, Miß Cave und Miß Lang (1923) fortgesetzt werden können. Meßergebnisse bei derartig kleinen Reynoldsschen Zahlen liegen zuverlässig nicht vor; wenn man aber die Göttinger Messungen (Wieselsberger 1921) nach kleinen Reynoldsschen Zahlen hin extrapoliert, so ergibt sich ein sehr gut stimmender Anschluß an die theoretischen Werte; diese weichen aber schon in der Gegend  $\Re \approx 1$  sehr bald stark von den Versuchsergebnissen ab, welche stärker fallen als die erwähnten Werte. Es erfolgt dann — im Sinne wachsender Reynolds-

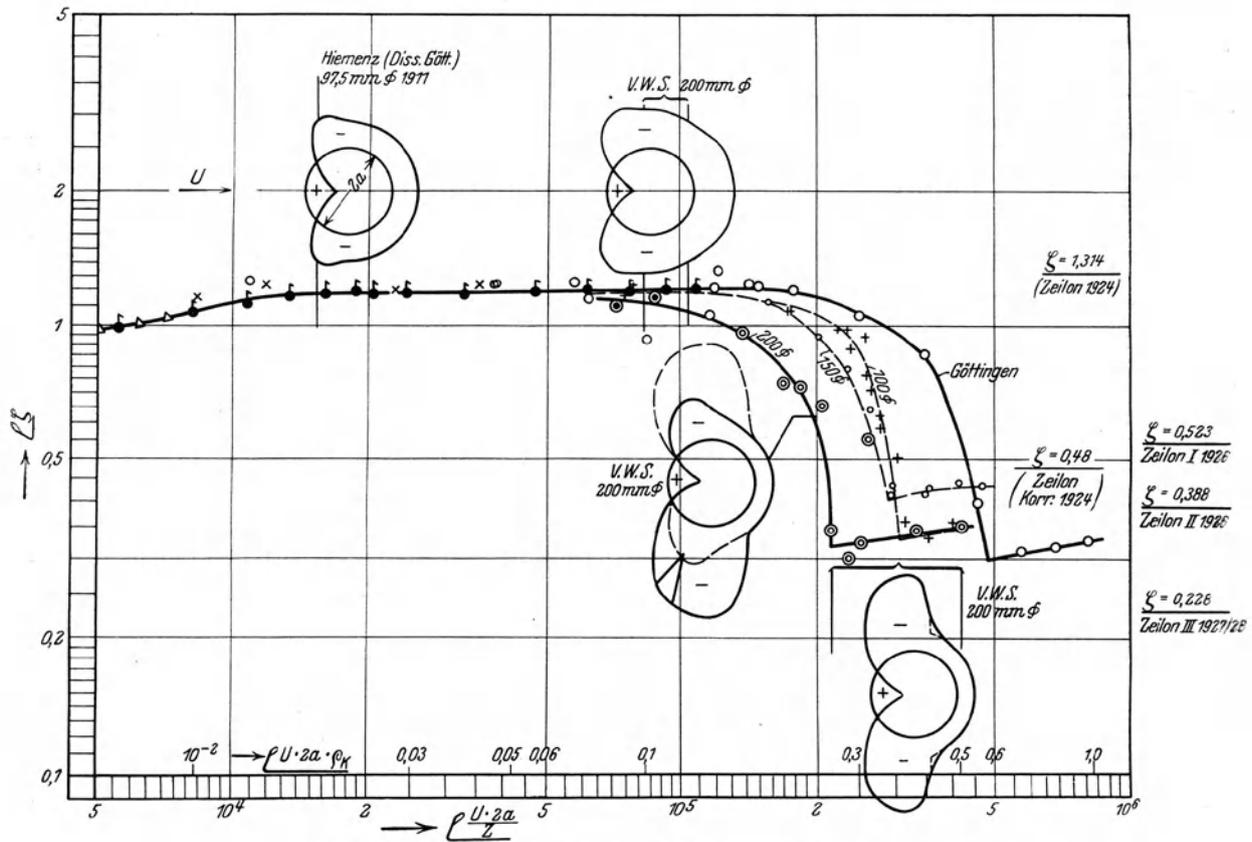


Abb. 15a. Widerstandsbeiwert und Druckverteilung für einen umströmten Kreiszyliner.

scher Zahlen — ein weiteres, aber geringer werdendes Fallen von  $\zeta$  bis zu einem auffälligen, flachen Minimum bei etwa  $\Re = 2 \cdot 10^3$ <sup>8</sup> in Höhe von etwa  $\zeta = 0,92$ ; dies ist in sehr guter Übereinstimmung der Wert, den man aus der halbempirischen Widerstandsrechnung bei Vorhandensein einer Kármánschen Wirbelstraße mit den von Kármán und Rubach bei  $2a \cdot U \cdot \rho_K = 0,00165 \div 0,0024$  beobachteten Abmessungen der Strömung errechnen kann (s. Teil II, Abschnitt A4). Bis zu  $\Re =$  etwa  $2 \cdot 10^4$  steigt dann der Widerstandsbeiwert  $\zeta$  bis auf 1,2 langsam wieder an, um von hier ab bis zu dem plötzlichen Abfall zwischen  $\Re = 10^5$  und  $10^6$  in dieser Höhe konstant zu bleiben. Nach dem plötzlichen Abfall, den man mit dem „Turbulentwerden der Grenzschicht“ in Verbindung zu bringen hat, liegt das — bisher nur

<sup>7</sup> Von einer Eintragung der Messungen von Relf und Simmons, 1925, welche im Danziger Vortrag des Verf. diskutiert wurden, ist hier abgesehen worden. Ebenso von den Messungen von Relf und Ower 1921.

<sup>8</sup> Auch von Relf 1913/14 festgestellt.

kurze<sup>9</sup> — Gebiet des niedrigen Beiwertes  $\zeta \cong 0,33 \div 0,34$ , von dem man noch nicht aussagen kann, ob bei weiterem Wachsen der Reynoldsschen Zahlen der Beiwert gleich bleiben oder — wie es fast den Anschein hat — etwas ansteigen wird. Die Widerstandskurve nach den Göttinger Messungen stimmt mit der Kurve nach den vorliegenden Messungen sowohl im Gebiete unterhalb wie oberhalb des plötzlichen Abfalles gut überein, zeigt aber den Abfall an anderer Stelle. Außer möglichen Einflüssen infolge verschiedener Rauigkeit der Zylinderoberfläche dürfte vor allem der mitgeschleppte Rahmen für den Unterschied verantwortlich zu machen sein. Der Rahmen war bei allen Zylindergrößen derselbe, so daß der dünnste Zylinder wahrscheinlich die geringste Störung erfahren hat und die Ergebnisse mit wachsendem Zylinderdurchmesser schlechter werden. Es ist sonach wahrscheinlich, daß der in Göttingen gemessene Abfall der Widerstandskurve an der richtigen Stelle liegt. Doch bleibt die Richtigkeit dieser Erklärung für die Abweichung der Nachprüfung bedürftig.

Ferner sind die nach der Oseen-Zeilonschen Theorie von 1924 (s. Teil II Abschnitt D) und der Zeilonschen Rechnung von 1926/27 (s. Teil II Abschnitt E) sich ergebenden „asymptotischen“ Widerstandsbeiwerte für  $\Re \rightarrow \infty$  eingetragen worden.

Von den Messungen der Druckverteilung sind einige charakteristische Verteilungskurven jeweils an derjenigen Stelle der Widerstandskurve aufgezeichnet worden, an die sie gehören. Bei etwa  $\Re = 1,5 \cdot 10^4$  liegen die Messungen von Hiemenz<sup>10</sup>. Trotz der Verschiedenheit der Versuchsanordnung stimmen diese Messungen in ihrem ganzen Charakter gut zu den oben beschriebenen Messungen mit den Zylindern von 50 und 200 mm Durchmesser, die bei etwas höheren Reynoldsschen Zahlen ( $\Re =$  etwa  $8 \cdot 10^4$  bis  $1,1 \cdot 10^5$ ) liegen. Der Kielwassersog ist der Zahlgröße nach allerdings bei den vorliegenden Messungen etwas kleiner als bei Hiemenz; deutlich ist jedoch bei beiden Meßergebnissen der Druckwiederanstieg in der Gegend der Ablösung der in diesem Bereich noch laminaren Grenzschicht zu erkennen.

Im Übergangsbereich ist nur ein besonders charakteristisches, unsymmetrisches Druckbild aufgezeichnet und oberhalb die typische Druckverteilung mit den sehr großen seitlichen Unterdruckklappen (s. oben unter A).

In Abb. 16 ist über dem abgewickelten Zylinderumfang die Größe  $\beta = \frac{\Delta p}{U^2} \sqrt{\frac{\gamma}{2g}}$  aufgetragen, und zwar

1. nach der Potentialtheorie (vgl. Teil II, Abschnitt A 1),
2. nach einer gemessenen Druckverteilungskurve im Gebiet

$$\Re = 8 \cdot 10^4 \text{ bis } 1,1 \cdot 10^5.$$

3. nach einer gemessenen Druckverteilungskurve im Gebiet oberhalb  $\Re = 10^6$ ,
4. nach Oseen-Zeilon 1924 (vgl. Teil II, Abschnitt D),
5. nach Zeilon 1926/27 (vgl. Teil II, Abschnitt E)<sup>11</sup>.

Ferner sind verschiedene gemessene Kielwasserdrucke mit den zugehörigen Reynoldsschen Zahlen und in einer Nebenfigur auf Grund der Messungen die Größe des Kielwasserdruckes in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl aufgetragen; letztere Darstellung zeigt naturgemäß große Ähnlichkeit mit dem Verlauf des Widerstandswertes bei wachsender Reynoldsscher Zahl (Abfall zwischen zwei Gebieten von je sich gleichbleibenden Werten) und erhärtet so, auch qualitativ, die bekannte Auffassung, daß der Kielwassersog maßgebend für den Gesamtwiderstand ist. An den Seiten des Zylinders scheint eine entsprechende Gesetzmäßigkeit aber nicht zu gelten; hier sieht es so aus, als ob der Unterdruck bei wachsender Reynoldsscher Zahl erst zurückgeht, bevor er dann so mächtig ansteigt.

Nicht eingetragen sind die Meßergebnisse von Lafay (1912) und Jacob (1921) in Luft. Die Ergebnisse von Jacob zeigen grundsätzlich den gleichen charakteristischen Verlauf wie die Messungen in Teil A und von Hiemenz, wenngleich quantitativ einige Abweichungen

<sup>9</sup> Weil die Versuche mit wirtschaftlich vertretbaren Mitteln und Einrichtungen zu höheren Reynoldsschen Zahlen bisher nicht vordringen konnten.

<sup>10</sup> Diss. Göttingen 1911.

<sup>11</sup> Die Druckverteilung nach Lamb 1911 (vgl. Teil II, Abschnitt C) ist nicht eingetragen worden, da sie offenbar stark von der Wirklichkeit abweicht.

bestehen; sie sind nicht eingetragen worden, um die Klarheit des Bildes nicht zu zerstören. Sie liegen alle unterhalb des Abfalls des Widerstandsbeiwertes. Lafay untersuchte die Druckverteilung zur Klärung des Magnuseffektes. Während sein primitives Verfahren beim rotieren-

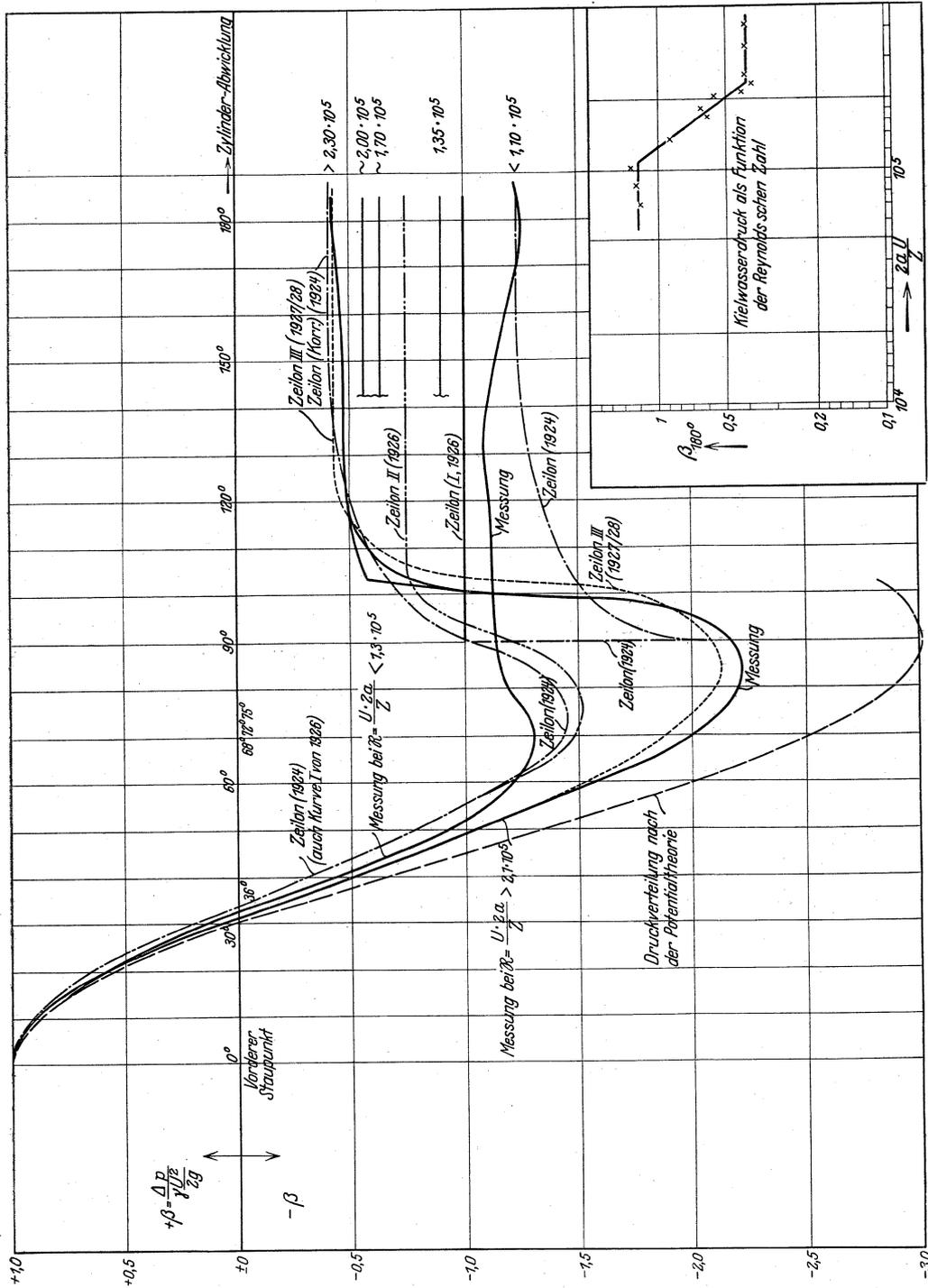


Abb. 16. Druckverteilung an der Oberfläche eines umströmten Kreiszyllinders (ebenes Problem).

den Zylinder vielleicht einigermaßen zuverlässig gewesen sein mag, dürfte die Störung bei rein translatorisch bewegtem Zylinder erheblich gewesen sein. Das von außen an die Zylinder wandung herangeführte, schräg abgeschnittene Meßröhrchen ergab sicherlich fehlerhafte Ablesungen. Die Eichung des Röhrchens war auch nur bei einer einzigen Geschwindigkeit erfolgt, und zwar durch Herstellung der Übereinstimmung mit den Ergebnissen der mühsamen „Mé-

thode du trou“, d. i. Druckmessung an einer einzigen Anbohrung, die nach jeder Messung ein Verdrehen des Zylinders und zur Vornahme jeder Ablesung ein erneutes Anblasen mit Geschwindigkeitseinregulierung erforderlich machte. Zu den hohen Reynoldsschen Zahlen über die Stelle des Abfalls des Widerstandskoeffizienten hinaus ist Lafay nicht vorgedrungen; er hat also auch die dort nach den vorliegenden Messungen charakteristische Druckverteilung nicht finden können.

## D. Messungen an lotrechten, die freie Oberfläche durchsetzenden Kreiszyllindern.

### 1. Vorbemerkung.

An einer freien Flüssigkeitsoberfläche besteht die physikalische Bedingung gleichen Druckes. Die durch die Umströmung des Körpers bei seiner Bewegung relativ zur Flüssigkeit hervorgerufenen Druckunterschiede müssen sich daher an einer freien Oberfläche in Spiegelhebungen oder -senkungen auswirken. Im Rahmen des Zieles der Gesamtuntersuchungen ist es von großem Interesse zu erfahren, ob der Wechsel im Strömungszustand zwischen  $\Re = 10^5$  und  $10^6$  sich auch an der Flüssigkeitsoberfläche bemerkbar macht. Das Auftreten eines Wechsels in der Oberflächengestaltung wird nun zwar in Abhängigkeit von der Größe der Reynoldsschen Zahl der Vorgänge unter Wasser zu erwarten sein. Da aber die Oberflächenerscheinungen — von Kapillarkräften abgesehen — wesentlich der Schwerkraft unterliegen und deren Einfluß gegenüber die Wirkung der Zähigkeitskräfte der Flüssigkeit völlig zurücktritt, so gilt für den Ablauf der Oberflächenerscheinungen nicht mehr das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz, sondern das Froudesche. Nach diesem ist für den Vorgang nicht die Größe  $\Re = \frac{2a \cdot U}{Z}$ , sondern die Froudesche Zahl  $\mathfrak{F} = \frac{2a \cdot g}{U^2}$ ,

$g =$  Erdbeschleunigung, maßgebend. Die durch eine Ausführungsgröße bestimmten Zahlen  $\Re$  und  $\mathfrak{F}$  lassen sich aber durch keine andere geometrisch ähnliche Anordnung gleichzeitig unverändert erhalten. Wo also Zähigkeitswirkungen und Schwerkraftwirkungen gleichzeitig in gleicher Größenordnung auftreten, gibt es überhaupt keine mechanische Ähnlichkeit mehr zwischen geometrisch ähnlichen Anordnungen. Durch Versuche in kleinem Maßstab kann daher in bestimmten Geschwindigkeitsbereichen höchstens die Stelle des ziemlich plötzlichen Auftretens einer veränderten Oberflächengestaltung, nicht aber deren Ablauf gemäß dem Froudeschen Gesetz festgestellt werden, wenn, wie im vorliegenden Fall, der Wechsel ursächlich durch das andere (Reynoldssche) Ähnlichkeitsgesetz bedingt ist.

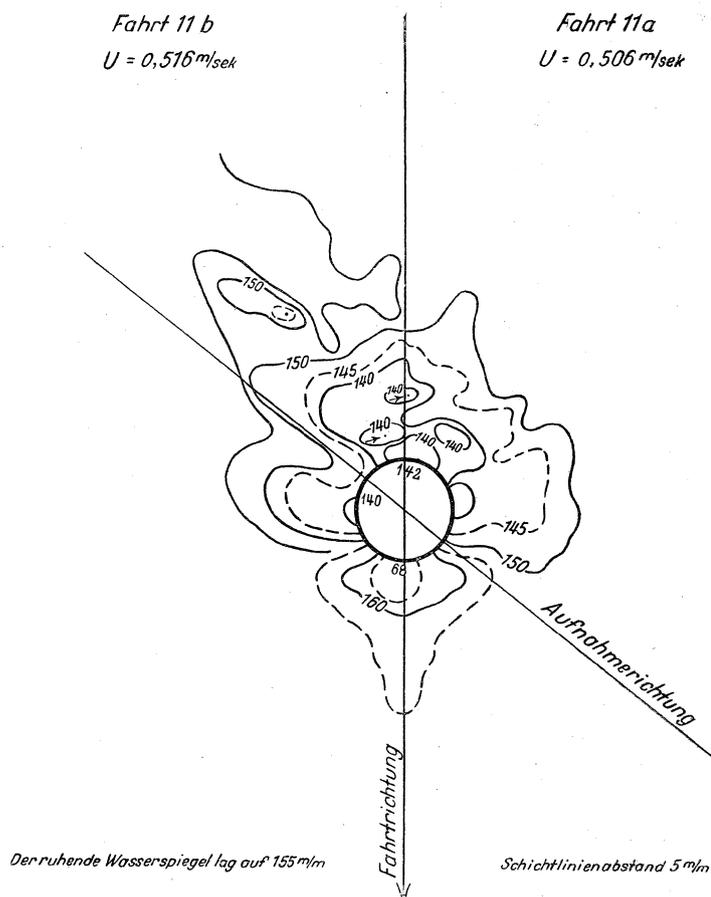


Abb. 17. Welle am Kreiszyllinder von 200 mm Durchmesser.

Diese Erkenntnis ist für Brückenpfeileruntersuchungen von großer Wichtigkeit.

Die Untersuchungen beschränkten sich daher auf die Feststellung der Form der Oberfläche bei zwei verschieden starken Zylindern. Die Durchmesser betragen 200 und 400 mm; die Tauchung und die Anordnung und Größe des unteren Abschlußbleches, das die Umströmung der unteren Endfläche ausschalten sollte und — im Hinblick auf das Ziel der Brückenpfeileruntersuchungen — in gewissem Sinne die Rolle der Gerinnesohle spielt, waren bei beiden Zylindern geometrisch ähnlich.

Von jeder Fahrt wurden Stereomomentaufnahmen des Wasserspiegels gemacht und am Stereoautographen ausgewertet. Die Höhenlinien im 5 mm Abstand sind unmittelbar in mühsamer Arbeit am Stereoautographen gewonnen worden. Dieses Verfahren ist hier in der Versuchstechnik des hydraulischen Laboratoriums erstmalig angewendet worden; die Ergebnisse sind daher neu<sup>12</sup>.

## 2. Zylinder von 200 mm Durchmesser.

Aus der Reihe der Ergebnisse am Zylinder von 200 mm Durchmesser sind nachstehend die Abb. 17 bis 19, 20, 21 wiedergegeben worden. Abb. 17 zeigt die Oberfläche bei einer Geschwindigkeit  $U \cong 0,50$  m/sek, Abb. 18 bei  $U = 1,30$ , Abb. 19 bei  $U = 1,75$  m/sek. Die Abb. 20 war die Unterlage zur Herstellung von Abb. 19. Abb. 21 zeigt die gesamte Anordnung am Schleppwagen bei  $U = 1,50$  m/sek. Die punktierten Linien der Abb. 17 bis 19 sind dort, wo die

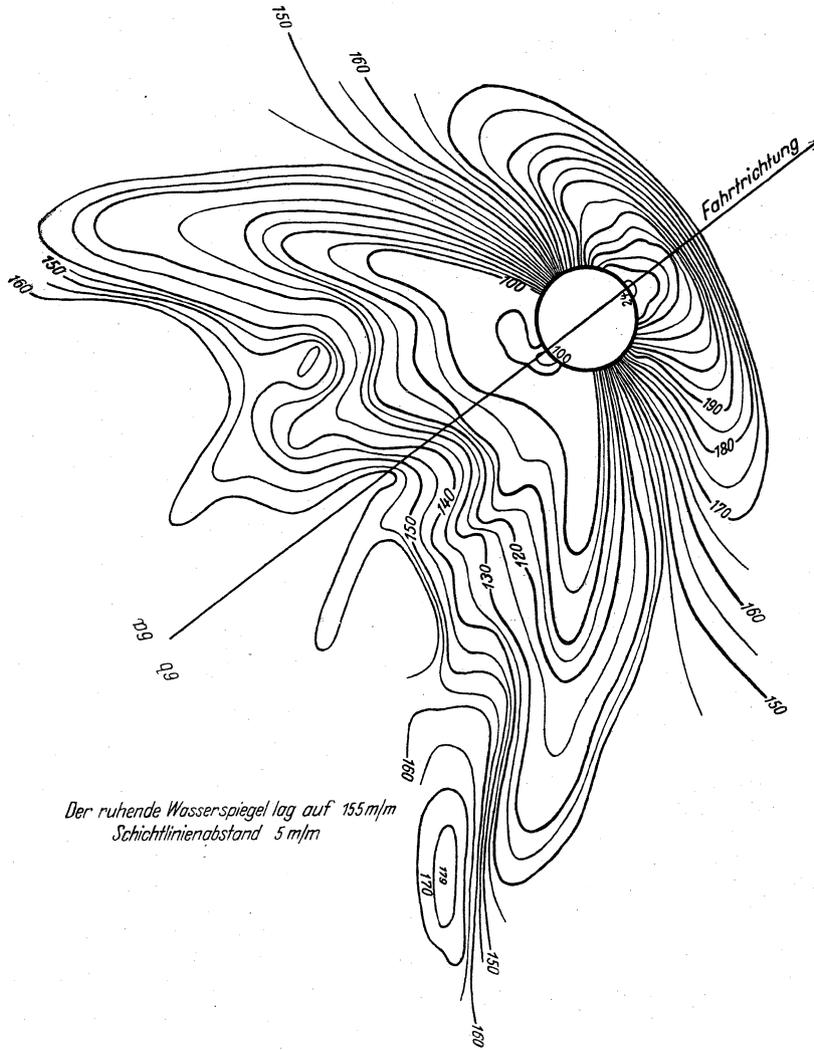


Abb. 18. Welle am Kreiszylinder von 200 mm Durchmesser. Fahrt 6a und b; Geschwindigkeit  $U = 1,30$  m/sek.

Bildteile in tiefen Mulden einseitig verdeckt waren, spiegelbildgemäß ergänzt worden. Die Geschwindigkeit von 0,5 m/sek liegt nun unmittelbar unterhalb des Abfalls des Widerstandsbeiwertes, die Geschwindigkeit von 1,30 m/sek etwa am Ende des Übergangsbereiches,  $U = 1,75$  m/sek oberhalb des Abfalls. Es zeigt sich, daß der in der Tiefe vor sich gehende Wechsel der Strömungsart auch an der Oberfläche deutlich in Erscheinung tritt. Bei  $U = 0,5$  m/sek beträgt an der Oberfläche die Überdruckhöhe im vorderen Staupunkt  $\Delta h = \frac{U^2}{2g} \cong 13$  mm; ebenso groß ist der Sog im hinteren Staupunkt. Die starken Absenkungen an den Seiten

<sup>12</sup> Auch für die Untersuchung der Umströmung eines schiffsähnlichen Körpers (Bug- und Heckwellen) ist dies Verfahren in der Preuß. Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau angewendet worden. Der mühseligen Auswertung unterzogen sich vor allem die Herren Trautmann und Zschiesche.

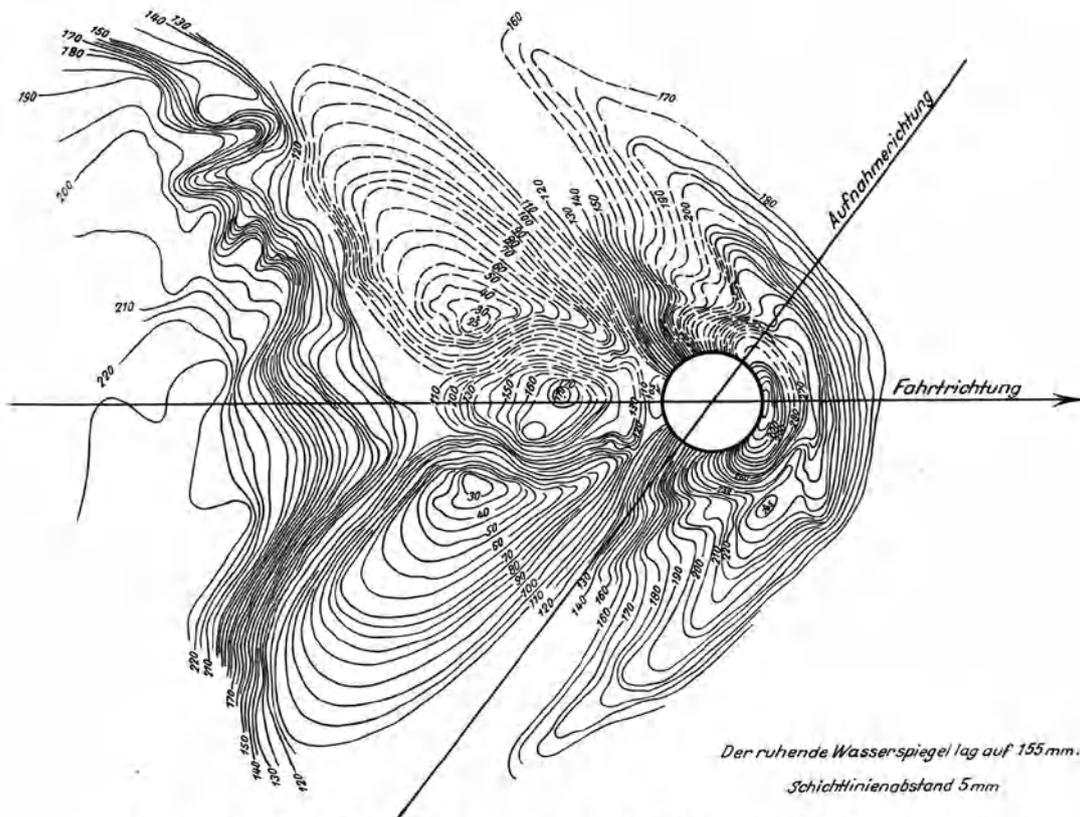


Abb. 19. Welle am Kreiszyylinder von 200 mm Durchmesser. Fahrt 12; Geschwindigkeit  $U = 1,75$  m/sek.

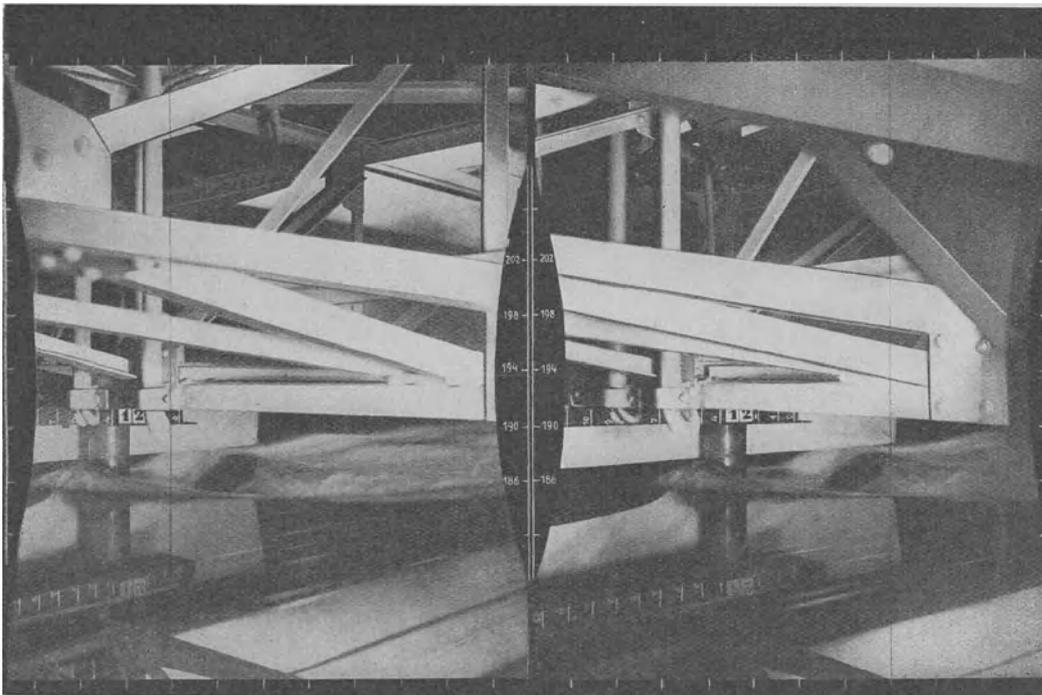


Abb. 20. Kreiszyylinder 200 mm Durchmesser;  $U = 1,75$  m/sek.

(15 mm) entsprechen ebenfalls gut der Druckverteilung. Bei höherer Geschwindigkeit verschwinden die seitlichen Absenkungen; die Druckerhöhung legt sich weiter um den Zylinder herum.

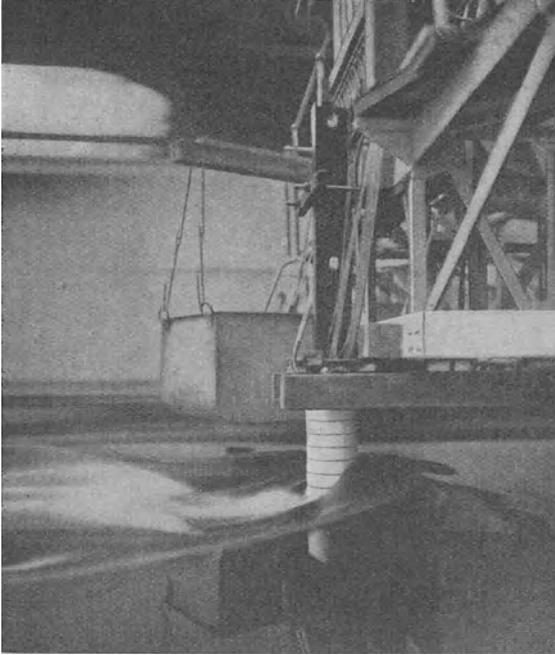


Abb. 21. Zylinder am Schleppwagen während eines Versuches.

Die Absenkung im Kielwasser unmittelbar am Zylinder verkleinert sich im Verhältnis zur Geschwindigkeitshöhe und beträgt bei  $U = 1,30$  m/sek nur etwa  $0,52 \cdot \frac{U^2}{2g}$ , bei  $U = 1,75$  m/sek nur noch etwa  $0,32 \cdot \frac{U^2}{2g}$ . Bei  $U = 1,75$  m/sek geht sogar die Absenkung im Kielwasser ganz verloren; hier zeigt sich eine Erhebung von rd. 20 mm über dem ruhenden Wasserspiegel neben tieferen Wassermulden von rd. 130 mm Absenktiefe. Diese Verringerung der Absenkung der Oberfläche unmittelbar hinter dem Zylinder bei höheren Geschwindigkeiten steht mit der Verkleinerung des Soges und dem Widerstandsabfall in Einklang. Die Ausbreitung der Wasserspiegelerhöhung über die ganze Vorderseite und über  $\vartheta = \pm 90^\circ$  hinaus ist aber bereits eine Erscheinung, die offenbar nicht mehr allein von der Druckverteilung in der Tiefe abhängt; sie ist mit ihr nicht mehr in Einklang. Ähnlichkeitsschlüsse zu ziehen, würde hier fehlerhaft sein.

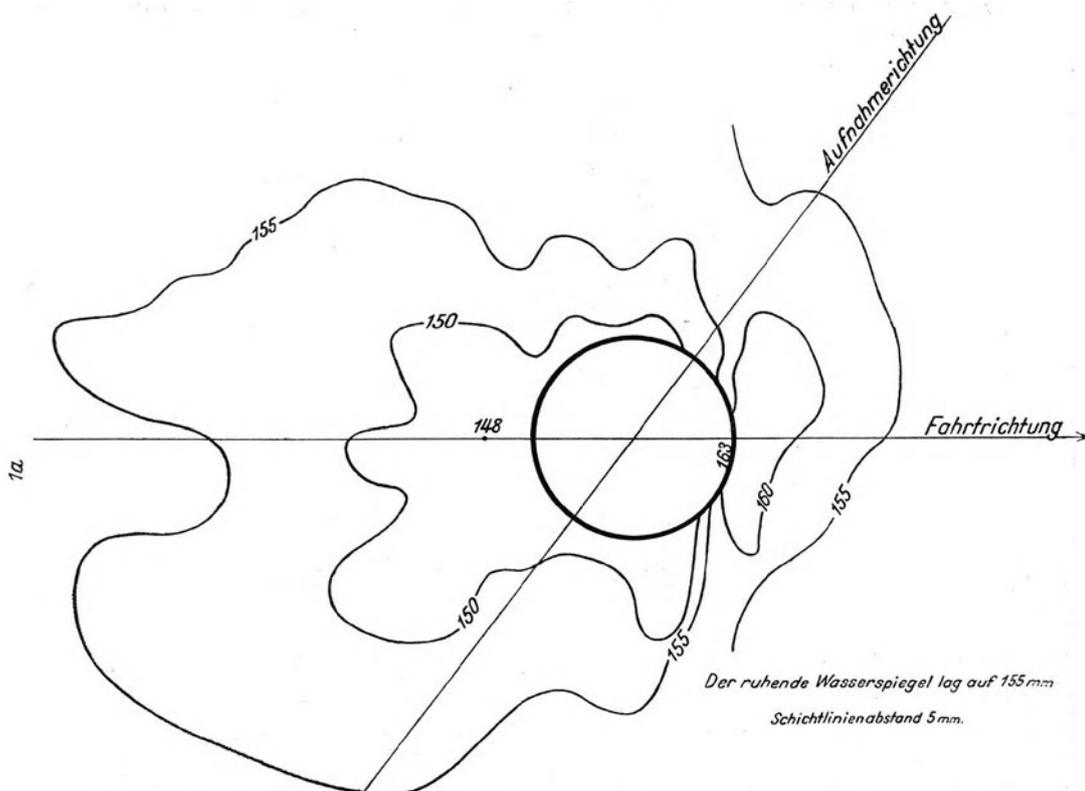


Abb. 22. Welle am Kreiszyllinder von 400 mm Durchmesser. Fahrt I und Ia; Geschwindigkeit  $U = 0,29$  m/sek.

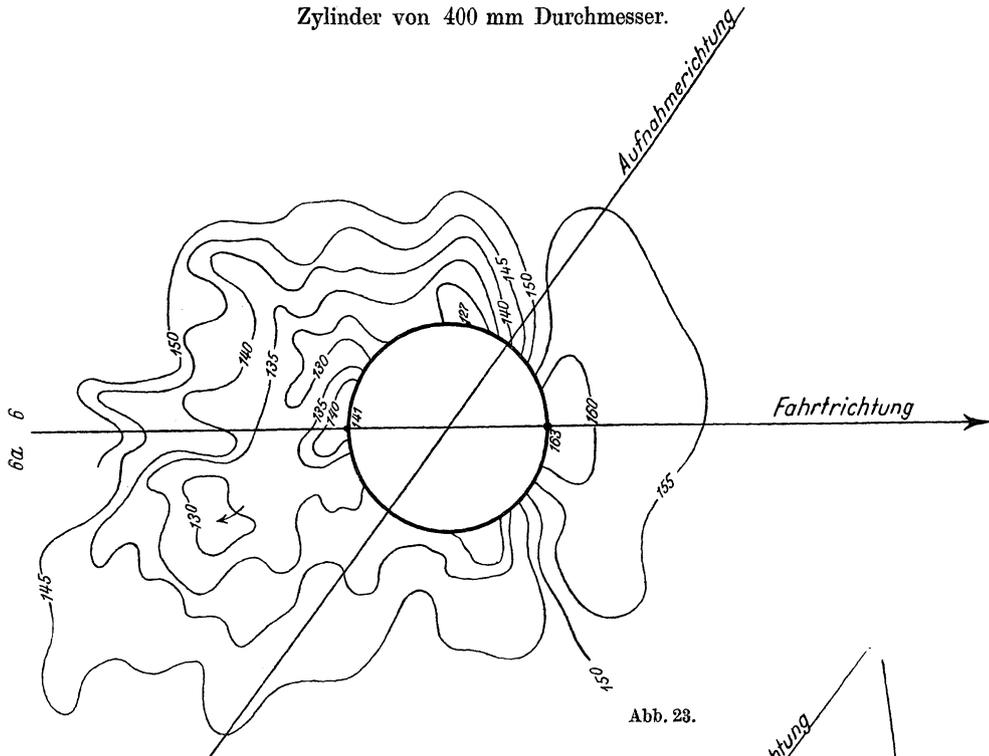


Abb. 23.

Der ruhende Wasserspiegel lag auf 155 mm  
Schichtlinienabstand 5 mm

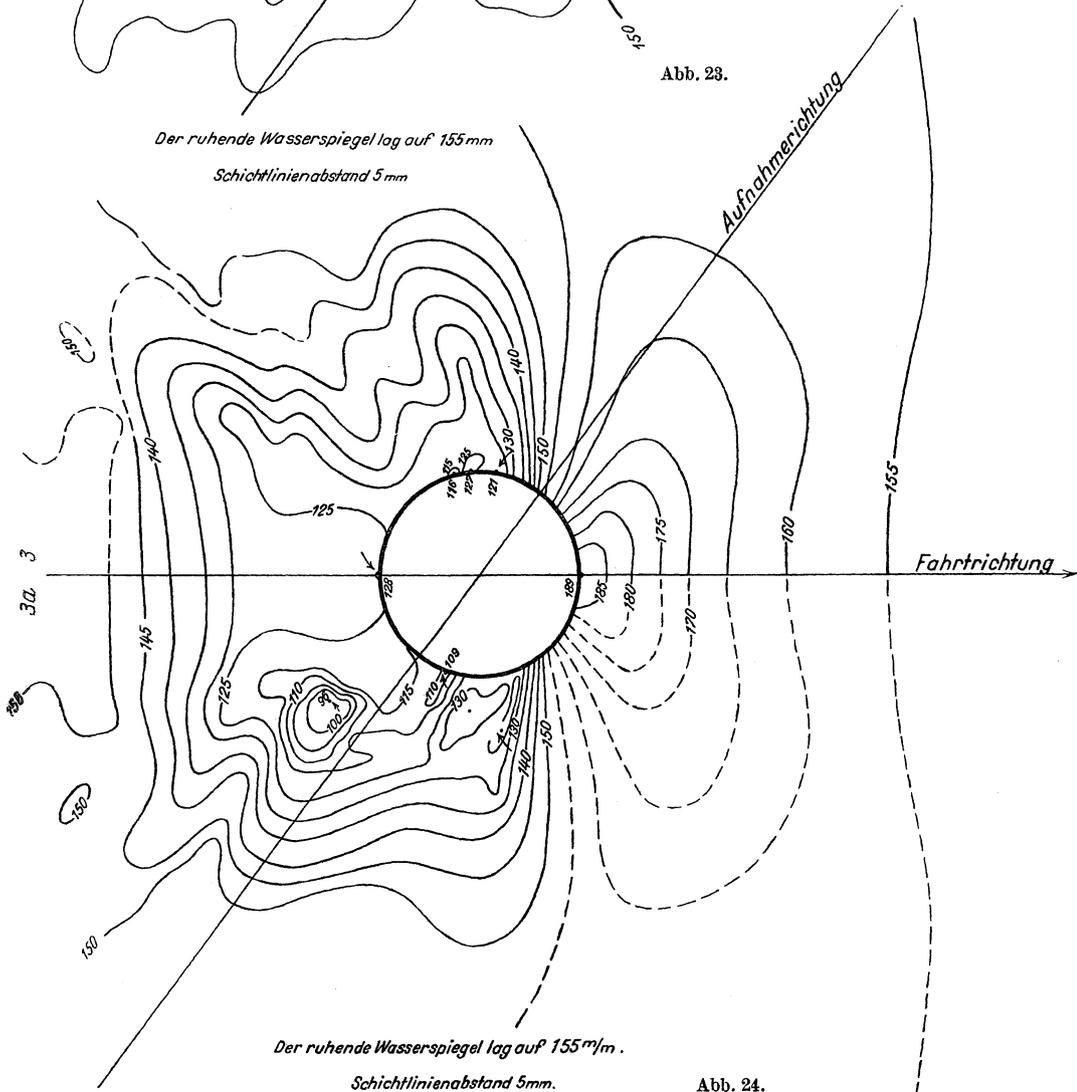


Abb. 24.

Der ruhende Wasserspiegel lag auf 155 m/m.

Schichtlinienabstand 5 mm.

Abb. 23. Welle am Kreiszyylinder von 400 mm Durchmesser. Fahrt 6 und 6 a; Geschwindigkeit  $U = 0,51$  m/sek.  
Abb. 24. Welle am Kreiszyylinder von 400 mm Durchmesser. Fahrt 3 und 3 a; Geschwindigkeit  $U = 0,86$  m/sek.

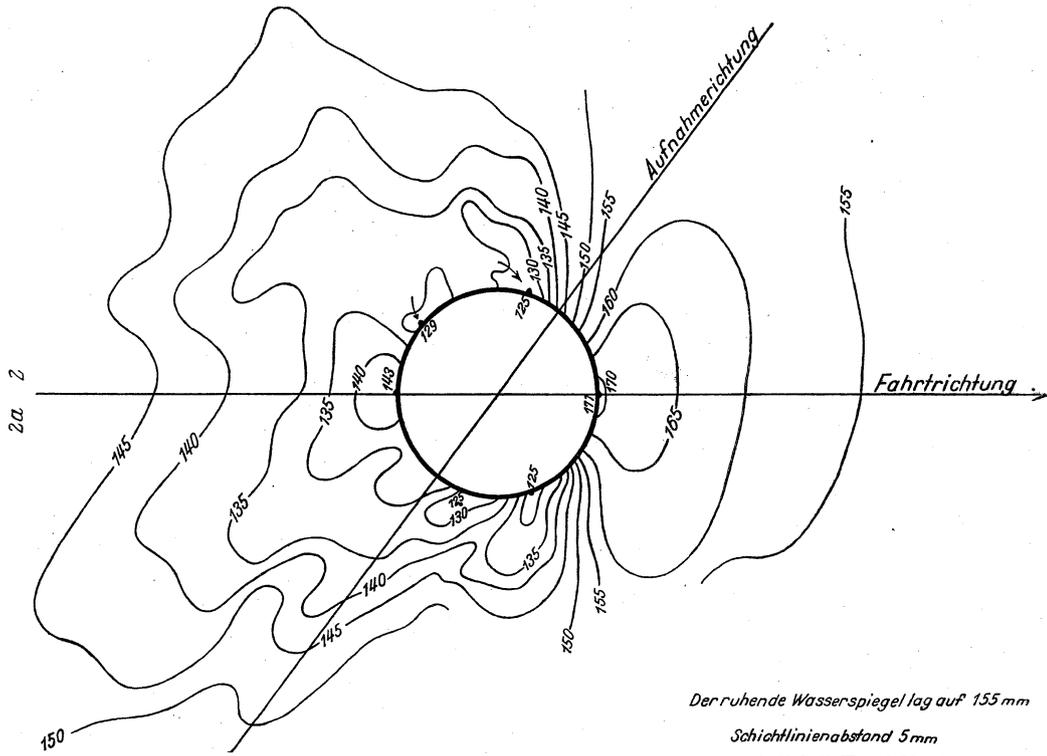


Abb. 25. Welle am Kreiszyylinder von 400 mm Durchmesser. Fahrt 2 und 2a; Geschwindigkeit  $U = 0,66$  m/sek.

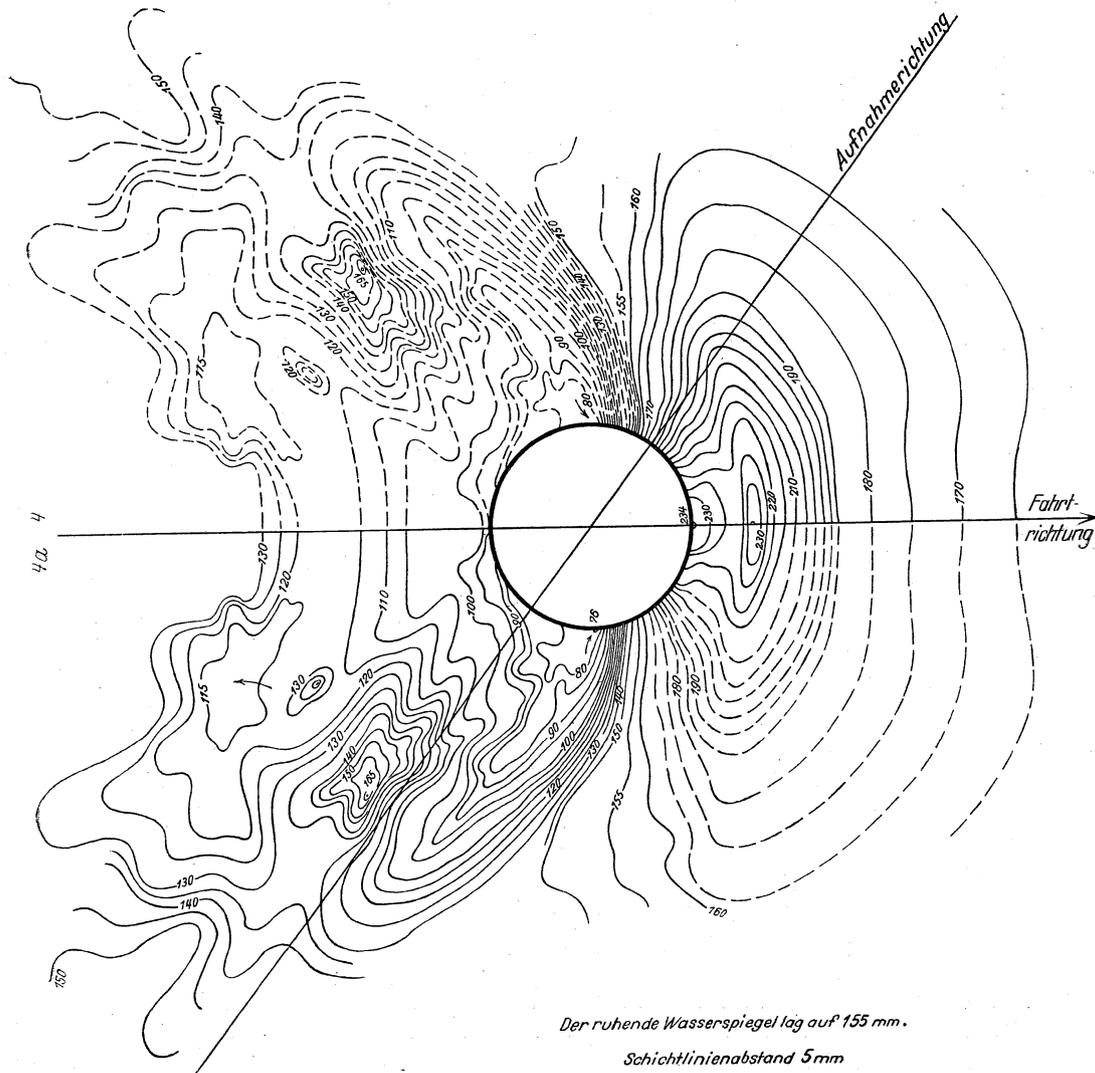


Abb. 26. Welle am Kreiszyylinder von 400 mm Durchmesser. Fahrt 4 und 4a; Geschwindigkeit  $U = 1,26$  m/sek.

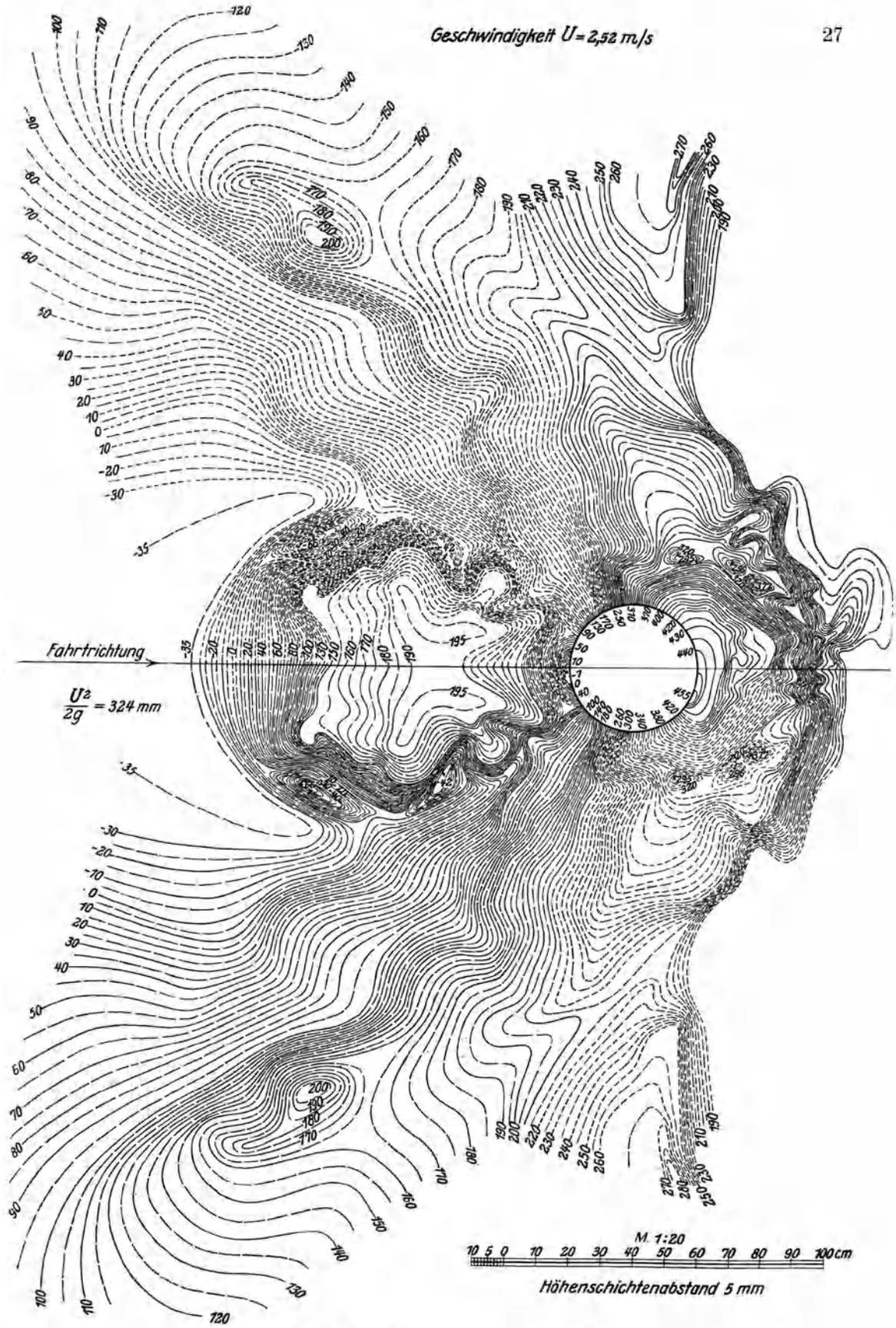
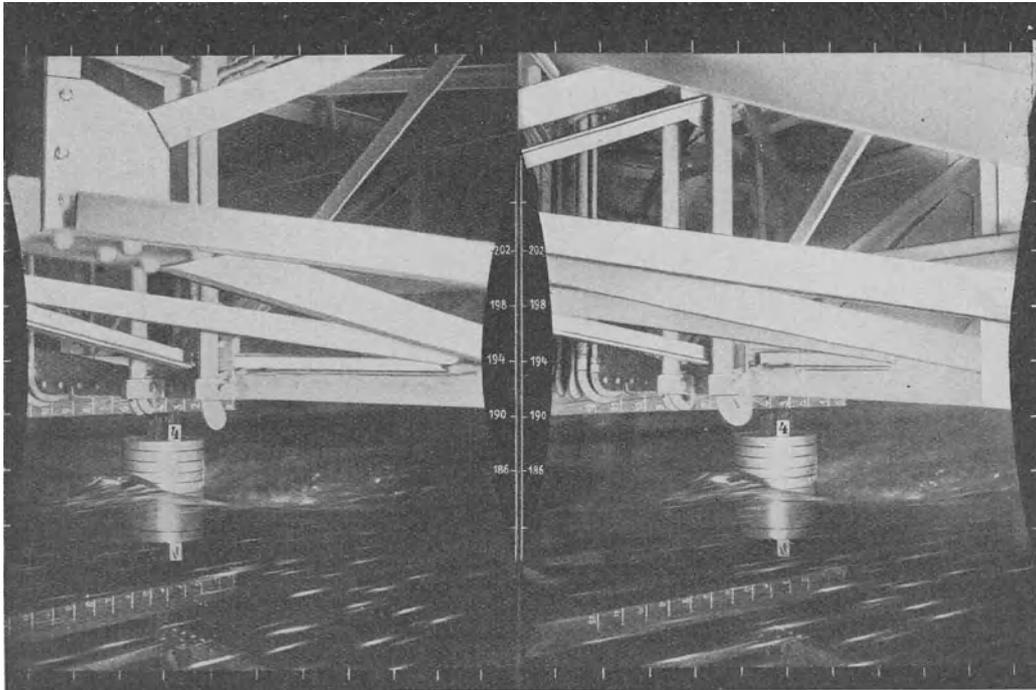
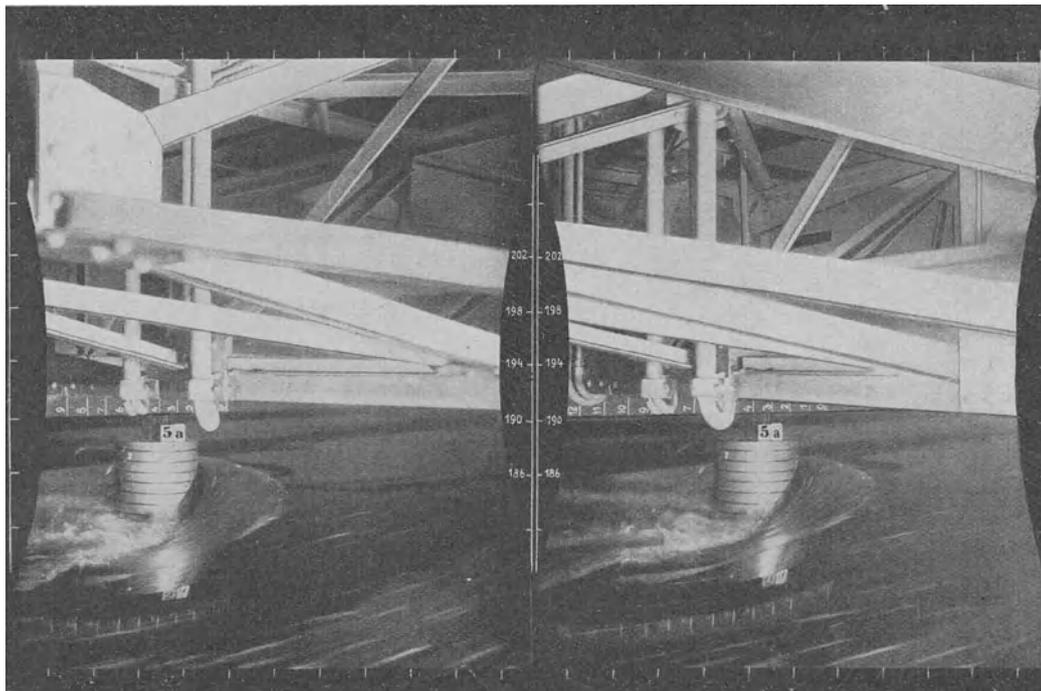


Abb. 29. Welle am Kreiszyylinder von 400 mm Durchmesser.

Die Abb. 27 u. 28 folgen aus Gründen der besseren räumlichen Einteilung hinter Abb. 31.

Abb. 30. Kreiszyllinder 400 mm Durchmesser,  $U = 1,26$  m/sek.Abb. 31. Kreiszyllinder 400 mm Durchmesser;  $U = 1,71$  m/sek.

### 3. Der Zylinder von 400 mm Durchmesser.

Die Abb. 22 bis 29 zeigen Höhengschichten der Wasserspiegeloberfläche nach der Auswertung der Stereoaufnahmen. Die Abb. 30 und 31 sind für die Abb. 26 und 28 Auswertungsunterlagen gewesen. Deutlich erkennt man, daß der Wechsel des Strömungszustandes zwischen Abb. 26 und 28 liegt, also zwischen  $U=1,26$  und  $U=1,71$  m/sek, d. h. etwa bei  $2a \cdot U$  bzw.  $2a \cdot U \cdot Q_K \cong 0,6$ , wie es nach Abb. 16 sein muß.

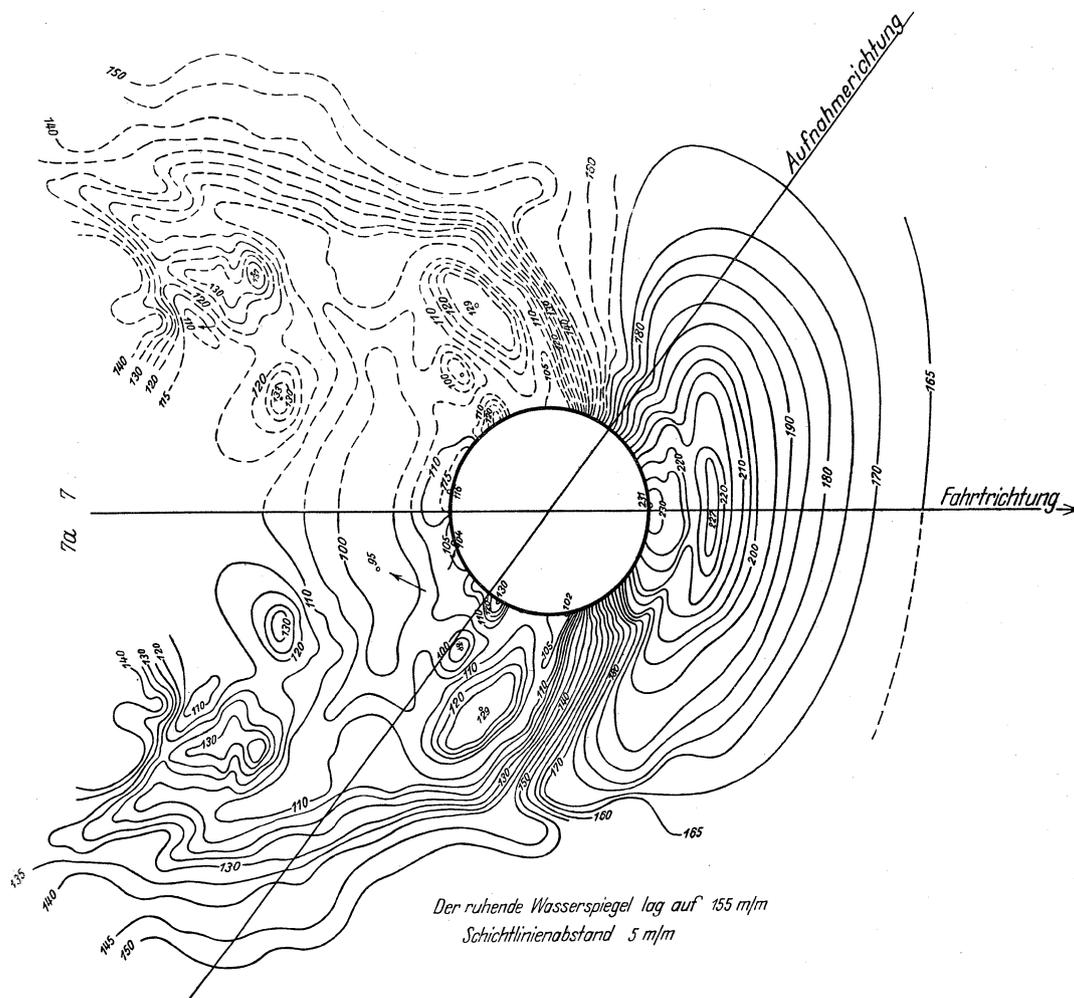


Abb. 27. Welle am Kreiszyylinder von 400 mm Durchmesser. Fahrt 7 und 7a; Geschwindigkeit  $U = 1,26$  m/sek.

### 4. Bemerkung.

Die in Abschnitt D zusammengefaßten Oberflächenaufnahmen sind naturgemäß nicht geeignet, genaue Auswertungsunterlagen für irgendwelche physikalisch interessierenden Größen zu liefern. Das liegt nicht an der (sehr genauen!) Methode, sondern vielmehr in der Natur des fließenden Wassers. Wäre die Auswertung jeder einzelnen Platte nicht so mühsam und kostspielig, so könnte man mit stereokinematographischen Aufnahmen und Auswertungen sehr aufschlußreiche Unterlagen erhalten.

Es ist zu wünschen, daß das Verfahren an geeigneten Objekten weitere Anwendungen erfährt.

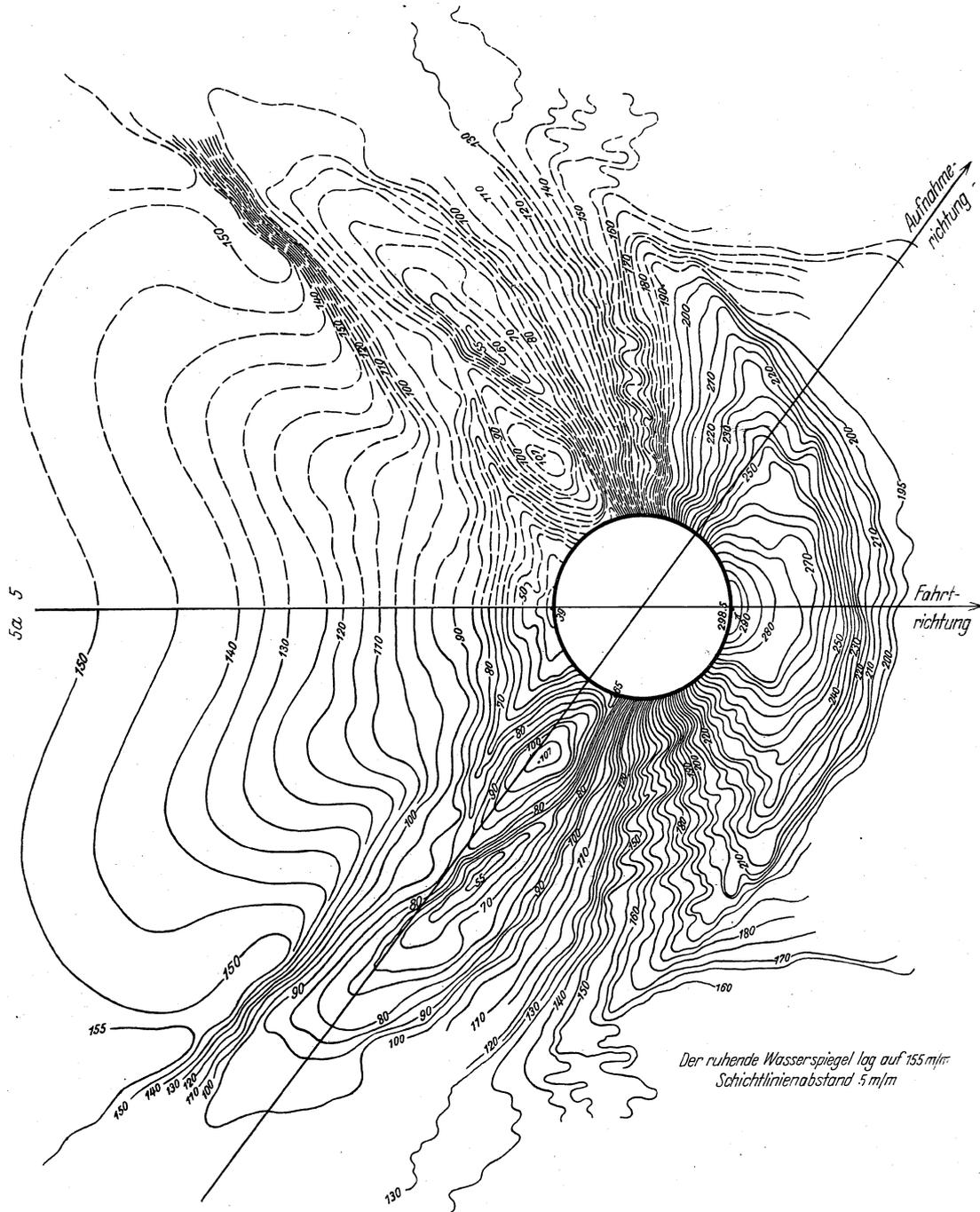


Abb. 28. Welle am Kreiszyylinder von 400 mm Durchmesser. Fahrt 5 und 5a; Geschwindigkeit  $U = 1,71$  m/sek.

## II. Stand der Hydrodynamik hinsichtlich des Widerstandsproblems eines angeströmten sehr langen Kreiszyinders (ebenes Problem).

Vorbemerkung. In den Abschnitten A und B soll ein möglichst vollständiger, aber nur andeutender Überblick über die durch die Überschriften jeweils gekennzeichneten Verfahren gegeben werden, nach denen man bisher bemüht war bzw. ist, das (ebene) Widerstandsproblem zu behandeln. Am Anfang steht einerseits die (keinen Widerstand liefernde) gewöhnliche

Potentialströmung in idealer Flüssigkeit (A1), andererseits das System der Bewegungsgleichungen zäher Flüssigkeit (B1). Es werden keine Ableitungen, sondern nur Gedankengänge, Ansätze und Resultate kritisch mitgeteilt. Dagegen sind in den folgenden Abschnitten C, D und E die modernen Lamb-Oseen-Zeilonschen Rechnungen eingehender behandelt; auf ihre Darlegung kam es dem Verf. in dem theoretischen Teil der vorliegenden Arbeit vor allem an. Den Schlußabschnitt F bildet ein kurzer, einige neue Gedanken enthaltender „Ausblick“; an diesen hofft Verf. in späterer Zeit einige Arbeiten anschließen zu können.

## A. Der Widerstand in reibungsloser Flüssigkeit.

### 1. Potentialtheorie; d'Alembertsches Paradoxon.

Die unbegrenzte ebene Potentialströmung um einen ruhenden Kreiszyylinder  $|z| = |x + iy| = a$ , die im Unendlichen die ungestörte (reelle) Geschwindigkeit  $-U$  besitzt, ist bekanntlich durch folgende Form des komplexen Potentials  $f = \varphi + i\psi$  gegeben:

$$f = -U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{C_0}{2\pi i} \cdot \ln z. \quad (1)$$

Die Zirkulationskonstante  $C_0$  bleibt hierbei unbestimmt und soll für die nachstehende kurze Diskussion gleich Null angenommen werden. Man erhält den Ansatz (1) entweder vom mathematischen Standpunkt aus durch Spezialisierung oder am anschaulichsten vom physikalisch-strömungstechnischen Standpunkt aus durch Superposition von 3 einfachen Strömungselementen. Im ersten Falle geht man von der (ebenen) Strömung im Außenraum eines zunächst beliebig gestalteten, einen einfach zusammenhängenden Raum einnehmenden (zylindrischen) Körpers aus, für welchen die Funktionentheorie gemäß dem Laurentschen Satz für  $f'(z) = u - iv$  die Potenzreihenentwicklung liefert:

$$f'(z) = C_1 + \sum_{n+1=2}^{\infty} C_{n+1} \cdot z^n - \frac{C_0}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot c_{n-1} \cdot z^n.$$

Im zweiten Fall überlagert man der rein translatorischen Strömung  $f_1 = -U \cdot z$  eine Doppelquelle  $f_2 = -\frac{Ua^2}{z}$  und einen Wirbelpunkt  $f_3 = \frac{C_0}{2\pi i} \cdot \ln z$ , beide in der Zylinderachse gelegen. Die Achse der Doppelquelle liegt in der mit der Anströmungsrichtung zusammenfallenden Richtung der reellen Achse. Die Doppelquelle bewirkt, daß die Stromlinien der Translationsströmung sich ausbiegen und den Zylinder umschließen. Der Wirbelpunkt bewirkt eine Zirkulation.

Im Falle  $C_0 = 0$  ergibt die Zerlegung der rechten Seite von (1) in reellen und imaginären Teil die Gleichung der Äquipotentiallinien:

$$\varphi = -Ux \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

und die Gleichung der Stromlinien:

$$\psi = -Uy \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Das Orthogonalnetz der Äquipotential- und Stromlinien ist in Abb. 32 gezeichnet worden.

Hieraus erhält man für die Geschwindigkeit  $v(u, v)$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -U \left( 1 + \frac{a^2(y^2 - x^2)}{r^4} \right), \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{2Ua^2x \cdot y}{r^4}, \end{aligned} \quad (2)$$

also am Zylinder für  $r = a$ ;  $x = a \cdot \cos \vartheta$ ,  $y = a \cdot \sin \vartheta$ :

$$\left. \begin{aligned} u|_{r=a} &= -2U \sin^2 \vartheta \\ v|_{r=a} &= 2U \sin \vartheta \cos \vartheta \end{aligned} \right\} |v| = 2U \sin \vartheta.$$

Im vorderen und hinteren Staupunkt ist  $u = v = 0$ . An den Stellen  $x = 0$ ;  $r = \pm i y = \pm a$ , d. h. an den Stellen  $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$  ist  $u = |u_{\max}| = -2U$ ;  $v = 0$ . Die Linien gleicher Geschwindigkeit sind Cassinische Kurven, die Kurve  $|v| = U$  ist eine durch  $x^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}$  gegebene gleichseitige Hyperbel. Aus dem Bernoullischen Theorem:  $\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{U^2}{2g}$  folgt mit  $p_0 = 0$  für den Druck am Zylinder:

$$p = \gamma \frac{U^2}{2g} - \gamma \frac{v^2}{2g}; \quad \beta = \frac{p}{\gamma \frac{U^2}{2g}} = 1 - 4 \sin^2 \vartheta. \quad (3)$$

Die Druckverteilung ist in Abb. 16 eingetragen worden; sie ist, wie man aus (3) erkennt, symmetrisch zu einer durch den Ursprung gehenden Ebene quer zur Strömung. Daher ergibt sich in der Bewegungsrichtung kein Widerstand. An dieser Symmetrie würde auch die Berücksichtigung einer Zirkulation (d. h.  $C_0 \neq 0$ ) nichts ändern.

Es läßt sich allgemein für beliebige Körperform beweisen<sup>13</sup>, daß der Widerstand eines in ruhender idealer Flüssigkeit mit konstanter Geschwindigkeit translatorisch bewegten festen

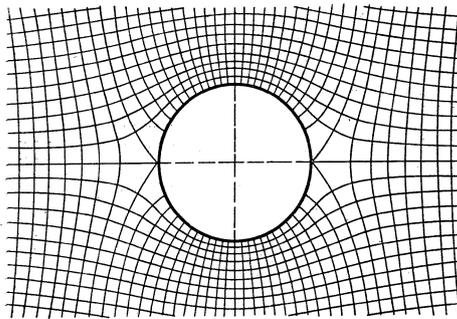


Abb. 32.

Tabelle 12.

$\vartheta^\circ =$	$\beta =$	Bemerkungen
0	+ 1,000	$u = v = 0$
10	+ 0,879	
20	+ 0,532	
30	0	$ v  = U$
40	- 0,653	
50	- 1,347	
60	- 2,000	
70	- 2,532	
80	- 2,879	
90	- 3,000	$u =  u_{\max}  = -2U, v = 0$

Körpers in Bewegungsrichtung gleich Null ist. Dies Resultat wird als D'Alembertsches, häufig auch als Dirichletsches Paradoxon bezeichnet. Das Strömungsbild auf der „geometrischen“ Vorder- und Rückseite<sup>14</sup> eines quer zur Strömung symmetrischen Körpers ergibt bei gewöhnlicher Potentialströmung vollkommene Symmetrie. Das Verhalten in wirklichen Flüssigkeiten, die am Körper haften, weicht hiervon grundsätzlich ab: Infolge der Flüssigkeitsreibung wird von der rückhaltenden Wirkung an der Körperoberfläche die Flüssigkeit in einer „Grenzschicht“<sup>15</sup> in Mitleidenschaft gezogen. Die Reibungswirkung und die als Folge hiervon eintretende Ablösung der „gesunden“ Strömung von der Zylinderwandung führt zur Ausbildung eines „Kielwassers“ hinter dem Zylinder, d. h. zu einer Unsymmetrie und damit zu einem Widerstand in der Strömungsrichtung. Die klassische Potentialtheorie kann hierüber nichts aussagen, weil sie auf reibungsfreie Flüssigkeit beschränkt ist.

## 2. Umströmter Halbkörper in unbegrenztem Medium.

Man kann eine Unsymmetrie z. B. durch die Annahme einführen, daß man sich das einseitig bis ins Unendliche reichende Kielwasser hinter dem Körper erstarrt und mit ihm zu einem Halbkörper verwachsen vorstellt. Den Nachweis, daß auch in diesem Fall der

<sup>13</sup> S. u. a. Lagally: Bayer. Akad. 1921, S. 909.

<sup>14</sup> Vgl. hierzu die Begriffe der „hydrodynamischen“ Vorder- und Rückseite in den Abschnitten C, D, E.

<sup>15</sup> S. Abschnitt B 2, S. 39.

Widerstand Null herauskommt, führt man am besten nach Prandtl<sup>16</sup>. Nachstehend sei der elementarere zweite Beweis, den Prandtl i. c. gibt, unwesentlich abgekürzt angeführt:

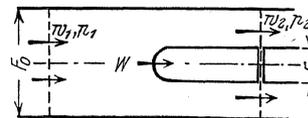
Man denkt sich zunächst den Halbkörper beiderseits durch Wände eingeschlossen. Mit den Bezeichnungen der Abb. 33 ergibt dann die Kontinuitätsbedingung:

$$w_1 = \frac{1}{F_0} \cdot w_2 (F_0 - F) = w_2 (1 - \alpha),$$

wenn  $\alpha = \frac{F}{F_0}$  gesetzt wird. Das Bernoullische Theorem liefert:  $p_1 - p_2 = \gamma \frac{w_2^2}{2g} (2\alpha - \alpha^2)$ . Bezogen auf den im Spalt (s. Abb.) herrschenden Druck  $p_2$  wird der Widerstand des durch den Spalt abgetrennten Teiles des Halbkörpers nach dem Impulssatz aus folgender Gleichung erhalten:

$$F_0 \left( p_1 + \gamma \frac{w_1^2}{g} \right) = (F_0 - F) \gamma \frac{w_2^2}{g} + F_0 \cdot p_2 + W,$$

$$W = \frac{F \cdot \gamma w_2^2}{2g} \cdot \alpha.$$



Man ersieht hieraus, daß mit wachsendem  $F_0$  bis zur Erreichung des Zustandes unbegrenzter Flüssigkeit, d. h. mit  $\alpha \rightarrow 0$  auch  $W \rightarrow 0$  geht.

Andererseits könnte man sich etwa den — durchlässig gedachten — Zylinder in die durch die Überlagerung einer Quelle  $\frac{E}{2\pi} \cdot \ln z$  und einer Translationsströmung  $U \cdot z$  gebildete Strömung derart hineingesetzt denken, daß die Stromlinie  $\psi = 0$  sich der Vorderseite des Zylinders möglichst gut anschließt. Fordert man dann, daß die Quelle entsprechend ihrer Stärke für die von ihr in jeder Zeiteinheit gelieferte Impulsmenge selbst aufkommen muß, so kann man eine dementsprechende Reaktionskraft erhalten.

Daß die beiden vorstehenden Überlegungen im Hinblick auf das eigentliche Problem nur sehr schwache Versuche, rechnerisch etwas auszusagen, darstellen, die mit der Wirklichkeit kaum etwas zu tun haben, braucht wohl nicht betont zu werden. Sie sind lediglich der Vollständigkeit halber angeführt worden.

### 3. Diskontinuierliche Potentialbewegung; symmetrisch angeströmtes, vorn kreisförmig gewölbtes Hindernis (krumme Platte) mit Helmholtz-Kirchhoffschen Diskontinuitätsflächen und Totwasser.

Helmholtz hat in einer Abhandlung<sup>17</sup> vom Jahre 1868 auf die Möglichkeit des Auftretens von Diskontinuitätsflächen bei der Bewegung von Flüssigkeiten hingewiesen, u. a. auf den Austritt rauchgeschwängelter Luft aus einer Öffnung und auf „allerlei seltsame und sprungweise eintretende Unregelmäßigkeiten, mit denen wohl jeder zu kämpfen hatte, der Beobachtungen über Flüssigkeitsbewegungen anstellte“. An einer Unstetigkeitsfläche macht die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit einen endlichen Sprung, während die Normalkomponente stetig bleibt. Infolge ihrer mangelnden Stabilität<sup>18</sup> können sich Diskontinuitätsflächen nicht lange aufrechterhalten. Sie sind aber eine sehr nützliche Arbeitshypothese; denn wenn man sie in der reibungslosen Flüssigkeit zuläßt, kann das Paradoxon des verschwindenden Bewegungswiderstandes aufgelöst werden. Gleichzeitig läßt sich durch diese Hypothese das z. B. bei Körpern mit Ecken gemäß dem Bernoullischen Theorem in idealer Flüssigkeit theoretisch mögliche Auftreten physikalisch unzulässiger negativer Drucke, d. h. das unzulässige Anwachsen der Geschwindigkeit vermeiden. Wenn auch, wie sich heute mit Sicherheit sagen läßt, die Helmholtzsche diskontinuierliche Potentialbewegung mit einem Totwassergebiet hinter dem Körper das Widerstandsproblem bestimmt nicht zutreffend zu lösen imstande ist,

<sup>16</sup> „Bemerkung zu dem vorstehenden Aufsatz“ von D. Thoma: Z. F. M. 1925, S. 208, sowie T. B. der Flugzeugmeisterei II, S. 79.

<sup>17</sup> S. Berliner Berichte 1868.

<sup>18</sup> Vgl. Lord Rayleigh: Scientific Papers I, S. 297; III, S. 491.

so bedeutet sie jedoch zweifellos einen ganz erheblichen Fortschritt. Selbstverständlich ist der Begriff einer unendlich dünnen „Wirbelschicht“, d. h. rotorbehafteten Schicht, die eine endliche Geschwindigkeitsdifferenz vermittelt, in bewegten Flüssigkeiten nur als eine Idealisierung der tatsächlichen Vorgänge aufzufassen, die die charakteristischen Merkmale herauszuheben bemüht ist. Sofern sich „dünne, rotorbehaftete Schichten mit relativ zu ihrer Dicke merklichem Geschwindigkeitsgefälle quer zur Erstreckungsrichtung“ bilden<sup>19</sup> können, etwa sich im Innern der Flüssigkeit von einer, zur Bildung erforderlichen festen Wand ablösen<sup>20</sup>, durch „Zusammenfluß“ bilden (oder aber durch Zusammenfallen einer freien Begrenzung in das Innere der Flüssigkeit hinein zustande kommen), wickeln sie sich bald in Wirbelgebilde auf, wie die Beobachtung zeigt. Während man, um die Bildung der Diskontinuitätsflächen zu verstehen, die Reibung ursächlich berücksichtigen muß, kann bei Betrachtung ihres weiteren Schicksales bzw. des Schicksales der Zerfallgebiete in erster Näherung die Theorie der idealen Flüssigkeiten herangezogen werden. Die Beschreibung des zeitlichen Verlaufs dieses Vorgangs ist noch nicht vollständig gelungen<sup>21</sup>. Von fertig entstandenen Wirbelgebilden wurden bisher nur gewisse Anordnungen bzw. Bahnkurven eines einzelnen Wirbelpaares<sup>22</sup> (also kein stationärer Zustand) und die Kármánsche Anordnung (s. nachstehend A 4) gerechnet, die aber nur ganz bestimmten Gebieten Reynoldsscher Zahlen zugehört: Da die Reynoldssche Zahl der Gesamtanordnung (d. h. also der Einfluß der Reibung) die Energieverhältnisse vor der Entstehung, die Ablösungsstelle und damit die Form und Lage der Wirbelschicht sowie ihre gesamten Energieverhältnisse bei der Bildung und „Aufrollung“ bestimmt, so ist dadurch auch mittelbar der Charakter des Zerfallproduktes von der Reynoldsschen Zahl abhängig. Wären diese Vorgänge zuverlässiger bekannt, so könnte man für die verschiedenen, den einzelnen Gebieten Reynoldsscher Zahlen zugehörigen Zerfallprodukte das weitere Schicksal mit Hilfe der Theorie der idealen Flüssigkeiten in guter Näherung verfolgen; daran, daß diese Lücke besteht, krankt heute das Widerstandsproblem.

Wir kehren zur Betrachtung der diskontinuierlichen Bewegung zurück. Helmholtz behandelte den Fall des aus einem Bordaschen Mundstück austretenden freien Flüssigkeitsstrahles und bestimmte den Verlauf der freien Strahlgrenzen und den Kontraktionskoeffizienten (d. i. die Breite des Ausströmbandes)<sup>23</sup>. An diese und die Kirchhoffsche Arbeit über den Strahlaustritt aus einem langen Spalt, deren numerische Ergebnisse übrigens beide überraschend gut mit der Beobachtung übereinstimmen, schließen sich die weiteren Arbeiten funktionentheoretischer Natur über Ausfluß-, Strahl- und Wellenprobleme an<sup>24</sup>.

Die „freie“ Strahlgrenze trennt dabei die bewegte Strömung entweder als freie Oberfläche von der Außenluft oder — wobei dann die Bezeichnungsweise nicht mehr ganz korrekt ist — auch von einem ruhenden „Totwasser“ bzw. einem mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Teil der Flüssigkeit. Dann ist (bei Vernachlässigung der Schwere) der Druck im Außenraum und an der Strahlgrenze konstant. Da im ebenen Falle die Strahlgrenze Stromlinie ist, ist also die Strahlgrenze eine Stromlinie konstanter Geschwindigkeit (die man zumeist gleich Eins setzt). Das Charakteristische an der Aufgabe ist, daß man die Form des freien Strahles zu bestimmen hat. Dabei kennt man längs des freien Strahles

<sup>19</sup> Die Bildung kann nur durch Reibungswirkungen erklärt werden.

<sup>20</sup> Wenn die längs der festen Wand zunächst an Dicke und „Rotorgehalt“ zunehmende Grenzschicht (s. B 2) durch zum Stillstand oder sogar zur Rückströmung nahe der Wand gekommene Teilchen sich von der Wand abhebt, ist sie in diesem Augenblick eine solche dünne, rotorbehaftete Schicht, die einen Geschwindigkeitsunterschied vermittelt.

<sup>21</sup> Vgl. jedoch den Nachweis der Möglichkeit einer spiraligen Aufrollung in speziellen Fällen bei Prandtl: Entstehung von Wirbeln in idealer Flüssigkeit, Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, Innsbruck 1922. Berlin: Julius Springer 1924.

<sup>22</sup> Föppl, L.: Bayer. Akad. 1913, S. 1—17; Rubach: Forschungsheft 185 des V D I 1916; Caldonazzo: Lincei Rend. 1919.

<sup>23</sup> Über den Zusammenhang der Breite des Ausströmbandes bzw. der „Kielwasserbreite“ mit dem Widerstandsproblem vgl. u. a. Zeilon: Beiträge zur Theorie des asymptotischen Flüssigkeitswiderstandes I, S. 20/21. Upsala 1927.

<sup>24</sup> S. den zusammenfassenden Bericht von Jaffé, Z. A. M. M. 1921.

nur die genannte Geschwindigkeitsbedingung sowie die Form der Körperoberfläche, von der der freie Strahl ausgeht und die selbst ein Teil derselben Stromlinie ist.

Kirchhoff rechnete als erster den Fall der Anströmung einer geraden Platte von endlicher Breite, von deren Kanten nach hinten freie Diskontinuitätsflächen ausgehen, die zwischen sich ein bis ins Unendliche reichendes Totwassergebiet als „Kielwasser“ besitzen (vgl. Abb. 34). Bei symmetrischer Anströmung senkrecht zur Platte erhält man den konstanten Widerstandsbeiwert:

$$\zeta = \frac{2\pi}{\pi + 4},$$

der aber im Vergleich mit der Erfahrung viel zu klein ist. Dies wird schon aus der Tatsache heraus verständlich, daß in der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie der gesamte Widerstand aus Überdruck von vorne resultiert, während der Sog des in Wirklichkeit nicht „toten“ Kielwassers auf der Rückseite gänzlich fehlt<sup>25</sup>.

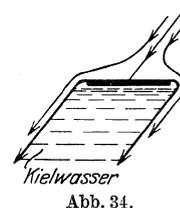


Abb. 34.

Die Anwendung dieser Theorie auf den langen Kreiszyylinder bzw. auf eine symmetrisch angeströmte kreisförmig gebogene Platte derart, daß die freien Stromlinien bei den variablen Öffnungswinkeln  $\pm \vartheta_{abl.}$  ( $\vartheta_{abl.} \leq 90^\circ$ ) die Körperoberfläche verlassen, hat an die von Levi-Civita und Cisotti angegebenen Methoden für krumme Hindernisse anzuschließen. Sie unterscheiden sich von den Schwarz-Christoffelschen funktionentheoretischen Verfahren hauptsächlich dadurch, daß die dort für gebrochene, aus geraden Stücken bestehende Begrenzungen benutzbare Abbildungsfunktion für eine stetig gekrümmte Begrenzung abgeändert werden muß. Übrigens ist die Durchführung gerade für die kreisförmig gebogene Platte bisher noch von keiner Seite gegeben worden<sup>25a</sup>. Sie soll auch hier wegen der nicht unerheblichen mathematischen Schwierigkeiten nicht vorgenommen werden, zumal das Ergebnis qualitativ sich auch ohne Durchführung der Rechnung übersehen läßt: Es muß sich analog wie bei der erwähnten geraden Platte (aber in Abhängigkeit von  $\vartheta_{abl.}$ ) ein konstanter und jedenfalls zu kleiner Widerstandsbeiwert ergeben, der also keine Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl zeigen wird.

Das hier gestellte Problem kann aber, wie in Abschnitt F dargelegt wird, als Ausgang für eine möglicherweise aussichtsreiche neue Diskussion des Widerstandsproblems des langen Kreiszyinders dienen.

#### 4. Kreiszyylinder mit anschließender Kármánscher Wirbelstraße.

Wie vorstehend unter Ziffer 3 ausgeführt wurde, haben die zu beiden Seiten des Zylinders an den Ablösungsstellen entstehenden Diskontinuitätsflächen keinen physikalischen Bestand, sondern zerfallen bald. Die aus der Annahme eines einzelnen Wirbelpaares hinter dem Zylinder zu jeder Lage und Stärke desselben errechenbare Widerstandsgröße<sup>26</sup> soll hier nicht näher diskutiert werden; denn der Charakter der gemäß der Theorie der idealen Flüssigkeit zugehörigen Druckverteilung an der Zylinderwand ist nur auf der Zylindervorderseite in Übereinstimmung mit den Messungen<sup>27</sup>, und das Problem ist nicht stationär. Einen wesentlichen weiteren Fortschritt für die Lösung des Widerstandsproblems bedeutet aber die Rechnung im Anschluß an die Kármánsche Anordnung einer zweireihigen „Wirbelstraße“ im Kielwasser. Da die Strömung neben und hinter dem Zylinder dauernd von der von vorne her anströmenden Flüssig-

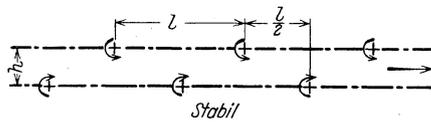
<sup>25</sup> Wie aus Teil I zu ersehen ist, ist aber gerade die Größe des Kielwasserunterdruckes wesentlich für die Größe des tatsächlichen Körperwiderstandes.

<sup>25a</sup> Die Rechnungen von S. Brodetsky: „Discontinuous Fluid Motion Past Curved Barriers“, Verh. d. 2. Intern. Congr. f. techn. Mechanik, Zürich 1926 (Orell-Füßli 1927) stellen nur einen ersten Schritt dar. Sie sind mir erst nach Abschluß der Arbeit bekannt geworden, ebenso wie die Arbeit: L. Rosenhead, Brodetsky: „Resistance to a Barrier in the Shape of an Arc of a Circle“, Proc. Roy. Soc. A London, Vol. 117, p. 417—433.

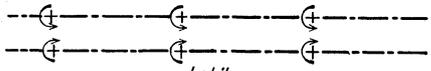
<sup>26</sup> Vgl. die in Fußnote <sup>22</sup> erwähnten Autoren.

<sup>27</sup> Vgl. die bei W. Müller: Mathematische Strömungslehre, Berlin: Julius Springer 1928, auf Seite 109 durchgeführte Gegenüberstellung mit einer Messung von Ermisch.

keit gespeist wird, so wird man, solange nicht Turbulenz herrscht, die wirklichen Verhältnisse in einiger Entfernung hinter dem Hindernis annähernd richtig beschreiben, wenn man rechts und links je eine nach hinten verlaufende, in regelmäßigen Abständen  $l$  mit Einzelwirbeln vom Wirbelmoment  $\Gamma$  belegte, einseitig bis ins Unendliche reichende Wirbelreihe annimmt. Die Wirbel der auf beiden Seiten hinter dem Hindernis im Abstand  $h$  voneinander liegenden Reihen haben gegenläufigen Drehsinn und definieren eine „Wirbelstraße“. Der Vorgang der Wirbelbildung am Körper wiederholt sich periodisch und die ganze Anordnung kann für das Widerstandsproblem als quasistationär angesehen werden. v. Kármán<sup>28</sup> betrachtete 1911/12 mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen die Stabilität einer aus zwei sich dauernd im Abstand  $h$  parallel bleibenden Reihen gebildeten, beiderseits ins Unendliche reichenden Wirbelstraße (so daß also das Hindernis die eine „Hälfte“ der Straße vertritt). Es gibt zwei Gleichgewichtslagen, für die beide Reihen der Straße mit konstanter Geschwindigkeit in ihrer Richtung als Ganzes fortschreiten, vgl. Abb. 35. Für die eine Anordnung, bei welcher die Wirbelzentren in den beiden Reihen einander gegenüber stehen etwa wie die Straßenbäume einer Chaussee, fand v. Kármán stets Labilität. Dagegen ergab sich Stabilität gegenüber einer sich längs der Straße



Stabil



Labil

Abb. 35.

ausbreitenden Störung für die dauernd gleich breite gerade Straße in dem Fall, daß die Wirbel beider Reihen um die halbe Länge ihres längs einer Reihe gemessenen Abstandes versetzt sind; hierbei muß aber

$$\text{Co}f \frac{\pi h}{l} = \sqrt{2}; \quad \frac{h}{l} = 0,2806$$

sein. Die Anordnung mit gegeneinander versetzten Wirbelzentren kann man in der Tat häufig beobachten. Die Wirbelstraße bewegt sich als Ganzes mit einer Geschwindigkeit:

$$u_0 = \frac{\Gamma}{2l} \mathfrak{Zg} \frac{\pi h}{l} = \frac{\Gamma}{l \cdot \sqrt{8}},$$

so daß entsprechend der Relativgeschwindigkeit  $U - u_0$  in der Zeit  $T = \frac{l}{U - u_0}$  in jeder Reihe je ein neuer Wirbel entsteht. Aus dem durch die Bildung dieser zwei Wirbel während der Zeit  $T$  erzeugten Impuls und dem Impulstransport längs der Straße durch eine genügend entfernte, beliebige Kontrollfläche hindurch erhält man einen Ausdruck für den Zylinderwiderstand. Man findet<sup>29</sup>

$$\begin{aligned} W &= \frac{\gamma}{g} \left\{ \frac{\Gamma \cdot h}{l} (U - 2u_0) + \frac{\Gamma^2}{2\pi l} \right\} = \\ &= \frac{\gamma}{g} \frac{2}{\mathfrak{Zg} \frac{\pi h}{l}} \left\{ \frac{h}{l} \frac{u_0}{U} - \left[ \frac{2h}{l} - \frac{1}{\pi \cdot \mathfrak{Zg} \frac{\pi h}{l}} \right] \left( \frac{u_0}{U} \right)^2 \right\} U^2 l = \\ &= \frac{\gamma}{g} \left\{ 0,7936 \cdot \frac{u_0}{U} - 0,3141 \left( \frac{u_0}{U} \right)^2 \right\} U^2 l = \\ &= \zeta \cdot 2a \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}; \\ \zeta &= \left\{ 0,7936 \cdot \frac{u_0}{U} - 0,3141 \left( \frac{u_0}{U} \right)^2 \right\} \cdot \frac{l}{a}. \end{aligned}$$

Entnimmt man nun dem Experiment (Rubach beobachtete bei etwa  $2a \cdot U \cong 0,00165$  bis

<sup>28</sup> Göttinger Nachr. 1911; 1912; Phys. Z. 1912.

<sup>29</sup> S. z. B. Fuchs-Hopf: Aerodynamik, S. 160ff.; für ein sehr breites, offenes Gerinne von der Tiefe  $H$  (kreisförmiger Brückenpfeiler) s. auch Forchheimer: Hydraulik, S. 415ff., wo hieraus auch die Stauhöhe  $z$  durch einen Brückenpfeiler  $z = 3 \frac{u_0^2}{g}$  bestimmt wird.

0,0024) die Werte  $\frac{u_0}{U}$  und  $\frac{l}{a}$  mit 0,14 und 8,6, so erhält man (vgl. Abb. 15) in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Messung in diesem Gebiet Reynoldsscher Zahlen

$$\zeta \simeq 0,92.$$

Während also das Verhältnis des Wirbelabstandes  $l$  zur Straßenbreite  $h$  auf Grund der Annahme gleichbleibender Straßenbreite und Stabilität gegenüber einer fortschreitenden Störung errechnet werden kann, muß die Geschwindigkeit der Straße  $u_0$  und eine lineare Abmessung des Wirbelsystems der Beobachtung entnommen werden. Die Widerstandsermittlung erhält damit einen halbempirischen Charakter.

Im vorliegenden Zusammenhang ist auch die eine der Bemerkungen Prandtls zu einer Überlegung von Heisenberg<sup>30</sup> von Bedeutung: „Es ist nicht ausgeschlossen, daß ein merklicher Teil der positiven und negativen Wirbelmomente in der Zone kurz hinter dem Körper sich gegenseitig vernichtet (d. h. dissipiert, also von einer Theorie der idealen Flüssigkeit nicht erfaßt wird) und daher im abziehenden Wirbelsystem nicht mehr vorhanden ist“.

Der Widerstand ist dann also größer als die Summe aus Impulstransport in der Wirbelstraße (mit den Abmessungen und Intensitäten etwa 3 bis  $4 \cdot l$  hinter dem Körper) und der Impulsproduktion durch Entstehung neuer Wirbel in der entsprechenden Zeit. Das Kielwasser enthält dann nicht mehr die gesamte, dem Widerstand entsprechende Energiemenge<sup>31</sup>. Wahrscheinlich läßt sich der Verlauf der Widerstandskurve zwischen  $\Re = 1,5 \cdot 10^4$  und dem Abfall ( $\zeta$  nahezu konstant = 1,2) im Sinne der Prandtlschen Bemerkung deuten, indem das Mehr an Widerstand gegenüber der gemäß v. Kármán mit den Abmessungen in diesem Gebiet zu errechnenden Energiemenge durch Dissipation in dem Raum zwischen dem Körper und dem Ort der regelmäßig gewordenen Straße zu erklären ist.

Auf dem Vorgang der regelmäßig sich ablösenden Wirbel der Wirbelstraße beruht das „Singen angeblasener dünner Drähte“, das u. a. von Relf und Simmons zur Bestimmung von  $\zeta$  benutzt wurde<sup>32</sup>.

## 5. Jacobs empirischer Ansatz für ein unstetiges Potential, 1921.

Zu dem unter Ziffer 1 durch Formel (1) gegebenen Ansatz (mit  $C_0 = 0$ ):

$$f(z) = f(re^{i\vartheta}) = \varphi + i\psi = -U \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$$

für die ebene Potentialströmung um den Zylinder  $|r| = a$  fügen wir eine Konstante derart hinzu<sup>33</sup>, daß für  $\vartheta = 0$ ;  $r = a$  sich  $\varphi = 0$  ergibt. Dann wird:

$$f(z) = 2aU - U \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$$

und, wie leicht zu errechnen ist:

$$\frac{d \ln z}{df} = \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{df} = \frac{U}{\sqrt{\frac{f}{U} \left( \frac{f}{U} - 4a \right)}}.$$

Bezieht man alles auf  $U = 1$  und  $a = 1$ , so folgt:

$$\frac{d \ln z}{df} = \frac{1}{\sqrt{f(f-4)}}.$$

<sup>30</sup> Heisenberg: Die absoluten Dimensionen der Kármánschen Wirbelbewegung. Phys. Z. 1922.

<sup>31</sup> Vgl. hierzu Abschnitt F.

<sup>32</sup> Siehe Eisner: Druckmessung an umströmten Zylindern. Z. A. M. M. 1925.

<sup>33</sup> Die Darstellung folgt im wesentlichen — unter starker Kürzung — nicht der Arbeit Jacobs, sondern dem Bericht W. Müllers über die Arbeit von Jacob in „Mathematische Strömungslehre“, S. 138 ff. Berlin, Julius Springer 1928.

An diese Form anknüpfend, hat JACOB<sup>34</sup> unter Einführung von vier durch Experimente zu ermittelnden Beiwerten:  $c_0, m_1, m_2, m_3$ , den nachstehenden erweiterten Ansatz für ein un-  
stetiges Potential aufgestellt:

$$\frac{d \ln z}{df} = \frac{1}{\sqrt{f} \{ \sqrt{f - c_0} + i [m_1 + m_2 \sqrt[4]{f} + m_3 \sqrt{f}] \}}$$

An der Stelle  $f = c_0$ ;  $\vartheta = \vartheta_{abl.}$  verläßt die Stromlinie  $\psi = 0$  die Oberfläche des Zylinders (vgl. Abb. 36) in tangentialer Richtung und nähert sich asymptotisch der Anströmrichtung.

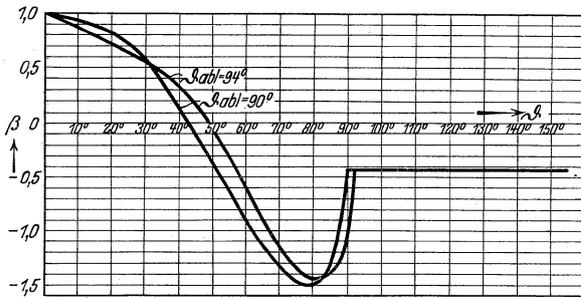
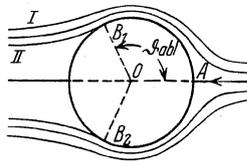


Abb. 36.

Auf Grund von Versuchen von Lafay setzt nun JACOB:

$$c_0 = \frac{3}{2} a U$$

und einmal:

$$m_1 = 0,2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} a U;$$

$$m_2 = -0,2 \sqrt[4]{\frac{3}{2}} a U; \quad m_3 = 0,8$$

und in einem zweiten Falle:

$$m_1 = 0,2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} a U; \quad m_2 = 0; \quad m_3 = 0,6.$$

Man erhält im ersten Fall für den Ablösungswinkel:  $\vartheta_{abl.} = 94^\circ$ ; im zweiten Fall:  $\vartheta_{abl.} = 90^\circ$ . Die zugehörigen, rechnerisch sich ergebenden Druckverteilungslinien an der Zylinderwandung sind in Abb. 36 unter

das Strömungsbild gezeichnet worden und zeigen einen Verlauf, bei dem einige charakteristische Eigenschaften der tatsächlichen Druckverteilung mit einiger Annäherung zum Ausdruck kommen; allerdings liegt die Stelle  $\beta = \frac{\Delta p}{U^2} = 0$  in beiden Fällen bei viel zu großen Zentrivinkeln. Als Widerstandsbeiwerte erhält man:

$$\zeta_{94^\circ} = 0,739; \quad \zeta_{90^\circ} = 0,674,$$

die mit den französischen Messungen bei  $2a = 50$  mm und  $U = 1,8$  und  $2,5$  m/sek nicht schlecht übereinstimmen<sup>35</sup>.

## B. Der Widerstand in zäher Flüssigkeit (erster Teil).

### 1. Die „vollständigen“ Grundgleichungen der Theorie der Flüssigkeitsbewegung mit Reibung.

Die Grundgleichungen für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit, die hier nicht besonders angeschrieben werden sollen<sup>36</sup>, drücken die Gleichheit der äußeren Kraft je Masseneinheit mit der Summe einer Beschleunigungskraft (der Masseneinheit) und einer inneren, infolge der Zähigkeit auftretenden Kraft aus<sup>37</sup>. Auf die Masseneinheit bezogen hat die Zähigkeitskraft<sup>38</sup>

<sup>34</sup> JACOB, L.: La résistance d'Airet l'expérience, II, S. 211, Bibliothèque de Mécanique appliquée et Génie. Paris 1921.

<sup>35</sup> Vgl. jedoch die Kritik der Lafayschen Messungen auf S. 19—21;  $\frac{2a U}{Z_{Luft}} \approx \frac{5 \cdot 1800}{0,13}$  bzw.  $\frac{5 \cdot 2500}{0,13} \approx 7,7 \cdot 10^4$  bzw.  $\sim 1 \cdot 10^5$ ; hiernach sollte  $\zeta \approx 1,2$  sein.

<sup>36</sup> Sie sind am Anfang von Abschnitt C zu finden.

<sup>37</sup> Vgl. die Formulierung bei v. Mises: Z. A. M. M. 1923, S. 65.

<sup>38</sup> S. z. B. v. Mises: Technische Hydromechanik S. 41.

die Dimension  $\left| Z \cdot \frac{U}{l^2} \right|$ , so daß folgende Dimensionsgleichung besteht:

$$\left| \frac{\text{Kraft}}{\gamma/g \cdot l^3} \right| = \left| \frac{U^2}{l} \right| + \left| \frac{Z \cdot U}{l^2} \right|$$

oder nach Division mit  $\frac{U^2}{l}$ :

$$\left| \frac{\text{Kraft}}{\gamma/g \cdot U^2 l^2} \right| = \left| 1 \right| + \left| \frac{Z}{U \cdot l} = \frac{1}{\Re} \right|.$$

Außer der Poiseuilleschen Laminarbewegung<sup>39</sup> und der Hamelschen Lösung<sup>40</sup> sind bisher keine exakten Lösungen der (nichtlinearen) Grundgleichungen für die Bewegung zäher Flüssigkeit gelungen<sup>41</sup>, geschweige denn bestimmte Randwertprobleme gelöst worden. Das Bestreben ging daher dahin, die Grundgleichungen auf irgendeinem zulässigen Wege zu vereinfachen. Die Vereinfachung kann entweder unter rein mathematischen Gesichtspunkten erfolgen oder unter physikalischen, bzw. beide Gesichtspunkte vereinigen. Die von Stokes und Oseen angegebenen Wege zur „Linearisierung“ der Gleichungen sind offensichtlich zunächst vom rein formalen Gesichtspunkt aus eingeschlagen und erst nachher physikalisch gedeutet worden. Die Prandtlsche „Grenzschichttheorie“ dagegen ist ursprünglich aus einer physikalischen Anschauung heraus entstanden und brachte die formale Vereinfachung erst als Folge der mathematischen Formulierung des physikalischen Gedankenganges mit sich<sup>42</sup>.

## 2. Flüssigkeit mit „kleiner Reibung“ im Sinne der Prandtlschen Theorie.

Die Prandtlsche Grenzschichttheorie, über die man in den Originalarbeiten<sup>43</sup> und in allen modernen Büchern das Wesentliche finden kann, soll hier nicht noch einmal dargelegt werden. Sie ist für das Widerstandsproblem von grundlegender ursächlicher Bedeutung, wenngleich sie darüber quantitative Aussagen in ihrer derzeitigen Gestalt nicht liefert. Das Wesentliche ist bereits im Abschnitt A gesagt worden und wird in Abschnitt F durch einige Bemerkungen ergänzt werden. An dieser Stelle wird die Grenzschichttheorie lediglich aus dem vorstehend unter 1 dargelegten Gesichtspunkt heraus erwähnt.

## 3. Die Stokesschen Gleichungen der „langsamen Bewegung“; das „Stokessche Paradoxon“; Oseens Gedanke der Berücksichtigung der „halbquadratischen Glieder“ 1910 und Noethers Einwand 1911.

Die linearisierten Grundgleichungen der stationären Bewegung in der Stokesschen Form erhält man durch Vernachlässigung der in den Geschwindigkeiten quadratischen Glieder, so daß lediglich die äußere Kraft je Masseneinheit und die innere Zähigkeitswirkung zurückbleibt. Nach Ziffer (1) bedeutet das physikalisch, daß  $\frac{Ul}{Z}$  oder  $\Re$  klein sein soll gegen 1, also etwa von der Größenordnung 0,1; für Wasser gewöhnlicher Temperatur mit  $Z \simeq 0,013 \text{ cm}^2/\text{sek} = \text{bzw. } \rho_K = 1 \text{ sek/m}^2$  muß also  $Ul \leq 0,0013 \text{ cm}^2/\text{sek} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{sek} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{sek}$  sein (!), damit die Stokesschen linearisierten Gleichungen Geltung haben können. Das heißt bei:  $l$  z. B. = Zylinderdurchmesser = 0,13 m darf die Geschwindigkeit  $U$  nicht mehr als  $1 \cdot 10^{-6} \text{ m/sek} = 0,0001 \text{ cm/sek}$  betragen! Man nennt diese Gleichungen daher die Gleichungen der „langsamen Bewegung“. Sie haben praktische Bedeutung allerhöchstens in der Physik der Lösungen, in der Kolloidchemie, bei Schlammvorgängen u. ä. oder bei ganz großen Zähigkeiten  $Z$ ; doch sind auch dort zumeist erhebliche Korrekturen erforderlich, für die die Oseenschen Arbeiten grundlegend geworden sind.

<sup>39</sup> S. z. B. Lamb: Hydrodynamik.

<sup>40</sup> Jahresberichte d. Deutschen Math. Vereinigung 1916. Hamel suchte nach Lösungen für die stationäre ebene Bewegung, bei denen die Stromlinien die gleichen sind wie bei der Potentialbewegung, aber die Geschwindigkeitsverteilung eine andere ist.

<sup>41</sup> Vgl. jedoch hierzu: Oseen: Arkiv f. matematik, astr. och fysik, XX, 2. Hälfte Nr. 14. 1927/28.

<sup>42</sup> Über die „Einordnung“ der Grenzschichttheorie in die allgemeine exakte Theorie s. v. Mises: Bemerkungen zur Hydrodynamik, Kissinger Versammlg. d. Ges. f. angew. Math. u. Mech. 1927, Auszug s. Z. A. M. M. 1927, S. 425.

<sup>43</sup> Vor allem Prandtl: Verhandl. d. III. Internat. Math. Kongreß, Heidelberg 1904; Neudruck in: 4 Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen 1927, Selbstverlag des Kaiser-Wilhelm-Instituts f. Strömungsforschung. — Blasius: Diss. 1907 = Z. f. Math. u. Phys. Bd. 56, S. 1. 1908.







von Oseen<sup>52</sup> gegeben worden. Die nachstehende, den gemeinsamen Grundgedanken beider Arbeiten skizzierende Ableitung dieser Näherungslösungen ist aus dem Gesichtspunkt heraus aufgesetzt worden, die Entwicklungen der folgenden Abschnitte vorzubereiten.

## 2. Umformung der Gleichungen und Partikularlösungen nach Lamb.

Wir versuchen, die Gleichungen (1) bzw. (2) für  $v$  und  $p$  durch Einführung von zwei Hilfsfunktionen zu vereinfachen, aus denen  $v$  und  $p$  durch einfache Ableitungen gefunden werden können. Wir versuchen zunächst als Partikularlösung ein Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  einzuführen durch:

$$v_1 = -\text{grad } \Phi;$$

mit Rücksicht auf  $\text{div } v = 0$  unterliegt  $\Phi$  der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta \Phi = 0, \quad (4)$$

so daß also  $\Phi$  ein Newtonsches Potential ist. Damit folgt aus Gleichung (1):

$$p = -\frac{\gamma}{g} \cdot U \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (3)$$

Eine weitere Teillösung vermittelt der Ansatz:

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{2a}{\Re} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi, \\ v_2 &= -\frac{2a}{\Re} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \end{aligned}$$

wobei  $\chi$  die folgende anschauliche Bedeutung hat:

Unserem Ansatz für die Teillösungen gemäß ist:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{2a}{\Re} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi, \\ v &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{2a}{\Re} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (6)$$

also folgt mit

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \cdot \text{rot } v: \\ \chi &= \int \bar{w} \cdot dy, \end{aligned}$$

d. h.  $\chi$  ist das doppelte quer zur Bewegungsrichtung genommene Integral der Rotorkomponente  $\bar{w}$  der Geschwindigkeit  $v$ . Es folgt aus Vorstehendem für  $\chi$  die folgende Bestimmungsgleichung<sup>53</sup>:

$$\left[ A + \frac{\Re}{2a} \frac{\partial}{\partial x} \right] \chi = A' \chi = 0. \quad (5)$$

Von der Richtigkeit kann man sich durch Ausführen der Operationen und Einsetzen in (1) leicht überzeugen.

Als Partikularlösungen von (4) und (5), die zunächst den Sonderbedingungen unseres Problems im unendlich Fernen genügen, setzen wir nun folgendermaßen an:

Da die Störung vom umströmten Körper ihren Ausgang nimmt und der Bewegungsrichtung eine Sonderrolle zukommt, so wählen wir das Potential so, daß es an der Stelle des Körpers einen Pol besitzt und Pole höherer Anordnung diesem überlagert sind, deren Achsen die Richtung der Bewegung haben. Der allgemeinste Ansatz, der dieser Lösung entspricht und die Bedingungen im Unendlichen erfüllt, ist:

$$\Phi = A_0 \cdot \ln r + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \ln r + \dots, \quad (7)$$

<sup>52</sup> Oseen: Hydrodynamik S. 36 und 177, sowie Oseen-Faxén in Riemann-Weber-Mises Bd. 2, S. 823 und 831.

<sup>53</sup> S. hierzu unter: Bemerkung zur Oseenschen Lösung (S. 44/45).

wobei

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ist.}$$

Die Funktion  $\chi$  bestimmen wir am einfachsten auf folgende Weise: Wir suchen auch hier eine Lösung, die mit wachsender Entfernung vom Körper (als Störungszentrum) gegen Null geht und außerdem der durch die Bewegung gekennzeichneten besonderen Richtung (der  $x$ -Richtung) angepaßt ist; wir versuchen daher,  $\chi$  als Produkt zweier Funktionen  $X$  und  $R$  darzustellen, deren erste nur von  $x$ , deren zweite nur von  $r$  abhängt. Dieser Ansatz führt die Gleichung (5) in die folgende über:

$$X'' \cdot R + X' \cdot \left[ 2R' \cdot \frac{x}{r} + \frac{\Re}{2a} \cdot R \right] + X \left[ R'' + R' \left( \frac{1}{r} + \frac{\Re}{2a} \frac{x}{r} \right) \right] = 0.$$

Setzt man nun speziell  $X = e^{-\alpha x}$ , so erhält man:

$$\alpha^2 \cdot R - \alpha \left[ 2R' \cdot \frac{x}{r} + \frac{\Re}{2a} \cdot R \right] + R'' + R' \left( \frac{1}{r} + \frac{\Re}{2a} \frac{x}{r} \right) = 0.$$

Demnach ist  $R$  nur dann eine Funktion von  $r$  allein, wenn die mit  $x$  behafteten Glieder verschwinden, d. i. wenn  $\alpha = \frac{\Re}{4a}$  ist. Damit ist das Maß des örtlichen Abklingens von  $X$  längs  $x$  gegeben.

Hiernach vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung für  $R$  wesentlich und man erhält die Normalform der Differentialgleichung der Besselschen Funktionen

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{\left(\frac{\Re}{2a}\right)^2}{4} \cdot R = 0.$$

Als einzige Lösung, die im Unendlichen verschwindet, kommt die Hankelsche Zylinderfunktion<sup>54</sup> mit rein imaginärem Argument in Betracht:

$$R = \text{const } H_0^1 \left( i \frac{\Re}{4a} r \right).$$

Für das Folgende ist es nützlich, eine Integraldarstellung dieser Funktion anzugeben, welche nach Sommerfeld lautet:

$$H_0^1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-i\infty - \varepsilon}^{-i\infty + \varepsilon} e^{iz \cos \beta} \cdot d\beta; \quad 0 < \varepsilon \leq \pi.$$

Wir haben daher:

$$\chi = B \frac{i\pi}{2} \cdot e^{-\frac{\Re x}{4a}} \cdot H_0^1 \left( i \frac{\Re}{4a} r \right). \quad (8)$$

Hiernit sind die Partikularlösungen für die Lambschen Hilfsfunktionen  $\Phi$  und  $\chi$  gefunden, die den Bedingungen des Problems im Unendlichen genügen.

### 3. Bemerkung zur Oseenschen Lösung.

Da die von Oseen (l. c.) angegebene Lösung derselben Aufgabe hier etwas abweichend von Oseen dargestellt werden wird, soll wenigstens der Weg angedeutet werden, auf dem Oseen-Faxén zu ihrem Ansatz kommen. Es ist dies das Lösungsverfahren mittels Fundamentalintegralen<sup>55</sup>.

<sup>54</sup> S. über Besselsche Funktionen: Verzeichnis berechneter Funktionentafeln I, Berlin 1928. Courant-Hilbert: Methoden I, S. 385ff., auch Riemann-Weber-Mises Bd. I, S. 336 und Bd. II, S. 454ff. (Beitrag Sommerfeld) und eingehender bei Gray und Mathews: Treatise on Bessel Functions S. 68, sowie Jahnke-Emde-Funktionentafeln; über Hankelsche Funktionen s. a. Ollendorff: Erdströme. Berlin: Julius Springer 1928.

<sup>55</sup> Vgl. Riemann-Weber-Mises Bd. I, S. 650ff. — Als Fundamentalintegral  $F(x, y, z)$  einer linearen Differentialgleichung  $f \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) u = 0$  wird hier nach Zeilon: Ark. för Mat. Astr. och Fysik 1910 in etwas

Die Bestimmungsgleichung (5) für  $\chi$ :

$$\Delta' \chi \equiv \left[ \Delta + \frac{\Re}{2a} \frac{\partial}{\partial x} \right] \chi = 0 \quad (5)$$

läßt sich in der identisch dasselbe besagenden Form schreiben:

$$\Delta \chi = - \frac{\Re}{2a} \frac{\partial}{\partial x} \chi = 4\pi \varrho \quad (5')$$

und gleicht in dieser Schreibweise der Poissonschen Potentialgleichung<sup>56</sup>. Dabei ist  $\varrho$  die „felderzeugende Belegungsdichte“. Von dieser Analogie ausgehend, erhält man allgemeine Lösungen der Differentialgleichung für  $\chi$ , indem man das Integral aus den Partikularwirkungen aller „Quellen“ nach dem Muster  $d\chi = \varrho \frac{dV}{r}$  überlagert. Dieser Weg ist von Oseen-Faxén<sup>57</sup> zur Aufstellung der Fundamentallösungen gegangen worden und führt zur Hankelschen Funktion in der angegebenen Integraldarstellung. Wir gehen nachstehend im Anschluß an die früheren Darlegungen den weniger mühsamen Weg der Methode der Partikularlösungen. Dabei wird sich ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen einer unten eingeführten Hilfsfunktion  $\Psi$  und den Lambschen Funktionen  $\Phi$  und  $\chi$  ergeben.

#### 4. Zweiter Lösungsansatz im Anschluß an Oseen.

Wir suchen auf Grund von (1) und (2) eine Funktion  $\Psi$  derart, daß

$$\Delta \left( \left[ \Delta + \frac{\Re}{2a} \frac{\partial}{\partial x} \right] \Psi \right) \equiv \Delta \Delta' \Psi = 0 \quad (9)$$

wird, und machen für die Geschwindigkeitskomponenten den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} u &= C_1 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} + i\pi \cdot H_0^1 \left( \frac{i\Re}{4a} r \right) \cdot e^{-\frac{\Re x}{4a}} \right) + C_2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \ln r \right], \\ v &= C_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y} + C_2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \ln r \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Man kennt die ebene Analogie zum räumlichen Potentialproblem der Kugel  $\left( \Psi = \Psi \left( \frac{1}{r} \right) \right)$ , das sog. logarithmische Potential. Demgemäß setzen wir als erstes Integral der Differentialgleichung (9) heuristisch an:

$$\Delta' \Psi \equiv \left[ \Delta + \frac{\Re}{2a} \frac{\partial}{\partial x} \right] \Psi = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln r. \quad (11)$$

Hierbei kann das rechtsstehende Glied als ein örtlicher Zwang (Störungsfunktion) für den Verlauf von  $\Psi$  angesehen werden; dieser hat — wie oben — im umströmten Körper seinen Sitz, wie das logarithmische Gesetz besagt. In üblicher Weise setzt sich die Lösung aus der erzwun-

abweichender Benennung diejenige Funktion  $F$  bezeichnet, für die gilt:

$$f \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \int_B F[(x-\lambda), (y-\mu), (z-\nu)] d\lambda \cdot d\mu \cdot d\nu =$$

$$= 1, \text{ wenn der Punkt } x, y, z \text{ innerhalb } B \text{ liegt,}$$

$$= 0, \text{ wenn der Punkt } x, y, z \text{ außerhalb } B \text{ liegt oder mit anderen Worten:}$$

Ist  $\varphi$  eine willkürliche Funktion, so ist

$$u = \int_B F[(x-\lambda), (y-\mu), (z-\nu)] \cdot \varphi(\lambda, \mu, \nu) \cdot d\lambda \cdot d\mu \cdot d\nu$$

eine Lösung von  $f \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \varphi$  im Bereich  $B$ . Das Fundamentalintegral der Laplaceschen Gleichung

$\Delta u = 0$  ist hiernach —  $\frac{1}{4\pi r}$  (vgl. auch Courant-Hilbert: Methoden Bd. 1, S. 273ff.).

<sup>56</sup> Siehe Riemann-Weber-Mises: Bd. 1, S. 474ff.

<sup>57</sup> Siehe Riemann-Weber-Mises: Bd. 2, S. 820 ff.

genen Verteilung (Partikularlösung) und der Lösung der homogenen Gleichung zusammen. Als Partikularlösung von (11) haben wir offenbar:  $\Psi_1 = \frac{4a}{\Re} \cdot \ln r$ ; die Lösung der homogenen Gleichung  $\Delta' = 0$  ist aber von früher her bekannt<sup>58</sup>. Durch Zusammenfassung aus erzwungener und freier Lösung erhalten wir so:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = c_1 \ln r + c_2 \chi = c_1 \ln r + c_2' \cdot e^{-\frac{\Re x}{4a}} H_0^1\left(\frac{i \Re}{4a} r\right) \quad (12)$$

Daraus erhält man durch Ableitung gemäß (10):

$$\begin{aligned} u &= C_1 \left[ i\pi \cdot H_0^1\left(\frac{i \Re r}{4a}\right) \cdot e^{-\frac{\Re x}{4a}} + \frac{4a}{\Re} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \ln r + \frac{i\pi}{2} H_0^1\left(\frac{i \Re r}{4a}\right) \cdot e^{-\frac{\Re x}{4a}} \right\} \right] + C_2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r, \\ v &= C_1 \left[ \frac{4a}{\Re} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \ln r + \frac{i\pi}{2} \cdot H_0^1\left(\frac{i \Re r}{4a}\right) \cdot e^{-\frac{\Re x}{4a}} \right\} \right] + C_2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} \ln r. \end{aligned} \quad (10')$$

### 5. Vergleich beider Lösungen.

Die Lösungen (6), (7), (8) und (10'), (12) stimmen naturgemäß überein; man hat nur über die Konstanten folgendermaßen zu verfügen:

$$A_0 = -C_1 \cdot \frac{4a}{\Re}; \quad A_1 = -C_2; \quad B = -2C_1.$$

Die eine Funktion  $\Psi$  faßt also die beiden Lambschen Funktionen  $\Phi$  und  $\chi$  in gewissem Sinne in linearer Kombination zusammen [genauer gesagt:  $\chi$  und das erste Glied von  $\Phi$ ; vgl. Gl. (7), während das weitere Glied von  $\Phi$  in dem mit  $C_2$  behafteten Ansatz der Gl. (10) unmittelbar auftritt].

### 6. Angenäherte Befriedigung der Randbedingungen am Zylinder.

Die vorstehende Lösung genügt bisher nur den Randbedingungen im unendlich Fernen. Wir wollen nun auch versuchen, den Randbedingungen am Zylinder zu genügen; dies gelingt nur näherungsweise, indem wir die asymptotische Entwicklung der Hankelschen Zylinderfunktionen für kleine Werte des Argumentes benutzen<sup>60</sup> und hinter den Gliedern erster Ordnung abbrechen. Diese lautet:

$$\frac{i\pi}{2} \cdot H_0^1(i\alpha) = \ln \frac{2}{\gamma \cdot \alpha} (1 + \dots),$$

wobei  $\gamma = 1,7811$  die Mascheronische Konstante bedeutet. Mit diesem Grade der Annäherung erhält man dann aus den Randbedingungen  $u = U$ ,  $v = 0$  für  $r = a$  für die beiden Konstanten die Werte:

$$C_1 = -\frac{U}{\ln \frac{1,7811}{8} \Re - \frac{1}{2}}; \quad C_2 = \frac{1}{2} a^2 \cdot C_1.$$

<sup>58</sup> Gleichung (8) ist die Lösung von Gl. (5), und letztere stimmt mit der zu (11) gehörigen homogenen Gleichung formal überein.

<sup>59</sup> Das imaginäre Argument wird von Oseen als Absolutwert  $\left| \frac{\Re r}{4a} \right|$  angeschrieben; wie v. Mises in seinem, im Sommer 1927 gehaltenen Kolleg über Hydro- und Aeromechanik beim dreidimensionalen Problem nachwies, lehrt die Durchrechnung, falls man statt  $r$  als unabhängige Variable  $s = r + x$ , also  $\Psi = \Psi(s)$  betrachtet, daß das ganze Widerstandsproblem nur für  $s > 0$  bei  $U > 0$ , d. h.  $\frac{\Re}{4a} > 0$  im physikalisch richtigen Sinne herauskommt: Bei  $U < 0$  muß sich bei gleich großem  $|U|$  ein ebenso großer Widerstand mit umgekehrter Richtung ergeben; das „Kielwasser“ muß eben immer „hinter“ dem Körper liegen und der Widerstand immer sein:

$$W = \alpha U + \beta U^2 + \dots \quad \text{s. a. unter Abschnitt D.}$$

<sup>60</sup> Siehe Jahnke-Emde; auch Riemann-Weber-Mises, Bd. 2, S. 456; über die Mascheronische Konstante siehe Riemann-Weber-Mises, Bd. 1, S. 32.

**7. Werte von  $u, v, p$  am Zylinder und Berechnung des Widerstandes.**

Man hat nach (10') und (3) in Zylindernähe die angenäherten Werte:

$$\left. \begin{aligned} u &= C_1 \left\{ \frac{1}{2} - \ln \left( \frac{1,7811}{8} \Re \frac{r}{a} \right) - \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r \right\} \\ v &= -\frac{1}{2} C_1 (r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} \ln r \\ p &= \frac{2aU}{\Re} \frac{\gamma}{g} C_1 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x} \ln r + \frac{\Re a}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r \right\} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Verteilung der Normalspannung auf dem Zylinderumfang  $p|_{r=a}$  ergibt sich sonach zu:

$$p|_{r=a} = \frac{-2a \frac{\gamma}{g} U^2}{\Re \left[ \ln \frac{1,7811 \cdot \Re}{8} - \frac{1}{2} \right]} \cdot \left\{ 2 \frac{x}{a^2} + \Re \frac{a}{4} \left[ \frac{1}{a^2} - 2 \left( \frac{x}{a^2} \right)^2 \right] \right\}$$

Tabelle 13.

$\vartheta^0$	$\beta _{\Re=1}$
0	+3,500
10	3,469
20	3,375
30	3,204
40	2,977
50	2,658
60	2,250
70	1,751
80	1,164
90	+0,500
110	-0,985
125	-2,123
140	-3,151
155	-3,947
180	-4,500

daher mit

$$\frac{x}{a} = \cos \vartheta \quad \text{und} \quad \beta = \frac{p}{\gamma U^2} : \\ \beta = \frac{4}{\Re (2,002 - \ln \Re)} \left[ 2 \cdot \cos \vartheta + \frac{\Re}{4} (1 - 2 \cos^2 \vartheta) \right].$$

In dem Sonderfall  $\Re = 1$  erhält man:

$$\beta|_{\Re=1} = \frac{1 + 8 \cos \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta}{2,002}.$$

Der Widerstand des Zylinders aus Normalspannung  $p$  und Schubspannungen  $\frac{2aU}{\Re} \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dv}{dn}$  ergibt sich zu:

$$\left. \begin{aligned} W &= \int_{s=0}^{s=2\pi a} \left\{ -p|_{r=a} \cdot \frac{x}{a} + \frac{2aU}{\Re} \cdot \frac{\gamma}{g} \left[ \frac{du|_{r=a}}{dn} + \left( \frac{x}{a} \cdot \frac{\partial u|_{r=a}}{\partial x} + \frac{y}{a} \cdot \frac{\partial v|_{r=a}}{\partial y} \right) \right] \right\} ds \\ &= 2\pi \cdot \frac{2aU}{\Re} \frac{\gamma}{g} C_1 + \left[ 2\pi \cdot \frac{2aU}{\Re} \frac{\gamma}{g} C_1 + 0 \right] = 4\pi \cdot \frac{2aU}{\Re} \frac{\gamma}{g} C_1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Der Widerstand infolge Tangentialspannungen ergibt sich also genau ebenso groß wie der infolge Normaldruck. Damit wird der Widerstandsbeiwert:

$$\zeta = \frac{W}{2a \frac{\gamma U^2}{2g}} = \frac{8\pi}{-\Re \left( \ln \frac{1,7811 \cdot \Re}{8} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{8\pi}{\Re (2,002 - \ln \Re)}. \quad (16)$$

Dieser Beiwert wurde in Abb. 15 eingetragen und stimmt, wenn man aus den Versuchsergebnissen<sup>61</sup> für kleine  $\Re$  extrapoliert, bis zu  $\Re \cong 1$  recht gut, obwohl die in der vorstehenden Tabelle errechnete Normaldruckverteilung offensichtlich falsch ist<sup>62</sup>. Bairstow, Miß Cave und Miß Lang haben<sup>63</sup> die Lösung dadurch für etwas größere Reynoldssche Zahlen brauchbar zu machen versucht, daß sie die asymptotische Entwicklung der Hankelschen Funktionen nicht schon hinter dem ersten Gliede abbrechen; das Resultat ihrer mühsamen Rechnung ist ebenfalls in die Abb. 15 eingetragen worden.

<sup>61</sup> Wieselsberger: Phys. Z. 1921, S. 321.

<sup>62</sup> Diese wichtige Tatsache scheint bisher in der rechnenden Hydromechanik nicht genügend beachtet worden zu sein, indem man sich mit der Übereinstimmung des Gesamtwiderstandes zufrieden gab.

<sup>63</sup> Phil. Trans. 1923, Ser. A, Bd. 223, S. 383—432.

## D. Oseens „asymptotische“ Theorie der Bewegung von Flüssigkeiten mit verschwindend kleiner Zähigkeit, dargelegt für den zweidimensionalen Fall eines stationär bewegten Kreiszyllinders und Oseen-Zeilons Druckverteilung an der Zylinderoberfläche (1924).

### 1. Der Inhalt der „asymptotischen Theorie“.

Der Gedankengang Oseens, der ihn zu seiner „asymptotischen“ Theorie geführt hat, d. h. zu seiner Theorie vom Verhalten zäher Flüssigkeit bei immer kleiner werdender und schließlich verschwindender Zähigkeit, ist etwa der folgende<sup>64</sup>:

Der analytische Charakter der Lösungen von Differentialgleichungen ist wesentlich durch die Glieder höchster Differentialordnung bedingt, d. h. also bei den (stationären) Navier-Stokes'schen Gleichungen für  $v'$  und  $p$  durch die Glieder  $Z \cdot \frac{\nu}{g} \cdot \Delta v'$  und  $\text{grad } p$ . Daher erscheint es „nicht ohne weiteres erlaubt, den Grenzübergang (zu verschwindender Zähigkeit) in der Weise auszuführen, daß man einfach die mit  $Z \cdot \frac{\nu}{g}$  behafteten Glieder  $\Delta v'$  wegläßt“. Dagegen könnte man, solange  $Z \cdot \frac{\nu}{g}$  zwar  $\neq 0$ , aber sehr klein ist, „erwarten, daß die Wirbelkomponenten  $\bar{w}' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}$  sehr klein sind<sup>65</sup> und daß sie beim Grenzübergange  $Z \cdot \frac{\nu}{g} \rightarrow 0$ , d. h.  $\Re \rightarrow \infty$  gegen Null konvergieren. Wenn die Wirbelkomponenten klein sind, so sind auch die Größen:  $\frac{\nu}{g} (v' \bar{w}')$  klein. Wir begehen dann einen kleinen Fehler, wenn wir in unseren hydrodynamischen Differentialgleichungen jene Glieder (d. h. die Glieder  $v' \cdot \text{rot } v'$  und nicht die mit  $\Delta v'$ ) vernachlässigen, und dieser Fehler muß gleichzeitig mit  $Z \cdot \frac{\nu}{g}$  gegen Null konvergieren. Sind unsere Voraussetzungen richtig, so müssen wir durch Lösung des Systems:

$$0 = -\text{grad } q' + Z \cdot \frac{\nu}{g} \cdot \Delta v'; \quad \text{div } v' = 0; \quad q' = p + \frac{\nu |v'|^2}{2g}$$

bei entsprechenden Randbedingungen ein annähernd richtiges Bild der Bewegung bekommen“.

Dies ist die grundlegende Voraussetzung der Oseenschen Theorie. Bei verschwindender Zähigkeit müßte man hiernach Übereinstimmung mit den Aussagen der Theorie der idealen Flüssigkeit erwarten. Es zeigt sich aber bei Durchführung der Rechnung und nachträglichem Übergang zu verschwindender Zähigkeit, daß das Ergebnis von dem, wie man es nach der Theorie der idealen Flüssigkeiten errechnet, abweicht. Läßt man die Voraussetzung gelten, so muß man den „Schluß ziehen, daß bei verschwindender Zähigkeit die Theorie der idealen Flüssigkeiten nicht die Wahrheit trifft“ und nur eine mathematische Fiktion ist.

Oseen hat die Durchführung des Grenzüberganges in sehr umfangreichen, grundlegenden, aber nicht einfachen Darlegungen für die folgenden Fälle behandelt:

1. Für eine ebene Platte beliebiger Form, die senkrecht zur Plattenfläche angeströmt wird;
2. für den nichtstationären Fall eines beliebigen Körpers bei beliebiger Bewegung in der Flüssigkeit und
3. speziell bei translatorischer Bewegung. In diesen komplizierteren Fällen enthalten die Gleichungen dann auch noch die Ableitungen nach der Zeit;
4. behandelte er bei geradliniger Begrenzung des Körpers (Platte) den Fall der stationären Bewegung<sup>66</sup>.

<sup>64</sup> Vgl. Oseen: Hydrodynamik, S. 211—213. Übrigens ist die Bezeichnung „asymptotisch“ von Oseen nicht benutzt worden, sondern erst von Zeilon.

<sup>65</sup> S. jedoch hierzu nachstehend S. 49 u. 57.

<sup>66</sup> Eine Zusammenfassung, die aber teilweise nur die Ergebnisse früherer Arbeiten im Resultat mitteilt, findet man in Oseens Buch: Hydrodynamik 1927, von S. 211 bis 280.

Hier interessiert nur der Fall des stationär bewegten sehr langen Kreiszylinders. Unter Beschränkung der Diskussion auf den beim hier verfolgten Zweck angezeigten Umfang wird nachstehend die asymptotische Diskussion der Lösungen der maßgebenden Gleichungen durchgeführt. Dabei kann auf den Darlegungen des Abschnittes C aufgebaut werden. Der Oseensche Gedankengang geht auch bei dieser Beschränkung klar und im Rahmen der gesamten, im theoretischen Teil dieser Arbeit gegebenen Betrachtungen keine Lücke lassend hervor.

Das Ergebnis hat die folgende, von Oseen also in schwierigeren Fällen und unter allgemeineren Voraussetzungen gefundene Form, die eine Umformung oder Übertragung seiner umfangreichen Ableitungen auf unseren Fall leider nicht ohne langwierige Diskussionen gestatten:

Es ergibt sich bei verschwindender Zähigkeit eine Diskontinuität in der Flüssigkeit; diese ist die geradlinige Begrenzung eines „Kielwasser“-Streifens, der von den Stellen  $\pm \frac{\pi}{2}$  des (ebenen) Zylinderschnittes ausgeht, d. h. von den Stellen größter Breitenabmessung quer zur Strömungsrichtung und sich in Richtung entgegengesetzt der Bewegung des Zylinders bis ins Unendliche erstreckt. Die Körperoberfläche zerfällt dadurch in eine hydrodynamische Vorder- und Rückseite. Außerhalb dieses Streifens bleibt die Bewegung rotorlos und folgt den Gesetzen der Bewegung idealer Flüssigkeit; innerhalb ist der rotorlosen Bewegung eine rotorbehaftete überlagert. Die im Kielwasser vorhandenen Wirbel werden durch Konvektion von ihrem Entstehungsort (am Körper) im Kielwasser geradlinig parallel zur  $x$ -Achse fortgeführt. Eine Wirbeldissipation (etwa vorhandener Wirbel) findet bei  $\Re = \infty$  naturgemäß nicht statt<sup>67</sup>. An der Vorderseite gleitet die Flüssigkeit, d. h. man kann für die dort herrschende Potentialströmung nur über die Geschwindigkeitskomponente normal zur Körperoberfläche verfügen; für die Verhältnisse auf der Rückseite gibt die Theorie keine physikalisch eindeutige Forderung; infolgedessen darf man dort bestimmte Vorschriften machen, z. B. Haften der Flüssigkeit am Körper fordern. Dem Haften der Flüssigkeit und gleichzeitig stetigem Druckverlauf beim Durchschreiten der Kielwasser-grenze ist aber nicht ohne weiteres zu genügen<sup>68</sup>. „Daß überhaupt eine ‚reibungslose‘ Flüssigkeit einen Widerstand aufweisen kann, rührt davon her, daß an der Körperoberfläche die Reibungskräfte noch bei verschwindender Viskosität eine endliche Arbeit ausführen, die zum Losreißen und Transportieren von Wirbeln von der Hinterseite<sup>69</sup> nach rückwärts verbraucht wird“. (Zitiert nach Zeilon 1927, vgl. auch Kármán l. c. Fußnote 28.) Zeilon fügt dann hinzu: „Da aber hinter dem Körper die Geschwindigkeit (nach der Haftbedingung) überall Null sein sollte“<sup>69</sup>, wird der eigentliche Wirbeltransport nur in den kritischen Übergangspunkten<sup>70</sup> zwischen Vorder- und Rückseite stattfinden.“

Aus dem vorstehend mitgeteilten Ergebnis ersieht man, daß bei der asymptotischen Diskussion der Gleichungen sich doch eine bestimmte rotorbehaftete Bewegung im Kielwasser ergibt<sup>71</sup>, so daß in der Tat die Rotorkomponente  $\bar{w}'$  nicht gänzlich vernachlässigt wurde; die „Theorie hat also vorausgesetzt, daß die vernachlässigten Produkte  $v'\bar{w}'$  in erster Näherung gegenüber der noch beibehaltenen rotorbehafteten Bewegung den qualitativen Verlauf wenig beeinflussen“<sup>72</sup>.

<sup>67</sup> Eine auf den Zylinder zu gerichtete „Einströmung“ im Kielwasser, die durch eine „radiale Ausströmung“ vom Zylinder nach außen kompensiert wird, wird näher betrachtet bei Filon: Roy. Soc. Proc. A Bd. 113, S. 7 bis 27, 1926 und Phil. Trans. A 227, S. 93 bis 135; 1928, Nr. 650. Man vgl. hierzu eine in der in Anmerkung 30 zitierten Arbeit enthaltene Bemerkung von Prandtl.

<sup>68</sup> Nach einem Brief von Zeilon an Verf.: „Das Haften der Flüssigkeit an der Rückseite ist für die Oseensche Theorie allerdings eindeutige Forderung. In dem Sinn nämlich, daß die Theorie für  $Z > 0$  davon ausgeht, daß die Flüssigkeit überall am Körper haftet. Für  $Z = 0$  resultiert dann das Haften an der Rückseite als notwendige Folgerung.“ Über die hinsichtlich des stetigen Druckverlaufs grundlegende Zeilonsche Erweiterung von 1927, siehe Abschnitt E; in Abschnitt F siehe die Gedanken des Verf. zum weiteren Ausbau der Theorie.

<sup>69</sup> Vgl. hierzu unter F; siehe auch die nächste Fußnote.

<sup>70</sup> Bei Annahme der Grenzschicht (s. unter F) würde hier „Übergangsgebieten endlicher Dicke (quer zur Grenzschicht)“ zu sagen sein, vgl. im übrigen Zeilons Einführung der Gleitintervalle S. 61 ff.

<sup>71</sup> An den „Rändern“ des Kielwasserstreifens wird die Rotorkomponente sogar sehr groß.

<sup>72</sup> Aus einem Brief von Zeilon an den Verfasser.

Wenn daher Oseen (s. o.) betonte, daß „die Wirbelkomponenten  $\bar{w}'$  beim Grenzübergang gegen Null konvergieren“ würden<sup>73</sup>, so muß diese Formulierung rein sprachlich als nicht ganz glücklich gelten. Der von ihm in Wirklichkeit durchgeführte Linearisierungsweg und die asymptotische Diskussion setzt dies nämlich gar nicht voraus, sondern beruht vielmehr auf dem unmittelbar vorstehend dargelegten Grundgedanken.

Oseen glaubt, daß die Lösung der auf diese Weise „linearisierten“ Gleichungen bei einem Verfahren der sukzessiven Näherungen zur Lösung der strengen Gleichungen vielleicht eine Rolle spielen wird. Vor allem ist erstaunlich, „daß diese erste Näherung viel mehr ergibt, als man von vornherein erwarten konnte. Die Druckverteilung auf der Vorderseite eines Körpers kommt . . . fast genau richtig heraus. Und wenn bei dieser ersten Näherung der Unterdruck auf der Rückseite des Körpers zu groß ausfällt, so kann man . . . durch weiteren Ausbau<sup>74</sup> . . . zu einer fast vollständigen Übereinstimmung mit den Tatsachen gelangen“.

## 2. Durchführung der asymptotischen Diskussion im vorliegenden Sonderfall.

Für die nachstehende Betrachtung ist es von Vorteil, die auf das im Unendlichen ruhende System bezogenen Ausgangsgleichungen, wie man sie am Anfang von Abschnitt C findet, in der bereits am Schluß von Abschnitt B 3 erwähnten Lambschen Form zu schreiben<sup>75</sup>:

Wir führen die Größen:

$$\text{Gesamtdruck:} \quad q = p + \frac{\gamma}{g} \frac{u^2 + v^2}{2}$$

und

$$\text{Rotorkomponente:} \quad \bar{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

ein und erhalten so die vollständigen Navier-Stokesschen Gleichungen des ruhenden Systems in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2aU}{\Re} \frac{\gamma}{g} \cdot \Delta u - \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\gamma}{g} U \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\gamma}{g} v \bar{w} \\ \frac{2aU}{\Re} \frac{\gamma}{g} \cdot \Delta v - \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\gamma}{g} U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\gamma}{g} u \bar{w} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und hieraus mit den geschilderten Voraussetzungen Oseens, d. h.  $v\bar{w} = u\bar{w} = 0$ : die Oseenschen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \Delta + \frac{\Re}{2a} \frac{\partial}{\partial x} \right] \mathbf{v} &= \frac{\Re}{2aU} \frac{\gamma}{g} \text{grad } q, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und daraus

$$\Delta q = 0$$

analog den entsprechenden („erweiterten Stokesschen“) Gleichungen unter C. Die hier gemachten Vernachlässigungen sind aber im Oseenschen Sinne „geringer“, weil hier  $q$  und nicht nur  $p$  berücksichtigt ist. Es braucht also keine „langsame“ Bewegung mehr vorausgesetzt zu werden, bei der die „Geschwindigkeitshöhe“ klein wäre im Vergleich zum Flüssigkeitsdruck. Die vorstehenden Gleichungen besitzen genau dieselbe mathematische Form, wie die Gleichungen in Abschnitt C. Bei der Lösung ist dann aber zur Ermittlung des Körperwiderstandes selbstverständlich der entsprechende Abzug von  $q$  zu machen; in der Druckverteilung ergibt dies naturgemäß einen fundamentalen Unterschied.

<sup>73</sup> Diese von Oseen in seinen Arbeiten öfters gegebene Fassung trägt wahrscheinlich die Schuld daran, daß man die „teilweise Vernachlässigung der Wirbelkomponente“ vielfach nicht ganz als berechtigt empfand. Wenn man aber die von Oseen wirklich durchgeführte Vernachlässigung genauer betrachtet, nämlich die Vernachlässigung der Produkte, so erscheint sie, namentlich in der klaren Formulierung von Zeilon (s. Abschnitt E) als eine erste Näherung für das „Störungsproblem“.

<sup>74</sup> Über die Zeilonsche Erweiterung v. 1927 s. Abschnitt E. Über evtl. andere Möglichkeiten s. unter F. Ebendasselbst über einige grundlegende Unterschiede gegenüber der Helmholtz-Kirchhoff-Totwassertheorie.

<sup>75</sup> Es ist:  $2\zeta' = \bar{w}' = \bar{w}$ .

Wir diskutieren nun das asymptotische Verhalten der Gleichungen bei  $\Re \rightarrow \infty$ , d. h. bei verschwindender Zähigkeit. Durch genau analoge Lösungsansätze wie in Abschnitt C könnten wir die asymptotische Diskussion auf das Verhalten der Funktion  $\chi = \int \bar{w} dy$  zurückführen [siehe Abschnitt C, Gleichungen (3) bis (8)]. Die weitere Diskussion wird aber etwas einfacher, wenn wir folgendermaßen vorgehen:

Wir eliminieren aus den beiden Grundgleichungen (2) den hydrodynamischen Druck und erhalten:

$$\left[ \Delta + \frac{\Re}{2a} \frac{\partial}{\partial x} \right] \bar{w} \equiv \Delta' \bar{w} = 0. \quad (3)$$

Die asymptotische Diskussion dieser Gleichung, welche formal mit Gl. (5) in Abschnitt C übereinstimmt, läßt sich unmittelbar an die dort gefundene Lösung der Gl. (5), nämlich an Gl. (8) in Abschnitt C, anschließen. Wir setzen<sup>76</sup> für die asymptotische Darstellung der Hankelschen Funktion:

$$H_0^1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot z}} \cdot e^{(iz - \pi/4)}.$$

Im allgemeinen wird in der Flüssigkeit mit  $\Re \rightarrow \infty$  auch  $\frac{1}{\Re} \cdot \Delta u$  und  $\frac{1}{\Re} \cdot \Delta v$  gegen Null gehen; denn, wenn das nicht der Fall wäre, müßte auch  $\Delta u$  oder  $\Delta v \rightarrow \infty$  gehen, d. h. eine Singularität im Geschwindigkeitsfeld vorhanden sein. Man erhält dann aus den Gleichungen (1) nach Vornahme der Oseenschen Kürzungen und Elimination des Druckes:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichung besagt, daß der Rotor  $\bar{w}$ , sofern er überhaupt vorhanden ist, mit konstanter Intensität auf Parallelen zur  $x$ -Achse, d. h. zur Anströmrichtung verteilt ist. Die Wirbelkonvektion ist rein translatorisch. Wirbel können bekanntlich nur durch dissipative Kräfte an den Grenzen der Flüssigkeit z. B. an der Körperoberfläche entstehen, und nur solche Stromlinien, die vom Körper wegführen, können Wirbel tragen. Dort, d. h. im Kielwasser „fließen“ sie also auf Parallelen zur  $x$ -Achse. Daher wird man durch Einführung einer Belegungsdichte  $A(x_0, y_0)$  längs der Randkurve des Körpers mit dem Bogenelement  $\sigma_0(x_0, y_0)$  die Wirbelkomponente  $\bar{w}$  (von Konstanten abgesehen) in folgender Integraldarstellung ausdrücken können<sup>77</sup>:

$$\bar{w} = \int_{\sigma_0} A(x_0, y_0) \cdot \Re \cdot e^{-\frac{\Re(x-x_0)}{4a}} H_0^1\left(\frac{i \Re r}{4a}\right) \cdot d\sigma_0, \quad (5)$$

mit  $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$  oder unter Einführung der angegebenen asymptotischen Entwicklung für  $H_0^1$  (wieder von Konstanten abgesehen):

$$\bar{w} \sim \int_{\sigma_0} A(x_0, y_0) \cdot \frac{\sqrt{\Re}}{\sqrt{r}} \cdot e^{-\frac{\Re}{4a}(x-x_0+r)} d\sigma_0. \quad (6)$$

Es gilt stets:  $\sqrt{\Re}(x-x_0)+r \geq 0$ ; für  $(x-x_0)+r > 0$  geht aber  $e^{-\frac{\Re}{4a}(x-x_0+r)}$  mit  $\Re \rightarrow \infty$  schneller gegen Null als  $\sqrt{\Re}$  anwächst. Daher erhält man bei  $\Re = \infty$  nur für:  $x-x_0+r=0$  Beiträge zum Integral, d. h. wenn:

$$y = y_0, \quad x - x_0 \leq 0$$

ist. Wir nähern uns dem Wert des längs der Randkurve ( $x=x_0$ ;  $y=y_0$ ) zu erstreckenden Integrals an der Grenze  $\Re \rightarrow \infty$ , indem wir das Integral in der Umgebung von  $y=y_0$  nehmen:

$$\bar{w} \sim \sqrt{\Re} \int_{y_0=y-\varepsilon}^{y_0=y+\varepsilon} A(x_0, y_0) \cdot e^{-\frac{\Re}{4a}(x-x_0+r)} \frac{d\sigma_0}{\sqrt{r}}$$

<sup>76</sup> Siehe Riemann-Weber-Mises Bd. 2, S. 458.

<sup>77</sup> Vgl. Gleichung (8) in Abschnitt C, S. 44.

und zur Grenze:  $2\varepsilon \rightarrow 0$  gehen. Zunächst entwickeln wir

$$r \simeq |x - x_0| + \frac{1}{2} \frac{(y - y_0)^2}{|x - x_0|}$$

und vernachlässigen im Nenner des Integranden das zweite Glied. Im Exponenten darf diese Vernachlässigung wegen des Faktors  $\Re$  aber nicht angewendet werden, so daß der zweite Ausdruck zurückbleibt, während der erste herausfällt. Wegen  $d\sigma_0 = \frac{dy_0}{\cos(\sigma_0, y_0)}$  kann man dann, wenn man in dem kleinen Integrationsbereich  $A(x_0, y_0)$  und  $|x - x_0|$  als konstant ansieht und daher vor das Integrationszeichen setzen darf, folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \bar{w} &\sim \frac{\sqrt{\Re} \cdot A_0(x_0, y_0)}{\sqrt{|x - x_0|}} \cdot \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} e^{-\frac{\Re}{4a} \frac{(y-y_0)^2}{|x-x_0|}} \cdot \frac{dy}{\cos(\sigma_0, y_0)} = \\ &\sim \frac{2\sqrt{a} \cdot A_0(x_0, y_0)}{\cos(\sigma_0, y_0)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cdot du = \frac{2\sqrt{\pi \cdot a}}{\cos(\sigma_0, y_0)} \cdot A_0(x_0, y_0); \end{aligned}$$

d. h.

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= \bar{w}_0(y) \text{ konstant auf jeder Parallelen zur } x\text{-Achse im Kielwasser,} \\ \bar{w} &= 0 \text{ außerhalb des Kielwassers.} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

### 3. Zurückführung auf ein Potentialproblem<sup>78</sup>.

Die Gleichungen (4) und (7) gestatten nunmehr, die gesamte Aufgabestellung:  $\bar{v}(u, v)$  und  $p$  bzw.  $q$  als Lösung der Gleichung (2) bei  $\Re \rightarrow \infty$  anzugeben, auf ein Potentialproblem zurückzuführen.

Im Kielwasser wird:

$$\bar{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \bar{w}_0(y)$$

allgemein durch den Ansatz gelöst:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1(x, y) + u_0(y) \\ v &= v_1(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wobei  $u_1; v_1$  eine rotorfreie Strömung, d. h. eine Potentialströmung ist, also

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + u_0(y); \\ v &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{aligned} \right\}; \quad \Delta \varphi_1 = 0. \quad (8a)$$

Außerhalb des Kielwassers gilt aber

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \right\}; \quad \Delta \varphi = 0. \quad (9)$$

Man kann nun nachweisen, daß  $\varphi$  und  $\varphi_1$  ein und dieselbe, im ganzen Außenraum des Zylinders definierte Potentialfunktion ist. Man kann aber einfacher von den Gleichungen (4) und (6) im Abschnitt C<sup>79</sup> ausgehen, die hier als Gl. (10) noch einmal angeschrieben seien. Danach gilt für  $\Re \rightarrow \infty$  im ganzen Raum

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \chi; \\ v &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned} \right\}; \quad \Delta \Phi = 0, \quad (10)$$

<sup>78</sup> Nach einer brieflichen Mitteilung von Zeilon an den Verfasser.

<sup>79</sup> Siehe S. 43.

also im Kielwasser:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \chi_0(y); \\ v &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{aligned};$$

außerhalb des Kielwassers:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ v &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{aligned}.$$

Die Randbedingung des Haftens an der Rückseite fordert nun, wenn man mit  $B_r$  die Gleichung der Zylinderrückseite bezeichnet:

$$\begin{aligned} u_r &= -\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{B_r} - \chi_0(y) = +U; \quad \chi_0(y) = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{B_r} - U, \\ v_r &= -\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{B_r} = 0. \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man, daß  $-\Phi$  mit  $\varphi$  identisch ist.

Das Potentialproblem, auf das hiermit die asymptotische Strömung um den Kreiszyylinder zurückgeführt ist, lautet sonach:

Es ist eine, im ganzen Raume außerhalb des Körpers reguläre und im Unendlichen verschwindende, Newtonsche Potentialfunktion  $\varphi$  zu finden, die also der Gleichung

$$\Delta\varphi = 0$$

genügt, und die an der Vorderseite des Körpers die Bedingungen:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \text{bzw.} \quad u \cos\vartheta + v \sin\vartheta = U \cos\vartheta;$$

an der Rückseite des Körpers die Bedingungen:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{B_r} + U; \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

erfüllt. Analog Gleichung (3) in Abschnitt C ist:

$$q = \frac{\gamma}{g} U \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

#### 4. Lösung des Problems.

Die Lösung des Problems ist in Ziffer 3 auf eine potentialtheoretische Aufgabe zurückgeführt worden. Diese läßt sich besonders einfach formulieren, wenn man an Stelle der wirklichen Strömung mit der Geschwindigkeit  $v(u, v)$  eine nur gedachte Potentialströmung  $W = v_x - i v_y$  betrachtet, die mit der wirklichen durch bestimmte Beziehungen verknüpft ist (s. u.). Für diese gedachte Strömung werden dann die einfacheren Randbedingungen an dem durch  $|z| = |x + iy| = a$  gegebenen Zylinder und im unendlich Fernen angegeben.

Es sei hiernach:

$$W(z) = v_x - i v_y = \frac{d\Lambda z}{dz}; \quad v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad (11)$$

so daß die überall außerhalb  $|z| = a$  der Laplaceschen Gleichung (12)  $\Delta\varphi = 0$  genügende Potentialfunktion  $\varphi(z)$  als Realteil der analytischen Funktion  $\Lambda(z)$  angesehen werden kann. Die Beziehungen zwischen  $u$  und  $v_x$  bzw.  $v$  und  $v_y$  seien nun die folgenden:

Außerhalb des Kielwasserstreifens, d. h. im Gebiet:  $B_{\text{Vorderseite}} = B_v$ :

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_x; \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_y; \quad q = \frac{\gamma}{g} U \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

innerhalb des Kielwasserstreifens, d. h. im Gebiet:  $B_{\text{Rückseite}} = B_r$ :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{B_r} + U = v_x - v_x \Big|_r + U; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y; \quad q = \frac{\gamma}{g} \cdot U \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Hieraus ergeben sich für  $W(z)$  am Körper folgende Randbedingungen: Bezeichnet man die Werte von  $v_x$  und  $v_y$  auf der Zylinderoberfläche mit  $v_x(\vartheta)$ ,  $v_y(\vartheta)$ , so gilt nämlich nach früherem:

$$\left. \begin{array}{l} \text{auf der Zylindervorderseite:} \\ v_x(\vartheta) \cdot \cos \vartheta + v_y(\vartheta) \cdot \sin \vartheta = U \cos \vartheta, \\ \text{auf der Rückseite: } v_y(\vartheta) = 0, \end{array} \right\} \quad (13)$$

Bedingungen, die man in der Form zusammenfassen kann:

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot v_x(\vartheta) + b \cdot v_y(\vartheta) = a \cdot U, \\ a = \begin{cases} \text{Vorderseite} = \cos \vartheta \\ \text{Rückseite} = 0 \end{cases} \\ b = \begin{cases} \text{Vorderseite} = \sin \vartheta \\ \text{Rückseite} = 1 \end{cases} \end{array} \right\} \quad (13a)$$

Die Funktion  $b$  macht also an der Stelle  $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$  einen Sprung von  $-1$  nach  $+1$ .

Im unendlich Fernen verschwindet sowohl  $v_x$  wie  $v_y$ , hiermit  $W(z)$ .

Die vorstehend formulierte potentialtheoretische Aufgabe ist von Professor Zeilon in: „On Potential Problems in the Theory of Fluid Resistance 1924“<sup>80</sup> gelöst worden. Zeilon findet im Anschluß an Hilbert<sup>81</sup> folgende Lösung<sup>82</sup>:

$$\left. \begin{array}{l} W\left(\frac{z}{a}\right) = U \left\{ 1 - \frac{e^{w\left(\frac{z}{a}\right)}}{\sqrt{2}} \left( 1 - i \frac{\frac{z}{a} - i}{\frac{z}{a} + i} \right) \right\} \\ \text{mit} \\ w\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{\vartheta' = -\frac{\pi}{2}}^{\vartheta' = +\frac{\pi}{2}} \left( \vartheta' - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left[ \frac{1}{z' - \frac{z}{a}} - \frac{1}{2z'} \right] dz'; \quad z = e^{i\vartheta}. \end{array} \right\} \quad (14)$$

Auf dem Zylinder  $\frac{z}{a} = 1$  hat der reelle Teil von  $w\left(\frac{z}{a}\right)$  den Wert<sup>83</sup>

$$\begin{aligned} w(\vartheta) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left( \vartheta' - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cotg \frac{1}{2} (\vartheta - \vartheta') d\vartheta' \\ &= \left( \frac{\vartheta}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \cdot \ln \left| \cotg \left( \frac{\vartheta}{\pi} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + f\left( \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right) + f\left( \frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2} \right). \end{aligned}$$

Hierbei ist gesetzt:

$$f(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \alpha \cdot \cotg \alpha \cdot d\alpha.$$

<sup>80</sup> Kgl. Svenska Vetenskapsakademien Handlingar Serie III, Bd. 1, Nr. 1.

<sup>81</sup> Grundlagen einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen, Kap. X. S. 82. 1912.

<sup>82</sup> Die Ableitung, die rein mathematischer Natur ist und ziemlichen Umfang hat, ist für die Behandlung des physikalischen Problems ohne Bedeutung. Sie ist daher hier unterdrückt worden; an Stelle dessen wird nachstehend verifiziert, daß die Lösung den geforderten Bedingungen genügt. Man findet den Gang der Lösung ausführlich bei Zeilon, l. c. oder kürzer bei Oseen: Hydrodynamik, S. 282—290 und 297—299; ferner mit anderer Ableitung bei Burgers, Proceedings der Amsterdamer Akademie der Wiss. XXXI, Nr. 4 u. 5, 1928.

<sup>83</sup> Diese Verifizierung ist der Oseenschen Darstellung (Hydrodynamik S. 297—300) entnommen.

Der imaginäre Teil von  $w\left(\frac{z}{a}\right)$  hat auf dem Zylinder  $\frac{z}{a} = 1$  den Wert:

$$-i\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < +\frac{\pi}{2},$$

$$0 \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta < 3\frac{\pi}{2}.$$

Daher nimmt dort  $e^{w\left(\frac{z}{a}\right)}$  die Werte an:

$$i \cdot e^{-i\vartheta} \cdot e^{w(\vartheta)} \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < +\frac{\pi}{2}$$

$$e^{w(\vartheta)} \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta < 3\frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt:

für  $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < +\frac{\pi}{2}$ :

$$\left. \begin{aligned} W(\vartheta) &= U \left\{ 1 - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{w(\vartheta) - i\vartheta} \cdot \left( 1 - i \frac{\cos \vartheta + i \sin \vartheta - i}{\cos \vartheta + i \sin \vartheta + i} \right) \right\} \\ &= U \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \vartheta + i \cos \vartheta) \cdot e^{w(\vartheta)} \cdot \left( 1 + \frac{\sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right) \right\}; \\ u(\vartheta) = v_x(\vartheta) &= U \left\{ 1 - \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{w(\vartheta)} \cdot \left( 1 - \cotg\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right) \right\}; \\ v(\vartheta) = v_y(\vartheta) &= \frac{U}{\sqrt{2}} \cos \vartheta \cdot e^{w(\vartheta)} \left( 1 - \cotg\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right). \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

und für  $\frac{\pi}{2} < \vartheta < 3\frac{\pi}{2}$ :

$$\left. \begin{aligned} W(\vartheta) &= U \left\{ 1 - \frac{e^{w(\vartheta)}}{\sqrt{2}} \left( 1 - \cotg\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right) \right\}; \\ v_x(\vartheta) &= U \left\{ 1 - \frac{e^{w(\vartheta)}}{\sqrt{2}} \left( 1 - \cotg\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right) \right\}; \\ v(\vartheta) = v_y(\vartheta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

Man erkennt hieraus unmittelbar, daß den geforderten Bedingungen am Zylinderumfang Genüge geleistet worden ist<sup>84</sup>.

Aus den Werten (15) läßt sich nun mittels der Beziehungen<sup>85</sup>:

auf der Vorderseite:

$$p_v = \frac{\gamma}{g} \cdot U \cdot v_x(\vartheta) - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} [v_x^2(\vartheta) + v_y^2(\vartheta)],$$

auf der Rückseite:

$$p_r = \frac{\gamma}{g} \cdot U \cdot v_x(\vartheta) - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \cdot U^2$$

für verschiedene Werte  $\vartheta$  die Druckverteilung berechnen. Diese Berechnung hat Zeilon durchgeführt (siehe Tabelle 14). Der Druck macht hiernach, wenn man die Grenze des Kiel-

Tabelle 14.

$\vartheta^0$	$\frac{v_x(\vartheta)}{U}$	$\beta = \frac{p}{\gamma \frac{U^2}{2g}}$	$\beta_{\text{Korr}}$
0	1,000	1,000	1,000
9	0,954	0,914	0,914
18	0,836	0,720	0,720
27	0,635	0,358	0,358
31,5	0,512	0,120	0,120
36	0,387	-0,086	-0,086
45	0,127	-0,524	-0,524
54	-0,130	-0,948	-0,948
63	-0,344	-1,270	-1,270
72	-0,493	-1,450	-1,450
81	-0,531	-1,390	-1,390
90	$\left\{ \begin{array}{l} -0,414 \\ = 1 - \sqrt{2} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -1,000 \\ -1,832 \end{array} \right.$	-1,000
99	-0,275	-1,550	-0,722
108	-0,216	-1,432	-0,604
117	-0,181	-1,362	-0,534
126	-0,159	-1,318	-0,490
135	-0,144	-1,288	-0,460
144	-0,131	-1,262	-0,434
153	-0,126	-1,252	-0,424
162	-0,120	-1,240	-0,412
180	-0,117	-1,234	-0,406

<sup>84</sup> Daß auch die Bedingungen im unendlich Fernen befriedigt sind, erkennt man durch Betrachtung von  $W$  für große Werte  $|z|$ ; man vergleiche hierzu Oseen: Hydrodynamik S. 289/291 und 299/300, sowie nachstehend S. 71.

<sup>85</sup> Vgl. S. 50, 53/54.

wassers durchschreitet, einen Sprung. Die Druckverteilung ist in Abb. 16 aufgezeichnet worden. Als Widerstandsbeiwert erhält man den zu großen Wert

$$\zeta = 1,314$$

(siehe Abb. 15 und 15 a).

Der Forderung stetigen Druckverlaufes kann man nach Zeilon bei einer „Wirbelverteilung gleicher Wahrscheinlichkeit“ im Kielwasser dadurch gerecht werden, daß man auf der Rückseite anstatt:

$$p_r = \frac{\gamma}{g} \cdot U \cdot v_x(\vartheta) - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \cdot U^2$$

ansetzt:

$$p_{r\text{Korr}} = \frac{\gamma}{g} \cdot U \cdot v_x(\vartheta) - 0,086 \frac{\gamma}{g} U^2,$$

d. h. indem man den konstanten Betrag abändert. Über die „verbesserte Kielwasserdruckberechnung“ von Zeilon 1926/27, die den stetigen Druckverlauf auf andere Weise gewinnt, siehe Abschnitt E. Mit vorstehender Annahme erhält man die Spalte  $\beta_{\text{Korr}}$ , die in der Abb. 16 eingetragene „korrigierte“ Kurve und den Widerstandsbeiwert

$$\zeta_{\text{Korr}} = 0,480$$

(siehe Abb. 15 und 15 a).

## E. Zeilons „verbesserte“ Berechnung des Kielwasserdruckes in der asymptotischen Widerstandstheorie 1926/27<sup>86</sup>.

### 1. Vorbemerkung.

Man verdankt Zeilon nicht nur eine grundlegende Weiterführung der hydrodynamischen Theorie von Oseen, bei deren sehr klarer Formulierung auch das Wesentliche der Oseenschen Rechnungen besonders deutlich wird, sondern auch eine hier vor allem interessierende, „verbesserte“ Widerstands- und Druckverteilungsrechnung, die — allerdings unter gewissen, deutlich als solche gekennzeichneten Annahmen — zu einer sehr beachtenswerten fast völligen Übereinstimmung mit der in Teil I beschriebenen Beobachtung bei Reynoldsschen Zahlen oberhalb des plötzlichen Abfalls des Widerstandsbeiwertes führt. Die gemachten Annahmen sind zwar sowohl qualitativ wie quantitativ von einer gewissen Willkür nicht frei. Gleiche Resultate werden sich — wie in Abschnitt F dargelegt wird — vielleicht auch auf andere, mehr den physikalischen Vorgängen Rechnung tragende Weise erreichen lassen, die dann eine Vereinigung mit der Prandtlischen Grenzschichttheorie möglich erscheinen läßt. Diese Einschränkung ändert jedoch nichts an dem befriedigenden Ergebnis.

### 2. Kurze Darlegung der Zeilonschen Weiterführung der Theorie, soweit sie für die folgende Widerstandsrechnung gebraucht wird und das Verständnis des Oseenschen Vorgehens vertieft.

Die Bewegung eines festen Körpers in einer reibungslosen Flüssigkeit wird dadurch erhalten, daß die in der nachstehenden Weise linearisierten Grundgleichungen der Bewegung zäher Flüssigkeit unter möglichst guter Befriedigung der Randbedingungen des speziellen Problems gelöst werden und in dieser Lösung der Grenzübergang  $Z \rightarrow 0$  bzw.  $\Re \rightarrow \infty$  durchgeführt wird. Die Linearisierung erfolgt unter dem Gesichtspunkt, daß man die von dem bewegten festen Körper erzwungene Änderung des Geschwindigkeitsfeldes der Flüssigkeit als

<sup>86</sup> Die nachstehende Darstellung stützt sich auf die als Anhang zu Oseens Buch: Hydrodynamik, 1927 sowie in den Verh. d. II. Intern. Kongresses für Techn. Mechanik, Zürich 1927 auszugsweise erschienenen zwei Züricher Vorträgen von Zeilon (1926), sowie auf die Abhandlung: Beiträge z. Theorie des asymptotischen Flüssigkeitswiderstandes, Uppsala 1927 (Nova acta regiae soc. scientiarum Upsal.), ferner auch auf ergänzende, briefliche Ausführungen von Zeilon an den Verfasser. Die Stellen, an denen diese Quellen wörtlich zitiert sind, sind durch Anführungsstriche hervorgehoben.

eine der ursprünglichen Strömung superponierte Störung auffaßt; es soll in erster Näherung zulässig sein, die quadratischen Störungsglieder gegenüber „halbquadratischen“ zu vernachlässigen — eine Maßnahme, deren Berechtigung erst noch überprüft werden muß. Insbesondere im zweidimensionalen Fall zerlegt man die stationäre (d. h. vom bewegten System aus betrachtete<sup>87</sup>) Bewegung in die bekannte „eingepägte“ Primärströmung  $u_0, v_0$  (in dem bisher betrachteten Fall ist:  $u_0 = -U; v_0 = 0$ ) und eine zu ermittelnde Störungsströmung  $u, v$ :

$$u' = u_0 + u; \quad v' = v_0 + v.$$

In der Lambschen Schreibweise<sup>88</sup> lauten die vollständigen Grundgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\gamma}{g} v' \bar{w}' &= -\frac{\partial q'}{\partial x} + Z \frac{\gamma}{g} \Delta u' \\ + \frac{\gamma}{g} u' \bar{w}' &= -\frac{\partial q'}{\partial y} + Z \frac{\gamma}{g} \Delta v', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0. \\ \bar{w}' &= \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}; \quad q' = p + \gamma \frac{(u'^2 + v'^2)}{2g}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

Gemäß dem Oseenschen Gedankengang vernachlässigt man nun in den Produkten  $u' \bar{w}'; v' \bar{w}'; u' \frac{\partial \bar{w}'}{\partial x}; v' \frac{\partial \bar{w}'}{\partial y}$  in erster Näherung die quadratischen Störungsglieder:

$$u \bar{w}'; \quad v \bar{w}'$$

gegenüber den „halbquadratischen“ Gliedern:  $u_0 \bar{w}'; v_0 \bar{w}'$ ; dies läuft mathematisch gesprochen darauf hinaus, aus den nichtlinearen Differentialgleichungen lineare Gleichungen mit den Koeffizienten  $u_0, v_0$  zu machen, die im allgemeinen aber doch bekannte Ortsfunktionen sind. (Daher der Ausdruck: „Linearisierung“ und „halbquadratische Glieder“.)

Leitet man die Primärströmung von einer Stromfunktion  $\Psi_0$  ab:

$$u_0 = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial y}; \quad v_0 = +\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}$$

und setzt man entsprechend für die Störungsströmung:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = +\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

so erhält man mit den Vernachlässigungen im Sinne von Oseen:

$$\frac{\gamma}{g} \left( u_0 \frac{\partial \bar{w}'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \bar{w}'}{\partial y} \right) = Z \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \Delta \bar{w}', \quad (\text{II})$$

d. i. die Gleichung, deren asymptotisches Verhalten für  $Z \rightarrow 0$  in der Oseenschen Theorie untersucht wird<sup>89</sup>, und aus der man im Falle  $u_0 = -U; v_0 = 0$ :

$$\frac{\partial \bar{w}'}{\partial x} = 0$$

folgt.

Bei  $Z=0$  erhält man

$$\bar{w}' = f(\psi_0). \quad (1)$$

Macht man die Oseenschen Vernachlässigungen nicht, so erhält man bei  $Z=0$ :

$$\bar{w}' = f(\psi). \quad (2)$$

Gleichung (1) besagt, daß — von etwa möglichen Diskontinuitäten im Strömungsfeld (d. h. von Stellen  $\Delta \bar{w}' \rightarrow \infty$ ) abgesehen — die Bewegung gemäß der Lösung des im Oseenschen

<sup>87</sup> S. Abschnitt C, S. 41ff.

<sup>88</sup> S. Abschnitt B, S. 40.

<sup>89</sup> Vgl. Abschnitt D, wo  $\bar{w}' = \bar{w}; u_0 = -U; v_0 = 0; Z = \frac{2aU}{\Re}$  ist.

Sinne linearisierten Gleichungssystems bei  $Z=0$  nicht nur eine Potentialbewegung, sondern auch rotorbehaftet sein kann, und zwar mit konstanter Intensität auf gewissen Stromlinien der gegebenen Primärbewegung. In dem bisher behandelten Sonderfall ( $u_0 = -U; v_0 = 0$ ) waren das gemäß  $\frac{\partial \bar{w}'}{\partial x} = 0$ , die Parallelen zur  $x$ -Achse im Kielwasser, die somit die Oseensche Theorie in dem speziellen Fall der translatorischen Primärströmung charakterisieren<sup>90</sup>. In dem vorliegenden allgemeineren Fall sind die Linien konstanter Rotorintensität durch die gewählte Primärströmung festgelegt.

Gleichung (2) besagt, daß, gemäß den exakten Gleichungen, in der reibungslosen Flüssigkeit ( $Z=0$ ) der Rotortransport im Innern ausschließlich durch Konvektion bestimmt wird (naturgemäß findet ja keine Dissipation statt), und daß die Kurven konstanter Rotorintensität gleichzeitig Stromlinien der gesamten Bewegung: Primärströmung plus Störungsströmung sind. Zeilon führt in seiner Arbeit die asymptotische Diskussion der Gleichung II (also  $Z \rightarrow 0$ ) bei rotorfreier Primärströmung (d. h.  $\Delta \psi_0 = 0$ ) durch und findet die Resultate der Oseenschen Betrachtung (s. Abschnitt D; die asymptotische Diskussion gleicht der auf S. 51 bis 52 ausgeführten) in verallgemeinerter Form — seinem verallgemeinerten Ansatz entsprechend — wieder. Er findet ein mit rotorbehafteter Bewegung belegtes Kielwasser hinter dem Körper, dessen Oberfläche dadurch in eine „hydrodynamische“ Vorder- und Rückseite geteilt wird. Zur Aufrechterhaltung der Randbedingungen auch an der Grenze  $Z \rightarrow 0$ , d. h.  $\Re \rightarrow \infty$  kann man auf der Vorderseite nur die Bedingung für die Geschwindigkeit ansetzen, daß die Bewegung der Flüssigkeit mit der des Körpers in der Normalenrichtung übereinstimmt. Die Tangentialkomponente läßt sich nicht festlegen, so daß sich stets Gleiten ergibt. An der Rückseite hat man nur noch über die Rotorkomponente  $\bar{w}_0$  im Kielwasser zu verfügen, und bei geeigneter Bestimmung wird man — nur an der Rückseite — ein Haften der Flüssigkeit am Körper erhalten. Zeilon weist ferner nach, daß das zu dieser Aufgabe gehörige ebene Potentialproblem mindestens immer dann lösbar ist, wenn die Körperkontur sich konform auf einen Kreis abbilden läßt.

### 3. Schlußfolgerung aus Ziffer 2.

Über den Einfluß der Linearisierung der Grundgleichungen im Oseenschen Sinne, wie er, zwar nicht nach asymptotischer Diskussion, aber unmittelbar bei der Setzung:  $Z=0; \Re = \infty$  in den Gleichungen (1) im Vergleich zu (2) zum Ausdruck kommt, lassen sich nun wichtige Aussagen machen: Man berührt damit die Grundlagen der gesamten, in den Abschnitten C, D, E behandelten Theorie und schafft für die „verbesserte“ Lösung des Widerstandsproblems nach Zeilon eine neue Grundlage:

„Der linearisierenden Grundannahme gemäß erfolgt in erster Näherung die Wirbelkonvektion entlang hypothetisch festgelegter Wirbelbahnen, die im allgemeinen von den Stromlinien der resultierenden Bewegung verschieden sein werden. Die vertiefte Behandlung des hydrodynamischen Problems wird notwendigerweise das Ziel anstreben, durch sukzessive Näherung die Primärströmung so zu verbessern, daß die Wirbelbahnen sich allmählich den wirklichen Stromlinien mehr und mehr anschließen“. Ein erster Schritt des Näherungsprozesses wird es vielleicht sein, die Stromlinien im Kielwasser zunächst hypothetisch festzulegen, hieraus im Verein mit den Randbedingungen das Potentialproblem aufzulösen und dann nachzusehen, wie weit die Wirbelbahnen mit den angenommenen Stromlinien übereinstimmen<sup>91</sup>.

Dieser Gedankengang eines in geeigneter Weise gegenüber der ursprünglichen Oseenschen Theorie „modifizierten“ Potentialproblems, die ja selbst unter den möglichen Kielwasserwirbelbahnen ohne eigentlichen physikalischen Grund<sup>92</sup> und (s. u.) nicht überall mit

<sup>90</sup> Der Schluß  $\frac{\partial \bar{w}'}{\partial x} = 0$  bleibt auch bei der asymptotischen Diskussion  $Z \rightarrow 0$  (also nicht unmittelbar  $Z=0$  gesetzt) bestehen.

<sup>91</sup> Nach Zeilon l. c. S. 6, 17 bis 19.

<sup>92</sup> Nämlich nach dem mathematischen Gesichtspunkt möglichst vorsichtiger Linearisierung.

gleich guter Annäherung an die Wirklichkeit ganz bestimmte auswählt, ist für die „verbesserte“ Widerstandsrechnung von ausschlaggebender Bedeutung.

#### 4. Bemerkung zur Oseenschen Theorie.

Die bisherige Lösung des Oseenschen Potentialproblems für den Kreiszyylinder (siehe Abschnitt D) ist in zweierlei Hinsicht unvollkommen: 1. ergibt sich ein zu großer Widerstandsbeiwert und 2. ein beim Passieren der Kielwassergrenze unstetiger Druckverlauf.

Aus der zweiten Gleichung der Grundgleichungen (I) folgt bei Vernachlässigung des quadratischen Störungsgliedes  $u\bar{w}'$  bei  $Z \rightarrow 0$  und  $Z \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \Delta v' \rightarrow 0$  zur Druckbestimmung unmittelbar:

$$q' = \frac{\gamma}{g} U \cdot \int \bar{w}' dy; \quad \frac{\partial q'}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

während genau (also ohne Vernachlässigungen) gilt:

$$q' = \frac{\gamma}{g} \int \bar{w}' [v' dx + (U - u) dy]. \quad (4)$$

In der Oseenschen Lösung ist nun auf der Vorderseite  $\bar{w}' = 0$ , auf der Rückseite  $v' = 0$ , und der Fehler rührt also daher, daß das Produkt  $u\bar{w}'$  nicht überall vernachlässigt werden darf. In der Tat wird diese Größe in Oseens Lösung nahe der Grenze des Kielwassers sehr groß. Beim Passieren der Kielwassergrenze wird in Oseens Lösung  $\bar{w}'$  sogar derart unendlich groß, daß  $q'$  um einen endlichen Betrag springt (vgl. Abb. 16 und Tabelle 14). Dagegen besteht die Annahme zu Recht, daß das Produkt  $v\bar{w}'$  sehr klein ist (nicht aber überall, wie soeben betont wurde,  $\bar{w}'$  selbst!), d. i. die Annahme, daß die Wirbelkonvektion parallel zur  $x$ -Achse erfolgt.

Diese letztere Annahme bleibt auch im folgenden als wesentliche Annahme und zu Recht bestehen, wie gezeigt werden wird. Darüber hinaus führen aber zwei neue Annahmen, nämlich eine „modifizierte“ Primärströmung, d. h. hypothetische Festlegung der „Wirbelbahnen“ im Kielwasser derart, daß die vollständigen Bewegungsgleichungen in Körpernähe möglichst gut befriedigt werden, und eine Einführung seitlicher „Gleitintervalle“, d. i. eine „Auflockerung“ der Druckdiskontinuität<sup>93</sup> zu einer „verbesserten“ und eindeutigen Kielwasserdruckbestimmung.

#### 5. Einführung einer modifizierten Primärströmung.

Beim Oseenschen Problem, d. h. bei Einführung der Oseenschen Vernachlässigungen ist der Kielwasserdruck nicht eindeutig bestimmt. Man erkennt dies, wenn man unter Beibehaltung der Oseenschen Vernachlässigungen eine geänderte Primärströmung einsetzt:

Wird z. B. eine geänderte Primärströmung  $U(y)$  derart eingeführt, daß  $U(y)$  außerhalb des Kielwasserstreifens  $= U$  ist, im Inneren des Kielwassers  $U(y)$  beträgt mit stetigem Übergang von  $U$  zu  $U(y)$  am Kielwasserrand, und daß auch der Rotor der Primärströmung am Rand stetig gegen den äußeren Wert Null geht, so gilt mit den Oseenschen Vernachlässigungen für  $Z \rightarrow 0$  immer:  $\frac{\partial \bar{w}'}{\partial x} = 0$ , aber:

$$q' = \frac{\gamma}{g} \int U(y) \cdot \bar{w}' \cdot dy; \quad \frac{\partial q'}{\partial x} = 0.$$

Die Oseensche Lösung bleibt dann also unverändert bestehen; das Potentialproblem ist bei gleichen Randbedingungen stets das gleiche; der Druck im Kielwasser ist aber von der speziell im Kielwasser gewählten Primärströmung  $U(y)$  abhängig und kann daher ganz verschieden ausfallen.

<sup>93</sup> Vgl. hierzu die Gedanken des Verfassers in Abschnitt F.

Aber auch wenn man gemäß Ziffer 4 in der zweiten Gleichung der Grundgleichungen I das Produkt  $u\bar{w}'$  nicht mehr vernachlässigt, so ist damit allein die Kielwasserdruckbestimmung noch nicht durchführbar:

Mit:  $u' = -U + u$ ;  $v_0 = 0$ , d. h. translatorische Bewegung, schreibt sich diese Gleichung:

$$-\frac{\gamma}{g} \cdot U \bar{w}' + \frac{\gamma}{g} u \bar{w}' = -\frac{\partial q'}{\partial y} + Z \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \Delta v'.$$

Zeilon wählt nun eine besonders geeignete Primärströmung dadurch aus, daß er einen Teil der im Oseenschen Sinne  $\left(\frac{\partial \bar{w}'}{\partial x} = 0\right)$  geradlinigen rotorbehafteten Bewegung zur Primärströmung mit hinzunimmt. Er ändert damit die Primärströmung in der Weise ab, daß er den vollständigen Differentialgleichungen wenigstens in unmittelbarer Nähe des Körpers möglichst gut gerecht wird, und ersetzt die vorstehende Gleichung durch die folgende:

$$-\frac{\gamma}{g} \cdot U(y) \cdot \bar{w}' = -\frac{\partial q'}{\partial y} + Z \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \Delta v'. \quad (5)$$

Dabei ist dann  $U(y)$  im Gebiet des Wirbeltransportes an der Körperrückseite gleich der gesamten Geschwindigkeit des Wirbelabflusses  $= -u_{sr}$  relativ zum Körper. Sind die Wirbelbahnen dort, wo überhaupt ein Transport stattfindet, genau oder annähernd parallel zur  $x$ -Achse, eine Bedingung, die, wie sich zeigen wird, erfüllt ist, so bleibt (s. o.) wenigstens  $v\bar{w}'$  klein, und die erste der Grundgleichungen wird:

$$0 = -\frac{\partial q'}{\partial x} + Z \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \Delta u' \quad (5a)$$

und aus (5) und (5a) folgt durch Elimination von  $q$ :

$$\frac{\gamma}{g} \cdot U(y) \cdot \frac{\partial \bar{w}'}{\partial x} + Z \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \Delta \bar{w}' = 0. \quad (6)$$

„In welcher Weise auch die modifizierte Primärströmung  $U(y)$  eingeführt wird, die Geschwindigkeitskomponente  $v'$  wird immer von der Potentialbewegung abhängen und überall stetig sein; dann geht  $Z \cdot \Delta v'$  mit  $Z$  gegen Null, und es folgt längs jedes beliebigen Weges in der Flüssigkeit:

$$q' = -\frac{\gamma}{g} \cdot \int U(y) \cdot \bar{w}'(y) dy. \quad (7)$$

Da außerhalb des Kielwassers sich auch  $u'$  regulär verhält, so gilt dort ferner:

$$\frac{\partial q'}{\partial x} = 0. "$$

Gemäß der Oseenschen Strömung ist im Kielwasser bei völligem Haften der Flüssigkeit am Körper, d. h.  $u' = v' = 0$ , also:  $dq' = 0$ ;  $q' = \text{const}$  und ebenfalls  $\frac{\partial q'}{\partial x} = 0$ . Dann bleibt auch jetzt noch die absolute Größe des Kielwasserdruckes unbestimmt:

Die Wirbelablösung ist nämlich in der Oseenschen Strömung in den beiden kritischen Punkten der Körperoberfläche konzentriert, von denen die zur Strömungsrichtung parallelen Ränder des Kielwassers abgehen (in diesem Falle ist also die hydrodynamische Vorder- und Rückseite gleich der geometrischen). Die Wirbelablösung erfolgt dann also genau in Richtung der  $x$ -Achse und obige Forderung  $\frac{\partial \bar{w}'}{\partial x} = 0$  ist erfüllt und die Annahme:  $v\bar{w}'$  sehr klein ist berechtigt. „Der absolute Wert des Kielwasserdruckes wird aber noch unbestimmt bleiben, weil in jenen Punkten der Wirbel unendlich und  $U(y) = -u_{sr}$  unstetig und also als unbestimmt zu betrachten ist“<sup>94</sup>.

<sup>94</sup> Vgl. Abschnitt D Seite 49 und 55.

### 6. Einführung von Gleitintervallen.

„Der Ausweg, die Schwierigkeit zu überwinden, bietet sich von selbst dar. Bestimmte Druckwerte werden erhalten, indem man annimmt, die Retardation der Tangentialgeschwindigkeit finde in den kritischen Punkten nicht plötzlich statt, sondern werde stetig in kleinen, diesen Punkten angeschlossenen Gleitungsintervallen erfolgen. Durch die Kleinheit der Intervalle wird gesichert, daß die Wirbelkonvektion wenig von der  $x$ -Richtung abweicht. Die Oseensche Strömung wird in dieser Weise durch eine von ihr nur wenig abweichende Strömung ersetzt, bei welcher aber der Druckübergang in bestimmbar stetiger Weise durch die Gleitungsintervalle hindurch erfolgt und nach der Gleichung (7) berechnet werden kann<sup>95</sup>. Wenn man nachher die Ausdehnung der Gleitungsintervalle nach Null konvergieren läßt, wird schließlich in der Grenze auf eine dem Oseenschen Strömungsbild entsprechende Druckbestimmung geschlossen.“

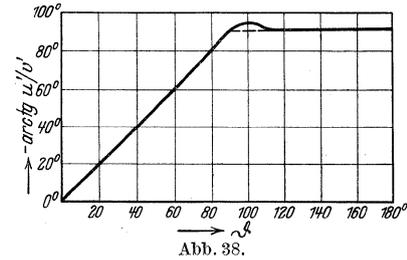


Abb. 38.

### 7. Bemerkung zur Einführung von $U(y)$ als Gesamtgeschwindigkeit des Wirbelabflusses relativ zum Körper an der Rückseite gemäß Ziffer 5 und kleiner Gleitungsintervalle gemäß Ziffer 6.

„Die Oseensche Lösung ergibt einen Wirbel, der nur an der Grenze des Wirbelbereiches bedeutende Werte annimmt. Der rotorbehaftete<sup>96</sup> Strom ist im Inneren des Kielwassers verhältnismäßig sehr schwach; dabei ist außerhalb der Gleitungsintervalle die totale Geschwindigkeit am Körper ( $U(y)$ ) gleich Null. Daraus folgt dann weiter, daß in diesem Gebiet die richtige Form der Wirbelbahnen wenig bedeutet, eben weil sich dort schwache Wirbel beinahe in Ruhe befinden. Als wesentliche, für die Form der Strömung um den Zylinder herum, konstruktive Hypothese bleibt schließlich die Annahme übrig, daß die von den Punkten der Gleitungsintervalle ausgehenden Wirbelbahnen (zunächst)<sup>97</sup> die  $x$ -Richtung einhalten. Diese Annahme genügt an sich, um eine der Oseenschen Lösung naheliegende Strömung aufzubauen.“

### 8. Druckverteilung im Grenzfall verschwindender Gleitintervalle (rein Oseensche Strömung).

Wir beziehen, wie bisher, alle Überlegungen auf ein mit dem Zylinder mitbewegtes Koordinatensystem ( $v'(u', v')$ ), setzen aber der Einfachheit halber in dieser und der folgenden Ziffer:  $U = 1$ , Zylinderradius  $a = 1$  und auch  $\frac{\gamma}{g} = 1$ .

Wenn die Ausdehnung der Gleitintervalle nach den Stellen  $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$  auf Null zusammenschrumpft, so erhält man die in Abschnitt D behandelte Oseensche Strömung. Denkt man sich die Gleitintervalle zunächst sehr klein, aber noch von endlicher Ausdehnung, so hat man in ihnen gemäß Gl. (7) das Integral  $q' = \int U(y) \cdot \bar{w}'(y) dy$  zu bilden. Hierbei ist  $-U(y)$  die Primärströmung gemäß der Zeilonschen Auffassung von der „modifizierten Primärströmung“ derart, daß in Körpfernähe die vollständigen Gleichungen möglichst gut befriedigt werden, d. h.  $-U(y)$  ist gleich der tatsächlich vorhandenen gesamten Geschwindigkeit  $V_{res}$ :

$$V_{res} = u + V_{rot}.^{98} \tag{8}$$

<sup>95</sup> Zeilon weist in seiner Arbeit S. 28 bis 33 in einer asymptotischen Diskussion nach, daß die Wirbeltransportgleichung (6) auch bei  $Z \rightarrow 0$  bestehen bleibt und daß die Druckbestimmungsgleichung (7) auch bei Durchschreiten des Gleitintervalles und auf der ganzen Rückseite (außerhalb des Gleitintervalles gilt wegen der Haftforderung:  $dq' = 0$ ;  $q = \text{const}$ ) asymptotisch Gültigkeit besitzt.

<sup>96</sup> Zeilon schreibt — wie überhaupt stets zur Bezeichnung dieser rotorbehafteten Bewegung mit bestimmten Wirbelbahnen — statt dessen: „der turbulente Strom“; um Mißverständnisse auszuschließen, ist das Zitat, wie angegeben, abgeändert worden.

<sup>97</sup> Zusatz des Verfassers. <sup>98</sup> Zeilon schreibt:  $V_{turb}$ , siehe jedoch Anmerkung <sup>96</sup>.

Gemäß der Oseenschen Lösung ist  $u$  gleich der  $x$ -Komponente der im ganzen Raum vorhandenen Potentialströmung und  $V_{\text{rot}}$  gleich der Geschwindigkeit der im Kielwasser der Potentialströmung überlagerten rotorbehafteten Bewegung auf Bahnen parallel zur  $x$ -Achse. Demgemäß gilt:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad V_{\text{rot}} \cdot \cos \vartheta + \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

an der Rückseite. Da nun ferner:

$$\bar{w}' = - \frac{\partial V_{\text{rot}}}{\partial y}$$

ist, so gilt:

$$q = \int U(y) \bar{w}'(y) dy = \int V_{\text{res}} \cdot d(V_{\text{rot}}) \cong \int V_{\text{res}} \cdot d(V_{\text{res}}) = \frac{1}{2} \int d(V_{\text{res}}^2), \quad (9)$$

da die Potentialgeschwindigkeit  $u$  in dem kleinen Gleitintervall sich nur sehr wenig ändert, so daß  $du$  sehr klein gegen  $dV_{\text{rot}}$  ist und  $dV_{\text{rot}} \cong du + dV_{\text{rot}} = dV_{\text{res}}$  gesetzt werden darf. An der Grenze des Gleitintervalles gegen das Kielwasser hin ist  $V_{\text{res}}^2 = 0$ , daher bleibt der Kielwasserdruck konstant und behält mit stetigem Durchgang durch die Kielwassergrenze seinen durch die Potentialbewegung außerhalb des Kielwassers bei  $\vartheta = 90^\circ$  bestimmten Wert auf der Rückseite bei. Nach Tabelle 14, bezogen auf das mit dem Zylinder mitbewegte System, ist aber bei  $\vartheta = 90^\circ$ :

$$V_{\text{res}} = u + 0 = -(v_x(\vartheta) - 1) = \sqrt{2}.$$

Wählt man den Druck in der ungestörten, mit  $|U|=1$  strömenden Flüssigkeit gleich Null, so folgt, wegen  $\frac{\gamma}{g} = 1$ :

$$q' = + \frac{1}{2}.$$

Dann ist der Kielwasserdruck:

$$p = \frac{1}{2} - 1 = - \frac{1}{2},$$

oder  $\beta = \frac{p}{U^2} = 2p = -1,000$  (vgl. Kurve I in Abb. 16). Für unendliches kleines Gleit-

intervall (Oseensche Strömung) macht also  $q'$  beim Durchschreiten der Kielwassergrenze einen Sprung in Höhe der halben Differenz des Außen- und Innenwertes des Geschwindigkeitsquadrates, während  $p$  stetig und eindeutig bleibt. Der Widerstandsbeiwert aus der Druckverteilung nach Kurve I wird:

$$\zeta = 0,523$$

(vgl. Abb. 15 und 15a).

### 9. Druckverteilung und Widerstand bei Annahme endlicher Gleitintervalle.

„Die Einführung einer Gleitgeschwindigkeit der Flüssigkeit kann selbstverständlich in verschiedener Weise erfolgen. Solange man nicht zu einer vertieften Analyse der Wirbelablösung vordringt, bleibt die Wahl des Ansatzes willkürlich; nur wird man an einer gewissen Natürlichkeit festzuhalten versuchen.“

Das Gleitintervall zwischen  $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$  und  $\vartheta = \pm \alpha$ ,  $|\alpha| > \frac{\pi}{2}$  soll im Anschluß an Zeilon beschrieben werden (vgl. Abb. 38): Ohne Gleitintervall würde der in der potentialtheoretischen Randwertaufgabe des Problems (vgl. S. 54 ff.) betrachtete Wert  $\arctg \frac{u'}{v'} = \psi = \text{Realteil} \left[ i \cdot \log W \left( \frac{z}{a} \right) \right]$  die folgenden Werte am Kreise besitzen:

$$\text{zwischen } 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \text{ ist } - \arctg \frac{u'}{v'} = \vartheta,$$

$$\text{zwischen } \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi \text{ ist } - \arctg \frac{u'}{v'} = \frac{\pi}{2}.$$

Das Gleitintervall zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\alpha$  wird nun derart eingeführt, daß in diesem Bereich  $\psi$  durch  $\psi + \chi(\vartheta)$  ersetzt wird unter Einhaltung einiger nachstehend aufgeführter Bedingungen. Durch diese Abänderung der Randwerte auf dem Einheitskreis ändert sich nun auch die Funktion  $w\left(\frac{z}{a}\right)$ , und zwar — wie sich zeigen läßt<sup>99</sup> — wird sie ersetzt durch:

$$w\left(\frac{z}{a}\right) + w_1\left(\frac{z}{a}\right) = w\left(\frac{z}{a}\right) + \frac{1}{\pi} \int_{+i}^{-i} \chi\left(\frac{1}{z' - \frac{z}{a}} - \frac{1}{2 \cdot z'}\right) dz',$$

oder auch durch:

$$w\left(\frac{z}{a}\right) + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \chi\left(\frac{1}{z' - \frac{z}{a}} - \frac{1}{2 \cdot z'}\right) dz'$$

beiderseits, da  $\chi$  nur zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\alpha$  von Null verschieden ist. Die gesamte Potentialgeschwindigkeit am Zylinder, die nach Gl. (15) auf S. 55 den Wert hatte:

$$V = \sqrt{u'^2 + v'^2} = e^{w(\vartheta)} \cdot \left( \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{2}}{\cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right),$$

bekommt durch Einführung der Gleitintervalle den Wert:

$$V = \sqrt{u'^2 + v'^2} = e^{w(\vartheta) + w_1(\vartheta)} \cdot \left( \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{2}}{\cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right),$$

wobei

$$e^{w_1(\vartheta)} = e^{\frac{1}{2\pi}} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \chi(\vartheta') \cdot \cotg \frac{1}{2} (\vartheta' - \vartheta) d\vartheta'$$

ist<sup>100</sup>.

Der Ansatz für  $\chi(\vartheta)$  wird von Zeilon so gewählt, daß die Integration des Ausdrucks für  $e^{w_1(\vartheta)}$  explizit möglich ist, und daß für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  und  $\vartheta = \alpha$ :  $\chi = 0$  und für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ :  $\frac{d\chi}{d\vartheta} = 1$ ; für  $\vartheta = \alpha$ :  $\frac{d\chi}{d\vartheta} = 0$  ist, d. h. daß die gesamte Kurve für  $-\operatorname{arctg} \frac{u'}{v'}$  überall mit stetiger Tangente verläuft. Im übrigen ist der Ansatz willkürlich. Er lautet:

$$\chi = \frac{\cos \vartheta \cdot \sin^2(\vartheta - \alpha)}{\cos^2 \alpha}; \quad \chi(-\vartheta) = -\chi(\vartheta). \quad (11)$$

Die Einführung der „Ablenkungsfunktion“  $\chi$  in der dargelegten Weise bedeutet, daß die Potentialströmung im Gleitintervall nicht genau parallel zur  $x$ -Achse verläuft, sondern eine kleine Geschwindigkeit  $-\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  besitzt; sie ist etwas gegen die Tangente hin abgelenkt, und zwar um das Ablenkungsmaß  $\chi$ . Durch die Bedingung, daß die (zum Körper relative) Normalgeschwindigkeit  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  verschwinden muß, ist die zur Potentialströmung hinzukommende, parallel

<sup>99</sup>  $w_1\left(\frac{z}{a}\right)$  ist das Poissonsche Integral der Potentialtheorie.

<sup>100</sup> Der auf rein potentialtheoretischem Gebiet liegende Beweis möge, wie auch der entsprechende auf S. 54. bei Zeilon nachgelesen werden.

zur  $x$ -Achse ( $\frac{\partial \bar{w}'}{\partial x} = 0$ ) verlaufende rotorbehaftete Strömung in ihrer Größe festgelegt; die übrig bleibende Tangentialkomponente ist die „Gleitgeschwindigkeit“. Man hat also (vgl. Abb. 39):

$$V_{\text{rot}} \cdot \cos \vartheta - V_n = 0. \quad V_n = V \cdot \cos(\pi - \vartheta - \chi) = -V \cdot \cos(\vartheta - \chi)$$

also:

$$V_{\text{rot}} = \frac{V \cdot \cos(\vartheta - \chi)}{\cos \vartheta}. \quad (12)$$

Dann ist die totale Geschwindigkeit  $V_{\text{res}} = U(y)$  in Richtung der  $x$ -Achse gemäß Gl. (8):

$$V_{\text{res}} = V_x + V_{\text{rot}} = -V \cos \chi + \frac{V \cos(\vartheta - \chi)}{\cos \vartheta} = V \operatorname{tg} \vartheta \sin \chi \quad (13)$$

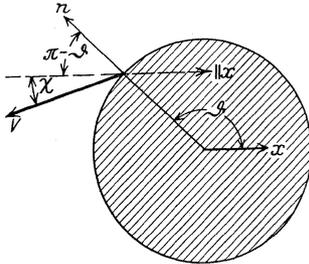


Abb. 39.

und in Richtung der  $y$ -Achse:  $V_y = -V \cdot \sin \chi$ . Daher ist:

$$V_{\text{res}}^2 + V_y^2 = \frac{V^2 \sin^2 \chi}{\cos^2 \vartheta} = V_{\text{Tangential}}^2$$

und der Druck:

$$p = q - \frac{V^2 \sin^2 \chi}{\cos^2 \vartheta}. \quad (14)$$

Im Gleitintervall ändert sich gemäß Formel (7) der Druck um:

$$q = \int U(y) \bar{w}(y) dy = \int V_{\text{res}} \frac{dV_{\text{rot}}}{dy} dy = \int V_{\text{res}} \cdot dV_{\text{rot}},$$

ein Wert, der für den willkürlich gewählten Sonderfall  $\alpha = 110^\circ$  nach folgender, von Zeilon errechneten Tabelle durch mechanische Integration gefunden werden kann:

Tabelle 15.

$\vartheta^\circ$	$\chi^\circ$	$u'$	$V$	$V_{\text{rot}}$	$V_{\text{res}}$
90°	0°	$\sqrt{2} = 1,414$	1,467	0,000	-1,467
92°	1° 37'	1,358	1,415	0,272	-1,142
94°	2° 36'	1,324	1,362	0,478	-0,883
96°	3°	1,309	1,325	0,664	-0,660
98°	2° 58'	1,283	1,278	0,805	-0,472
100°	2° 33'	1,259	1,241	0,927	-0,313
102°	1° 58'	1,247	1,217	1,022	-0,195
104°	1° 18'	1,236	1,204	1,096	-0,108
106°	0° 35'	1,225	1,199	1,157	-0,042
108°	0° 12'	1,216	1,199	1,187	-0,012
110°	0°	1,207	1,205	1,205	-0,000

Das Ergebnis ist als Kurve II in Abb. 16 dargestellt. Im Kielwasser ist zwischen  $\alpha = 110^\circ$  und  $180^\circ$  bzw. zwischen  $\alpha = \pm 110^\circ$  der Druck konstant:

$$\beta = \frac{p}{U^2} = 2p = 0,728 \quad \text{wegen} \quad \frac{\gamma}{g} = 1, \quad U = 1$$

Das Gleitintervall umfaßt  $20^\circ$ . Das Minimum des Unterdruckes ist gegenüber der Kurve I stärker geworden. Der Widerstandsbeiwert wird:

$$\zeta_{\text{Zeilon II}} = 0,388$$

(siehe Abb. 15 und 15a).

„Bemerkenswert ist, daß eine ziemlich unbedeutende Veränderung der Haftungsbedingungen genügt, um den Kielwasserdruck und den Widerstandskoeffizienten zu vermindern“ (gegenüber der rein Oseenschen Strömung).

### 10. Zeilons Kurve III, starke Gleitung. Fast völlige Übereinstimmung mit den experimentellen Werten bei hohen Kennzahlen.

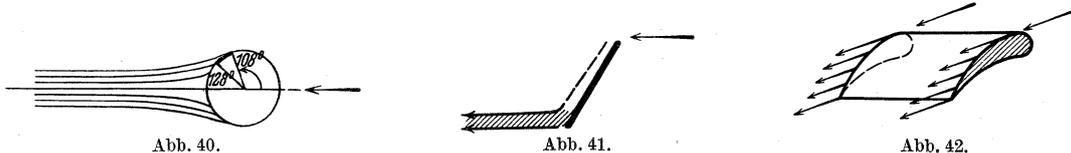
Wie man aus Abb. 16 erkennen kann, ist es Zeilon vor kurzem gelungen, eine Druckverteilung III zu errechnen, die sich den experimentellen Ermittlungen bei großen Reynoldsschen Zahlen (oberhalb des Widerstandsabfalles) in Teil I so gut anpaßt, daß es kaum besser möglich sein wird. Die geringfügige Abweichung in der Gegend von  $\vartheta = 100$  bis  $110^\circ$  nahe der Grenze des theoretischen Gleitbereiches macht wegen der Kürze der Projektion auf die Bewegungsrichtung für den Widerstand wenig aus.

Die Erzielung so glänzender Übereinstimmung mit dem Experiment ist durch Annahme nicht mehr genau paralleler, rotorbehafteter Kielwasserströmung, beginnend bei  $\vartheta = 108^\circ$  und durch Annahme eines Gleitintervalles zwischen  $108^\circ$  und  $128^\circ$  erreicht worden (vgl. Abb. 40). Die „hydrodynamische“ Vorderseite reicht also beiderseits  $18^\circ$  nach der geometrischen Rückseite herüber. Die Ablenkungsfunktion wird in der Form

$$\chi(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta - 108^\circ) \cdot \sin^2(\vartheta - 128^\circ)}{\sin^2 20^\circ} \quad (15)$$

angesetzt. Die Formel für  $p$  wird genau analog der Formel (14) in Ziffer 9.

„Die ‚Wirbelströmung‘<sup>101</sup> fließt jetzt, statt längs Parallelen zur  $x$ -Achse, längs Hyperbelästen. Das äußerste Hyperbelpaar tangiert den Kreis in  $\pm 108^\circ$  und hat  $y = \pm \frac{1}{2}$  als



Asymptoten. Gleitung nach der angegebenen Formel findet zwischen  $108^\circ$  und  $128^\circ$  statt; die Berechnung zeigt aber, daß schon bei  $120^\circ$  so gut wie vollständiges Haften erzielt worden ist.

Der Ansatz hat selbstverständlich einen ziemlich willkürlichen Charakter. Es mag aber erwähnt werden, daß er nicht von vornherein den Messungen angepaßt wurde. Jedenfalls ist es auffallend, daß ein ziemlich einfacher Ansatz genügt, um gleichzeitig einen sehr guten Wert für den Kielwasserdruck und für das Druckminimum zu ergeben. Auch mag betont werden, daß der Ansatz an sich weder mehr noch weniger willkürlich ist als z. B. die Theorie Oseens.

Prinzipiell geht ja nach meiner Auffassung das Annäherungsverfahren darauf aus, daß die Bahnen des durchschnittlichen Wirbeltransports hypothetisch vorgeschrieben werden. Dadurch und durch die hinzukommende Hypothese betreffend das Haften der Flüssigkeit wird das Strömungsproblem in erster Näherung bestimmt. Unter allen möglichen Ansätzen für den Wirbeltransport wählt die Oseensche Theorie einen aus, der besonders einfach ist, dem aber deswegen keine besondere Berechtigung zukommt. Ich bemerke schließlich, daß man dieselbe Art vereinfachender Annahmen auch anderswo wiederfindet. Nehmen Sie z. B. eine geneigte Platte (Abb. 41), von der angenommen wird, daß überall Gleitung stattfindet, außer in einem unendlich kleinen, der unteren Kante angehängten Kielwasser- und Haftungsbereich, wo z. B. gerade Wirbelbahnen angesetzt werden. Der Grenzübergang ergibt die Zirkulationstheorie Kuttas. Oder wenn Prandtl in seiner Tragflächentheorie seine bekannte Zirkulationstheorie macht, so bedeutet ja dies, daß er den Seitenkanten gewisse, der  $x$ -Achse parallele Wirbeläden anhängt (Abb. 42), also genau eine Annahme vom Typus Oseens, nur daß die An-

<sup>101</sup> Die „detaillierte Ausführung“ wird in einer Arbeit von Zeilon etwa Anfang 1929 erscheinen. Obiges Zitat entstammt einem Brief an den Verfasser.

ordnung bei Prandtl noch mehr spezialisiert und anderen Randbedingungen<sup>102</sup> angepaßt erscheint.

Die verschiedenen Theorien sind einander weniger wesensfremd, als es vielleicht zuerst erscheinen mag.“

## F. Ausblick.

In den Abschnitten A bis E ist ein kritischer Überblick über den heutigen Stand der Theorie bezüglich des ebenen Widerstandsproblems eines in einer Flüssigkeit quer zur Achse bewegten Kreiszyinders gegeben worden. An mehreren Stellen wurde bereits auf Gedankengänge hingewiesen, bei deren Durchführung sich Fortschritte erhoffen lassen.

Im wesentlichen sind es zwei Wege, die nach Ansicht des Verf. weiterführen können. Der eine schließt an die Oseenschen Resultate an und kommt zu einer Vereinigung der Prandtl'schen Grenzschichttheorie mit der „asymptotischen“ Theorie. Die hierbei an die Stelle der Zeilonschen „Gleitintervalle“ tretenden Bereiche ergeben sich dabei zwanglos aus denselben physikalischen Vorgängen, die zu Prandtl's Grenzschichtbegriff geführt haben. Dieser Gedanke ist bereits 1925 auf der Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Danzig<sup>103</sup> vom Verf. angedeutet worden, also zeitlich vor Zeilons Arbeit über Gleitintervalle.

Der andere Weg geht zunächst von der Theorie der idealen Flüssigkeit aus und knüpft an die Lösung des Helmholtz-Kirchhoffschen Diskontinuitätsflächenproblems für die kreisförmig gebogene Platte vom Öffnungswinkel  $\pm \vartheta_{ab1}$  an (vgl. Abschnitt A 3). Er kommt — in gewissem Sinne — zu einer Vereinigung der klassischen Theorie der Diskontinuitätsflächen mit der Grenzschichttheorie.

### 1. Vorschlag zur Vereinigung der „asymptotischen“ und der Grenzschichttheorie.

Die asymptotische Theorie ist die Theorie eines „Grenzüberganges zu verschwindender Reibung“; oder zutreffender: eine Theorie einer „Flüssigkeit mit verschwundener Reibung“; sie liefert mit gewissen Zusatzannahmen [Gleitintervalle;  $(v\bar{w})$  klein; Haften an der Rückseite] eine Druckverteilung von offenbar „richtigem“ Charakter, die sich sehr gut den Experimenten anpassen läßt. Jedenfalls ist die Druckverteilung schon auf der Vorderseite „besser“ als die nach der Theorie der idealen Flüssigkeiten errechnete.

Die Grenzschichttheorie auf der anderen Seite dringt zweifellos am besten in den tatsächlichen Mechanismus „schwach reibender“ Flüssigkeit ein und gestattet unter Annahme einer zweckmäßig dem Experiment zu entnehmenden „eingepprägten“ Druckverteilung die Berechnung der Stelle der Ablösung der endlich dicken Grenzschicht in guter Übereinstimmung mit dem aus der Beobachtung zu erschließenden Verhalten der Strömung. (Auf den Unterschied: laminare oder turbulente Grenzschicht sei hier nicht eingegangen.)

Jede der beiden Theorien liefert also das, was die andere als Annahme braucht. Dazu kommt folgende Überlegung: Die Resultate der asymptotischen Theorie, z. B. das „Gleiten vorne“, werden als Folge des durchgeführten Grenzüberganges  $\Re \rightarrow \infty$ , d. h.  $Z \rightarrow 0$  erhalten; bei schwacher, aber doch endlicher Reibung sind die Schlüsse nicht mehr gültig. Man darf daher den Grenzübergang bis zu  $\Re \rightarrow \infty$  nur in solchen Flüssigkeitsgebieten durchführen, in denen die Reibung sicher nicht mehr von merklichem Einfluß ist. Das heißt: Man hat die Oseensche Theorie (zunächst wird nur von der Körpervorderseite gesprochen) nicht bis unmittelbar an den Körper heran anzusetzen, sondern muß zwischen Körperoberfläche und „Flüssigkeit mit verschwundener Reibung“ die Grenzschicht dazwischen schieben, in der keine asymptotische Theorie mit  $\Re \rightarrow \infty$  angesetzt werden darf. Bei dem Oseenschen Randwertproblem ist als Ort der Randwerte auf der Körpervorderseite nicht der Kreiszyinder  $|r| = a$  anzunehmen, sondern die Begrenzung  $|r| = a + \delta$ ,

<sup>102</sup> Mit wohl ausgebildeter Gleitung.

<sup>103</sup> Siehe Eisner: Druckmessung an umströmten Zylindern. Z. A. M. M. 1925, S. 486.

wobei  $\delta$  zunächst noch unbestimmt bleibt ( $\delta =$  Grenzschichtdicke). Diese aber ist gekoppelt — gemäß der Grenzschichttheorie — mit der aus der asymptotischen Theorie errechenbaren Druckverteilung, die gegenüber der Druckverteilung der bisherigen Oseen-Zeilonschen Theorie nur unbedeutend verändert sein wird (wie ja auch die Grenzschichttheorie quer zur Schicht konstanten Druck voraussetzt). Die Auflösung dieses Kopplungsproblems ist sicher auch rein mathematisch von hohem Interesse.

Das Zeilonsche Problem der vom in die Flüssigkeit eingesenkten Körper in der Flüssigkeit hervorgerufenen Störungsströmung ist dann so zu formulieren: Wird in eine schwach reibende, strömende Flüssigkeit ein Körper eingesenkt, so umgibt er sich auf seiner „hydrodynamischen“ Vorderseite mit einer rotorbehafteten Schicht, in der die Reibung nicht vernachlässigt werden darf, während außerhalb dieser Schicht die Bewegung der Flüssigkeit so erfolgt, als ob dort die Reibung asymptotisch gegen Null gegangen wäre. Über die Aussagen an der Rückseite s. u. Man ersieht aber, weshalb der Einwand: „Dann könne man doch außen einfach ideale Flüssigkeit wählen“ nicht berechtigt ist; denn die ideale Flüssigkeit würde nicht die charakteristische Druckverteilung liefern und — ohne weitere Zusatzannahmen — nicht die an der Rückseite gegenüber der Vorderseite veränderten Randwerte zu erfüllen gestatten.

Darüber hinaus ergibt sich nun zwanglos folgendes:

Die Grenzschicht besitzt an der Ablösungsstelle eine bestimmte Dicke und Rotorverteilung. Hier hat man unmittelbar die an Stelle der Gleitintervalle tretenden „Zwischenglieder“, die für den stetigen Druckverlauf zwischen außen und innen maßgebend sind. In der Größe des Rotorgehaltes bzw. in der Impulsmenge der Grenzschicht an der Ablösungsstelle kommt auch am sichersten der Gesamtwiderstand des Körpers zum Ausdruck; hier ist sicher noch nicht die mehr oder weniger starke Dissipation eingetreten, wie sie (s. oben Abschnitt A 4) in gewissen Gebieten Reynoldsscher Zahlen hinter dem Körper eintreten kann, so daß dann das Kielwasserwirbelband in einiger Entfernung nicht mehr die ganze, dem Widerstand entsprechende Impulsmenge trägt.

Was auf der Rückseite geschieht, bedarf allerdings erst noch weiterer Klärung; denn ob das Oseensche Haften über die Projektionsbreite zwischen den Ablösungsstellen zu erstrecken ist und ob zwischen der „inneren“ Grenze der sich ablösenden Grenzschicht (= Ablösungspunkt) und ihrer äußeren Grenze (Schichtdicke etwa normal zur Ablösungsrichtung) der Wirbelabtransport anzunehmen ist gemäß der Wirbelanlieferung aus der Grenzschicht (wie bei Zeilon aus den Gleitintervallen heraus), ist noch nicht ohne weiteres als sicher anzusehen. Auch die Form und die „Wirbelbahnen“ des anschließenden Kielwassers in seinem weiteren Verlauf bleiben zunächst ebenso unbestimmt und willkürlich wie bei Zeilon. Genauere Aussagen werden sich hoffentlich machen lassen, wenn die weitere Durcharbeitung die Schwierigkeiten des Problems etwas mehr geklärt haben wird.

Man hat den Oseenschen Rechnungen nicht ganz mit Unrecht nachgesagt „sie seien zu mathematisch und zu wenig physikalisch“. Nach den obigen Gedankengängen und auch nach Zeilons neuesten Überlegungen (Abschnitt E Ziffer 10) darf man wohl behaupten, daß jetzt die Oseenschen Überlegungen in aussichtsreicher Weise in eine Erfassung der tatsächlichen physikalischen Vorgänge einmünden.

## 2. Vorschlag zur Vereinigung der klassischen Theorie der Diskontinuitätsflächen und der Grenzschichttheorie.

Folgende Überlegung sei an den Anfang gestellt:

In einer idealen Flüssigkeit können bekanntlich keine Wirbel neu entstehen; es sind also keine Wirbel möglich, falls sie nicht von vornherein vorhanden waren; und die etwa vorhandenen Wirbel haften an der Materie. Es ist aber durchaus möglich, die tatsächlich in natürlichen Flüssigkeiten mit kleiner Reibung auftretenden Verhältnisse, die zweifellos in der Bildung eines mit rotorbehafteter Bewegung belegten Kielwassers bestehen, durch Annahme von bereits vorhandenen Wirbeln im Anschluß an die Körperoberfläche anzunähern; der an der „Vorderseite“ des Körpers bei der Zähigkeit Null entlang gleitende Faden (bzw. bei „kleiner Reibung“ die vom Körper beeinflusste, haftende Grenzschicht

von endlicher, aber kleiner Dicke) bringt nach dieser Auffassung vom Körper her Wirbel in das „Kielwasser“ mit. Jedes Körperelement, das von der Strömung in ihrem Verlauf längs der Körperoberfläche getroffen wird, verstärkt den dissipativen Betrag durch Reibungseinwirkung, d. h. verstärkt den Rotorgehalt und im allgemeinen auch die Dicke der Grenzschicht. Bei Beschränkung auf den, von der Stelle der Berührung mit der Körperoberfläche an „wirbelbelegten, gleitenden Faden“ ist man dann von dem Gedanken der Helmholtzschen Diskontinuitäts-Wirbelfläche gar nicht mehr so weit entfernt. Man kann, auf diesem Grundgedanken aufbauend, die klassische Theorie der Diskontinuitätsflächen mit der Prandtl'schen Grenzschichttheorie vereinigen.

Man löst zunächst das Kirchhoff-Helmholtzsche Diskontinuitäts-Totwasserproblem in üblicher Weise<sup>104</sup>. Während bei Oseen die Kielwassergrenze stets parallel zur  $x$ -Achse bzw. nach Zeilons neuester Rechnung nach hypothetischen Kurven verläuft, ergibt sich beim Totwasserproblem die freie Strahlgrenze aus der Bedingung konstanten Druckes längs des freien Strahles, der eine Stromlinie ist. Die Form der auf die übliche Weise ermittelten „freien“ Strahlgrenze wird nun sukzessive modifiziert und der tatsächlichen Kielwassergrenze angepaßt:

erstens durch Annahme einer in Strömungsrichtung wachsenden Wirbelbelegung der Körpervorderseite und gegebenenfalls

zweitens durch Annahme weiterer Wirbelgebilde — etwa einer Karmanschen Straße oder einer entsprechend der Kielwasserbegrenzung nicht mehr überall gleich breiten Straße im Inneren des Kielwassers. — Dies wäre eine rein stationäre Betrachtung. Man kann aber auch die vorstehenden Gedanken nichtstationär formulieren in Analogie zu einem von Villat<sup>105</sup> für die ebene Platte angegebenen Gedankengang. Villat superponiert der Kirchhoffschen Strömung eine von zwei symmetrisch im Kielwasser angeordneten Wirbelfäden herrührende Strömung und betrachtet die Änderung der „freien“ Strahlgrenzen infolge der Wirkung der Wirbel, die selbst wieder ihre Lage in einer gewissen Zeit ändern. Nach einer Methode von Hadamard kann man sogar die Änderungen für endliche Zeitintervalle berechnen. Bereits Villat äußerte die Absicht, an Stelle der zwei Einzelwirbel Wirbelstreifen im Kielwasser zu betrachten. Dies ist von den vorstehend erwähnten, in die Rechnung einzuführenden Kielwasserwirbeln gar nicht sehr verschieden.

Die vorstehenden beiden Vorschläge harren noch ihrer Durchführung. Eine Beurteilung ihrer Güte kann erst nach der Durchführung erfolgen. Trotzdem glaubt Verfasser, beide Wege als nicht aussichtslos ansprechen zu dürfen.

## Anhang.

Auszug aus einem Briefwechsel zwischen Herrn Prof. Dr. L. Prandtl und dem Verfasser.

Göttingen, den 7. Juli 1928.

Ich habe früher viel brieflich mit Herrn Oseen über die Zulässigkeit seiner Rechnungen gestritten und möchte hier einmal sagen, was meine Meinung über diese Rechnungen ist. Angeblich ist ein Grenzübergang von den Gleichungen der zähen Flüssigkeit auf die einer verschwindenden Zähigkeit gemacht. Ich konnte den Rechnungen im einzelnen nicht folgen, aber durch indirekte Schlüsse glaube ich mich überzeugt zu haben, daß es sich bei diesen Rechnungen keineswegs um einen legitimen Grenzübergang handelt, sondern daß, um es ganz klar heraus zu sagen, das Endresultat nicht mehr im Einklang mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen steht, wenigstens in den Gebieten, in denen die Strömung mit Drehung behaftet ist. Es wäre wirklich dringend nötig, einmal in dem sogenannten Wirbelgebiet hinter dem Körper, wie es aus den Oseenschen bzw. Zeilonschen Rechnungen sich ergibt, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen auszurechnen und einmal ein Stromlinienbild zu zeichnen, und andererseits nachzusehen, welche Kräfte zur Verfügung stehen, um die aus den Formeln folgenden Beschleunigungen zu verstehen. Ich vermute sehr stark, daß eine Normalkomponente der Geschwindigkeit quer zur Unstetigkeitsfläche vorhanden ist, und daß für die dort nach den Formeln auftretenden Beschleunigungen einfach keine Kräfte da sind; denn ein nach hinten unendlich langer zylindri-

<sup>104</sup> Daß dies für die kreisförmige Platte vom Öffnungswinkel  $\pm \vartheta_{ab1}$  vom Verfasser beabsichtigt ist und als Ausgang für obige Rechnung dienen soll, ist in Abschnitt A 3 gesagt worden.

<sup>105</sup> Villat: C. R. 170. Paris 1920.

scher Körper mit einem beliebigen vorderen Abschluß gibt in der reibungslosen Flüssigkeit keinen Widerstand. Daraus folgt, daß der Oseensche Widerstand impulsmäßig nicht zu verstehen ist, wenn nicht ein Impulsaustausch zwischen der Potentialströmung außen herum und dem Wirbelgebiet hinter dem Körper besteht. Bei stationärer Strömung und in der Grenze der Reibungslosigkeit gibt es aber keinen solchen Impulsaustausch.

L. Prandtl.

Berlin, den 31. Juli 1928.

Das Endresultat von Oseen-Zeilon kann mit den strengen Bewegungsgleichungen und dem aus ihnen folgenden Impulssatz höchstens näherungsweise im Einklang sein, weil Teile der Beschleunigungsglieder von vornherein gestrichen sind. Es fragt sich nun, ob der Impulssatz im Oseen-Zeilonschen Resultat stärker oder in derselben Weise verletzt ist, wie es den Vernachlässigungen in den Ausgangsgleichungen entspricht, und ob für alle Gebiete des Strömungsfeldes das in gleicher Weise gilt oder nicht. Schon Zeilon weist ja vom Mathematikerstandpunkt aus nach, daß die Oseenschen Streichungen an gewissen Stellen (nämlich, wo der „Kielwasserrand“ vom Körper ausgeht) bestimmt unzulässig sind, und streicht daher „etwas weniger“ Beschleunigungsglieder; er weist dann an seinem Ergebnis nach, daß die von ihm gestrichenen Glieder in der Tat klein sind (es handelt sich um das Produkt  $\left\{ v \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\}$  im Kielwasser) bzw. verschwinden  $\left( \left\{ u \cdot \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\} \text{ und } \left\{ v \cdot \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\} \text{ außerhalb des Kielwassers} \right)^{106}$ .

Der Grenzübergang von Oseen und Zeilon ist an sich mathematisch vollkommen in Ordnung. Sie machen ihn aber nicht in den genauen Bewegungsgleichungen, sondern in solchen, die von vornherein nur als verstümmelt (und zwar teilweise!) gelten können. Es kann also — und in gewissen Gebieten des Strömungsfeldes ist das der Fall — im Resultat der Fehler gegen den Impulssatz groß, sogar unzulässig groß sein, und trotzdem kann das geometrische Strömungsbild näherungsweise richtig sein. Es gibt doch viele Beispiele, in denen eine ganz geringe Änderung der Geschwindigkeitsverteilung eine sehr große Änderung der Impulsbeträge bewirkt (insbes. bei kleinen Zusatzgeschwindigkeiten quer zur Hauptströmungsrichtung).

Aber Oseen und Zeilon nehmen die Legitimität ihrer mit dem Ziel eines geometrisch näherungsweise zutreffenden Strömungsbildes, aber in mechanisch unrichtiger Weise linearisierten Gleichungen auch in Gebieten an, in denen man das wohl nicht machen darf. Und zwar sind dies gerade die Gebiete, von denen aus der gesamte Strömungsvorgang als dynamischer Vorgang impulsmäßig wesentlich bestimmt wird.

Nimmt man den gesamten Strömungsvorgang als von diesen Gebieten aus auf andere Weise impulsmäßig bereits bestimmt an (nämlich durch die Grenzschichttheorie [s. u.], soweit das geht), dann gibt es im so entstandenen Strömungsbild — übrigens immer alles stationär bzw. quasistationär oder entsprechend zeitlich gemittelt betrachtet — Gebiete, in denen zwar nicht für das Ziel einer dynamisch richtigen Betrachtung, wohl aber für das Ziel eines angenäherten Strömungsbildes die von Oseen-Zeilon vernachlässigten — mechanisch aber eigentlich notwendigen — Glieder tatsächlich klein sind. Natürlich kann ich nicht die „Störungen“  $u, v$  in der Flüssigkeit infolge des Vorhandenseins des Körpers vollkommen beschreiben bzw. sogar mechanisch verstehen, wenn ich die („ganzquadratischen“) Beschleunigungsglieder mit  $u, v$  von vornherein weglasse. Aber ich kann in diesem Fall glücklicherweise eine Lösung auf mathematisch einwandfreiem Wege finden und ihr eine solche Unsymmetrie geben, daß ein den tatsächlichen Verhältnissen durch „Ähnlichkeit“ entsprechendes Kielwasser entsteht. Aber ich muß mich dann auf Gebiete beschränken, in denen meine Vernachlässigungen wenigstens für die Gewinnung eines genäherten geometrischen Bildes richtig sind, wenngleich sie mechanisch-kausal nie richtig sind.

Welches sind nun aber diese Gebiete?

Im Oseen-Zeilonschen Verfahren sieht das Bild der Linien „konstanter Rotorintensität“ folgendermaßen aus (siehe Abb. 43).

Also stumpf hinten am Zylinder endigende Wirbelbahnen! Hierzu kommt die auch anderwärts schon gebrauchte Vorstellung einer „Einströmung“  $E$ , die aus dem unendlich Fernen kommen soll und auch wieder dahin abtransportiert wird, allerdings fast vollkommen auf den Kielwasserrand konzentriert. Hierbei fallen aber Stromlinien (Ausströmung) und Wirbelbahnen (Einströmung vermittelnd) nicht zusammen.

Aber das wichtigste ist wohl, daß die strenge Oseensche Theorie zwar ein rotorerfülltes „Kielwasser“ mit sehr großer Rotorkomponente am Kielwasserrand ergibt, aber nichts auszusagen gestattet über die Rotorverteilung im Kielwasser, so daß also eine Frage nach Geschwindigkeitsverteilung gar nicht ohne weiteres beantwortet werden kann (vgl. Noethers Bemerkungen und Zeilons „modifizierte Primär-

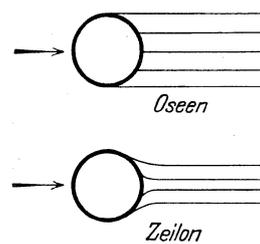


Abb. 43.

<sup>106</sup> Daß überhaupt das „Kielwasser“ (mathematisch gesprochen: die Unsymmetrie wegen alleiniger Berücksichtigung der Beschleunigungsglieder mit  $U$ ) eine besondere Rolle spielt, indem „gerade ein Fall vorliegt, in dem das wirkliche Wirbelgebiet mit dem Oseen-Zeilonschen übereinstimmt“, sagt sehr richtig Noether: Naturwissensch. 1928, H. 28 v. 13. VII., S. 560, Zeile 33 von oben.

strömung“). Die bei Zeilon im Resultat doch auftretende Druckverteilung im Kielwasser bzw. Geschwindigkeitsverteilung folgt bei ihm erst aus den angenommenen bzw. abgeleiteten Randbedingungen am Körper, also aus einer Ausdehnung der Ansätze auf Gebiete, für die mechanisch — da er die linearisierten Gleichungen hier anwendet — schon die Grundlagen nur in der erwähnten Annäherung gelten.

Aber die Meinung, die ich seit 1925 vertrete, und die offenbar auch Noether u. a. teilen, ist die:

In Gebieten<sup>107</sup>, in denen die mechanisch-kausal an sich erforderlichen, von Zeilon aber vernachlässigten Beschleunigungsglieder (das sind nicht: alle Beschleunigungsglieder, sondern nur ein Teil<sup>108</sup>) wirklich klein sind,

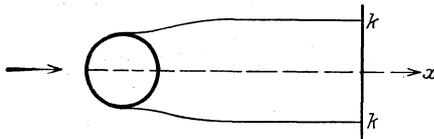
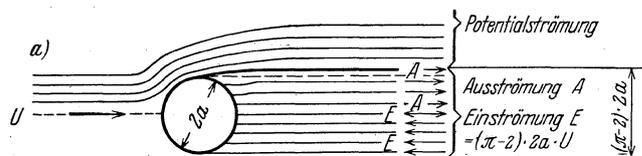


Abb. 44.

kann man die mathematisch hier richtigen aus einem richtigen Grenzübergang in den nach Oseen oder Zeilon vereinfachten (linearisierten) Gleichungen abgeleiteten Ergebnisse von Oseen-Zeilon gut gebrauchen, d. i. unter Ausschnitt des angegebenen Gebietes (Abb. 44).

Im Gebiet muß und kann man aber auf der hydrodynamischen Vorderseite des Körpers mit den mechanisch richtigen Vorstellungen

der Grenzschichttheorie arbeiten; gerade dadurch kann man fast alle Ihre Einwendungen in Ordnung bringen, und es ergibt sich bei genauerer Betrachtung in der Tat ein wechselseitiges Sichbedingen der beiden Theorien; die Grenzschicht liefert von vorne das Material und den Impuls einer „Ausströmung“ im Kielwasser, dessen rotorbelegte Strombahnen etwas weiter weg ( $k-k'$ ) vom Körper (reibungsfreie Flüssigkeit, keine Dissipation der Wirbel) „im Mittel“ „etwa“ parallel  $x$  nach Oseen aus dessen Grenzübergang folgen. Das Kielwasser umfaßt dabei alle Gebiete, in denen noch Impulsaustausch statthat, entweder z. B. soweit seitlich das noch „merkliche“ „Einflußgebiet“ (auf das Außenwasser) einer Kármánschen Straße reicht oder



obere Hälfte: Potentialströmung und Ausströmung (Stromlinien)  
untere Hälfte: Einströmung (Linien konstanter Rotorintensität)



resultierendes Bild für einen Beobachter, für den der Körper ruht

Abb. 45.

(oberhalb des Widerstandsabfalls) die gesamte Zone „quasistationärer“ wirbeldurchsetzter Bewegung. Für diese beiden Strömungsvorgänge ist das Oseensche Kielwasser eben nur ein Bild, welches diese Theorie nicht besser liefern kann. Die Wirbelschlepe ist der impulsmäßige Grund des Normalwiderstandes, während es mit dem Tangentialwiderstand auch beim Halbkörper, wenn man von der reibenden Flüssigkeit allmählich zu reibungsloser grenzüberght, nicht so ganz einfach liegt. (Vgl. auch Kármán.)

F. Eisner.

Berlin, den 10. Oktober 1928.

Grenzen zwischen Außenraum und Innenraum sind bei Oseen nicht die geradlinig in Strömungsrichtung nach Unendlich laufenden, tangential vom Zylinder abgehenden Linien, sondern Linien, die gemäß einer aus Oseens

Rechnungen ableitbaren Formelbeziehung zwar tangential  $\parallel x$  vom Zylinder abgehen, aber sich auf das  $(\pi-2)$ -fache des Radius erweitern (s. u.). Die Widerstandslosigkeit in reiner Potentialströmung (und bei den entsprechenden Randbedingungen) auch dieses „Halbkörpers“ bleibt natürlich bestehen<sup>109</sup>.

Wie mir Herr Zeilon inzwischen mündlich bestätigte, erhält man das Oseensche Bild (Abb. 45) aus 3 Anteilen:

- Potentialströmung im „Außenraum“ (definiert wie oben).
- Ausströmung vom Betrage  $(\pi-2) \cdot 2a \cdot U$  infolge von Quellen auf der Körperhinterseite, im entsprechenden Innenraum.
- Einströmung von gleicher Größe durch nochmalige Belegung desjenigen Teiles des Innenraumes, der mit dem Kielwasser (geradlinig in Strömungsrichtung nach Unendlich laufende Tangenten als Grenzen) zusammenfällt, mit (vgl. oben) Wirbelbahnen, also Parallelen zur  $x$ -Achse, die kontinuierlich mit lauter Wirbeln derart belegt sein müssen, daß eine entsprechende Einströmung herauskommt.

<sup>107</sup> Und das sind zum entscheidenden Teil gerade solche, in denen die Grenzschichttheorie mechanisch richtige Aussagen gestattet. Und gerade, was die Grenzschichttheorie als „von außen imprägniert“ braucht, das liefert die Oseensche Theorie in den „Außengebieten“.

<sup>108</sup> Dieser Teil kann „gerade zu einem Fall gehören“, in dem die gestörte Kugelsymmetrie mit dem wirklichen Kielwassergebiet „Ähnlichkeit“ hat.

<sup>109</sup> Vgl. Prandtl: Z. F. M. 1925, S. 208.

Man erhält ein — ungefähres — Oseensches Bild (ich möchte wegen des Nichtzusammenfallens [bei Oseen!] von Stromlinien und Wirbelbahnen nicht „Stromlinienbild“ sagen) in seinem Potentialteil durch Auswertung folgender Formeln:

Ist:  $W\left(\frac{z}{a}\right) = v_x + i v_y$ , so setze man, wenn die Anteile der gestörten Strömung  $u + U$ ,  $v$  sind:

$$\begin{array}{ll} \text{vorne:} & \begin{array}{l} u = v_x \\ v = v_y \end{array} & \text{hinten:} & \begin{array}{l} u = v_x - v_x|_{r=a} + U \\ v = v_y \end{array} \\ & & & q = \frac{\gamma}{g} \cdot U \cdot v_x \end{array}$$

$$p - \frac{\gamma \cdot |v|^2}{2g} = q = \frac{\gamma}{g} \cdot U \cdot v_x$$

und hat nach Oseen:

$$W\left(\frac{z}{a}\right) = U \left\{ 1 - \frac{e^{w\left(\frac{z}{a}\right)}}{\sqrt{2}} \left( 1 - i \frac{\frac{z}{a} - i}{\frac{z}{a} + i} \right) \right\}; \quad W\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{\vartheta' = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left( \vartheta' - \frac{\pi}{2} \right) \left[ \frac{1}{z' - \frac{z}{a}} - \frac{1}{2z'} \right] dz',$$

$$z = e^{i\vartheta}.$$

Für sehr große  $|z|$  wird:

$$W\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{i\pi}{4} + \frac{2 + i\pi}{\pi} \frac{a}{z} \quad \text{und} \quad W = \frac{(\pi - 2) a U}{\pi z}.$$

F. Eisner.

Göttingen, den 17. Oktober 1928.

Ich glaube, daß die folgende Deutung richtig ist. Ihre starke Linie<sup>110</sup> ist zwar eine Stromlinie, aber keine Unstetigkeitslinie, und sie wird wahrscheinlich ohne weiteres der Potentialströmung angehören und nur die Besonderheit haben, daß sie die letzte Stromlinie ist, die von vorn kommt. Die Unstetigkeitslinie erstreckt sich dann geradlinig vom Zylinder nach hinten, wie dies nach den Oseenschen Differentialgleichungen ohne weiteres zu erwarten ist.

Daß man mit einer sukzessiven Approximation von der Oseenschen Lösung weiterkommen kann, glaube ich nicht, und es wird auch wohl kaum gelingen, den Ablösungspunkt der Grenzschichttheorie mit dem Endpunkt des Gleitintervalles von Zeilon zusammenfallen zu lassen, weil, soviel ich sehe, der Ablösungspunkt vor die Zylindermitte fällt, während man doch für die Zeilonsche Rechnung einen Ablösungspunkt hinter der Zylindermitte brauchen würde.

L. Prandtl.

### Physikalisches zur Vereinigung der Grenzschichttheorie mit der asymptotischen Widerstandstheorie<sup>111</sup>.

Auszug aus dem Vortrag auf der Hamburger Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik am 19. X. 1928, gehalten vom Verf.

Die Erörterungen werden für den speziellen Fall eines umströmten langen Kreiszyinders (ebenes Problem) durchgeführt.

I. Der Prandtlische hydrodynamische Film zeigt einwandfrei das Bestehen einer an der Körpervorderseite beginnenden und nach den Seiten an Stärke zunehmenden, dem Körper anliegenden dünnen Übergangsschicht (Grenzschicht), in der der Übergang von der Geschwindigkeit Null am Körper (Haften) zur Geschwindigkeit der Außenströmung sich vollzieht; er zeigt ferner die Stelle der „Ablösung der Grenzschicht“ und die dortige Richtungsumkehr der Strömung in Wandnähe und läßt die Schwierigkeit einer Erfassung der nichtstationären Vorgänge im Kielwasser erkennen. Die Versuche der Göttinger und der Berliner Versuchsanstalt über Widerstandsgröße und Druckverteilung<sup>112</sup> zeigen bei hohen Reynoldsschen Zahlen  $\Re = \frac{2aU}{Z}$  einen plötzlichen Widerstandsabfall und geänderte Verteilung zwischen  $\Re = 10^5$  und  $10^6$  ( $2a =$  Zylinderdurchmesser,  $U =$  ungestörte Geschwindigkeit,  $Z =$  Zähigkeitszahl): Vor dem Abfall ( $\Re \geq 10^4$ ) ist der Widerstandsbeiwert  $\zeta = \frac{W}{2a \cdot \gamma \frac{U^2}{2g}} \cong 1,2$ , oberhalb aber, soweit bisher Messungen vorliegen, ist er  $\sim 0,3$ . Die gemessene

Druckverteilung, insbesondere die bei den höchsten Reynoldsschen Zahlen stimmt nun merkwürdigerweise verblüffend gut überein mit einer vor wenigen Monaten von Zeilon in Erweiterung der Oseenschen asymptotischen Theorie errechneten Druckverteilung.

<sup>110</sup> In der Abbildung 44.

<sup>111</sup> Nachstehendes Vortragsreferat (mit Ausnahme der erforderlichen Änderung der Fußnoten-Hinweise) und Anmerkung <sup>116</sup> ist gleichlautend mit dem Referat in der Z. A. M. M. 1928, Seite 430.

<sup>112</sup> Siehe Z. A. M. M. 1925, S. 486. (Danziger Tagung).

II. Die Grenzschichttheorie hat als Grundlage die Voraussetzung der Existenz der dünnen Übergangsschicht, die für große Reynoldssche Zahlen zu einer Größenordnungsabschätzung der einzelnen in den auf die Schicht angewendeten Navier-Stokesschen Gleichungen auftretenden Glieder führt; es ergibt sich die einfachere „Gleichung der laminaren Grenzschicht“<sup>113</sup>, die mit den Grundgesetzen der Mechanik (Impulssatz) nirgends in Widerspruch steht. Nimmt man den, der Grenzschicht „von außen imprägnierten“ Druckverlauf aus den Experimenten, so kann man eine (zweckmäßig zu definierende) „Grenzschichtdicke“  $\delta$  und die Ablösungsstelle in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung errechnen. Auch die Vorgänge in einer „turbulent gewordenen“ Grenzschicht, z. B. das längere Anliegen an der Wand, werden verständlich. Da die rechnerischen Betrachtungen aber bisher über die Ablösungsstelle hinaus nicht ausgedehnt werden können (auf die Entstehung von Wirbeln, den Wirbeltransport im Kielwasser usw.), so bleibt die Widerstandsgröße unermittelt. Die Grenzschichttheorie vermittelt das Verständnis für die tatsächlichen Vorgänge, erfaßt rechnerisch aber nur die Geschehnisse in der Nähe der Körpervorderseite.

Die Zeilonsche Deutung der Oseenschen Theorie einer „Linearisierung“ der Navier-Stokesschen Gleichungen läuft darauf hinaus, die Vernachlässigung der quadratischen Glieder (bei Oseen:  $u \cdot \text{rot } v$ ,  $v \cdot \text{rot } v$ ; bei Zeilon  $v \cdot \text{rot } v$ , dazu aber Annahmen über  $U(y) = U + u$ )<sup>114</sup> dadurch verständlich zu machen, daß in ihnen die Störung der „Primärströmung“ durch den Körper gesehen wird und diese Glieder als klein betrachtet werden. Mechanisch-physikalisch ist dies nicht in Ordnung, so daß bereits die Ausgangsgleichungen impuls-mäßig falsch sind, und es entsteht die Frage, ob im Ergebnis (nach Durchführung des Grenzüberganges zu  $\Re \rightarrow \infty$  in diesen falschen Gleichungen) der Fehler größer geworden ist oder nicht bzw. ob wenigstens das Stromlinienbild einigermaßen stimmt. Das Ergebnis des Grenzüberganges in diesen linearisierten Gleichungen ist die Aussage von der Möglichkeit der Existenz von Wirbeln im Kielwasser; eine Folge der Linearisierung ist es aber, daß die Wirbelintensität nicht längs der wirklichen Stromlinien konstant ist (bei  $\Re = \infty$  findet keine Dissipation statt), sondern längs von ihnen abweichender „Wirbelbahnen“, die mit den durch den Körper noch nicht gestörten, wenig gekrümmten Stromlinien der Primärströmung zusammenfallen. Ob notwendig Wirbel auftreten müssen, kann nicht bewiesen werden; ebensowenig wird ihre Verteilung irgendwie bestimmt. „Wenn aber gerade ein Fall vorliegt, in dem das wirkliche Wirbelgebiet mit dem Oseenschen übereinstimmt, wie es . . . unter Umständen auch beim Kreiszyylinder der Fall sein dürfte, dann wird auch die Oseensche Potentialaufgabe annähernd den richtigen Strömungs- und Druckverlauf ergeben“<sup>115</sup>; als „Oseensche Potentialaufgabe“ ist dabei, wie bei Oseen genauer abgeleitet und diskutiert ist, die Randbedingung des Gleitens der Flüssigkeit auf der Vorderseite des Körpers und des Haftens auf der Rückseite zu verstehen; sie ändert sich mit speziellen Annahmen über die Form der Wirbelbahnen (Zeilon). Das bei Oseen entstehende Bild der Stromlinien und Wirbelbahnen (die stumpf von der Körperrückseite ausgehen) wird im Vortrag diskutiert, insbesondere die Frage, wie sich das Oseensche Ergebnis aus „gewöhnlicher“ Potentialströmung und Wirbeln aufbauen ließe; ebenso wird das Bestreben Zeilons, Stromlinien und Wirbelbahnen in Übereinstimmung zu bringen, das Kielwasser nicht mehr geradlinig zu begrenzen und die Bestimmung des Kielwasserdruckes durch Annahme von „Gleitintervallen“ stetig und eindeutig zu gestalten, erläutert. Impulsmäßig bleibt — wie nach den Ausgangsgleichungen zu erwarten — aber auch die Zeilonsche Theorie (zumindest in Körperrnähe) nur eine Näherung.

III. Es ergibt sich folgendes Schema:

	Grenzschichttheorie Prandtls	Asymptotische Theorie Zeilons
Grundlage	Annahme der Schicht bzw. der Energiedissipation längs einer Stromlinie	Vorhandensein von Kielwasserwirbeln auf wenig gekrümmten, angenommenen Bahnen. Angenommene Randbedingungen der Potentialaufgabe der Körper
Spezielle Annahme	Druckverteilung	Gleitintervalle
Ergebnis	Grenzschichtdicke, Ablösungsstelle	Druckverteilung

Die Theorien ergänzen sich hiernach in spezieller Annahme und Ergebnis viceversa, wenn in anschaulicher Weise an Stelle des Gleitintervalls die Grenzschicht treten würde. Dies folgt aber auch aus einer Diskussion

<sup>113</sup> In der Fassung von v. Mises, Z. A. M. M. 1927, S. 425. (Kissinger Tagung) genügt die Tatsache einer längs eines Stromfadens (im Fall der „Grenzschicht“ ist es die Stromlinie an der Wand) vorhandenen Energiedissipation und große Reynoldssche Zahl, um zu dieser Gleichung zu gelangen.

<sup>114</sup> In diesem Vortragsreferat muß wegen Einzelheiten auf die Hauptausführungen sowie auf die dort näher zitierten Originalarbeiten von Oseen und Zeilon verwiesen werden.

$\text{rot } v = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ ;  $U + u$ ,  $v$  = Komponenten der resultierenden Strömungsgeschwindigkeit bei Vorhandensein der Störung durch den Körper.

<sup>115</sup> Aus der Besprechung Noethers von Oseens Hydrodynamik. Naturwissensch. 1928, S. 560.

darüber, in welchen Gebieten die Fehler der asymptotischen Theorie wirklich klein sind: sie kommt impulsmäßig einigermaßen in Ordnung, wenn man die „gewöhnliche“ Potentialströmung mit Gleiten auf der Vorderseite auf den Außenraum  $r > a + \delta$  beschränkt und die Zeilon-Oseensche Vorstellung von einer der Wirbelströmung überlagerten Potentialströmung im Kielwasser auf den Kielwasserraum in einiger Entfernung hinter dem Körper, wo keine merklichen Austauschbewegungen mehr stattfinden, zur Kielwasserdruckbestimmung (etwa im Sinne eines Mittelwertes einer stationären Betrachtung) benutzt. Es ist daher keine eigentliche „Vereinigung“ der Theorien, sondern nur eine gebietsweise Abgrenzung vorgenommen worden. Man rechnet etwa zuerst mit der Zeilonschen Druckverteilung die Grenzschichtdicke und die Ablösungsstelle und ändert dann in zweiter Näherung die ursprünglichen Gleitintervallannahmen gemäß der erhaltenen Lage der Ablösungsstelle und der dort vorhandenen Grenzschichtdicke, bis genügende Übereinstimmung zwischen beiden herrscht. Man kann auf diese Weise sowohl den Wert  $\zeta \leq 1,2$  als auch  $\zeta \leq 0,3$  und entsprechende Druckverteilungen erhalten<sup>116</sup>. Auch die Stelle des größten seitlichen Unterdruckes stimmt gut mit den Experimenten.

IV. Man brauchte aber den Umweg über die mathematisch schwierigen, physikalisch nicht ganz befriedigenden Oseen-Zeilonschen Entwicklungen überhaupt nicht zu gehen, wenn man wüßte, wie das Gebilde: Körper + Kielwasser begrenzt ist, um das herum man lediglich „gewöhnliche“ Potentialströmung anzunehmen brauchte, um ebenfalls die in erster Näherung der Grenzschicht zu imprägnierende Druckverteilung zu erhalten. Daraus folgte dann als zweite Näherung die Potentialströmung um das Gebilde: Körper + Grenzschicht + Kielwasser ähnlich wie zuvor. Hierbei bliebe aber der Kielwasserdruck unbestimmt, es sei denn, daß man die Kielwassergrenze aus bestimmten Anordnungen von Potentialwirbeln im Kielwasser („Wirbelstraßen“ oder anderen Verteilungen) erst aufbaut, deren Impulstransport dann Aussagen auch über den Kielwasserdruck gestatten würde. Bei Annahme der Oseenschen Strömung folgt diese Grenze aber aus dem Potentialproblem und der damit zusammenhängenden (mehr oder weniger willkürlich anzunehmenden) Form der Wirbelbahnen im Kielwasser, und der Kielwasserdruck bestimmt sich — allerdings auf Grund von physikalisch nur sehr rohen Annahmen — in einer mit dem Experiment merkwürdigerweise übereinstimmenden Größe.

### III. Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern mit brückenpfeilerähnlichem Querschnitt.

#### A. Allgemeines.

Noch bevor man sich die Erfahrungen zunutze machen konnte, die bei der Untersuchung der Kreiszyylinder (s. Teil I) zu machen waren — denn ihre systematische Auswertung ist erst später erfolgt —, sind bereits die nachstehend beschriebenen ersten Versuche an Zylindern mit brückenpfeilerähnlichem Querschnitt vorgenommen worden<sup>117</sup>. Sie sind mit einigen nachstehend dargelegten Mängeln behaftet, die sich als solche erst hinterher herausgestellt haben. Gerade dieser Umstand macht sie aber für die weiteren Versuche besonders wertvoll und ihre Darlegung wird auch anderen Forschern von Nutzen sein können.

Die verschiedenen, bisher untersuchten Pfeilerformen, die in Abb. 46 dargestellt sind, sind alle aus dem Rechteckprofil Nr. I (mit scharfen Kanten) abgeleitet worden; dieses hat eine Länge  $l$  von 300 mm und eine Breite  $b$  von 50 mm. Die anderen Pfeilerformen sind hieraus durch Abrundung oder spitzbogenartige Zuschärfung der vorderen bzw. hinteren Schmalseiten in der Weise entwickelt worden, daß bei gleicher Pfeilerbreite die Gesamtquerschnittsgröße erhalten blieb; die „Längen über alles“ sind daher verschieden. Bei dieser Maßnahme waren Gesichtspunkte der reinen Baupraxis und nicht strö-

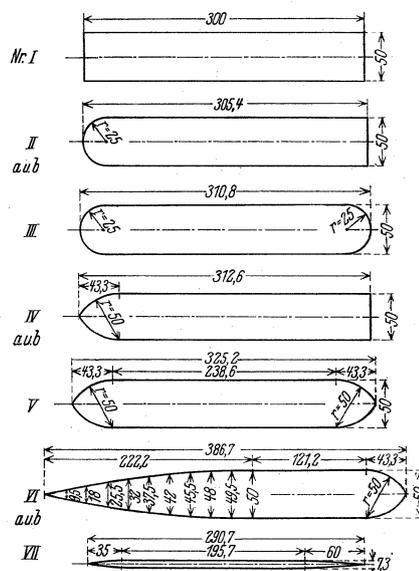


Abb. 46. Untersuchte Pfeilerformen.

<sup>116</sup> Nachträglicher Zusatz: Wenn das Kielwasser „dicker“ als der Zylinderdurchmesser ist, braucht die Ablösungsstelle bzw. die „innere“ Grenze des Gleitintervalles nicht hinter die Zylindermitte zu fallen, sondern kann noch auf der geometrischen Vorderseite liegen.

<sup>117</sup> Das weitere, alle bisherigen Erfahrungen berücksichtigende Versuchsprogramm wird unten in Abschnitt F dargelegt.

mungstechnische Erwägungen maßgebend. Form IIa entsteht durch kreisförmige Abrundung der hinteren (bzw. II b der vorderen) Schmalseite mit  $r = \frac{b}{2}$ . Bei Form III sind beide Schmalseiten mit  $r = \frac{b}{2}$  halbkreisförmig abgerundet worden. Die Formen IV a und b bzw. V sind durch spitzbogenförmige Zuschärfung mit  $r = b$  der einen bzw. beiden Schmalseiten entstanden; bei den Formen VIa (und b) ist die Vorderseite (bzw. Rückseite) mit  $r = 20 \cdot b$  zugeschärft worden.

Alle Körper bestanden aus lackiertem Kiefernholz, waren geglättet und mit gutem Bootslack überzogen. Die Versuchskörper für die unter B beschriebenen Versuche, bei denen die Pfeiler die freie Flüssigkeitsoberfläche durchsetzten, waren 30 cm hoch; für die unter C beschriebenen Versuche bei vollkommener Tauchung wurden andere Pfeilerkörper gleicher Formen von 45 cm Höhe benutzt.

### B. Widerstandsmessungen an Brückenpfeilern, die die freie Flüssigkeitsoberfläche lotrecht durchsetzen.

Da auch in der Natur Brückenpfeiler die freie Wasserspiegeloberfläche durchsetzen, sind derartige Versuche zuerst durchgeführt worden. Sie entsprechen den in Teil I Abschnitt D beschriebenen Versuchen mit Kreiszyindern. Die Pfeilerkörper wurden quer zur Zylindererzeugenden in aufrechter Lage in der großen Versuchsrinne der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, bei einer Tauchtiefe von 150 mm unter dem ruhenden Wasserspiegel geschleppt. Zur Ausschaltung der Umströmung am unteren Pfeilerende und zugleich in gewisser Nachbildung der Flußsohle war an jedem Pfeiler eine wagerechte, 2 mm starke ebene Abschlußplatte am unteren Pfeilerende angebracht<sup>118</sup>; sie war 602 mm lang, 250,8 mm breit, an den Ecken mit 100 mm Halbmesser ausgerundet und allseitig zugeschärft. Aus Abb. 47 geht die Form der Platte und ihre relative Lage zu den Pfeilern hervor. In dem am Schlepptagendynamometer gemessenen Gesamtwiderstand  $W_G$  war der Widerstand des unteren Ab-

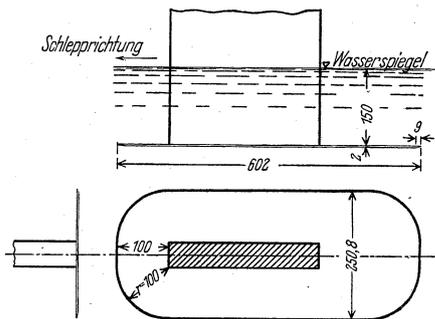


Abb. 47. Unteres Abschlußblech.

schlußbleches mitenthalten. Er mußte gesondert festgestellt und in Abzug gebracht werden. Dies geschah in folgender Weise:

#### 1. Ermittlung des Widerstandes des Abschlußbleches.

Das Abschlußblech wurde zuerst an einem sehr dünnen, zugeschärften Haltekörper (Nr. VII auf Abb. 46) befestigt und mit diesem unter Messung des Widerstandes dieser Anordnung geschleppt. Dann wurde der dünne

Tabelle 16. Halte-Pfeiler Nr. VII allein, ohne Abschlußblech bei freier Oberfläche. Tiefe 150 mm, Breite 7,3 mm, Länge  $l = 290,7$  mm, benetzte Pfeilerfläche  $0 = 0,0873$  m<sup>2</sup>.

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W$ Widerstand kg	$U^2$	Beiwert $\zeta$ $= \frac{2g \cdot W}{1000 \cdot 0 \cdot U^2}$
1	2	3	4	5
1	0,0842	0,006	0,00709	0,190
2	0,1540	0,009	0,02372	0,0853
3	0,1660	0,012	0,02756	0,0978
4	0,2373	0,012	0,05635	0,0478
5	0,2858	0,014	0,08160	0,0386
6	0,3240	0,015	0,10498	0,0321
7	0,3860	0,018	0,14900	0,0271
8	0,4485	0,014	0,2012	0,0157
9	0,5303	0,019	0,2813	0,0152
10	0,6290	0,020	0,3956	0,0113
11	0,7490	0,022	0,5610	0,0088
12	0,8170	0,026	0,6675	0,0088
13	1,1150	0,033	1,2430	0,00597
14	1,3070	0,041	1,7090	0,00539
15	1,6100	0,062	2,5921	0,00537
16	1,7100	0,067	2,9241	0,00515
17	2,3180	0,103	5,3650	0,00430
18	2,8520	0,158	8,1400	0,00437
19	3,4510	0,238	11,9100	0,00485
20	4,1880	0,362	17,5400	0,00464
21	5,0200	0,565	25,2000	0,00503

<sup>118</sup> Bei den Modellversuchen sind die Pfeilermodelle durch ruhendes Wasser geschleppt worden, während in der Natur das im Fluß bereits turbulent fließende Wasser gegen die ruhenden Pfeiler strömt. Bei der Übertra-

Tabelle 17.

Fahrt Nr.	Haltepfeiler Nr. VII mit Abschlußblech bei freier Oberfläche; Tiefe 150 mm			$W_1$ Widerstand des Pfeilers allein kg (Tabelle 16)	Abschlußblech allein, benetzte Oberfläche $O_0 = 0,28292 \text{ m}^2$ Breite = 0,250 m } Temperatur = $16^\circ \text{ C}$ Länge $l = 0,602 \text{ m}$ } $\rho_K = 1,08 \text{ sek/m}^2$		
	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W$ Widerstand kg	$U^2$		$W_0$ Widerstand des Abschlußbleches allein kg	Beiwert $\zeta_0 = \frac{2g}{1000 \cdot O} \cdot \frac{W_0}{U^2}$	$U \cdot l \cdot \rho_K$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,0957	0,008	0,009158	0,0065	0,0015	0,01136	0,0622
2	0,122	0,010	0,014884	0,0077	0,0023	0,01072	0,0793
3	0,175	0,012	0,030625	0,0098	0,0022	0,00498	0,1138
4	0,240	0,015	0,05760	0,0122	0,0028	0,00337	0,1560
5	0,284	0,017	0,08066	0,0136	0,0034	0,00292	0,1847
6	0,333	0,021	0,11089	0,0152	0,0058	0,00363	0,2164
7	0,389	0,022	0,15132	0,0166	0,0054	0,00248	0,2530
8	0,455	0,025	0,20703	0,0179	0,0071	0,00238	0,2959
9	0,532	0,030	0,28302	0,0190	0,0110	0,00269	0,3460
10	0,627	0,032	0,39313	0,0207	0,0114	0,00201	0,408
11	0,769	0,044	0,59136	0,0234	0,0206	0,00242	0,500
12	0,834	0,058	0,6956	0,0247	0,0333	0,00332	0,542
13	1,130	0,103	1,2769	0,0333	0,0697	0,00379	0,735
14	1,327	0,144	1,7610	0,0425	0,1015	0,00400	0,863
15	1,658	0,206	2,7500	0,0635	0,1425	0,00359	1,079
16	1,743	0,230	3,0380	0,069	0,1610	0,00368	1,133
17	2,345	0,409	5,5000	0,108	0,301	0,00379	1,525
18	2,882	0,623	8,3050	0,165	0,458	0,00383	1,875
19	3,500	0,913	12,2500	0,250	0,663	0,00375	2,276
20	4,252	1,355	18,0900	0,382	0,973	0,00373	2,766
21	5,220	2,023	27,2484	0,605	1,418	0,00361	3,392

Haltekörper allein (ohne das Abschlußblech) geschleppt und sein Widerstand bestimmt. Es wurde nun als zulässig erachtet, aus dem Unterschiede der so gemessenen Widerstände den Widerstand des Abschlußbleches allein zu bestimmen. Das ist in den Tabellen 16 und 17 geschehen, welche die gemessenen Widerstände des Haltepfeilers mit Abschlußblech und ohne Abschlußblech und die daraus durch Differenzbildung errechneten Widerstände des Abschlußbleches allein enthalten. Das Ergebnis ist in Abb. 48 in Abhängigkeit von  $U \cdot l \cdot \rho_K$  aufgetragen und mit den von Blasius<sup>119</sup> bestimmten Reibungswiderständen von dünnen, in ihrer Ebene im Wasser bewegten Platten verglichen worden. Die beiden untersten, bei kleinen Geschwindigkeiten liegenden Meßwerte sind mit Ungenauigkeiten behaftet, wie das bei sehr langsamen Schleppfahrten häufiger eintritt. Den Abzügen zur Ermittlung

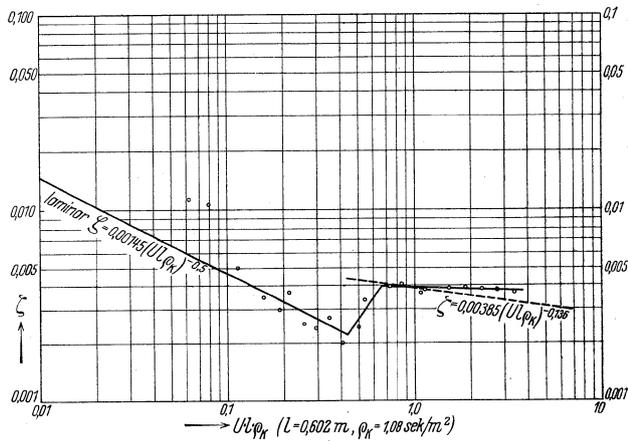


Abb. 48. Widerstand der Abschlußplatte allein.

$$\text{Widerstandsbeiwert } \zeta = \frac{W}{1000 \cdot O \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot U^2}$$

gung der zahlenmäßigen Modellversuchsergebnisse auf die Natur wäre auf die dadurch geänderten Verhältnisse auch dann Rücksicht zu nehmen, wenn das Wasser der Schleppversuchsrinne vor den Versuchen künstlich „turbulent gemacht“ worden wäre. Für die in der vorliegenden Arbeit gezogenen, lediglich auf Vergleichswerte hinzielenden Schlüsse gibt dieser Umstand aber zu keinen wesentlichen Fehlern Anlaß.

<sup>119</sup> Blasius: Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Forschungsheft Nr. 131 des V.D.I. Berlin 1913.

der Pfeilerwiderstände in den Tabellen 18 bis 26 (s. u.) ist der ausgezogene Linienzug zugrunde gelegt worden; jedoch wurde zur Ermittlung des Widerstandes in Kilogramm die um die Fläche des Pfeilerquerschnitts verringerte Gesamtoberfläche des Abschlußbleches in die Rechnung eingeführt.

### 2. Widerstandsmessungen an den Pfeilerformen I bis VI.

In den Tabellen 18 bis 26 sind die Ergebnisse aller Versuchsfahrten zusammengestellt und auf den linken Seiten in den Abb. 49 bis 57 zeichnerisch über  $U \cdot b \cdot \rho_K$  in gewöhnlichem Maßstabe aufgetragen worden.

### 3. Oberflächenwellen.

Allen Widerstandskurven gemeinsam ist ein wellenförmiger Buckel, dessen Maximum bei einer Geschwindigkeit  $U$  von etwa 1,1 bis 1,3 m/sek bzw. einem  $U \cdot b \cdot \rho_K \cong 0,057$  bis 0,070 liegt. Dieser Buckel hat seine Ursache in der Wellenbildung am freien Flüssigkeitsspiegel und ist den Schiffbauversuchsanstalten wohlbekannt; eine rohe Überschlagsrechnung zeigt sehr schnell und elementar die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung:

Die am Pfeilerkopf sich bildende, schräg seitwärts unter dem Winkel  $\alpha \cong \pm 19\frac{1}{2}^\circ$  geneigte Bugwelle<sup>120</sup> wiederholt sich am Pfeiler in einer Entfernung  $i$  (s. Abb. 58). Dann gilt für die Wellenlänge  $\lambda$ :

$$\lambda = i \cdot \sin \alpha .$$

Die Wellengeschwindigkeit ist: 
$$c = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \pi}} = \sqrt{\frac{g \cdot i \cdot \sin \alpha}{2 \pi}}$$

und es gilt, da die Welle mit dem Pfeiler mitschreitet:

$$c = U \sin \alpha ,$$

daher: 
$$i = 2 \pi \cdot \frac{U^2 \sin \alpha}{g} = 0,64 \cdot U^2 \sin \alpha$$

oder 
$$U = \sqrt{\frac{g \cdot i}{2 \pi \cdot \sin \alpha}} = 1,25 \cdot \sqrt{\frac{i}{\sin \alpha}} \text{ m/sek.}$$

Der zweite (oder  $n$ -te) Wellenberg trifft also auf das (hintere) Pfeilerende und wegen  $W \cong F \cdot \Delta h$  wird der Pfeilerwellenwiderstand verhältnismäßig gering, wenn:

$$i = l \text{ bzw. } i = \frac{l}{n}$$

ist ( $n = \text{ganze Zahl}$ ). Andererseits tritt ein Widerstandsbuckel auf, wenn ein Wellental am Pfeilerende liegt, also wenn

$$i = 2l \text{ bzw. } i = \frac{2}{2n-1} \cdot l$$

ist. Mit  $l = 0,3 \text{ m}$  und  $\alpha \cong 2 \cdot 19\frac{1}{2}^\circ = 39^\circ$  erhält man leicht den Fall  $i = 2 \cdot l$  für  $U = 1 \text{ m/sek}$ , wie er mit der Beobachtung übereinstimmt.

In ähnlicher Weise müßten Widerstandsbuckel eintreten, wenn:

$$U = 1,25 \cdot \sqrt{\frac{2}{2n-1} \cdot \frac{0,3}{\sin 39^\circ}}$$

ist, also	für: $n = 1$	2	3	4
	für: $U \cong 1,0$	0,66	0,51	0,43 m/sek ;

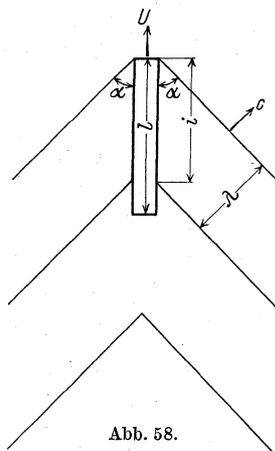


Abb. 58.

diese Buckel sind aber in den Widerstandskurven nicht deutlich ausgeprägt und wahrscheinlich durch andere Einflüsse überdeckt. Der Einfluß stehender Wellen wird aber auch

<sup>120</sup> Die Theorie ergibt für das durch einen „wandernden Druckpunkt“ erzeugte System von Diagonal- und Querwellen einen Öffnungswinkel von  $\pm \alpha = \text{arc tg } \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = 19^\circ 28'$ , s. Lamb, S. 411. 1924.

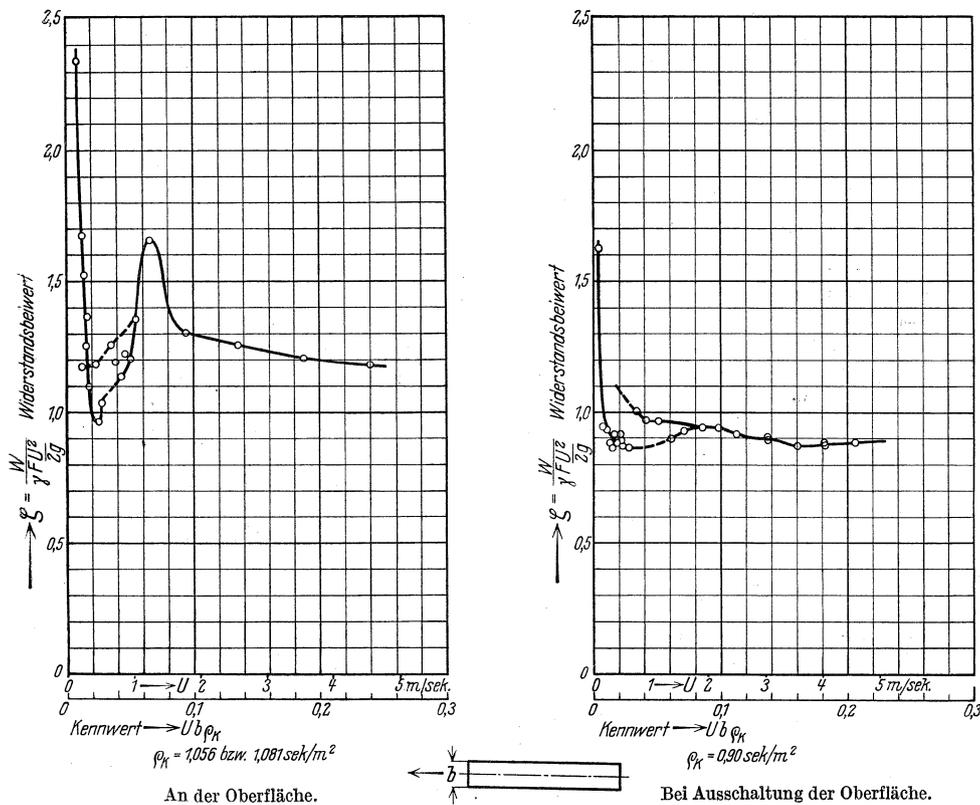


Abb. 49. Widerstandsbeiwert des Pfeilerkörpers I.

Pfeiler Nr. I. Tabelle 18. Pfeilerwiderstand bei freier Oberfläche.

Tiefe  $t = 150$  mm, Breite  $b = 50$  mm, Länge = 300 mm.

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_a$ Widerstand gemessen kg	$W'_0$ Abschluß- blech kg	$W$ Pfeiler allein $= W_a - W'_0$ kg	$U^2$ (m/sek) <sup>2</sup>	$\zeta = \frac{2g}{1000 \cdot b \cdot t} \cdot \frac{W}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_K$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 15,2° C						Beiwert $\rho_K = 1,056$ sek/m <sup>2</sup>		
1	0,175	0,010	0,00168	0,0083	0,0306	0,710	0,00924	
2	0,233	0,027	0,00267	0,0243	0,0543	1,172	0,01230	
3	0,322	0,052	0,00440	0,0476	0,1037	1,246	0,01700	
4	0,481	0,094	0,00809	0,0859	0,2314	0,971	0,02540	
5	0,656	0,220	0,01366	0,2063	0,4303	1,262	0,03464	
6	0,914	0,425	0,0376	0,3884	0,8354	1,216	0,04827	
7	1,254	1,080	0,0828	0,9972	1,5725	1,659	0,06623	
8	1,780	1,755	0,1660	1,5890	3,1684	1,312	0,09400	
9	2,559	3,502	0,3392	3,1628	6,5485	1,263	0,13520	
10	3,568	6,520	0,6480	5,8740	12,7306	1,208	0,18850	
11	4,546	10,355	1,0424	9,3126	20,6661	1,179	0,24000	
12	0,342	0,054	0,00484	0,0492	0,1170	1,100	0,01806	
13	0,531	0,122	0,00950	0,1125	0,2820	1,044	0,02804	
14	0,739	0,267	0,01728	0,2497	0,5461	1,196	0,03903	
15	1,036	0,608	0,0544	0,5536	1,0733	1,358	0,05470	
16	0,821	0,317	0,0226	0,2944	0,6740	1,144	0,04335	
17	0,884	0,397	0,0310	0,3660	0,7815	1,225	0,04668	
Temperatur = 16,1° C						Beiwert $\rho_K = 1,081$ sek/m <sup>2</sup>		
18	0,172	0,028	0,00163	0,0264	0,0296	2,335	0,0093	
19	0,229	0,036	0,00260	0,0334	0,0524	1,667	0,0124	
20	0,265	0,044	0,00328	0,0407	0,0702	1,516	0,0143	
21	0,313	0,055	0,00420	0,0508	0,0980	1,355	0,0169	
22	0,375	0,069	0,00555	0,0634	0,1406	1,179	0,0203	

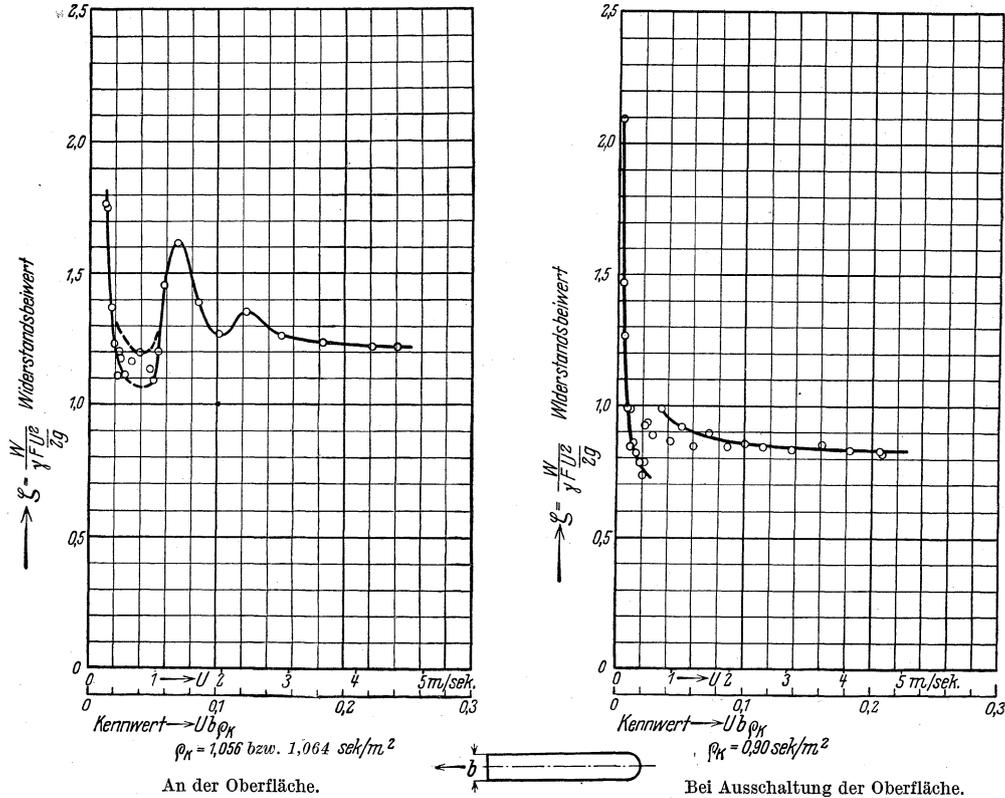


Abb. 50. Widerstandsbeiwert des Pfeilerkörpers IIa.

Pfeiler Nr. IIa. Tabelle 19. Pfeilerwiderstand bei freier Oberfläche.  
 Tiefe  $t = 150$  mm, Breite  $b = 50$  mm, Länge = 305,4 mm.

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W'_0$ Abschluß- blech kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W'_0$ kg	$U^2$ (m/sek) <sup>2</sup>	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot t \cdot U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_K$	Bemer- kungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 15,2° C						Beiwert $\rho_K = 1,056 \text{ sek/m}^2$		
1	0,169	0,030	0,00158	0,0284	0,0286	2,598	0,0089	
2	0,232	0,039	0,00265	0,0363	0,0538	1,765	0,0122	
3	0,257	0,047	0,00311	0,0439	0,0660	1,752	0,0136	
4	0,320	0,058	0,00435	0,0536	0,1024	1,370	0,0169	
5	0,370	0,070	0,00544	0,0646	0,1369	1,234	0,0195	
6	0,444	0,098	0,00718	0,0908	0,1971	1,205	0,0234	
7	0,518	0,123	0,00910	0,1139	0,2683	1,110	0,0273	
8	0,626	0,187	0,01259	0,1744	0,3919	1,165	0,0331	
9	0,754	0,278	0,01802	0,2600	0,5685	1,197	0,0398	
10	0,905	0,391	0,03600	0,3550	0,8190	1,134	0,0478	
11	1,116	0,762	0,0648	0,6972	1,2455	1,453	0,0589	
12	1,305	1,142	0,0900	1,0520	1,7030	1,617	0,0689	
13	1,625	1,542	0,1388	1,4032	2,6406	1,390	0,0858	
14	1,929	1,973	0,1932	1,7798	3,7210	1,266	0,1018	
15	2,332	3,092	0,2824	2,8096	5,4382	1,353	0,1231	
16	2,860	4,364	0,4204	3,9436	8,1796	1,262	0,1510	
17	3,475	6,325	0,6148	5,7102	12,0756	1,236	0,1835	
18	4,182	9,032	0,8820	8,1500	17,4891	1,220	0,2208	
19	4,583	10,852	1,0592	9,7928	21,0039	1,220	0,2420	
20	0,497	0,051	0,00850	0,0425	0,2470	0,450	0,0262	
21	0,583	0,086	0,01115	0,0748	0,3469	0,573	0,0311	
22	0,973	0,442	0,04560	0,3964	0,9467	1,095	0,0514	
23	1,028	0,538	0,05320	0,4848	1,0568	1,200	0,0543	
Temperatur = 15,5° C						Beiwert $\rho_K = 1,064 \text{ sek/m}^2$		
24	0,414	0,079	0,00645	0,0725	0,1714	1,107	0,0220	
25	0,465	0,105	0,00766	0,0973	0,2162	1,177	0,0247	
26	0,522	0,125	0,00921	0,1158	0,2725	1,113	0,0278	

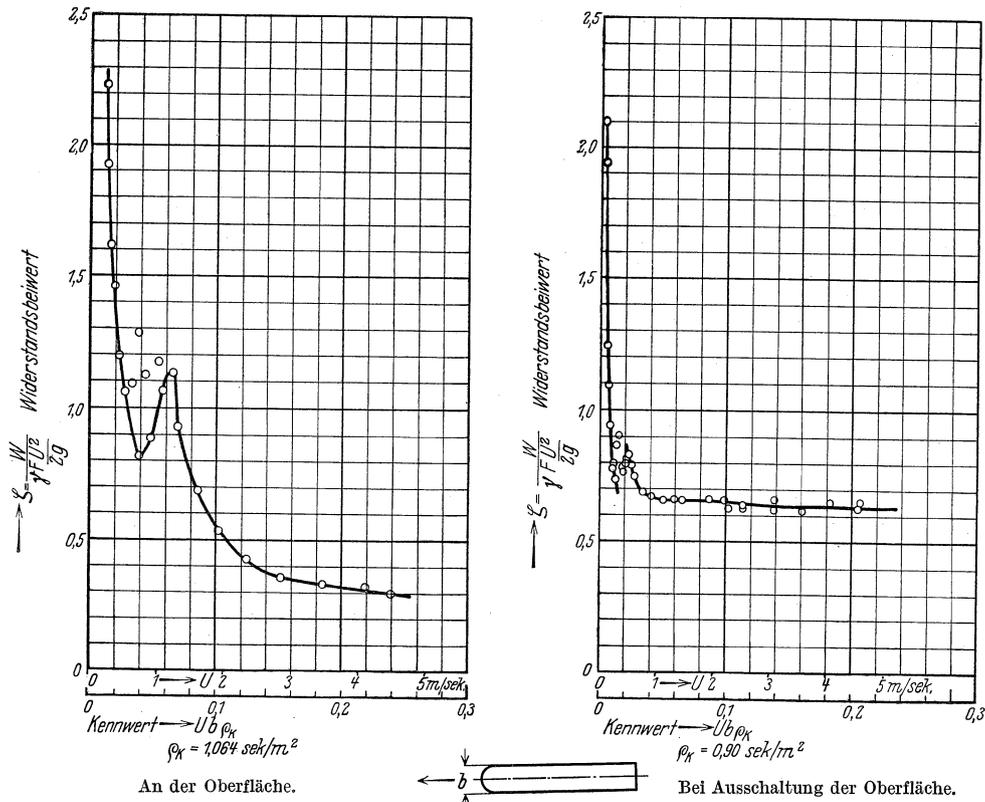
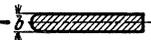


Abb. 51. Widerstandsbeiwert des Pfeilerkörpers II b.

Pfeiler Nr. IIb. Tabelle 20. Pfeilerwiderstand bei freier Oberfläche.

←  Tiefe  $t = 150 \text{ mm}$ , Breite  $b = 50 \text{ mm}$ , Länge =  $305,4 \text{ mm}$ .

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W'_0$ Abschluß- blech kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W'_0$ kg	$U^2$ (m/sek) <sup>2</sup>	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot t \cdot U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_K$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = $15,5^\circ \text{ C}$						Beiwert $\rho_K = 1,064 \text{ sek/m}^2$		
1	0,159	0,035	0,00147	0,0335	0,0253	3,463	0,00846	
2	0,228	0,047	0,00259	0,0444	0,0520	2,233	0,01213	
3	0,260	0,053	0,00317	0,0498	0,0676	1,927	0,01383	
4	0,301	0,060	0,00399	0,0560	0,0906	1,616	0,01601	
5	0,368	0,082	0,00540	0,0756	0,1354	1,460	0,01958	
6	0,434	0,093	0,00690	0,0861	0,1884	1,196	0,02309	
7	0,518	0,118	0,00910	0,1089	0,2683	1,061	0,02756	
8	0,617	0,171	0,01225	0,1587	0,3807	1,090	0,03282	
9	0,747	0,192	0,01760	0,1744	0,5580	0,818	0,03974	
10	0,906	0,314	0,0364	0,2776	0,8208	0,885	0,04820	
11	1,090	0,545	0,0612	0,4838	1,1881	1,065	0,05799	
12	1,309	0,698	0,0908	0,6072	1,7135	0,926	0,06964	
13	1,613	0,818	0,1368	0,6812	2,6018	0,686	0,08581	
14	1,932	0,953	0,1940	0,7590	3,7326	0,532	0,10278	
15	2,325	1,162	0,2800	0,8820	5,4056	0,427	0,12369	
16	2,857	1,527	0,4196	1,1074	8,1624	0,358	0,15199	
17	3,472	2,147	0,6140	1,5330	12,0548	0,333	0,18471	
18	4,132	2,975	0,8620	2,1130	17,0734	0,324	0,21982	
19	4,535	3,391	1,0364	2,3546	20,5662	0,299	0,23908	
20	0,722	0,272	0,0164	0,2556	0,5213	1,283	0,03841	
21	0,833	0,321	0,0236	0,2974	0,6939	1,121	0,04432	
22	1,023	0,521	0,0528	0,4682	1,0465	1,171	0,05442	
23	1,238	0,743	0,0808	0,6622	1,5326	1,130	0,06586	

Pfeiler mit Halbkreisabrundungen.

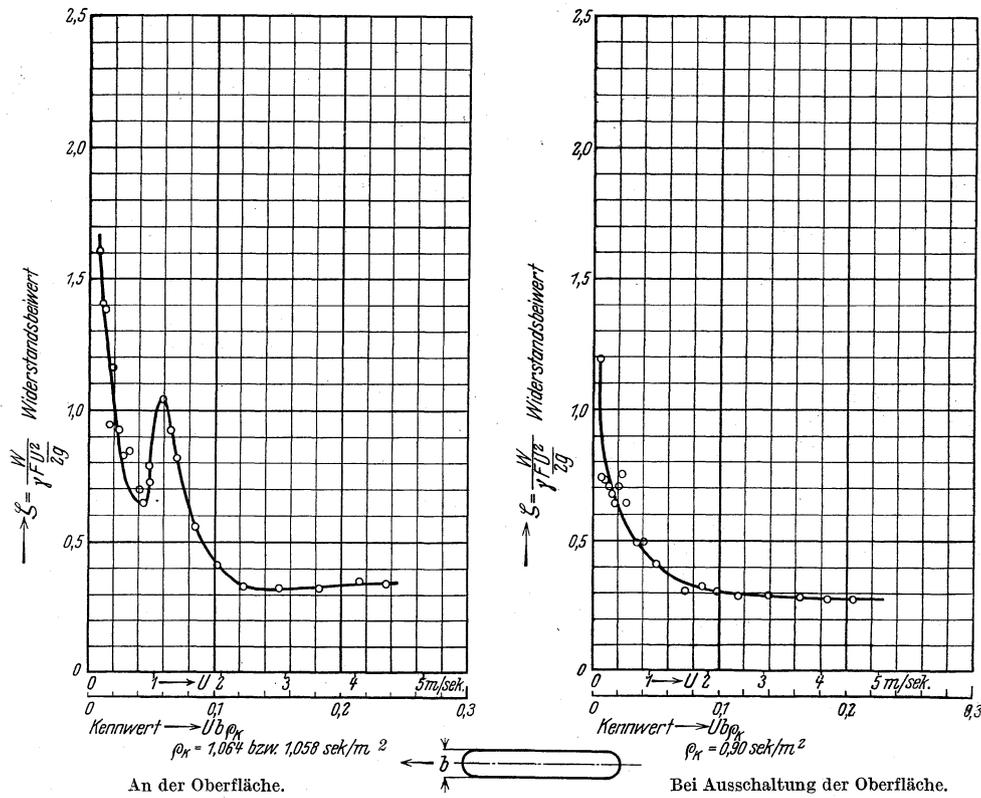


Abb. 52. Widerstandsbeiwert des Pfeilerkörpers III.

Pfeiler Nr. III. Tabelle 21. Pfeilerwiderstand bei freier Oberfläche.

Tiefe  $t = 150$  mm, Breite  $b = 50$  mm, Länge = 310,8 mm.

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W'_0$ Abschluß- blech kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W'_0$ kg	$U^2$ (m/sek) <sup>2</sup>	$\zeta = \frac{2g}{1000 \cdot b \cdot t} \cdot \frac{W}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_K$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 15,5° C						Beiwert $\rho_K = 1,064$ sek/m <sup>2</sup>		
1	0,164	0,018	0,00153	0,0165	0,0269	1,608	0,00872	
2	0,222	0,029	0,00250	0,0265	0,0493	1,406	0,01181	
3	0,257	0,038	0,00311	0,0349	0,0660	1,383	0,01367	
4	0,325	0,043	0,00446	0,0385	0,1063	0,947	0,01734	
5	0,361	0,063	0,00523	0,0578	0,1303	1,160	0,01921	
6	0,453	0,080	0,00740	0,0726	0,2052	0,925	0,02410	
7	0,527	0,097	0,00938	0,0876	0,2777	0,825	0,02804	
8	0,626	0,139	0,01257	0,1264	0,3919	0,844	0,03330	
9	0,769	0,176	0,01888	0,1571	0,5914	0,695	0,04091	
10	0,905	0,283	0,0360	0,2470	0,8190	0,789	0,04815	
11	1,123	0,567	0,0652	0,5018	1,2611	1,041	0,05974	
12	1,322	0,639	0,0924	0,5464	1,7477	0,818	0,07033	
13	1,593	0,672	0,1336	0,5384	2,5376	0,555	0,08475	
14	1,921	0,773	0,1920	0,5810	3,6900	0,412	0,10220	
15	2,313	0,953	0,2772	0,6758	5,3500	0,330	0,12310	
16	2,841	1,418	0,4156	1,0024	8,0713	0,325	0,15114	
17	3,448	2,085	0,6052	1,4798	11,8887	0,325	0,18343	
Temperatur = 15,3° C						Beiwert $\rho_K = 1,058$ sek/m <sup>2</sup>		
18	4,033	3,000	0,8220	2,1780	16,2600	0,350	0,21464	
19	4,440	3,557	0,9924	2,5646	19,7200	0,340	0,23632	
20	0,818	0,188	0,0222	0,1658	0,6691	0,648	0,04327	
21	0,924	0,277	0,0396	0,2374	0,8538	0,728	0,04888	
22	1,238	0,622	0,0804	0,5416	1,5326	0,923	0,06549	
23	2,000	0,847	0,2080	0,6390	4,0000	0,417	0,10580	

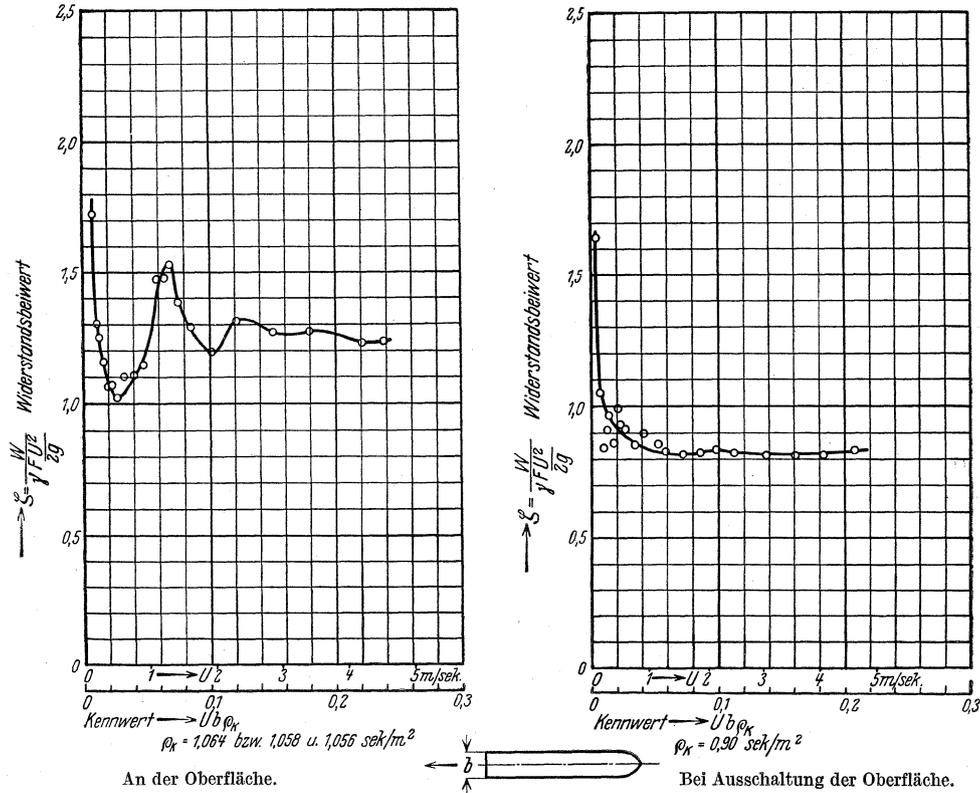


Abb. 53. Widerstandsbeiwert des Pfeilerkörpers IVa.

Pfeiler IVa. Tabelle 22. Pfeilerwiderstand bei freier Oberfläche.

Tiefe  $t = 150$  mm, Breite  $b = 50$  mm, Länge = 312,6 mm.

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_a$ Widerstand gemessen kg	$W'_0$ Abschluß- blech kg	$W$ Pfeiler allein $= W_a - W'_0$ kg	$U^2$ (m/sek) <sup>2</sup>	$\xi = \frac{2g}{1000 b \cdot t} \cdot \frac{W}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_k$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 15,5° C						Beiwert $\rho_k = 1,064$ sek/m <sup>2</sup>		
1	0,167	0,020	0,00155	0,0184	0,0279	1,725	0,0089	
2	0,225	0,028	0,00255	0,0254	0,0506	1,303	0,0120	
3	0,258	0,035	0,00311	0,0318	0,0666	1,249	0,0137	
4	0,321	0,050	0,00440	0,0456	0,1030	1,157	0,0171	
5	0,376	0,063	0,00557	0,0574	0,1414	1,062	0,0200	
6	0,447	0,089	0,00720	0,0818	0,1998	1,070	0,0238	
7	0,522	0,116	0,00926	0,1067	0,2725	1,024	0,0278	
8	0,616	0,172	0,01225	0,1597	0,3795	1,101	0,0328	
Temperatur = 15,3° C						Beiwert $\rho_k = 1,058$ sek/m <sup>2</sup>		
9	0,761	0,264	0,01849	0,2455	0,5791	1,109	0,0402	
10	0,908	0,397	0,03688	0,3602	0,8245	1,143	0,0480	
11	1,115	0,765	0,0644	0,7006	1,2433	1,474	0,0590	
12	1,319	1,109	0,0920	1,0170	1,7398	1,529	0,0698	
13	1,627	1,448	0,1392	1,3088	2,6471	1,294	0,0861	
14	1,916	1,870	0,1908	1,6792	3,6710	1,196	0,1014	
15	2,306	2,936	0,2752	2,6608	5,3176	1,310	0,1220	
Temperatur = 15,2° C						Beiwert $\rho_k = 1,056$ sek/m <sup>2</sup>		
16	2,858	4,380	0,4200	3,9600	8,1682	1,268	0,1509	
17	3,399	6,212	0,5888	5,6232	11,5532	1,274	0,1795	
18	4,181	9,079	0,8812	8,1978	17,4900	1,226	0,2208	
19	4,524	10,678	1,0316	9,6464	20,4666	1,234	0,2389	
20	1,232	0,936	0,0800	0,8560	1,5178	1,476	0,0651	
21	1,438	1,202	0,1088	1,0932	2,0678	1,384	0,0759	

Eisner, Widerstandsmessungen.

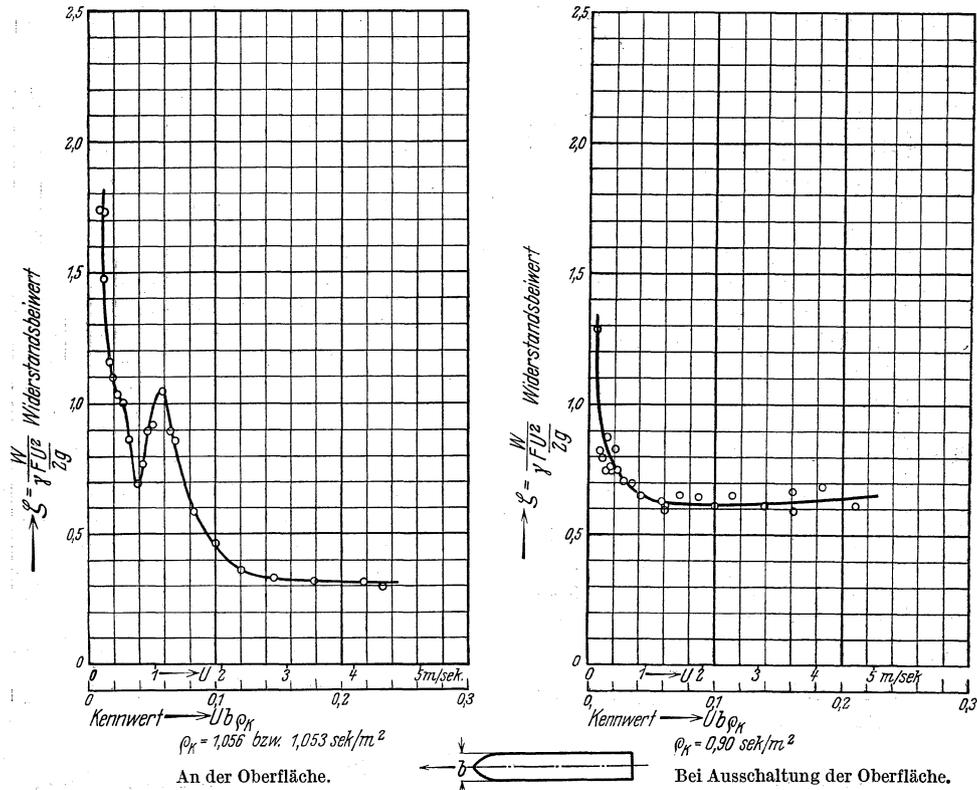


Abb. 54. Widerstandsbeiwert des Pfeilerkörpers IVb.

Pfeiler Nr. IVb. Tabelle 23. Pfeilerwiderstand bei freier Oberfläche.

Tiefe  $t = 150 \text{ mm}$ , Breite  $b = 50 \text{ mm}$ , Länge =  $312,6 \text{ mm}$ .

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W'_0$ Abschluß- blech kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W'_0$ kg	$U^2$ (m/sek) <sup>2</sup>	$\zeta = \frac{2g}{1000 \cdot b \cdot t} \cdot \frac{W}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_K$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = $15,2^\circ \text{ C}$						Beiwert $\rho_K = 1,056 \text{ sek/m}^2$		
1	0,171	0,021	0,00162	0,0194	0,0292	1,738	0,0090	
2	0,235	0,034	0,00272	0,0313	0,0552	1,483	0,0124	
3	0,249	0,044	0,00298	0,0410	0,0620	1,730	0,0132	
4	0,321	0,050	0,00440	0,0456	0,1030	1,158	0,0170	
5	0,376	0,065	0,00557	0,0594	0,1414	1,099	0,0199	
6	0,436	0,082	0,00695	0,0750	0,1901	1,032	0,0230	
7	0,534	0,119	0,00964	0,1094	0,2852	1,003	0,0282	
8	0,618	0,138	0,01229	0,1257	0,3819	0,861	0,0326	
9	0,750	0,167	0,01785	0,1491	0,5625	0,693	0,0396	
10	0,896	0,310	0,0345	0,2755	0,8028	0,898	0,0473	
11	1,120	0,567	0,0652	0,5018	1,2544	1,046	0,0591	
12	1,324	0,650	0,0924	0,5576	1,7530	0,859	0,0699	
Temperatur = $15,1^\circ \text{ C}$						Beiwert $\rho_K = 1,053 \text{ sek/m}^2$		
13	1,595	0,702	0,1340	0,5680	2,5440	0,584	0,0840	
14	1,898	0,825	0,1872	0,6378	3,6024	0,463	0,1000	
15	2,284	0,988	0,2704	0,7176	5,2167	0,360	0,1202	
16	2,805	1,397	0,4052	0,9918	7,8680	0,330	0,1476	
17	3,397	1,981	0,5884	1,3926	11,5396	0,316	0,1788	
18	4,142	2,842	0,8652	1,9768	17,1562	0,312	0,2180	
19	4,425	3,210	0,9860	2,2240	19,5806	0,294	0,2329	
20	0,812	0,215	0,0218	0,1932	0,6593	0,766	0,0427	
21	0,984	0,387	0,0472	0,3398	0,9683	0,918	0,0518	
22	1,242	0,606	0,0812	0,5248	1,5426	0,890	0,0654	

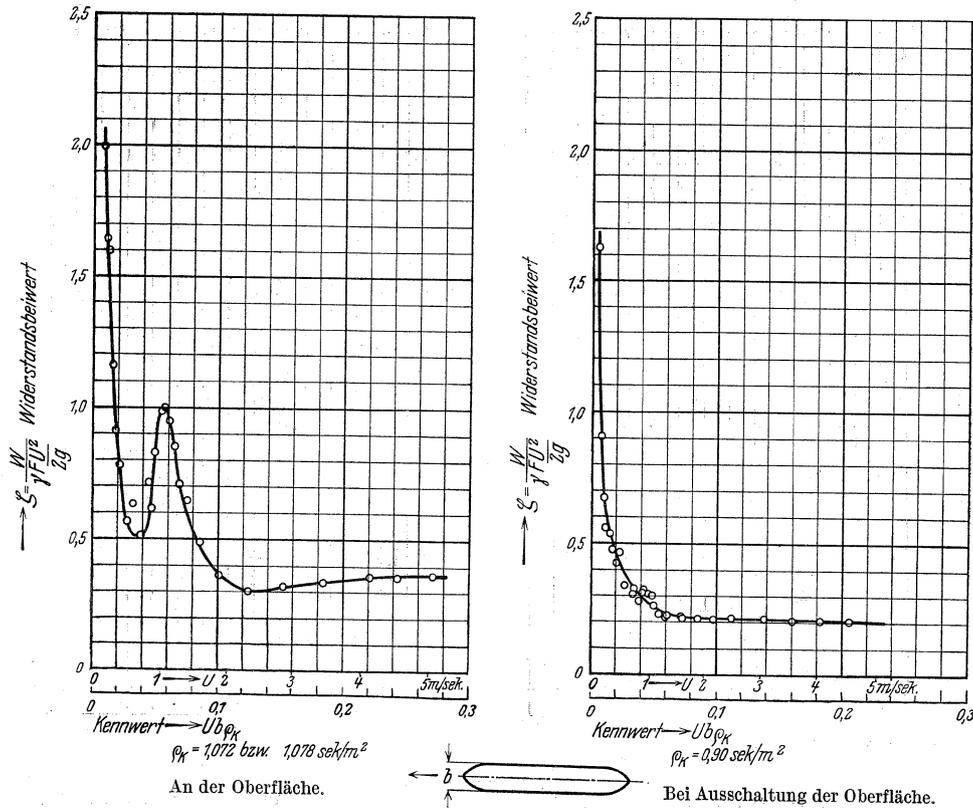


Abb. 55. Widerstandsbeiwert des Pfeilerkörpers V klein.

Pfeiler Nr. V. Tabelle 24. Pfeilerwiderstand bei freier Oberfläche.  
Tiefe  $t = 150 \text{ mm}$ , Breite  $b = 50 \text{ mm}$ , Länge =  $325,2 \text{ mm}$ .

Fahrt Nr.	U Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W'_0$ Abschluß- blech kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W'_0$ kg	$U^2$ (m/sek) <sup>2</sup>	$\zeta = \frac{2g}{1000 \cdot b \cdot t} \cdot \frac{W}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_k$	Bemer- kungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = $15,8^\circ \text{ C}$								
1	0,160	0,021	0,00148	0,0195	0,0256	1,993	0,0086	Beiwert $\rho_k = 1,072 \text{ sek/m}^2$
2	0,217	0,032	0,00239	0,0296	0,0470	1,644	0,0116	
3	0,252	0,042	0,00311	0,0388	0,0635	1,599	0,0135	
4	0,308	0,046	0,00410	0,0419	0,0949	1,155	0,0165	
5	0,370	0,053	0,00544	0,0476	0,1369	0,910	0,0198	
6	0,424	0,060	0,00664	0,0534	0,1798	0,781	0,0227	
7	0,526	0,069	0,00933	0,0596	0,2767	0,564	0,0282	
8	0,615	0,104	0,01220	0,0918	0,3782	0,634	0,0330	
9	0,740	0,125	0,01735	0,1076	0,5476	0,514	0,0397	
10	0,894	0,221	0,0335	0,1875	0,7992	0,614	0,0479	
11	1,094	0,480	0,0620	0,4180	1,1968	1,000	0,0586	
12	1,305	0,558	0,0900	0,4680	1,7030	0,709	0,0699	
13	1,606	0,618	0,1360	0,4820	2,5792	0,489	0,0865	
14	1,901	0,692	0,1880	0,5040	3,6138	0,365	0,1019	
15	2,326	0,901	0,2804	0,6206	5,4103	0,300	0,1247	
16	2,857	1,419	0,4196	0,9994	8,1624	0,320	0,1531	
17	3,448	2,132	0,6056	1,5264	11,8887	0,336	0,1848	
18	4,132	3,195	0,8620	2,3330	17,0734	0,357	0,2215	
19	4,545	3,858	1,0372	2,8208	20,6570	0,356	0,2436	
20	5,053	4,878	12,888	3,5892	25,5329	0,365	0,2714	
Temperatur = $16,0^\circ \text{ C}$								
21	0,840	0,217	0,02425	0,1927	0,7056	0,715	0,0453	Beiwert $\rho_k = 1,078 \text{ sek/m}^2$
22	1,042	0,445	0,0352	0,4098	1,0858	0,987	0,0562	
23	1,235	0,577	0,0804	0,4966	1,5252	0,851	0,0666	
24	0,928	0,312	0,0400	0,2720	0,8612	0,827	0,0500	
25	1,142	0,542	0,0684	0,4736	1,3042	0,950	0,0616	
26	1,408	0,594	0,1044	0,4896	1,9825	0,646	0,0759	

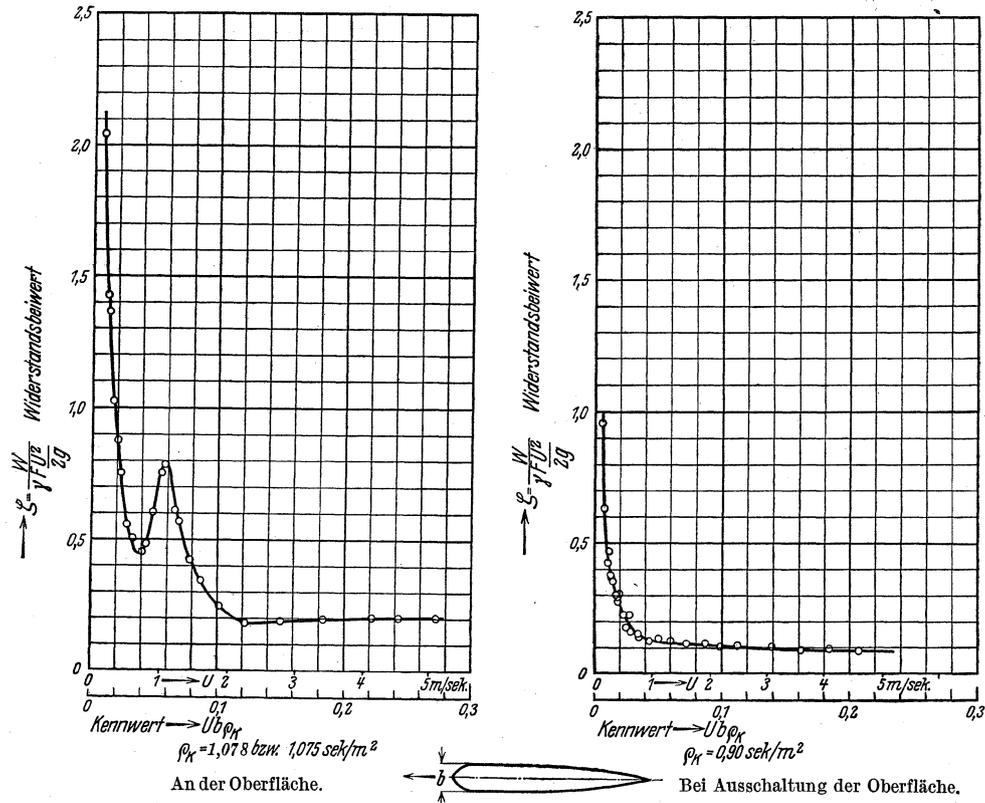


Abb. 56. Widerstandsbeiwert des Pfeilerkörpers VI a.

Pfeiler Nr. VI a.

Tabelle 25. Pfeilerwiderstand bei freier Oberfläche.

Tiefe  $t = 150$  mm, Breite  $b = 50$  mm, Länge = 386,7 mm.

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W'_0$ Abschluß- blech kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W'_0$ kg	$U^2$ (m/sek) <sup>2</sup>	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot t \cdot U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_x$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 16,0° C						Beiwert $\rho_x = 1,078 \text{ sek/m}^2$		
1	0,158	0,021	0,00145	0,0195	0,0250	2,042	0,0085	
2	0,227	0,028	0,00257	0,0254	0,0515	1,291	0,0122	
3	0,248	0,036	0,00292	0,0321	0,0615	1,365	0,0134	
4	0,322	0,045	0,00440	0,0406	0,1037	1,025	0,0174	
5	0,372	0,052	0,00549	0,0465	0,1384	0,879	0,0202	
6	0,435	0,061	0,00690	0,0541	0,1892	0,752	0,0234	
7	0,526	0,068	0,00936	0,0586	0,2767	0,555	0,0283	
8	0,622	0,085	0,01249	0,0725	0,3869	0,505	0,0335	
9	0,760	0,118	0,01840	0,0996	0,5776	0,451	0,0410	
10	0,903	0,223	0,03600	0,1870	0,8154	0,601	0,0487	
11	1,079	0,409	0,06000	0,3490	1,1642	0,784	0,0582	
12	1,298	0,455	0,08840	0,3661	1,6848	0,569	0,0700	
13	1,631	0,492	0,14000	0,3520	2,6602	0,346	0,0879	
14	1,882	0,522	0,18480	0,3378	3,5419	0,249	0,1015	
15	2,270	0,624	0,26680	0,3567	5,1529	0,181	0,1224	
16	2,785	0,961	0,40000	0,5610	7,7562	0,189	0,1501	
17	3,400	1,465	0,58880	0,8762	11,5600	0,198	0,1833	
18	4,117	2,159	0,85480	1,3042	16,9497	0,201	0,2219	
19	4,513	2,583	1,02600	1,5570	20,3672	0,200	0,2432	
20	5,055	3,242	1,28800	1,9540	25,5530	0,200	0,2724	
Temperatur = 15,9° C						Beiwert $\rho_x = 1,075 \text{ sek/m}^2$		
21	0,818	0,146	0,0222	0,1238	0,6691	0,484	0,0440	
22	1,043	0,368	0,0552	0,3128	1,0878	0,752	0,0561	
23	1,230	0,434	0,0800	0,3540	1,5129	0,610	0,0661	
24	1,455	0,454	0,1120	0,3420	2,1170	0,423	0,0782	

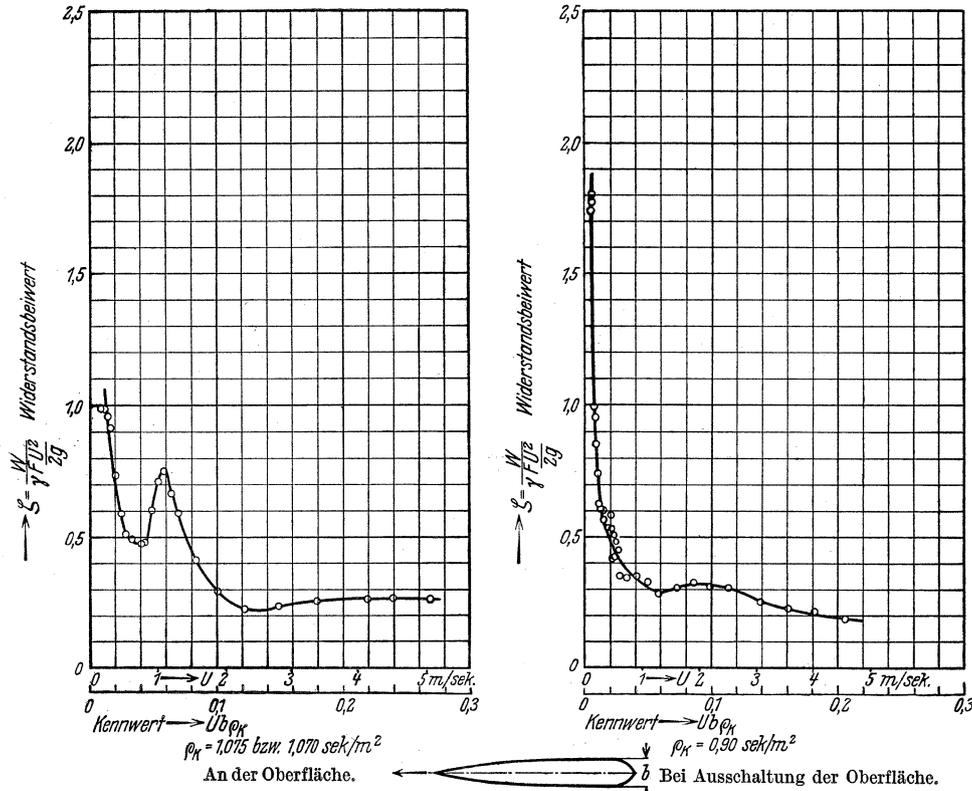


Abb. 57. Widerstandsbeiwert des Pfeilerkörpers VIb.

Pfeiler Nr. VIb. Tabelle 26. Pfeilerwiderstand bei freier Oberfläche.

Tiefe  $t = 150 \text{ mm}$ , Breite  $b = 50 \text{ mm}$ , Länge =  $386,7 \text{ mm}$ .

Fahrt Nr.	U Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W'_0$ Abschluß- blech kg	W Pfeiler allein $= W_G - W'_0$ kg	$U^2$ (m/sek) <sup>2</sup>	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot t \cdot U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_k$	Bemer- kungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = $15,9^\circ \text{ C}$								
1	0,170	0,0125	0,00160	0,0109	0,0289	Beiwert $\rho_k = 1,075 \text{ sek/m}^2$		
2	0,227	0,022	0,00257	0,0194	0,0515	0,987	0,0091	
3	0,270	0,030	0,00336	0,0266	0,0729	0,955	0,0145	
4	0,315	0,039	0,00425	0,0347	0,0992	0,915	0,0169	
5	0,378	0,046	0,00560	0,0404	0,1429	0,740	0,0203	
6	0,453	0,054	0,00738	0,0466	0,2052	0,592	0,0244	
7	0,528	0,063	0,00937	0,0546	0,2788	0,511	0,0284	
8	0,625	0,086	0,01255	0,0734	0,3906	0,492	0,0336	
Temperatur = $15,7^\circ \text{ C}$								
9	0,753	0,121	0,01800	0,1030	0,5670	Beiwert $\rho_k = 1,070 \text{ sek/m}^2$		
10	0,911	0,228	0,0372	0,1908	0,8299	0,475	0,0403	
11	1,113	0,420	0,0640	0,3560	1,2388	0,602	0,0487	
12	1,320	0,487	0,0920	0,3950	1,7424	0,752	0,0596	
13	1,580	0,518	0,1312	0,3868	2,4964	0,593	0,0706	
14	1,881	0,579	0,1844	0,3946	3,5382	0,413	0,0845	
15	2,282	0,710	0,2692	0,4408	5,2075	0,291	0,1006	
16	2,786	1,100	0,4000	0,7000	7,7618	0,221	0,1221	
17	3,363	1,668	0,5772	1,0908	11,3098	0,235	0,1490	
18	4,114	2,535	0,8540	1,6810	16,9250	0,254	0,1799	
19	4,480	3,050	1,0100	2,0400	20,0704	0,260	0,2200	
20	4,500	3,026	1,0208	2,0052	20,2500	0,267	0,2396	
21	5,024	3,810	1,2740	2,5360	25,2406	0,262	0,2407	
22	0,816	0,144	0,0220	0,1220	0,6659	0,262	0,2687	
23	1,022	0,337	0,0528	0,2842	1,0445	0,479	0,0436	
24	1,220	0,445	0,0784	0,3666	1,4884	0,712	0,0547	
						0,669	0,0653	

in der naturgroßen Ausführung, bei Brückenpfeilern, den Widerstandsbeiwert und damit den Brückenstau nicht unwesentlich beeinflussen können. Bereits aus diesem Grunde (neben anderen) „kann es keine für alle Verhältnisse gleichmäßig gültige einfache Stauformel geben<sup>121</sup>“. Allerdings entspricht die Fortschrittsgeschwindigkeit der Wellen, die bei den Modellversuchen auftreten, den Abmessungen der Schleppversuchsrinne und ergibt, auf die Natur umgerechnet, nicht die Fortschrittsgeschwindigkeit der Wellen, die in dem Flußbett entstehen; denn letztere entspricht der Flußbettiefe, d. h. im Modell der Tauchtiefe des unteren Abschlußbleches. Es sind aber auch keinerlei Schlüsse gezogen worden, in denen diese — modellunähnliche — Größe eine Rolle spielen würde.

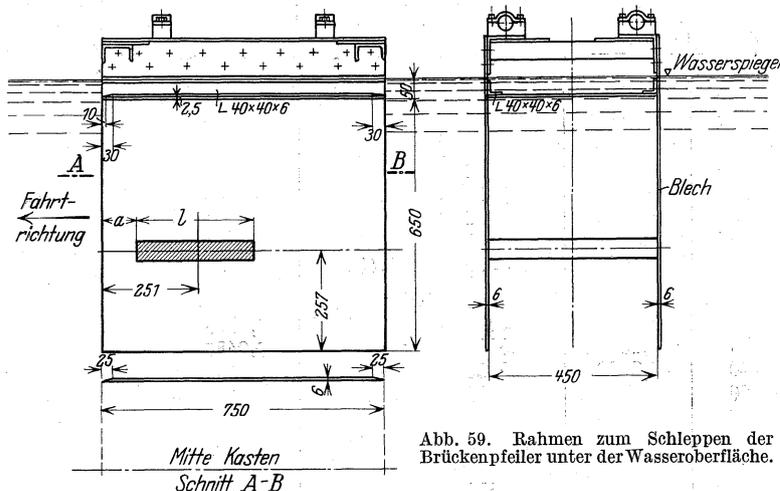
#### 4. Diskussion der Widerstandsbeiwerte.

Das zunächst sehr steile Fallen des Widerstandsbeiwertes im Gebiet sehr kleiner Kennzahlen, wie es sich bei allen untersuchten Pfeilerformen zeigt, tritt bei allen Widerstandsproblemen (Zylinder, vgl. Abb. 15, Kugel usw.) auf; man ist hier noch im Gebiet laminarer Vorgänge oder doch im Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Bewegung. Für die praktische Stauberechnung haben diese hohen Werte keine Bedeutung<sup>122</sup>. Bei den größeren Geschwindigkeiten ( $U=0,4$  bis  $4,0$  m/sek) sind die Messungen selbst wohl einwandfrei; die auftretenden Schwankungen sind wahrscheinlich Oberflächenerscheinungen zuzuschreiben, die von der absoluten Größe der gewählten Anordnung abhängen und deren Übertragbarkeit jeweils geprüft werden muß. Aus den Ergebnissen dieser ersten Versuche sind bereits wertvolle Schlüsse zu ziehen (s. unten). Um jedoch Unterlagen für Stauuntersuchungen abzugeben, ist eine Ausdehnung der Messungen auf größere Kennzahlen  $U \cdot b \cdot \rho_K$  erwünscht und der Einfluß verschiedener Tauchung zu untersuchen. Diese Ergänzungen sind in dem weiteren Versuchsprogramm (s. u. unter F) vorgesehen.

Soweit sich ein Vergleich der Pfeilerformen untereinander jetzt schon mit Sicherheit ziehen läßt, ist dies in Abschnitt E gemeinsam mit den unter C geschilderten Widerstandsmessungen bei ausgeschalteter Oberfläche geschehen.

#### C. Widerstandsmessungen an Zylindern mit brückenpfeilerähnlichem Querschnitt bei vollkommener Tauchung.

Um den Einfluß der Oberflächenerscheinungen zunächst auszuschalten und dadurch reinere



Erkenntnisse des Formeinflusses zu gewinnen, sind Widerstandsmessungen bei vollkommener Tauchung durchgeführt worden. Die nachstehend beschriebenen Widerstandsmessungen entsprechen den in Teil IB mitgeteilten Messungen an Kreiszyklindern. Wie dort lagen die Pfeiler horizontal und wurden quer zur Längsachse geschleppt. Zur Ausschaltung der Wirkung des Wasserspiegels und der Endumströmung wurde derselbe

dort näher beschriebene U-förmige Halbrahmen benutzt, in den die Pfeiler gemäß Abb. 59 eingebaut waren. Das Maß  $a$  betrug bei den Versuchen:

<sup>121</sup> Bemerkung von Herrn Oberbaurat Dr.-Ing. h. c. Prof. Krey.

<sup>122</sup> Außerdem sind die ermittelten Werte der Widerstandsbeiwerte bei sehr kleinen Geschwindigkeiten wegen der Kleinheit der Kräfte weniger einwandfrei.

bei Pfeiler Nr.:	<i>I</i>	<i>IIa</i>	<i>IIb</i>	<i>III</i>	<i>IVa</i>	<i>IVb</i>	<i>V</i>	<i>VIa</i>	<i>VIb</i>	<i>V'</i>
<i>a</i> in mm:	211	209	207	205	205	204	199	202	132	51,5

Die Decke des Rahmens lag bei allen Fahrten 50 mm unter dem ruhenden Wasserspiegel.

Abb. 60 zeigt im Lichtbild die untersuchten Körper *I* bis *VI* und außerdem den unter *D* untersuchten Körpern *V'*, d. h. *V* in genau doppelt so großer (aber gleichfalls 45 cm langer) Ausführung.

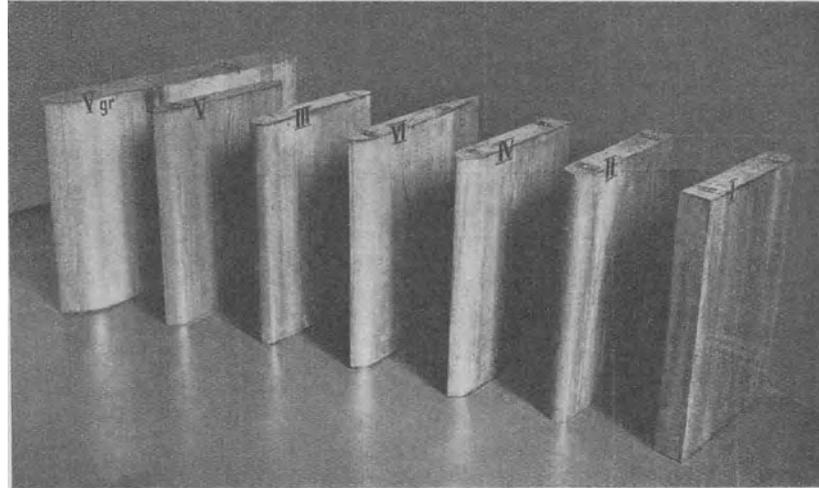


Abb. 60. Untersuchte Pfeilerformen.

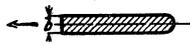
Die Meßergebnisse sind in den Tabellen 27 bis 35 mitgeteilt und auf den rechten Seiten der Abb. 49 bis 57 zeichnerisch über  $U \cdot b \cdot \varrho_K$  in gewöhnlichem Maßstabe aufgetragen worden.

Ein Vergleich mit den Messungen aus Abschnitt B zeigt, daß naturgemäß die Buckel in der Widerstandskurve, die von den Oberflächenwellen herrühren, verschwunden sind.

Pfeiler Nr. I. Tabelle 27. Pfeilerwiderstand bei Ausschaltung der Oberfläche.  
 Pfeilerhöhe  $H = 450$  mm, Breite  $b = 50$  mm, Länge = 300 mm.

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_a$ Widerstand gemessen kg	$W_0$ Rahmenwiderstand kg	$W$ Pfeiler allein $= W_a - W_0$ kg	$\frac{U^2}{2g}$ m	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot H} \cdot \frac{2g}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \varrho_K$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 9,2° C						Beiwert $\varrho_K = 0,90$ sek/m <sup>2</sup>		
1	0,0792	0,084	0,062	0,022	0,000320	3,060	0,00356	
2	0,125	0,100	0,071	0,029	0,000794	1,623	0,00562	
3	0,172	0,112	0,080	0,032	0,00151	0,941	0,00776	
4	0,214	0,135	0,086	0,049	0,00233	0,935	0,00962	
5	0,288	0,179	0,095	0,084	0,00424	0,881	0,01298	
6	0,344	0,237	0,120	0,117	0,00602	0,865	0,01550	
7	0,396	0,310	0,144	0,166	0,00802	0,919	0,01784	
8	0,462	0,405	0,180	0,225	0,01090	0,919	0,02080	
9	0,524	0,489	0,215	0,274	0,0140	0,870	0,02358	
10	0,632	0,677	0,280	0,397	0,0204	0,867	0,02845	
11	0,780	1,078	0,375	0,703	0,0310	1,006	0,03510	
12	0,928	1,450	0,490	0,960	0,0439	0,971	0,04180	
13	1,136	2,158	0,725	1,433	0,0658	0,968	0,05120	
14	1,340	2,930	1,090	1,840	0,0915	0,894	0,06030	
15	1,598	4,257	1,530	2,727	0,1300	0,930	0,07190	
16	1,916	6,135	2,160	3,975	0,1870	0,942	0,08620	
17	2,191	7,978	2,790	5,188	0,2450	0,943	0,09860	
18	2,515	10,265	3,620	6,645	0,3230	0,915	0,11320	
19	3,061	15,100	5,340	9,760	0,4780	0,909	0,13780	
20	3,059	14,947	5,320	9,627	0,4770	0,897	0,13760	
21	3,578	20,034	7,240	12,794	0,6530	0,871	0,16100	
22	4,051	25,638	9,220	16,418	0,8360	0,871	0,18250	
23	4,039	25,814	9,180	16,634	0,8320	0,889	0,18180	
24	4,590	32,995	11,780	21,215	1,0740	0,878	0,20660	
25	0,227	0,142	0,087	0,055	0,00263	0,931	0,01020	
26	0,415	0,328	0,155	0,173	0,00877	0,877	0,01870	
27	0,478	0,423	0,188	0,235	0,01170	0,896	0,02150	

Pfeiler Nr. IIa. Tabelle 28. Pfeilerwiderstand bei Ausschaltung der Oberfläche.



Pfeilerhöhe  $H = 450$  mm, Breite  $b = 50$  mm, Länge = 305,4 mm.

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W_0$ Rahmen- widerstand kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W_0$ kg	$\frac{U^2}{2g}$ m	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot H} \cdot \frac{2g}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_K$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 9,2° C						Beiwert $\rho_K = 0,90$ sek/m <sup>2</sup>		
1	0,0911	0,079	0,065	0,014	0,000423	1,470	0,00411	
2	0,1410	0,104	0,075	0,029	0,00102	1,264	0,00636	
3	0,1830	0,120	0,082	0,038	0,00171	0,990	0,00823	
4	0,2380	0,153	0,089	0,064	0,00289	0,984	0,0107	
5	0,2900	0,179	0,095	0,084	0,00430	0,869	0,0131	
6	0,3530	0,243	0,126	0,117	0,00635	0,819	0,0159	
7	0,4080	0,300	0,150	0,150	0,00850	0,784	0,0184	
8	0,4630	0,409	0,182	0,227	0,01093	0,923	0,0208	
9	0,5400	0,538	0,225	0,313	0,01490	0,937	0,0243	
10	0,6340	0,689	0,280	0,409	0,02050	0,888	0,0285	
11	0,7820	1,068	0,375	0,693	0,03120	0,987	0,0352	
12	0,9350	1,365	0,500	0,865	0,04460	0,863	0,0421	
13	1,1440	2,108	0,730	1,378	0,06660	0,919	0,0515	
14	1,3430	2,839	1,090	1,749	0,09190	0,846	0,0605	
15	1,6380	4,354	1,600	2,754	0,13680	0,894	0,0737	
16	1,9300	5,808	2,190	3,618	0,19000	0,847	0,0869	
17	2,230	7,762	2,890	4,872	0,25400	0,855	0,1004	
18	2,5520	10,040	3,730	6,310	0,33200	0,845	0,1149	
19	3,0600	14,298	5,330	8,968	0,47700	0,835	0,1378	
20	3,5800	19,736	7,230	12,506	0,65300	0,851	0,1611	
21	4,0600	24,968	9,240	15,728	0,84000	0,832	0,1828	
22	4,6300	32,165	12,000	20,165	1,09300	0,820	0,2084	
23	4,5900	31,840	11,780	20,060	1,07400	0,830	0,2065	
24	0,0816	0,079	0,063	0,016	0,000339	2,094	0,00367	
25	0,2610	0,158	0,092	0,066	0,00348	0,842	0,01130	
26	0,4460	0,337	0,170	0,167	0,01020	0,732	0,02007	
27	0,4930	0,417	0,198	0,219	0,01240	0,786	0,02220	

Pfeiler Nr. IIb. Tabelle 29. Pfeilerwiderstand bei Ausschaltung der Oberfläche.



Pfeilerhöhe  $H = 450$  mm, Breite  $b = 50$  mm, Länge = 305,4 mm.

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W_0$ Rahmen- widerstand kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W_0$ kg	$\frac{U^2}{2g}$ m	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot H} \cdot \frac{2g}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_K$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 9,2° C						Beiwert $\rho_K = 0,90$ sek/m <sup>2</sup>		
1	0,084	0,062	0,045	0,017	0,00036	2,100	0,00378	
2	0,130	0,076	0,052	0,024	0,00086	1,243	0,00585	
3	0,183	0,093	0,057	0,036	0,00170	0,942	0,00823	
4	0,225	0,107	0,062	0,045	0,00259	0,773	0,01013	
5	0,295	0,140	0,067	0,073	0,00443	0,733	0,01327	
6	0,345	0,194	0,071	0,123	0,00605	0,905	0,01550	
7	0,400	0,239	0,096	0,143	0,00815	0,782	0,01800	
8	0,460	0,318	0,125	0,193	0,01080	0,795	0,02070	
9	0,523	0,420	0,160	0,260	0,01400	0,830	0,02360	
10	0,619	0,553	0,225	0,328	0,01950	0,748	0,02790	
11	0,763	0,793	0,335	0,458	0,02970	0,686	0,03430	
12	0,923	1,145	0,490	0,655	0,04340	0,671	0,04150	
13	1,135	1,690	0,720	0,970	0,06570	0,656	0,05110	
14	1,325	2,400	1,070	1,330	0,08950	0,661	0,05960	
15	1,475	2,956	1,320	1,636	0,11090	0,656	0,06630	
16	1,945	5,092	2,220	2,872	0,19280	0,663	0,08740	
17	2,270	6,664	2,980	3,684	0,26270	0,625	0,10200	

Tabelle 29 (Fortsetzung).

Fahrt-Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W_0$ Rahmen- widerstand kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W_0$ kg	$\frac{U^2}{2g}$ m	$\zeta =$ $\frac{W}{1000 \cdot b \cdot H} \cdot \frac{2g}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_K$	Bemer- kungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 9,2° C						Beiwert $\rho_K = 0,90 \text{ sek/m}^2$		
18	2,211	6,526	2,840	3,686	0,24920	0,659	0,09940	
19	2,530	8,340	3,660	4,680	0,32630	0,639	0,11400	
20	2,531	8,246	3,660	4,586	0,32650	0,625	0,11400	
21	3,090	12,666	5,430	7,236	0,48660	0,661	0,13900	
22	3,090	12,238	5,430	6,808	0,48660	0,622	0,13900	
23	3,570	16,212	7,220	8,992	0,64970	0,616	0,16100	
24	4,070	21,680	9,320	12,360	0,84430	0,650	0,18300	
25	4,560	26,566	11,640	14,926	1,06000	0,626	0,20500	
26	4,590	27,536	11,790	15,746	1,07400	0,652	0,20700	
27	0,097	0,068	0,047	0,021	0,00048	1,940	0,00437	
28	0,147	0,081	0,054	0,027	0,00110	1,092	0,00661	
29	0,555	0,459	0,180	0,279	0,01570	0,790	0,0250	
30	0,239	0,115	0,063	0,052	0,00290	0,798	0,01076	
31	0,298	0,155	0,067	0,088	0,00453	0,865	0,01340	
32	0,353	0,204	0,075	0,129	0,00635	0,904	0,01590	
33	0,421	0,261	0,106	0,155	0,00903	0,763	0,01896	
34	0,482	0,354	0,136	0,218	0,01185	0,815	0,02170	

Tabelle 30. Pfeilerwiderstand bei Ausschaltung der Oberfläche.

Pfeiler Nr. III.

 Pfeilerhöhe  $H = 450 \text{ mm}$ , Breite  $b = 50 \text{ mm}$ , Länge = 310,8 mm.

Fahrt-Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W_0$ Rahmen- widerstand kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W_0$ kg	$\frac{U^2}{2g}$ m	$\zeta =$ $\frac{W}{1000 \cdot b \cdot H} \cdot \frac{2g}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_K$	Bemer- kungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 9,2° C						Beiwert $\rho_K = 0,90 \text{ sek/m}^2$		
1	0,0618	0,058	0,040	0,018	0,000195	4,100	0,00278	
2	0,123	0,072	0,051	0,021	0,000780	1,197	0,00554	
3	0,172	0,082	0,057	0,025	0,00150	0,741	0,00774	
4	0,216	0,100	0,061	0,039	0,00238	0,729	0,00971	
5	0,275	0,127	0,066	0,061	0,00385	0,704	0,01238	
6	0,345	0,165	0,073	0,092	0,00606	0,675	0,01552	
7	0,394	0,207	0,094	0,113	0,00790	0,636	0,01773	
8	0,450	0,284	0,120	0,164	0,01030	0,706	0,02025	
9	0,513	0,382	0,156	0,226	0,01340	0,750	0,02310	
10	0,601	0,482	0,216	0,266	0,01840	0,643	0,02710	
11	0,774	0,685	0,348	0,337	0,03060	0,491	0,03480	
12	0,903	0,939	0,475	0,464	0,04160	0,495	0,04060	
13	1,123	1,315	0,720	0,595	0,06430	0,411	0,05060	
14	1,333	1,862	1,040	0,822	0,09060	0,404	0,06000	
15	1,630	2,579	1,660	0,937	0,13540	0,308	0,07340	
16	1,928	3,580	2,190	1,390	0,18940	0,327	0,08660	
17	2,191	4,480	2,790	1,690	0,24460	0,307	0,09850	
18	2,559	5,898	3,740	2,158	0,33380	0,287	0,11510	
19	3,100	8,700	5,460	3,240	0,48970	0,294	0,13940	
20	3,622	11,670	7,440	4,230	0,66860	0,281	0,16290	
21	4,108	14,848	9,490	5,358	0,86000	0,277	0,18500	
22	4,554	18,258	11,600	6,658	1,05700	0,275	0,20500	

Pfeiler Nr. IV a. Tabelle 31. Pfeilerwiderstand bei Ausschaltung der Oberfläche.



Pfeilerhöhe  $H = 450$  mm, Breite  $b = 50$  mm, Länge = 312,6 mm.

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W_0$ Rahmen- widerstand kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W_0$ kg	$\frac{U^2}{2g}$ m	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot H} \cdot \frac{2g}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_K$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 9,2° C						Beiwert $\rho_K = 0,90$ sek/m <sup>2</sup>		
1	0,0586	0,064	0,040	0,024	0,000175	6,090	0,00264	
2	0,119	0,077	0,050	0,027	0,000730	1,643	0,00536	
3	0,170	0,092	0,057	0,035	0,00148	1,051	0,00769	
4	0,223	0,110	0,062	0,048	0,00254	0,841	0,01004	
5	0,284	0,151	0,067	0,084	0,00410	0,910	0,01279	
6	0,344	0,204	0,073	0,131	0,00603	0,966	0,01549	
7	0,412	0,270	0,102	0,168	0,00865	0,863	0,01857	
8	0,458	0,364	0,125	0,239	0,01070	0,992	0,02060	
9	0,525	0,457	0,162	0,295	0,01410	0,933	0,02360	
10	0,614	0,619	0,225	0,394	0,01920	0,913	0,02760	
11	0,778	0,941	0,350	0,591	0,03080	0,851	0,03500	
12	0,926	1,382	0,500	0,882	0,04370	0,897	0,04170	
13	1,120	1,930	0,700	1,230	0,06390	0,856	0,05400	
14	1,330	2,714	1,035	1,679	0,09010	0,828	0,05910	
15	1,620	4,038	1,580	2,458	0,13380	0,818	0,07290	
16	1,925	5,680	2,180	3,500	0,18880	0,824	0,08650	
17	2,190	7,392	2,780	4,612	0,24450	0,838	0,09250	
18	2,510	9,548	3,600	5,948	0,32100	0,824	0,11300	
19	3,080	14,242	5,390	8,852	0,48350	0,813	0,13860	
20	3,580	19,198	7,260	11,938	0,65330	0,813	0,16100	
21	4,090	24,906	9,420	15,486	0,85250	0,816	0,18400	
22	4,620	32,402	11,940	20,462	1,08800	0,835	0,20800	

Pfeiler Nr. IV b. Tabelle 32. Pfeilerwiderstand bei Ausschaltung der Oberfläche.



Höhe  $H = 450$  mm, Breite  $b = 50$  mm, Länge = 312,6 mm.

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W_0$ Rahmen- widerstand kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W_0$ kg	$\frac{U^2}{2g}$ m	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot H} \cdot \frac{2g}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_K$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 9,2° C						Beiwert $\rho_K = 0,90$ sek/m <sup>2</sup>		
1	0,087	0,078	0,045	0,033	0,00038	3,860	0,00392	
2	0,144	0,084	0,054	0,030	0,00104	1,282	0,00648	
3	0,206	0,100	0,060	0,040	0,00216	0,823	0,00926	
4	0,249	0,120	0,064	0,056	0,00315	0,790	0,01120	
5	1,305	2,254	1,030	1,224	0,08680	0,627	0,05870	
6	0,351	0,199	0,076	0,123	0,00626	0,873	0,01580	
7	0,408	0,243	0,100	0,143	0,00850	0,747	0,01840	
8	0,472	0,315	0,132	0,183	0,01135	0,830	0,02120	
9	0,524	0,388	0,162	0,226	0,01400	0,749	0,02360	
10	0,627	0,558	0,233	0,325	0,02050	0,704	0,02830	
11	0,778	0,834	0,350	0,484	0,03085	0,697	0,03500	
12	0,931	1,146	0,500	0,646	0,04420	0,650	0,04190	
13	1,365	2,551	1,140	1,411	0,09490	0,611	0,06140	
14	1,343	2,335	1,110	1,225	0,09190	0,593	0,06040	
15	1,634	3,590	1,600	1,990	0,13610	0,650	0,07350	
16	1,935	4,950	2,200	2,750	0,19080	0,641	0,08700	
17	2,220	6,320	2,860	3,460	0,25120	0,612	0,10000	
18	2,540	8,489	3,690	4,799	0,32870	0,649	0,11430	
19	3,100	12,178	5,460	6,718	0,48970	0,609	0,13950	
20	3,570	16,988	7,220	9,768	0,64970	0,668	0,16080	
21	3,600	16,078	7,340	8,738	0,66050	0,589	0,16220	
22	4,100	22,696	9,460	13,236	0,85660	0,684	0,18490	
23	4,670	27,496	12,200	15,296	1,11050	0,612	0,21050	
24	0,332	0,368	0,070	0,298	0,00563	0,744	0,01493	
25	0,398	0,533	0,096	0,437	0,00807	0,761	0,01791	

Pfeiler Nr. V. Tabelle 33. Pfeilerwiderstand bei Ausschaltung der Oberfläche.  
 Pfeilerhöhe  $H = 450$  mm, Breite  $b = 50$  mm, Länge = 325,2 mm.



Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_g$ Widerstand gemessen kg	$W_0$ Rahmen- widerstand kg	$W$ Pfeiler allein $= W - W_0$ kg	$\frac{U^2}{2g}$ m	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot H} \cdot \frac{2g}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \varrho_K$	Bemer- kungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 9,2° C						Beiwert $\varrho_K = 0,90$ sek/m <sup>2</sup>		
1	0,052	0,050	0,0380	0,012	0,000132	4,040	0,00235	
2	0,131	0,084	0,0520	0,032	0,000875	1,625	0,00590	
3	0,181	0,092	0,0580	0,034	0,001670	0,905	0,00814	
4	0,228	0,102	0,0620	0,040	0,00265	0,671	0,01026	
5	0,274	0,114	0,0660	0,048	0,00383	0,557	0,01233	
6	0,335	0,139	0,0700	0,069	0,00573	0,535	0,01508	
7	0,388	0,173	0,0910	0,082	0,00767	0,475	0,01750	
8	0,449	0,219	0,1200	0,099	0,01030	0,428	0,02020	
9	0,513	0,298	0,1570	0,141	0,01340	0,467	0,02310	
10	0,613	0,370	0,2240	0,146	0,01920	0,339	0,02760	
11	0,774	0,559	0,3500	0,209	0,03060	0,304	0,03480	
12	0,920	0,794	0,4900	0,304	0,04310	0,313	0,04140	
13	1,124	1,090	0,7100	0,380	0,06440	0,262	0,05060	
14	1,325	1,500	1,0700	0,430	0,08950	0,214	0,05960	
15	1,610	2,202	1,5600	0,642	0,13210	0,216	0,07240	
16	1,893	2,996	2,1200	0,876	0,18260	0,213	0,08510	
17	2,170	3,890	2,7400	1,150	0,24000	0,213	0,09750	
18	2,490	5,088	3,5600	1,528	0,31600	0,215	0,11200	
19	3,070	7,652	5,3600	2,292	0,48030	0,212	0,13810	
20	3,560	10,216	7,1900	3,026	0,64600	0,208	0,16030	
21	4,050	13,112	9,2200	3,892	0,83600	0,207	0,18250	
22	4,040	13,064	9,2000	3,864	0,83200	0,206	0,18190	
23	4,570	16,526	11,7000	4,826	1,06450	0,202	0,20600	
24	0,791	0,598	0,3620	0,236	0,03190	0,329	0,03560	
25	0,863	0,680	0,4350	0,245	0,03800	0,287	0,03880	
26	0,895	0,762	0,4650	0,297	0,04080	0,324	0,04030	
27	1,024	0,986	0,6250	0,361	0,05340	0,301	0,04610	
28	1,100	1,098	0,685	0,413	0,06170	0,298	0,04960	
29	1,225	1,302	0,910	0,392	0,07650	0,228	0,05520	
30	1,346	1,562	1,100	0,462	0,09240	0,222	0,06060	
31	1,624	2,246	1,580	0,666	0,13440	0,220	0,07310	

Pfeiler Nr. VIa. Tabelle 34. Pfeilerwiderstand bei Ausschaltung der Oberfläche.  
 Pfeilerhöhe  $H = 450$  mm, Breite  $b = 50$  mm, Länge = 386,7 mm.



Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_g$ Widerstand gemessen kg	$W_0$ Rahmen- widerstand kg	$W$ Pfeiler allein $= W_g - W_0$ kg	$\frac{U^2}{2g}$ m	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot H} \cdot \frac{2g}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \varrho_K$	Bemer- kungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 9,2° C						Beiwert $\varrho_K = 0,90$ sek/m <sup>2</sup>		
1	0,0696	0,062	0,042	0,020	0,000247	3,600	0,00313	
2	0,128	0,069	0,051	0,018	0,000835	0,958	0,00576	
3	0,175	0,079	0,057	0,022	0,00155	0,631	0,00785	
4	0,235	0,090	0,063	0,027	0,00282	0,426	0,01058	
5	0,291	0,103	0,067	0,036	0,00433	0,370	0,01310	
6	0,340	0,117	0,070	0,047	0,00590	0,354	0,01530	
7	0,404	0,154	0,099	0,055	0,00830	0,295	0,01820	
8	0,443	0,187	0,118	0,069	0,01000	0,307	0,01995	
9	0,529	0,236	0,164	0,072	0,01425	0,225	0,02380	
10	0,640	0,317	0,242	0,075	0,02090	0,159	0,02880	
11	0,776	0,446	0,350	0,096	0,03070	0,139	0,03490	
12	0,918	0,606	0,485	0,121	0,04295	0,126	0,04130	
13	1,119	0,889	0,700	0,189	0,06380	0,132	0,05040	
14	1,334	1,335	1,080	0,255	0,09070	0,125	0,06000	
15	1,616	1,912	1,580	0,332	0,13310	0,111	0,07280	

Fortsetzung umstehend

Tabelle 34 (Fortsetzung).

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W_0$ Rahmen- widerstand kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W_0$ kg	$\frac{U^2}{2g}$ m	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot H} \cdot \frac{2g}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_x$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 9,2° C						Beiwert $\rho_x = 0,90 \text{ sek/m}^2$		
17	1,926	2,654	2,180	0,474	0,18910	0,112	0,08670	
18	2,190	3,354	2,790	0,564	0,24450	0,103	0,09850	
19	2,507	4,390	3,600	0,790	0,32030	0,110	0,11250	
20	3,071	6,486	5,360	1,126	0,48060	0,104	0,13840	
21	3,600	8,676	7,340	1,336	0,66050	0,0900	0,16200	
22	4,090	11,228	9,420	1,808	0,85250	0,0942	0,18400	
23	4,600	14,020	11,850	2,170	1,08000	0,0893	0,20700	
24	0,227	0,090	0,062	0,028	0,00263	0,470	0,01022	
25	0,293	0,104	0,067	0,037	0,00437	0,376	0,01320	
26	0,366	0,128	0,082	0,046	0,00683	0,300	0,01650	
27	0,411	0,156	0,103	0,053	0,00860	0,274	0,01850	
28	0,475	0,194	0,134	0,060	0,01150	0,232	0,02340	
29	0,547	0,235	0,175	0,060	0,01525	0,175	0,02460	
30	0,616	0,322	0,225	0,097	0,01935	0,223	0,02770	

Pfeiler Nr. VI<sub>b</sub>. Tabelle 35. Pfeilerwiderstand bei Ausschaltung der Oberfläche.



Pfeilerhöhe  $H = 450 \text{ mm}$ , Breite  $b = 50 \text{ mm}$ , Länge = 386,7 mm.

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W_0$ Rahmen- widerstand kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W_0$ kg	$\frac{U^2}{2g}$ m	$\zeta = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot H} \cdot \frac{2g}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_x$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 9,2° C						Beiwert $\rho_x = 0,90 \text{ sek/m}^2$		
1	0,105	0,070	0,048	0,022	0,000562	1,740	0,00473	
2	0,128	0,082	0,052	0,030	0,000835	1,810	0,00576	
3	0,175	0,092	0,057	0,035	0,001560	0,996	0,00782	
4	0,215	0,094	0,061	0,033	0,002360	0,622	0,01008	
5	0,283	0,123	0,066	0,057	0,004060	0,624	0,01273	
6	0,334	0,147	0,070	0,077	0,00570	0,601	0,01500	
7	0,404	0,199	0,099	0,100	0,00830	0,536	0,01820	
8	0,460	0,269	0,127	0,142	0,01080	0,584	0,02070	
9	0,531	0,330	0,166	0,164	0,01440	0,508	0,02390	
10	0,607	0,410	0,220	0,190	0,01880	0,450	0,02730	
11	0,765	0,573	0,340	0,233	0,02980	0,343	0,03440	
12	0,905	0,805	0,475	0,330	0,04180	0,350	0,04070	
13	1,125	1,183	0,710	0,473	0,06450	0,326	0,05060	
14	1,324	1,639	1,070	0,569	0,08930	0,283	0,05960	
15	1,628	2,522	1,600	0,922	0,13510	0,303	0,07330	
16	1,910	3,504	2,150	1,354	0,18590	0,324	0,08600	
17	2,191	4,492	2,790	1,702	0,24410	0,310	0,09850	
18	2,530	5,912	3,670	2,242	0,32630	0,306	0,11390	
19	3,090	8,152	5,420	2,732	0,4866	0,250	0,13900	
20	3,570	10,552	7,220	3,332	0,6496	0,228	0,16070	
21	4,050	13,200	9,220	3,980	0,8360	0,212	0,18230	
22	4,580	16,236	11,760	4,476	1,0690	0,186	0,20630	
23	0,076	0,070	0,043	0,027	0,000293	4,095	0,00342	
24	0,133	0,088	0,052	0,036	0,000900	1,778	0,00598	
25	0,202	0,100	0,060	0,040	0,00208	0,855	0,00908	
26	0,235	0,110	0,063	0,047	0,00282	0,741	0,01058	
27	0,286	0,124	0,067	0,057	0,00416	0,609	0,01288	
28	0,337	0,144	0,070	0,074	0,00580	0,567	0,01515	
29	0,411	0,183	0,102	0,081	0,008620	0,418	0,02018	
30	0,455	0,251	0,124	0,127	0,01055	0,535	0,02050	
31	0,523	0,309	0,176	0,133	0,01395	0,424	0,02353	
32	0,619	0,379	0,225	0,154	0,01950	0,351	0,02788	
33	1,927	3,554	2,180	1,374	0,18920	0,322	0,08670	

Tabelle 36. Pfeilerwiderstand bei Ausschaltung der Oberfläche.

Pfeiler Nr. V'.



Pfeilerhöhe  $H = 450$  mm, Breite  $b = 100$  mm, Länge = 650,4 mm.

(Große Ausführung)

Fahrt Nr.	$U$ Geschwindigkeit m/sek	$W_G$ Widerstand gemessen kg	$W_0$ Rahmen- widerstand kg	$W$ Pfeiler allein $= W_G - W_0$ kg	$\frac{U^2}{2g}$ m	$\xi = \frac{W}{1000 \cdot b \cdot H} \cdot \frac{2g}{U^2}$	$U \cdot b \cdot \rho_K$	Bemer- kungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur = 10° C						Beiwert $\rho_K = 0,92$ sek/m <sup>2</sup>		
1	0,057	0,086	0,039	0,047	0,000166	0,320	0,00524	
2	0,154	0,096	0,055	0,041	0,00121	0,754	0,01420	
3	0,168	0,104	0,056	0,048	0,00145	0,736	0,01550	
4	0,224	0,128	0,062	0,066	0,00256	0,573	0,02060	
5	0,272	0,148	0,066	0,082	0,00379	0,481	0,02500	
6	0,324	0,174	0,069	0,105	0,00538	0,434	0,02980	
7	0,365	0,223	0,082	0,141	0,00680	0,460	0,03360	
8	0,394	0,255	0,095	0,160	0,00790	0,450	0,03630	
9	0,445	0,340	0,118	0,222	0,01010	0,488	0,04090	
10	0,512	0,384	0,154	0,230	0,01340	0,383	0,04710	
11	0,617	0,504	0,224	0,280	0,01940	0,321	0,05680	
12	0,762	0,729	0,340	0,389	0,02960	0,292	0,07010	
13	0,902	0,969	0,475	0,494	0,04150	0,265	0,08300	
14	1,397	2,244	1,170	1,074	0,09940	0,240	0,12850	
15	1,136	1,440	0,730	0,710	0,06580	0,239	0,10450	
16	1,612	2,988	1,570	1,418	0,13240	0,238	0,14830	
17	1,824	3,772	1,980	1,792	0,16950	0,235	0,16800	
18	1,885	4,048	2,090	1,958	0,18110	0,240	0,17350	
19	2,195	5,370	2,800	2,570	0,24550	0,233	0,20200	
20	2,488	6,684	3,540	3,144	0,31550	0,222	0,22900	
21	3,055	9,772	5,300	4,472	0,47570	0,209	0,28100	
22	3,542	13,288	7,120	6,168	0,63930	0,215	0,32600	
23	4,053	16,656	9,250	7,406	0,83730	0,197	0,37300	
24	4,560	20,648	11,650	8,998	1,06000	0,189	0,42000	
25	0,081	0,084	0,044	0,040	0,000345	2,580	0,00745	
26	0,104	0,076	0,048	0,028	0,000560	1,110	0,00957	
27	0,125	0,088	0,051	0,037	0,000800	1,028	0,01150	
28	0,138	0,082	0,053	0,029	0,000900	0,716	0,01270	
29	0,171	0,103	0,056	0,047	0,00149	0,701	0,01580	
30	0,290	0,158	0,067	0,091	0,00430	0,470	0,02670	
31	0,416	0,254	0,105	0,149	0,00880	0,376	0,03830	
32	0,463	0,308	0,128	0,180	0,01093	0,365	0,04260	
33	0,531	0,422	0,166	0,256	0,01435	0,397	0,04900	
34	0,641	0,560	0,244	0,316	0,02095	0,335	0,05900	
35	0,776	0,793	0,350	0,443	0,03070	0,321	0,07140	
36	0,929	1,084	0,480	0,604	0,04400	0,305	0,08550	
37	1,058	1,482	0,630	0,852	0,05700	0,332	0,09720	
38	2,035	4,494	2,420	2,074	0,21100	0,219	0,18720	

### D. Ein Ähnlichkeitsversuch bei ausgeschalteter Oberfläche.

Um ein Bild über die Übertragbarkeit der unter C erhaltenen Werte auf andere Maßstäbe, insbesondere auf naturgroße Pfeiler, zu erhalten, wurde, wie erwähnt, ein Pfeiler V' von der Form V, aber doppelt so groß, angefertigt. Er hatte also eine Breite  $b = 100$  mm und eine Länge  $l = 650,4$  mm. Die Pfeilerhöhe mußte dem Schenkelaabstand des Rahmens entsprechend mit 450 mm beibehalten werden.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 36 zusammengestellt und in Abb. 61 gemeinsam mit den Werten des kleinen Pfeilers V über  $U \cdot b \cdot \rho_K$  aufgetragen worden; man sieht, daß die Werte nicht zusammenfallen, daß also keine Ähnlichkeit vorhanden ist, und daß eine Übertragung der Meßergebnisse auf Ausführungen größeren oder kleineren Maßstabes in der vorliegenden Form unzulässig ist.

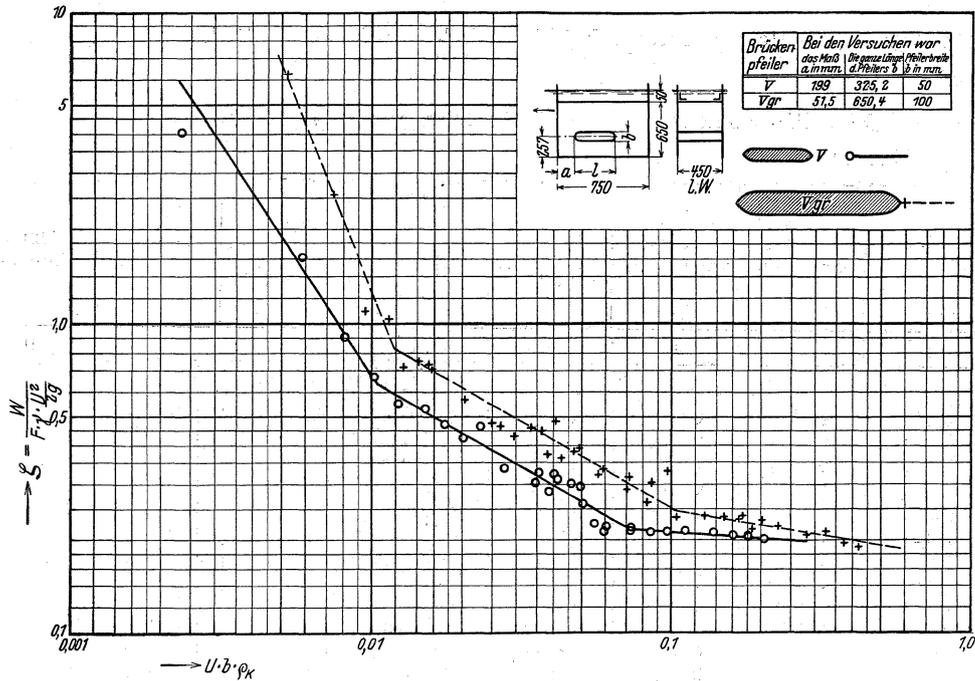


Abb. 61. Darstellung des Widerstandsbeiwertes für den Ähnlichkeitsversuch bei Pfeiler V und V groß unter Ausschaltung der Oberfläche.

## E. Einige Schlußfolgerungen.

Um zunächst den Grund für das Abweichen der unter D mitgeteilten Messungen der zwei Ausführungen von Pfeilerform V voneinander aufzudecken, braucht man sich nur in den Tabellen 33 und 36 die verhältnismäßige Größe des Gesamtwiderstandes und des Rahmenwiderstandes anzusehen. Man erkennt daraus, daß der Rahmen, der bei den Kreiszyklerversuchen (s. Teil I) noch einigermaßen unverfälschte Werte der Kreiszyklerviderstände allein zu ermitteln gestattete<sup>123</sup>, bei den größeren Brückenpfeilern und erst recht bei dem großen Pfeiler V' in seiner relativen Größe unzulässig bemessen war. Die Ergebnisse mit den beiden Pfeilerformen V hätten nur dann übereinstimmen und ein einziges Gesetz für den Widerstandsbeiwert in Abhängigkeit von  $U \cdot b \cdot \rho_K$  ergeben können, wenn bei dem doppelt so großen Pfeiler V' auch ein doppelt so großer Rahmen mit 900 mm Abstand der Schenkel verwandt worden wäre. Daß aber überhaupt der Rahmen in jedem Falle ungeeignete Größe besaß und daß der Rahmen selbst und nicht der eingebaute Pfeiler maßgebend für den ganzen Strömungsvorgang war, erkennt man daraus, daß die Widerstandsbeiwerte bei beiden Ausführungsgrößen in nahezu eine einzige Kurve zusammenfallen, wenn man sie in Abhängigkeit von  $U \cdot V' \cdot \rho_K$  aufträgt. Hierbei ist V' eine beliebige Abmessung des Rahmens und nicht des Widerstandskörpers. — Oder, was dasselbe ist, es besteht (bei gleicher Temperatur) Abhängigkeit von U allein, da stets derselbe Rahmen verwendet wurde.

Diese wichtige Erkenntnis gebietet hinsichtlich der Übertragbarkeit auch der bei den kleineren Pfeilerabmessungen in Abschnitt C erhaltenen Widerstandsbeiwerte sehr große Vorsicht und muß für das weitere Versuchsprogramm (siehe unter F) richtungweisend sein. Trotzdem bestehen die nachstehenden allgemeinen Schlußfolgerungen qualitativ, wenn auch nicht genau quantitativ zu Recht.

Der Widerstandsbeiwert ist von der Pfeilerform außerordentlich stark abhängig:

Bei den Versuchen mit freier Oberfläche ist bei dem rechteckigen Pfeiler Nr. I der Beiwert auch bei den höheren Kennzahlen größer als 1; bei den Formen I, IIa und IVa ist der Beiwert bei der höchsten gefahrenen Geschwindigkeit von 4 m/sek gleich rund 1,2. Durch eine ein-

<sup>123</sup> Vgl. jedoch oben S. 13 und 19.

fache kreisförmige Abrundung des vorderen Kopfes (Form *IIb* und *III*) wird der Beiwert bereits auf etwa 0,3 herabgesetzt. Die Zuschärfung nach Form *IVb* und *V* bringt demgegenüber keinen merklichen Vorteil mehr. Ein Vergleich zwischen Form *IIb* und *III*, sowie zwischen *IVb* und *V* zeigt, daß die hintere Zuschärfung keine weitere Erniedrigung des Beiwertes bringt. Wohl aber hat die allmähliche Zuschärfung nach Form *VI* den Widerstand noch merklich heruntersetzt, und zwar bei Form *VIa* noch mehr als bei Form *VIb*; der mit *VIa* erreichte Beiwert ist nur noch rund ein Sechstel des Beiwertes der vorne rechteckigen Formen *I*, *IIa*, *IVa*.

Die Ergebnisse der Versuche mit ausgeschalteter Oberfläche sind von  $U \cdot b \cdot \rho_K = 0,5$  an in Abb. 62 zusammengestellt worden. Auch hier ergibt sich annähernd dieselbe „Gütefolge“ der einzelnen Querschnitte.

Man erkennt sonach deutlich die erheblichen bestehenden Unterschiede. Daraus ist die große Wichtigkeit abzuleiten, zuverlässige Zahlwerte zu erlangen, die Schlüsse auf die naturgroße Aus-

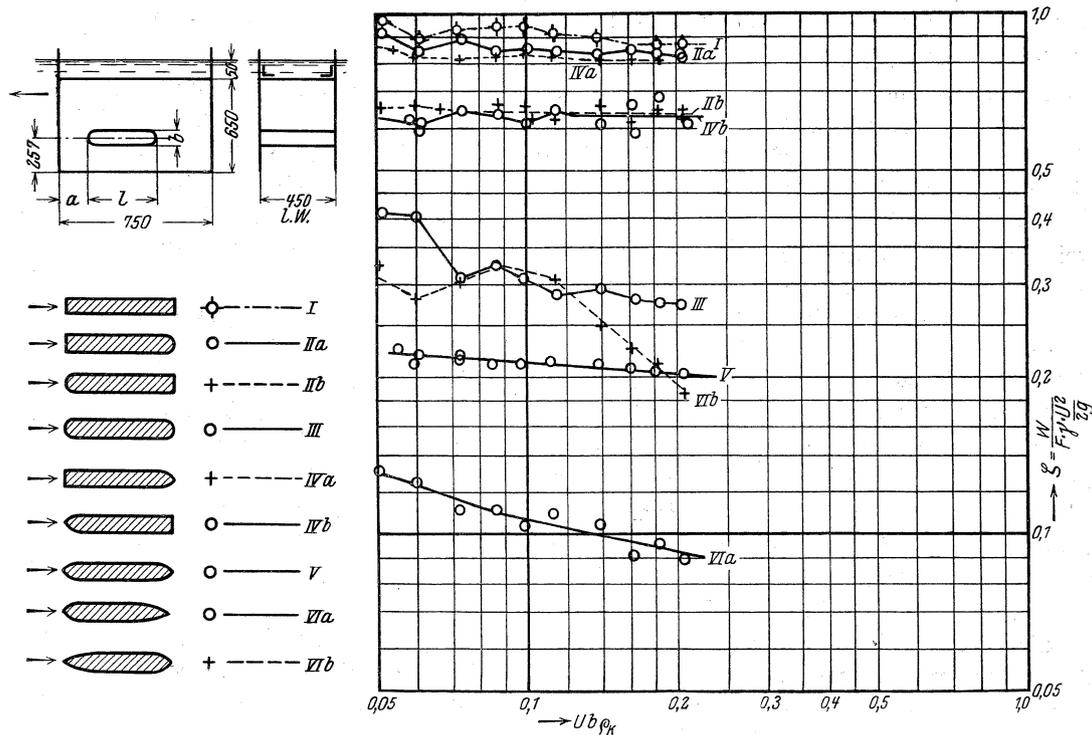


Abb. 62. Vergleich der verschiedenen Pfeilerformen bei ausgeschalteter Oberfläche.

führung gestatten. In dieser Erkenntnis beruht der Wert der mitgeteilten Vorversuche ebenso sehr, wie in den durch die Durchführung der Versuche gewonnenen Richtlinien für die Aufstellung und Durchführung des weiteren Programms, damit dieses zuverlässige Unterlagen zu liefern ver spricht. Die genannten allgemeinen Schlußfolgerungen stimmen naturgemäß mit den aus der Aerodynamik bekannten Tatsachen überein; die Anforderungen des praktischen Wasserbaues an die weiteren Versuche, insbesondere mit freier Oberfläche, werden sich aber erst durch die bei den vorstehenden Versuchen gemachten Erfahrungen befriedigen lassen.

### F. Das weitere Versuchsprogramm.

Das weitere Versuchsprogramm sieht mehrere, voneinander unabhängige Versuchsreihen mit sehr verschiedenen Anordnungen vor, die aber alle demselben Ziel zustreben: der Erforschung des Widerstandes von Einbauten und des dadurch hervorgerufenen Staues in offenen Gerinnen.

Zunächst seien diejenigen Versuchsreihen genannt, die die in dieser Arbeit beschriebenen Versuche unmittelbar fortsetzen bzw. ergänzen sollen. Sie sind zum Teil bereits angedeutet worden, werden hier aber noch einmal unter Hervorhebung einiger wichtig erscheinender Gesichtspunkte zusammengestellt.

### 1. Die Versuche mit Brückenpfeilern bei freier Flüssigkeitsoberfläche

sollen nicht nur bei einer Tauchtiefe unter dem ruhenden Wasserspiegel (bei den bisherigen Versuchen 150 mm), sondern bei mehreren Tauchtiefen wiederholt und insbesondere bis zu höheren Reynoldsschen Zahlen bzw. Kennzahlen ausgedehnt werden; um dies Ziel zu erreichen, ist aus der maximal erreichbaren Schleppwagengeschwindigkeit und dem nach den Vorversuchen abschätzbaren Gesamtwiderstand die Größenabmessung der Probekörper zu bestimmen. Bei Formwahl der Pfeiler wird man vielleicht zweckmäßig den bautechnischen Gesichtspunkt gleicher Querschnittsfläche (d. h. gleichen Mauerwerksaufwandes bzw. zulässiger Mauerwerks- oder Bodenpressung bei bestimmten Auflagedrücken der Brücken) zugunsten strömungstechnischer Gesichtspunkte zunächst zurückstellen. Wichtig erscheint vor allem auch die Klärung folgender Frage, die zweckmäßig zu allererst an einem einzigen Pfeilerprofil untersucht werden könnte: Welchen Einfluß auf den Gesamtwiderstand hat die relative Lage des vertikalen Pfeilers zu dem unteren horizontalen Abschlußblech, das doch naturgemäß begrenzte Abmessungen hat? Welchen Einfluß hat es, den Pfeiler ganz vorn (in Anströmungsrichtung gesehen) auf dem Abschlußblech anzuordnen oder in der Mitte bzw. sogar hinten? Wie breit sollte das Blech zweckmäßig sein? Wie wirkt sich hierbei eine mehr oder weniger starke Zuschärfung der (vorderen) Blechkante aus? Erst nach Klärung dieser Fragen wird man aus den bei freier Oberfläche mit unterem Abschlußblech gemessenen Widerständen bei höheren Reynoldsschen Zahlen zuverlässige Schlüsse ziehen dürfen. Wie weit man dabei die Oberflächenerscheinungen und die in der Tiefe vor sich gehenden Zähigkeitserscheinungen trennen können, wird von der Güte und dem Charakter des Ergebnisses der unter Ausschaltung der freien Oberfläche anzustellenden weiteren Versuche (s. u.) abhängen. Es ist bereits bei den Kreiszyklerversuchen mit freier Oberfläche angedeutet worden, daß bei gleichzeitiger Wirkung beider Ähnlichkeitsgesetze (des Froudeschen für die der Schwere unterworfenen Erscheinungen [z. B. Oberflächenerscheinungen] und des Reynoldsschen für Zähigkeitswirkungen) immer dann eine Wirkung auch auf die wesentlich dem einen Gesetz folgenden Erscheinungen festzustellen sein muß, wenn gleichzeitig die wesentlich dem anderen Gesetz folgende Erscheinung eine starke Änderung erfährt. Dieser Umstand wird in der hydraulischen Versuchstechnik bisher noch viel zu wenig nutzbringend ausgewertet<sup>124</sup>. Bei denjenigen Pfeilerformen, die der mathematischen Analyse zugänglich sind (also z. B. nicht das gewöhnliche Rechteck, sondern möglichst solche mit stetiger Krümmung und schlanker Form), wird man für die Wellenerscheinungen mit Erfolg die Havelock-Hogner-Wigleyschen hydrodynamischen Rechnungen anwenden können, wenngleich dieselben ziemlich abstrakter Natur sind. Über einfache Fälle solcher Rechnungen (die sich auch im Schiffbau brauchbar erwiesen haben) soll in einer späteren Arbeit berichtet werden.

### 2. Die Versuche unter Ausschaltung der freien Oberfläche

sind entweder als reine Druckverteilungsmessung am stehenden Pfeiler mit oberer oder unterer Abdeckplatte durchzuführen analog den als gut gelungen zu bezeichnenden Kreiszyklerversuchen (s. Teil IA). Wegen der Kostspieligkeit und Mühseligkeit derartiger Versuche ist aber bei genügend großem und jeweils maßstabähnlichem Rahmen (s. o.) das bisher verfolgte Verfahren wirtschaftlicher. Die Pfeilerformen könnten dabei ohne Bedenken kleiner sein, als die im Teil III C benutzten. Auch hierbei wird man höhere Reynoldssche Zahlen anstreben müssen als bisher, eine Forderung, der allerdings kleinere Pfeilerwahl widersprechen würde. Die Oberkante des Rahmens dürfte zweckmäßig mindestens etwa 10 cm unter dem ruhenden Wasserspiegel anzuordnen sein wie bei den Kreiszyklerversuchen (Teil I), und nicht nur 5 cm wie bei den ersten Brückenpfeilerversuchen (Teil III).

<sup>124</sup> Es erscheint nicht unmöglich, von hier aus einiges Licht z. B. in die Erscheinungen im Unterwasser bei Modellversuchen mit sog. unvollkommenen Wehrüberfällen zu bringen (Kolkversuche u. a.). Hier treten zuweilen maßstabunähnliche Wellen und Walzen auf, bei deren nicht zulässiger Übertragbarkeit auf die Natur heute von vielen Versuchsanstalten nicht immer haltbare Schlüsse gezogen werden. Die Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, hat in letzter Zeit in mehreren Fällen Gelegenheit gehabt, Modellversuche gleichzeitig in 2 oder 3 Maßstabgrößen auszuführen. Es ist zu hoffen, daß auf diese Weise verbesserte Schlüsse in Zukunft möglich sein werden.

### 3. Der Energieverlust bei der mehr oder weniger plötzlichen Wiedererweiterung.

Gänzlich andere Anordnungen zeigen die weiter durchzuführenden Versuchsreihen. Sie haben — wie bereits in der Einleitung betont wurde — vor allem auch das wichtige Ziel, den Energieverlust bei der mehr oder weniger plötzlichen Wiedererweiterung der zwischen den Brückenpfeilern eingegengten und beschleunigten Strömung auf den wieder ungestörten Querschnitt hinter den Einbauten (häufig zu Unrecht Carnotscher oder Borda-Carnotscher Stoßverlust<sup>125</sup> genannt), zahlenmäßig aufzuklären. Derartige Versuche sind — ebenfalls als Vorversuche zu werten — vom Verf. in der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, bereits durchgeführt worden, vgl. Abb. 63. Man erkennt dort im Vordergrund für die Aufnahme zurechtgelegt die untersuchten Pfeilerformen<sup>126</sup>; sie waren in der längs der Wand sichtbaren rund 6,0 m langen Holzrinne mit Rechteckquerschnitt  $10 \times 5$  cm eingebaut. Der abnehmbare, auf die Seitenwände aufschraubbare Deckel bestand aus einem fugenlos durchgehenden Stück. Ebenso waren Seitenwände und Sohle je aus einem Stück. Die Rinne stand stets unter innerem Überdruck, nur an der engsten Stelle der Einbauten entstand meist erheblicher Unterdruck; zum Teil mußte mit Quecksilbermanometer gearbeitet werden (s. hinten zwischen den Fenstern). Obwohl hinter den Einbauten noch eine Meßstrecke von über 3,0 m war, erwies sich diese Auslaufstrecke als beträchtlich zu kurz. Auch erwies sich trotz Anstrich überhaupt Holz nicht als geeigneter Baustoff für das Gerinne. Die in der Sohle alle 50 cm stromaufwärts und -abwärts von der engsten Stelle zwischen den Einbauten angebrachten Meßstellen konnten nicht mit einwandfreier sauberer Ausmündung in den Querschnitt angebracht werden<sup>127</sup>, und das dauernd arbeitende Holz veränderte die Querschnittsgröße in zu starkem Maße; war der Deckel (mit Dichtungsschnüren gegen die Seitenwände) aufgeschraubt, so stimmte der vorher bei offenem Deckel aufgemessene Querschnitt nicht mehr mit dem tatsächlich vorhandenen überein, über den man nur auf Grund von Außenmaßen Aus-

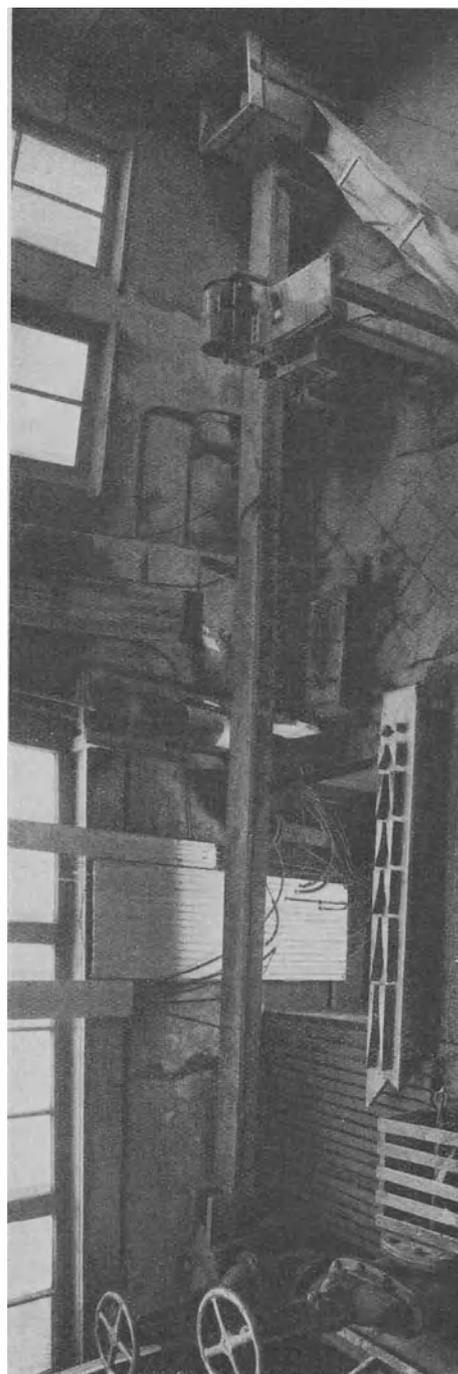


Abb. 63. Untersuchungen über die Verluste in „Wiedererweiterungen“.

<sup>125</sup> S. den entsprechenden Artikel des Verfassers in der erscheinenden Neuauflage des Physikalischen Handwörterbuches (Berlin: Julius Springer). Dort ist auch bei den einschlägigen Stichwörtern über den Zusammenhang mit den Energieverhältnissen bei der Erscheinung des Wassersprunges einiges gesagt.

<sup>126</sup> Sie wurden in beiden Anströmrichtungen untersucht; auch zu je zwei Paaren als „Doppeldüse“ bzw. Pfeilerhalbschnitte.

<sup>127</sup> Eine Metallplatte in der Sohle, innerhalb deren saubere Ausmündung möglich war, hob oder senkte sich als Ganzes im arbeitenden Holzboden.

sagen machen konnte. Aus diesen und anderen Gründen sind diese Versuche abgebrochen und auch vorstehend nicht mitgeteilt worden.

Dagegen sind im neuen Versuchsprogramm derartige Versuche vorgesehen, aber nicht im hölzernen Rechteckgerinne, sondern in metallenen, gezogenen Kreisrohren; auch die „Pfeiler-einbauten“ werden abgedrehte Ringkörper sein. Der Auslauf soll genügend lang gemacht werden.

Durch Anwendung des Kreisquerschnittes verzichtet man wahrscheinlich auf charakteristische und für Flußpfeiler auch wesentliche Erscheinungen. Wenn aber die Versuche im Rohr gelungen sein werden, wird man auf Grund der dabei gemachten Erfahrungen auch zum Rechteckquerschnitt zurückkehren können.

#### 4. Brückenpfeilereinbauten im offenen Glasgerinne.

Schließlich sind im offenen, sehr langen horizontalen Glasgerinne Versuche mit Brückenpfeilereinbauten (etwa Pfeilerhalbschnitte an den Seiten und Zwischenpfeiler) bei möglichst starker Querschnittseignung an der Pfeilerreinbaustelle in üblicher Weise geplant; gemessen werden sollen aber lediglich in einem ungestörten Querschnitt weit oberhalb und in einem zweiten ungestörten Querschnitt sehr weit unterhalb die Wassertiefe und Geschwindigkeitsverteilung, d. h. die Energieverhältnisse. Dies ist für verschiedene Verbauungsverhältnisse und in einem möglichst ausgedehnten Bereich großer Reynoldsscher bzw. Froudescher Kennzahlen zu machen. Denn es wäre fehlerhaft, Messungen in geringen Geschwindigkeitsbereichen oder doch in solchen Bereichen der Kennzahlen, die unterhalb eines mehr oder weniger plötzlichen Charakterwechsels des Vorganges liegen, für übertragbar zu halten.

Hat man auf diese Weise den Formeinfluß, die Oberflächenerscheinungen und den Verlust bei der Wiedererweiterung in Abhängigkeit von den zugehörigen Kennzahlen und dimensionslosen Bestimmungsgrößen festgestellt, so werden damit die Unterlagen für zuverlässige Stau-rechnungen bzw. zuverlässige Staumodellversuche<sup>128</sup> ein Stück gefördert sein. Nur unter Berücksichtigung aller dieser drei Einflüsse erscheint es möglich, Aussagen über den Brückenstau zu machen bzw. Stauformeln aufzustellen.

---

<sup>128</sup> Bzw. Kolkversuche quantitativer Natur.

## Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen

Herausgegeben von  
Professor Dr. Th. v. Kármán

- Heft 1:** Über laminare und turbulente Reibung. Von Th. v. Kármán. Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. Von K. Pohlhausen. Der Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom. Von H. Latzko. Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben. Von L. Hopf und E. Trefftz. Fehlt z. Zt.
- Heft 2:** Ein Beitrag zum Spaltflügelproblem. Von W. Klemperer. Flug- und Trudeldkurven. Von L. Hopf. Mechanische Modelle zum Segelflug. Von Th. v. Kármán. Der Einfluß des Windes auf die Transportleistung. Von W. Klemperer. Theoretische Bemerkungen zur Frage des Schraubenfliegers. Von Th. v. Kármán. Mit 28 Abbildungen. 56 Seiten. Unveränderter Neudruck 1927. RM 6.—
- Heft 3:** Die Messung der hydraulischen Rauigkeit. Von L. Hopf. Strömungswiderstand in rauhen Röhren. Von K. Fromm. Zahlenmaterial zur vorigen Abhandlung. Von K. Fromm. Mit 35 Abbildungen. 43 Seiten. Berichtigter Neudruck 1927. RM 6.—
- Heft 4:** Strömungserscheinungen in Ventilen. Von Dr.-Ing. Bruno Eck. Gastheoretische Deutung der Reynoldsschen Kennzahl. Von Professor Dr. Th. v. Kármán. Über die Stabilität der Laminarströmung und die Theorie der Turbulenz. Von Professor Dr. Th. v. Kármán. Über einige Anwendungen nomographischer Methoden in der Thermodynamik. Von Dr.-Ing. Bruno Eck und Dipl.-Ing. Erich Kayser. Mit 46 Abbildungen im Text. 43 Seiten. 1925. RM 5.10
- Heft 5:** Theorie des Segelfluges. Von Dr.-Ing. W. Klemperer. Mit 17 Abbildungen im Text. 78 Seiten. 1926. RM 6.90
- Heft 6:** Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern. Von Professor Dr. Th. v. Kármán. Strömungsverlauf und Druckverteilung an Widerstandskörpern in Abhängigkeit von der Kennzahl. Von Regierungsbaumeister Dr.-Ing. Hans Ermisch. Mit 58 Abbildungen im Text. 50 Seiten. 1927. RM 7.50
- Heft 7:** Über die Grundlagen der Balkentheorie. Von Professor Dr. Th. v. Kármán. Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt. Von Friedrich Seewald. Stegbeanspruchung hoher Biegungsträger. Von Ilse Kober. Zur Theorie des Druckversuchs. Von Max Knein. Mit 49 Abbildungen im Text. 62 Seiten. 1927. RM 7.50
- Heft 8:** Beitrag zur theoretischen Behandlung des gegenseitigen Einflusses von Tragfläche und Rumpf. Von J. Lennertz. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte. Von M. Hansen. Der Einfluß der Wandrauigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen. Von Walter Fritsch. Mit 60 Abbildungen im Text. 62 Seiten. 1928. RM 6.—

---

### Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922).

Gehalten von zahlreichen Fachleuten. Herausgegeben von Th. v. Kármán, Professor am Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen, und T. Levi-Civita, Professor an der Universität Rom. Mit 98 Abbildungen im Text. 251 Seiten. 1924. RM 13.—

---

**Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik** (Flüssigkeit mit kleiner Reibung; Tragflügeltheorie, I. und II. Mitteilung; Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust). Von L. Prandtl und A. Betz. Neudruck aus den Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg und aus den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mit einer Literaturübersicht als Anhang. IV, 100 Seiten. 1927. RM 4.—