

**Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис**

**ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ  
среда из невзаимодействующих частиц**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1973

*Книга представляет собой самостоятельную часть курса математической физики, примыкающую к книге «Элементы прикладной математики» тех же авторов, но независимую от нее. Основной особенностью является концентрация изложения вокруг физических задач, вывод математических методов из физической сущности задачи, возможно более полное прослеживание аналогий между математикой и физикой, отыскание физического смысла в математическом решении. Специальное внимание уделяется кинетическому уравнению, уравнению диффузии, законам сохранения, разрывам. Книга предназначена в основном для студентов физических и других специальностей, для которых курс физики имеет определяющее значение, а также для всех желающих познакомиться с физической сущностью методов математической физики.*

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	4
Глава I Описание среды из упорядоченно движущихся частиц (кинематика) .....	7
§ 1 Среда из частиц .....	8
§ 2 Плотность и скорость среды .....	9
§ 3 Переменные Эйлера и Лагранжа .....	10
§ 4 Среда на плоскости или в пространстве .....	14
§ 5 Движение сосредоточенной порции частиц .....	18
§ 6 Поток величины.....	19
§ 7 Уравнение неразрывности на прямой .....	27
§ 8 Уравнение неразрывности в пространстве .....	30
§ 9 Преобразование Галилея .....	33
§ 10 Эволюция многокомпонентной среды .....	35
Ответы и решения .....	37
Глава II Движения с заданными скоростями на прямой.....	40
§ 1 Введение.....	40
§ 2 Специальные случаи интегрируемости.....	41
§ 3 Среда с постоянным для каждой частицы локальным параметром. Понятие характеристики.....	44
§ 4 Среда с переменным локальным параметром .....	47
§ 5 Математическое обобщение.....	48
§ 6 Задача Коши и краевая задача.....	49
§ 7 Отыскание плотности среды .....	54
§ 8 Стационарное поле скоростей.....	56
§ 9 Дивергентная форма уравнений .....	58
§ 10 Образование складок (перехлесты) .....	61
§ 11 Движение с запрещенным обгоном.....	66
§ 12 Поле скоростей, обладающее особенностями .....	67
§ 13 Квазистационарные движения .....	69
§ 14 Движение частиц с заданной энергией .....	70
§ 15 Движение электронов в собственном поле.....	79
§ 16 Расширяющаяся Вселенная.....	83
§ 17 Случай влияния локального параметра среды на скорость частиц.....	88
§ 18 Метод сеток для уравнения эволюции локального параметра .....	92
Ответы и решения .....	98
Глава III Движения с заданными скоростями в пространстве .....	104
§ 1 Введение.....	104
§ 2 Построение локального параметра среды.....	106
§ 3 Отыскание плотности 3-мерной среды .....	107
§ 4 Стационарное поле скоростей.....	111
§ 5 Дивергентная форма уравнений .....	114
§ 6 Перехлесты .....	115
§ 7 Движение с источником массы.....	118

Ответы и решения .....	119
Глава IV    Движение под действием заданных внешних сил .....	121
§ 1    Прямолинейное движение одиночной частицы .....	121
§ 2    Прямолинейное движение совокупности частиц.....	125
§ 3    Изображение среды из частиц на фазовой плоскости .....	127
§ 4    Законы сохранения.....	129
§ 5    Стационарное распределение частиц в консервативном поле .....	133
§ 6    Примеры.....	134
§ 7    Среда с нерассеянной скоростью.....	137
§ 8    Особые решения. Автомодельность.....	138
§ 9    Движение частиц в пространстве .....	141
§ 10   Теорема Лиувилля.....	145
§ 11   Эргодичность.....	147
Ответы и решения .....	155
Глава V    Случайные перемещения частиц и теория диффузии .....	159
§ 1    Простейшая схема блуждания по прямой .....	159
§ 2    Общая схема блуждания по прямой.....	164
§ 3    Диффузия на плоскости и в пространстве .....	168
§ 4    Свойства решений уравнения диффузии в безграничной среде .....	173
§ 5    Особое (автомодельное) решение уравнения диффузии.....	176
§ 6    Решение задачи Коши.....	180
§ 7    Применение преобразования Фурье.....	182
§ 8    Вероятностная трактовка решения.....	183
§ 9    Вероятностный вывод особого решения.....	185
§ 10   Интегральное соотношение для функции Грина.....	188
§ 11   Диффузия на полуоси .....	190
§ 12   Сферически-симметричная задача .....	199
§ 13   Диффузия на отрезке.....	200
§ 14   Решения, экспоненциальные во времени.....	202
§ 15   Задача с непрерывным спектром .....	208
§ 16   Стационарные решения .....	210
§ 17   Примеры.....	211
§ 18   Задачи с порождением частиц .....	213
§ 19   Диффузия в силовом поле .....	218
§ 20   Диффузия в импульсном пространстве.....	223
§ 21   Пространственная диффузия в теории Ланжевена – Фоккера – Планка.....	225
§ 22   О давлении и термодинамике .....	228
§ 23   Вариационный метод. Скорость диссипации.....	231
§ 24   Метод сеток для уравнения диффузии.....	236
Ответы и решения .....	240

## Предисловие

Математическая физика – это математический аппарат изучения физических полей – одного из центральных объектов современной физики. Только привлекая рассмотрение физических полей и соответствующий математический аппарат, удастся наиболее полно описать физические явления, а в целом ряде случаев без такого привлечения даже не удастся сформулировать первоначальные понятия и простейшие утверждения. Поэтому знание тех или иных разделов математической физики оказывается необходимым каждому физiku.

Термин «математическая физика» имеет и более узкий, «классический» смысл. Именно, под математической физикой часто понимают только такой математический аппарат изучения физических полей, который не связан непосредственно со сравнительно более поздними атомными, статистическими, релятивистскими и квантовыми представлениями. Этот аппарат является основой теоретической гидромеханики, теории теплопроводности, теории упругости, «классической» части теории электромагнитного поля. Поля, рассматриваемые в этих классических разделах физики, оказывается возможным в том или ином смысле трактовать как механические системы с бесконечным числом степеней свободы, что и обусловило общность соответствующего математического аппарата. Впрочем, мы в этой книге не ставили своей целью строго придерживаться классических рамок.

Математическая физика является, быть может, одним из самых значительных достижений человеческого разума. Открытия огромного значения возникали благодаря математической формулировке физических ситуаций и математическому анализу и обобщению результатов опыта.

Есть первозданная радость эксперимента: эффектный взрыв электрического разряда, строгая воспроизводимость результатов, подчинение человеческой воле сложных приборов. В построении абстрактных математических конструкций имеется своя прелесть интеллектуальной свободы, неограниченной плоским «здравым смыслом». Математическая физика находится где-то посередине между этими областями. Ее предмет ограничен изучением реально существующих физических тел, явлений, законов. Впрочем, развитие науки расширяет понятие реально существующего: существуют свойства природы, описываемые искривленным пространством и временем общей теории относительности, волновыми функциями элементарных частиц..., – этот список можно продолжать неограниченно.

Математическая физика отнюдь не ограничивается получением формул (более обще – математических соотношений), описывающих найденные из опыта зависимости между физическими величинами. Нужно подчеркнуть ее роль в формировании понятий, идей, образов. Упорные занятия математической физикой ведут к появлению своеобразной интуиции: общие свойства решений становятся столь же наглядно очевидными, как очевидно падение подброшенного камня. Ограничимся здесь только одним примером: изучение распространения упругих колебаний приводит к появлению понятия квазичастиц и обнаружению сходства между движением волновых пакетов и материальных тел. Именно с целью подготовки подобных понятий и аналогий ниже большое внимание уделяется различным формулировкам задачи о движении частиц. Математическая физика имеет свою эстетику, свои понятия о красоте формулы, результата, теории. Подобно, тому как древние греки выработали определенные каноны и пропорции идеального человеческого тела, в математической физике установились определенные формальные требования к возводимой теории. Так, если какие-либо объекты являются в рамках данной теории в том или ином смысле инвариантными, например, не зависящими от выбора системы координат, то эта инвариантность должна наглядно проявляться и в формулах, связывающих эти объекты. Теория должна удовлетворять общим принципам сохранения количества

движения и энергии. Заметим, кстати, что оба этих принципа тесно связаны между собой – и выявление этой связи также есть заслуга математической физики. Но выполнение формальных требований отнюдь не исчерпывает понятия красоты теории, подобно тому как соблюдение анатомических пропорций не исчерпывает понятия красоты человека. Лучшие, гениальные воплощения математической физики замечательны тем, что они ведут дальше, чем предполагали их авторы. Классический пример здесь представляет история открытия античастиц. Как известно, первым был открыт позитрон. Его существование было предсказано П.Дираком в 1929 г. с помощью чисто теоретических построений, оно получилось как математическое следствие квантовой теории движения электронов. И только позже, в 1932 г. позитроны были фактически наблюдаемы. Это крупнейшее физическое открытие было одновременно триумфом математической физики!

Однако отложим эмоции и скажем несколько слов о характере предлагаемой книги. Наиболее распространенный способ изложения математической физики таков: исходный материал подсказывается физическими соображениями, после чего все изучение осуществляется чисто математическими средствами. В таком плане написан ряд выдающихся руководств по математической физике. Мы хотим в этой книге пойти по иному пути. Концентрируя изложение вокруг задач, допускающих наглядную физическую интерпретацию, мы хотим показать, как математические понятия и методы естественно вытекают из наглядных соображений, возможно более полно проследить связи между математическим и физическим подходами, указать наглядный смысл процедуры и промежуточных этапов математического решения. Отметим в качестве характерного примера подробное обсуждение и разъяснение физического смысла понятия характеристики уравнений с частными производными. Продумывание этих аналогий для всех, кто собирается изучать математическую физику и применять ее в своей работе, нам представляется весьма полезным.

Такая установка определила и весь характер книги. Она не имеет целью заменить собой систематический курс математической физики, а скорее предназначена для дополнительного чтения, для расширения кругозора. Мы не стремились к общности, а старались показать основные идеи на как можно более простом материале.

Математические выкладки и логические доказательства играют в книге подчиненную роль, на первом плане лежит стремление к тому, чтобы читатель правильно понимал взаимосвязи и аналогии.

Мы сознательно придерживались неторопливого стиля изложения. Порой мы растягивали на 4–8 страниц материал, который при более формальном подходе можно изложить на одной-двух страницах. Но наш опыт показывает, что именно в простых ситуациях можно эффективно объяснить те общие идеи, утверждения и возможные осложнения, которые окажутся существенными и в более сложных случаях. (Впрочем, действительно глубокое освоение этих идей и утверждений достигается только при активной самостоятельной работе, связанной с их применением.)

Многие важные формулы выводятся несколькими различными способами. Так, задача о распространении тепла, первоначально сконцентрированного в точке, решена с помощью применения понятия «особого», автомодельного решения; с помощью дискретной аппроксимации уравнения теплопроводности; путем применения интегрального преобразования Фурье; эта же задача применительно к процессу диффузии рассматривается с вероятностной точки зрения, причем оказывается, что решение соответствует распределению по Гауссу, т. е. центральной предельной теореме теории вероятностей.

Нужно ли такое разнообразие выводов, если результат один и тот же? Мы глубоко убеждены в том, что именно такой подход в наибольшей степени выявляет физический смысл задач и решений, позволяет обобщить решение на другие, более сложные задачи, показывает внутренние связи между различными математическими методами.

Здесь уместно сослаться на одного из величайших физиков – Нильса Бора. В период становления квантовой механики были всесторонне, подробнейшим образом рассмотрены многие физические ситуации и парадоксы. При этом огромную роль сыграло установление эквивалентности двух математических методов – операторного (матричного) и метода волнового уравнения с частными производными. Как-то, когда в рядах сотрудников и учеников Бора появились уныние и усталость (по воспоминаниям В. Гейзенберга в автобиографической книге «Часть и целое») Бор процитировал строки Шиллера:

„Лишь полнота, что к ясности ведет,  
Укажет в пропасть путь, где истина живет“<sup>1</sup>

и добавил: „Здесь полнота – это не только полнота опыта, но также и полнота понятий, полнота различных способов, которыми можно говорить о наших задачах и о явлениях“.

Конечно, вопросы, рассматриваемые в предлагаемой книге, несравненно проще тех проблем, с которыми столкнулись творцы квантовой теории, – вероятностной природы законов микромира, принципа неопределенности и т. п. Но и на материале сравнительно простых задач регулярного движения и диффузии частиц вдумчивый читатель может получить навык всестороннего подхода к вопросу, навык сопоставления различных методов. Наша цель заключается в том, чтобы дать такому читателю ощущение ясности, возникающей в результате всесторонней полноты рассмотрения. Пусть нелегко добраться до истины («в пропасти живет»!), на тем больше радость и гордость от ее постижения!

Вообще, имеется два вида реакции на тот информационный взрыв, который мы сейчас переживаем. Один состоит в усвоении все большего числа частных формулировок, в усложнении этих формулировок, в повышении скорости чтения и т. п. Другой же заключается в овладении общими идеями и методами, свойственными текущему этапу развития науки, которые можно применять к целым блокам задач. Мы в этой книге старались пойти по второму пути.

Эта книга является естественным продолжением нашей книги «Элементы прикладной математики» (ее мы будем иногда в дальнейшем цитировать под сокращенным названием ЭПМ, имея в виду 3-е издание, «Наука», М., 1972), хотя и может читаться независимо от нее. Более того, по первоначальному замыслу ЭПМ должны были содержать большой раздел, посвященный уравнениям математической физики. Однако по мере работы над ЭПМ мы решили, что соответствующий материал лучше выделить в отдельную книгу. Сейчас ясно, что одной книгой здесь не обойтись. В предлагаемую книгу мы включили только материал, группирующийся вокруг теории эволюции среды из упорядоченно или случайно движущихся невзаимодействующих частиц, а на горизонте уже виднеются аналогичные независимые друг от друга книги по математическим вопросам гидродинамики, теории электромагнитного поля и квантовой механики, которые вместе и составили бы элементы математической физики, «офизиченные» в том смысле, как было сказано выше. Трудно сказать, удастся ли осуществить эти планы; правда, когда мы кончали ЭПМ, у нас тоже не было уверенности, что наша работа будет продолжена...

Краткое содержание книги таково. Она начинается с рассмотрения среды из невзаимодействующих частиц, движущихся упорядоченно, этому движению посвящены гл. I–III. В гл. I рассматриваются способы описания такого движения, т. е. кинематика среды. Здесь вводятся понятия, играющие основную роль в дальнейшем: координаты Эйлера и Лагранжа, движение сосредоточенной порции среды (описываемое с помощью дельта-функции), поток величины, уравнение неразрывности. В гл. II исследуются одномерные движения среды с заданными скоростями частиц.

---

<sup>1</sup> «Nur die Fülle führt zu Klarheit und im Abgrund wohnt die Wahrheit»; разыскание и стихотворный перевод Я. Б. Зельдовича.

Здесь центральным является понятие характеристики, с помощью которого и проводится исследование, в частности, решение задачи Коши и краевой задачи. Специальное внимание уделено образованию складок (перехлестов ударных волн) в среде и анализу других особенностей. Из физических приложений отметим рассмотрение движения электронов в собственном поле, а также теорию расширяющейся Вселенной; из математических экскурсов – анализ устойчивости различных вариантов метода сеток при решении уравнения эволюции локального параметра.

В гл. III изучаются аналогичные вопросы для плоских и пространственных движений. Гл. IV посвящена исследованию движения среды под действием заданных внешних сил. Это движение для одномерных задач изображается на фазовой плоскости. Здесь, как и раньше, особо рассматривается случай стационарного распределения среды, который имеет ряд физических приложений. Глава завершается изложением теоремы Лиувилля и понятия эргодичности.

Наиболее велика по объему гл. V, посвященная случайным перемещениям среды из невзаимодействующих частиц, т. е. теории диффузии. Глава начинается с рассмотрения различных схем блуждания частиц. Решение задачи Коши и задач с краевыми условиями связывается с вероятностной трактовкой этого решения. В качестве математического аппарата применяются функция Грина, ряды и интегралы Фурье. Более физическим, чем математическим является раздел, посвященный диффузии в силовом поле, теории Ланжевена – Фоккера – Планка и понятию давления. Завершается глава рассмотрением вариационных методов решения уравнения диффузии, а также метода сеток.

Большинство параграфов снабжено несложными задачами, имеющими целью закрепить усвоение материала; ответы и решения помещены в конце соответствующих глав.

Авторы выражают свою признательность Г.И.Баренблатту, В.С.Владимирову и А.Н.Тихонову за ценные замечания по рукописи книги. Мы будем благодарны читателям за любые замечания и пожелания.

Книга предназначена, в основном, для студентов физических и других специальностей, для которых курс физики имеет определяющее значение. Она может быть интересна также всем желающим познакомиться с наглядной физической интерпретацией математических методов. Говоря иначе, она может помочь физика освоить математику, а математику – увидеть за формулами физику.

В заключение обращаем внимание читателя на способ нумерации формул в книге. В каждом параграфе нумерация формул начинается заново. При ссылках внутри параграфа его номер не упоминается, а внутри главы ее номер не упоминается: например, в тексте §3 гл. I выражения «формула (4)», «формула (2.4)» и «формула (I.2.4)» означают соответственно «формула (4) §3 гл. II», «формула (4) §2 гл. II» и «формула (4) §2 гл. I».

Я. Б. Зельдович А. Д. Мышкис

## Глава I Описание среды из упорядоченно движущихся частиц (кинематика)

Пусть некоторая частица движется вдоль оси  $x$ ; закон ее движения выражается уравнением  $x = x(t)$ . Этот закон определяет всю кинематику частицы, т. е. все характеристики ее механического перемещения – скорость и ускорение в любой момент времени, частоту колебаний, если частица колеблется, и т. д.

Если вдоль оси  $x$  движется несколько частиц – например, четыре, то закон движения такой системы частиц выражается системой равенств

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t), x_4 = x_4(t),$$

где индекс указывает номер частицы, к которой относится равенство.

Но как быть, если число частиц весьма велико, например, имеет порядок  $10^{10}$ ? Не только на бумаге, но и в памяти самой мощной электронной вычислительной машины нельзя записать такое количество равенств, да и если удалось бы их записать, все равно с ними ничего нельзя было бы делать. Здесь приходится воспользоваться принципиально иным способом описания системы частиц, с рассмотрения которого мы начинаем эту книгу.

В этой главе мы будем рассматривать только упорядоченные движения системы частиц, т. е. движения, при которых близкие частицы имеют близкие скорости (при заданном положении частицы нет рассеивания по скорости). Такими частицами могут при определенной схематизации служить капли дождя, песчинки в мутном потоке, метеориты в рое, электроны в электронном облаке, даже небольшие мысленно выделенные порции текущей жидкости (но, конечно, не хаотически, неупорядоченно движущиеся молекулы газа или жидкости; подобные случайные движения мы рассмотрим в гл. V).

## § 1 *Среда из частиц*

Мы не будем рассматривать движение системы из двух, трех или другого конечного (т.е., практически, – не очень большого) числа частиц, а перейдем сразу к случаю очень большого числа  $N$  малых частиц, упорядочение движущихся вдоль оси  $x$ . При рассмотрении такой системы частиц естественно не называть их по номерам, а воспользоваться каким-либо параметром, принимающим непрерывные значения.

Допустим, например, что каждая частица имеет определенную температуру  $\vartheta$ , свою для каждой частицы и не меняющуюся в процессе движения. Тогда  $\vartheta$  может принимать дискретное множество значений  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ , в соответствии с числом частиц; однако если  $N$  велико, то можно с достаточной точностью считать, что  $\vartheta$  может принимать произвольные значения из некоторого интервала, другими словами, что  $\vartheta$  является не дискретной, а непрерывной величиной. Для простоты будем считать, что при переходе вдоль оси  $x$  от частицы к частице температура  $\vartheta$  изменяется монотонно; тогда закон движения системы будет выражаться не совокупностью очень большого числа функций  $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_N = x_N(t)$ , а одной функцией

$$x = x(\vartheta, t) \quad (1)$$

от двух непрерывных переменных, что, конечно, гораздо проще. При этом переменная  $\vartheta$  дает возможность распознать частицу, имеющую данное значение температуры  $\vartheta$ , так что при зафиксированном  $\vartheta$  зависимость  $x|_{\vartheta=\text{const}}$  от времени дает  $t$  закон движения этой частицы.

Как мы увидим позже, зависимость (1) иногда получается из теоретических соображений; но ее можно получить и эмпирически, измеряя зависимость  $\vartheta(x)$  (или, что равносильно,  $x(\vartheta)$ ) в последовательные моменты времени  $t = t_1, t_2, \dots$ . Если известно, что температура каждой частицы остается неизменной, то, дифференцируя равенство  $\vartheta(x, t) = \text{const}$  по  $t$ , получаем

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_t \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{\vartheta} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_x = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{\vartheta} = - \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_x : \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_t, \quad (2)$$

где индекс при вертикальной черточке указывает, какая переменная в процессе дифференцирования считается постоянной. Формула (2) дает, в частности, возможность на основании данных эксперимента по замеру  $\vartheta$  вычислять скорости частиц.

Описание движения системы частиц с помощью функции (1), хоть в принципе и возможно, но не совсем удобно как из-за случайного выбора переменной  $\vartheta$  (как говорят, не вполне адекватной исследуемому вопросу), так и из-за того, что разные частицы, удаленные друг от друга, могут иметь одинаковую температуру; тогда функция (1) получится многозначной. Более естественно за параметр, определяющий



частицу, принять ее координату  $x = \xi$  в некоторый фиксированный начальный момент времени  $t = t_0$  – так называемую *лагранжеву координату*. Конечно, при этом, как и выше для переменной  $\vartheta$ , используется, предположение об упорядоченности движения частиц, из которого следует, что эта координата полностью определяет частицу. Тогда закон движения совокупности частиц определится функцией  $x = x(\xi, t)$ .

Переходя к непрерывным значениям параметров  $\vartheta$ ,  $\xi$  и т. д., мы заменяем *дискретную систему* из большого числа частиц на ее *непрерывную модель*, другими словами, на *поле (сплошную среду, континуум)*, изучая которое, мы сможем сделать выводы и о свойствах исходной системы<sup>2</sup>.

Конечно, такая замена лишь приближенная: дискретная система имеет лишь черты поля, которые проявляются тем ярче, чем больше частиц. Если же частиц весьма много, то эти черты настолько преобладают, что математическая схематизация системы в виде поля становится не только естественной, но даже совершенно необходимой. Однако при рассмотрении этого поля мы будем часто вспоминать о его происхождении, что поможет нам более наглядно истолковать его свойства. Эта двойственность, состоящая в том, что один и тот же объект трактуется то как дискретная система, то как поле, и породила примененное нами, на первый взгляд парадоксальное наименование *среда из частиц*. Более того, взаимосвязь дискретной системы и имитирующего ее поля позволяет более естественно подойти и к свойствам полей, континуальных по своему происхождению (во всяком случае, при классической их трактовке), таких как электромагнитное или гравитационное.

## § 2 Плотность и скорость среды

При переходе от системы из большого числа частиц к сплошной среде естественно ввести понятие *линейной плотности среды*

$$\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx},$$

т. е. массы порции частиц, приходящейся на малый участок оси  $x$ , отнесенной к единице длины этого участка. Эта плотность будет, вообще говоря, различной в разных точках оси  $x$  и в разные моменты времени  $t$ , т. е.  $\rho = \rho(x, t)$ . Она отвечает некоторому непрерывному распределению массы вдоль оси  $x$ : его можно получить с помощью интегрирования, т. е. каждому интервалу  $a \leq x \leq b$  в любой момент  $t$  отвечает масса

$$m_{a,b} = \int_a^b \rho(x, t) dx.$$

Это масса участка среды, на которую мы заменили дискретную систему частиц.

При рассмотрении вопросов, связанных с упорядоченным перемещением частиц, – и особенно позже, когда мы будем рассматривать динамику частиц, их движение под действием сил, – плотность среды является более глубокой ее характеристикой, чем, например, температура, о которой говорилось в §1. Поэтому плотность среды будет встречаться в дальнейшем особенно часто. Плотностью среды из частиц особенно удобно пользоваться для характеристики этой среды, если все эти частицы тождественны, как мы пока будем предполагать. (Если имеются частицы разных «сортов», то знание общей плотности допускает различные пропорции компонент, и потому иногда необходимо указывать плотности отдельных компонент.)

Наряду с плотностью массы можно рассматривать плотность заряда, если частицы заряжены, плотность энергии и т. п. Обобщая эти частные случаи, мы приходим к понятию о плотности любого *интегрального параметра* среды. При этом интегральным параметром может служить любая величина, характеризующая каждую

<sup>2</sup> Это в принципе тот же переход, что был совершен в §XII.1 ЭПМ, где мы в пределе заменили цепочку из частиц, последовательно связанных друг с другом пружинками, на непрерывную струну.

мысленно выделенную порцию среды и удовлетворяющая закону аддитивности (закону сложения): если порция разбита на несколько частей, то значение параметра, отвечающее всей порции, равно сумме его значений, отвечающих каждой из частей. Примерами интегральных параметров служат масса, объем, заряд, энергия, количество движения, момент инерции и т. д. Понятию интегрального параметра противопоставляется понятие *локального*, т. е. местного параметра, свойственного только элементу среды; локальными параметрами являются координаты, температура и т. п. Плотность любого интегрального параметра представляет собой локальный параметр, она получается в результате дифференцирования интегрального параметра по координатам. Обратно, интегрируя локальный параметр по координатам, мы получаем интегральный параметр среды.

Можно, в частности, рассматривать и «плотность  $n = dN/dx$  числа частиц», равную числу частиц на малом участке оси  $x$ , отнесенному к единице длины этого участка. Это понятие как бы синтезирует дискретный (так как рассматривается  $N$ ) и непрерывный (так как  $N$  дифференцируется по  $x$ ) подходы к системе. Здесь, как и раньше,  $dx$  должно быть малым по сравнению с характерной длиной  $L$  всей системы, но большим по сравнению с характерным расстоянием  $L/N$  между соседними частицами. Если все частицы имеют одинаковую массу  $m_0$ , то  $dm = m_0 dN$ , откуда  $n = \frac{dN}{dx} = \frac{1}{m_0} \frac{dm}{dx} = \frac{\rho}{m_0}$ , т. е.

плотность числа частиц пропорциональна обычной, массовой плотности.

Знание распределения плотности  $\rho$  среды в некоторый момент времени ничего не говорит о распределении скорости  $v$  частиц в этот момент, оно может быть произвольным. Поэтому при описании упорядоченного движения среды принято считать, что ее *состояние* в некоторый момент времени определяется заданием как плотности  $\rho(x)$ , так и скорости  $v(x)$ . (В подавляющем большинстве задач ускорение частицы однозначно определяется ее координатой и скоростью; поэтому ускорение  $a(x)$  в понятие состояния обычно не входит.)

Если задана зависимость плотности также и от времени, т. е.  $\rho = \rho(x, t)$ , то скорость  $v(x, t)$ , конечно, не может быть произвольной. Однако она определяется не полностью и потому должна быть задана: например, если  $\rho(x, t) \equiv \text{const}$ , то все частицы могут покоиться, но могут и двигаться вдоль оси  $x$  с одной и той же скоростью, даже зависящей от времени (но не от номера частицы!), образуя однородный поток.

### § 3 Переменные Эйлера и Лагранжа

При описании эволюции среды из частиц мы пользовались в §2 независимыми переменными  $x, t$ ; они называются *переменными Эйлера*. Полагая в функциях  $\rho(x, t)$ ,  $v(x, t)$  значение  $t = \text{const}$ , мы получаем состояние системы в выбранный момент времени; полагая же  $x = \text{const}$ , но считая  $t$  переменным, мы следим за эволюцией локального состояния системы в выбранной точке оси  $x$ . При этом мы не следим за судьбой отдельных частиц. Если все же нас интересует закон движения частиц, а функция  $v(x, t)$  известна, то этот закон можно восстановить, решая дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t); \quad (1)$$

при этом различным начальным условиям

$$x|_{t=t_0} = \xi \quad (2)$$

отвечают законы движения различных частиц

$$x = x(x, t)$$

(значение  $t_0$  считаем фиксированным, поэтому зависимость решения от  $t_0$  не указываем). Таким образом, различные частицы характеризуются различными значениями  $\xi$ ; об этом мы уже говорили в §1. Чтобы следить за поведением отдельных

частиц, удобнее пользоваться независимыми *переменными Лагранжа*  $\xi, t$ , где  $\xi$  согласно (2) служит начальной координатой частицы. Тогда эволюция среды будет описываться функциями

$$x(\xi, t), v(\xi, t), \rho(\xi, t). \quad (3)$$

Полагая  $\xi = \text{const}$ , но считая  $t$  переменным, мы следим за эволюцией состояния малой порции среды «вдоль движущейся частицы». (Продумайте, что получится при  $t = \text{const}$ .)

Из сказанного вытекает простое соотношение между функциями (3):

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{\xi=\text{const}} = v, \text{ т. е. } x_t'(\xi, t) = v(\xi, t). \quad (4)$$

Поэтому, если поле скоростей в переменных Лагранжа  $v(\xi, t)$  известно, то закон движения любой частицы получается по формуле

$$x(\xi, t) = x|_{t=t_0} + \int_{t_0}^t dx|_{\xi=\text{const}} = \xi + \int_{t_0}^t v(\xi, \tau) d\tau.$$

Конечно, в переменных Эйлера такого простого перехода от заданного поля скоростей к закону движения отдельных частиц не получится: для этого перехода надо решить дифференциальное уравнение (1), что часто осуществить в квадратурах не удастся. Надо отчетливо представлять себе, что хотя  $t$  в переменных Эйлера и Лагранжа одно и то же, но производная по  $t$  в переменных Эйлера, вообще говоря, не равна аналогичной производной в переменных Лагранжа, т. е., как правило,

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{x=\text{const}} \neq \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\xi=\text{const}} !$$

(Подробнее по этому поводу см. в ЭПМ, §IV.1.) Чтобы различить эти производные, принято частную производную по  $t$  в переменных Лагранжа называть *производной вдоль траектории частицы* или *полной производной по времени* и обозначать через  $d/dt$  или  $D$ , оставив обозначение  $\partial/\partial t$  для частной производной в переменных Эйлера. Обозначение  $d/dt$  отвечает и исходной записи уравнения (1), в левой части которого производная берется при фиксированном  $\xi$ .

Установим связь между производными по времени в координатах Эйлера и Лагранжа.

Для этого допустим, что рассматривается некоторая величина  $\vartheta$ , являющаяся локальным параметром изучаемой среды, т. е. принимающая для малой порции среды в каждой точке  $x$  в каждый момент времени  $t$  определенное значение  $\vartheta(x, t)$ . Другими словами, рассматривается поле значений величины  $\vartheta$ . Для определенности будем считать, что  $\vartheta$  – это температура, которую можно измерить в любой точке среды в любой момент времени. (Конечно, в качестве  $\vartheta$  можно было бы взять плотность или скорость среды; но нам хотелось подчеркнуть, что сейчас будет рассматриваться любая локальная характеристика среды.)

Поле величины  $\vartheta$  можно исследовать как в эйлеровых координатах, так и в лагранжевых, т. е. можно исследовать как зависимость  $\vartheta(x, t)$ , так и зависимость  $\vartheta(\xi, t)$ . Говоря образно, рассматривая зависимость  $\vartheta(t)|_{x=\text{const}}$ , мы измеряем температуру воды в реке, сидя на берегу, тогда как рассматривая зависимость  $\vartheta(t)|_{\xi=\text{const}}$ , мы проводим наблюдение, сидя на свободно плывущем плоту.

Продифференцируем обе части равенства  $\vartheta = \vartheta(x, t)$  по времени  $t$  в лагранжевых координатах, т. е. при фиксированном  $\xi$ , воспользовавшись в правой части хорошо известной формулой для дифференцирования сложной функции (см., например, ЭПМ, §IV.1):

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right|_{\xi} = \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_t \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{\xi} + \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right|_x \left. \frac{\partial t}{\partial t} \right|_{\xi};$$

здесь индексы при производных указывают на те величины, которые считаются в

процессе дифференцирования постоянными. Применяя обозначения производных по времени в координатах Эйлера и Лагранжа, а также формулу (4), получаем

$$\frac{d\vartheta}{dt} = v \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \quad (5)$$

Легко написать и обратную формулу:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{d\vartheta}{dt} - v \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_t = \frac{d\vartheta}{dt} - v \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \Big|_t \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_t = \frac{d\vartheta}{dt} - v \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^{-1} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \quad (6)$$

(продумайте эти вычисления; почему  $\partial \xi / \partial x = (\partial x / \partial \xi)^{-1}$ ?).

Производная  $\partial x / \partial \xi$  имеет простой смысл: ее абсолютная величина  $|\partial x / \partial \xi|$  равна коэффициенту растяжения (коэффициенту искажения длины) малого участка среды за время от  $t_0$  до  $t$ , а знак производной  $\partial x / \partial \xi$  – плюс, если при этом порядок следования частиц сохраняется, и минус, если этот порядок меняется на противоположный.

Отсюда, в частности, вытекает формула для изменения плотности элемента среды, если его масса в процессе эволюции не изменяется: так как в любой момент  $t$  будет  $dm = \rho(x, t) |dx| = \rho(\xi, t_0) |d\xi| = \text{const}$ , то

$$\rho(x, t) = \rho(\xi, t_0) \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| = \rho(\xi, t_0) \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|^{-1}. \quad (7)$$

Отметим, что в момент  $t = t_0$  будет  $x = \xi$ ,  $\partial x / \partial \xi = 1$ , т. е. получается  $\rho(x, t) = \rho(\xi, t_0)$ , как и должно быть.

Рассмотрим несколько важных частных случаев. Пусть сначала температура  $\vartheta$  каждого малого участка среды в процессе его эволюции не меняется, т. е. в лагранжевых координатах  $\vartheta$  не зависит от  $t$ ,  $\vartheta = \vartheta(\xi)$ ; другими словами,

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

Мы уже упоминали в §1, что в этом случае значение  $\vartheta$  можно использовать для указания частицы (точнее, бесконечно малой порции частиц). Если зависимость  $\vartheta(\xi)$  известна и  $\vartheta(\xi) \neq \text{const}$ , то с помощью измерения  $\vartheta$  можно непосредственно определить значение лагранжевой координаты в любой точке  $x$  в любой момент времени  $t$ . (В общем случае лагранжева координата не проявляется так наглядно.) Если же принять за лагранжеву координату  $\vartheta$  вместо  $\xi$ , что в принципе возможно, то эту координату можно будет непосредственно измерять.

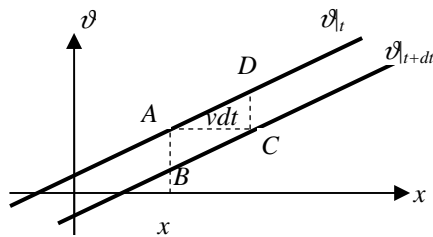


Рис. 1

Хотя в рассматриваемом случае температура каждой малой порции частиц остается неизменной, но для неподвижного наблюдателя температура среды будет, вообще говоря, меняться, так как перед ним проносятся новые и новые порции частиц с различными  $\vartheta$ . Из формулы (5) видно, что при  $d\vartheta/dt = 0$  будет  $\partial \vartheta / \partial t = -v \partial \vartheta / \partial x$ . Эта формула ясна и из рис. 1, где показаны графики зависимости  $\vartheta(x)$  в

последовательные моменты времени  $t$  и  $t + dt$ : так как  $DC/AC = \partial \vartheta / \partial x$ , то

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{AB}{dt} = -\frac{DC}{dt} = -\frac{AC}{dt} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -v \frac{\partial \vartheta}{\partial x}.$$

Рассмотрим другой частный случай, когда поле  $\vartheta$  – однородное, т. е. одинаковое во всех точках среды и величина  $\vartheta$  может зависеть лишь от времени; другими словами,  $\partial \vartheta / \partial x = 0$  или, что равносильно,  $\partial \vartheta / \partial \xi = 0$ . Тогда из формулы (5) получаем, что

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \quad (8)$$

Этот результат очевиден, так как при измерении однородного поля перемещение точки

измерения не играет роли. Отметим, что в этом частном, вырожденном случае использовать  $\vartheta$  в качестве переменной Лагранжа нельзя, даже если значение  $\vartheta$  для каждой частицы остается постоянным (почему?).

Рассмотрим, наконец, случай, когда поле  $\vartheta$  – *стационарное*, в каждой неподвижной точке температура не меняется, т. е. в эйлеровых координатах  $\vartheta$  не зависит от  $t$ ,  $\vartheta = \vartheta(x)$ , другими словами,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0.$$

Тогда формула (5) дает;

$$\frac{d\vartheta}{dt} = v \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \quad (9)$$

Этот результат тоже легко понять: если частица за единицу времени проходит  $v$  единиц пути, а за единицу пути температура среды повышается на  $\partial \vartheta / \partial x$  градусов, то в результате за единицу времени температура, измеряемая по ходу движения частицы, повысится на  $v \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$  градусов. Подчеркнем, что в данном случае температура в каждой неподвижной точке измерения остается неизменной, но, вообще говоря, различной в разных точках; изменение температуры вдоль траектории частицы объясняется тем, что частица переходит из менее нагретой части оси  $x$  в более нагретую или наоборот и принимает температуру той части оси, куда частица перешла. Таким образом, в случае  $\partial \vartheta / \partial t = 0$  (в отличие от  $d\vartheta / dt = 0$ !) происходит теплообмен частиц друг с другом или с окружающими их объектами, однако этот теплообмен имеет специальный характер, обеспечивающий равенство производной  $\partial \vartheta / \partial t$  нулю; вообще говоря, при наличии теплообмена будет не только  $\frac{d\vartheta}{dt} \neq 0$ , но и  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \neq 0$ .

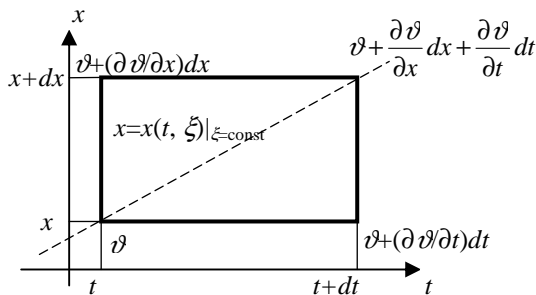


Рис. 2

В общем случае, когда  $\vartheta = \vartheta(x, t)$ , действуют два фактора: например, частица может переходить в более нагретую часть оси  $x$ , разогреваясь уже из-за этого перехода, и, кроме того, сама среда в рассматриваемых точках оси  $x$  может разогреваться; в результате из формул (9) и (8) получается формула (5). На рис. 2 показан пунктиром график движения частицы и обозначены значения поля  $\vartheta$ , с отброшенными малыми высшего порядка,

причем размеры  $dx$  и  $dt$  для наглядности преувеличены по сравнению с истинными. Из рис. 2 также легко вывести формулу (5).

Иногда взамен координаты  $\xi$  бывает удобнее выбрать координату, пропорциональную числу частиц, заключенных между некоторой отмеченной (отвечающей значению  $\xi = \xi_0$ ) и произвольной текущей частицами. Такой координатой может служить масса этой порции частиц

$$m = \int_{\xi_0}^{\xi} \rho(\xi, t) d\xi.$$

Через эту координату хорошо выражаются такие физические характеристики, как суммарные кинетическая энергия  $T = \frac{1}{2} \int [v(m, t)]^2 dm$ , импульс  $P = \int v(m, t) dm$  и т. д.

Применение координат  $m, t$  в принципе не отличается от применения координат Лагранжа  $\xi, t$ , однако координата  $m$  удобна лишь при рассмотрении одномерных задач!

## Упражнения

- 1) Пусть  $v(x,t) \equiv t$ ,  $t_0 = 0$ ; найдите  $x(t, \xi)$ .
- 2) Пусть  $v(x,t) \equiv x$ ,  $t_0 = 0$ ; найдите  $x(t, \xi)$ .
- 3) Пусть  $v(x,t) \equiv xt$ ,  $t_0 = 0$ ; найдите  $v(\xi, t)$ .
- 4) Пусть  $v(\xi, t) \equiv \xi + t$ ,  $t_0 = 0$ ; найдите  $v(x, t)$ .
- 5) Пусть  $\vartheta(x,t) \equiv x/t$ . Найдите в условиях упражнения 1  $\vartheta(\xi, t)$  и проверьте формулу (5).
- 6) Пусть  $v = v_0$ ,  $\vartheta \equiv ax + bt$  ( $v_0, a, b = \text{const}$ ),  $t_0 = 0$ . При каких соотношениях между  $v_0, a, b$  будет  $\partial \vartheta / \partial t = 0$ ?  $\partial \vartheta / \partial x = 0$ ?  $d\vartheta / dt = 0$ ?  $\partial \vartheta / \partial \xi = 0$ ?
- 7) Считая функцию  $v(x,t)$  (для всех  $x, t$ ) и траекторию  $x_0(t) = x(t, \xi_0)$  некоторой частицы заданными, найдите производные от переменных Эйлера по переменным Лагранжа вдоль этой траектории.
- 8) Примените упражнение 7 к случаю  $x = \sin(xt)$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\xi_0 = 0$ .
- 9) Выведите формулу (6), продифференцировав равенство  $\vartheta = \vartheta(\xi, t)$  по  $t$  при зафиксированном  $x$ .

## § 4 Среда на плоскости или в пространстве

Остановимся для наглядности на плоских средах. Закон движения частицы на плоскости описывается уравнением  $P = P(t)$ , где  $P(t)$  – текущая точка, в которой в момент  $t$  расположена частица. Для математического анализа этого закона (в частности, для численных расчетов – в том числе на ЭЦВМ) удобно ввести на плоскости координаты, например, декартовы координаты  $x, y$  с началом координат  $O$ ; тогда закон движения запишется в виде системы уравнений  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  или в векторном виде  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , где  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  – радиус-вектор.

Если рассматривается система из большого числа частиц на плоскости, то аналогично §§1–2 можно ее приближенно заменить на сплошную среду, характеризуемую плотностью  $\rho(P, t) = \rho(\mathbf{r}, t) = \rho(x, y, t)$ <sup>3</sup> и скоростью

$$\mathbf{v}(P, t) = v_x(x, y, t)\mathbf{i} + v_y(x, y, t)\mathbf{j}, \quad (1)$$

где  $v_x, v_y$  – проекции вектора  $\mathbf{v}$  на оси  $x$  и  $y$  соответственно, а  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  – единичные векторы, параллельные этим осям. Переменные  $x, y, t$  – это координаты Эйлера для плоского потока.

Подобно одномерному случаю, можно пользоваться координатами Лагранжа  $\xi, \eta, t$ , где  $\xi, \eta$  – координаты частицы в некоторый фиксированный начальный момент  $t_0$ . Если поле скоростей (1) известно, то траектории частиц получаются с помощью решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, t)$$

при начальном условии

$$x|_{t=t_0} = \xi, \quad y|_{t=t_0} = \eta;$$

соответствующие формулы для решения

$$x = x(t, \xi, \eta), \quad y = y(t, \xi, \eta)$$

одновременно являются формулами перехода от лагранжевых координат к эйлеровым. Если же скорость задана в лагранжевых координатах,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\xi, \eta, t)$ , т. е. задан закон изменения скорости каждой частицы, то закон движения частиц получается с помощью непосредственного интегрирования:

$$x = \xi + \int_{t_0}^t v_x(\xi, \eta, \tau) d\tau, \quad y = \eta + \int_{t_0}^t v_y(\xi, \eta, \tau) d\tau,$$

<sup>3</sup> Здесь размерность плотности  $[\rho] = [m][l]^{-2}$ ; при рассмотрении среды на прямой (§2)  $[\rho] = [m][l]^{-1}$ , а при рассмотрении среды в пространстве  $[\rho] = [m][l]^{-3}$ .

короче,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}_x(\xi, \eta, \tau) d\tau$ .

Лагранжевы координаты как бы вносят в толпу частиц определенное спокойствие. Даже если известно, что частицы в процессе движения не налезают одна на другую, т. е. среда не образует «складок» (это условие в одномерном случае обеспечивает сохранение порядка следования частиц), при движении на плоскости или в пространстве первоначальный порядок может оказаться полностью перепутанным, частицы могут обходить одна другую, образуя сложные структуры. На рис. 3 показана возможная картина искажения в некоторый момент  $t$  первоначально прямоугольной решетки частиц: меняются и относительные расстояния и углы. Но лагранжевы координаты частиц в процессе движения остаются неизменными, т. е., когда мы называем эти координаты, мы как бы вспоминаем первоначальное расположение частиц. Это бывает особенно полезно, когда область, занятая частицами, в процессе эволюции меняется, как облако, по заранее неизвестному закону: в координатах Лагранжа область остается неизменной.

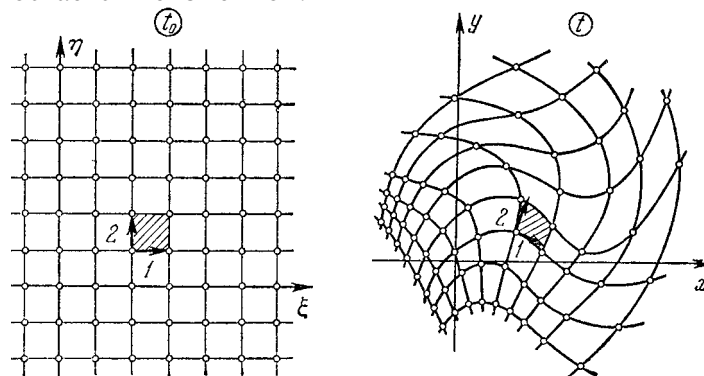


Рис. 3

Аналогично (3.5) выводится формула связи производных по времени в координатах Эйлера и Лагранжа:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = v_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \quad (2)$$

Пространственные члены в правой части можно объединить, записав их сумму в форме, инвариантной относительно выбора системы координат. Для этого напомним (см., например, ЭПМ, §XI. 6) о векторно-дифференциальном операторе *набла*, который в декартовых координатах на плоскости имеет выражение

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$$

(при рассмотрении пространственных полей в правой части добавляется член  $\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ ).

Если вспомнить формулу (1) для вектора скорости и общую формулу  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y$  для скалярного произведения двух векторов, то сумму первых двух членов в правой части (2) можно переписать в виде

$$\left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \vartheta = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \vartheta;$$

здесь  $\mathbf{v} \cdot \nabla$  – скалярный дифференциальный оператор, который может действовать на любое скалярное (как в данном случае) или векторное поле, указанное за этим оператором. Итак, формула (2) приобретает вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \quad (3)$$

В точности тот же вид она имеет для пространственного поля. Смысл обоих слагаемых в правой части (3) тот же, что в формуле (3.5).

В процессе эволюции среды каждый ее участок, занятый определенной порцией частиц, меняет, вообще говоря, как форму, так и площадь. Для дальнейшего нам потребуется формула для коэффициента искажения площадей малых фигур; а так как каждую фигуру можно с любой степенью точности разбить на прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат, то вычислим коэффициент искажения площадей таких прямоугольников.

Сначала выведем простую формулу для площади  $S$  параллелограмма, построенного на векторах

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}.$$

Для этого вспомним, что векторное произведение любых двух векторов по модулю как раз равно площади параллелограмма, построенного на этих векторах (см., например, ЭПМ, §IX.1). Но по общей формуле для векторного произведения двух векторов

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

получаем для случая векторов на плоскости  $x, y$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}. \quad (4)$$

Таким образом,

$$S = \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right|, \quad (5)$$

где большие черточки означают определитель, а маленькие – абсолютную величину.

Знак полученного определителя  $\Delta$  также имеет непосредственный геометрический смысл: если  $\Delta > 0$ , то из (4) видно, что кратчайший поворот от  $\mathbf{a}$  к  $\mathbf{b}$  совершается в ту же сторону, что от  $\mathbf{i}$  к  $\mathbf{j}$ ; если  $\Delta < 0$ , то эти направления поворота противоположны. Теперь мы можем получить формулу для коэффициента искажения площадей. Для этого рассмотрим бесконечно малый прямоугольник в среде при  $t = t_0$ , т. е. в плоскости  $\xi, \eta$  (рис. 3); пусть он расположен в точке  $(\xi, \eta)$  и имеет стороны  $d\xi \mathbf{i}$  и  $d\eta \mathbf{j}$ . В процессе эволюции среды в момент  $t$  он перейдет в бесконечно малый параллелограмм, расположенный в точке  $(x, y)$  и имеющий стороны

$$\partial_\xi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = (x'_\xi \mathbf{i} + y'_\xi \mathbf{j})d\xi \quad \text{и} \quad \partial_\eta(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = (x'_\eta \mathbf{i} + y'_\eta \mathbf{j})d\eta$$

( $\partial_\xi$  означает частный дифференциал по  $\xi$ , взятый при фиксированном значении  $\eta$ ; аналогично расшифровывается  $\partial_\eta$ ). В силу формулы (5) площадь этого параллелограмма равна

$$\left| \begin{vmatrix} x'_\xi d\xi & y'_\xi d\xi \\ x'_\eta d\eta & y'_\eta d\eta \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix} \right| d\xi d\eta.$$

Так как площадь исходного прямоугольника равнялась  $d\xi d\eta$ , то мы получаем, что его площадь увеличилась в

$$\left| \begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix} \right| \quad (6)$$

раз. Как мы уже упоминали, во столько же раз (с точностью до малых высшего порядка) увеличится площадь любой малой фигуры, независимо от ее формы.

Определитель, стоящий в (6) под знаком абсолютной величины, имеет специальное

название *якобиан* по имени немецкого математика К.Якоби и обозначение  $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$ , в

котором числитель и знаменатель можно, с точностью до знака, истолковать как



площади бесконечно малой фигуры после и до деформации. Знак якобиана тоже имеет наглядный смысл: якобиан положителен, если после деформации направление обхода малого замкнутого контура сохраняется (т. е., если оно было положительным, то и останется положительным), и отрицателен в противном случае, т. е. когда рассматриваемый малый участок плоскости как бы «выворачивается наизнанку», как это бывает при зеркальном отражении. Якобиан, вообще говоря, не постоянен, а принимает в различных точках плоскости различные значения, т. е. и коэффициент искажения площадей в различных точках различен.

Нетрудно усмотреть непосредственную аналогию между указанным здесь смыслом абсолютной величины и знака якобиана и описанным в §3 смыслом абсолютной величины и знака производной  $\partial x/\partial \xi$  для эволюции одномерной среды.

Позже мы будем рассматривать семейства отображений плоскости  $\xi, \eta$  в плоскость  $x, y$  непрерывно зависящих от параметра  $t$ . Из сказанного выше следует, что если при некотором значении  $t$  якобиан отображения всюду положителен, то при изменении  $t$  он будет оставаться положительным до тех пор, пока у этого отображения не возникнет складка. Тогда на той части плоскости  $\xi, \eta$ , которая при отображении окажется «вывернутой наизнанку», якобиан станет отрицательным, а на линии, вдоль которой осуществляется складка, якобиан будет равен нулю. Подробнее об образовании складок будет сказано в §§II.10 и III.6.

Полученный результат применяется, в частности, для выражения различных параметров среды в лагранжевых координатах. Пусть, например, известна исходная плотность среды  $\rho_0(\xi, \eta) = \rho(\xi, \eta, t_0)$  (в расчете на единицу площади) и дано, что масса каждого элемента среды в процессе его эволюции не меняется. Тогда плотность меняется обратно пропорционально площади, т. е.

$$dm = \rho_0 |D(\xi, \eta)| = \rho |D(x, y)|,$$

откуда

$$\rho(x, y, t) = \rho_0(\xi, \eta) \left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right| = \rho_0(\xi, \eta) \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right|^{-1}. \quad (7)$$

В частности, если среда в процессе эволюции образует складку, то, как было сказано, вдоль линии складки будет  $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = 0$ ; значит, вдоль этой линии будет  $\rho = \infty$ .

Если мысленно выделенная в момент  $t_0$  область  $(K_0)$  в процессе эволюции преобразовалась в момент  $t$  в область  $(K)$  без перекрытий, то массу среды в этой области можно выразить как в эйлеровых координатах, так и в лагранжевых:

$$m = \int_{(K)} \rho(x, y, t) dK = \int_{(K_0)} \rho(\xi, \eta, t) dK_0, \quad (8)$$

где  $dK = dx dy = |D(x, y)|$ ,  $dK_0 = d\xi d\eta = |D(\xi, \eta)|$ . Формальный переход от одного интеграла (8) к другому легко осуществляется с помощью формулы (7).

## Упражнения

- 1) Пусть  $\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{i}$ ; найдите  $x(t, \xi, \eta)$ ,  $y(t, \xi, \eta)$ .
- 2) Пусть  $\mathbf{v}(x, y) = \alpha \mathbf{x}$ ; найдите  $x(t, \xi, \eta)$ ,  $y(t, \xi, \eta)$ .
- 3) Пусть  $\mathbf{v}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ,  $t_0 = 0$ . Выразите  $\mathbf{v}$  в лагранжевых координатах; найдите  $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$  и истолкуйте результат.
- 4) Пусть  $\mathbf{v} = \frac{1}{2} \sin t \cdot (\xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j})$ ,  $t_0 = 0$ . Найдите выражение  $\mathbf{v}$  в эйлеровых координатах и траектории частиц.
- 5) Пусть плоскость  $x, y$  отображается в себя так, что каждая точка  $(x, y)$  переходит в

точку с координатами  $x' = 2x, y' = 2y$ . Найдите  $\frac{D(x', y')}{D(x, y)}$  и истолкуйте результат.

- 6) То же – для отображения  $x' = |x|, y' = |y|$ .
- 7) Выведите формулы и вычислите якобиан преобразования обратными радиусами (оно же называется *зеркальным отражением плоскости относительно окружности* ( $C$ ) радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ ), при котором каждая точка  $M$  плоскости переходит в точку  $M'$ , лежащую на луче  $OM$ , причем  $OM \cdot OM' = R^2$ . Как согласовать отрицательность якобиана с тем, что каждая точка ( $C$ ) переходит в себя и потому направление обхода ( $C$ ) при отображении сохраняется?
- 8) Выведите формулу для коэффициента искажения объемов при эволюции трехмерной (пространственной) среды. Каков смысл знака получающегося якобиана?  
Указание. Воспользуйтесь формулой для векторно-скалярного (смешанного) произведения трех векторов, заданных своими разложениями в декартовых проекциях, и геометрическим смыслом этого произведения,

## § 5 Движение сосредоточенной порции частиц

Вернемся к одномерному случаю. Описание эволюции среды, введенное в §2, пригодно и при рассмотрении движения сгустка частиц – порции конечной массы, сосредоточенной на участке бесконечно малой длины; сюда же, с помощью введения соответствующего коэффициента пропорциональности, можно включить и описание поведения отдельной частицы.

Напомним свойства *дельта-функции* Дирака  $\delta(x)$  (подробней см., например, в ЭПМ, §VI.1).

Основным определяющим свойством является соотношение  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$ ,

справедливое для любой непрерывной при  $x = 0$  функции  $f(x)$ . Из него вытекает, что функцию  $\delta(x)$  нельзя задать простым указанием ее значений, как обычную функцию, поэтому  $\delta(x)$  называют обобщенной функцией. При действиях с ней можно считать, что она отлична от нуля лишь в бесконечной близости точки  $x = 0$ , причем

$$\delta(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-0}^{+0} \delta(x) dx = 1.$$

Перечисленные свойства дают возможность рассматривать функцию  $\rho = m_0 \delta(x - a)$  как поле плотностей, отвечающее массе  $m_0$ , сосредоточенной в точке  $x = a$ . Дельта-функцию  $\delta(x)$  можно получить в пределе из различных обычных функций, например, из функции  $\frac{k}{\pi(1 + k^2 x^2)}$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Таким образом, если масса  $m_0$  была в момент  $t_0$  сосредоточена в точке  $\xi_0$ , а затем перемещалась как целое (не расплываясь!) по закону  $x = \varphi(\xi_0, t)$  (см. п. 3), то закон изменения поля плотностей имеет вид

$$\rho = m_0 \delta(x - \varphi(\xi_0, t)). \quad (1)$$

В лагранжевых координатах, в силу общей формулы (3.7), этот закон имеет выражение

$$\rho = m_0 \delta(\xi - \xi_0) \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|^{-1} = m_0 \left| \varphi'_{\xi}(\xi_0, t) \right|^{-1} \delta(\xi - \xi_0). \quad (2)$$

Этот результат очевиден: за время от  $t_0$  до  $t$  бесконечно малый участок, на котором сосредоточена масса  $m_0$ , растянется в  $\left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|$  раз, и, чтобы масса осталась равной  $m_0$ , к исходной плотности надо дописать обратный множитель.

Отметим одну принципиальную трудность, возникающую при переходе к лагранжевым координатам: производная  $\left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0}$  имеет смысл, если закон движения  $x(t, \xi)$  известен не

только при  $\xi = \xi_0$ , но и при  $\xi$ , близких к  $\xi_0$ . Эта трудность не возникает, если сгусток частиц накладывается на распределенную среду из частиц. Но если рассматривается только сгусток – в частности, если рассматривается поведение изолированной частицы, – то пользоваться координатами Лагранжа нецелесообразно.

Покажем формальный, основывающийся на свойствах  $\delta$ -функции вывод (2) из (1), предполагая для простоты, что в процессе эволюции частицы не перелезают одна через другую, откуда вытекает, что функция  $x = \varphi(\xi, t)$  при фиксированном  $t$  – возрастающая (почему?). Для этого заметим, что если  $f(x)$  – какая угодно возрастающая функция, равная нулю при  $x = a$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x)) dx = \int_{f(-\infty)}^{f(\infty)} \delta(s) \frac{ds}{f'(x)} = \frac{1}{f'(a)}$$

(в первом переходе мы совершили подстановку  $f(x) = s$ , откуда  $f'(x)dx = ds$ ,  $dx = ds/f'(x)$ , а во втором воспользовались основным определяющим свойством дельта-функции).

Поэтому имеет место общая формула

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{f'(a)} \delta(x - a). \quad (3)$$

Отсюда, переходя в правой части (1) к лагранжевым координатам, получим

$$\rho = m_0 \delta(x(t, \xi) - x(t, \xi_0)) = m_0 [x'_\xi(t, \xi_0)]^{-1} \delta(\xi - \xi_0),$$

т. е. формулу (2).

## Упражнение

- 1) Напишите выражения в координатах Эйлера и Лагранжа для поля плотностей при эволюции сосредоточенной порции частиц в случае плоской среды.

## § 6 Поток величины

Понятие потока – это одно из важных понятий физики сплошной среды. Понятие потока можно ввести для любого интегрального параметра среды – такого, как масса, заряд, энергия и т. д.

Начнем с одномерного случая и будем для определенности говорить о массе  $m$ . Мы уже упоминали в §2, что плотность среды

$$\rho = \rho(x, t) = \frac{dm}{dx}$$

является локальным параметром среды. Величина

$$q = q(x, t) = \rho v = \frac{dm}{dx} v$$

( $v$  – скорость среды), которая также является локальным параметром среды, называется, по определению, *потоком* массы (говорят также – массовой скоростью). В каждой точке оси  $x$  в каждый момент времени знак потока совпадает со знаком скорости, т. е. поток положителен, если среда движется в положительном направлении, и отрицателен в противном случае. Поток пропорционален как плотности, так и скорости, т. е. увеличить поток можно как за счет увеличения плотности, так и за счет увеличения скорости частиц.

Нетрудно установить физический смысл потока. Через точку  $x$  за время  $dt$  проходит участок среды длины  $dx = vdt$ ; масса этого участка равна

$$\rho dx = \rho v dt = q dt.$$

Таким образом, поток массы есть масса среды, проходящая через данную точку оси за

единицу времени. Этому отвечает и размерность потока:

$$[q] = [\rho v] = \frac{[m][x]}{[x][t]} = \frac{[m]}{[t]}.$$

Аналогично вводится и аналогичный смысл имеет поток любого другого интегрального параметра  $s$  среды. Соответствующая плотность есть

$$\rho_s = \rho_s(x, t) = \frac{ds}{dx}, \text{ т. е. } s = \int \rho_s dx. \quad (1)$$

а поток –

$$q_s = q_s(x, t) = \rho_s v = \frac{ds}{dx} v.$$

При этом размерности

$$[\rho_s] = \frac{[s]}{[x]}, \quad [q_s] = \frac{[s]}{[t]}.$$

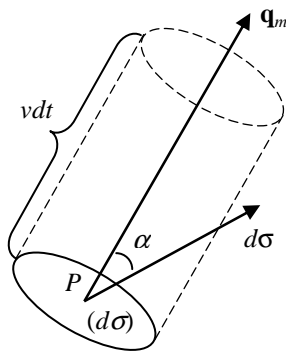
При рассмотрении движения среды на плоскости или в пространстве обнаруживается векторный характер потока. Пусть рассматривается какой-либо скалярный интегральный параметр среды в пространстве – например, масса  $m$ . Потоком массы называется вектор (точнее, векторное поле)

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{q}_m(P, t) = \rho \mathbf{v} = \frac{dm}{d\Omega} \mathbf{v}$$

( $\Omega$  – объем). В каждой точке  $P$  пространства он направлен туда же, куда и скорость частиц.

Размерность потока массы в пространстве

$$[\mathbf{q}_m] = \frac{[m]}{[\Omega]} [\mathbf{v}] = \frac{[m][l]}{[l]^3 [t]} = \frac{[m]}{[l]^2 [t]}.$$



В частности, такую размерность имеет поток массы в случае *одномерного движения в пространстве*, т. е. когда скорость частиц параллельна некоторой оси, а локальные характеристики среды зависят только от координаты, отсчитываемой вдоль этой оси, например,  $\mathbf{v} = v(x, t)\mathbf{i}$ ,  $\rho = \rho(x, t)$ . Как видим, эта размерность отличается от размерности потока массы при движении на прямой. Обратите внимание, что  $\rho$  здесь измеряется в  $г \cdot см^{-3}$ , а не в  $г \cdot см^{-1}$ , как в §2.

Чтобы установить физический смысл потока массы в пространстве, выберем мысленно в пространстве ориентированную (т. е. с указанными внешней и внутренней

Рис. 4

сторонами) элементарную площадку ( $d\sigma$ ) (рис. 4). Как известно, такую площадку принято изображать вектором  $d\sigma$ , направленным перпендикулярно ( $d\sigma$ ) от внутренней стороны к наружной и по модулю равным площади ( $d\sigma$ ) (см., например, ЭПМ, §X.4). За время  $dt$  через эту площадку пройдет порция среды, заполняющая косою цилиндром, показанный на рис. 4 пунктиром; масса этой порции равна

$$d^2 m = \rho(v dt \cos \alpha) d\sigma = |\mathbf{q}_m| d\sigma \cos(\mathbf{q}_m \wedge d\sigma) dt = \mathbf{q}_m \cdot d\sigma dt$$

(знак  $d^2$  здесь подчеркивает, что как  $d\sigma$ , так и  $dt$  бесконечно малы, т. е. получается как бы смешанный дифференциал). Отсюда

$$\mathbf{q}_m \cdot d\sigma = \frac{d^2 m}{dt}, \quad (2)$$

т. е. скалярное произведение потока массы на вектор элементарной площадки равно массе среды, проносимой через эту площадку изнутри наружу за единицу времени. Если в одной и той же точке  $P$  выбирать направление площадки ( $d\sigma$ ) по-разному, то в силу формулы (2) наибольшее значение  $d^2 m/dt$  получится, когда ( $d\sigma$ ) направлена

перпендикулярно  $\mathbf{q}_m$ , причем это значение равно  $q_m d\sigma$ . Итак, вектор  $\mathbf{q}_m$  указывает направление распространения массы, и по модулю он равен скорости этого распространения, в расчете на единицу площади.

Суммируя элементы (2) (они, вообще говоря, имеют различный знак и могут равняться нулю, если  $\mathbf{q}_m \parallel (d\sigma)$ ), получаем поток массы<sup>4</sup> через конечную ориентированную поверхность  $(\sigma)$ . В частности, если поверхность  $(\sigma)$  – замкнутая, то соответствующий поток массы

$$\oint_{(\sigma)} \mathbf{q}_m \cdot d\sigma = \oint_{(\sigma)} \rho \mathbf{v} \cdot d\sigma = \frac{dm}{dt}$$

равен массе среды, пронесимой через всю поверхность  $(\sigma)$  изнутри наружу за единицу времени.

В разобранным примере поток  $\mathbf{q}_m$  как бы несли на себе частицы, движущиеся со скоростью среды. Но о потоке  $\mathbf{q}_s$  какой-либо интегральной характеристики  $s$  среды можно говорить и в более общем случае – всегда, когда имеет место формула

$$\mathbf{q}_s \cdot d\sigma = \frac{d^2 s}{dt}, \quad (3)$$

аналогичная (2), где в числителе правой части стоит количество величины  $s$ , пронесимой через  $(d\sigma)$  изнутри наружу за время  $dt$ . При этом перенос  $s$  не обязан быть связанным с «регулярным» движением частиц и даже вообще с частицами. Приведем несколько примеров.

Допустим, что движется смесь нескольких сортов частиц, причем каждый сорт со своей скоростью. Обозначим плотность  $l$ -й компоненты (1-го сорта) среды через  $\rho_l$ , а скорость этой компоненты – через  $\mathbf{v}_l$ . В этом случае соотношение (2) будет, очевидно, выполнено, если положить

$$\mathbf{q}_m = \sum_l \rho_l \mathbf{v}_l.$$

Получающаяся картина с точки зрения баланса масс эквивалентна движению

фиктивной среды плотности  $\rho = \sum_l \rho_l$  с единой средней скоростью  $\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \sum_l \rho_l \mathbf{v}_l$ . При

этом можно написать старую формулу  $\mathbf{q}_m = \rho \mathbf{v}$ , однако теперь уже  $\mathbf{v}$  не будет скоростью каких-то частиц. Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении движения заряженных частиц, если в качестве интегральной характеристики выбрать заряд  $e$ . При этом из общего определения (3) видно, что потоком заряда служит плотность тока  $\mathbf{j} = \mathbf{q}_e$ . Если движутся частицы только одного сорта с плотностью зарядов в среде  $\sigma = e_0 dn/d\Omega$  (здесь  $dn/d\Omega$  – количество частиц на единицу объема,  $e_0$  – заряд одной частицы) и скоростью  $\mathbf{v}$ , то  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{v}$ . Если же движутся частицы разных сортов, то, как в предыдущем абзаце,  $\mathbf{j} = \sum_l \sigma_l \mathbf{v}_l$ . Новым здесь является то, что плотности  $\sigma_l$  могут быть разного знака. В частности, возможен случай, когда  $\sum_l \sigma_l \equiv 0$ , но  $\sum_l \sigma_l \mathbf{v}_l \neq 0$ . В этом случае суммарный заряд в любом объеме равен нулю, но суммарный ток отличен от нуля, так что заменить, как в предыдущем абзаце, всю картину на движение некоторой фиктивной среды с единой скоростью уже невозможно.

Так, например, металлический проводник можно представить себе как жесткий каркас из положительных ионов (неподвижных в системе координат, жестко связанной с этим проводником), заполненный облаком из легко движущихся электронов. При этом

<sup>4</sup> Согласно терминологии векторного анализа (ЭПМ, §X.4), надо было бы говорить «поток потока массы», так как слово «поток» имеет два разных смысла: один – введенный выше и другой – поток любого вектора  $\mathbf{a}$  через любую ориентированную поверхность  $(\sigma)$ , равный  $\int_{(\sigma)} \mathbf{a} \cdot d\sigma$ . Но мы все же будем говорить «поток массы», хотя при этом надо тщательно следить, какой именно поток имеется в виду (особенно позже, когда мы будем говорить о переносе векторных интегральных характеристик).

заряды ионов и электронов по абсолютной величине равны и в каждом конечном объеме количество ионов равно количеству электронов. Считая ионы 1-й средой, а электроны – 2-й, получаем, что  $\sigma_1 = -\sigma_2$ , т. е.  $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ , суммарный заряд в любом конечном объеме равен нулю. Если проводник неподвижен в пространстве, то  $\mathbf{v}_1 = 0$ , и потому плотность тока  $\mathbf{j} = \sigma_2 \mathbf{v}_2$ . Если проводник движется со скоростью  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ , то  $\mathbf{j} = \sigma_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v})$ ; в частности, при  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$  будет  $\mathbf{j} = 0$ , т. е. тока нет (электроны неподвижны относительно каркаса ионов).

В качестве следующего примера рассмотрим диффузию частиц в некоторой среде, причем за интегральный параметр выберем массу  $m$  диффундирующего вещества. Здесь движение диффундирующих частиц является случайным, броуновским, так что для него нельзя указать определенное поле скоростей; однако в §V.3 будет показано, что формула (3) при  $s = m$  имеет место, если положить  $\mathbf{q}_m = -\chi \text{grad } \tilde{\rho}$ , где  $\chi$  – так

называемый *коэффициент диффузии*, а  $\tilde{\rho} = \frac{dm}{d\Omega}$  – плотность диффундирующего

вещества. Таким образом, в этом примере поток массы не связан с определенным, как раньше, полем скоростей частиц.

Аналогичный вид имеет вектор потока  $\mathbf{q}_Q = -b \text{grad } \vartheta$  тепловой энергии  $Q$  в процессе теплопроводности, где температура  $\vartheta$  в простейшем случае пропорциональна плотности тепловой энергии; здесь  $b$  – *коэффициент теплопроводности*. Здесь процесс не всегда связан непосредственно с перемещением частиц. Например, в кристалле атомы колеблются вокруг фиксированных положений равновесия, причем чем выше температура, тем больше амплитуда колебаний. Интенсивные колебания в одной части вызывают за счет сил взаимодействия между соседними молекулами колебания в другой части.

Поток не обязательно связан с материальными частицами. Очень важным примером является поток энергии. Впервые это понятие ввел Н.А.Умов применительно к гидродинамике<sup>5</sup>.

Поток энергии  $E$  (или вектор Умова) равен

$$\mathbf{q}_E = \mathbf{v} \left( p + \rho E_{\text{вн}} + \rho \frac{v^2}{2} \right),$$

где  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $E_{\text{вн}}$  – внутренняя энергия вещества, отнесенная к единице массы. Таким образом, в случае идеальной жидкости или газа вектор  $\mathbf{q}_E$  направлен туда же, куда направлена скорость  $\mathbf{v}$ , отличие  $\mathbf{q}_E$  от  $\mathbf{v}$  выражается скалярным множителем, стоящим в скобках. Связь потока энергии и потока числа частиц в этом случае такова, что энергия и число частиц, проходящих за единицу времени через малую площадку ( $d\sigma$ ), при различных ориентациях площадки меняются в одинаковом отношении, пропорционально. В частности, как масса, так и энергия не проходят через ( $d\sigma$ ) тогда и только тогда, когда  $\mathbf{v} = 0$  или  $\mathbf{v} \perp d\sigma$ , т. е.  $\mathbf{v}$  лежит в плоскости площадки ( $d\sigma$ ), вещество скользит по площадке, не пересекая ее.

Однако эта пропорциональность нарушается при рассмотрении потока через конечную поверхность и, в частности, через замкнутую поверхность. Возможен случай, когда

$$\frac{dM}{dt} = - \int_{(\sigma)} \rho \mathbf{v} \cdot d\sigma, \quad \frac{dN}{dt} = - \int_{(\sigma)} n \mathbf{v} \cdot d\sigma,$$

тогда как

<sup>5</sup> В биографии Н.А.Умова приводится любопытная деталь: защита диссертации, в которой было введено это понятие, продолжалось более восьми часов и была весьма тяжелой. Отметим, что в биологии известен закон, согласно которому онтогенез повторяет филогенез, т. е. развитие отдельного организма повторяет развитие биологического вида. Поэтому можно предполагать, что студент нашей эпохи на какой-то стадии развития подобен крупным физикам XIX века и также нуждается в длительном и подробном разъяснении понятия потока энергии.

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{(\sigma)} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{d}\sigma \neq 0.$$

Здесь  $M, N, E$  – полная масса, число частиц, энергия в объеме ( $\Omega$ ), а интегралы берутся по поверхности ( $\sigma$ ), ограничивающей этот объем. В самом деле, представим себе, что первые два интеграла равны нулю, потому что часть ( $\sigma_1$ ) поверхности ( $\sigma$ ) дает положительный вклад, а часть ( $\sigma_2$ ) – отрицательный и они компенсируют друг друга. Тогда и в третьем интеграле ( $\sigma_1$ ) дает положительный вклад, а ( $\sigma_2$ ) – отрицательный; но они имеют другие множители, другой вес, и поэтому компенсации может не быть. Таким образом, даже в идеальной жидкости поток энергии существенно отличается от потока числа частиц, хотя и совпадает с ним по направлению.

Отметим еще, что в теории теплопроводности поток энергии  $\mathbf{q} = -b \text{grad } \vartheta$  не связан с потоком массы или частиц. Между тем в газе энергия есть только энергия частиц. Казалось бы, что и здесь поток числа частиц и поток энергии должны быть пропорциональны. Причина этого расхождения заключается в следующем: представим себе поток, быстро изменяющийся во времени, так что меняется и знак! Тогда средний по времени поток частиц может обратиться в нуль при отличном от нуля среднем потоке энергии – так же, как выше, при усреднении по поверхности. Поток энергии электромагнитного поля, состояние которого в каждой точке пространства (для случая вакуума) в каждый момент времени характеризуется двумя векторами – электрическим  $\mathbf{E}$  и магнитным  $\mathbf{H}$ , был найден Пойнтингом:

$$\mathbf{q} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

( $c$  – скорость света). Он связан с локальным скалярным параметром электромагнитного поля – плотностью  $\rho_{\mathcal{E}}$  энергии  $\mathcal{E}$

$$\rho_{\mathcal{E}} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$$

формулами

$$\mathcal{E} = \int_{(\Omega)} \rho_{\mathcal{E}} d\Omega, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = - \int_{(\sigma)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{d}\sigma.$$

Вектор  $\mathbf{q}$  в случае электромагнитного поля уже совсем не связан с потоком частиц<sup>6</sup>. Итак, можно рассматривать три типа величин, связанных с интегральными параметрами среды: сам этот параметр, его плотность и поток.

Мы уже упоминали о том, что в качестве интегральных параметров среды можно брать и векторные величины; типичным примером является количество движения

$$\mathbf{D}_{(\Omega)} = \int_{(\Omega)} \rho \mathbf{v} d\Omega$$

материальной среды. Для такой интегральной характеристики  $\mathbf{s}$  формула (3) может также иметь место, но здесь поток  $\mathbf{q}_s$  будет уже не вектором, а *тензором 2-го ранга*. Напомним (см., например, ЭПМ, §IX.5), что тензор 2-го ранга есть объект, характеризуемый своими компонентами, которые преобразуются по определенным правилам при повороте осей декартовых координат. Его можно представить в виде суммы *диад*, т. е. выражений вида  $\mathbf{a}\mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – обычные векторы. Такое *тензорное произведение* не сводится к какому-либо более простому объекту – в отличие, например, от скалярного произведения  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , которое сводится к скаляру. В тензорном произведении можно раскрывать скобки по обычным правилам, но не переставлять сомножители. В частности, можно в каждой диаде разложить все векторы по ортам декартовых осей  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и, совершив перемножение и приведение подобных членов,

<sup>6</sup> В общем случае полный поток всех видов энергии называют вектором Умова – Пойнтинга. Иногда различают вектор Умова в механике и вектор Пойнтинга в теории поля.

преобразовать любой тензор 2-го ранга к виду  $\sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ . Таким образом, как уже было

сказано, каждый такой тензор полностью определяется набором *девяти* величин  $\alpha_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), впрочем, зависящих от выбора координатных осей. Для нас важно также, что диаду можно скалярно множить на вектор по следующему правилу:

$$(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}, \quad (4)$$

т. е. в результате получается вектор.

Вооружась этими сведениями, заметим, что в ситуации, показанной на рис. 4, через площадку ( $d\sigma$ ) за время  $dt$  пройдет порция среды, обладающая количеством движения

$$d^2\mathbf{D} = (d^2m)\mathbf{v} = \rho(vdt\cos\alpha)d\sigma\mathbf{v} = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}\sigma)\mathbf{v}dt.$$

Пользуясь формулой (4), перепишем это равенство в виде

$$\frac{d^2\mathbf{D}}{dt} = (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{d}\sigma. \quad (5)$$

Это как раз равенство вида (3). Таким образом, тензор потока количества движения выражается по формуле

$$\mathbf{q}_D = \rho\mathbf{v}\mathbf{v}. \quad (6)$$

Если в пространстве выбраны оси координат с ортами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , то обе части формулы (5) можно представить в виде разложений  $\mathbf{D} = \sum_i D_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i$ . Это даст

$$\sum_i \frac{d^2 D_i}{dt} \mathbf{e}_i = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}\sigma)\mathbf{v} = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}\sigma) \sum_i v_i \mathbf{e}_i$$

или в проекциях

$$\frac{d^2 D_i}{dt} = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}\sigma)v_i = \rho v_i \sum_j v_j (\mathbf{d}\sigma)_j \quad (i = 1, 2, 3). \quad (7)$$

В частности, если площадка ( $d\sigma$ ) выбрана так, что орт  $\mathbf{e}_j$  направлен к ней по внешней нормали, то правая часть (7) равна  $\rho v_i v_j d\sigma$ . Таким образом, мы получаем смысл компонентов тензора (6)

$$\rho\mathbf{v}\mathbf{v} = \rho \sum_{i,j} v_i v_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j :$$

$\rho v_i v_j$  равно  $i$ -й проекции количества движения среды, пронесимой за единицу времени в положительном направлении  $j$ -й оси через единичную элементарную площадку, расположенную перпендикулярно этой оси.

Подчеркнем еще раз, что здесь рассматривалось упорядоченное движение частиц, т. е. такое, при котором скорость частиц в каждый момент времени однозначно определяется их положением (координатами). Не следует думать, что для неупорядоченного движения частиц, т. е. для среды с рассеянной скоростью поток количества движения получится с помощью простой замены скорости на ее среднее значение. Это ясно уже из рассмотрения одномерного движения частиц в противоположных направлениях с равной плотностью  $\rho/2$ , со скоростью  $\pm v(x,t)$ : при этом в каждой точке средняя скорость равна нулю, тогда как поток количества движения равен  $\rho v^2$ .

В самом деле, частицы, проходящие через произвольную точку  $x = x_0$  слева направо за время  $dt$  приносят в область  $x > x_0$  положительную порцию количества движения, равную  $dmv = \frac{1}{2} \rho v^2 dt$ . За это же время частицы, проходящие через точку  $x = x_0$  справа налево, уносят из указанной области отрицательную порцию количества движения, равную  $dm(-v) = -\frac{1}{2} \rho v^2 dt$ , в результате чего количество движения в этой области возрастет (отрицательную величину нужно вычесть). Итак, обе группы частиц дают



положительный вклад в  $dD/dt$ , т. е. в рассматриваемом случае

$$q_D = \frac{dD}{dt} = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 = \rho v^2.$$

Выведем выражение для потока количества движения при одномерной эволюции среды из частиц с рассеянной скоростью в общем случае. Для этого обозначим через  $F(v, x, t)dv$  относительную долю числа частиц, имеющих в момент  $t$  координату  $x$ , скорость которых заключена между  $v$  и  $v + dv$ ; другими словами,  $F$  есть функция распределения вероятностей скорости частицы (конечно, зависящая от координаты и момента времени как от параметров). За время  $dt$  через точку  $x$  перейдет порция этих частиц, расположенная на участке длины  $vdt$ ; эта порция будет нести количество движения  $\rho v dt \cdot v \cdot F dv$ , где, вообще говоря,  $\rho = \rho(x, t, v)$ . Суммируя эти порции, получаем

$$dD = \int_{v=-\infty}^{\infty} \rho v^2 dt F dv,$$

откуда поток количества движения равен

$$q_D = \frac{dD}{dt} = \int_{v=-\infty}^{\infty} \rho v^2 F dv.$$

Но это есть среднее (по скоростям, при зафиксированных  $t, x$ ) значение величины  $\rho v^2$ , т.е.  $q_D = \overline{\rho v^2}$ .

При этом важно отметить, что в правой части, вообще говоря, нельзя перейти к  $\overline{\rho(\bar{v})^2}$ , так как среднее значение произведения (в частности, квадрата) не обязано равняться произведению средних значений! Так, в примере, с которого мы начали, будет  $\bar{v} = 0$ ,  $\overline{v^2} = v^2 \neq (\bar{v})^2$ .

Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении пространственного движения частиц. Поток  $i$ -й проекции количества движения среды в направлении  $j$ -й оси ( $i, j = 1, 2, 3$ ) равен  $(q_D)_{ij} = \overline{\rho v_i v_j}$ , где осреднение производится по скоростям частиц в данной точке в данный момент времени; можно написать также  $q_D = \overline{\rho \mathbf{v} \mathbf{v}}$ . И здесь перейти к произведению средних скоростей, вообще говоря, невозможно.

Рассмотрим сначала идеальный газ, который покоится при отличной от нуля температуре. Это означает, что частицы (атомы или молекулы) обладают хаотическим распределением скоростей, для которого регулярная составляющая отсутствует, т. е.

для каждой малой порции газа  $\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{n} \sum_k \mathbf{v}^{(k)} = 0$ , а потому и  $\bar{v}_i = 0$  для любого

направления ( $i = 1, 2, 3$ ); здесь индекс  $k$  нумерует частицы в порции, а  $n$  означает общее число частиц в ней. Однако средние квадраты  $\overline{v^2} = \frac{1}{n} \sum_k |\mathbf{v}^{(k)}|^2$  и  $\overline{v_i^2} = \frac{1}{n} \sum_k (v_i^{(k)})^2$

положительны, так как все слагаемые в этих суммах имеют одинаковый знак. Итак, в рассматриваемом случае потока массы нет, но поток количества движения имеется. Пренебрежем на данном этапе рассмотрением взаимодействием частиц газа между собой и остановимся на наиболее простом случае полностью симметричного (изотропного) распределения скоростей частиц. В этом случае все три значения  $\overline{\rho v_i^2}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) равны между собой и положительны, тогда как средние значения  $\overline{\rho v_i v_j}$  при  $i \neq j$  равны нулю.

Тензорные индексы и ученый стиль изложения не должны помешать читателю узнать в обсуждаемом явлении знакомое со школьной скамьи давление газа, которое и порождает поток количества движения, когда газ покоится. Тот факт, что  $(q_D)_{11} = (q_D)_{22} = (q_D)_{33}$ ,  $(q_D)_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ), означает, что давление направлено по нормали к

поверхности при любом расположении этой поверхности; это закон Паскаля, относящийся к давлению жидкостей и газов. В тензорной записи  $(q_D)_{11} = p\delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, равный по определению 1 для  $i = j$  и 0 для  $i \neq j$ ; можно также написать  $\mathbf{q}_D = p\mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  – так называемый единичный тензор, обладающий компонентами  $\delta_{ij}$ .

Если, наряду с хаотическим движением атомов, газ движется как целое, то полный поток количества движения складывается из двух частей:

$$\mathbf{q}_D = \rho\mathbf{v}\mathbf{v} + p\mathbf{I}, \text{ т. е. } (q_D)_{ij} = \rho v_i v_j + p\delta_{ij}. \quad (8)$$

В этой формуле  $\mathbf{v}$  есть средняя скорость (скорость упорядоченного движения), а вклад хаотических скоростей описывается давлением. По порядку величины  $p \sim \rho c^2$ , где  $c$  – скорость звука, так как скорость атомов и молекул мало отличается от скорости звука. Поэтому при медленном дозвуковом движении второй член в правых частях формул (8) гораздо больше первого. Однако в расчет входит всегда сумма сил, действующих на всю поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем.

Если давление  $p$  везде одинаковое (не зависит от координат), то для любой замкнутой поверхности ( $\sigma$ ) будет  $\oint_{(\sigma)} p d\sigma$ . Значит, существенно только отличие давления от

постоянного. Поэтому роль давления оказывается того же порядка, что и роль потока количества движения, переносимого упорядоченным движением газа.

В случае идеального газа давление появилось в результате рассмотрения хаотического движения частиц. Давление в этом случае не связано со столкновениями частиц, с их физическим взаимодействием между собой (отталкиванием, притяжением), соответствующие величины не входят в формулы для давления идеального газа. В частности, можно говорить о давлении бесстолкновительного газа<sup>7</sup>. Однако если хаотические скорости всегда создают давление, то не всякое давление создается хаотическим движением! Взаимодействие частиц – например, отталкивание одноименных электрических зарядов – также можно описать, пользуясь понятием давления или, точнее, тензора  $\mathbf{T} = \mathbf{q}_D$  потока количества движения, создаваемого электрическим полем. Подробное рассмотрение этого описания завело бы нас слишком далеко; отметим только, что выражение  $T_{ij} = \rho v_i v_j$  справедливо в самом простом случае, в общем случае  $T_{ij} = \rho v_i v_j + T'_{ij}$ , где  $T'_{ij}$  содержит вклад хаотических движений среды, средняя скорость которой есть  $\mathbf{v}$ , и вклад, зависящий от электрических и магнитных полей, описывающих те физические взаимодействия, которые происходят в рассматриваемой системе. Тензор с компонентами  $T'_{ij}$  обобщает понятие давления; в простейшем изотропном случае, когда все направления равноценны,  $T'_{ij} = p\delta_{ij}$ , т.е. имеет место закон Паскаля<sup>8</sup>.

## Упражнения

- 1) Получите выражение для вектора потока объема  $\Omega$ , заполняемого средой, при ее движении в пространстве; потока кинетической энергии  $T$ ; потока потенциальной энергии  $U$ , если на среду воздействует силовое поле так, что элемент  $dm$  среды имеет потенциальную энергию  $u(x, y, z)dm$ .
- 2) Получите выражение для тензора потока момента  $\mathbf{G}$  количества движения.

<sup>7</sup> Роль столкновений косвенная: они изменяют хаотические скорости частиц, от которых, в свою очередь, зависит давление.

<sup>8</sup> Подробный обзор теории давления при различных плотностях и температурах вещества дан в книге Я.Б.Зельдовича и И.Д.Новикова «Теория тяготения и эволюция звезд», «Наука», 1971.

## § 7 Уравнение неразрывности на прямой

Вернемся к одномерному упорядоченному движению без разброса скоростей и допустим, что масса каждой порции среды в процессе эволюции не меняется, т. е. масса не возникает и не исчезает. Тогда между функциями  $\rho(x, t)$  и  $v(x, t)$ , характеризующими эту эволюцию, имеется простая связь. В самом деле, выделим мысленно интервал с концами  $x$  и  $x + dx$ , на котором в некоторый момент  $t$  находится порция среды массы  $dm = \rho dx$ . За время  $dt$  через левый конец внутрь интервала войдет масса  $q_m dt$  (см. §6), а через правый из интервала выйдет масса  $(q_m + \partial_x q_m) dt$ . Разница между этими величинами идет на изменение массы в интервале, т. е.

$$\partial_t(dm) = q_m dt - (q_m + \partial_x q_m) dt = -\partial_x q_m dt. \quad (1)$$

Отсюда, деля на  $dt dx$  и перенося все члены в одну сторону, получим

$$\frac{\partial q_m}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dm}{dx} \right) = 0. \quad (2)$$

Вспомнив, что  $q_m = \rho v$ ,  $dm = \rho dx$ , приходим окончательно к уравнению неразрывности

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

выражающему закон сохранения масс.

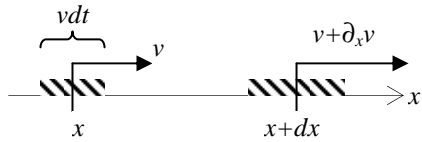


Рис. 5

Ввиду важности этого уравнения повторим вывод, не применяя явно понятия потока. Обратимся к рис. 5. За время  $dt$  в рассматриваемый интервал войдет левая заштрихованная порция среды массы  $\rho v dt$ , а выйдет правая заштрихованная порция массы  $[\rho v + \partial_x(\rho v)] dt$ .

Отсюда  $\partial_t(\rho dx) = -\partial_x(\rho v) dt$  и, деля на  $dt dx$ , мы вновь приходим к уравнению (3).

Иногда предпочитают пользоваться *интегральной формой* этого уравнения. Именно, выделим мысленно произвольный интервал  $(a, b)$  оси  $x$ . Массу среды, находящейся на нем в момент  $t$ , обозначим через  $m_{(a,b)}$ . Тогда баланс масс, аналогичный проведенному при выводе соотношения (1), приводит после деления на  $dt$  к равенству

$$\frac{d}{dt} m_{(a,b)} = q_m|_{x=a} - q_m|_{x=b}. \quad (4)$$

Переход к плотности и скорости дает

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho dx = (\rho v)|_{x=a} - (\rho v)|_{x=b}. \quad (5)$$

Из этого уравнения легко получить (3) и обратно (проделайте это!).

Итак, функции  $\rho(x, t)$  и  $v(x, t)$ , характеризующие эволюцию среды, должны быть связаны между собой уравнением неразрывности (3). Поэтому, хотя любую положительную функцию  $\rho(x, t)$  можно трактовать как закон изменения плотности в некоторой среде, но если эта функция уже известна, то произвол в выборе функции  $v(x, t)$  весьма ограничивается. В самом деле, интегрируя равенство (3) от некоторого фиксированного  $x_0$  до произвольного  $x$  при любом постоянном  $t$ , получим:

$$\rho v = (\rho v)|_{x=x_0} - \int_{x_0}^x \rho'_t(x, t) dx = \varphi(t) - \int_{x_0}^x \rho'_t(x, t) dx,$$

где  $\varphi(t)$  – некоторая функция времени; отсюда

$$v = \frac{\varphi(t)}{\rho(x, t)} - \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{x_0}^x \rho'_t(x, t) dx. \quad (6)$$

Обратно, с помощью непосредственной подстановки легко проверить, что при любой функции  $\varphi(t)$  выражение (6) удовлетворяет соотношению (3). Итак, если закон изменения плотности  $\rho(x, t)$  задан, то закон изменения скорости  $v(x, t)$  определен с точностью до произвольной функции одного лишь времени.

Рассмотрим два важных частных случая, когда уравнение неразрывности приобретает особенно простой вид. Это, во-первых, случай стационарного потока, для которого  $\rho$  и  $v$  не меняются с течением времени  $t$ , а могут зависеть лишь от  $x$ . Для этого случая из сохранения массы сразу следует, что поток массы должен быть во всех точках одинаковым:

$$q_m(x) = \rho(x)v(x) = \text{const}, \quad (7)$$

где правая часть не зависит ни от  $t$ , ни от  $x$ . Впрочем, это легко и формально вывести из уравнений (3) или (5).

Рассмотрим, во-вторых, однородный поток, для которого  $\rho$  и  $v$  не зависят от  $x$ , а могут зависеть только от  $t$ . Для такого потока из (3) получаем, что  $\rho \equiv \rho_0 = \text{const}$ , тогда как  $v$  может произвольно зависеть от  $t$ . Об этом случае мы упоминали в конце §2.

Выведем теперь уравнение неразрывности в координатах Лагранжа. Для этого заметим, что масса  $\rho dx$  среды на интервале,  $dx$  движущемся вместе со средой, остается

неизменной. Значит,  $\frac{d}{dt}(\rho dx) = 0$ ; однако  $dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi$ , и потому мы приходим к

равенству

$$\frac{d}{dt} \left( \rho \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (8)$$

которое и служит уравнением неразрывности. Его выполнение равносильно требованию, чтобы  $\rho \frac{\partial x}{\partial \xi}$  было постоянным при постоянном  $\xi$ , т. е. вдоль траектории каждой частицы. Это тоже ясно: так как  $\frac{\partial x}{\partial \xi}$  равна коэффициенту удлинения малого участка среды в процессе движения, то мы получаем, что во сколько раз удлинится участок, во столько же раз уменьшается плотность среды на этом участке, что равносильно закону сохранения масс.

Перепишем уравнение неразрывности (3) еще в одной полезной форме. Для этого раскроем скобки, что даст

$$\rho \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Если теперь вспомнить общее выражение (3.5) для полной производной по времени, мы получим уравнение

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Вывод уравнения неразрывности (3) с помощью промежуточного соотношения (2) показывает, что аналогичное уравнение

$$\frac{\partial q_s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right) = 0 \quad (10)$$

или равносильное интегральное соотношение

$$\frac{d}{dt} s_{(a,b)} = q_s|_{x=a} - q_s|_{x=b} \quad (11)$$

(см. (4)) справедливо для любого интегрального параметра  $s$ , не возникающего и не исчезающего в рассматриваемом процессе. Последнее означает, что изменение величины  $s$ , отвечающей участку среды, заключенному в каком-либо интервале, должно полностью определяться протеканием  $s$  через концы этого интервала. Это условие и выражает равенство (11), из которого легко выводится уравнение неразрывности (10) для величины  $s$ .

Если рассматриваемый интегральный параметр  $s$  не остается неизменным, так что на интервале длины  $dx$  за время  $dt$  он добавляется в количестве  $\varphi_s dx dt$  (где  $\varphi_s = \varphi_s(x,t)$  – плотность скорости «притока» параметра  $s$  может быть любого знака), то уравнение неразрывности, взамен (10), примет, очевидно, форму

$$\frac{\partial q_s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{ds}{dx} \right) = \varphi_s. \quad (12)$$

Если в уравнение (12) подставить  $ds/dx = \rho_s$  (см. формулу (6.1)) и проинтегрировать обе части по  $x$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , мы получим после простого преобразования

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_s dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_s dx + q_s|_{x=-\infty} - q_s|_{x=\infty}.$$

Пусть, как это часто бывает, поток  $q_s$  при  $x = \pm\infty$  равен нулю. Тогда получаем формулу

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_s dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_s dx,$$

имеющую очевидный смысл (продумайте его!). Отметим, что из этой формулы не следует, вообще говоря, что

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} = \varphi_s, \quad (13)$$

равны только интегралы от обеих частей. Равенство (13), как видно из (12), имеет место, только если поток  $q_s$  не зависит от  $x$ , а при условии  $q_s|_{x=\pm\infty} = 0$  – только если  $q_s \equiv 0$ .

Приведем примеры. Взяв в качестве интегрального параметра количество движения  $D$ , получим в силу §6

$$q_D = \rho v^2, \quad \frac{dD}{dx} = \rho v.$$

Отсюда по формуле (12)

$$\varphi_D = \frac{\partial q_D}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dD}{dx} \right) = \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t}. \quad (14)$$

Преобразуя правую часть по тому же образцу, как при выводе уравнения (9), и пользуясь соотношением (9), получаем

$$\varphi_D = \frac{d(\rho v)}{dt} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{d(\rho v)}{dt} - v \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{dv}{dt}.$$

Правая часть после умножения на  $dx$  дает  $(dm)a$ , произведение массы на ускорение, т.е., согласно второму закону Ньютона, силу, действующую на порцию среды. Таким образом, в данном примере уравнение неразрывности равносильно известному выводу о том, что приращение количества движения равно импульсу действующей силы. (Мы рассматриваем среду, в которой нет рассеивания скоростей и силового взаимодействия между частицами, т.е. нет давления. Поэтому на частицы может действовать только внешняя сила.)

Выберем теперь за интегральный параметр одномерной среды ее кинетическую энергию  $T$ . Здесь, как нетрудно проверить,

$$q_T = \frac{1}{2} \rho v^3, \quad \frac{dT}{dx} = \frac{1}{2} \rho v^2.$$

Совершая те же преобразования, что в предыдущем абзаце, получим

$$\begin{aligned} \varphi_T &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho v^3 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) - \frac{1}{2} v^2 \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2} \rho \frac{dv^2}{dt} = \left( \rho \frac{dv}{dt} \right) v. \end{aligned}$$

Правая часть, после умножения на их, равна произведению силы на скорость, т.е. мощности. Мы приходим к известному выводу о том, что скорость приращения кинетической энергии равна мощности действующей силы.

В качестве третьего примера рассмотрим уравнение неразрывности для зарядов. Так как заряды сохраняются, то на основании §6 оно имеет вид

$$\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0,$$

где  $j$  – сила тока, а  $\sigma$  – линейная плотность зарядов, которая, в отличие от плотности масс, может быть любого знака.

Часто в лабораторных условиях  $\sigma$  оказывается малым по сравнению с  $jt/x$ , где для  $j$ ,  $t$  и  $x$  выбираются их характерные значения (в противном случае потенциалы становятся огромными). Тогда можно приближенно положить  $\sigma = 0$  и потому  $\partial j/\partial x = 0$ , т. е. ток во всех точках одинаков и может зависеть только от времени.

## Упражнения

1)

а) Пусть в условиях сохранения массы  $\rho = \frac{1}{1+x^2}$ ; каково общее выражение для  $v(x, t)$ ? Как объяснить поведение  $v$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ ?

б) Те же вопросы для  $\rho = t^2$ .

2) Как изменится соотношение (7), если дано, что частицы могут удаляться из системы, но не меняется

а) количество движения порций среды или

б) кинетическая энергия порций среды.

3) Проведите формальный вывод уравнения (8) из (3).

Указание. Продифференцируйте равенство (3.1) по  $\xi$  при фиксированном  $t$ .

## § 8 Уравнение неразрывности в пространстве

Перейдем теперь к выводу уравнения неразрывности в пространстве (для плоскости оно выглядит аналогично), причем будем рассматривать произвольный скалярный интегральный параметр  $s$ , не возникающий и не исчезающий в рассматриваемом процессе и обладающий потоком  $\mathbf{q}_s$  (§6). Условие сохранения  $s$  означает, что для любой области ( $\Omega$ ) с поверхностью ( $\sigma$ ) изменение величины  $s$  в ( $\Omega$ ) должно равняться количеству  $s$ , протекающему через ( $\sigma$ ). Если вспомнить выражение из §6 для скорости протекания  $s$  через любую поверхность, то мы приходим к интегральной записи закона сохранения:

$$\frac{d}{dt} s_{(\Omega)} = \frac{d}{dt} \int_{(\Omega)} \rho_s d\Omega = - \int_{(\sigma)} \mathbf{q}_s \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad \left( \rho_s = \frac{ds}{d\Omega} \right); \quad (1)$$

при этом знак минус в правой части объясняется тем, что если  $\mathbf{q}_s$  образует с  $d\boldsymbol{\sigma}$  острый угол, т. е.  $\mathbf{q}_s \cdot d\boldsymbol{\sigma} > 0$ , то  $s$  проходит через ( $d\sigma$ ) изнутри наружу, т. е. количество  $s$  в ( $\Omega$ ) убывает.

Чтобы перейти к дифференциальной форме закона сохранения, вспомним формулу Остроградского (см., например, ЭПМ, §X.7)

$$\oint_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{A} dV, \quad (2)$$

справедливую для любого векторного поля  $\mathbf{A}$ ; здесь  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ , *дивергенция* поля  $\mathbf{A}$ , – скалярное поле, связанное с  $\mathbf{A}$  в декартовых координатах формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{A}.$$

Дивергенция поля  $\mathbf{A}$  равна плотности источника векторных линий этого поля, т. е. потоку вектора  $\mathbf{A}$  через малую замкнутую поверхность, деленному на объем, ограниченный этой поверхностью.

Применяя ко второму интегралу в (1) формулу Остроградского и проводя в первом интеграле дифференцирование по  $t$  как по параметру (поскольку область ( $\Omega$ ) не зависит

от  $t$ ), получим

$$\int_{(\Omega)} \left( \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}_s \right) d\Omega = 0,$$

откуда, учитывая произвольность области  $(\Omega)$ ,

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}_s = 0. \quad (3)$$

Это – уравнение неразрывности в дифференциальной форме, аналогичной (7.10). Умножив обе части на  $d\Omega$ , мы получаем из него баланс величины  $s$  в малом объеме  $(d\Omega)$  (продумайте это!).

Например, если речь идет о потоке массы  $m$ , то  $\rho_m = \rho$ ,  $\mathbf{q}_m = \rho \mathbf{v}$ , и уравнение неразрывности приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4)$$

аналогичный (7.3).

Выразим последнее уравнение через полную производную по времени (§4). Для этого заметим, что

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) \cdot \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho, \quad (5)$$

где

$$\operatorname{grad} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla \rho$$

– *градиент* плотности (общее понятие градиента см., например, в ЭПМ, §X.2). С другой стороны,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z \right) + \\ &+ \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (4) и применяя формулу (5), получаем

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (6)$$

Уравнение неразрывности, полностью переписанное в лагранжевых координатах  $\xi, \eta, \zeta, t$ , вытекает из формулы (4.7):

$$\frac{d}{dt} \left( \rho \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| \right) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) нетрудно истолковать непосредственно,  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  есть относительная скорость расширения (увеличения объема) среды, в расчете на единицу объема.

Поэтому после умножения на  $\rho$  получается относительная скорость уменьшения массы в расчете на единицу объема, т. е. скорость убывания плотности малой порции частиц в процессе движения. Различие между равносильными формами уравнений (4) и (6) особенно наглядно для стационарных полей: для них  $\partial \rho / \partial t = 0$ , но  $d\rho/dt$ , вообще говоря, отлично от нуля, так как порция частиц в процессе своего движения может попадать в более разреженную зону и расширяться ( $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$ ,  $d\rho/dt < 0$ ) или в более сжатую зону и сжиматься ( $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$ ,  $d\rho/dt > 0$ ).

Из уравнения (4) вытекает, в частности, что если поле  $\rho(P, t)$  полностью известно, то поле массовых скоростей определено с точностью до слагаемого с нулевой дивергенцией, другими словами (см., например, ЭПМ, §XI.6), с точностью до поля вихрей вида  $\operatorname{rot} \Psi(P, t)$ . Таким образом, здесь получается больший произвол, чем в

одномерном случае, где такая добавка могла зависеть лишь от времени.

Если в общем уравнении (3) за характеристику  $s$  среды принять заряд  $e$ , то мы придем к уравнению неразрывности для зарядов

$$\frac{d\sigma}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

в котором  $\sigma$  – плотность зарядов, а  $\mathbf{j}$  – плотность тока. Это уравнение выражает закон сохранения зарядов.

Рассмотрим еще один пример. Пусть среда с плотностью  $\rho$  находится в стационарном потенциальном силовом поле с потенциалом (отнесенным к единице массы)  $u$ .

Выберем в качестве интегрального параметра среды ее полную энергию  $E$  (сумму кинетической и потенциальной энергий). Плотность энергии равна

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u,$$

тогда как поток энергии получается из ответа к упражнению 1 §6:

$$\mathbf{q}_E = \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) \mathbf{v}.$$

Если полная энергия каждой порции частиц в процессе движения сохраняется (для этого, в частности, давление должно быть пренебрежимо малым), то соответствующее уравнение неразрывности приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) + \operatorname{div} \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) \mathbf{v} \right] = 0.$$

После перехода к полной производной по времени получим уравнение

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) + \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (8)$$

первый член которого, после умножения на  $d\Omega$ , дает изменение энергии в объеме  $d\Omega$ , а второй определяется изменением самого объема. Если в условиях предыдущего абзаца не только полная энергия, но и масса сохраняются, то можно воспользоваться уравнением (6) и преобразовать равенство (8) к виду:

$$\frac{d}{dt} \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + u \right) \right] - \frac{d\rho}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 + u \right) = 0, \text{ т. е. } \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 + u \right) = 0.$$

Таким образом, при движении каждой малой порции среды (и даже каждой отдельной частицы) выражение  $\frac{1}{2} v^2 + u$  остается постоянным:

$$\frac{1}{2} v^2 + u = \text{const}. \quad (9)$$

Это можно было написать сразу, заметив, что сумма  $\frac{1}{2} v^2 dm + u dm$  как раз равна полной энергии этой порции.

Уравнение неразрывности, аналогичное (3), имеет место и для векторного интегрального параметра  $\mathbf{s}$  (§6), остающегося неизменным в процессе эволюции среды, если соответственно уточнить понятие дивергенции тензора  $\mathbf{q}_s$ . Мы не станем здесь этим заниматься; отметим, например, что уравнение неразрывности для количества движения, если последнее сохраняется, в сочетании с уравнением неразрывности для массы (4) может быть преобразовано к виду  $d\mathbf{v}/dt = 0$ , т. е. означает, что каждая частица движется с постоянной скоростью. (См. упражнения.)

## Упражнения

- 1) Дайте формальное определение дивергенции тензора общего вида  $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  (т. е. тензора с компонентами  $a_{ij}$ ) так, чтобы для этого тензора имела место формула



Остроградского.

2) Докажите утверждение, приведенное в конце последнего абзаца.

## § 9 Преобразование Галилея

При решении многих задач физики приходится совершать преобразование (замену) координат. Часто такое преобразование не затрагивает времени: например, широко применяется переход от декартовых к полярным координатам на плоскости, цилиндрическим и сферическим координатам в пространстве. Такой переход обычно имеет чисто технический характер, он бывает связан с удобством написания или решения уравнений в той или иной системе координат.

Более глубокий характер имеют преобразования, затрагивающие время. Мы рассмотрим здесь одно из наиболее важных таких преобразований – преобразование Галилея, возникающее при переходе от одной инерционной системы отсчета к другой, т. е. при переходе к системе отсчета, поступательно перемещающейся относительно исходной системы с постоянной скоростью. Если обозначить скорость этого перемещения буквой  $\mathbf{V}_0$  и предположить для простоты, что в момент  $t = 0$  начала координат обеих систем совпадали, то мы приходим к соотношениям  $t = t'$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}_0 t'$ , т. е.

$$x = x' + V_{0x}t', \quad y = y' + V_{0y}t', \quad z = z' + V_{0z}t', \quad (1)$$

связывающим старые координаты с новыми, обозначенными штрихами. По этим формулам можно совершать переход от старой системы координат к новой в любом уравнении, включающем координаты, время или производные по ним.

В настоящее время инвариантность физических законов относительно преобразований Галилея представляется совершенно естественной и весьма широко применяется. Но в свое время это открытие, сделанное Галилеем, было крайне нетривиальным, так как решительно противоречило распространенному аристотелевскому представлению об абсолютном пространстве.

Галилей рассматривал одинаковый опыт (например, бросание тела), производимый в доме на берегу реки и в каюте равномерно движущегося по реке корабля.

Инвариантность относительно преобразования Галилея равносильна одинаковости результатов опыта в этих двух ситуациях. Эта инвариантность включает в себя, в частности, закон инерции, т. е. первый закон Ньютона<sup>9</sup>. В самом деле, тело покоится в доме, если на него не действуют силы. Значит, и в каюте тело покоится, если на него не действуют силы. Но тело, которое покоится в каюте, равномерно движется относительно дома. Значит, тело равномерно движется относительно дома, если на это тело не действуют силы! Между тем, древние считали, что для равномерного движения должна быть «причина», должны действовать силы.

Ясно, что при преобразовании Галилея такие локальные параметры среды, как плотность  $\rho$ , температура  $\vartheta$ , не связанные непосредственно с движением, остаются инвариантными; то же относится к производным от этих параметров по пространственным переменным, а также к таким интегральным параметрам, как масса, заряд и т. д.. Напротив, скорость среды не остается инвариантной, она преобразуется по закону

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}_0. \quad (2)$$

Частные производные от указанных локальных параметров по времени также меняются, причем закон этого изменения легко вывести из соотношений (1):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t'} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t'} + \dots = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} V_{0x} + \dots = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \text{grad } \vartheta \cdot \mathbf{V}_0; \quad (3)$$

впрочем, эта формула по существу совпадает с формулой (4.3). Обратите внимание, что хотя  $t = t'$ , но  $\partial \vartheta / \partial t'$  вычисляется при постоянных  $x', y', z'$ , а  $\partial \vartheta / \partial t$  – при постоянных  $x, y,$

<sup>9</sup> Обратите внимание на то, что Ньютон жил приблизительно на 100 лет позже Галилея.

z; из-за этого и получилось различие производных.

Для вывода формулы преобразования потока любого интегрального параметра s заметим, что для любого элемента поверхности ( $d\sigma$ ), с точностью до малых высшего порядка,

$$(d^2s)' = d^2s - \rho_s V_0 dt d\sigma \cos(\mathbf{V}_0 \wedge \mathbf{d}\sigma) = d^2s - \rho_s \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{d}\sigma dt$$

(продумайте эту формулу!). Деля обе части на  $dt$ , мы на основании формулы (6.3) получаем

$$\mathbf{q}'_s \cdot \mathbf{d}\sigma = \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{d}\sigma - \rho_s \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{d}\sigma = (\mathbf{q}_s - \rho_s \mathbf{V}_0) \cdot \mathbf{d}\sigma,$$

откуда в силу произвольности  $\mathbf{d}\sigma$

$$\mathbf{q}'_s = \mathbf{q}_s - \rho_s \mathbf{V}_0. \quad (4)$$

В частности, если  $\mathbf{q}_s = \rho_s \mathbf{v}$ , формула (4) равносильна (2). В этом случае получаем, что если система отсчета движется со скоростью вещества (т. е.  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{v}$ ), то поток в рассматриваемой точке пространства в рассматриваемый момент времени равен нулю.

Мы предоставляем читателю, применяя формулы (3) и (4), убедиться в том, что уравнение неразрывности (8.3) при галилеевой замене переменных сохраняет свою форму; впрочем, эта инвариантность ясна и без всяких выкладок (почему?).

Отметим, что стационарность поля (т. е. неизменяемость его во времени), вообще говоря, неинвариантна относительно преобразований Галилея: стационарное неоднородное поле после такого преобразования может стать нестационарным. Отсюда следует, что и обратно: некоторые нестационарные поля после преобразования Галилея могут стать стационарными, другими словами, они описывают стационарную картину в подвижной системе отсчета. (Конечно, в подавляющем большинстве нестационарные поля являются «истинно нестационарными», т. е. остаются нестационарными в любой галилеевой системе отсчета.) Укажем условия такой «скрытой стационарности» одномерного поля  $\vartheta(x, t)$ : из формулы (3), приравняв левую часть нулю, получим  $\vartheta'_t / \vartheta'_x = v_0 = const$ , откуда с помощью дифференцирования по  $x$  и  $t$  приходим к требуемым условиям:

$$\vartheta''_{xt} \vartheta'_x \equiv \vartheta''_{xx} \vartheta'_t, \quad \vartheta''_{tt} \vartheta'_x \equiv \vartheta''_{xt} \vartheta'_t.$$

Существенно заметить, что кинетическая энергия  $T$  среды из частиц (в отличие от потенциальной) неинвариантна относительно преобразования Галилея:

$$T' = \frac{1}{2} \int \rho v'^2 dx = \frac{1}{2} \int \rho (\mathbf{v} - \mathbf{V}_0)^2 dx = \frac{1}{2} \int \rho v^2 dx - \int \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}_0 dx + \frac{1}{2} \int \rho V_0^2 dx = T - \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_0 + \frac{1}{2} M V_0^2,$$

откуда  $E' = \frac{1}{2} E - \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_0 + \frac{1}{2} M V_0^2$ , где  $\mathbf{K}$  – количество движения, а  $M$  – масса среды. В

частности, если  $M = const$ , то полная энергия  $E'$  в подвижной системе отсчета не зависит от времени, если в исходной системе не только полная энергия, но и количество движения не зависели от времени (например, если на частицы не действуют силы). Если на частицы действуют потенциальные силы, то суммарное количество движения, вообще говоря, меняется, а тогда в подвижной системе полная энергия среды будет меняться во времени. Это находится в соответствии с тем соображением, что закон сохранения полной энергии системы справедлив, если действующее на систему потенциальное силовое поле является стационарным; однако, как мы уже упоминали, после перехода к подвижной системе отсчета стационарность поля, вообще говоря, нарушается.

Заметим в заключение, что, как выяснилось в начале XX века, свойства преобразований Галилея (формула (2)) противоречат экспериментально обнаруженному постоянству скорости света в любой инерционной системе отсчета. Оказалось, что в действительности при переходе от одной инерционной системы отсчета к другой надо пользоваться более сложными преобразованиями, чем (1), – преобразованиями Лоренца. Например, для движения по оси  $x$  со скоростью  $v_x$  соответствующие формулы имеют вид:

$$x' = \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v_x}{c^2} x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}},$$

где  $c$  – скорость света. Подробное обсуждение преобразований Лоренца увело бы нас слишком далеко от темы этой книги. Отметим только, что и здесь сохраняется полная эквивалентность между покоящейся и равномерно движущейся системами координат; поэтому, так же как и раньше, нельзя сказать, какая же система покоится, нет понятия абсолютного покоя. Закон инерции сохраняется. Ясно также, что для малых значений  $v_x/c$ , т. е. для малой скорости инерционных систем друг относительно друга по сравнению со скоростью света формулы преобразования Лоренца переходят в формулы преобразования Галилея.

Усложнение преобразования, необходимость замены преобразования Галилея на преобразование Лоренца следует из того, что скорость света в любой системе одинакова и притом одинакова во всех направлениях. Свет есть явление, описываемое теорией электромагнитных полей. Еще Пуанкаре отметил, что уравнения Максвелла допускают преобразование координат, выписанное выше. Однако только Эйнштейн, с его гениальным ощущением единства природы, понял, что преобразования Лоренца должны относиться не только к электромагнитному полю, но и ко всем явлениям – в частности, к механике. В этом и заключается теория относительности Эйнштейна, остающаяся справедливой независимо от всех последующих открытий новых частиц и новых полей.

Инвариантность относительно преобразований Лоренца – это не свойство одного электромагнитного поля; это свойство всей природы, найденное впервые на примере электромагнитного поля.

## § 10 Эволюция многокомпонентной среды

Для гидродинамики и механики характерно исследование движения вещества и распределения его плотности безотносительно к составу вещества. В сущности, сама возможность такого рассмотрения составляет предмет гордости механика: все без исключения вещества подчиняются законам, им установленным.

Однако потребности химической технологии, а также и других наук (вплоть до биологии) привели к возникновению новой отрасли науки – химической гидродинамики. Для нее характерно рассмотрение систем, состоящих из частиц различного типа. Частицы эти могут превращаться одни в другие. Это могут быть, например, атомы и молекулы или ионы и электроны.

Так, в системе водород – кислород в общем случае присутствуют устойчивые молекулы  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $H_2O$ , известные из элементарной химии; атомы  $H$ ,  $O$ ; радикалы и химически активные молекулы  $OH$ ,  $HO_2$ ,  $H_2O_2$ ,  $O_3$  (в обычных условиях количество атомов и радикалов мало). Вторым примером могут служить пары натрия; здесь в определенном интервале температур присутствуют атомы  $Na$ , электроны  $e^-$  и однократно заряженные ионы  $Na^+$ .

В подобных системах мы следим не только за общей плотностью, но и за составом среды в функции координат и времени. Для этого нужно включить уравнения взаимных превращений частиц различного сорта. В принципе скорость движения частиц разного сорта может быть различна, и возможность этого мы учтем в разбираемом ниже примере. Впрочем, если плотность среды велика, то частицы сталкиваются часто и их средняя скорость становится одинаковой. Иногда различие среднего движения разных сортов частиц описывают так: вводят общую (среднюю) скорость и, кроме того, диффузионные потоки разных сортов частиц относительно вышеуказанного общего (среднего) движения. Здесь мы этого делать не будем.

Рассмотрим типичный пример. Пусть в ионизированной среде имеются нейтральные

атомы  $N$  и положительные ионы  $I_1, I_2$  с зарядом 1 и 2 одного и того же вещества, а также электроны  $E$ , причем каждая из этих компонент имеет в каждой точке пространства определенную плотность и скорость, но эти характеристики для разных компонент неодинаковы. Обозначим плотности числа частиц (число частиц в единице объема) и скорости для каждой из этих компонент соответственно через

$$n_0, n_1, n_2, n_- \text{ и } \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_-.$$

Допустим, что в среде могут происходить реакции типа



Рассмотрим реакцию первого типа. Приняв, что концентрации не слишком велики и потому разложения отдельных нейтральных атомов на ион и электрон происходят независимо друг от друга, получаем, что количество разлагающихся нейтральных атомов в единице объема за единицу времени пропорционально плотности этих атомов, т. е. равно  $An_0$ , где  $A$  – некоторый коэффициент пропорциональности<sup>10</sup>. Протекание же реакции в обратную сторону определяется вероятностью встречи 1-ионов с электронами, и потому скорость этого протекания, в расчете на единицу объема, пропорциональна произведению плотностей 1-ионов и электронов, т. е. равна  $Bn_1n_-$ . Подобным образом, скорость протекания реакции второго типа, в расчете на единицу объема, в направлении слева направо равна  $Cn_1$ , а в обратном направлении равна  $Dn_2n_-$ . Здесь  $B, C, D$  – некоторые коэффициенты пропорциональности.

Напишем дифференциальные уравнения рассматриваемого процесса. Для этого заметим, что для каждого отдельного вида частиц уравнение неразрывности (8.4) уже не обязано выполняться, так как число этих частиц не сохраняется. Это уравнение должно быть изменено подобно тому, как в §7 мы совершили переход от уравнения (10) к (12). Например, для нейтральных атомов мы получаем уравнение

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \operatorname{div}(n_0 \mathbf{v}_0) = -An_0 + Bn_1n_-, \quad (2)$$

так как среда теряет нейтральные атомы с интенсивностью  $An_0$  из-за протекания первой реакции (1) слева направо и приобретает их с интенсивностью  $Bn_1n_-$  из-за протекания этой реакции справа налево. Аналогичным образом, для других компонент мы получаем уравнения (проверьте их!):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div}(n_1 \mathbf{v}_1) &= An_0 - Bn_1n_- - Cn_1 + Dn_2n_-, \\ \frac{\partial n_2}{\partial t} + \operatorname{div}(n_2 \mathbf{v}_2) &= Cn_1 - Dn_2n_-, \\ \frac{\partial n_-}{\partial t} + \operatorname{div}(n_- \mathbf{v}_-) &= An_0 - Bn_1n_- + Cn_1 - Dn_2n_-. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) образуют полную систему дифференциальных уравнений рассматриваемого процесса.

Посмотрим, какие следствия можно вывести из этой системы уравнений. Сложив первые три уравнения – отдельно левые, отдельно правые части, мы видим, что в правой части все члены взаимно уничтожаются, т. е. получается

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_0 + n_1 + n_2) + \operatorname{div}(n_0 \mathbf{v}_0 + n_1 \mathbf{v}_1 + n_2 \mathbf{v}_2) = 0.$$

Сумма, стоящая в первой скобке, – это плотность совместного числа тяжелых частиц, к которым электроны не причисляются. Сумма же, стоящая во второй скобке, на основании §6 равна потоку этого числа частиц. Таким образом, для числа тяжелых частиц выполняется уравнение неразрывности вида (8.3), т. е. мы получили закон

<sup>10</sup> Сам по себе, без внешнего воздействия, нейтральный атом на ион и электрон не разлагается. Такое разложение может быть вызвано внешним полем излучения, которое и определяет коэффициент  $A$ , а также влияет на другие коэффициенты. Все эти коэффициенты, вообще говоря, зависят от пространственных координат и времени.

сохранения числа тяжелых частиц.

После несложных попыток можно обнаружить еще одну комбинацию уравнений, для которой члены в правой части, обязанные своему происхождению реакциям в среде, взаимно уничтожаются. Для этого надо к первому из уравнений (3) прибавить удвоенное второе и из результата вычесть третье. Мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_1 + 2n_2 - n_-) + \operatorname{div}(n_1 \mathbf{v}_1 + 2n_2 \mathbf{v}_2 - n_- \mathbf{v}_-) = 0. \quad (4)$$

Теперь в первых скобках стоит плотность суммарного заряда частиц (измеренная в элементарных зарядах), а во вторых скобках – поток этого заряда, т. е. плотность  $\mathbf{j}$  тока. Мы получили закон сохранения заряда.

Обычно значение  $n_1 + 2n_2 - n_-$  мало по сравнению с каждым из слагаемых, так как заряды везде малы. Положив  $n_1 + 2n_2 - n_- = 0$ , из (4) приходим к более простому соотношению  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ .

Итак, законы сохранения получаются как следствие из уравнений процесса, в результате того, что каждый элементарный процесс удовлетворяет законам сохранения.

## Ответы и решения

### §3

$$1) \quad v = \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial t} = t \Rightarrow x = \xi + \frac{t^2}{2}.$$

$$2) \quad v = \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial t} = x \Rightarrow x = \xi e^t.$$

$$3) \quad v = \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial t} = xt \Rightarrow x = \xi e^{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow v = \xi t e^{\frac{t^2}{2}}.$$

$$4) \quad v = \xi + t \Rightarrow x = \xi + \xi t + \frac{t^2}{2} \Rightarrow v(x, t) = \left( x + t + \frac{t^2}{2} \right) (1 + t)^{-1}.$$

$$5) \quad \left. \begin{array}{l} v = t, \\ x = \xi + t^2/2, \\ \vartheta = x/t = \xi/t + t/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{x}{t^2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{\xi}{t^2} = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

$$6) \quad b = 0; a = 0; av_0 + b = 0; a = 0.$$

7) Чтобы более отчетливо различать производные, обозначим время в переменных Лагранжа буквой  $\tau$ . Дифференцируя равенства (3.1) и (3.2) по  $\xi$ , получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = v'_x(x, t) \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_{t=t_0} = 1. \quad (1)$$

При  $\xi = \xi_0$  коэффициент  $v'_x(x, t)$  обращается в известную функцию  $v'_x(x(t), t)$ .

Рассматривая равенства (1) как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и начальное условие относительно  $\partial x / \partial \xi$  и решая получающуюся задачу с начальным условием, находим

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \exp \int_{t_0}^t v'_x(x_0(t), t) dt = \exp \int_{t_0}^{\tau} v'_x(x_0(t), t) dt$$

(так как  $t = \tau$ ). Далее, очевидно,

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = v(x_0(\tau), \tau), \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1.$$

8) Здесь  $x_0(t) = 0$ , откуда вдоль рассматриваемой траектории  $\frac{\partial x}{\partial \xi} = e^{t^2/2}$ ,  $\partial x / \partial \tau = 0$ ,

$\partial t / \partial \xi = 0, \partial t / \partial \tau = 1$ . Интересно, что в данном примере решение  $x(\xi, \tau)$  нельзя выписать в квадратурах.

9)  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{d\vartheta}{dt} \cdot 1$ ; однако, продифференцировав равенство  $\xi = \xi(x, t)$  по  $t$  при

фиксированном  $\xi$ , получаем:  $0 = \frac{\partial \xi}{\partial x} v + \frac{\partial \xi}{\partial t}$ . Выразив отсюда  $\partial \xi / \partial t$  и подставив

результат в первое равенство, получаем формулу (3.6).

#### §4

1)  $x = \xi + t, y = \eta$ .

2)  $x = \xi e^{\alpha t}, y = \eta e^{\alpha t}$ .

3) Решая систему уравнений  $dx/dt = -y, dy/dt = x$  при начальных условиях  $x|_{t=0} = \xi, y|_{t=0} = \eta$ , получаем  $x = \xi \cos t - \eta \sin t, y = \xi \sin t + \eta \cos t$ , откуда  $\mathbf{v}(\xi, \eta, t) = -$

$$(\xi \sin t + \eta \cos t)\mathbf{i} + (\xi \cos t - \eta \sin t)\mathbf{j}, \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| \equiv 1. \text{ Движение среды реализуется}$$

вращением плоскости как целого вокруг начала координат; при этом площади не меняются.

4)  $\mathbf{v} = \frac{\sin t}{3 - \cos t} \mathbf{r}$ ; траекторией служит отрезок с концами  $(\xi, \eta)$  и  $(2\xi, 2\eta)$ .

5)  $\left| \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \right| \equiv 4$ ; отображение состоит в равномерном растяжении плоскости в два

раза, при котором площади увеличиваются в 4 раза.

6)  $\left| \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \right| = \begin{cases} 1 & xy > 0, \\ -1 & xy < 0. \end{cases}$  Точки первого квадранта остаются на месте, второй и

четвертый квадрант испытывает зеркальное отражение, третий – поворот на  $180^\circ$ .

7) Если точка  $M$  имеет координаты  $\xi, \eta$ , а  $M'$  – координаты  $x, y$ , то

$$x = R^2 \xi (\xi^2 + \eta^2)^{-1}, y = R^2 \eta (\xi^2 + \eta^2)^{-1}, \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| = -\frac{R^4}{(\xi^2 + \eta^2)^2}.$$

Отрицательность якобиана согласуется с тем, что направление обхода каждой малой окружности (кроме окружностей, содержащих внутри себя начало координат, которое для данного отображения является особой точкой) после отображения меняется на противоположное.

8) Воспользовавшись формулой для объема параллелепипеда, построенного на трех заданных векторах (см., например, ЭПМ, §XI.1), получаем, что искомый коэффициент равен

$$\left| \begin{array}{ccc} x'_\xi & y'_\xi & z'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta & z'_\eta \\ x'_\zeta & y'_\zeta & z'_\zeta \end{array} \right| = \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right|,$$

где  $x, y, z$  – эйлеровы,  $\xi, \eta, \zeta$  – лагранжевы пространственные координаты.

Якобиан положителен, если после эволюции правая тройка бесконечно малых векторов остается правой, а левая – левой, и отрицателен, если правая тройка становится левой, а левая – правой.

#### §5

1)  $\rho = m_0 \delta(x - \varphi(t, \xi_0, \eta_0)) \delta(y - \psi(t, \xi_0, \eta_0)) = m_0 \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right|_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \eta=\eta_0}}^{-1} \delta(\xi - \xi_0) \delta(\eta - \eta_0)$

при очевидном смысле участвующих букв.

#### §6

1)  $\mathbf{q}_\Omega = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{q}_T = 1/2\rho v^2\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{q}_U = \rho u\mathbf{v}$ .

2)  $\mathbf{q}_G = r(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\mathbf{v}$  (не путать с векторно-скалярным произведением!),

§7

1)

a)  $v = (1 + x^2)\varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  – произвольная функция; для стационарного потока  $v = C(1 + x^2)$  ( $C = \text{const}$ ). Так как плотность не зависит от времени, то поток массы должен быть во всех точках оси  $x$  одинаков; но при  $x \rightarrow \pm\infty$  плотность стремится к нулю, а потому скорость должна стремиться к бесконечности.

b)  $v = \varphi(t) - 2x/t$ . Так как с ростом  $t$  плотность увеличивается, причем одинаково на всей оси  $x$ , то частицы должны «нагнетаться» из бесконечности, откуда  $v \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \mp\infty$ .

2)

a)  $\rho(x)[v(x)]^2 = \text{const}$

b)  $\rho(x)[v(x)]^3 = \text{const}$ .

3) Из уравнения (7.3) получаем:

$$v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

В силу формулы (3.5) сумма первых двух членов равна  $d\rho/dt$ . Дифференцируя

формулу (3.1) по  $\xi$ , получим:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi}$ , откуда  $\frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^{-1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)$ . Таким

образом, мы приходим к равенству

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^{-1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = 0,$$

из которого легко вытекает соотношение (7.8).

§8

1) Имеем:

$$\int_{(\sigma)} \left( \sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = \sum_i \mathbf{e}_i \int_{(\sigma)} \left( \sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{e}_j \right) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = \sum_i \mathbf{e}_i \int_{(\sigma)} \text{div} \sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{e}_j d\Omega,$$

откуда

$$\text{div} \sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sum_i \left( \text{div} \sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{e}_j \right) \mathbf{e}_i = \sum_i \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i.$$

Обратите внимание, что дивергенцией тензора служит вектор.

2) Уравнение неразрывности для количества движения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \text{div} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = 0. \quad (2)$$

Так как  $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i$ , то  $\mathbf{v} \mathbf{v} = \sum_{i,j} v_i v_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  и в силу решения упражнения 1

$$\text{div} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \sum_{i,j} \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = \sum_j \frac{\partial (\rho v_j \mathbf{v})}{\partial x_j}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2) и раскрывая производную произведения, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} \mathbf{v} + \sum_j \rho v_j \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} = 0.$$

Первый член здесь взаимно уничтожается с третьим в силу уравнения неразрывности (8.4) для массы. Сумму оставшихся членов можно переписать в виде

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_j \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \mathbf{v} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

и так как она равна нулю, то  $dv/dt = 0$ , что и утверждалось.

## Глава II Движения с заданными скоростями на прямой

Задача о построении одномерной среды из частиц, движущихся с заданными скоростями – это одна из наиболее простых задач подобного рода, на которой, тем не менее, наглядно проявляется ряд более общих черт. Поэтому мы займемся ею в первую очередь.

### § 1 Введение

Итак, пусть скорости частиц, составляющих среду, заданы. Но что, собственно, это означает – ведь, вообще говоря, скорости различных частиц различны и не постоянны во времени? Уточнение этого вопроса приводит к двум различным постановкам задачи. В первой постановке должна быть задана скорость каждой частицы как функция времени. Можно себе представить, что каждая частица имеет собственный моторчик, закон работы которого задан. Так как в силу § 1.3 частицы в одномерном случае различаются значением лагранжевой координаты  $\xi$ , то дифференциальное уравнение движения частиц в рассматриваемой постановке задачи имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = F(t, \xi), \quad (1)$$

а начальное условие – вид

$$x|_{t=t_0} = \xi. \quad (2)$$

Интегрирование уравнения (1) при условии (2) не вызывает труда: так как  $\xi$  в процессе интегрирования остается постоянным, то

$$x = x(t, \xi) = \xi + \int_{t_0}^t F(t, \xi) dt. \quad (3)$$

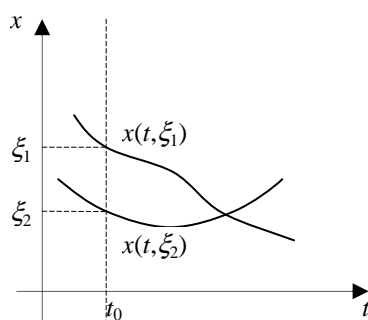


Рис. 6

На рис. 6 изображен возможный вид двух графиков получающейся зависимости  $x(t)$ , отвечающих различным зафиксированным значениям  $\xi$ <sup>11</sup>.

Обратите внимание, что в общем случае нет никаких причин, препятствующих различным таким графикам пересекаться друг с другом. В самом деле, так как законы движения различных частиц между собой никак не связаны и частицы друг с другом не взаимодействуют, то ничто не мешает частицам обгонять одна другую в процессе движения. Получается такая картина, как будто когда одна частица в своем движении настигает какую-либо другую, то проходит сквозь нее, как сквозь привидение, не ощущая никакого воздействия. Так будет, если рассматриваемая система частиц имеет разброс в направлениях  $y, z$ , поперечных оси  $x$ , позволяющий частицам обгонять одна другую без столкновений, и в то же время настолько малый, что систему можно в остальных отношениях считать одномерной. Такое проникновение можно истолковать и иначе, считая, что разброс системы в направлениях, поперечных оси  $x$ , не мал, но мы для простоты, отвлекаясь от двух других координат, проектируем всю картину на ось  $x$ , параллельно которой движутся

<sup>11</sup> Горизонтальное, как на рис. 6, расположение оси  $t$  приводит к естественному виду графиков законов движения частиц. Однако позже мы увидим, что при рассмотрении движения среды применяется и вертикальное расположение оси  $t$ , которое также имеет свои преимущества.



все частицы.

Более подробно вопрос о возможности обгона частицами друг друга мы разберем в §10. Во второй постановке задачи скорость частицы в каждый момент времени задается как функция координаты данной частицы в этот момент времени; другими словами, задается (вообще говоря, нестационарное) поле скоростей движения среды. Здесь можно себе представить, что моторы стоят на берегу потока и каждый из них разгоняет этот поток по своему закону, известному для каждого мотора. Возможен и случай, когда зависимость  $v(x,t)$  измеряется в процессе эксперимента и, тем самым, становится нам известной.

(Заметим еще, что в дальнейшем  $x$  не обязано быть геометрической координатой,  $x$  может быть некоторым скалярным параметром частиц, скорость изменения которого в зависимости от уровня этого параметра и времени нам известна. Например, в качестве «среды» можно рассмотреть совокупность всех звезд данной массы во Вселенной, а буквой  $x$  обозначить светимость звезды. Представив себе ось светимостей, мы можем изображать звезды движущимися точками на этой оси; таким образом, и в этом случае  $x$  удобно интерпретировать как геометрическую координату, что мы будем в дальнейшем делать без особой оговорки.)

Дифференциальное уравнение движения частиц, взамен (1), теперь принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \quad (4)$$

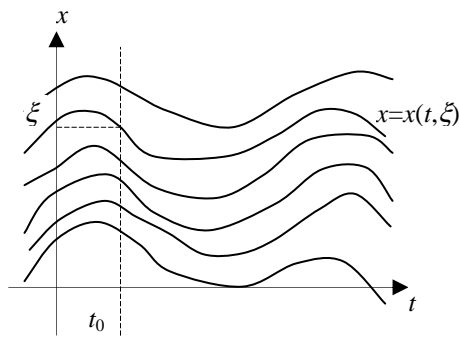


Рис. 7

тогда как начальное условие продолжает иметь вид (2). Теперь уже невозможно в общем виде написать закон движения  $x(t, \xi)$  отдельных частиц, наподобие (3), в явном виде, так как для этого нужно решить дифференциальное уравнение 1-го порядка общего вида (4), что в аналитическом виде удастся сделать только в отдельных специальных случаях (см. §2). Уравнение (4) задает на плоскости  $x, t$  поле направлений, каждая из интегральных линий которого и изображает закон движения соответствующей частицы (рис. 7). Так как через

каждую точку плоскости  $x, t$  проходит ровно одна интегральная кривая, то различные частицы в процессе своего движения не могут достигать и, тем более, обгонять одна другую. (Продумайте это свойство для интерпретации с моторами на берегу, сделанной выше. Отметим, что в §12 мы познакомимся с исключениями из этого правила.)

Мы будем рассматривать обе постановки задачи параллельно.

## § 2 Специальные случаи интегрируемости

Решение уравнения (1.4) при начальном условии (1.2) подробно рассматривается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка (см., например, ЭПМ, §§ VII, 1–2). Напомним некоторые специальные случаи, в которых интегрирование удается осуществить в аналитическом виде.

1. Пусть заданная скорость не зависит от координаты, а зависит только от времени, т. е.  $f = f(t)$ . Тогда решение имеет вид

$$x - \xi = \int_{t_0}^t f(t) dt, \quad \text{т. е.} \quad x = \xi + \int_{t_0}^t f(t) dt.$$

В этом случае среда движется как абсолютно твердое тело, т. е. закон изменения  $\Delta x = x - \xi$  не зависит от значения  $\xi$  (рис. 8), а для любых двух решений  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  разность  $x_1(t) - x_2(t)$  не зависит от  $t$ .

2. Пусть заданная скорость не зависит от времени (такой случай называется *автономным*), т. е.  $f = f(x)$ . Тогда решение получается с помощью деления

переменных:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dx}{f(x)} = dt, \quad \int_{\xi}^x \frac{dx}{f(x)} = t - t_0;$$

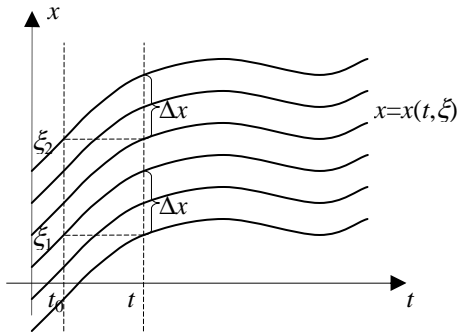


Рис. 8

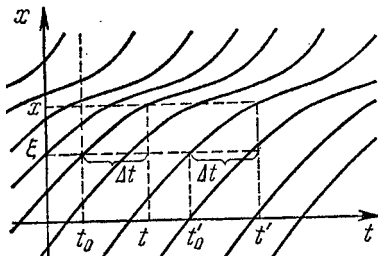


Рис. 9

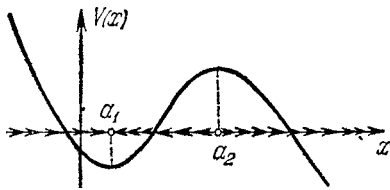


Рис. 10

последнее уравнение еще надо разрешить относительно  $x$ , что даст  $x = x(t - t_0, \xi)$ . Так как значения  $t$  и  $t_0$  входят в закон движения не произвольно, а в виде разности  $\Delta t = t - t_0$ , то получаем, что в автономном случае каждое движение допускает произвольный сдвиг во времени: если  $x(t)$  – решение, то и  $x(t - \text{const})$  – также решение. Впрочем, это непосредственно ясно и из определения автономности (продумайте это!).

Возможная картина расположения интегральных

линий в автономном случае показана на рис. 9.

Введем в автономном случае потенциал скорости

$$V(x) = -\int f(x) dx;$$

нижний предел несуществен, так как потенциал определен с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Тогда дифференциальное уравнение движения можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = -V'(x) \quad \left( V' = \frac{dV}{dx} \right).$$

Таким образом,  $x(t)$  возрастает для тех значений  $x$ , при которых  $V(x)$  убывает, и убывает там, где  $V(x)$  возрастает (см. рис. 10, где стрелки на оси  $x$  показывают направление изменения  $x(t)$ ). Каждая из точек минимума функции  $V(x)$  (на рис. 10 точка  $a_1$ ) служит положением

асимптотически устойчивого равновесия, к которому при  $t \rightarrow \infty$  стремится координата любой достаточно близкой точки. Каждая из точек максимума функции  $V(x)$  (на рис. 10 точка  $a_2$ ) служит положением неустойчивого равновесия. (Простые понятия, связанные с устойчивостью решения, см., например, в ЭПМ, §VII.6.)

3. Разобранный автономный случай, вообще говоря, нелинейный. Однако он имеет важный частный подслучай, когда поле скоростей меняется по линейному закону, т. е.  $f(x) = kx$  ( $k = \text{const}$ ). Соответствующее уравнение  $\dot{x} = kx$  легко интегрируется, что дает

$$x(t) = \xi e^{k(t-t_0)}. \quad (1)$$

При  $k < 0$  потенциал  $V(x) = \frac{|k|}{2} x^2$  имеет точку минимума  $x = 0$ . Из любого начального положения частица стремится к этой точке с экспоненциально затухающей скоростью.

4. Рассмотрим, наконец, комбинированный случай  $f(x, t) = kx + \varphi(t)$ . Соответствующее уравнение (1.4)

$$\dot{x} - kx = \varphi(t) \quad (2)$$

при начальном условии (1.2) легко решить по так называемому методу вариации произвольной постоянной (см., например, ЭПМ, §VII.2) или с помощью

представления  $\dot{x} - kx = e^{kt} \frac{d}{dt} (e^{-kt} x)$ . Мы здесь воспользуемся менее формальным,

хотя в данном примере и более длинным способом, основанным на применении дельта-функции времени (называемой также *импульсной функцией*; см. §1.5). Искомое решение представляет собой сумму решения  $\bar{x}(t)$  однородного уравнения  $\dot{x} - kx = 0$  при начальном условии (1.2) и решения  $X(t)$  уравнения (2) при однородном начальном условии

$$X|_{t=t_0} = 0. \quad (3)$$

Так как  $\bar{x}(t)$  задается формулой (1), то остается найти  $X(t)$ .

Для этого напомним общий принцип построения *функции влияния* (она же называется *функцией Грина*; более подробно см. в ЭПМ, §VI. 2). Пусть внешнее воздействие на какой-либо объект описывается функцией  $f(t)$  (это может быть функция одной или нескольких переменных, которые могут иметь любой физический смысл, но мы для определенности будем говорить о функциях одной переменной – времени), а результат этого воздействия – функцией  $F(s)$ . Тогда говорят, что задан *оператор* преобразования функции-прообраза  $f$  в функцию-образ  $F$ ; обозначив этот оператор через  $L$ , можно написать  $F = Lf$ . Если при этом действует *принцип суперпозиции*, т. е. при сложении внешних воздействий их результаты также складываются, то оператор называется *линейным* (формальное определение линейности можно записать так:  $L(f_1 + f_2) = Lf_1 + Lf_2$ ,  $L(cf) = cL(f)$ , где  $c = \text{const}$ ). Построение функции влияния возможно только для линейного оператора, и мы будем предполагать в дальнейшем, что заданный оператор  $L$  линеен.

Обозначим через  $G(s, \tau)$  результат воздействия на систему единичного импульса, приложенного в момент  $\tau$ , т.е.  $G(s, \tau) = L(\delta t - \tau)$ , где  $\delta$  – дельта-функция (§1.5).  $G$  и есть функция влияния для оператора  $L$ , через нее нетрудно записать результат применения этого оператора к любой функции  $f$ . В самом деле, представив  $f(t)$  в виде непрерывной последовательности бесконечно малых импульсов  $f(\tau)d\tau\delta t - \tau$  и воспользовавшись принципом суперпозиции, получаем

$$L(f(t)) = L \int (f(\tau)d\tau)\delta(t - \tau) = \int L[(f(\tau)d\tau)\delta(t - \tau)] = \int G(s, \tau)f(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Вернемся к построению функции  $X(t)$ . Так как при сложении функции  $\varphi$  и решения  $X$  складываются (именно для этого мы и перешли к однородному начальному условию (3)), то можно применить построение функции влияния. Решение  $G(s, \tau)$  уравнения

$$\dot{x} - kx = \delta(t - \tau) \quad (\tau > t_0) \quad (5)$$

при начальном условии (3) будет при  $t < \tau$  равняться нулю, а при  $t > \tau$  удовлетворять уравнению  $\dot{x} - kx = 0$  и начальному условию  $x(\tau + 0) = 1$  (чтобы получить последнее, надо проинтегрировать обе части уравнения (5) от  $\tau - 0$  до  $\tau + 0$ ). Поэтому в силу формулы (1)

$$G(t, \tau) = \begin{cases} 0 & (t_0 \leq t < \tau), \\ e^{k(t-\tau)} & (\tau < t < \infty). \end{cases}$$

Применяя общую формулу (4), получим

$$X(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t e^{k(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau;$$

эта же формула справедлива и при  $t < t_0$ . Окончательно получаем

$$x(t) = \bar{x}(t) + X(t) = \xi e^{k(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{k(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau. \quad (6)$$

## Упражнение

- 1) Напишите функцию Грина для задачи  $\dot{x} + b(t)x = f(t)$ ,  $x|_{t=t_0} = 0$ , а затем с помощью этой функции – и само решение.

### § 3 Среда с постоянным для каждой частицы локальным параметром. Понятие характеристики

Пусть, как в §1.1, частицы, составляющие рассматриваемую среду, обладают некоторым скалярным локальным параметром  $\vartheta = \vartheta(x, t)$  – например, будем вести речь о температуре. Основную идею дальнейших математических построений нетрудно понять при рассмотрении самой простой ситуации, когда эволюция поля температур происходит только за счет перемещения частиц (их можно представлять себе, скажем, в виде шариков), каждая из которых имеет определенную температуру, без обмена теплотой между частицами. Мы уже упоминали об этой ситуации в §1.3.

При принятом нами предположении температура каждой частицы будет оставаться неизменной, что математически можно записать с помощью уравнения

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0, \quad (1)$$

где  $d/dt$  – полная производная по времени (§1.3). Вспоминая формулу (I.3.5), выражающую эту производную через частные производные по  $x$  и  $t$ , приходим к дифференциальному уравнению для поля температур

$$v(x, t) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Как и прежде, поле скоростей, т. е. функцию  $v(x, t)$  будем считать известными, нашей целью будет определение поля температур  $\vartheta(x, t)$

Уравнение (2) принадлежит к классу *линейных дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка*. Как и каждое дифференциальное уравнение, оно имеет бесконечное количество решений, и, чтобы получить одно определенное решение, надо задать необходимые дополнительные условия. С другой стороны, и из смысла задачи ясно, что при заданном поле скоростей поле температур может получиться различным, например, в зависимости от его начального состояния. Таким образом, мы приходим к дополнительному *начальному условию*

$$\vartheta|_{t=t_0} \equiv \vartheta(x, t_0) = \vartheta_0(x), \quad (3)$$

и задача сводится к отысканию такого решения уравнения (2), которое удовлетворяет заданному начальному условию (3); такая задача называется *задачей с начальным условием* или *задачей Коши*. При решении поставленной задачи существует опасность пойти по нерациональному пути. Именно, вспомним, что при построении численного решения (обыкновенного!) дифференциального уравнения для процесса с конечным числом степеней свободы полезным оказывается переход к дискретным шагам по времени на основе замены производной по времени разностным отношением. Поэтому можно было бы попытаться заменить в уравнении (2)  $\partial \vartheta / \partial t$  на  $\frac{\vartheta(x, t_1) - \vartheta(x, t_0)}{t_1 - t_0}$ , где  $t_1$

больше  $t_0$  и близко к  $t_0$ ; вспомнив условие (3) и заменив  $\partial \vartheta / \partial x$  на первом шаге значением этой производной при  $t = t_0$ , т. е. значением  $\vartheta'_0(x)$ , получим приближенное выражение

$$\vartheta(x, t_1) = \vartheta_0(x) - \vartheta'_0(x)v(x, t_0)(t_1 - t_0). \quad (4)$$

Найдя  $\vartheta(x, t_1)$ , можно взять  $t_1$  вместо  $t_0$ , что для значения  $t_2 > t_1$  близкого к  $t_1$ , приведет к приближенному выражению

$$\vartheta(x, t_2) = \vartheta(x, t_1) - \vartheta'_x(x, t_1)v(x, t_1)(t_2 - t_1), \quad (5)$$

и т. д. По форме получается тот самый метод Эйлера, который после некоторого

усовершенствования с успехом применяется при решении обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, ЭПМ, §VIII.6).

Однако более подробный анализ обнаруживает слабые стороны этого, казалось бы, естественного способа построения решения. Мы не будем уже говорить о том, что решение, даже в простых ситуациях, не получается в виде формулы – такова судьба всех численных методов. Но вот реальная опасность: значения решения на каждом шаге получаются с помощью дифференцирования значений, взятых из предыдущего шага, в результате чего погрешности в данных задачи, а также погрешности вычислений могут при переходе от шага к шагу безудержно разрастаться (см. об этом в ЭПМ, §II.2). Эта опасность особенно серьезна, если, например, начальная функция  $v_0(x)$  имеет разрывы или изломы (разрывы производной), так как тогда в правых частях формул (4), (5) и т. д. появляются дельта-слагаемые и их производные, которых на самом деле не должно быть в решении.

Другим недостатком описанного метода – во всяком случае, в приведенном его варианте – является то, что он неправильно передает качественный характер решения, например, зависимость решения от  $v_0(x)$ . Так, например, пусть дано, что  $v_0(x) \equiv 0$  на некотором интервале  $(a, b)$ . Тогда из формул (4), (5) и т. д. последовательно находим, что все  $v(x, t_k) \equiv 0$  на  $(a, b)$ , т. е. получается, как будто и решение  $v(x, t) \equiv 0$  при  $a < x < b$ , а это на самом деле, как мы вскоре увидим, неверно.

Чтобы избежать последовательных дифференцирований, можно было бы взамен равенства (4) написать

$$v(x, t_1) = v_0(x) - v(x, t_0)(t_1 - t_0) \frac{v_0(x+h) + v_0(x-t)}{2h} \quad (6)$$

и аналогично изменить последующие формулы. Но и в этом случае получается неправильная качественная картина – как будто значение  $v$  в последующий момент времени зависит от значений  $v$  в предыдущий момент в двух точках среды, тогда как на самом деле влияет всего одна точка, причем не отвечающая формуле (6).

Все сказанное оправдывает переход к принципиально иному методу решения рассматриваемой задачи, основанному на применении лагранжевых координат (§1.3). Если вдуматься, это представляется довольно естественным: в самом деле, рассматриваемое уравнение (2) выведено при определенном предположении о характере взаимодействия частиц, так что естественно воспользоваться координатами, приспособленными к тому, чтобы следить за судьбой отдельных частиц.

Для исследуемой задачи картина весьма проста. Именно, в силу формулы (1.3.5) уравнение (2), после перехода к лагранжевым переменным, т. е. рассматриваемое «вдоль движущейся частицы», приобретает вид (1). (Таким образом, в данной задаче попросту не надо было переходить от (1) к (2); мы это сделали, имея в виду дальнейшее.) Поэтому  $v(\xi, t)$  не может зависеть от  $t$ , т. е.

$$v = A(\xi), \quad (7)$$

где  $A(\xi)$  – пока произвольная функция; это *общее решение* уравнения (1), что очевидно и из смысла физической задачи (почему?). Чтобы удовлетворить начальному условию (3), положим в (7)  $t = t_0$  и учтем, что  $x|_{t=t_0} = \xi$ ; мы получим

$$A(\xi) = v|_{t=t_0} = v_0(x)|_{t=t_0} = v_0(\xi).$$

Итак, функция  $A(\xi)$  найдена и искомое решение задачи (2) – (3) в координатах Лагранжа имеет вид

$$v = v_0(\xi). \quad (8)$$

Получив решение, мы можем выразить его в эйлеровых координатах. Для этого обозначим через  $x = \varphi(t, t_1, x_1)$  закон движения частицы, которая в момент  $t_1$  находилась в точке  $x_1$ , другими словами, это решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t) \quad (9) = (1.3.1)$$

при начальном условии  $x(t_1) = x_1$ . Тогда можно написать

$$\xi = \varphi(t_0, t, x)$$

(почему?), т. е. в силу (8) требуемое выражение решения имеет вид

$$\vartheta = \vartheta_0(\varphi(t_0, t, x)). \quad (10)$$

Интегральные линии уравнения (9) на *мировой плоскости*  $x, t$ , т. е. графики движения частиц при заданном поле скоростей  $v(x, t)$ , называются *характеристиками*<sup>12</sup> уравнения с частными производными (2); это не что иное, как координатные линии  $\xi = \text{const}$  системы лагранжевых координат  $\xi, t$ . Результат нашего исследования уравнения (2) можно сформулировать так: *решения этого уравнения должны быть постоянными вдоль каждой из его характеристик*.

К этому же выводу нетрудно прийти, заменяя производные в уравнении (2) на разностные отношения. В самом деле, будем пользоваться при этой замене точками  $(x, t)$ ,  $(x + \Delta x, t)$  и  $(x + \Delta x, t + \Delta t)$ . Тогда уравнение (2) надо переписать в виде

$$v(x, t) \frac{\vartheta(x + \Delta x, t) - \vartheta(x, t)}{\Delta x} + \frac{\vartheta(x + \Delta x, t + \Delta t) - \vartheta(x + \Delta x, t)}{\Delta t} = 0,$$

откуда

$$\vartheta(x + \Delta x, t + \Delta t) = \vartheta(x + \Delta x, t) - \frac{\Delta t}{\Delta x} v(x, t) [\vartheta(x + \Delta x, t) - \vartheta(x, t)]. \quad (11)$$

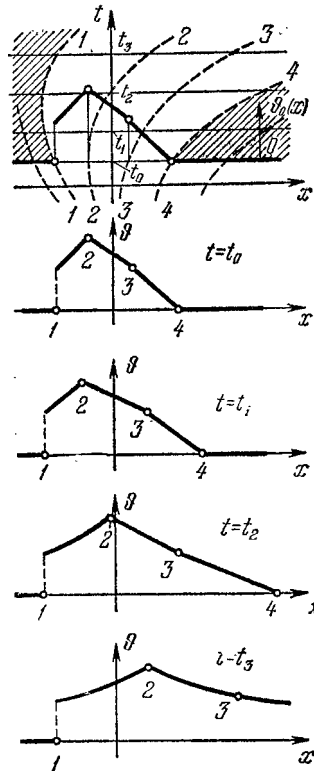


Рис. 11

Попробуем подобрать соотношение между  $\Delta t$  и  $\Delta x$  таким, чтобы значение  $\vartheta$  в момент  $t + \Delta t$  зависело только от одного значения  $\vartheta$  в момент  $t$ . Для этого  $\vartheta(x + \Delta x, t)$  в правой части (11) должно пропасть, откуда

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} v(x, t) = 1, \text{ т. е. } \frac{\Delta x}{\Delta t} = v(x, t)$$

и

$$\vartheta(x + \Delta x, t + \Delta t) = \vartheta(x, t).$$

Из предпоследнего равенства мы получаем, что при переходе от точки  $(x, t)$  к точке  $(x + \Delta x, t + \Delta t)$  мы должны следовать характеристике (уравнению (9)), а из последнего равенства – что при этом значение  $\vartheta$  остается постоянным.

На верхнем рис. 11 пунктиром показано возможное расположение характеристик на плоскости  $x, t$ ; конечно, показано лишь несколько характеристик, на самом деле они сплошь заполняют плоскость. Ось  $t$  здесь удобно расположить вертикально (см. сноску к §1). Пусть функция  $\vartheta_0(x)$  имеет такой график, как показано на этом же рисунке. Тогда в силу предыдущего ее значения «сносятся» вдоль характеристик без изменения. В частности, характеристика (11) несет разрыв решения, характеристика (22) – максимум, (33) – середину и (44) – конец правого склона решения. В заштрихованной части

плоскости решение тождественно равно нулю. Отсюда, проводя сечения  $t = \text{const}$ , легко получить графики зависимости  $\vartheta$  от  $t$  в последовательные моменты времени – картинки, из которых можно склеить мультфильм, изображающий развитие рассматриваемого нами процесса во времени. Эти графики показаны на нижних рис. 11, причем точки, отвечающие отмеченным характеристикам, обозначены соответствующими цифрами. Хорошо видно движение «гребня» решения, который в

<sup>12</sup> Этот термин представляется не вполне удачным, так как он имеет и иное, «общечеловеческое» значение; но он так распространен, что изменить его не представляется возможным.

процессе показа фильма как бы приобретает самостоятельную жизнь.

Отметим, что в разобранный примере начальная функция  $\vartheta_0(x)$  была разрывной; поэтому характеристика (11) служит для решения  $\vartheta(x, t)$  линией разрыва.

Характеристики (22) и (44) служат линиями разрыва производных от решения (линиями излома решения). Наличие этих разрывов ничуть не помешало построить решение.

Теперь хорошо видна ошибочность метода построения решения по формулам (4), (5) и т. д., не учитывающего расположения характеристик: это видно уже из расположения области, в которой решение отлично от нуля и которая никак не получается по этому методу.

На линии разрыва решения  $\partial\vartheta/\partial t$  имеет дельтаобразную особенность (это означает, что в зафиксированной точке оси  $x$  в соответствующий момент времени  $\bar{t} = \bar{t}(x)$  будет

$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} \sim \delta(t - \bar{t})$ , а поэтому значение  $\vartheta$  скачком получает приращение), но  $\partial\vartheta/\partial x$  имеет

аналогичную особенность (т. е. в указанный момент времени зависимость  $\vartheta(x)$  имеет в рассматриваемой точке оси  $x$  конечный скачок), что находится в соответствии с уравнением (2). Чтобы проследить за этим соответствием более детально, допустим для простоты, что скорость  $v \equiv v_0 > 0$  постоянна,  $t_0 = 0$ , а

$$\vartheta_0(x) = e(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0), \\ 1 & (0 < x < \infty). \end{cases} \quad (\text{единичной функции})$$

Тогда  $\varphi(t, x_1) = v_0(t - t_0) + x_1$ , и потому  $\vartheta = e(-v_0t + x)$ . Отсюда, поскольку  $e'(x) = \delta(x)$ , получаем

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = -v_0\delta(-v_0t + x), \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \delta(-v_0t + x). \quad (12)$$

Уравнение (2), очевидно, удовлетворяется. Линия разрыва имеет уравнение  $-v_0t + x = 0$ , т. е.  $x = v_0t$ , что непосредственно очевидно. (Подумайте о смысле знака правых частей формул (12)!)

## Упражнения

- 1) Пусть  $v \equiv v_0 = \text{const}$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\vartheta_0(x) = e^x$ . Приняв  $t_k = kh$ , вычислите  $\vartheta(x, t_k)$  по методу Эйлера; в полученной формуле перейдите к пределу при  $h \rightarrow 0$  и сравните результат с точным решением. Прделайте то же для произвольной функции  $\vartheta_0(x)$ .
- 2) Пусть  $v = x + t$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\vartheta_0(x) = \sin kx$ ; найдите  $\vartheta(x, t)$ .

## § 4 Среда с переменным локальным параметром

Перейдем теперь к несколько более сложному случаю, когда рассматриваемый локальный параметр  $\vartheta$  в процессе движения частиц меняется, эволюционирует, однако частицы, как и раньше, не взаимодействуют друг с другом. Скорость изменения величины  $\vartheta$  может зависеть от времени, места и достигнутого уровня этой величины, т. е. от  $x$ ,  $t$  и  $\vartheta$ . (Так как частицы не взаимодействуют, то эта скорость не должна зависеть от  $\partial\vartheta/\partial x$ .) Пусть эта зависимость известна, т. е. задано уравнение

$$d\vartheta/dt = g(x, t, \vartheta), \quad (1)$$

в координатах Эйлера то же уравнение имеет вид

$$v(x, t) \frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = g(x, t, \vartheta). \quad (2)$$

Начальное условие, как и раньше, имеет вид (3.3).

После §3 естественно строить решение полученной начальной задачи в лагранжевых координатах. Для этого в уравнение (1) подставим выражение  $x = \varphi(t, t_0, \xi)$  эйлеровой координаты через лагранжевы (см. §3). Получим

$$d\vartheta/dt = g(\varphi(t, t_0, \xi), t, \vartheta). \quad (3)$$

В этом дифференциальном уравнении две независимые переменные  $(\xi, t)$ ; но так как производная от искомой функции берется только по  $t$ , то переменную  $\xi$  можно считать параметром уравнения: если ее зафиксировать, то получится обыкновенное дифференциальное уравнение. Если теперь при любом фиксированном  $\xi$  обозначить через  $\vartheta(t, \xi)$  решение дифференциального уравнения (3) при начальном условии  $\vartheta|_{t=t_0} = \vartheta(\xi)$ , то мы и получим искомое решение, выраженное в лагранжевых координатах; как и в §3, это решение можно затем выразить в эйлеровых координатах. Итак, уравнение с частными производными (2) оказалось возможным свести к более простому, поскольку после перехода к независимым переменным Лагранжа в нем остается производная от искомой функции только по одной из этих переменных, т. е. (2) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром.

### Упражнение

1) Пусть  $v \equiv v_0$ ,  $g(x, t, \vartheta) = a\vartheta + bx + ct$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\vartheta_0(\xi) = A \sin k\xi$ ; найдите  $\vartheta(x, t)$ .

## § 5 Математическое обобщение

Уравнения с частными производными, аналогичные уравнению (4.2), могут встретиться и вне связи с рассмотрением среды из частиц. Поэтому полезно провести независимое математическое рассмотрение таких уравнений. Однако при этом мы будем время от времени вспоминать об истолковании, проведенном в предыдущих параграфах, что даст возможность более наглядно представлять себе свойства решений. Другими словами, всякое уравнение вида (4.2), а также более общего вида, о котором мы будем говорить, можно истолковать так, как если бы это было уравнение эволюции некоторого локального параметра при движении среды из невзаимодействующих друг с другом частиц при заданном поле их скоростей.

Мы будем рассматривать уравнение

$$a(x, t) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g(x, t, \vartheta), \quad (1)$$

в котором  $a(x, t)$  и  $b(x, t)$  – заданные функции, а  $\vartheta(x, t)$  – искомая функция. Такое уравнение с частными производными 1-го порядка мы будем называть *почти линейным*<sup>13</sup> (а если функция  $g$  линейно зависит от  $\vartheta$ , то и уравнение (1) – линейное). Если бы мы захотели привести уравнение (1) к виду (4.2), то нам пришлось бы поделить обе части (1) на  $b$ , в результате чего роль скорости  $v$  будет играть отношение  $a/b$ . Поэтому *дифференциальное уравнение характеристик* (3.9) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(x, t)}{b(x, t)}, \text{ т. е. } \frac{dx}{a(x, t)} = \frac{dt}{b(x, t)}. \quad (2)$$

Интегральные линии уравнения (2) (линии в плоскости  $x, t$ ) называются *характеристиками* уравнения (1).

*Вдоль каждой своей характеристики уравнение с частными производными (1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение.* В самом деле, пусть  $x = \varphi(t)$  – одна из таких характеристик, определенная из уравнения (2). Вдоль такой характеристики искомое решение  $\vartheta(x, t)$  превращается в сложную функцию одного переменного  $t$ :  $\vartheta = \vartheta(\varphi(t), t)$ . Производная от нее равна

<sup>13</sup> Этот термин, впервые примененный И.Г.Петровским, не является общепринятым. Он подчеркивает то обстоятельство, что уравнение (1), вообще говоря, нелинейное, но группа его членов, содержащая производные от искомой функции, имеет такую же структуру, как для линейного уравнения. Более широкий класс составляют квазилинейные уравнения, о которых мы будем говорить в §17.



$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x} a + \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{1}{b} \left( a \frac{\partial\vartheta}{\partial x} + b \frac{\partial\vartheta}{\partial t} \right); \quad (3)$$

при этом преобразовании мы воспользовались дифференциальным уравнением (2), которому удовлетворяет рассматриваемая характеристика. Правую часть (3) можно преобразовать с помощью уравнения (1), которому должна удовлетворять функция  $\vartheta(x, t)$ , и мы приходим к равенству

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{b(\varphi(t), t)} g(\varphi(t), t, \vartheta), \quad (4)$$

которое и представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции  $\vartheta(t)$ , т. е. относительно значений искомого решения  $\vartheta(x, t)$  вдоль характеристики.

Подчеркнем, что рассуждение, проведенное в предыдущем абзаце независимо от §4, по существу совпадает с переходом от уравнения (4.2) к уравнению (4.3) и потому может быть истолковано как переход к дифференциальному уравнению для рассматриваемого локального параметра вдоль траектории частицы, движущейся со скоростью  $a/b$ .

Отметим в заключение, что дифференциальное уравнение характеристик (2) и сами характеристики инвариантно связаны с породившим их уравнением с частными производными (1). Более подробно это означает, что если в уравнении (1) совершить произвольное преобразование независимых переменных  $x, t \rightarrow x', t'$ , а затем для полученного уравнения (1) составить уравнение характеристик и построить сами характеристики, то результат получится такой, как «если совершить указанную замену в уравнении исходных характеристик. Другими словами, если рассматривать  $x', t'$  как новые (вообще говоря, криволинейные) координаты в плоскости  $x, t$ , то семейство характеристик при таком переходе останется инвариантным. В этом утверждении можно убедиться с помощью формальной замены переменных, что мы предоставляем читателю. Но достаточно сослаться и на то, что при описании движения среды с помощью различных координат законы движения частиц, очевидно, должны оставаться в указанном смысле инвариантными.

## § 6 *Задача Коши и краевая задача*

Мы показали, что уравнение (5.1), переписанное вдоль характеристики, превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка (5.4). Но решение обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка однозначно определяется, если задать начальное условие, т. е. значение искомой функции при некотором значении независимой переменной (см., например, ЭПМ, §VII.1). Таким образом, *задание значения решения  $\vartheta(x, t)$  уравнения (6.1) в некоторой точке плоскости  $x, t$  однозначно определяет значения этого решения во всех точках характеристики, проходящей через эту точку.* Этот факт является непосредственным обобщением утверждения, вытекающего из рассмотрений §§3–4, согласно которому знание локального свойства среды из невзаимодействующих частиц в непосредственной близости какой-либо частицы в некоторый момент времени однозначно определяет это свойство на протяжении всего дальнейшего движения этой частицы. Начнем с рассмотрения уравнения

$$a(x, t) \frac{\partial\vartheta}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

В этом случае уравнение (5.4) приобретает вид  $d\vartheta/dt = 0$ , т. е. решение  $\vartheta$  постоянно вдоль каждой характеристики. (Это математическое обобщение результатов §3, в котором локальный параметр среды оставался неизменным для каждой частицы при эволюции среды.) Другими словами, семейство характеристик уравнения (1) одновременно служит семейством линий уровня любого его решения  $\vartheta(x, t)$ ; однако

изменение  $\vartheta$  при переходе от одной характеристики к другой будет, вообще говоря, для различных решений различным.

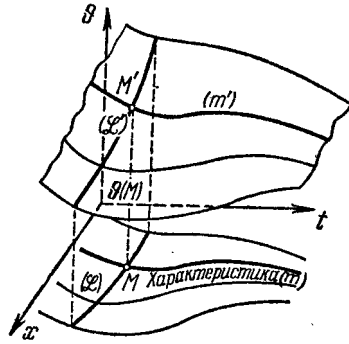


Рис. 12

Чтобы однозначно получить решение уравнения (1) в некоторой области плоскости  $x, t$ , недостаточно задать значение этого решения в одной точке плоскости  $x, t$ , а надо задать эти значения во всех точках некоторой линии плоскости  $x, t$ ; на рис. 12 эта линия обозначена буквой  $(\mathcal{L})$ . Если через любую точку  $M$  линии  $(\mathcal{L})$  провести в плоскости  $x, t$  характеристику  $(m)$ , то знание значения  $\vartheta(M)$  однозначно определит значение  $\vartheta = \vartheta(M)$  вдоль всей  $(m)$ , т. е. в пространстве  $x, t, \vartheta$  получится линия  $(m')$ , расположенная на постоянной высоте и проектирующаяся на  $(m)$ . Если теперь точка  $M$  пробежит всю линию  $(\mathcal{L})$ , то линия  $(m')$  опишет поверхность (рис. 12), которая и будет служить графиком решения уравнения (1) при заданных значениях этого решения на  $(\mathcal{L})$ . Другими словами, каждую характеристику надо поднять (точнее, перенести параллельно оси  $\vartheta$ ) настолько, чтобы она пересекла линию  $(\mathcal{L})$ , определенную заданными значениями  $\vartheta$  на  $(\mathcal{L})$  (рис. 12); все эти характеристики вместе и заполнят поверхность, изображающую искомое решение  $\vartheta(x, t)$ .

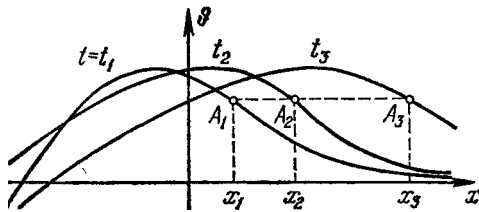


Рис. 13

На рис. 13 изображена возможная картина зависимости  $\vartheta(x)$  в последовательные моменты  $t = t_1, t_2, t_3$ . Соответствующие графики получаются в результате пересечения поверхности, изображающей решение  $\vartheta(x, t)$ , плоскостями  $t = \text{const}$ . Точки  $A_1, A_2, A_3$  на рис. 13 отвечают одной и той же «частице»; более точно, точки плоскости  $x, t$  с координатами  $(x_1, t_1), (x_2, t_2), (x_3, t_3)$  принадлежат одной и той же характеристике (ср. с рис. 11).

Если теперь перейти к общему уравнению (5.1), то разница будет только в том, что линия  $(m')$ , проектирующаяся на характеристику  $(m)$ , уже не будет расположена на постоянной высоте, а будет изображать решение обыкновенного дифференциального уравнения (5.4), принимающее данное начальное значение  $\vartheta(M)$ . В остальном наглядный смысл построения поверхности, изображающей решение, не изменится. Из этого построения, в частности, видно, что особенности – изломы и разрывы у заданной функции  $\vartheta(M)$  – распространяются вдоль характеристик, порождая соответствующие особенности у решения. В отличие от этого, точки максимума и минимума для  $\vartheta|_{t=\text{const}}$  в общем случае уже, вообще говоря, не принадлежат единой характеристике, как это было в случае  $g = 0$ .

Покажем, как провести описанную процедуру построения решения аналитически. Для этого, аналогично п. 3, обозначим через  $x = \varphi(t, t_1, x_1)$  решение дифференциального уравнения (5.2) при начальном условии  $x(t_1) = x_1$ . Обозначим, далее, через  $\vartheta = \psi(t, t_1, x_1, \vartheta_1)$  решение уравнения (5.4) при начальном условии  $\vartheta(t_1) = \vartheta_1$ , если в правую часть (5.4) вместо  $\varphi(t)$  подставлено  $\varphi(t, t_1, x_1)$ . Допустим, что нам дано уравнение линии  $(\mathcal{L})$  в параметрической форме

$$(\mathcal{L}): t = \alpha(p), x = \beta(p) \quad (2)$$

( $p$  – параметр), а в точках этой линии заданы значения искомого решения как функция того же параметра:

$$\vartheta = \chi(p). \quad (3)$$

Тогда при каждом значении параметра  $p$  через соответствующую этому значению точку линии  $(\mathcal{L})$  проходит характеристика с уравнением

$$x = \varphi(t, \alpha(p), \beta(p)), \quad (4)$$

а значение решения вдоль этой характеристики изменяется по закону

$$\vartheta = \varphi(t, \alpha(p), \beta(p), \gamma(p)). \quad (5)$$

Теперь достаточно из уравнений (4) и (5) исключить  $p$  (например, из (4) выразить  $p$  через  $t$  и  $x$  и подставить это выражение в правую часть (5)), чтобы получить искомое решение. Если такое исключение не удастся, то равенства (4) и (5) совместно можно рассматривать как параметрическую форму задания этого решения.

Итак, для построения решений уравнения (5.1) надо уметь интегрировать два обыкновенных дифференциальных уравнения 1-го порядка: дифференциальное уравнение (5.2) характеристик и уравнение (5.4), в которое переходит заданное уравнение (5.1) вдоль любой характеристики.

Рассмотрим пример. Пусть надо найти решение уравнения

$$x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + 2t \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 3x^2 \vartheta,$$

если дополнительно дано, что при  $t = 1$  должно быть  $\vartheta = 5x^2$ . Для решения напомним дифференциальное уравнение характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t}.$$

Отсюда  $x = C\sqrt{t}$  и при начальном условии  $x(t_1) = x_1$  получаем

$$x = \varphi(t, t_1, x_1) = x_1 \sqrt{\frac{t}{t_1}}. \quad (6)$$

Уравнение (5.4) здесь приобретает вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2t} \cdot 3 \left( x_1 \sqrt{\frac{t}{t_1}} \right)^2 \vartheta = \frac{3x_1^2}{2t_1} \vartheta$$

и при начальном условии  $\vartheta(t_1) = \vartheta_1$  имеет решение

$$\vartheta = \psi(t, t_1, x_1, \vartheta_1) = \vartheta_1 \exp \left[ \frac{3x_1^2}{2t_1} (t - t_1) \right]. \quad (7)$$

Линией ( $\mathcal{L}$ ) в плоскости  $t, x$  здесь служит прямая  $t = 1$ , вдоль которой за параметр можно взять сам  $x$ . Таким образом, параметрические уравнения линии ( $\mathcal{L}$ ) и заданных на ней значений решения имеют вид

$$t = 1, \quad x = p, \quad \vartheta = 5p^2.$$

При фиксированном  $p$  уравнение характеристики (6) и закон изменения решения (7) вдоль нее принимают вид

$$x = p\sqrt{t}, \quad \vartheta = 5p^2 \exp \left[ \frac{3}{2} p^2 (t - 1) \right].$$

Исключая отсюда  $p$ , получаем искомое решение

$$\vartheta = 5 \frac{x^2}{t} \exp \left[ \frac{3x^2(t-1)}{2t} \right].$$

Вернемся к общему случаю. Какой может быть линия ( $\mathcal{L}$ ), несущая заданные значения искомого решения? Из предыдущего ясно, что это не может быть характеристика: в качестве носителя начальных данных вся она эквивалентна любой своей точке. Можно сказать больше: никакая характеристика не должна иметь с ( $\mathcal{L}$ ) более одной общей точки. В самом деле, пусть характеристики и линия ( $\mathcal{L}$ ) расположены, как на рис. 14. Тогда задание решения в точке  $A$  однозначно определит его вдоль всей характеристики, проходящей через  $A$ , т. е., в частности, и в точке  $A_1$  значит, в точке  $A_1$  решение уже нельзя задавать, а потому такая линия ( $\mathcal{L}$ ) не годится.

Чаще всего искомое решение задается при некотором  $t = t_0$ , а строится при  $t > t_0$ . Тогда

говорят, что задано *начальное условие*, а задачу о решении дифференциального уравнения при дополнительно заданном начальном условии называют *задачей с начальным условием* или *задачей Коши*. Линией ( $\mathcal{L}$ ), несущей начальные данные, здесь служит прямая, изображенная на рис. 14 пунктиром. Если в уравнении (5.1) коэффициент  $b > 0$ , как мы будем предполагать впредь, то из уравнения (5.2) видно, что характеристики имеют уравнение вида  $x = x(t)$ , т. е. никакая характеристика не может пересечь линию ( $\mathcal{L}$ ) дважды, а потому задача Коши всегда разрешима. О физическом смысле такого решения мы уже говорили в §§3–4.

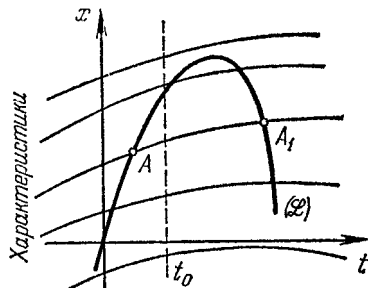


Рис. 14

Иногда искомое решение задается при некотором  $x = x_0$  на каком-либо интервале времени (например, для всех  $t$ ), а строится при  $x > x_0$  или при  $x < x_0$ . Тогда говорят, что задано *граничное* или *краевое условие*, а соответствующая задача называется *граничной* или *краевой*. Физически это означает, что мы наблюдаем за потоком, сидя на берегу, а затем по результатам наблюдения хотим восстановить эволюцию всего потока. В этом случае линией ( $\mathcal{L}$ ) будет служить прямая, параллельная оси  $t$ , и для того, чтобы на ( $\mathcal{L}$ ) можно было граничное условие задавать произвольно, все характеристики должны с ростом  $t$  пересекать ( $\mathcal{L}$ ) в одну и ту же сторону, т. е. функция  $a(t, x_0)$  должна сохранять знак. (Подумайте о физическом смысле этого условия.)

Линия ( $\mathcal{L}$ ) может иметь вид, показанный на рис. 15, причем решение ищется в заштрихованной области. Это означает, что ставится как начальное, так и граничное условия; соответствующая задача о разыскании решения называется *смешанной*. Она обычно возникает, если рассматривается полубесконечная среда,  $x_0 \leq x < \infty$ ; при этом точка  $x_0$  играет роль крана, через который жидкость поступает в поток. Тогда при заданном поле скоростей для определения закона эволюции локальных свойств потока надо знать не только его начальное состояние (начальное условие), но и свойства поступающей жидкости, когда она проходит через кран, т. е. при  $x = x_0, t_0 \leq t < \infty$  (граничное условие). Впрочем, если течение изучается только на промежутке времени от  $t_0$  до некоторого  $T > t_0$ , то и граничное условие надо задавать лишь при  $t_0 \leq t \leq T$ .

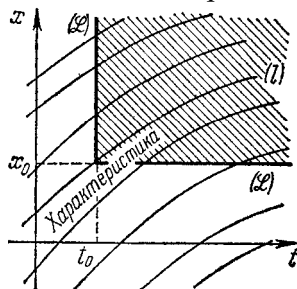


Рис. 15

Совсем иная картина получится, если через кран  $x = x_0$  жидкость удаляется из рассматриваемой области  $x_0 \leq x < \infty$  (как тогда расположены характеристики на рис. 15?). Ясно, что если частицы не взаимодействуют, то состояние каждой частицы в момент выхода ее через кран не может повлиять на дальнейшее состояние среды в данной области. Таким образом, в этом случае краевое условие отпадает и остается только начальное. Это ясно также из того, что в данном случае, в отличие от предыдущего, новых частиц в область  $x_0 \leq x < \infty$  с течением времени не поступает, поэтому начальное распределение изучаемого локального параметра  $\vartheta$  и закон движения частиц полностью определяют дальнейшую эволюцию этого распределения. В частности, теперь и значение  $\vartheta$  при  $x = x_0, t_0 \leq t < \infty$ , т. е. на выходе из области, полностью предопределено начальным условием, это значение приносят частицы, приходящие из области, а поэтому оно и не может быть задано: если мы попытаемся задать  $\vartheta|_{x=x_0}$  не таким, каким оно приносится, то немедленно придем к

противоречию, а если таким же, то это задание будет излишним. (Продумайте все эти утверждения, исходя из геометрической картины характеристик в плоскости  $x, t$ !) Конечно, заключения о том, что в первом варианте краевое условие необходимо, а во втором оно излишне, неразрывно связаны с тем, что мы осуществляли построение зависимости  $\vartheta(x, t)$  вперед во времени, т. е. как бы предсказывали будущее. Если бы мы ставили задачу об определении прошлого, т. е. строили решение при  $t < t_0$ , то картина

получилась бы обратной, так как тогда краевое условие потребовалось бы только во втором варианте (почему?). Таким образом, в данной задаче необходимость задания краевого условия связана с выбором направления времени.

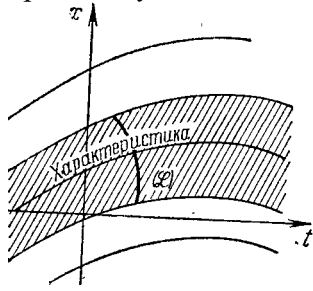


Рис. 16

Если на рис. 15 задано только начальное условие при  $x_0 \leq x < \infty$ , то решение однозначно определится только выше характеристики, проходящей через точку  $(t_0, x_0)$ ; на рис. 15 она обозначена буквой  $(l)$ . В общем случае, если для уравнения (5.1) искомое решение задано на некоторой дуге  $(\mathcal{L})$ , то это решение однозначно определяется в области, ограниченной характеристиками, проведенными через концы  $(\mathcal{L})$ . Эта область, заштрихованная на рис. 16, называется областью

определенности или областью влияния. (Последнее означает, что изменение значений, заданных на  $(\mathcal{L})$ , сказывается только на значениях искомого решения в заштрихованной области, но не вне ее.)

В заключение еще одно замечание. Мы до сих пор считали, что независимые переменные  $t, x$  имеют вполне определенный физический смысл:  $t$  – время, а  $x$  – геометрическая координата. Однако при построении решения это не было по существу использовано, так что независимые переменные в уравнении вида (5.1) могут иметь любой физический смысл и могут обозначаться любыми буквами: например, обе эти переменные могут быть геометрическими координатами. В этом случае не всегда оказывается возможным считать вдоль характеристики одну из переменных функцией другой, т. е. считать  $x = \varphi(t)$ . Тогда дифференциальное уравнение характеристик (5.2) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{a(x,t)} = \frac{dt}{b(x,t)} = dq, \text{ т. е. } \frac{dx}{dq} = a(x,t), \quad \frac{dt}{dq} = b(x,t), \quad (8)$$

где  $q$  – некоторый параметр, отсчитываемый вдоль характеристик. Решая последнюю систему уравнений при начальных данных  $x|_{q=0} = x_1, t|_{q=0} = t_1$ , получим выражения вида

$$x = \varphi_1(q, t_1, x_1), \quad t = \varphi_2(q, t_1, x_1). \quad (9)$$

Уравнение (5.1) вдоль характеристики принимает вид

$$\frac{d\vartheta}{dq} = g(\varphi_1(q, t_1, x_1), \varphi_2(q, t_1, x_1), \vartheta)$$

и при начальном условии  $\vartheta|_{q=0} = \vartheta_1$  имеет решение вида

$$\vartheta = \varphi_1(q, t_1, x_1, \vartheta_1). \quad (10)$$

Построение решения, значения которого заданы на некоторой линии  $(\mathcal{L})$  плоскости  $x, t$ , проходит аналогично тому, как было описано выше, однако теперь придется исключать из трех равенств два параметра  $p$  и  $q$ .

## Упражнения

- 1) Найдите решение уравнения  $x\vartheta'_x - 2t\vartheta'_t = 0$  ( $t \geq 0$ ) при начальном условии  $\vartheta|_{t=1} = 3x$ .
- 2) Пусть уравнение линии  $(\mathcal{L})$  задано в виде  $F(x, t) = 0$ , а значение искомого решения на ней – в виде  $\vartheta = \Phi(x, t)$ . Опишите в условиях последнего абзаца §6 процедуру для построения этого решения.
- 3) Пусть решение уравнения  $x\vartheta'_x + t\vartheta'_t = g(x, t, \vartheta)$  задается на некоторой дуге линии с уравнением  $t = 1 + x^2$ . Для каких дуг это задание произвольно? Каковы соответствующие области влияния?
- 4) Найдите решение уравнения  $x\vartheta'_x + t\vartheta'_t = 0$ , которое на дуге  $(\mathcal{L})$ :  $t = 1 + x^2$  ( $1 \leq x < \infty$ ) принимает значение  $\vartheta = 1$ . Объясните поведение решения на границе области влияния.

## § 7 Отыскание плотности среды

Важнейшим локальным параметром потока является его плотность. В §1.7 мы показали, что если в процессе эволюции среды масса каждой ее порции сохраняется, то плотность и скорость потока связаны уравнением неразрывности

$$(\rho v)'_x + \rho'_t = 0. \quad (1) = (I.7.3)$$

Предположим, в соответствии с установкой этой главы, что поле скоростей  $v(x, t)$  задано, и допустим также, что известно распределение плотностей в начальный момент времени

$$\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x). \quad (2)$$

Как найти поле плотностей  $\rho(x, t)$  в любой момент времени?

Если раскрыть в уравнении (1) скобки и переписать его в виде

$$v(x, t)\rho'_x + \rho'_t = -v'_x(x, t)\rho, \quad (3)$$

то ясно, что оно является частным случаем общего уравнения (4.2); этого следовало ожидать, так как плотность порций среды в процессе ее эволюции, вообще говоря, меняется. Для решения этого уравнения при начальном условии (2), согласно общей методике, надо перейти к лагранжевым координатам, другими словами, рассмотреть уравнение (3) вдоль его характеристик – графиков движения частиц в потоке. Это даст

$$\frac{d\rho}{dt} = -v'_x(\varphi(t, t_0, \xi), t)\rho \quad (4)$$

(смысл функции  $\varphi$  см. в §3). В полученном, уже обыкновенном дифференциальном уравнении, которое надо рассматривать при  $\xi = \text{const}$ , разделяются переменные, и мы получаем, с учетом начального условия (2)

$$\frac{d\rho}{\rho} = -v'_x dt, \quad \ln \rho - \ln \rho_0 = -\int_{t_0}^t v'_x d\tau,$$

откуда окончательно

$$\rho = \rho_0(\xi) \exp \left[ -\int_{t_0}^t v'_x(\varphi(\tau, t_0, \xi), \tau) d\tau \right]. \quad (5)$$

Ответ можно выразить и в эйлеровых координатах, подставив  $\xi = \varphi(t_0, t, x)$  и заметив, что  $\varphi(\tau, t_0, \varphi(\tau, t, x)) \equiv \varphi(\tau, t, x)$  (почему?).

Получим

$$\rho = \rho_0(\varphi(t_0, t, x)) \exp \left[ -\int_{t_0}^t v'_x(\varphi(\tau, t, x), \tau) d\tau \right]. \quad (6)$$

Это решение можно было написать сразу, если заметить, что

$$\exp \left[ -\int_{t_0}^t v'_x(\varphi(\tau, t, x), \tau) d\tau \right] = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \varphi'_x(t_0, t, x) \quad (7)$$

(см. упражнение I.3.7, где применены несколько иные, но эквивалентные обозначения).

Таким образом, взамен (5) можно написать

$$\rho = \rho_0(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} \left( = \rho_0(\xi) \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^{-1} = \rho_0(\xi) [\varphi'_\xi(t, t_0, \xi)]^{-1} \right). \quad (8)$$

Однако это ясно: в процессе эволюции малая порция среды растягивается в  $\partial x / \partial \xi$  раз (рис. 17), а потому плотность умножается на  $\partial \xi / \partial x$ .

Покажем, как изменится форма решения, если скорость среды задана в лагранжевых

координатах,  $v = v(\xi, t)$ . Так как закон движения частицы имеет вид  $x = \xi + \int_{t_0}^t v(\xi, \tau) d\tau$ , то

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + \int_{t_0}^t v'_{\xi}(\xi, \tau) d\tau.$$

Поэтому формула (8) дает

$$\rho = \rho_0(\xi) \left[ 1 + \int_{t_0}^t v'_{\xi}(\xi, \tau) d\tau \right]^{-1}. \quad (9)$$

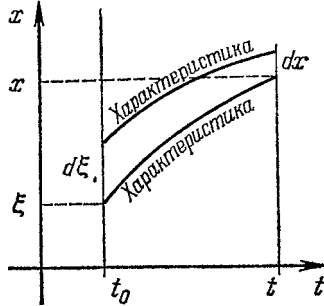


Рис. 17

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. В самом простом случае, когда заданное поле скоростей однородное, т. е.  $v = v(t)$ , будет

$$x = \xi + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau. \text{ т. е. } \xi = x - \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau,$$

а потому решение (8) приобретает вид

$$\rho = \rho(\xi) = \rho_0 \left( x - \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right).$$

Впрочем, это решение ясно и непосредственно: для однородного поля скоростей расстояние между частицами остается неизменным, поэтому плотность среды в точке  $x$  в момент  $t$  равна плотности в момент  $t_0$  в точке  $\xi$ , пришедшей во время  $t$  в  $x$ .

В частности, если дополнительно дано, что среда в начальном состоянии была однородной, т. е.  $\rho_0(x) \equiv \rho_0 = \text{const}$ , то и  $\rho(x, t) = \rho_0$  – среда остается однородной, ее плотность не меняется.

2. Допустим теперь, что среда в начальном состоянии была однородной, но поле скоростей неоднородное. Тогда из (8) получаем, что

$$\rho = \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = \rho_0 \varphi'_x(t_0, t, x).$$

В процессе эволюции среда, вообще говоря, перестает быть однородной: в зоне сближения частиц плотность возрастает, а в зоне их взаимного удаления плотность уменьшается.

3. Рассмотрим задачу о перемещении единичной массы, первоначально сосредоточенной на бесконечно малом интервале в точке  $\xi_0$ . Для этого надо положить  $\rho_0(x) = \delta(\xi - \xi_0)$ , где  $\delta$  – дельта-функция. Так как плотность  $\rho$  линейно зависит от ее начального значения  $\rho_0(\xi)$ , то решение  $G$  в указанном частном случае будет служить функцией влияния (см. §2) общей задачи о построении плотности по ее начальному распределению.

Решение можно записать в различных формах. Так, в силу формул (8) и (9) получаем решение в лагранжевых координатах<sup>14</sup>:

$$G = \delta(\xi - \xi_0) \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0}^{-1} = \delta(\xi - \xi_0) \left[ 1 + \int_{t_0}^{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} dt \right]^{-1}.$$

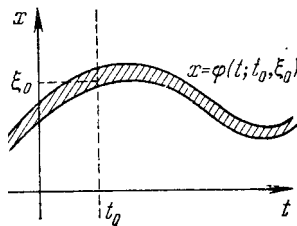


Рис. 18

Чтобы получить решение в эйлеровых координатах, заметим, что в процессе эволюции масса остается единичной и сосредоточенной на бесконечно малом интервале, но уже расположенном в точке  $\varphi(t, t_0, \xi_0)$ ; таким образом,

$$G = \delta(x - \varphi(t, t_0, \xi_0)). \quad (10)$$

Правая часть отлична от нуля лишь в бесконечно узкой полоске, заштрихованной на рис. 18 и ограниченной двумя соседними

<sup>14</sup> См. замечание по поводу применения лагранжевых координат, сделанное в §1.5.

характеристиками, т. е. интегральными кривыми уравнения (3.9), причем интеграл от этой функции по любой прямой, параллельной оси  $x$ , равен 1. Справедлива также формула, вытекающая из (6) и (7):

$$G = \delta \varphi(t_0, t, x) - \xi_0 \delta \varphi'_x(t_0, t, x). \quad (11)$$

Важный частный случай стационарного поля скоростей мы рассмотрим в §8.

## Упражнения

- 1) Обобщите решение (6) на случай потока с добавляемой массой (§1.7).
- 2) Выведите (11) из (10) формально, опираясь на свойства дельта-функции.

## § 8 Стационарное поле скоростей

Пусть заданное поле скоростей стационарное, т. е.  $v = v(x)$ . Мы уже упоминали в §1.7, что если и поле плотностей стационарное, т. е.  $\rho = \rho(x)$ , то эти две функции связаны простым соотношением

$$\rho(x)v(x) = \text{const}, \text{ т. е. } \rho(x) = \frac{c}{v(x)}; \quad (1)$$

это вытекает как непосредственно из закона сохранения масс, так и формально из уравнения неразрывности (7.1).

Из формулы (1) видно, что стационарное решение невозможно, если функция  $v(x)$  меняет знак, т. е. если поле скоростей в разных точках оси  $x$  может иметь различное направление. Так будет, если в среде имеются устойчивые или неустойчивые точки покоя, по обе стороны от которых поле скоростей направлено к этой точке или соответственно от нее.

Для общего – вообще говоря, нестационарного – поля плотностей (но, как и раньше, стационарного в эйлеровых координатах поля скоростей!), как оказывается, имеет место соотношение вида (1) в лагранжевых координатах! Чтобы проверить это, умножим обе части уравнения неразрывности (7.1) на  $v(x)$ ; так как  $v$  не зависит от  $t$ , то полученное равенство можно переписать в виде  $v(\rho v)'_x + (\rho v)'_t = 0$ . Если теперь перейти к координатам Лагранжа и вспомнить выражение (I.3.5) для производной по времени в лагранжевых переменных, то последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{d(\rho v)}{dt} = 0.$$

Значит, хотя  $\rho$  и  $v$  в отдельности зависят не только от  $\xi$ , но и от  $t$ , поток массы  $\rho v$  может зависеть только от  $\xi$ , т. е. для каждой малой порции частиц в процессе ее эволюции этот поток остается неизменным.

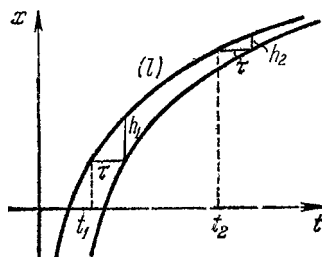


Рис. 19

Это свойство легко уяснить, рассматривая соответствующее семейство характеристик. В самом деле, в §2 мы уже отмечали, что для стационарного поля скоростей это семейство инвариантно относительно переноса вдоль оси  $t$ . Рассмотрим (рис. 19) две характеристики, полученные одна из другой переносом на малый промежуток времени  $\tau$ . Так как масса среды на интервале, ограниченном двумя характеристиками, не зависит от времени (почему?), то, с точностью до малых высшего порядка (см. рис. 19),  $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$ , откуда

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2/\tau}{h_1/\tau} = \frac{(dx/dt)_2}{(dx/dt)_1} = \frac{v_2}{v_1},$$

т. е.  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ , и в силу произвольности  $t_1$  и  $t_2$  получается требуемое свойство.

С помощью доказанного свойства легко решить задачу о построении поля плотностей, удовлетворяющего заданному начальному распределению (7.2). В самом деле, в силу сказанного будет  $\rho(x, t)v(x) = \rho_0(\xi)v(\xi)$  откуда



$$\rho(x, t) = \frac{v(\xi)}{v(x)} \rho_0(\xi) = \frac{v(\varphi(t_0, t, x))}{v(x)} \rho_0(\varphi(t_0, t, x)). \quad (2)$$

Для стационарного поля скоростей уравнение характеристик нетрудно выразить в квадратурах, так как в дифференциальном уравнении (3.9) для характеристик

разделяются переменные:  $dx/dt = v(x)$ ,  $dx/v(x) = dt$ , откуда, обозначив  $\int \frac{dx}{v(x)} = w(x)$

(точнее,  $w(x)$  есть какая-либо одна из первообразных функций от  $1/v(x)$ ), получим

$$w(x) - w(\xi) = t - t_0, \quad \xi = \zeta(w(x) - t + t_0), \quad (3)$$

где под  $\zeta$  понимается обратная функция к  $w(x)$ . Последнее выражение для  $\xi$  можно подставить в формулу (2).

Проследим за асимптотическим поведением решения при  $t \rightarrow \infty$ , приняв сначала для простоты, что среда на всей оси движется в одну и ту же сторону, например  $v(x) > 0$  ( $-\infty < x < \infty$ ), а при  $x \rightarrow -\infty$  (т. е. в направлении, откуда приходят частицы) среда однородна:  $\rho(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \rho_0$ ,  $v(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} v_0$ . Так как при любом фиксированном  $x$  будет  $\xi \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$  (почему?), то из (2) получаем

$$\rho(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{v_0}{v(x)} \rho_0.$$

Таким образом, здесь происходит *процесс установления*, т. е. поток в пределе переходит в стационарный, для которого распределение плотности не зависит от ее распределения в начальный момент времени, а определяется только полем скоростей и значением плотности при  $x \rightarrow -\infty$ .

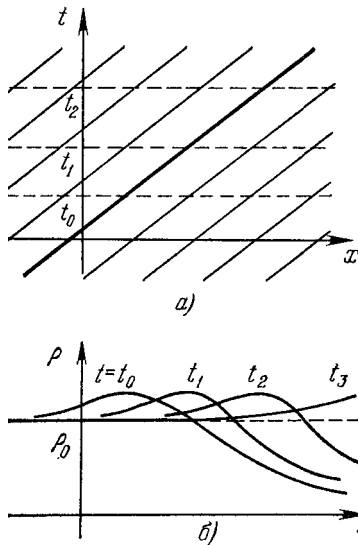


Рис. 20

Полезно заметить, что этот процесс установления не обладает свойством равномерности, т. е. не надо думать, что когда пройдет много времени, то распределение плотности будет сразу на всей оси  $x$  близким к предельному. Это особенно хорошо видно, если  $v(x) = v_0 = \text{const}$ , а потому  $\rho(x, t) = \rho(x - v_0 t)$ . В этом случае линиями уровня функции  $\rho(x, t)$  в плоскости  $x, t$  служат линии  $x - v_0 t = \text{const}$ , т. е. характеристики. На рис. 20, б показан пример графиков плотности в последовательные моменты времени  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ , а на рис. 20, а – соответствующее семейство характеристик, причем жирно обозначена характеристика, отвечающая максимальному значению плотности. С ростом  $t$  отклонения  $\rho$  от предельного значения  $\rho_0$  сносятся в сторону  $x \rightarrow \infty$ , не убывая по амплитуде, так что если брать значения  $x \rightarrow \infty$ , то приближение  $\rho$  к  $\rho_0$  в них будет происходить все позже и позже; для как угодно большого  $t$  хоть где-нибудь на оси  $x$  да и найдутся точки, в которых отклонение  $\rho$  от  $\rho_0$  будет конечным, не малым. Если в этом примере совершить преобразование Галилея  $x \rightarrow \tilde{x} = x - v_0 t$  (§1.9), то в новой системе отсчета будет  $\tilde{v}(\tilde{x}) \equiv 0$ , т. е. мы получаем статическую картину, в которой  $\rho(\tilde{x}') \equiv \rho_0(\tilde{x}')$  не меняется во времени и, в частности, не стремится к однородному распределению. Отсюда также видна неравномерность стремления поля  $\rho(x, t)$  в исходной системе отсчета к однородному полю. Впрочем, если рассматривать процесс установления не на всей оси  $x$ , а на любом фиксированном интервале вида  $-\infty < x \leq x_0$ , то на нем этот процесс будет равномерным, так как область неравномерности как бы вымывается, уносится потоком направо.

Рассмотрим теперь случай, когда  $v(x)$  не сохраняет знака. Тогда каждому значению  $x = a$ , где  $v(a) = 0$ , отвечает *точка покоя (точка зстоя)* потока, т. е. *положение*

*равновесия частицы.* Если  $v'(a) < 0$ , то  $v(x)$  сменяет знак с плюса на минус, когда  $x$ , возрастая, переходит через  $a$ ; тогда вблизи точки  $x = a$  движение частиц по обе стороны от  $a$  направлено к  $a$ , а потому рассматриваемое положение равновесия будет *асимптотически устойчивым*. Другими, словами, частицы, расположенные в начальный момент времени вблизи точки  $a$ , будут и при дальнейшем движении находиться вблизи этой точки, а при  $t \rightarrow \infty$  будут стремиться к ней. При  $v'(a) > 0$  и, вообще, при распределениях знака функции  $v(x)$  вблизи точки  $x = a$ , отличного от описанного выше, положение равновесия частицы в  $a$  будет неустойчивым (ср. п. 2 §2).

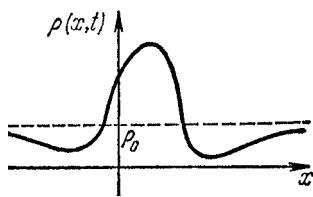
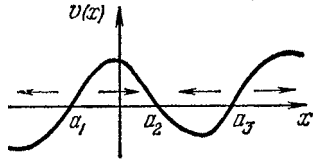


Рис. 21

покоя.

На рис. 21 показано распределение плотности среды в некоторый момент  $t > t_0$  при законе распределения скорости, показанном на том же рисунке вверху, и начальном распределении плотности  $\rho_0(x) \equiv \rho_0 = \text{const}$ . Из трех положений равновесия  $a_2$  – асимптотически устойчивое, тогда как  $a_1$  и  $a_3$  – неустойчивые.

Закон изменения плотности среды в точке покоя  $x = a$  легко подсчитать по формуле (7.6), учтя, что  $\varphi(t_0, t, a) = a$  (почему?):

$$\rho|_{x=a} = \rho_0(x) \exp \left[ - \int_{t_0}^t v'(a) d\tau \right] = \rho_0(x) e^{-v'(a)(t-t_0)}.$$

Таким образом, при  $v'(a) \neq 0$  получается экспоненциальное нарастание плотности в случае устойчивой точки покоя и экспоненциальное исчезновение – в случае неустойчивой точки

## Упражнения

- 1) Выведите формулу (2) из общей формулы (7.6).
- 2) Пусть  $v(x) = v_0 - \frac{v_1}{1+x^2}$ ,  $\rho_0(x) \equiv \rho_0 = \text{const}$ ,  $t_0 = 0$ ; найдите  $\rho(x, t)$  в случаях
  - a)  $v_1 < v_0 > 0$ ;
  - b)  $v_1 > v_0 > 0$ ;
  - c)  $v_0 = 0 < v_1$ .
- 3) Пусть  $\rho_0(t) = \text{const}$ ; найдите уравнение для точек экстремума функции  $\rho(x, t)$  при фиксированном  $t$ .
- 4) Напишите линейную часть разложения  $\rho(x, t)$  по степеням  $t - t_0$ .

## § 9 Дивергентная форма уравнений

При выводе уравнения неразрывности (7.1) мы исходили из закона сохранения масс. Обратное, этот закон легко вывести из уравнения неразрывности. Прделаем этот обратный переход для любого локального параметра  $\vartheta(x, t)$  среды, предположив, что он удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} [v(x, t)\vartheta] + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

относительно которого говорят, что оно имеет *дивергентную форму* (это означает, что производная по геометрической координате входит в уравнение с коэффициентом, равным 1).

Взамен суммарной массы теперь надо рассматривать интеграл

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x, t) dx \quad (2)$$

(ср. общую формулу (1.6.1)); при этом мы будем предполагать, что  $\vartheta$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  достаточно быстро стремится к нулю, так что вопроса о сходимости рассматриваемых

интегралов не возникает.

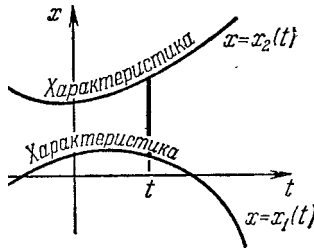
Интеграл (2) мог бы зависеть от  $t$ ; однако нетрудно проверить, что на самом деле при изменении  $t$  значение  $\Theta$  не меняется. В самом деле, дифференцируя интеграл (2) по параметру  $t$  и пользуясь уравнением (1), получаем

$$\frac{d\Theta}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial(v\vartheta)}{\partial x} dx = v\vartheta|_{x=-\infty} - v\vartheta|_{x=\infty} = 0,$$

в силу предположения о поведении  $\vartheta$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  ( $\vartheta|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$ ).

Из уравнения (1) нетрудно получить и более общее утверждение о сохранении суммарной «массы» между любыми двумя подвижными частицами в среде. Речь идет об интеграле,

$$\Theta_{(x_1, x_2)} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \vartheta(x, t) dx, \quad (3)$$



пределы которого  $x = x_1(t)$  и  $x = x_2(t)$  описывают движение частиц, т. е. определяют уравнение характеристик (см. рис. 22, где интервал интегрирования показан жирно). При дифференцировании интеграла (3) по  $t$  надо учесть, что в этот интеграл  $t$  входит трижды и потому в силу правила дифференцирования сложной функции производная будет представлять собой сумму трех слагаемых:

Рис. 22

$$\frac{d}{dt} \Theta_{(x_1, x_2)} = \vartheta|_{x=x_2} \frac{dx_2}{dt} - \vartheta|_{x=x_1} \frac{dx_1}{dt} + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dx. \quad (4)$$

Воспользовавшись дифференциальным уравнением характеристик (3.9), а также уравнением неразрывности (1), получим

$$\frac{d}{dt} \Theta_{(x_1, x_2)} = \vartheta|_{x=x_2} v|_{x=x_2} - \vartheta|_{x=x_1} v|_{x=x_1} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(v\vartheta)}{\partial x} dx = 0,$$

откуда  $\Theta_{(x_1, x_2)} = const$ , что и требовалось доказать.

Нетрудно указать смысл всех трех членов в правой части (4): это скорость истечения «массы» через верхний конец отрезка, изображенного жирно на рис. 22 (без учета перемещения этого конца), скорость истечения «массы» через его нижний конец и скорость возрастания «массы» на самом отрезке. Если «масса» каждого участка среды в процессе его эволюции не меняется, то сумма этих скоростей должна равняться нулю. Это очевидное утверждение вытекает также из отмеченного в §1.9 свойства потоков: поток массы через сечение, движущееся со скоростью вещества, равен нулю. Подчеркнем, что вывод об инвариантности интеграла (3) мы получили без интегрирования этого уравнения, опираясь только на само это уравнение и дифференциальное уравнение характеристик. Это одно из полезных следствий применения понятия характеристики.

Аналогичное рассмотрение суммарной «массы» между двумя неподвижными точками  $a$  и  $b$  оси  $x$  приводит к равенству

$$\frac{d}{dt} \Theta_{(a, b)} = \vartheta|_{x=a} v|_{x=a} - \vartheta|_{x=b} v|_{x=b}, \quad (5)$$

о котором мы уже упоминали в §1.7 (см. формулу (I. 7.11)). В теории ударных волн, теории распространения пламени и в некоторых других областях важную роль играет соотношение (5) в случае, когда  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$ , а значения параметра  $\vartheta$  и скорости  $v$  на бесконечности известны и, вообще говоря, отличны от нуля и не одинаковы при  $x = -\infty$  и при  $x = \infty$ ; этот случай называется *режимом распространения*. Обозначая  $\Theta_{(-\infty, \infty)} = \Theta$ ,  $\vartheta|_{\pm\infty} = \vartheta_{\pm}$ ,  $v|_{\pm\infty} = v_{\pm}$ , получаем из (5)

$$\frac{d\Theta}{dt} = \vartheta_- v_- - \vartheta_+ x_+. \quad (6)$$

Производная в левой части нуждается в некотором разъяснении, так как интеграл (2), определяющий величину  $\Theta$ , в данном случае оказывается расходящимся (почему?). Однако это не препятствует возможности говорить о скорости его изменения, так как

она оказывается конечной; строго говоря, под  $d\Theta/dt$  надо понимать предел  $\frac{d\Theta_{(-N,N)}}{dt}$

при  $N \rightarrow \infty$ , что вполне согласуется с физическим смыслом бесконечности как неопределенно большого значения. (Действия над расходящимися интегралами мы рассматривали также в ЭПМ, §§III.6 и X.6.)

Итак, скорость изменения величины  $\Theta$  определяется без построения закона  $\vartheta(x, t)$  эволюции распределения величины,  $\vartheta$  который при заданной скорости  $v(x, t)$  может иметь различный конкретный вид в зависимости от начального условия  $\vartheta|_{t=t_0} = \vartheta_0(x)$ .

Наиболее прост случай  $v(x, t) \equiv v_0 = \text{const}$ , для которого  $\vartheta(x, t) = \vartheta_0(x - v_0(t - t_0))$ . В этом случае формула (6) приобретает вид

$$\frac{d\Theta}{dt} = v_0(\vartheta_- - \vartheta_+)$$

и может быть легко выведена из рис. 20, что мы предоставляем читателю.

Математическим обобщением уравнения (1) служит уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} [a(x, t)\vartheta] + \frac{\partial}{\partial t} [b(x, t)\vartheta] = 0. \quad (7)$$

В математических работах о левой части такого уравнения также говорят, что она имеет дивергентную форму, так как если отвлечься от физического смысла независимых переменных – тогда лучше поменять обозначение  $t$  на  $u$  и трактовать  $x, u$  как равноправные геометрические координаты (что формально вполне допустимо), – то эту левую часть можно переписать в виде  $\text{div}(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})$ , где  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  – единичные векторы осей  $x$  и  $u$  (см. §I.8). После этого, в соответствии с §I.8, можно рассмотреть стационарное двумерное «движение» в фиктивном времени  $\tau$  среды с локальным параметром  $\vartheta$  и полем скоростей  $\mathbf{w} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ; при этом соотношение (7) можно истолковать как соответствующий закон сохранения. Таким образом, нестационарная одномерная задача с независимыми переменными  $x, t$  оказывается эквивалентной некоторой стационарной (так как  $\mathbf{w}$  не зависит от  $\tau$ ) двумерной задаче с фиктивным временем  $\tau$ .

Если раскрыть в левой части уравнения (7) квадратные скобки, то его можно преобразовать к виду (5.1), где  $g = -(a'_x + b'_t)\vartheta$ . Отсюда ясно, что задачу Коши и другие аналогичные задачи для уравнения (7) можно решать с помощью перехода к характеристикам, как это было описано в §§5–6, причем дифференциальное уравнение характеристик имеет для уравнения (7) тот же вид (5.2), что и для уравнения (5.1).

Если в уравнении (7) обозначить  $b\vartheta = \vartheta_1$ ,  $a/b = v$ , т. е.  $a\vartheta = v\vartheta_1$ , то для  $\vartheta_1$  получится уравнение (1), а характеристики нового уравнения будут удовлетворять уравнению

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{a}{b}, \text{ т. е. совпадать с характеристиками уравнения (7). Поэтому в силу}$$

доказанного выше интеграл

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} b(x, t)\vartheta(x, t)dx, \quad (8)$$

пределы которого скользят по характеристикам, не зависит от времени  $t$ . Впрочем, это легко доказать независимо с помощью дифференцирования интеграла (8) по  $t$  и использования уравнений (7) и (5.2), что мы предоставляем читателю.

## Упражнение

- 1) Найдите решение уравнения  $(x\vartheta)'_x - (2t\vartheta)'_t = 0$  ( $t \geq 1$ ) при начальном условии  $\vartheta|_{x=1} = 3x$ . Положив  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  при  $t = 1$ , проверьте закон сохранения «массы».

## § 10 Образование складок (перехлесты)

Мы уже упоминали в §1, что если скорости частиц задаются в лагранжевых координатах (другими словами, законы движения различных частиц задаются независимо), то в процессе эволюции среды одни частицы могут обгонять другие. Сейчас мы рассмотрим этот вопрос более подробно.

Рассмотрим сначала наиболее простой вариант, когда скорость каждой частицы остается неизменной (частицы движутся по инерции), но для различных частиц, вообще говоря, различной,  $v = v(\xi)$ . Тогда каждая частица будет двигаться по линейному закону

$$x = \xi + v(\xi)(t - t_0). \quad (1)$$

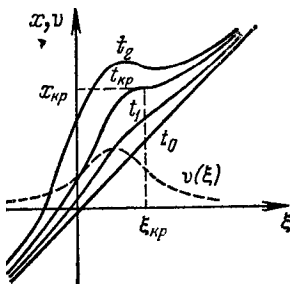


Рис. 23

Допустим, что зависимость  $v(\xi)$  такая, как показано на рис. 23 пунктиром. Это означает, что все частицы движутся направо, но некоторый средний участок среды имеет сравнительно более высокую скорость. Ясно, что тогда через некоторый промежуток времени эти более быстрые частицы обгонят движущиеся перед ними (т. е. расположенные правее них) медленные частицы и в среде как бы образуется *складка*; как говорят, произойдет *перехлест*.

Рассмотрим явление перехлеста подробнее. Для этого представим себе зависимости  $x(\xi)$  в последовательные моменты времени. Графики этих зависимостей показаны на рис. 23; их легко получить из графиков  $x = \xi$  и  $v = v(\xi)$ , так как при фиксированном  $t$  множитель  $t - t_0$  в формуле (1) представляет собой просто коэффициент пропорциональности (продумайте это построение!). Мы видим, что с ростом  $t$  участок графика  $x(\xi)$ , на котором  $v'(\xi) < 0$  (это и есть участок, на котором быстрые частицы догоняют медленные!), становится все более пологим, и после некоторого момента  $t_{кр}$  на этом графике образуется участок убывания, который

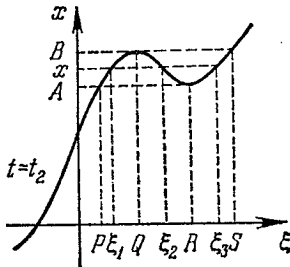


Рис. 24

постепенно разрастается. Для наглядности график  $x(\xi)$  при некотором  $t = t_2 > t_{кр}$  изображен отдельно на рис. 24. Обозначим, как на этом рисунке, буквами  $Q, R$  точки локального экстремума функции  $x(\xi)$ , буквами  $A, B$  – соответствующие экстремальные значения, а буквами  $P, S$  – отличные от точек экстремума решения уравнений  $x(\xi) = A$  и  $x(\xi) = B$ . Тогда ясно, что каждому значению  $x$ , содержащемуся между  $A$  и  $B$ , отвечает три значения  $\xi$ , для которых  $x(\xi)$  принимает заданные значения, именно,

$$P < \xi_1 < Q < \xi_2 < R < \xi_3 < S$$

(см. рис. 24). Таким образом, в момент  $t_2$  участок  $A, B$  оси  $x$  оказался покрытым тремя слоями среды, которые в момент  $t = t_0$  занимали положения  $P \leq \xi \leq Q$ ,  $Q \leq \xi \leq R$ ,  $R \leq \xi \leq S$  соответственно. Конечно, все значения  $A, B, P, Q, R, S$  зависят от  $t$ .

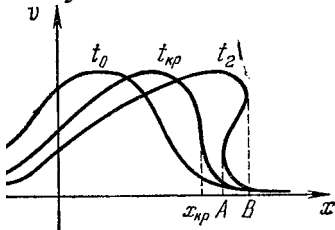


Рис. 25

За образованием складки легко проследить также, наблюдая за графиком зависимости  $v(x)$  в последовательные моменты времени (рис. 25). При  $t = t_0$  будет  $x = \xi$ , т. е. зависимость  $v(x)$  совпадает с заданной зависимостью  $v(\xi)$ . При возрастании  $t$  исходный график  $v(x)$  деформируется, так как каждая его точка движется направо тем быстрее, чем она расположена выше. В результате этого в момент  $t_{кр}$  у графика образуется вертикальная касательная (при  $x = x_{кр}$ , см. рис. 25), после чего

и возникает перехлест. На рис. 25 хорошо видно, что каждой точке участка  $A, B$  отвечают три различные скорости частиц.

Как найти момент начала перехлеста, а после этого момента – эволюционирующие границы складки? Из рис. 23 ясно, что значения  $x = A$  и  $x = B$ , определяющие границу складки, удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \equiv 1 + v'(\xi)(t - t_0) = 0. \quad (2)$$

Поэтому указанные значения  $x$  получатся, если из соотношений (1) и (2) исключить  $\xi$ . В момент начала перехлеста, как видно из рис. 23, при критическом значении  $\xi_{кр}$  график  $x = x(\xi)$  будет иметь точку перегиба (с горизонтальной касательной). По известному признаку точки перегиба получаем, что должно быть

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \equiv v''(\xi)(t - t_0) = 0$$

(здесь и в (2) приходится писать частные производные от  $x$  по  $\xi$ , так как  $x$  зависит еще от  $t$ ), откуда

$$v''(\xi) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) можно получить также следующим образом. Из равенства (2) мы видим, что момент попадания частицы на границу складки определяется равенством

$$t = t_0 - 1/v'(\xi).$$

В момент начала перехлеста  $t(\xi)$  должно принимать минимальное значение. Отсюда

$$\frac{dt}{d\xi} \equiv \frac{v''}{v'^2} = 0,$$

и мы вновь приходим к условию (3).

Уравнение (3) определяет критические значения  $\xi = \xi_{кр}$ , т. е. начальное положение частиц, в которых начнут образовываться складки. Найдя такое значение, из равенства (2) получаем момент начала перехлеста

$$t_{кр} = t_0 - 1/v'(\xi_{кр}),$$

а отсюда, с помощью формулы (1), – точку, из которой начинает развиваться складка:

$$x_{кр} = \xi_{кр} - \frac{v(\xi_{кр})}{v'(\xi_{кр})}.$$

Покажем теперь, как проявляется перехлест в поведении семейства характеристик в плоскости  $x, t$ . Так как уравнение (1) линейно относительно  $x$  и  $t$ , то каждая характеристика, которая получается при фиксировании значения  $\xi$ , представляет собой прямую линию. Таким образом, характеристики образуют однопараметрическое семейство линий с уравнением (1), в котором  $\xi$  служит параметром. Мы показали выше, что граница складки определяется добавочным соотношением (2). Но это соотношение получается, если продифференцировать уравнение семейства (1) по параметру  $\xi$ . Как известно (см., например, ЭПМ, §IV.5), эта процедура для любого однопараметрического семейства линий приводит к огибающей этого семейства. Итак, линия на плоскости  $x, t$ , ограничивающая область складки среды, является огибающей семейства характеристик; эта огибающая называется *каустикой*. Нетрудно написать ее параметрические уравнения, приняв  $\xi$  за параметр: из (2) и (1) получаем

$$t = t_0 - \frac{1}{v'(\xi)}, \quad x = \xi - \frac{v(\xi)}{v'(\xi)}. \quad (4)$$

Рассмотрим строение каустики вблизи мировой точки<sup>15</sup>  $M_{кр}$ , определяющей начало образования складки. Мы видели, что при значении  $\xi = \xi_{кр}$  должно выполняться

<sup>15</sup> Мировая точка есть точка в плоскости  $x, t$  (для пространственных движений – точка в 4-мерном пространстве  $x, y, z, t$ ), определяющая место и момент какого-либо события.

соотношение (3). Поэтому

$$\left. \frac{dt}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_{кр}} = \left. \frac{v''}{v'^2} \right|_{\xi=\xi_{кр}} = 0, \quad \left. \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_{кр}} = \left( 1 - \frac{v'^2 - vv''}{v'^2} \right) \Big|_{\xi=\xi_{кр}} = 0.$$

Дальнейшее дифференцирование, которое мы предоставляем читателю, показывает, что последующие производные при  $\xi = \xi_{кр}$ , вообще говоря, отличны от нуля. Поэтому разложение в ряд Тейлора функций (4) в окрестности точки  $\xi = \xi_{кр}$  имеет вид

$$t = t_{кр} + a_2(\xi - \xi_{кр})^2 + a_3(\xi - \xi_{кр})^3 + \dots, \quad x = x_{кр} + b_2(\xi - \xi_{кр})^2 + b_3(\xi - \xi_{кр})^3 + \dots, \quad (5)$$

где буквами  $a_2, a_3, b_2, b_3$  обозначены какие-то постоянные, а многоточиями – члены высшего порядка малости.

Чтобы представить себе вид линии (5) при  $\xi$ , близких к  $\xi_{кр}$ , отбросим члены, обозначенные многоточием; мы получим

$$s = a_2\eta^2 + a_3\eta^3, \quad y = b_2\eta^2 + b_3\eta^3, \quad (s = t - t_{кр}, \quad y = x - x_{кр}, \quad \eta = \xi - \xi_{кр}). \quad (6)$$

Отсюда легко выразить  $\eta^2$  и  $\eta^3$  через  $s$  и  $y$ , как из системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Это даст  $\eta^2 = \alpha s + \beta y$ ,  $\eta^3 = \gamma s + \delta y$ , где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – некоторые постоянные. Обозначив, далее,

$$\alpha s + \beta y = u, \quad \gamma s + \delta y = v, \quad (7)$$

мы с помощью возведения в степень получим соотношение

$$u^3 = v^2, \quad \text{т. е. } u = v^{2/3}.$$

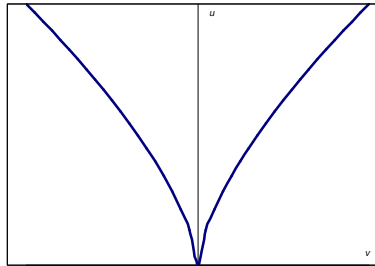


Рис. 26

Получилась так называемая полукубическая парабола (рис. 26), имеющая в начале координат *точку возврата*: линия, подходя к этой точке, отходит от нее вспять, имея там острие с нулевым углом и бесконечно большой кривизной. Но так как формулы (7) определяют линейное отображение плоскости  $s, y$  на плоскость  $u, v$ , т. е. комбинацию равномерных растяжений и поворота (см. §III.3), то и в плоскости  $s, y$  линия (6) будет иметь точку возврата в начале координат. А так как члены высшего

порядка малости оказывают существенное влияние только при удалении от исследуемой точки, то мы приходим к выводу, что каустика (5) будет в критической точке  $M_{кр}$  иметь точку возврата.

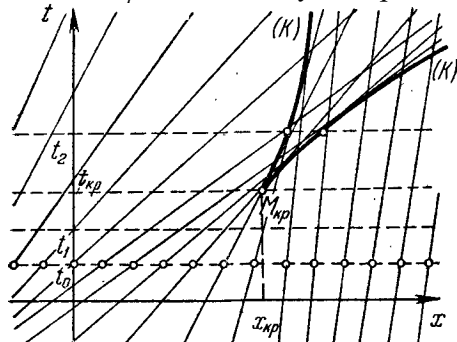


Рис. 27

Типичная картина расположения характеристик показана на рис. 27, где каустика (K) изображена более жирно. Видно, как с возрастанием времени в середине изображенного участка оси  $x$  образуется уплотнение, а начиная с момента  $t_{кр}$  в среде образуется складка. На рис. 28 изображена ситуация внутри этой складки: в момент  $t_2 > t_{кр}$  складкой служит участок  $A, B$  оси  $x$ ; в произвольной мировой точке  $M$ , отвечающей моменту  $t_2$  и точкам складки, имеются частицы, пришедшие из  $M_1, M_2$  и  $M_3$  и обладающие все различными скоростями. Законы

движения этих частиц изображаются характеристиками, показанными на рис. 28 и касающимися каустики в точках  $N_1, N_2$  и  $N_3$  соответственно.

На рис. 27 видно удобство горизонтального расположения оси геометрической координаты  $x$  при изображении плоскости  $x, t$ , так как тогда сечение этой плоскости прямыми  $t = const$  при дискретных значениях  $t$  позволяет легко представить себе развитие процесса на оси  $x$ ; см. по этому поводу также рис. 11.

Из уравнений (4) видно, что каждому значению  $\xi$ , для которого  $v'(\xi) \neq 0$ , отвечает вполне определенная точка каустики; это точка, в которой соответствующая характеристика пересекается бесконечно близкими, т. е. мировая точка, отвечающая

достижению соответствующей частицы бесконечно близкими. Такая встреча состоится при некотором  $t > t_0$ , зависящем от  $\xi$ , если  $v'(\xi) < 0$ , и при некотором  $t < t_0$ , т. е. по сравнению с  $t_0$  в прошлом, если  $v'(\xi) > 0$ . Таким образом, при любом начальном распределении скоростей частиц, отличном от тривиального  $v'(\xi) = \text{const}$ , перехлест обязательно имеет место либо в будущем, либо в прошлом. В процессе эволюции среды в ней могут образовываться новые складки, так как из каждой точки перегиба  $\bar{\xi}$  функции  $v(\bar{\xi})$  должна со временем образоваться складка – в будущем, если  $v'(\bar{\xi}) < 0$ , и в прошлом, если  $v'(\bar{\xi}) > 0$ .

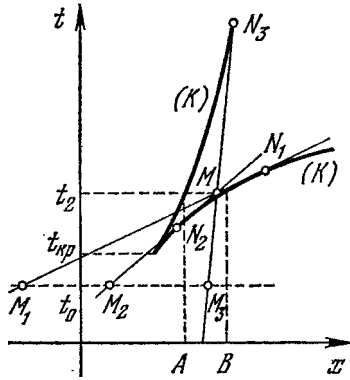


Рис. 28

Из рис. 23 ясно также, что если в начальный момент среда не имела складок и  $v(\pm\infty)$  принимает конечные значения, то раз образовавшаяся складка не может в дальнейшем распрямиться, т. е. складки могут только добавляться.

Отметим, что все сказанное в последнем абзаце существенно связано с конкретным видом (1) закона движения частиц, другими словами, с предположением о постоянстве скорости, движения каждой частицы.

Посмотрим теперь, как при образовании складки меняется плотность среды. Это изменение можно наглядно представить из рис. 27.

В самом деле, если на прямой  $t = t_0$  сетка частиц выбрана так, чтобы; расстояние между соседними частицами было обратно пропорционально локальной плотности, т. е. чтобы «густота» частиц была прямо пропорциональна этой плотности (для этого надо отметить каждую частицу, номер которой кратен некоторому числу), то в силу сохранения числа частиц эта пропорциональность сохранится при любом  $t$ , что и дает возможность увидеть плотность на рисунке. В частности, видно, что внутри складки, у ее концов расстояние между близкими характеристиками приобретает высший порядок малости, и потому плотность среды становится бесконечной; эта плотность имеет вид суммы трех функций, изображенных на рис. 29 и отвечающих трем перекрывающимся «слоям» среды.

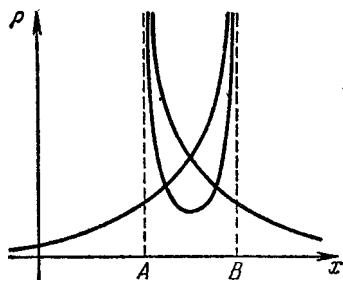


Рис. 29

Это утверждение легко подтвердить и аналитически. В самом деле, в силу §1.3

$$\rho(x, t) = \rho_0(\xi) \left| \frac{dx}{d\xi} \right|^{-1} = \frac{\rho_0(\xi)}{|1 + v'(\xi)(t - t_0)|} \quad (8)$$

(обратите внимание на знак абсолютной величины в этой формуле!). Однако на концах складки, т. е. на каустике

выполняется соотношение (2), т. е. знаменатель в правой части (8) обращается в нуль, а потому  $\rho$  – в бесконечность.

Нетрудно разобраться в порядке этой, бесконечности. В момент  $t_{кр}$ , когда у графика  $v(x)$  появляется вертикальная точка перегиба, зависимость между приращениями переменных, с точностью до малых высшего порядка, имеет вид

$x - x_{кр} \sim (v_{кр} - v)^3 \sim (\xi - \xi_{кр})^3$  (~ – знак пропорциональности). Дифференцируя это равенство, получаем  $dx \sim (\xi - \xi_{кр})^2 d\xi$ , откуда

$$\rho \sim \left| \frac{d\xi}{dx} \right| \sim (\xi - \xi_{кр})^{-2} \sim (x - x_{кр})^{-\frac{2}{3}}.$$

Аналогично получаем, что после образования складки у ее концов  $A$  и  $B$  плотность имеет выражения

$$\rho \sim (x - A)^{-1/2} \text{ и } \rho \sim (B - x)^{-1/2}.$$

Естественно, что особенности получаются интегрируемые, так как суммарная масса частиц конечная. Итак, при образовании складки плотности меняются следующим образом: в среде образуется уплотнение, которое в некоторый момент превращается в



особенность порядка  $2/3$ ; эта особенность тут же расщепляется на две особенности порядка  $1/2$ , расходящиеся друг от друга.

Остановимся еще на роли знака производной  $dx/d\xi$ . Ясно, что если эта производная положительная, то складок нет, они появляются с возникновением участков, на которых она отрицательная. В связи с этим заметим также, что хотя плотность всех слоев среды положительная (см. рис. 29), но при формальных вычислениях часто удобнее считать, что на «вывернутых» слоях среды, для которых  $dx/d\xi < 0$ , будет и  $\rho < 0$ : например, при такой договоренности можно пользоваться формулами

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1}, \quad M = \int \rho_0 d\xi = \int \rho_0 \frac{d\xi}{dx} dx = \int \rho dx$$

без постановки знака абсолютной величины.

Любопытен вырожденный случай, для которого скорости частиц в начальный момент распределены по линейному закону,  $v(\xi) = \alpha\xi + \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – некоторые постоянные. В этом случае уравнения (4) каустики приобретают вид

$$t = t_0 - \frac{1}{\alpha}, \quad x = \xi - \frac{\alpha\xi + \beta}{\alpha}, \quad \text{т. е. } x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом,  $t$  и  $x$  получаются постоянными, т. е. каустика вырождается в точку, все характеристики проходят через одну точку. Это означает, что, в момент  $t_{кр} = t_0 - 1/\alpha$  ( $t_{кр} > t_0$ , если  $\alpha < 0$ ) частицы со всей оси  $x$  на мгновение фокусируются в точку  $x_{кр} = -\beta/\alpha$ , после чего вновь разлетаются из нее.

Скажем теперь коротко о более общем случае, когда скорость каждой частицы не обязана быть постоянной, а меняется по заданному закону  $v = v(\xi, t)$ . Закон движения частиц, взамен (1), будет иметь вид

$$x = \xi + \int_{t_0}^t v(\xi, \tau) d\tau. \quad (9)$$

Характеристики на рис. 27 теперь будут, вообще говоря, криволинейными, но качественно картина будет знакомой – огибающая семейства характеристик (каустика) определит расположение складок среды. Уравнение каустики получается из сочетания равенства (9) с результатом его дифференцирования по параметру  $\xi$ :

$$0 = 1 + \int_{t_0}^t v'_{\xi}(\xi, \tau) d\tau, \quad (10)$$

однако в общем случае перейти к более простой форме системы уравнений (9) – (10) (наподобие (4)) нельзя. Формула (10) определяет в принципе  $t$  как функцию  $\xi$ , и потому дифференцирование по  $\xi$  дает<sup>16</sup>

$$0 = v'_{\xi}(\xi, \tau) \frac{dt}{d\xi} + \int_{t_0}^t v''_{\xi\xi}(\xi, \tau) d\tau.$$

Поэтому равенство  $dt/d\xi = 0$ ; определяющее критическую ситуацию возникновения складки, приводит к уравнению

$$\int_{t_0}^t v''_{\xi\xi}(\xi, \tau) d\tau = 0,$$

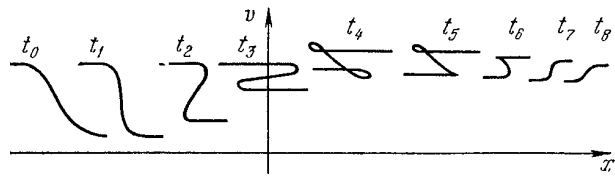
которое совместно с (10) дает  $\xi_{кр}$  и  $t_{кр}$ ; после этого из (9) можно найти  $x_{кр}$ . Картина, показанная на рис. 25, теперь изменится в том смысле, что из-за переменной скорости движения частиц точки исходного графика  $v(x|_{t=t_0})$  при переходе к следующим

значениям  $t$  будут перемещаться уже не обязательно параллельно оси  $x$ .

Однако качественно графики зависимости  $v(x)$  останутся теми же – при образовании

<sup>16</sup> Напомним, что под  $v'_{\xi}$  и  $v''_{\xi\xi}$  понимается соответственно  $\partial v/\partial \xi$  и  $\partial^2 v/\partial \xi^2$ .

складки произойдет переход через точку перегиба с вертикальной касательной. Поэтому и характер особенностей у плотности будет тот же, что и раньше.



Принципиально новой является возможность «рассасывания» образовавшейся складки: отставшие частицы могут пойти быстрее и восстановить былую упорядоченность. На рис. 30 показана возможная эволюция

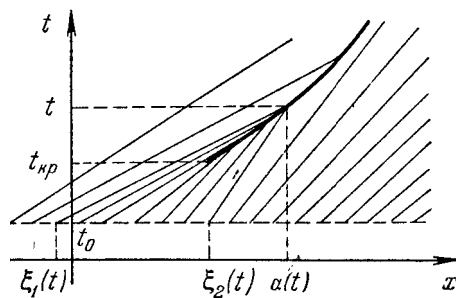
**Рис. 30** графика  $v(x)$  в последовательные моменты времени при образовании складки, начиная с момента  $t_1$ , и ее рассасывании, начиная с момента  $t_7$ . (Показана только часть графика вблизи складки.)

## Упражнения

- 1) Пусть  $\rho_0(\xi) = \text{const}$ ,  $t_0 = 0$ ,  $v(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2}$ . Найдите уравнение каустики, критические параметры и зависимость  $\rho(x, t)$ .
- 2) То же – для  $v(\xi, t) = 2\xi^2 t$ .
- 3) Рассмотрите случай, когда  $v = v(\xi)$ , причем  $v(-\xi) = -v(\xi)$  и  $v'(0) < 0$ .
- 4) Укажите общее свойство точек перегиба графиков рис. 25 и выведите отсюда условие (3) для критической точки.

## § 11 Движение с запрещенным обгоном

Возможен другой вариант задачи об образовании уплотнений, приводящий к возникновению сгустков конечной массы, т. е. дельтаобразных слагаемых у плотности. Именно, допустим, что если более быстрая частица догоняет более медленную, то не проходит сквозь нее, как это считалось раньше, а обе частицы слипаются и начинают идти с некоторой промежуточной скоростью (наподобие того, как это было бы на шоссе, если запретить обгон, но разрешить подталкивание автомашинами друг друга). Конечно, тогда не совсем точно называть частицы невзаимодействующими, скорее, это взаимодействие контактного характера, проявляющееся в виде прилипания, когда координаты частиц в некоторый момент совпадают, т. е. когда частицы находятся в контакте, и пропадающее, когда частицы отстоят друг от друга на конечное расстояние.



**Рис. 31**

При сделанном предположении о невозможности обгона, после достижения критического момента  $t_{кр}$  (который находится так же, как в §10) в среде начинает развиваться сгусток бесконечно малой протяженности, но положительной массы. Ограничимся для простоты случаем, когда скорость  $v(\xi)$  каждой частицы в процессе ее движения не меняется, и обозначим через  $\mu(t)$  массу сгустка, через  $a(t)$  – его координату, а через  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  (рис. 31) – границы интервала частиц, слепившихся в сгусток;

отметим, что скорость  $v(x, t)$  при  $x = a(t)$  имеет разрыв. Ясно, что должно быть

$$\mu(t) = \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} \rho_0(\xi) d\xi, \quad a(t) = \xi_1(t) + v(\xi_1(t))(t - t_0) = \xi_2(t) + v(\xi_2(t))(t - t_0). \quad (1)$$

Таким образом, четыре функции  $\mu(t)$ ,  $a(t)$ ,  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  связаны тремя уравнениями и потому для их решения при  $t \geq t_{кр}$  (до  $t = t_{кр}$  решения нет) требуется то или иное дополнительное предположение о характере взаимодействия частиц при их столкновении. Например, если при переходе частиц в сгусток сохраняется количество движения, то имеет место уравнение

$$\frac{d}{dt} \left( \mu \frac{da}{dt} \right) = -\frac{d\xi_1}{dt} \rho_0(\xi_1) v(\xi_1) + \frac{d\xi_2}{dt} \rho_0(\xi_2) v(\xi_2).$$

Это уравнение вместе с (1) дает возможность получить все четыре неизвестные функции от  $t$  с помощью интегрирования шагами по времени, на чем мы здесь не будем останавливаться (ср. ЭПМ, §VIII.6).

Как и в §10, возможно образование новых сгустков. Что касается обратного процесса, то хотя теоретически можно представить себе случай рассасывания сгустка, но реальнее случай, когда взамен этого в среде образуются пустоты (ср. §12), так как обычно процесс образования сгустка связан с переходом механической энергии в тепловую и излучением последней и потому необратим.

## Упражнения

- 1) Пусть  $\rho_0(\xi) = \text{const}$ ,  $v(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$ . Приняв предположение о невозможности обгона частицами друг друга и о сохранении количества движения, выпишите систему дифференциальных уравнений для  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ , определяющую эволюцию сгустка частиц, и соответствующие начальные условия.
- 2) Рассмотрите случай, когда  $v(-\xi) = -v(\xi)$ ,  $v'(0) < 0$ ,  $\rho(-\xi) \equiv \rho(\xi)$ .

## § 12 Поле скоростей, обладающее особенностями

Вернемся к задаче §7 о построении плотности потока по заданному в координатах Эйлера полю  $v(x, t)$  его скоростей и начальной плотности  $\rho_0(x)$ . Как мы говорили в §1, такое поле допускает наглядную интерпретацию в виде системы моторчиков, стоящих на берегу и придающих частицам потока скорости по заданному закону. Ясно, что если в процессе движения заданная частица приближается к передним, т. е. если  $v'_x < 0$ , то плотность порции частиц возрастает; формально это вытекает из равенства

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rho. \quad (1) = (7.4).$$

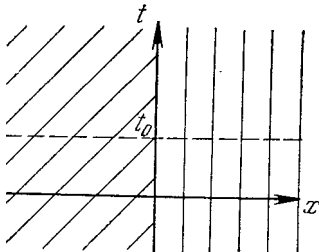


Рис. 32

Однако, если зависимость  $v(x, t)$  достаточно регулярная (в силу (1) достаточно, чтобы производная  $v'_x$  оставалась конечной), то частицы не могут догнать одна другую, о чем уже говорилось в §1. Оказывается, если поле  $v$  имеет особенности, то такое сближение может быть столь активным, что задние частицы настигнут передние и в среде возникнет бесконечно малая по размерам порция конечной массы, т. е. дельтаобразной плотности. В силу формулы (1) такая ситуация возможна,

только если  $\partial v / \partial x$  обращается в бесконечность. Приведем простые примеры.

1. Пусть скорость  $v$  имеет скачок:

$$v \equiv v_0 > 0 \quad (x < 0), \quad v \equiv 0 \quad (x > 0),$$

а начальная плотность  $\rho_0$  постоянна. Тогда все частицы с отрицательной полуоси  $x$  «притискиваются» к началу координат и там остаются навечно.

Соответствующая картина характеристик показана на рис. 32. Так как за время  $t - t_0$  в начале координат сосредоточится масса  $v_0(t - t_0)\rho_0$ , то искомая плотность среды

$$\rho(x, t) = \rho_0 + v_0(t - t_0)\rho_0 \delta(x).$$

Аналогичное нарастающее уплотнение появляется в общем случае, если вдоль некоторой заданной мировой линии (т. е. линии в плоскости  $x, t$ )  $x = \mu(t)$  выполняются соотношения

$$v(\mu(t) + 0, t) \leq \mu'(t) \leq v(\mu(t) - 0, t), \quad (2)$$

которые дают возможность найти независимо плотность  $\rho(x, t)$  при  $x > \mu(t)$  и при

$x < \mu(t)$ . Тогда за время  $dt$  на линии разрыва скорости оседает масса

$$(\rho_+(\mu' - v_+) + \rho_-(v_- - \mu'))dt = (\mu'[\rho] - [\rho v])dt,$$

где обозначено  $\rho_+ = \rho(\mu(t) + 0, t)$ ,  $[\rho] = \rho_+ - \rho_-$  (т. е. скачок плотности) и т. п.

Поэтому к найденной вне линии разрыва плотности надо добавить уплотнение с плотностью

$$\left( \int_{t_0}^t (\mu'[\rho] - [\rho v])dt \right) \delta(x - \mu(t))$$

где  $t_0$  – начальный момент образования уплотнения.

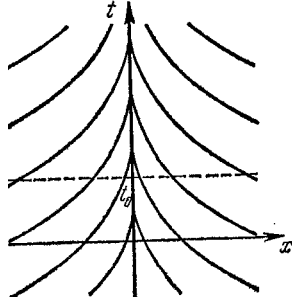


Рис. 33

2. Уплотнение может образоваться и для непрерывного поля скоростей, если при приближении к некоторой характеристике поле направлений характеристик поворачивается ненормально быстро, точнее, если  $v'_x$  на этой характеристике обращается в бесконечность. (Ясно, что производная  $v'_x$  определяет скорость поворота поля характеристик в направлении, параллельном оси  $x$ .)

Пусть, например, скорость

$$v = A|x|^\alpha \quad (x < 0), \quad v = -A|x|^\alpha \quad (x > 0),$$

где  $A > 0$ , а  $0 < \alpha < 1$ ; соответствующая картина

характеристик показана на рис. 33. Интегрирование уравнения  $dx/dt = v(x)$  дает при начальном условии  $x(t_1) = x_1 > 0$

$$x = \begin{cases} x_1^{1-\alpha} - A(1-\alpha)(t-t_1)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \left( t \leq t_1 + \frac{1}{A(1-\alpha)} x_1^{1-\alpha} \right), \\ 0 & \left( t \geq t_1 + \frac{1}{A(1-\alpha)} x_1^{1-\alpha} \right) \end{cases}$$

(проверьте!). Допустим, что в начальный момент  $t = t_0$  среда была однородной, т. е.  $\rho_0(x) = \rho_0$ . Тогда в любой момент  $t > t_0$  в точке  $x = 0$  сосредоточивается масса  $2\rho_0[A(1-\alpha)(t-t_0)]^{1/(1-\alpha)}$ ; плотность при  $x > 0$  в силу формулы (8.2) равна

$$\rho(x, t) = \rho_0 x^{-\alpha} [x^{1-\alpha} + A(1-\alpha)(t-t_0)]^{\alpha(1-\alpha)} = \rho_0 [1 + A(1-\alpha)(t-t_0)x^{-(1-\alpha)}]^{\alpha(1-\alpha)}.$$

Суммарная формула для плотности:

$$\rho(x, t) = \rho_0 [1 + A(1-\alpha)(t-t_0)|x|^{-(1-\alpha)}]^{\alpha(1-\alpha)} + 2\rho_0 [A(1-\alpha)(t-t_0)]^{1/(1-\alpha)} \delta(x).$$

Если частицы столь же активно расходятся друг с другом, то может возникнуть разрыв сплошности среды (*кавитация*), в результате которого в среде возникнут интервалы нулевой плотности. Рассмотрим, например, разрывное поле скоростей

$$v \equiv 0 \quad (x < 0), \quad v \equiv v_0 > 0 \quad (x > 0)$$

при постоянной начальной плотности. Характеристики показаны на рис. 34, где точками покрыта зона кавитации. Плотность получается равной

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_0 & (-\infty < x < 0, v_0(t-t_0) < x < \infty), \\ 0 & (0 < x < v_0(t-t_0)). \end{cases}$$

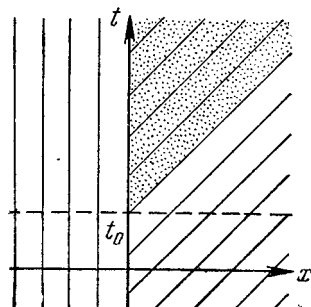


Рис. 34

Возможен случай, когда частицы начинают расходиться из точки уплотнения среды. Так будет, например, на рис. 34, если  $\rho_0(x)$  содержит дельта-слагаемое с особенностью при  $x = 0$ . В других примерах такое «распыление» возможно и для начальной плотности, принимающей конечные значения; например, если условие (2) выполняется при значениях  $t > t_0$ , близких к  $t_0$ , однако при дальнейшем возрастании  $t$  это условие нарушается. В таких случаях требуется иметь дополнительные сведения о законе этого «распыления», так как в противном

случае подсчитать однозначно закон эволюции среды невозможно. Мы не будем здесь останавливаться на том, как это делается.

В заключение отметим, что, как было видно из §10, особенности поля скоростей в эйлеровых координатах могут получаться после перехода к этим координатам в поле скоростей, первоначально заданном в лагранжевых координатах и не имеющем в них особенностей. В настоящем параграфе поле и его особенности задаются с самого начала в эйлеровых координатах. Как видим, это привело к картине эволюции среды, качественно отличной от рассмотренной ранее.

## Упражнения

- 1) Постройте закон изменения плотности среды, если  $v = Ax^\alpha$  ( $x > 0$ ),  $v = -A|x|^\alpha$  ( $x < 0$ ),  $A > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\rho_0(x) = \rho_0$ .
- 2) То же, если  $v = 0$  ( $x < 0$ ),  $v = v_0$  ( $x > 0$ ),  $\rho_0(x) = m\delta(x)$  и из точки уплотнения за время  $dt$  выходят частицы общей массы  $hdt$  ( $h = \text{const}$ ).
- 3) Рассмотрите упражнение 2 для случая, когда речь идет не о массе, а о заряде частиц.

## § 13 Квазистационарные движения

В главе IV мы перейдем к задаче об исследовании эволюции среды, движущейся с заданными ускорениями; эта задача естественно появляется при применении 2-го закона Ньютона. Однако в ней имеются два важных вида движений, когда не только ускорения, но и скорости оказываются заданными, так что мы приходим к ситуации, рассмотренной в главе II. Эти виды движений мы изложим в §§13-14.

Один из этих видов образует квазистационарное движение. Вообще, движение называется *квазистационарным*, если инерционные силы для него пренебрежимо малы. Специфику этого условия легко понять уже при рассмотрении движения одной изолированной частицы.

Пусть частица массы  $m$  движется вдоль оси  $x$ : под действием силы  $F$ , направленной вдоль той же оси. Тогда закон движения  $x = x(t)$  частицы удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$m\ddot{x} = F \quad (\dot{\phantom{x}} = d/dt, t - \text{время}), \quad (1)$$

представляющему собой математическую запись 2-го закона Ньютона. Уравнение (1) имеет бесконечное количество частных решений, и чтобы получить одно вполне определенное решение, нужно к этому уравнению присоединить некоторые дополнительные условия – например, начальные условия

$$x|_{t=t_0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=t_0} = v_0, \quad (2)$$

описывающие начальное положение и начальную скорость частицы, коротко говоря – начальное состояние частицы.

Допустим, что суммарная сила  $F$ , действующая на частицу, складывается из внешней (по отношению к частице) силы  $f_1$ , зависящей, например, от эйлеровой координаты  $x$  частицы и времени  $t$ , и силы трения  $-\lambda\dot{x}$ , пропорциональной скорости частицы. Тогда уравнение движения (1) можно переписать в виде

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} = f_1(x, t). \quad (3)$$

Допустим, кроме того, что сила инерции значительно меньше силы трения:

$$m|\ddot{x}| \ll \lambda|\dot{x}|; \quad (4)$$

в данном примере это и есть условие квазистационарности движения. Тогда внешняя сила и сила трения должны почти полностью уравновеситься, т. е. от (3) можно перейти к уравнению  $\lambda\dot{x} = f_1$ ; если же обозначить  $f_1/\lambda = f$ , то мы получим окончательно уравнение квазистационарного движения

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (5)$$

Таким образом, скорость частицы оказалась заданной в эйлеровых координатах.

Условие (4) квазистационарности можно переписать в виде  $mLT^{-2} \ll \lambda T^{-1}$ , т. е.

$$m \ll \lambda T, \quad (6)$$

где  $L$  – характерная длина, а  $T$  – характерное время в процессе движения (например, амплитуда и период, если рассматривается колебательное движение). Таким образом, из трех величин  $m$ ,  $\lambda$ ,  $T$ , должны быть либо мала масса  $m$ , либо велик коэффициент трения  $\lambda$ , либо, наконец, велико характерное время  $T$  – если считать, что две прочие величины остаются конечными.

Для уравнения (5), как для уравнения 1-го порядка, начальное условие, взамен (2), должно иметь просто вид

$$x|_{t=t_0} = x_0; \quad (7)$$

значение  $\dot{x}|_{t=t_0}$  может быть тогда найдено из самого уравнения (5):

$$\dot{x}|_{t=t_0} = f(x_0, t_0). \quad (8)$$

Если для квазистационарного движения частицы задать начальные условия (2) без учета условия согласования (8), то из-за малой инерционности скорость частицы за малое время релаксации  $\tau$  примет с большой точностью значение (8). (*Релаксацией* называется процесс ликвидации того или иного рассогласования; здесь – скорости и координаты. Отметим, что вопрос об изменении начального условия при понижении порядка дифференциального уравнения затронут также в ЭПМ, §VIII.8, где рассмотрен пограничный слой, играющий для пространственной независимой переменной ту же роль, что релаксация – для временной.) Неравенство  $\tau \ll T$ , как и (4) или (6), можно считать условием квазистационарности движения. Так как эксперимент обычно включает в себя некоторую релаксацию, то за характерное время  $T$  в процессе эксперимента естественно принять наименьшее значение из времени существенного изменения сил и самого времени эксперимента. Тогда нарушение условия  $\tau \ll T$  квазистационарности будет означать, что либо силы меняются слишком быстро, либо же эксперимент занимает слишком мало времени, и тогда процесс релаксации не успевает закончиться.

Аналогичным образом предположение о квазистационарности движения среды из частиц приводит к одной из двух постановок задач, указанных в §1.

## Упражнение

1) Рассмотрите уравнение *линейного осциллятора*

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0. \quad (9)$$

Пусть условие квазистационарности состоит в том, чтобы сила инерции для решений вида  $x = Ce^{pt}$  была по крайней мере в 10 раз меньше силы трения. Как записать это условие через параметры осциллятора? Пусть уравнение (9) решается при начальных условиях  $x|_{t=0} = x_0$ ,  $\dot{x}|_{t=0} = 0$ ; подсчитайте время релаксации  $\tau$ , приняв за него время, через которое невязка (т. е. разность между левой и правой частями) в равенстве (8) понизится до 10%. Сравните  $\tau$  с характерным временем  $T = \lambda/k$ .

## § 14 Движение частиц с заданной энергией

Другой вид движения, при котором зависимость скорости частицы от ее координаты можно считать известной, получается в случае, когда все частицы, образующие среду, обладают одинаковой полной энергией.

Рассмотрим сначала одиночную частицу массы  $m$ , движущуюся вдоль оси  $x$  под действием стационарного силового поля с потенциалом  $U(x)$  без диссипации энергии. Если величина  $E$  полной энергии частицы известна, то на основании закона сохранения энергии можно написать

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = E, \quad (1)$$

где первое слагаемое в левой части представляет собой кинетическую, а второе – потенциальную энергии системы.

Для рассматриваемого движения инерционные силы существенны, т. е. оно не укладывается в схему §13. Однако баланс энергий (1) дает возможность выразить скорость  $v$  в виде известной функции координаты  $x$ :

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}, \quad (2)$$

в результате чего получается ситуация, изучаемая в этой главе.

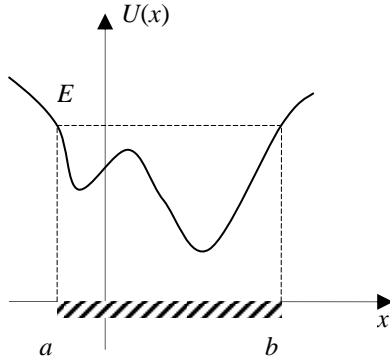


Рис. 35

Из соотношения (2) (а впрочем, и из (1)) видно, что движение с заданным значением  $E$  возможно только в той части оси  $x$ , где  $U(x) \leq E$ . Допустим, что  $U(\pm\infty) > E$ ; тогда эта часть оси состоит из одного или нескольких отрезков. Так, на рис. 35 это будет заштрихованный отрезок  $(a, b)$ . Однако если бы и получилось несколько отрезков, то из-за невозможности перескоков через барьер движение каждой частицы все равно происходило бы только на одном из этих отрезков; поэтому такие отрезки можно исследовать независимо один от другого.

Движение частицы вдоль отрезка  $(a, b)$  возможно в любом из двух направлений, что соответствует двум знакам перед радикалом в правой части (2). Рассмотрим, например, движение направо. Закон этого движения получается, как в §8, с помощью разделения переменных:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]},$$

откуда

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{E - U(s)}} = t - t_0. \quad (3)$$

Так как  $U(b) = E$ , то когда частица приближается к точке,  $b$  подынтегральная функция на верхнем пределе стремится к бесконечности, т. е. интеграл в формуле (3) становится несобственным. Но если  $U'(b) \neq 0$ , как на рис. 35, то при  $s \approx b$  будет  $U(s) \approx E + U'(b)(s - b)$ , т. е. подынтегральная функция на верхнем пределе имеет порядок  $1/\sqrt{b - s}$ , а значит, интеграл (3) при  $x = b$  – сходящийся и имеет конечное значение. Таким образом, частица попадет в точку  $b$  за конечное время, после чего станет двигаться налево.

Подчеркнем, что в точке  $x = b$  скорость частицы равна нулю, т. е. это точка мгновенной остановки; при этом ускорение отлично от нуля и по 2-му закону Ньютона равно

$-\frac{1}{m} U'(b)$ . Этим ускорением и вызывается возобновление движения немедленно после остановки.

Движение налево является как бы зеркальным отражением движения направо, так как в одинаковых точках скорости по модулю равны, но противоположны по направлению. Если  $U'(a) \neq 0$ , то частица за конечное время попадает в точку  $a$ , после чего «все опять повторится сначала». Таким образом, частица будет совершать периодические колебания, период которых, в силу формулы (3), равен

$$2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^b \frac{ds}{\sqrt{E - U(s)}} = t - t_0,$$

Например, линейный осциллятор имеет потенциал  $U(x) = kx^2/2$ , где  $k$  – коэффициент восстановления. Так как в этом случае потенциал – функция четная, то интервал колебания будет симметричным относительно начала координат, т. е.  $a = -b$ . Мы предоставляем читателю подсчитать, что период колебаний линейного осциллятора

равен  $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  и тем самым не зависит от амплитуды  $b$ ; в этом смысле линейный

осциллятор является исключением.

Перейдем теперь к случаю, когда на отрезке  $(a, b)$  расположена среда из невзаимодействующих частиц, причем под  $E$  и  $U(x)$  будем теперь понимать приведенные значения энергий, т. е. значения энергии, отнесенные к единице массы; другими словами, «настоящие» значения энергии частицы получатся, если умножить приведенные величины на массу частицы. Тогда закон сохранения энергии примет вид

$$\frac{v^2}{2} + U(x) = E,$$

а формула для периода колебаний – вид

$$T = \sqrt{2} \int_a^b \frac{ds}{\sqrt{E - U(s)}}. \quad (4)$$

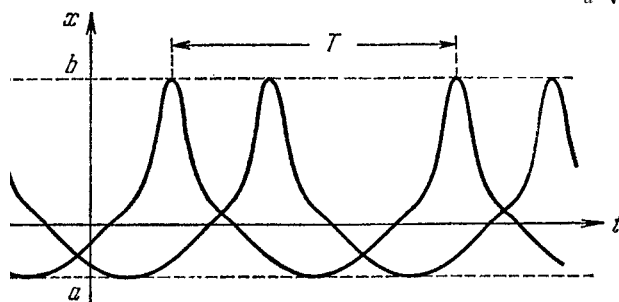


Рис. 36

Мы предположим, что все частицы обладают одинаковой полной энергией (точнее, разброс частиц по энергии пренебрежимо мал). Тогда каждая из частиц будет совершать периодические колебания с одним и тем же периодом (4), а потому и во всей среде, рассматриваемой в целом, будет происходить периодический процесс с тем же периодом; другими словами,

любое начальное распределение частиц, идущих вперед и идущих назад, через время  $T$  в точности воспроизводится. Законы движения отдельных частиц, отвечающие потенциалу рис. 35, показаны на рис. 36; все эти законы получают один из другого простым сдвигом во времени.

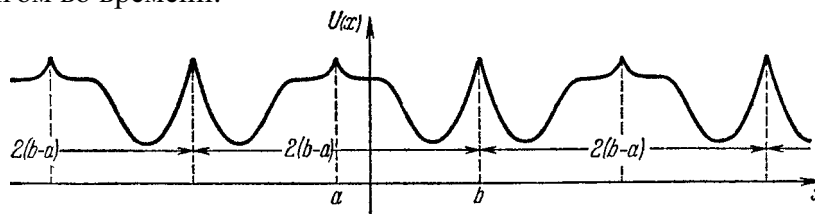


Рис. 37

Пусть известны начальные плотности  $\rho_{0+}(\xi)$  и  $\rho_{0-}(\xi)$  частиц, идущих в положительном и соответственно отрицательном направлениях оси  $x$ , а нас интересуют эти плотности  $\rho_+(x, t)$  и  $\rho_-(x, t)$  в любой момент  $t$ . Тогда, чтобы не возникало сложностей с отражениями частиц от концов отрезка  $(a, b)$ , можно применить следующий искусственный прием: принять, что когда частица достигает конца, она уходит из отрезка, но через этот конец в отрезок входит другая такая же частица с тем же приведенным значением полной энергии  $E$ . Поэтому продолжим потенциал  $U(x)$ , а с ним функции  $v_+(x)$  и  $v_-(x) = -v_+(x)$ , определенные формулой (2) с  $m = 1$ , четным образом через точки  $a$  и  $b$ , что приведет к  $2(b - a)$ -периодическим функциям<sup>17</sup>, и будем считать, что движение частиц в обе стороны происходит на всей оси  $x$ . (На рис. 37 показан

<sup>17</sup> Выражение « $A$ -периодическая функция» при любом  $A$  означает «периодическая функция с периодом  $A$ ».



продолженный потенциал рис. 35, а на рис. 38 показаны законы движения частиц: 11 – до продолжения, 22 и 33 – после продолжения). Начальные распределения плотностей надо продолжить так:  $\rho_{0+}(\xi)$  ( $\rho_{0-}(\xi)$ ) при переходе через точки  $a$  и  $b$  строится как четное

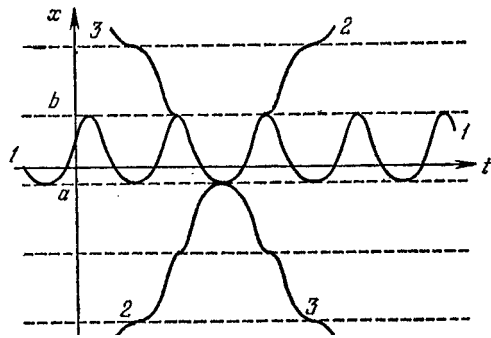


Рис. 38

продолжение функции  $\rho_{0-}(\xi)$  (соответственно  $\rho_{0+}(\xi)$ ); при этом также получаются  $2(b-a)$ -периодические функции  $x$ . (Продумайте, почему получилось такое правило продолжения.)

После продолжения рассматриваемых функций на всю ось можно воспользоваться результатами §8 (см. формулы (8.2) и (8.3)), что даст

$$\rho_+(x,t) = \frac{v_+(\xi_+(x,t))}{v_+(x)} \rho_{0+}(\xi_+(x,t)), \quad (5)$$

где

$$\xi_+(x,t) = \zeta_+(w_+(x) - t + t_0), \quad w_+(x) = \int_{x_0}^x \frac{ds}{v_+(s)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{E - U(s)}},$$

а функция  $\zeta_+$  – обратная к  $w_+(x)$ . Так как можно принять  $w_-(x) \equiv -w_+(x)$  и потому  $\zeta_-(t) \equiv \zeta_+(-t)$ , то

$$\rho_-(x,t) = \frac{v_-(\xi_-(x,t))}{v_-(x)} \rho_{0-}(\xi_-(x,t)) = \frac{v_+(\xi_-(x,t))}{v_+(x)} \rho_{0-}(\xi_-(x,t)), \quad (6)$$

где

$$\xi_-(x,t) = \zeta_-(w_-(x) - t + t_0) = \zeta_+(w_+(x) + t - t_0).$$

Окончательный ответ достаточно рассматривать на отрезке  $a \leq x \leq b$  (однако функции  $v_{0\pm}$ ,  $\rho_{0\pm}$ ,  $w_{\pm}$  и  $\zeta_{\pm}$  все равно надо считать продолженными, так как в противном случае полученные формулы для  $\xi_{\pm}$  и  $\rho_{\pm}$  потеряют смысл из-за возможности произвольного изменения  $t$ !), причем обычно фактически наблюдается суммарный поток с плотностью

$$\rho(x,t) = \rho_+(x,t) + \rho_-(x,t).$$

Отметим, что, как видно из формул (5) и (6), на концах  $a$  и  $b$  отрезка, где на самом-то деле происходит поворот потока, скорость падает до нуля, и потому плотность становится бесконечной.

Рассмотрим в качестве примера линейный осциллятор, т. е. положим  $U(x) = \frac{k}{2}x^2$  и

примем для простоты  $\rho_{0\pm}(x) \equiv \rho_0 = \text{const}$ . Тогда при заданном приведенном значении полной энергии  $E$  колебание будет происходить на интервале  $-b \leq x \leq b$ , где  $b = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ .

На этом интервале

$$v_+(x) = \sqrt{2(E - U(x))} = \sqrt{2E - kx^2}, \quad w_+(x) = \int_0^x \frac{dx}{v_+(x)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin \sqrt{\frac{k}{2E}} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin \frac{x}{b}.$$

Теперь надо функцию  $v_+(x)$  продолжить четным образом через точки  $x = \pm b$  на всю ось  $x$ ; результат этого продолжения показан на рис. 39, это  $2b$ -периодическая функция.

После этого функцию  $w_+(x)$  также продолжаем по формуле  $w_+(x) = \int_0^x \frac{dx}{v_+(x)}$  в результате

получится сумма  $2b$ -периодической и линейной функций, так что при любом  $x$  приращению  $\Delta x = 2b$  отвечает  $\Delta w_+ = \pi/\sqrt{k}$  (рис. 39). Поэтому обратная к  $w_+(x)$  функция  $\zeta_+(x)$ , показанная на рис. 40, также обладает аналогичным свойством: на интервале

$-\frac{\pi}{2\sqrt{k}} \leq t \leq \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$  она равна  $\zeta_+(t) = b \sin \sqrt{k}t$ , а при любом  $t$  приращению  $\Delta t = \pi/\sqrt{k}$  отвечает  $\Delta \zeta_+ = 2b$ . По формуле (5) получаем при  $-b \leq x \leq b$

$$\rho_+(x, t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{2E - kx^2}} v_+ \left( \zeta_+ \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin \frac{x}{b} - t + t_0 \right) \right),$$

где функции  $v_+$ ,  $\zeta_+$  были определены выше. Мы предоставляем читателю найти аналогичное выражение для  $\rho_-(x, t)$ .

Полученное выражение для  $\rho_+(x, t)$  допускает упрощение, связанное со специальным видом участвующих в данном примере зависимостей. Заметим, что  $\zeta_+(t)$  при любом  $t$  отличается от  $b \sin \sqrt{k}t$  на некоторое целое кратное величины  $2b$ . Но эта величина служит периодом функции  $v_+(x)$ , поэтому добавление ее под знаком функции  $v_+$  несущественно, и мы получаем

$$\begin{aligned} \rho_+(x, t) &= \frac{\rho_0}{\sqrt{2E - kx^2}} v_+ \left( b \sin \sqrt{k} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin \frac{x}{b} - t + t_0 \right) \right) = \\ &= \frac{\rho_0}{\sqrt{2E - kx^2}} \sqrt{2E - kb^2 \sin^2 \left[ \arcsin \frac{x}{b} - \sqrt{k}(t - t_0) \right]} = \\ &= \frac{\rho_0 b}{\sqrt{b^2 - x^2}} \left| \cos \left[ \arcsin \frac{x}{b} - \sqrt{k}(t - t_0) \right] \right|. \end{aligned}$$

Выражение для  $\rho_-(x, t)$  получится, если перед  $\sqrt{k}$  поменять  $-$  на  $+$ .

Для потенциала  $U(x)$  общего вида одним из возможных распределений плотности является стационарное. В силу формулы (8.1) оно имеет вид

$$\rho_{\pm}(x) = \frac{C}{|v(x)|} = \frac{C}{\sqrt{2(E - U(x))}}, \quad (7)$$

где постоянная  $C$  определяется общей массой  $M$  осциллирующей среды:

$$M = \int_a^b \rho_+(x) dx = \sqrt{2C} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (8)$$

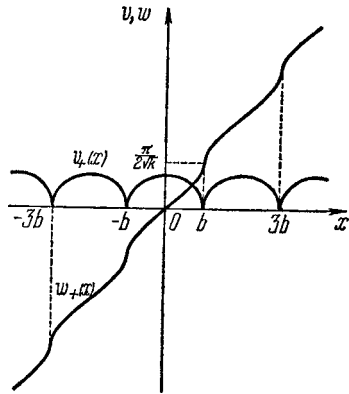


Рис. 39

Интересно, что так как при этом через каждую точку проходят встречные потоки равной интенсивности и равной по модулю скорости, то суммарный импульс порции частиц, расположенных на любом интервале оси  $x$ , равен нулю. Однако суммарная кинетическая энергия  $D$  положительна:

$$D = 2 \int_a^b \frac{1}{2} \rho v^2 dx = \frac{2C}{m} \int_a^b \sqrt{E - U(x)} dx.$$

Мы уже упоминали в §1.6, что в этих условиях можно пользоваться понятием давления среды  $p = \rho v^2$ , где

$\rho = \rho_+ + \rho_- = 2\rho_+$  — суммарная плотность. Более подробно понятие давления будет обсуждаться в гл. V в связи с

рассмотрением случайных, хаотических движений частиц.

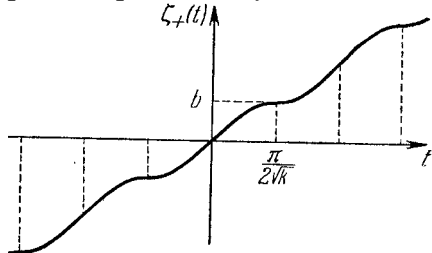


Рис. 40

Вернемся к общему (вообще говоря, нестационарному) распределению плотностей и посмотрим, что получится в результате осреднения этого распределения по времени. Напомним, что если произвольная функция  $f(s)$  задана на каком-либо конечном интервале  $(\alpha, \beta)$ , то ее средним значением по этому интервалу называется

$$\bar{f} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(s) ds;$$

$\bar{f}$  – это такая постоянная, интеграл от которой по интервалу  $(a, b)$  равен интегралу от функции  $f(s)$  по этому интервалу. Средним значением функции  $f(s)$  на интервале  $(-\infty, \infty)$  называется предел

$$\bar{f} = \bar{f}^{(-\infty, \infty)} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow \infty}} \bar{f}^{(\alpha, \beta)} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow \infty}} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(s) ds .$$

(При этом в правой части нельзя написать просто  $\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds$ , так как для

рассматриваемых функций этот интеграл, как правило, будет расходиться; если интеграл сходится, то среднее  $\bar{f}$  обязательно равно нулю!) Среднее значение по бесконечному интервалу существует далеко не у всякой функции, однако нетрудно указать важные классы функций, для которых такое среднее все-таки существует. Так, если  $f(s)$  при  $s \rightarrow \pm\infty$  имеет конечный предел  $k$ , то  $\bar{f} = k$ . Более важен для нас сейчас класс периодических функций: легко понять, что если функция  $f(s)$   $T$ -периодична, то

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(s) ds ,$$

т. е. среднее по всей оси равно среднему по периоду (последний интеграл, очевидно, не зависит от выбора  $\alpha$ ).

Вооружившись этими простыми сведениями, проинтегрируем обе части уравнения неразрывности (7.1) по  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  пока произвольны, и разделим результат на  $\beta - \alpha$ . Мы получим:

$$\left( \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \rho v dt \right)'_x + \frac{1}{\beta - \alpha} [(\rho v)_{t=\beta} - (\rho v)_{t=\alpha}] = 0 ; \quad (9)$$

при этом мы поменяли в первом члене порядок дифференцирования и интегрирования, так как они производятся по разным независимым переменным и потому  $x$  для интеграла играет роль параметра. Если теперь считать, что  $\alpha \rightarrow -\infty$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ , то второй член в равенстве (9) стремится к нулю (почему?), и вспомнив, что величина  $\rho$  обладает свойством  $T$ -периодичности по  $t$ , а величина  $v$  не зависит от  $t$ , мы получим в пределе

$$(\overline{\rho v})'_x \equiv (\overline{\rho(x)v(x)})'_x = 0 .$$

(Заметим, что осредненная величина  $\overline{\rho}$  не может зависеть от переменной  $t$ , по которой производится осреднение, но, конечно, может зависеть от переменной  $x$ , которая при этом осреднении служит параметром.) Другими словами, плотность, осредненная по времени, служит стационарным решением уравнения неразрывности и потому определяется формулой (7).

Рассмотрим еще один тип осреднения по времени, а именно: вдоль по движению частицы. Пусть рассматривается некоторая функция  $\Phi(x)$  от положения частицы, тогда при подстановке выражения  $x = \varphi(t)$  в силу закона движения частицы эта функция становится  $T$ -периодической функцией времени со средним значением

$$\overline{\Phi(x(t))} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(x(t)) dt .$$

Оказывается, что это среднее можно выразить через среднее по другой переменной, связанной с заданным стационарным потоком, имеющим плотность  $\rho(x)$ ; речь идет о

переменной  $m = 2 \int_a^x \rho(x) dx$ , т. е. о массе, содержащейся в стационарном потоке между

точками  $a$  и  $x$ . (Отметим, что из-за наличия двух встречных движений переменную  $m$  нельзя принять за лагранжеву координату, как в конце §1.3.) В самом деле, если

перейти сначала к интегрированию по  $x$ , мы получим

$$\frac{1}{T} 2 \int_a^b \Phi(x) \frac{dt}{dx} dx = \frac{2}{T} \int_a^b \Phi(x) \frac{dx}{v(x)} = \frac{2}{T} \int_a^b \Phi(x) \frac{\rho(x)}{C} dx.$$

Подставив сюда выражение для  $T$  из (4) и  $C$  из (8), получим

$$2 \left( \sqrt{2} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} \right)^{-1} \sqrt{2} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} M^{-1} \int_a^b \Phi(x) \rho(x) dx = 2 \int_a^b \Phi(x) \rho(x) dx / M.$$

Однако правую часть можно переписать в виде  $\int \Phi dm / M$ , где интегрирование проводится по всему ансамблю частиц; а это и есть среднее значение. Итак,

$$\overline{\Phi(x(t))} = \overline{\Phi(m)}. \quad (10)$$

Этот результат – равенство временного и пространственного средних – представляет собой простейшее проявление свойства *эргодичности*, о котором мы будем говорить в §IV.11. Он может быть применен как для предсказания значения временного среднего, если вычислить пространственное среднее легче, так и для приближенного определения пространственного среднего с помощью наблюдения за отдельной частицей. При этом в качестве приближенного значения для временного среднего любой величины можно взять среднее арифметическое из наблюдаемых ее значений в случайно выбранные моменты на протяжении достаточно длительного интервала времени.

Подчеркнем еще, что в правой части формулы (10) интегрирование идет не по  $dx$  (это было бы неверно!), а по  $dm \sim \rho dx$ ; другими словами, это *интеграл по мере  $m$*  (такие интегралы упоминались в ЭПМ, §VI.4). Преимуществом этой меры оказывается то, что в данной задаче, в отличие от длины, она является *инвариантной*, т. е. мера каждого участка среды в процессе движения не меняется. Отметим попутно, что осреднение по  $\rho^2 dx$  или вообще по  $g(\rho) dx$ , где  $g(\rho)$  – какая угодно функция, для которой  $g(\rho)/\rho \neq \text{const}$ , также не привело бы к правильному результату (10).

Приведем простой пример. Пусть рассматривается линейный осциллятор, т. е.

$U(x) = \frac{k}{2} x^2$ , а  $\Phi(x) = x^2$ ; вычислим средние, о которых здесь идет речь. Если  $E$  –

приведенное значение полной энергии, то колебание происходит по закону

$x = b \sin(\sqrt{k}t + \varphi_0)$ , где  $b = \sqrt{2E/k}$ , а  $\varphi_0$  – произвольная начальная фаза. Значит, среднее по времени равно

$$\overline{\Phi(x(t))} = \frac{\sqrt{k}}{2\pi} \int_{-\pi/\sqrt{k}}^{\pi/\sqrt{k}} [b \sin(\sqrt{k}t + \varphi_0)]^2 dt = \frac{\sqrt{k}}{2\pi} b^2 \frac{\pi}{\sqrt{k}} = \frac{b^2}{2}.$$

С другой стороны, так как стационарным распределением плотности в данном примере будет

$$\rho(x) = \frac{C}{\sqrt{2E - kx^2}} = \frac{c_1}{\sqrt{b^2 - x^2}}, \text{ т. е. } dm = \frac{c_1}{\sqrt{b^2 - x^2}} dx$$

то среднее по мере  $m$  равно

$$\overline{\Phi(x)}^m = \int_{-b}^b x^2 \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} \Big/ \int_{-b}^b \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \frac{\pi b^2}{2} \Big/ \pi = \frac{b^2}{2}$$

(вычисление интегралов мы предоставляем читателю). Среднее же от функции  $\Phi(x)$  по координате  $x$  равно

$$\overline{\Phi(x)}^x = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b x^2 dx = \frac{b^2}{3}.$$

Мы видим, что временное среднее равно среднему по мере  $m$ , как это и должно быть, и отлично от среднего по координате  $x$ .

Рассмотрим важный частный случай: пусть  $\Phi(x)$  представляет собой

характеристическую функцию некоторого интервала  $(c, d)$ , т. е.  $\Phi(x) = 1$  на  $(c, d)$  и  $=0$  вне  $(c, d)$  ( $a \leq c < d \leq b$ ). Тогда  $\overline{\Phi(x(t))}$  равно средней доле времени пребывания частицы  $x(t)$  в интервале  $(c, d)$  (по отношению ко всему времени), и из формулы (10) мы получаем, что эта средняя доля равна приходящейся на интервал  $(c, d)$  доле массы всех частиц. Впрочем, это свойство легко непосредственно вывести из формулы  $\rho v = c$  ( $\rho dx \sim dx/v = dt$  и т. д.), а из него уже вывести общую формулу (10), так как любую функцию  $\Phi(x)$  можно с любой степенью точности представить в виде линейной комбинации характеристических функций (продумайте это!).

Статистический подход, основанный на осреднении, позволяет по-новому подойти к общему понятию среды из частиц. Рассмотрим для простоты стационарное движение среды. Строго говоря, пока мы рассматриваем движение частиц, картина всегда является нестационарной, она может только более или менее напоминать стационарную. В частности, если выбрать интервал длины  $\Delta x$  на оси  $x$ , то число частиц  $(\Delta N)_t$ , находящихся на этом интервале в момент  $t$ , вообще говоря, зависит от  $t$ . Однако

когда мы производим осреднение по времени, т. е. полагаем  $\overline{\Delta N} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\Delta N)_t dt$ , где  $t_0$

произвольно, а  $T$  достаточно велико, то мы переходим к полностью стационарной картине, так как  $\overline{\Delta N}$  уже не зависит от времени. Осредненное значение  $\overline{\Delta N}$  уже не будет, как  $(\Delta N)_t$ , принимать целые значения; более того, может быть  $0 < \overline{\Delta N} < 1$ .

Например, равенство  $\overline{\Delta N} = \frac{1}{2}$  может означать, что время, на протяжении которого на рассматриваемом интервале  $\Delta x$  имеется одна частица, приблизительно равно времени, на протяжении которого там частиц нет. Таким образом,  $\overline{\Delta N}$  становится непрерывной величиной, т. е. мы, по существу, переходим к среде. В формуле  $n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta N}}{\Delta x}$  значение

$\Delta x$ , в отличие от §I.2, может быть произвольно малым, оно не связано со средним расстоянием между частицами.

Для нестационарной картины аналогичный результат можно получить с помощью осреднения в фиксированный момент времени по большому числу экземпляров исследуемой системы со случайным начальным положением частиц.

Сделаем в заключение еще несколько общих замечаний. В статистической механике совокупность одинаковых систем, имеющих к тому же строго одинаковую энергию, называют *микрoканоническим ансамблем*. Предполагается, что каждая система движется под влиянием внутренних взаимодействий и постоянных внешних сил, имеющих потенциал. Это условие нужно для того, чтобы и во время движения энергия сохранялась, ансамбль оставался микрoканоническим.

Противоположное понятие есть *макрoканонический ансамбль*: в нем системы подвергаются случайным внешним силам, при которых их энергия то увеличивается, то уменьшается. Поэтому в каждый момент имеются системы с различной энергией, есть, как говорят, определенное распределение систем по энергии. Важный частный случай макрoканонического ансамбля представляют собой системы, находящиеся во взаимодействии с телом определенной температуры  $T$ . Случайные силы, действующие на систему, в этом случае зависят от теплового движения атомов и молекул, составляющих тело. Тогда, как доказывается в статистической механике, получается вполне определенное распределение систем по энергии: вероятность системе иметь ту или иную энергию пропорциональна  $e^{-E/kT}$ , где  $k$  – знаменитая постоянная Больцмана, равная  $1,38 \cdot 10^{-16}$  эрг/градус,  $T$  – температура в градусах Кельвина (т. е. по абсолютной шкале). Замечательно, что это распределение не зависит от силы взаимодействия между системой и телом, оно универсально.

Вернемся к рассмотренной выше задаче о движении одиночной частицы. В этом случае системой можно назвать одну частицу, движущуюся по заданной прямой в заданном потенциальном поле сил. Совокупность частиц с заданной одинаковой энергией можно назвать микроканоническим ансамблем. Отличие одной системы от другой заключается в различном значении координаты и направления<sup>18</sup> скорости в заданный момент  $t_0$ . Существует равновесный (стационарный) микроканонический ансамбль. Так называется совокупность систем, не изменяющаяся с течением времени – хотя каждая система в отдельности движется и изменяется! В равновесном ансамбле в начальный момент число систем (частиц) в данном малом интервале от  $x$  до  $x + \Delta x$  равно  $A\Delta x/|v(x)|$ , где  $A$  – константа,  $v(x)$  – скорость в данной точке. Число частиц, движущихся вправо и влево, одинаково. Константа  $A$  пропорциональна полному числу  $N$  частиц в ансамбле,

$$N = A \int \frac{dx}{|v(x)|}. \text{ Легко проверить, что такой ансамбль стационарен: одинаково число}$$

частиц, покидающих любой интервал и приходящих в него за единицу времени.

В данном простейшем случае системы с одной только частицей и одной координатой нестационарный ансамбль остается нестационарным, не превращается в стационарный. В самом деле, пусть при  $t = t_0$  весь ансамбль, все частицы сконцентрированы на малом отрезке  $\Delta x$ , как говорят, в виде *пакета* и движутся в одну и ту же сторону, например, вправо. Энергия всех частиц одинакова, значит, одинаков и период  $T$  полного колебания. Ровно через период весь пакет окажется на том же месте, пакет не расплывается!

В §IV.11 мы увидим, что такое поведение пакета есть исключение из общего правила, связанное с тем, что система слишком уж проста, обладает всего одной степенью свободы. Система из невзаимодействующих частиц с одинаковой полной энергией, движущихся в потенциальном силовом поле, не дает ничего нового, так как она, по существу, распадается на одинаковые системы с одной степенью свободы. И лишь если частицы взаимодействуют или обладают более чем одной степенью свободы (например, движутся не по линии, а по заданной поверхности или вообще без связей), то получается более сложная система с несколькими неразделяющимися координатами, для которой с течением времени ансамбль становится все более похож на стационарный.

Аналогичная ситуация возникает для ансамбля невзаимодействующих частиц с одной степенью свободы, если частицы как-то распределены по энергии, скажем, в интервале от  $E$  до  $E + \Delta E$  (сделан один шаг от микроканонического ансамбля к макроканоническому). Частицы различных энергий имеют различные периоды. После нескольких колебаний частицы разных энергий окажутся в различных местах б течением времени пакет расплывается, ансамбль приблизится к стационарному.

Поучителен случай гармонического осциллятора: если  $U(x) = kx^2/2$ , то период колебаний не зависит от энергии. Даже «пакет» с различными энергиями не расплывается! Казалось бы, мы упростили задачу: гармонический осциллятор имеет самый простой вид потенциала. Но при этом упрощении потерялось важнейшее свойство ансамбля – приближение к стационарному, равновесному состоянию. Очень характерно, что статистические свойства ансамблей суть свойства сложных систем, которые часто теряются при переходе к упрощенным системам.

К процессу размазывания «пакета» мы вернемся в §IV.11.

## Упражнения

1) Напишите решение задачи Коши для распределения плотности в случае

<sup>18</sup> Величина скорости для частицы с данной координатой имеет определенное значение, поскольку задана энергия.

осциллятора с потенциалом  $U(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0), \\ gx & (x > 0), \end{cases}$  отвечающим движению

невзаимодействующих частиц в атмосфере.

- 2) Выразите стационарное решение для линейного осциллятора через массу  $M$  осциллирующей среды.

## § 15 Движение электронов в собственном поле

Имеется интересный класс задач, в которых поле потенциальной энергии, воздействующее на частицы и формирующее плотность среды, оказывается взаимосвязанным с самой этой плотностью. В этом случае само построение потенциала требует решения дифференциального уравнения.

В качестве примера мы рассмотрим задачу о движении электронов в вакууме с учетом создаваемого ими электрического поля. Здесь получается самосогласованная задача о движении в таком поле, которое в свою очередь зависит от движения электронов. По существу, это значит, что рассматривается взаимодействие между электронами: электрон №1 участвует в создании поля, в котором движется электрон №2, значит, учитывается взаимодействие электронов №1 и №2.

Может показаться, что эта задача не относится к теме нашей книги, посвященной движению невзаимодействующих частиц. Однако специфика рассматриваемой задачи заключается в том, что в объеме между катодом и анодом электронов много; поэтому можно найти усредненное поле, соответствующее усредненному распределению заряда. Так, например, около каждого индивидуального электрона абсолютная величина поля растет пропорционально  $1/r^2$ ; среднее поле, которое мы рассматриваем, является гладким, особенности типа  $1/r^2$  в нем не учитываются. Эти особенности исчезают при усреднении, так как вблизи электрона встречаются сильные поля всех направлений.

Задача о движении электронов в усредненном поле всех электронов, хотя и учитывает взаимодействие частиц, но по характеру и по способам решения очень похожа на задачи о движении в заданном внешнем поле (без взаимодействия частиц). Поэтому ее рассмотрение здесь вполне уместно.

Эта задача важна для теории вакуумных электронных приборов – катодных ламп: выпрямителей (диодов) и усилителей (с сетками – триоды и более сложные). В течение длительного периода, до появления полупроводниковых транзисторов, вся радиотехника основывалась на вакуумных приборах. Отметим, впрочем, что в транзисторах происходят явления того же типа, что в вакууме, но имеющие более сложный характер. Мы не будем их здесь рассматривать.

Катод электронного прибора нагревается до высокой температуры; при этом под действием теплового движения появляются электроны с энергией, достаточной для того, чтобы вырваться из металла в пустоту. Энергия этих электронов порядка нескольких электрон-вольт, однако непосредственно после того, как они покинут катод, у них остается энергия порядка десятых электрон-вольта, т. е.  $2 \div 5 \cdot 10^{-13}$  эрг.

Если электрическое поле в вакууме направлено так, что оно ускоряет электроны, то ни один из электронов, вылетающих с поверхности, не возвращается. В таком случае, сила тока просто выражается произведением заряда одного электрона на число электронов, испаряющихся с поверхности в единицу времени (*ток насыщения*). При этом ток зависит от температуры катода, но не зависит от разности потенциалов катода и анода. Если поле в вакууме замедляет электроны, то часть из них или все они возвращаются обратно и снова поглощаются катодом. При этом нужно различать два случая: будет ли анод заряжен отрицательно или положительно по отношению к катоду.

В первом случае, даже в отсутствии электронов в вакууме, поле стремится вернуть электроны. Ток практически равен нулю, когда отрицательное напряжение анода будет

больше средней энергии испаряющихся электронов, т. е. больше, примерно, 1 вольта. В этих условиях в вакууме почти нет электронов (кроме самого близкого к катоду слоя), и нет нужды уточнять расчет учетом влияния электронов на поле.

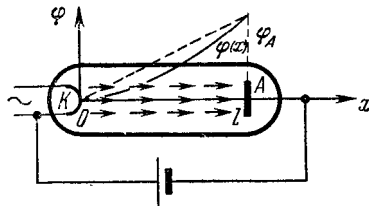


Рис. 41

Второй случай, который рассмотрен ниже, более сложен. Здесь анод заряжен положительно, и если бы не взаимодействие электронов, вакуумное поле было бы таким, что все испаряющиеся электроны попали на анод. Однако при этом их число в объеме было бы слишком большим, и потому с учетом их заряда возникнет противодействующее поле. В этом случае установится

режим, при котором лишь часть испаряющихся электронов достигает анода, тогда как остальные возвращаются на катод. Задача и состоит в том, чтобы найти эту часть. При этом поле на поверхности катода должно обратиться в нуль, так как здесь и в дальнейшем мы пренебрегаем тепловой энергией испаряющихся электронов. Говорят об *эмиссии* (испускании) электронов в режиме, лимитированном объемным зарядом, так как обращение в нуль поля, т. е. суммы вакуумного поля и поля электронов, накладывает условие на объемный заряд электронов.

Итак, пусть частицы – электроны вылетают с катода  $K$  и, разгоняясь действующим на них полем, попадают на анод  $A$  (рис. 41). Найдем закон распределения частиц, учитывая воздействие на них поля, которое будем пока считать заданным.

Расположим ось  $x$  от  $K$  и  $A$  с началом координат в  $K$  и примем потенциал катода равным нулю. Закон сохранения энергии, примененный к отдельной частице, имеет вид<sup>19</sup>

$$E = m \frac{v^2}{2} - e\varphi(x) = const, \quad (1)$$

где под  $m$  и  $-e$  понимается масса и заряд частицы,  $v = dx/dt$ , а через  $\varphi(x)$  обозначен потенциал в точке  $x$  ( $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(l) = \varphi_A$ , где  $l$  – абсцисса точки  $A$ ). Подстановка в (1) значения  $x = 0$  показывает, что  $E = 0$ , откуда

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}\varphi(x)}. \quad (2)$$

Отметим при этом, что рассматриваемый процесс может проходить, только если потенциал положителен на всем интервале между точками  $x = 0$  и  $x = b$ . Это видно из формулы (2), но вытекает и из физических соображений, так как интервал, на котором потенциал отрицателен, представлял бы собой потенциальный барьер, который электрон, не имеющий начальной кинетической энергии, не мог бы преодолеть. Однако плотность тока  $j$ , равная  $\rho v$  (под  $\rho$  мы будем понимать абсолютное значение плотности электрических зарядов среды из частиц; оно, конечно, пропорционально массовой плотности), при всех  $x$  одинакова. Отсюда получаем связь плотности среды из частиц с потенциалом:

$$\rho(x) = \frac{j}{v(x)} = j \sqrt{\frac{m}{2e\varphi(x)}}. \quad (3)$$

Пока мы не уточняли вид потенциала. Если принять, что учитывается лишь потенциал от внешнего поля, то  $\varphi(x) = \varphi_A \frac{x}{l}$ , и из (2) и (3) получаем

$$v = \sqrt{\frac{2e\varphi_A}{ml}}x, \quad \rho = j \sqrt{\frac{ml}{2e\varphi_A}} \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Суммарный заряд частиц между катодом и анодом, отнесенный к единице площади

<sup>19</sup> Отметим, что здесь надо считать размерности  $[e] = [m]^{1/2}[l]^{3/2}[t]^{-1}$ , и потому  $[\varphi] = [m]^{1/2}[l]^{1/2}[t]^{-1}$ ,  $[\rho] = [m]^{1/2}[l]^{-3/2}[t]^{-1}$  и т. д.



поперечного сечения, равен

$$v = \int_0^l \rho dx = \sqrt{\frac{2m}{e\varphi_A}} lj. \quad (5)$$

Приведенными подсчетами можно пользоваться, если сила тока сравнительно мала (вскоре мы уточним – по сравнению с чем). Дело в том, что если сила тока велика, то пропорционально велика плотность числа частиц, и тогда потенциал, создаваемый движущимися частицами, может оказаться сравнимым с потенциалом внешнего поля, что будет оказывать существенное влияние на движение частиц. Чтобы прикинуть, для каких плотностей тока собственный потенциал частиц можно не учитывать, примем, что система  $K - A$  представляет собой конденсатор и весь заряд (5) расположен на одной из его обкладок. Тогда разность потенциалов между обкладками будет равна

$$4\pi vl = 4\pi \sqrt{\frac{2m}{e\varphi_A}} l^2 j$$

(см., например, ЭПМ, §X.6). Стало быть, при выполнении условия

$$4\pi \sqrt{\frac{2m}{e\varphi_A}} l^2 j \ll \varphi_A, \text{ т. е. } j \ll \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{e}{2m}} l^{-2} \varphi_A^{3/2} \quad (6)$$

можно пользоваться формулами (4).

Перейдем теперь к случаю, когда условие (6) не выполнено, т. е. сила тока настолько велика, что необходимо учитывать действие на частицы их собственного поля. Для расчета потенциала нужно применить уравнение Пуассона, связывающее плотность распределенного заряда с потенциалом в среде (см., например, ЭПМ, §X.9), которое в нашем случае принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi\rho. \quad (7)$$

Однако имеется еще соотношение (3), справедливое при любом виде потенциала  $\varphi(x)$ . Подставляя (3) в (7), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\eta j}{\sqrt{\varphi}}, \quad (8)$$

где для краткости обозначено  $\eta = 4\pi \sqrt{\frac{m}{2e}}$ . Математически задача сводится, таким

образом, к решению дифференциального уравнения (8) при граничных условиях

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = \varphi_A. \quad (9)$$

Уравнение (8) принадлежит к единственному (увы, не слишком широкому) важному и притом допускающему интегрирование в квадратурах классу нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, в общем виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(y). \quad (10)$$

Для интегрирования этого уравнения надо обе части уравнения (10) умножить на  $dy/dx$ , после чего от обеих частей взять интеграл по  $x$ . Это даст

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \int F(y) dy + C_1, \quad (11)$$

затем из обеих частей равенства (11) надо извлечь корень, после чего переменные легко разделяются. (Если на минуту истолковать  $x$  как время, а  $y$  как декартову координату, то (10) будет представлять собой уравнение движения частицы в силовом поле, а (11) – закон сохранения полной энергии, так что по существу в описанном приеме для нас ничего нового нет.) Применяя этот общий прием к уравнению (8), получаем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \int \frac{\eta j}{\sqrt{\varphi}} d\varphi + C_1 = \frac{1}{2} \eta j \sqrt{\varphi} + C_1. \quad (12)$$

Обозначим для краткости  $\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \alpha$ ; эта величина заранее не задается и будет в

дальнейшем уточнена. Так как  $\varphi(x) > 0$  ( $0 < x < l$ ) и  $\varphi(0) = 0$ , то  $\alpha \geq 0$ ; с другой стороны, из уравнения (8) следует, что  $d^2\varphi/dx^2 > 0$ , т. е. график  $\varphi = \varphi(x)$  выгнут книзу и потому расположен примерно, как на рис. 41, поэтому

$$0 \leq \alpha \leq \varphi_A/l. \quad (13)$$

Подставляя в (12)  $x = 0$  и вспоминая, что  $\varphi(0) = 0$ , видим, что  $C_1 = \alpha^2/2$ , откуда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{\alpha^2 + \eta j \sqrt{\varphi}}, \quad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 + \eta j \sqrt{\varphi}}} = \int dx = x + C_2.$$

Подставляя  $x = 0$ , приходим к соотношению

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 + \eta j \sqrt{\varphi}}} = x. \quad (14)$$

При этом первое граничное условие (9) удовлетворяется автоматически, тогда как второе граничное условие приобретает вид

$$\int_0^{\varphi_A} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 + \eta j \sqrt{\varphi}}} = l. \quad (15)$$

Так как при увеличении  $j$ , и  $\alpha$  левая часть (15), очевидно, убывает, то мы получаем, что при увеличении  $j$  значение  $\alpha$  должно убывать, т. е.  $j$  и  $\alpha$  однозначно определяют друг друга. Но для  $\alpha$  имеется минимальное значение  $\alpha = 0$  (см. (13)); значит, для  $j$  имеется максимально возможное (критическое) значение  $j_{кр}$ , которое определяется из условия (15) при  $\alpha = 0$ :

$$l = \int_0^{\varphi_A} \frac{d\varphi}{\sqrt{\eta j \sqrt{\varphi}}} = \frac{1}{\sqrt{\eta j}} \frac{4}{3} \varphi_A^{3/4}, \text{ откуда }^{20} j_{кр} = \frac{16}{9\eta} l^{-2} \varphi_A^{3/2}. \quad (16)$$

Интересно, что  $j_{кр}$  превосходит правую часть оценки (6) всего в 32/9 раз (проверьте!). Это указывает на правильность структуры формулы (6), т. е. правильность показателей, с которыми входят величины  $e$ ,  $m$ ,  $l$ ,  $\varphi_A$  в правую часть.

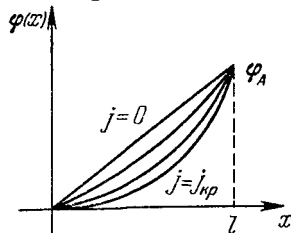


Рис. 42

Интеграл (14) можно выразить через элементарные функции (для этого достаточно совершить подстановку  $\alpha^2 + \eta j \sqrt{\varphi} = s^2$ , что мы предоставляем читателю), однако при этом получится довольно громоздкое выражение  $x = x(\varphi, \alpha, j)$  и мы не будем его здесь выписывать. Ограничимся случаем  $\alpha = 0$ ,  $j = j_{кр}$ , для которого легко подсчитать  $\varphi = \varphi_A \left( \frac{x}{l} \right)^{4/3}$ , откуда в силу (3) и (16)

$$\rho = \frac{4}{9\pi} \varphi_A l^{-4/3} x^{-2/3}.$$

Наименьшему возможному значению  $j = 0$  отвечает в силу (15) и (14) наибольшее значение  $\alpha = \varphi_A/l$  и потенциал  $\varphi = (\varphi_A/l)x$ ; это как раз потенциал внешнего поля. Графики потенциала  $\varphi(x)$  при различных значениях  $j$  показаны на рис. 42. Итак, мы видим, что при учете потенциала движущихся частиц оказывается, что силу тока в системе нельзя увеличивать безгранично: если попытаться при данном  $\varphi_A$  увеличить  $j$

<sup>20</sup> Для вывода этой формулы, именуемой *законом Ленгмюра*, существенно, что между катодом и анодом нет никаких других частиц (в частности, ионов), кроме электронов.

выше  $j_{кр}$  с помощью увеличения эмиссии катода (повышения его температуры), то собственное поле зарядов будет «загонять» их обратно на катод.

Отметим в заключение, что разобранную задачу исследовал впервые Ленгмюр в 1913 г. В 1924г. С.А.Богуславский исследовал более важный для приложений цилиндрически-симметричный случай. Решение Богуславского более точное и удобное для численных расчетов практического характера, чем решение Ленгмюра.

## Упражнения

- 1) Для заряда, распределенного по формуле (4), найдите разность потенциалов между любыми двумя точками  $x = x_1$  и  $x = x_2$  ( $0 < x_1 < x_2 \leq h$ ). Найдите максимум этой разности по всем  $x_1, x_2$ .
- 2) Найдите решение дифференциального уравнения  $y'' = e^y$  при начальных условиях  $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = \sqrt{2}$ ; при произвольных начальных условиях.

## § 16 Расширяющаяся Вселенная

Теория расширяющейся Вселенной является одним из важнейших завоеваний науки XX века. Идея эволюции Вселенной встречала возражения, основанные на предвзятых концепциях, однако итогом работы наблюдателей и теоретиков явилось подтверждение общей картины, развитой в 1922–1924 гг. выдающимся советским математиком А.А.Фридманом на основе общей теории относительности А.Эйнштейна.

Мы рассмотрим здесь простейшую однородную изотропную модель Вселенной, т. е. пространство, заполненное средой из частиц с плотностью  $\rho$ , которая одинакова во всех точках и может зависеть лишь от времени,  $\rho = \rho(t)$ . Из общей теории относительности вытекает, что в таком пространстве выполняются не привычные из школы аксиомы геометрии, а аксиомы неевклидовой геометрии, или геометрии пространств постоянной кривизны. Однако при изучении локальных свойств пространства это обстоятельство не является существенным, и можно считать, как мы и будем делать, пространство «обычным» – евклидовым и пользоваться обычными правилами ньютоновской механики. Наша задача сводится к отысканию решений вполне определенного типа, описывающих локально однородное в каждый момент времени состояние Вселенной. Допустим, что в некоторой декартовой системе координат скорость частиц  $\mathbf{v}$  направлена от начала координат и пропорциональна расстоянию от него, т. е.

$$\mathbf{v} = H\mathbf{r}. \quad (1)$$

Здесь  $H$  – так называемая *постоянная Хаббла*; впрочем, она может зависеть от времени,  $H = H(t)$  (ее называют «постоянной», потому что она не зависит от модуля и направления вектора  $\mathbf{r}$ , а также потому, что на обозримых, с точки зрения человеческой цивилизации, промежутках времени она меняется очень мало). Случай  $H > 0$  как раз и отвечает модели расширяющейся Вселенной, когда расстояние между любой парой частиц возрастает во времени.

Наблюдения, на которых основана излагаемая картина, сводятся к следующему. Во-первых, измеряется длина волны спектральных линий, испускаемых звездами в весьма отдаленных звездных скоплениях (галактиках). Эти линии оказываются смещенными в красную сторону. По закону Допплер-эффекта

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{набл} - \lambda_{исп}}{\lambda_{исп}} = z = \frac{v}{c}$$

можно найти скорость  $v$ , с которой удаляются от нас эти галактики. Здесь  $\lambda_{исп}$  есть измеренная наблюдателем в далекой галактике длина волны света, испущенного там же (при этом предполагается, что все законы физики универсальны, одинаковы на Земле, на Солнце и на далекой галактике; в частности, атомы данного сорта всегда и везде испускают спектральные линии одной длины волны);  $\lambda_{набл}$  есть длина волны,

измеренная земным наблюдателем. Она отличается от  $\lambda_{исп}$  вследствие относительного движения испускающего атома (вместе со всей далекой галактикой) и земного наблюдателя. Далее,  $c$  есть скорость света,  $v$  – скорость удаления от нас галактики, т. е. проекция скорости  $\mathbf{v}$  на радиус-вектор  $\mathbf{r}$  в системе координат, в начале которой находится Земля (точнее – Солнечная система, еще точнее – наша Галактика). Во-вторых, определяется расстояние до далекой галактики, т. е.  $r = |\mathbf{r}|$ . Это определение очень трудное; на протяжении 1927–1957гг, оценка расстояния до данной далекой галактики изменилась в 5– 10 раз! Расстояние  $r$  легко было бы определить, зная количество  $L$  света, которое испускает данная галактика, и количество света  $P$ , которое мы от нее получаем на единицу площади, так как  $L = 4\pi r^2 P$ . Но о светимости галактик можно делать лишь статистические утверждения: можно сказать лишь, какова средняя светимость галактики данного типа.

Определив  $v$  и  $r$ , строят график зависимости  $v$  от  $r$ . Точки его лежат на прямой (разброс составляет около 2000–3000 км/сек, тогда как измеренные величины лежат в пределах 5000–100000 км/сек); наклон  $v/r$  этой прямой и есть постоянная Хаббла.

Ее размерность, очевидно,  $[t]^{-1}$ . Отметим сразу простую ее интерпретацию: если две галактики в какой-то момент  $t_0$  находились в одной точке пространства и, начиная с этого момента, затем удалялись с постоянной скоростью  $v_0$  друг от друга, то в момент  $t_1$  расстояние между ними равно  $r = v_0(t_1 - t_0)$ . Значит, наблюдатель скажет, что  $1/(t_1 - t_0) = v/r = H$ . Итак,  $t_1 - t_0 = H^{-1}$ , т. е. смысл  $H$  есть обратное время расширения системы, в предположении расширения с постоянной скоростью. Из наблюдений  $H^{-1} \approx 3 \cdot 10^{17} \text{ сек} \approx 10^{10} \text{ лет}$  (см. ниже).

Непосредственно мы узнаём лишь о движении вдоль радиуса-вектора. Косвенные соображения показывают, что скорости, перпендикулярные  $\mathbf{r}$ , относительно малы, не превышают 2000–3000 км/сек. В векторной формулировке (1) мы пренебрегаем и разбросом продольных скоростей, и скоростью, перпендикулярной  $\mathbf{r}$ .

На первый взгляд может показаться, что картина, описываемая уравнением (1), неоднородна в пространстве, так как она симметрична относительно специальной точки – начала координат. Но перейдем к системе координат с началом в произвольной точке  $A$ , скорость которой, определенная в силу формулы (1), равна  $\mathbf{v}_A$ . Величины, измеренные в новой системе, отметим штрихом. Тогда, очевидно,

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_A = H\mathbf{r} - H\mathbf{r}_A = H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) = H\mathbf{r}'.$$

Следовательно, в новой системе имеет место тот же закон распределения скоростей  $\mathbf{v}'$  в зависимости от  $\mathbf{r}'$ , что и в старой для зависимости  $\mathbf{v}$  от  $\mathbf{r}$ . Распределение скоростей (1) замечательно тем, что оно не выделяет никакой специальной точки, оно однородно и изотропно. Наблюдатель, движущийся вместе со средой, в любой точке видит картину удаления от него всех окружающих его частиц.

Легко получить закон этого удаления. В самом деле, расстояние  $r_{AB}$  между любой парой частиц  $A$  и  $B$ , согласно (1), удовлетворяет

уравнению  $\frac{dr_{AB}}{dt} = H(t)r_{AB}$ , откуда

$$r_{AB}(t) = r_{AB}(t_0) \exp \int_{t_0}^t H(t) dt. \quad (2)$$

Отсюда также видна однородность рассматриваемого процесса расширения. Так как радиус любого шара меняется по закону (2), то плотность, обратно пропорциональная кубу радиуса, меняется по закону

$$\rho(t) = \rho_0 \exp \left[ -3 \int_{t_0}^t H(t) dt \right] \quad (\rho_0 = \rho(t_0)),$$

откуда, дифференцируя, получаем также

$$d\rho/dt = -3H\rho. \quad (3)$$

(Это уравнение можно получить и формально из уравнения неразрывности (1.8.4), подставив в него  $\rho = \rho(t)$ ,  $\mathbf{v} = H(t)\mathbf{r}$  и заметив, что  $\text{div}\mathbf{r} = 3$ .)

Конкретный вид зависимости  $H(t)$  – и, тем самым, зависимости (2) – можно получить, только приняв определенную гипотезу о *причине* изменения скорости относительного движения частиц во Вселенной. Примем, что это изменение полностью определяется гравитационным взаимодействием и начальными условиями, т. е. что изменение скорости и плотности определяется тяготением частиц друг к другу. («Почему же тогда Вселенная расширяется, а не сжимается?» – может спросить читатель. Но ведь и камень, притягивающийся к Земле, может на определенном этапе своего движения удаляться от нее, а если скорость превышает вторую космическую, то даже все время удаляться. Силы задают только ускорения, а движение в целом зависит не только от сил, но и от начальных условий – в частности, от начальных скоростей. Наблюдение же показывает, что начальные скорости соответствуют расширению Вселенной.)

Примем сначала, что самогравитирующая однородная среда заполняет шар радиуса  $R = R(t)$  с центром в начале координат  $O$ , а вне этого шара частиц нет, и рассмотрим произвольную частицу  $A$ , расположенную на расстоянии  $|\mathbf{r}| < R$  от  $O$ . Разбив мысленно всю среду на шар ( $K$ ) радиуса  $|\mathbf{r}|$  с центром в  $O$  и на остальную часть, ограниченную двумя концентрическими сферами, мы получим, что гравитационное ускорение, которым обладает частица  $A$ , в точности такое же, как если бы она притягивалась массой шара ( $K$ ), сосредоточенной в  $O$ , т. е.

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mathcal{J} \frac{4}{3}\pi|\mathbf{r}|^3\rho \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -\frac{4}{3}\pi\mathcal{J}\rho\mathbf{r}, \quad (4)$$

где  $\mathcal{J}$  – гравитационная постоянная, равная  $6,7 \cdot 10^{-8} \text{ c}^{-1} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-2}$ . Это показано в §X.6 ЭПМ, где, правда, рассматривалось электростатическое притяжение; но так как закон притяжения элементарных масс такой же, как элементарных зарядов, то и соответствующие интегральные законы одинаковы.

В силу центральной симметрии задачи ясно, прежде всего, что самогравитирующий шар со сферически симметричными начальными скоростями в процессе своей эволюции остается шаром, т. е. сохраняет геометрическое подобие. В механике Ньютона существенно, что исходная форма среды была шаровой: среды эллипсоидальной формы и форм более сложного вида в процессе гравитационной эволюции подобия формы не сохраняют<sup>21</sup>.

Во-вторых, легко проверить, что если в начальный момент плотность шара была постоянной, а скорости частиц зависели от радиуса-вектора по линейному закону (1), то и во все последующие моменты оба эти свойства будут иметь место, хотя плотность  $\rho$  и коэффициент  $H$  будут зависеть от времени  $t$ . В самом деле, нам надо удовлетворить уравнению движения (4) и уравнению неразрывности. Допустив, что  $\rho = \rho(t)$ ,  $\mathbf{v} = H(t)\mathbf{r}$ , мы приведем уравнение (4) к виду

$$-\frac{4}{3}\pi\mathcal{J}\rho\mathbf{r} = \frac{d(H\mathbf{r})}{dt} = \frac{dH}{dt}\mathbf{r} + H \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dH}{dt}\mathbf{r} + H^2\mathbf{r},$$

т. е.

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{4}{3}\pi\mathcal{J}\rho. \quad (5)$$

С другой стороны, мы видели, что при сделанных допущениях уравнение неразрывности приобретает вид (3). Таким образом, задача сводится к отысканию решения системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка (3), (5) с двумя неизвестными функциями  $\rho(t)$  и  $H(t)$ . Хорошо известно, что такое решение при

<sup>21</sup> Любопытно, что если в начальный момент распределение скоростей – линейное, а плотность среды, заполняющий эллипсоид, – однородная, то эти свойства сохраняются и во все дальнейшие моменты, и эллипсоид остается эллипсоидом, но отношение его полуосей меняется во времени.

заданных начальных условиях

$$\rho(t_0) = \rho_0, H(t_0) = H_0$$

вполне определено, что и доказывает наше утверждение.

Наше утверждение можно пояснить также следующим образом. Допустим, что  $\rho = \rho(r, t)$ ,  $H = H(r, t)$  ( $r = |\mathbf{r}|$ ); тогда уравнение (4) и уравнение неразрывности нетрудно привести (проделайте вычисления!) к виду

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -H^2 - \frac{4}{3}\pi\mathcal{J}\rho - Hr\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -3H\rho - r\frac{\partial(H\rho)}{\partial r}. \quad (6)$$

Предположение, сделанное в начале предыдущего абзаца, означает, что в начальный момент времени  $\rho$  и  $H$  не зависели от  $r$ . Но тогда в силу уравнений (6) и производные  $\partial\rho/\partial t$  и  $\partial H/\partial t$  в этот момент не зависят от  $r$ , а потому  $\rho$  и  $H$  в следующий момент не зависят от  $r$  и т. д. Таким образом, состояние самогравитирующего шара, при котором плотность во всех точках одинакова, а поле скоростей определяется формулой (1) с коэффициентом  $H$ , одинаковым во всех точках, само себя поддерживает: если шар находился в этом состоянии в начальный момент, то он будет находиться в этом состоянии и в последующие (а также в предыдущие) моменты, хотя параметры  $\rho$  и  $H$  будут меняться. Наиболее прост случай, когда гравитацией можно пренебречь, т. е.

можно положить  $\mathcal{J} = 0$ . Тогда из уравнения (5) получается, что  $H = \frac{H_0}{1 + H_0(t - t_0)}$ , а

отсюда из (3) – что  $\rho = \rho_0[1 + H_0(t - t_0)]^{-3}$ .

Если гравитация существенна, то легко получить первый интеграл системы уравнений (3), (5). Именно, поделив одно из этих уравнений на другое и проделав простые преобразования, которые мы предоставим читателю, получим соотношение

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi\mathcal{J}\rho + C\rho^{2/3}$$

где  $C$  – произвольная постоянная, определяемая начальными условиями:

$$C = H_0^2\rho_0^{-2/3} - \frac{8}{3}\pi\mathcal{J}\rho_0^{1/3}. \quad (7)$$

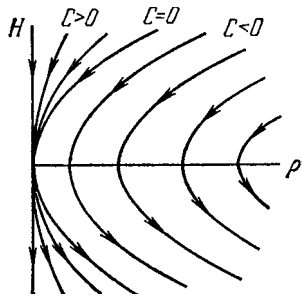


Рис. 43

Соответствующие линии на плоскости  $\rho, H$  показаны на рис. 43; это – линии, каждая из которых изображает возможный закон  $\rho(t), H(t)$  эволюции Вселенной. Вдоль каждой из этих линий  $t$  служит параметром; направление изменения  $\rho, H$  с ростом  $t$ , определяемое знаками правых частей (3) и (5), показано стрелками на рис. 43. Выбор конкретной линии на этом рисунке, т. е. выбор конкретного закона эволюции Вселенной, зависит от начальных значений  $\rho_0 = \rho(t_0), H_0 = H(t_0)$ , определяющих в плоскости  $\rho, H$  точку, через которую проходит искомая линия. Отметим, что при  $C \geq 0$  линии, расположенные в

верхнем квадранте, достигают начала координат только асимптотически, при  $t \rightarrow \infty$ .

Это ясно уже из того, что при каждом конечном  $t$  через каждую точку плоскости  $\rho, H$  проходит только одна интегральная линия системы (3), (5). Можно заметить также, что в силу (3) будет

$$dt = -\frac{d\rho}{3H\rho}, \quad \text{откуда } t = t_0 + \frac{1}{3} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{d\rho}{H(\rho)\rho};$$

но полученный интеграл стремится к бесконечности при  $\rho \rightarrow 0$  (почему?), откуда и следует наше утверждение.

Из рис. 43 мы видим, что в принципе возможно как расширение ( $H > 0$ ), так и сжатие ( $H < 0$ ) Вселенной. Так как в переживаемый нами период Вселенная расширяется, то точка, изображающая соответствующие значения  $\rho, H$ , находится в верхней половине

рис. 43. Поэтому, в зависимости от значения  $C$  (см. (7)), эволюция Вселенной может пойти по-разному. Если  $C < 0$ , то Вселенная будет еще некоторое время расширяться, пока плотность не достигнет минимального значения, после чего наступит процесс сжатия, в результате которого плотность в конце концов обратится в бесконечность, а расстояния между частицами сожмутся до нуля. (Это произойдет, как мы вскоре увидим, за конечное – впрочем, по нашим человеческим масштабам, достаточно большое – время.) Если же  $C \geq 0$ , то соответствующая точка в плоскости  $\rho, H$  будет асимптотически, при  $t \rightarrow \infty$ , стремиться к началу координат, т. е. плотность Вселенной будет стремиться к нулю, а попарные расстояния между частицами – к бесконечности. Графически эти случаи показаны на рис. 44. (Если проводить аналогию с брошенным камнем, о которой мы упоминали выше, то  $C < 0$  отвечает случаю, когда камень брошен кверху со скоростью, меньшей второй космической, а  $C > 0$  – случаю, когда эта скорость больше второй космической.)

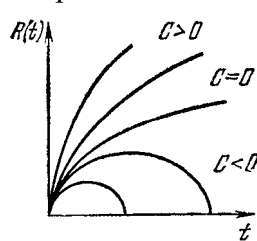


Рис. 44

Критическое соотношение параметров определяется равенством  $C = 0$  или, что равносильно

$$(\rho_0)_{кр} = \frac{3}{8\pi G} H_0^2. \quad (8)$$

Если  $\rho_0 < (\rho_0)_{кр}$ , то  $C > 0$ , т. е. Вселенная будет расширяться всегда; если же  $\rho_0 > (\rho_0)_{кр}$ , то за процессом расширения последует процесс сжатия. Как отмечалось выше, по современным оценкам

$H_0 \approx 100 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{мегапарсек}^{-1}$  (1 мегапарсек =  $3,09 \cdot 10^{24}$  см), т. е. в переводе на  $\text{сек}^{-1}$   $H_0 \approx 3 \cdot 10^{-18} \text{ сек}^{-1}$ . Это дает в силу формулы (8) значение  $(\rho_0)_{кр} \approx 1/2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$ . В то же время, по современным оценкам, средняя плотность

Вселенной  $\rho_0 \approx 3 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$ , т. е. в три раза меньше критической.

Итак, Вселенная будет расширяться всегда. Не поразительно ли, что судьба Вселенной определяется результатом столь простого вычисления! Впрочем, надо помнить, что за этим вычислением кроется огромная кропотливая работа по определению расстояний до далеких галактик, по вычислению их массы и средней плотности  $(\rho_0)_{набл}$ , составляющей около  $5 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$ . При этом по некоторым оценкам можно полагать, что полная плотность, включая разреженный газ, как указано выше, приблизительно в 10 раз больше, но все же меньше критической. Остается также нерешенным вопрос о том, нет ли в составе общей плотности  $\rho_0$  других трудно наблюдаемых форм материи (нейтрино или другие частицы, темные небесные тела и т. д.), которые, добавляясь к  $(\rho_0)_{набл}$ , могут довести  $\rho_0$  до критического значения или даже до превышения его<sup>22</sup>. Если обратить ход времени, то мы получим, что независимо от начальных условий плотность асимптотически обратится в бесконечность, причем, как будет вскоре показано, за конечное время. На основании приведенных выше оценок это время порядка  $10^{10}$  лет. Подчеркнем, что этот результат качественно не зависит от величины  $\rho_0$  и справедлив при любом знаке постоянной  $C$ , от  $\rho_0$  зависит только время предыстории Вселенной.

Вспомним теперь сделанное вначале предположение о том, что рассматриваемая самогравитирующая среда заполняет шар радиуса  $R$ . Мы видим, что значение  $R$  выпало из расчетов, окончательные результаты не зависят от  $R$ . Это дает возможность перейти к пределу при  $R \rightarrow \infty$  и заключить, тем самым, что наши выводы об эволюции Вселенной применимы и к безграничной модели Вселенной.

К полученным выводам можно прийти также следующим образом. Рассмотрим определенную порцию среды массы  $M$ , заключенную в шаре переменного радиуса

<sup>22</sup> В 1972 г. появилось короткое сообщение, согласно которому  $H_0 = 55 \pm 5 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{мегапарсек}^{-1} = 1,8 \cdot 10^{-18} \text{ сек}^{-1}$ . Если это так, то критическое значение плотности надо понизить примерно в три раза, т. е. сделать надежный вывод о соотношении между  $\rho_0$  и  $\rho_{кр}$  пока невозможно.

$|\mathbf{r}| = R$  с центром в начале координат. Из формулы (4) получаем, что

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{\mathcal{M}}{R^2}.$$

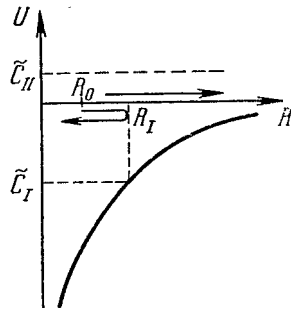


Рис. 45

Согласно §15, промежуточный интеграл этого уравнения можно получить, умножив обе части на  $dR/dt$  и проинтегрировав их, что даст

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{\mathcal{M}}{R} = \tilde{C} = const.$$

Это уравнение имеет вид закона сохранения энергии: первый член слева – кинетическая энергия единицы массы, второй член слева (отрицательный) – ее потенциальная энергия, константа справа, зависящая от начальных условий – полная энергия.

Из рис. 45 ясно, что если  $-\frac{\mathcal{M}}{R} < \tilde{C} < 0$  и  $(dR/dt)_0 > 0$ , то радиус  $R$  сначала

увеличивается, до значения  $R_I$  на рис. 45, после чего начинает уменьшаться, и так как скорость этого уменьшения нарастает (до бесконечности), то за конечное время радиус дойдет до значения  $R = 0$ . Если же  $\tilde{C} \geq 0$  и  $(dR/dt)_0 > 0$ , то радиус  $R$  будет монотонно увеличиваться до бесконечности, но так как скорость этого увеличения убывает, то значение  $R = \infty$  будет достигнуто лишь при  $t = \infty$ .

Нетрудно связать  $\tilde{C}$  с введенной выше постоянной  $C$ :

$$\tilde{C} = \frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)_0^2 - \frac{\mathcal{M}}{R_0} = \frac{1}{2} (H_0 R_0)^2 - \frac{\mathcal{J}}{R_0} \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_0 = \frac{1}{2} R_0^2 \rho_0^{2/3} C.$$

Таким образом, знаки  $\tilde{C}$  и  $C$  одинаковы и потому разобранные сейчас случаи совпадают со случаями, рассмотренными в связи с рис. 43.

Вывод о двух возможных типах эволюции Вселенной был получен А.А.Фридманом из общей теории относительности. В этой теории случаю  $C > 0$  отвечает *замкнутая модель* Вселенной (имеющей конечный объем, наподобие пузыря, но на единицу более высокой размерности), в которой выполняются аксиомы так называемой геометрии Римана, а случаю  $C < 0$  отвечает *открытая модель* Вселенной (имеющей бесконечный объем), в которой выполняются аксиомы геометрии Лобачевского. Английские астрофизики Мак-Кри и Милн в 1934 г. обнаружили, что эти же эволюционные выводы можно получить и с помощью ньютоновской механики на основе модели Вселенной, которую мы здесь рассмотрели.

В дальнейшем эти исследования были пополнены рядом авторов. Так, рассмотрено влияние давления вещества на эволюцию. Исследован вопрос об устойчивости однородного мира, причем оказалось, что длинноволновые возмущения имеют тенденцию нарастать, т. е. в первоначально однородной среде развиваются сгустки достаточно большого размера. Изучена однородная анизотропная космологическая модель и т. д. Эти результаты и их обсуждение читатель может найти в главах 15, 19 и 21 книги Я.Б.Зельдовича и И.Д.Новикова «Релятивистская астрофизика» («Наука», 1967) и в книге «Космология» тех же авторов, которая сейчас готовится к печати.

## § 17 Случай влияния локального параметра среды на скорость частиц

Вернемся к рассмотренной в §4 задаче об эволюции среды из невзаимодействующих частиц, обладающих параметром  $\vartheta$ , однако обобщим постановку этой задачи, допустив, что значение  $\vartheta$  может влиять на скорость  $v$  частицы по известному закону. Например, можно себе представить, что локальным параметром частицы служит ее температура,



изменяющаяся в процессе движения частицы, что каким-то образом влияет на ее скорость.

Таким образом, выражение для скорости теперь имеет вид  $v = v(x, t, \vartheta)$ . Уравнение для изменения локального параметра

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g(x, t, \vartheta) \quad (1) = (4.1)$$

в координатах Эйлера будет выглядеть так:

$$v(x, t, \vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g(x, t, \vartheta), \quad (2)$$

а уравнение движения частицы:

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t, \vartheta). \quad (3)$$

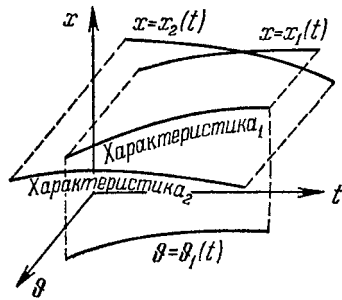
Мы будем считать зависимости  $g(x, t, \vartheta)$  и  $v(x, t, \vartheta)$  заданными.

Принципиально новым моментом в рассматриваемой сейчас ситуации является то, что уравнение движения частиц теперь нельзя интегрировать без учета уравнения для изменения  $\vartheta$ . Другими словами, уравнения (1) и (3) надо рассматривать как систему двух дифференциальных уравнений 1-го порядка с двумя искомыми функциями  $\vartheta(t)$  и  $x(t)$ . Обозначим через

$$x = \varphi(t; t_1, x_1, \vartheta_1), \quad \vartheta = \psi(t; t_1, x_1, \vartheta_1) \quad (4)$$

решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(t_1) = x_1, \quad \vartheta(t_1) = \vartheta_1.$$



Линия, изображающая любое такое решение в пространстве  $x, t, \vartheta$  снова называется *характеристикой* уравнения (2); ее проекции на плоскости  $x, t$  и  $\vartheta, t$  дают, соответственно, закон движения частицы и закон изменения параметра  $\vartheta$  для этой частицы (рис. 46). Отметим, что термин «характеристика» здесь применяется в несколько ином смысле, чем ранее; ниже мы более подробно поговорим об этом.

Конечно, характеристики между собой не пересекаются, так как через каждую точку пространства  $t, x, \vartheta$  проходит только одна интегральная линия системы уравнений (1), (3). Однако проекции характеристик на плоскость  $x, t$  могут пересекаться (рис. 46); другими словами, частицы могут обгонять одна другую.

Рис. 46

Это и понятно: например, если скорость частицы увеличивается с повышением ее температуры, то более нагретые частицы могут обогнать менее нагретые.

Допустим теперь, что задано начальное распределение параметра  $\vartheta$ :  $\vartheta|_{t=t_0} = \vartheta_0(x)$ , а нас интересует закон его распределения  $\vartheta = \vartheta(x, t)$  в дальнейшие моменты времени. Тогда, воспользовавшись формулами (4), можем написать

$$\vartheta(t_0; t, x, \vartheta) = \vartheta_0(\varphi(t_0; t, x, \vartheta))$$

(почему?). Из этого соотношения и определяется зависимость  $\vartheta(x, t)$ . Из-за возможности обгона частицами друг друга здесь, как и в §10, с течением времени могут образоваться пережесты, что ведет к многозначности  $\vartheta$ ; некоторые из этих пережестов могут в дальнейшем рассасываться.

Математическим обобщением уравнения (2) служит уравнение

$$a(x, t, \vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + b(x, t, \vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g(x, t, \vartheta), \quad (5)$$

которое называется *квазилинейным*<sup>23</sup> (это более общее уравнение, чем (5.1), так как

<sup>23</sup> Этот термин призван напомнить, что уравнение, хоть в целом и нелинейное, является линейным относительно производных от искомой функции.

здесь допускается зависимость коэффициентов от искомой функции). Так как уравнение (5) приобретает вид (2) после деления на  $b(x, t, \vartheta)$ , то дифференциальными уравнениями характеристик для него, взамен (3), (1), будут

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(x, t, \vartheta)}{b(x, t, \vartheta)}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{g(x, t, \vartheta)}{b(x, t, \vartheta)}$$

или, в более симметричной форме,

$$\frac{dx}{a(x, t, \vartheta)} = \frac{dt}{b(x, t, \vartheta)} = \frac{d\vartheta}{g(x, t, \vartheta)}. \quad (6)$$

Таким образом, характеристиками уравнения (5) служат линии в пространстве  $x, t, \vartheta$ ; через каждую точку пространства проходит ровно одна характеристика.

Так как решение  $\vartheta(x, t)$  уравнения (5) описывает эволюцию однопараметрического семейства частиц, для каждой из которых удовлетворяется уравнение характеристик (6), то мы получаем, что *любая интегральная поверхность квазилинейного уравнения* (т. е. график его решения) *полностью составлена из его характеристик*.

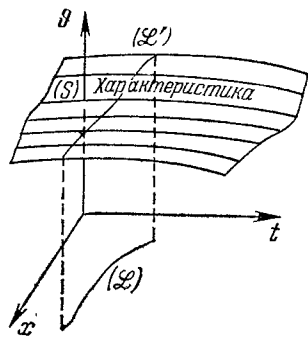


Рис. 47

В силу сказанного решение задачи с начальным условием для уравнения (5) приобретает следующий геометрический смысл. Пусть решение  $\vartheta$  задано во всех точках некоторой линии ( $\mathcal{L}$ ) плоскости  $x, t$  (рис. 47). Это условие определяет в пространстве  $x, t, \vartheta$  некоторую линию ( $\mathcal{L}'$ ), проектирующуюся на ( $\mathcal{L}$ ); если через все точки ( $\mathcal{L}'$ ) провести характеристики, то и получится искомая интегральная поверхность ( $S$ ) (рис. 47). Аналитическое оформление этого простого геометрического метода в случае, когда линия ( $\mathcal{L}$ ) представляет собой прямую  $t = t_0$ , было описано в связи с уравнением (2), а в случае линии общего вида, заданной параметрически, мы предоставляем читателю (см. упражнение 1).

К сделанному выше выводу о расположении характеристик можно формально прийти также следующим образом. Пусть  $\vartheta = \Phi(x, t)$  – некоторое решение уравнения (5). Образует разность

$$F(x, t, \vartheta) \equiv \vartheta - \Phi(x, t)$$

и будем в ней рассматривать  $x, t, \vartheta$  как независимые переменные. Тогда дифференциал этой функции вдоль характеристики, удовлетворяющий уравнениям (6), равен

$$dF = d\vartheta - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt \sim g - \frac{\partial \Phi}{\partial x} a - \frac{\partial \Phi}{\partial t} b \equiv 0.$$

Значит, вдоль характеристики  $F \equiv \text{const}$ , и потому, если рассматриваемая характеристика имеет с поверхностью  $\vartheta = \Phi(x, t)$  общую точку, в которой должно быть  $F = 0$ , то и вдоль всей характеристики будет  $F \equiv 0$ , т. е. она целиком лежит на этой поверхности.

Так как почти линейные уравнения (§5) являются частным случаем квазилинейных, то получается, что для почти линейных уравнений имеется два неравносильных определения характеристик: согласно одному из них, это линии в плоскости аргументов  $x, t$ , а согласно другому – это линии в пространстве аргументов-функций  $x, t, \vartheta$ . Однако соотношение между этими определениями весьма простое. В самом деле, допустим, что коэффициенты уравнения (5) не зависят от  $\vartheta$ . Тогда первые два уравнения (6) интегрируются независимо от третьего и дают в плоскости  $x, t$  характеристики в смысле §5. Это значит, что если  $x = x(q), t = t(q), \vartheta = \vartheta(q)$  – уравнение характеристики в пространстве аргументов-функций, то, отбрасывая последнее уравнение, мы получим уравнения характеристики в плоскости аргументов. Другими словами, для почти линейных уравнений характеристики в смысле §5 представляют собой проекции характеристик в смысле этого параграфа на плоскость аргументов.

Видно также, что одну и ту же проекцию имеет однопараметрическое семейство характеристик в пространстве аргументов-функций, заполняющее двумерную цилиндрическую поверхность (рис. 48).

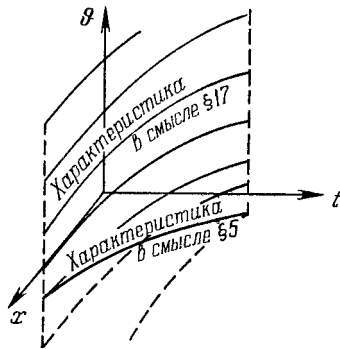


Рис. 48

Мы уже упоминали о том, что характеристики квазилинейного уравнения заполняют пространство аргументов-функций без взаимных пересечений. Однако если уравнение не является почти линейным, то проекции этих характеристик на плоскость аргументов, конечно, могут пересекаться, что и порождает возможность обращения в бесконечность производных от решения при его продолжении с последующим образованием перехлеста. Существенно отметить, что такое осложнение может возникнуть, даже если коэффициенты заданного уравнения, начальные данные, а также их производные разрывов не

имеют, так как все определяется взаимным расположением характеристик в пространстве.

Указанная в связи с рис. 47 конструкция решений уравнения (5) наводит на мысль о равноправии переменных  $x, t, v$  в этом уравнении. Чтобы проверить это, примем, например,  $x$  и  $v$  за независимые переменные и будем рассматривать  $t$  как функцию от этих переменных,  $t = t(x, v)$ . Разрешая уравнение

$$dt = \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_v dx + \left. \frac{\partial t}{\partial v} \right|_x dv$$

(внизу вертикальной черты указывается величина, которая в процессе дифференцирования считается постоянной) относительно  $dv$ , получаем выражения

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_x = \left( \left. \frac{\partial t}{\partial v} \right|_x \right)^{-1}, \quad \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_v = - \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_v \left( \left. \frac{\partial t}{\partial v} \right|_x \right)^{-1}.$$

Подставляя их в уравнение (5), получаем после простых преобразований уравнение для функции  $t(x, v)$ :

$$a(x, t, v) \frac{\partial t}{\partial x} + g(x, t, v) \frac{\partial t}{\partial v} = b(x, t, v). \quad (7)$$

Это уравнение имеет ту же структуру, что (5), и характеристиками для него будут те же линии, что для (5) (почему?).

Это свойство дает возможность в некоторых случаях упростить исходное уравнение (5). Например, если коэффициенты  $a, b$  и  $g$  не зависят от  $t$  (автономный случай), то после перехода к отысканию зависимости  $t(x, v)$  квазилинейное уравнение (5) заменится на линейное уравнение (7).

К рассмотренному уравнению приводятся некоторые задачи об эволюции среды из взаимодействующих частиц. Рассмотрим, например, задачу о построении плотности  $\rho$  среды в случае, когда скорость  $v$  частиц зависит от  $\rho$ . Здесь уравнение неразрывности приобретает вид

$$(v(x, t, \rho)\rho)'_x + \rho'_t = 0, \quad (8)$$

и законы движения отдельных частиц нельзя строить независимо друг от друга, как это делалось раньше. Однако если уравнение (8) переписать в виде

$$[v(x, t, \rho) + \rho v'_\rho(x, t, \rho)]\rho'_x + \rho'_t = -\rho v'_x(x, t, \rho),$$

то мы приходим к уравнению вида (5) для функции  $\rho(x, t)$ . В силу (1) и (3) система уравнений характеристик в пространстве  $x, t, \rho$  имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t, \rho) + \rho v'_\rho(x, t, \rho), \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho v'_x(x, t, \rho).$$

(Отметим, что из первого уравнения видно, что при  $v'_\rho \neq 0$  зависимость  $x(t)$  для характеристики уже не служит законом движения частицы.) Построение решения  $\rho(x, t)$

при заданном начальном условии можно осуществить так, как это было описано в связи с уравнением (2).

### Упражнения

- 1) Опишите подробно аналитическую процедуру построения решения уравнения (5) при заданном начальном условии.
- 2) Найдите решение уравнения  $\vartheta\vartheta'_x + \vartheta'_t = 0$ , удовлетворяющее начальному условию  $\vartheta|_{t=0} = ax$ ; рассмотрите отдельно случаи  $a > 0$  и  $a < 0$ . Переписав уравнение в форме  $\left(\frac{1}{2}\vartheta^2\right)'_x + \vartheta'_t = 0$ , укажите аналог закона сохранения числа частиц и проверьте его для построенного решения.
- 3) Найдите решение уравнения  $\vartheta\vartheta'_x + \vartheta'_t = 0$ , удовлетворяющее начальному условию  $\vartheta|_{t=0} = 1/(1+x^2)$ .  
Указание. Воспользуйтесь графическим решением уравнения  $1/(1+p^2) = ap + b$ .

## § 18 Метод сеток для уравнения эволюции локального параметра

Вернемся к уравнению

$$v(x,t)\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = g(x,t,\vartheta) \quad (1) = (4.2)$$

с начальным условием

$$\vartheta|_{t=t_0} = \vartheta_0(x). \quad (2) = (3.3)$$

Так как точное решение этой задачи в виде аналитической формулы возможно лишь в редких случаях, то естественно обратиться к численному решению. При этом возможны два различных перехода: именно, можно либо воспользоваться интегрированием вдоль характеристик уравнения (1), либо применить более простой и грубый подход, не использующий характеристик.

При первом подходе мы как бы следим за судьбой отдельных дискретных частиц, выбрав их в момент  $t_0$ , т. е. как бы совершаем переход, обратный тому, который был проделан в §1.1. Пусть эти частицы в момент  $t_0$  имели координату  $x = mh$ , где  $m$  – любое целое число, а  $h > 0$  – выбранный шаг. Тогда, чтобы найти зависимости  $x(t)$  и  $\vartheta(t)$  для такой частицы, согласно §4, надо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = v(x,t), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = g(x,t,\vartheta) \quad (3)$$

при начальных условиях

$$x|_{t=t_0} = mh, \quad \vartheta|_{t=t_0} = \vartheta_0(mh). \quad (4)$$

Это можно сделать с помощью какого-либо из численных методов, известных в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, ЭПМ, §VIII.7), причем с хорошей точностью.

Если обозначить решение системы (3) при начальных данных (4) через  $x_m(t)$ ,  $\vartheta_m(t)$ , то, задавшись любым значением  $t = T$ , получаем таблицу значений искомого решения

$$\vartheta(x,T)|_{x=x_m(T)} = \vartheta_m(T)$$

на интересующем нас интервале значений  $x$ . Можно, например, задаться шагом  $\tau > 0$  по времени и полагать  $T = t_0 + \tau, t_0 + 2\tau, \dots$ , что приведет к таблице с двумя входами для искомого решения. Некоторым (впрочем, небольшим) недостатком этой таблицы будет то, что она по  $x$  неравномерна (значение  $x_{m+1}(t_0 + n\tau) - x_m(t_0 + n\tau)$ , вообще говоря, зависит как от  $m$ , так и от  $n$ ), так как расстояние между частицами в процессе их

движения, вообще говоря, изменяется. Однако надо иметь в виду, что любое конкретное значение  $\vartheta(\bar{x}, \bar{t})$  нетрудно непосредственно вычислить так: сначала численно проинтегрировать уравнение  $dx/dt = v(x, t)$  при начальном условии  $\bar{x}(t) = \bar{x}$ , найти соответствующее значение  $x(t_0) = \bar{x}_0$ , после этого численно проинтегрировать систему (3) при начальных условиях  $x(t_0) = \bar{x}_0$ ,  $\vartheta(t_0) = \vartheta_0(\bar{x}_0)$ , откуда и получить  $\vartheta(\bar{x}, \bar{t}) = \vartheta(\bar{t})$ .

Второй подход к численному решению исходной задачи (метод сеток) основан на переходе от дифференциального уравнения (1) к разностному с помощью замены производных отношениями приращений. Он имеет очень широкую область применения, в том числе к более сложным задачам, для которых первый подход неприменим; к тому же метод сеток наиболее приспособлен к применению ЭЦВМ – электронных цифровых вычислительных машин. Целесообразно разобрать этот второй подход на рассматриваемом простом примере задачи (1) – (2).

Мы еще более упростим задачу, ограничившись уравнением

$$v \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \quad (v = \text{const} > 0); \quad (5)$$

тогда при начальном условии (2) решение, очевидно, равно  $\vartheta = \vartheta_0(x - v(t - t_0))$ . Однако, имея в виду более сложные уравнения, мы этим решением пользоваться не будем. Для простоты будем считать, что начальная функция  $\vartheta_0(x)$  отлична от нуля только на некотором интервале  $0 \leq x \leq b$ .

Выберем, пока произвольно, шаги  $h$  по  $x$  и  $\tau$  по  $t$  и обозначим

$$\vartheta(mh, t_0 + n\tau) = \vartheta_{mn},$$

где  $m, n$  принимают целые значения. Таким образом, мы будем искать значения решения только в узлах сетки, изображенной на рис. 49.

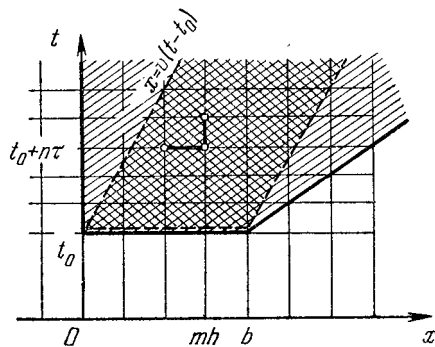


Рис. 49

В результате замены производных в уравнении (5) отношениями приращений значения искомого решения в нескольких соседних узлах (в любом месте сетки) окажутся связанными друг с другом. Это можно сделать по-разному. Пусть, например, мы воспользуемся приближенными формулами

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{mn} - \vartheta_{m-1,n}}{h}, \quad \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{m,n+1} - \vartheta_{m,n}}{\tau}. \quad (6)$$

Тогда упомянутая связь примет вид

$$v \frac{\vartheta_{mn} - \vartheta_{m-1,n}}{h} + \frac{\vartheta_{m,n+1} - \vartheta_{m,n}}{\tau} = 0, \quad (7)$$

т. е. связанными будут значения решения в узлах, показанных кружками в середине рис. 49.

Из разностного уравнения (7), приближенно заменяющего (5), получаем

$$\vartheta_{m,n+1} = \left( 1 - \frac{v\tau}{h} \right) \vartheta_{m,n} + \frac{v\tau}{h} \vartheta_{m-1,n}. \quad (8)$$

Но значения

$$\vartheta_{m0} = \vartheta_0(mh) \quad (9)$$

заданы. Поэтому, полагая  $m = 0$ , мы из (8) находим значения  $\vartheta_{m1}$ ; после этого, полагая  $m = 1$  и пользуясь найденными значениями  $\vartheta_{m1}$ , мы из (8) получаем значения  $\vartheta_{m2}$  и т. д. Эти значения и должны приближенно представлять искомое решение  $\vartheta(x, t)$ .

Из структуры связи (8) следует, что если  $\vartheta_0(x) \neq 0$  только при  $0 \leq x \leq a$ , то значения  $\vartheta_{mn}$  могут быть отличными от нуля только в заштрихованной на рис. 49 части плоскости (почему?). Однако из формулы для точного решения вытекает, что при  $t \geq t_0$  оно отлично от нуля только в области, которая на рис. 49 заштрихована дважды. Отсюда

сразу следует, что значения  $\vartheta_{mn}$  могут правильно аппроксимировать точное решение, только если вторая область включается в первую, т. е. если (см. рис. 49)

$$\frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{v} \text{ или, что то же, } v\tau h \leq 1. \quad (10)$$

(Может возникнуть недоумение в связи с тем, что в двух углах, заштрихованных на рис. 49 один раз, значения  $\vartheta_{mn}$ , вообще говоря, отличны от нуля, тогда как точное решение там тождественно равно нулю. Однако нетрудно проверить, что значения  $\vartheta_{mn}$  в этих углах с ростом  $n$  стремятся к нулю с большой скоростью, поэтому отличие этих значений от нуля не противоречит тому, что они аппроксимируют точное решение.) Схема вычислений, подобная рассмотренной, в которой значения решения в каждом последующем слое (в разобранном примере каждый такой слой отвечал определенному значению  $n$ ) определяются непосредственно через значения решения в предыдущих слоях, называется *явной*. Казалось бы, явные схемы наиболее удобны для вычислений. Однако когда такие схемы стали впервые применять на ЭЦВМ, то столкнулись с одним непредвиденным осложнением; речь идет о возможной *неустойчивости* вычислений. Дело в том, что для хорошей аппроксимации дифференциального уравнения разностным значения  $h$  и  $\tau$  должны быть достаточно малыми. Поэтому, чтобы сосчитать решение на не слишком малом временном промежутке, требуется проделать весьма большое число временных шагов ( $n$  достигает весьма больших значений). Однако каждое вычисление осуществляется с определенной погрешностью, проистекающей как из-за неточной аппроксимации дифференциального уравнения разностным, так и из-за ошибок округления. В вопросе устойчивости вычислений главную роль играет второй источник ошибок. Именно, оказывается, что для некоторых вычислительных схем ошибки округления при переходе с одного временного слоя на следующий разрастаются и после нескольких таких переходов полностью подавляют решение. Вычисляемые значения безудержно разрастаются, бешено осциллируя (по этим признакам обычно распознается неустойчивость), и не имеют ничего общего с истинным решением. (О неустойчивости вычислений см. также ЭПМ, §XV.5.)

Покажем, как можно предвидеть неустойчивость схемы. Для этого допустим, что функция  $\vartheta(x, t)$  принимает, вообще говоря, комплексные значения и что в начальные данные внесена ошибка

$$\Delta \vartheta_{m0} = \alpha e^{i\gamma m}, \quad (11)$$

где  $\alpha, \gamma$  – некоторые вещественные параметры. (Как известно, – см., например, ЭПМ, гл. XIV, – с помощью суммы таких функций можно представить произвольную функцию, ограниченную для всех  $m$ .) Если принять эту ошибку за начальное условие, то соответствующее решение уравнения (7), как мы сейчас покажем, будет иметь вид

$$\Delta \vartheta_{mn} = \alpha e^{i\gamma m} p^n, \quad (12)$$

где  $p$  – некоторая постоянная. В самом деле, подстановка (11) в (7) дает после сокращений (проверьте!)

$$v \frac{1 - e^{-i\gamma}}{h} + \frac{p - 1}{\tau} = 0, \quad (13)$$

откуда можно найти  $p$ :

$$p = 1 - \frac{v\tau}{h} (1 - e^{-i\gamma}) = 1 - \frac{v\tau}{h} + \frac{v\tau}{h} \cos \gamma - i \frac{v\tau}{h} \sin \gamma. \quad (14)$$

Для дальнейшего важно сравнить  $|p|$  с 1. Из (14) легко получаем

$$|p|^2 = 1 - 2 \frac{v\tau}{h} + 2 \left( \frac{v\tau}{h} \right)^2 + 2 \left[ \frac{v\tau}{h} - \left( \frac{v\tau}{h} \right)^2 \right] \cos \gamma.$$

Так как правая часть зависит от  $\cos \gamma$  линейно, то она заключена между границами, которые получатся, если вместо  $\cos \gamma$  подставить его крайние значения, т. е. между

$$1 - 2\frac{v\tau}{h} + 2\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2 + 2\left[\frac{v\tau}{h} - \left(\frac{v\tau}{h}\right)^2\right](-1) = \left(1 - 2\frac{v\tau}{h}\right)^2$$

и

$$1 - 2\frac{v\tau}{h} + 2\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2 + 2\left[\frac{v\tau}{h} - \left(\frac{v\tau}{h}\right)^2\right] \cdot 1 = 1.$$

Поэтому могут представиться два случая. Если  $\left|1 - 2\frac{v\tau}{h}\right| \leq 1$  (а это равносильно условию

(10)!), то  $|p| \leq 1$  (даже, за исключением крайних значений,  $|p| < 1$ ); формула (12) показывает, что погрешность в решении будет с ростом  $n$ , т. е. с переходом к последующим временным слоям, затухать. Аналогичным образом будут затухать погрешности, порожденные ошибками округления на любом шаге по времени, т. е. схема будет устойчивой. Если же условие (10) нарушено, то при  $\cos \gamma = -1$ , т. е. при  $\Delta \vartheta_{m0} = (-1)^m \alpha$ , будет  $|p| > 1$ , а потому с переходом к последующим временным слоям ошибка будет разрастаться; это неустойчивая схема. Итак, условие (10) получает обоснование также и с позиций устойчивости вычислительной схемы, (Мы предоставляем читателю проверить, что если первую формулу (6) заменить на

$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{m+1,n} - \vartheta_{mn}}{h}$ , то получится явная схема, которая в случае  $v > 0$  будет всегда неустойчивой.)

Полученный результат дает основание ожидать, что замена (6) возможна и для общего уравнения (1) при  $v(x, t) > 0$ . Эта замена приводит к разностному уравнению

$$v(x_m, t_n) \frac{\vartheta_{mn} - \vartheta_{m-1,n}}{h} + \frac{\vartheta_{mn+1} - \vartheta_{mn}}{\tau} = g(x_m, t_n, \vartheta_{mn}),$$

где обозначено  $x_m = mh$ ,  $t_n = t_0 + n\tau$ . Последнее уравнение в сочетании с начальным условием (9) приводит к явной вычислительной схеме, причем аналогом условия (10) будет

$$\frac{\tau}{h} \max v \leq 1.$$

Чтобы охватить случай, когда функция  $v$  может менять знак, можно заменить первую формулу (6) на более точную симметричную формулу  $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{m+1,n} - \vartheta_{m-1,n}}{2h}$ . Тогда взамен (13) мы получим уравнение

$$v \frac{e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}}{h} + \frac{p-1}{\tau} = 0,$$

откуда

$$p = 1 - i \frac{v\tau}{h} \sin \gamma, \quad |p|^2 = 1 + \left(\frac{v\tau}{h}\right)^2 \sin^2 \gamma. \quad (15)$$

Может показаться, что так как получилось  $|p| > 1$ , то эта схема неустойчивая. Но на самом деле положение можно спасти за счет существенного уменьшения временного шага  $\tau$ . В самом деле, чтобы продвинуться до момента  $t$ , надо совершить  $\frac{t-t_0}{\tau}$  временных шагов. Из формулы (12) видно, что при этом исходная ошибка умножится на  $p^{(t-t_0)/\tau}$ ; но в силу (15)

$$\left|p^{(t-t_0)/\tau}\right| = \left[1 + \left(\frac{v\tau}{h}\right)^2 \sin^2 \gamma\right]^{(t-t_0)/2\tau} \leq \left[1 + \left(\frac{v\tau}{h}\right)^2\right]^{(t-t_0)/2\tau}. \quad (16)$$

Пусть  $\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2 \ll 1$ ; тогда из формулы  $1 + \alpha \approx e^\alpha$  ( $|\alpha| \ll 1$ ) получим, что правая часть (16) приближенно равна

$$\left[ e^{(v\tau/h)^2} \right]^{(t-t_0)/2\tau} = e^{v^2\tau(t-t_0)/2h^2}.$$

Таким образом, если ограничить показатель степени небольшим числом, то ошибки округления, хоть и могут разрастаться, но не слишком сильно. Можно, например, положить

$$\frac{v^2\tau(t-t_0)}{2h^2} \leq 1, \text{ т. е. } \tau \leq \frac{2h^2}{v^2(t-t_0)}.$$

Таким образом, описываемая схема, хоть и применима, но не очень удобна, так как если для улучшения аппроксимации дифференциального уравнения разностным мы уменьшим шаг  $h$ , то для соблюдения условия устойчивости нам придется уменьшать временной шаг  $\tau$  еще более значительно, что приведет к резкому увеличению объема вычислений. Временной шаг приходится уменьшать и при увеличении интервала времени  $t$ , для которого строится решение.

Мы уже упоминали о том, что сама замена дифференциального уравнения разностным служит источником ошибки в решении, даже если вычисления производятся с как угодно высокой точностью. Можно показать, что если решение строится на конечном интервале времени, то эта ошибка в решении имеет тот же порядок, что ошибка в уравнении. Например, если в первой из разобранных схем считать  $h$  и  $\tau$  одного порядка и заметить, что формулы (6) имеют погрешность 1-го порядка малости, то мы получаем, что отличие величины  $\vartheta_{mn}$  от точного решения также имеет 1-й порядок малости. Поэтому для того, чтобы, например, повысить точность приближенного решения в 10 раз, надо уменьшить  $h$  и  $\tau$  в 10 раз, что приведет к возрастанию вычислительной работы в 100 раз.

Для уменьшения объема вычислений можно воспользоваться более точными разностными схемами. Например, можно воспользоваться формулами

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{m+1,n} - \vartheta_{m-1,n}}{2h}, \quad \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{m,n+1} - \vartheta_{m,n-1}}{2\tau},$$

имеющими погрешность 2-го порядка малости. (Это легко получить, разложив правые части по формуле Тейлора вблизи точки  $x_m, t_n$ , что мы предоставляем читателю.) Тогда взамен (7) мы получим соотношение

$$v \frac{\vartheta_{m+1,n} - \vartheta_{m-1,n}}{2h} + \frac{\vartheta_{m,n+1} - \vartheta_{m,n-1}}{2\tau} = 0, \quad (17)$$

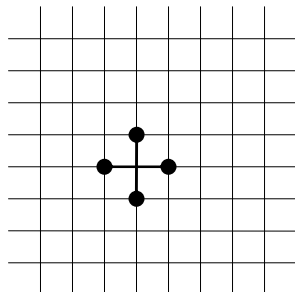


Рис. 50

связывающее значения приближенного решения в четырех узлах, показанных на рис. 50. Это соотношение можно разрешить относительно значения в верхнем узле, в результате чего получится явная вычислительная схема.

Отличием этой схемы от двух предыдущих является то, что для ее реализации требуется дополнительное знание искомого решения не на одном, как раньше, а на двух нижних временных слоях, т. е. не только при  $n = 0$ , но и при  $n = 1$ . Значения решения при  $n = 1$  можно определить по одной из двух предыдущих схем, что даст дополнительную ошибку 2-го порядка малости, которая

для устойчивой вычислительной схемы не сможет в дальнейшем разрастись. Можно воспользоваться также тем, что заданное уравнение (5) (в общем случае – (1)) позволяет при известном  $\vartheta_{t=0} = \vartheta_0(x)$  вычислить

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right|_{t=0} = -v \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right|_{t=0} = -v \vartheta_0'(x),$$



затем, с помощью дифференцирования по  $t$ , вычислить

$$\left. \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \right|_{t=0} = -v \left. \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t \partial x} \right|_{t=0} = -v \frac{\partial}{\partial x} \left( \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right|_{t=0} \right) = v^2 \vartheta_0''(x)$$

и т. д. (продумайте эти вычисления для уравнения (1)!). Отсюда, применив разложение в ряд Тейлора по  $t$ , можно получить значение  $\vartheta|_{t=t_0+\tau}$  с высокой точностью, чтобы избежать дополнительного источника ошибок.

Проверим еще вычислительную схему (17) на устойчивость. Рассуждение, аналогичное проведенному для первой схемы, приводит взамен (13) к уравнению

$$v \frac{e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}}{2h} + \frac{p - p^{-1}}{2\tau} = 0, \text{ т. е. } p^2 + 2i \frac{v\tau}{h} \sin \gamma p - 1 = 0,$$

откуда

$$p_{1,2} = -i \frac{v\tau}{h} \sin \gamma \pm \sqrt{-\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2 \sin^2 \gamma + 1}.$$

Таким образом, если  $|v|\tau h \leq 1$  (см. условие (10)), то подкоренное выражение положительно и потому

$$|p_{1,2}|^2 = \left(-\frac{v\tau}{h} \sin \gamma\right)^2 + \left[-\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2 \sin^2 \gamma + 1\right] = 1,$$

т. е. вычислительная схема устойчива. Если  $|v|\tau h > 1$ , то при  $\gamma = \pi/2$  одно из значений  $p$  получается по модулю большим единицы, т. е. вычислительная схема неустойчива.

Мы видели, что во всех рассмотренных нами явных вычислительных схемах для устойчивости требовалось выполнение определенного соотношения между шагами по  $x$  и по  $t$ . Применение неявных вычислительных схем представляет в этом отношении новые возможности. При этом разностная схема называется *неявной*, если на каждом следующем слое она приводит к соотношению между значениями искомого решения, из которого (соотношения) и надо эти значения найти.

В случае  $v > 0$  простейшая неявная схема получается с помощью замены

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{mn} - \vartheta_{m-1,n}}{h}, \quad \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{mn} - \vartheta_{m,n-1}}{\tau},$$

которая приводит к разностному уравнению

$$v \frac{\vartheta_{mn} - \vartheta_{m-1,n}}{h} + \frac{\vartheta_{mn} - \vartheta_{m,n-1}}{\tau} = 0, \quad (18)$$

связывающему значения приближенного решения в узлах сетки по схеме рис. 51.

Подстановка в это уравнение выражения (12) приводит к равенству

$$v \frac{1 - e^{-i\gamma}}{h} + \frac{1 - p^{-1}}{\tau} = 0,$$

из которого получаем

$$p = \left[1 + \frac{v\tau}{h}(1 - e^{-i\gamma})\right]^{-1} = \left[1 + \frac{v\tau}{h}(1 - \cos \gamma) + i \frac{v\tau}{h} \sin \gamma\right]^{-1},$$

откуда легко подсчитать

$$|p| = [1 + 2k + 2k^2 - (2k + 2k^2)\cos \gamma]^{-1} \quad (k = v\tau h).$$

Отсюда, подобно первому из разобранных примеров, получаем, что  $|p|$  заключено между 1 и  $(1 + v\tau h)^{-1}$ , т. е. рассматриваемая схема устойчива при любом соотношении между  $h$  и  $\tau$ .

Впрочем, применение неявной схемы требует еще некоторых усилий при решении уравнения (18), точнее, системы уравнений (18) при зафиксированном  $n$  и всевозможных  $m$ . Например, при  $n = 1$  эта система принимает вид

$$-\frac{v}{h} \vartheta_{m-1,1} + \left(\frac{v}{h} + \frac{1}{\tau}\right) \vartheta_{m1} = \frac{1}{\tau} \vartheta_{m0}, \quad (19)$$

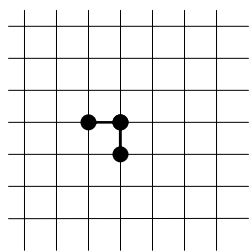


Рис. 51

где правые части заданы в силу начального условия (9). Однако пусть начальная функция  $\vartheta_0(x)$  отлична от нуля только при  $x \geq 0$ . Тогда (см. рис. 49) и решение равно нулю при  $x \leq 0$ , а потому  $J_{m0} \equiv 0$  ( $m < 0$ ). Полагая в соотношении (19)  $m = 0$ , получим, что

$$\vartheta_{01} = \frac{\vartheta_{00}}{\tau} : \left(\frac{v}{h} + \frac{1}{\tau}\right), \quad (20)$$

полагаем затем  $m = 1$ , найдем

$$\vartheta_{11} = \left(\frac{1}{\tau} \vartheta_{00} + \frac{v}{h} \vartheta_{01}\right) : \left(\frac{v}{h} + \frac{1}{\tau}\right),$$

куда надо подставить  $\vartheta_{01}$  из (20), и т. д. Найдя значения  $\vartheta_{m1}$  в требуемом диапазоне изменения  $x$ , можно положить в (18)  $n = 2$  и найти аналогичным образом значения  $\vartheta_{m2}$  и т. д.

Как видим, применяя неявную схему вместо явной, приходится проводить некоторые добавочные вычисления. Несмотря на это, неявные схемы широко применяются, так как в них можно достичь экономии в вычислениях за счет не слишком малого  $\tau$ , т. е. за счет уменьшения числа временных шагов.

Отметим, что для получения решения на очередном временном слое в неявной схеме требуется произвести рекуррентную цепочку вычислений; поэтому здесь также возникает вопрос об их устойчивости. Так, в разобранным примере ошибка  $\Delta \vartheta_{01}$  в значении  $\vartheta_{01}$  распространяется «направо» по формуле  $\vartheta_{m1} = q^m \Delta \vartheta_{01}$ , где  $q$  в силу (19) удовлетворяет уравнению

$$-\frac{v}{h} q^{-1} + \left(\frac{v}{h} + \frac{1}{\tau}\right) = 0, \text{ откуда } q = \frac{v}{h} : \left(\frac{v}{h} + \frac{1}{\tau}\right).$$

Итак,  $|q| < 1$ , а потому вычисления на каждом слое устойчивы.

Метод сеток для квазилинейных уравнений, рассмотренных в §17, осложнен необходимостью предусмотреть явление перехлеста. Мы не будем рассматривать здесь этот метод, так как его более естественно излагать в связи с теорией взаимодействующих частиц.

## Ответы и решения

### §2

$$G(t, \vartheta) = \begin{cases} 0 & (-\infty < t < \vartheta), \\ e^{-\int_{\vartheta}^t b(s) ds} & (\vartheta < t < \infty), \end{cases} \quad (\vartheta > t_0),$$

$$1) \quad G(t, \vartheta) = \begin{cases} -e^{-\int_{\vartheta}^t b(s) ds} & (-\infty < t < \vartheta), \\ 0 & (\vartheta < t < \infty), \end{cases} \quad (\vartheta < t_0),$$

$$x(t) = \int_{t_0}^t G(t, \vartheta) \varphi(\vartheta) |d\vartheta| = \int_{t_0}^t \varphi(\vartheta) e^{-\int_{\vartheta}^t b(s) ds} d\vartheta.$$

### §3

1)  $\vartheta(x, h) = e^x(1 - v_0 h)$ ,  $\vartheta(x, 2h) = e^x(1 - v_0 h)^2$ , вообще,  $\vartheta(x, kh) = e^x(1 - v_0 h)^k$ ; полагая  $kh = t$ , т. е.  $k = t/h$ , получаем  $\vartheta(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ e^x (1 - v_0 h)^{t/h} \right] = e^{x - v_0 t}$ , это и есть точное

решение. Для произвольной функции  $\vartheta_0(x)$  аналогично получаем по методу Эйлера значение  $\vartheta(x, h)$  при  $t = kh$  равным

$$\vartheta_0(x) - \frac{\vartheta_0'(x)}{1!} v_0 t + \frac{\vartheta_0''(x)}{2!} v_0^2 t(t-h) - \dots + (-1)^k \frac{\vartheta_0^{(k)}(x)}{k!} v_0^k t(t-h) \dots [t - (k-1)h].$$

При  $h \rightarrow 0$  в пределе получаем разложение функции  $\vartheta_0(x - v_0 t)$  в ряд Тейлора (если это разложение возможно!).

2)  $\vartheta(x, t) = \text{sink}[(x + t + 1)e^{-t} - 1].$

**§4**

1)  $\vartheta(x, t) = \left\{ A \sin[\omega(x - v_0 t)] + \frac{b}{a}(x - v_0 t) + \frac{1}{a^2}(c + bv_0) \right\} e^{at} - \frac{1}{a}(bx + ct) - \frac{1}{a^2}(c + bv_0).$

**§6**

1) Характеристиками служат линии  $x^2 t = C$ ; при начальном условии  $x(1) = x_1$ ,  $\vartheta(1) = 3x_1$  получаем вдоль характеристики  $x = \frac{x_1}{\sqrt{t}}$ ,  $\vartheta = 3x_1 (= \text{const})$ , откуда, исключая  $x_1$ ,

находим искомое решение  $\vartheta = 3x\sqrt{t}$ .

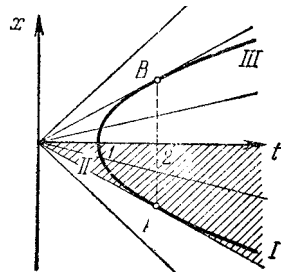


Рис. 52

2) К уравнениям (6.9) и (6.10) надо присоединить равенства  $F(x_1, t_1) = 0$  и  $\vartheta_1 = \Phi(x_1, t_1)$ , а затем из пяти полученных уравнений исключить четыре переменных  $q, t_1, x_1, \vartheta_1$ .

3) Дифференциальное уравнение характеристик  $dx/x = dt/t$  имеет общее решение  $x = Ct$ , т. е. характеристиками служат лучи, выходящие из начала координат (рис. 52). Два из них касаются заданной линии в точках  $A(2; -1)$  и  $B(2; 1)$ , которые разбивают линию на три дуги. На этих дугах (а также на любых их частях) и можно задавать искомое решение произвольно. Область влияния первой дуги на рис. 52 заштрихована.

4) Заданное уравнение вдоль характеристик имеет вид  $d\vartheta/dt = 0$ , откуда  $\vartheta \equiv \vartheta_1$ . Уравнение характеристики (см. решение задачи 3) при условии  $x(t_1) = x_1$  имеет вид

$x = \frac{x_1}{t_1} t$ . Присоединяя равенства  $t_1 = 1 + x_1^2$ ,  $\vartheta_1 = t_1$  и исключая  $t_1, x_1, \vartheta_1$ , получаем

искомое решение  $\vartheta = t(2x^2)^{-1} \left( t + \sqrt{t^2 - 4x^2} \right)$ . Область влияния представляет собой угол  $y < x \leq t/2$  ( $0 < t < \infty$ ). При приближении к нижней стороне угла  $\vartheta \rightarrow \infty$ , так как сюда сносятся большие значения,  $\vartheta$  заданные на далекой части ( $\mathcal{L}$ ). На верхней стороне угла  $|\text{grad} \vartheta| = \infty$ , так как в точке  $B$  на рис. 52 линия ( $\mathcal{L}$ ) касается характеристики, а потому, если отойти от  $B$  вниз на малое расстояние  $h$ , изменение  $\vartheta$ , снесенное с ( $\mathcal{L}$ ), будет иметь порядок  $\sqrt{h}$ ; значит,  $|\text{grad} \vartheta|$  имеет порядок  $(\sqrt{h})'$ , т. е.  $h^{-1/2}$ . При приближении к вершине угла  $\vartheta$  имеет все предельные значения от 2 до  $\infty$ , так как сюда сносятся все значения  $\vartheta$ , заданные на ( $\mathcal{L}$ ).

**§7**

1) В обозначениях §I.7  $\rho(x, t) = \rho_0(\varphi(t_0, t, x))\varphi_x''(t_0, t, x) + \int_{t_0}^t p_m(\varphi(\tau, t, x))\varphi_x'(\tau, t, x) d\tau$ .

2) Для требуемого перехода надо в формуле (1.5.3) положить  $f(x) = \varphi(t_0; t, x) - \xi$ .

**§8**

1) В формуле (7.6) под знаком интеграла надо выполнить замену  $\varphi(\tau, t, x) = s$ , в

результате чего интеграл примет вид  $\int_{\xi}^x v'(s) \frac{ds}{v(s)} = \ln \frac{v(x)}{v(\xi)}$  и т. д.

2)

а) Решение определяется формулами (8.2) и (8.3), в которых

$w(x) = \frac{x}{v_0} + \frac{v_1}{v_0 \sqrt{v_0(v_0 - v_1)}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{v_0} x}{\sqrt{v_0 - v_1}}$ . Функцию  $\zeta$  аналитически выписать

нельзя, но можно построить численно;

б)  $w(x) = \frac{x}{v_0} + \frac{v_1}{2v_0 \sqrt{v_0(v_0 - v_1)}} \ln \left| \frac{\sqrt{v_0} x - \sqrt{v_1 - v_0}}{\sqrt{v_0} x + \sqrt{v_1 - v_0}} \right|$ , формула (8.3) действует на

интервалах  $-\infty < x < -\sqrt{1 - \frac{v_1}{v_0}}$ ,  $-\sqrt{1 - \frac{v_1}{v_0}} < x < \sqrt{1 - \frac{v_1}{v_0}}$ ,  $\sqrt{1 - \frac{v_1}{v_0}} < x < \infty$ .

в)  $w = -\frac{x}{v_1} - \frac{x^3}{3v_1}$ ; здесь функцию  $\zeta$  можно выписать аналитически с помощью

формулы Кардано для решения кубического уравнения.

3) Продифференцировав формулу (8.2) по  $x$  при  $\rho_0(x) \equiv \text{const}$  с помощью формулы (8.3) и приравняв результат нулю, приходим к требуемому уравнению  $v'(\zeta(w(x) - t + t_0)) = v'(x)$ . Отсюда видно, в частности, что рассматриваемые экстремумы могут быть только на тех интервалах между соседними нулями функции  $v(x)$ , где она имеет точки перегиба.

4) При малых  $s$   $t - t_0$  точно до малых высшего порядка будет

$\zeta(w(x) - (t - t_0)) = x - v(x)(t - t_0)$ ; это вытекает из смысла левой части, но можно вывести и формально, с помощью формулы Тейлора. Из (8.2) следует, что с точностью до малых высшего порядка

$$\rho(x, t) = \frac{1}{v(x)} [v(x) - v'(x)v(x)(t - t_0)] [\rho_0(x) - \rho_0'(x)v(x)(t - t_0)] = \rho_0(x) - [\rho_0'(x)v(x)](t - t_0).$$

Впрочем, и этому результату нетрудно дать непосредственное истолкование.

## §9

1) Переписав уравнение в виде  $xv_x' - 2tv_t' = v$ , аналогично упражнению 6.1 находим решение  $v = 3x$ . Так как  $\varphi_1(t) = 0$ ,  $\varphi_2(x) = 1/\sqrt{t}$ , то «масса» (9.6) между движущимися

точками равна  $M = \int_0^{1/\sqrt{t}} (-2t \cdot 3x) dx = -3$ , т. е. не зависит от  $t$ .

## §10

1) Здесь, чтобы выразить  $\xi(x, t)$ , надо было бы решить кубическое уравнение

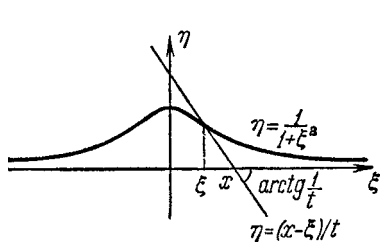


Рис. 53

$x = \xi + \frac{t}{1 + \xi^2}$ ; его графическое решение в

равносильной форме  $\frac{x - \xi}{t} = \frac{1}{1 + \xi^2}$  показано на рис.

53. Параметрические уравнения каустики в силу (10.3) имеют вид

$$x = \xi - \frac{(1 + \xi^2)^{-1}}{-2\xi(1 + \xi^2)^{-2}} = \frac{1}{2\xi}(1 + 3\xi^2), \quad t = \frac{1}{2\xi}(1 + \xi^2)^2.$$

Из уравнения (10.4) находим  $\xi_{кр} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , откуда  $t_{кр} = \frac{8}{9}\sqrt{3} = 1,54$ ,  $x_{кр} = \sqrt{3} = 1,73$ . При

$0 \leq t \leq t_{кр}$

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} = \rho_0 \left[ 1 - \frac{2t\xi}{(1 + \xi^2)^2} \right]^{-1}; \quad (1)$$

чтобы получить  $\rho(x, t)$ , надо сюда подставить  $\xi = \xi(x, t)$ . Для при  $x = x_{кр}$  возникает точечное уплотнение, расщепляющееся затем на  $t = t_{кр}$  два, между которыми

образуется складка среды. Плотность среды получается в результате наложения плотностей трех ее слоев, причем при вычислении плотности среднего слоя в правой части (1) надо поставить знак абсолютной величины.

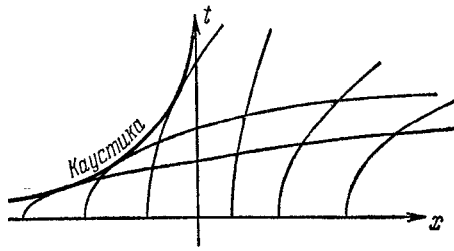


Рис. 54

- 2) Здесь  $x = \xi + \xi^2 t^2$ , т. е. характеристиками служат параболы (рис. 54). Уравнение каустики получается с помощью дифференцирования по параметру  $\xi$ :  $0 = 1 + 2\xi t^2$ , откуда  $\xi = -\frac{1}{2t^2}$ ,  $x = -\frac{1}{4t^2}$ . Таким образом, далекие частицы столь стремительно идут вперед, что при любом  $t > 0$  полуось  $-\frac{1}{4t^2} \leq x < \infty$  оказывается покрытой

двумя слоями частиц,  $\xi_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4t^2 x}}{2t^2}$ . Плотность

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left( \left| \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1}^{-1} + \left| \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_2}^{-1} \right) = \rho_0 \left( \left| 1 + 2t^2 \xi_1 \right|^{-1} + \left| 1 + 2t^2 \xi_2 \right|^{-1} \right) = \frac{2\rho_0}{\sqrt{1 + 4t^2 x}}.$$

В точке «заворота» среды, т. е. на каустике плотность обращается в бесконечность.

- 3) Перехлест возникает при  $x = 0$ ,  
 4) Для всех точек перегиба значение  $v$  одинаковое; но при  $t = t_{кр}$  оно равно  $v_{кр}$ , а потому и при  $t = t_0$  оно равно  $v_{кр}$ , т. е. определяется из равенств  $v = v(\xi)$ ,  $v''(\xi) = 0$ .

### §11

- 1)  $\mu = \rho_0(\xi_2 - \xi_1)$ ,  $u = \xi_i + \frac{t}{1 + \xi_i^2}$ , откуда  $\xi_i' = \frac{(1 + \xi_i^2)u' - 1}{1 + 3\xi_i^2 - 2u\xi_i}$  ( $i = 1, 2$ ). Из закона

сохранения количества движения  $[(\xi_2 - \xi_1)u'] = \frac{\xi_2'}{1 + \xi_2^2} - \frac{\xi_1'}{1 + \xi_1^2}$ , откуда

$(\xi_2 - \xi_1)u' = \arctg \xi_2 - \arctg \xi_1$  (постоянная интегрирования равна нулю). Подставляя сюда выражение для  $u$ , получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{(1 + \xi_i^2)^2}{(1 + \xi_i^2)^2 - 2t\xi_i} \left( \frac{\arctg \xi_2 - \arctg \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} - \frac{1}{1 + \xi_i^2} \right) \quad (i = 1, 2), \text{ которую надо решать при}$$

начальном условии  $\xi_1 \left( \frac{8}{9} \sqrt{3} \right) = \xi_2 \left( \frac{8}{9} \sqrt{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  (см. решение задачи 10.1).

- 2) В силу соображений симметрии сгусток возникает при  $x = 0$  в момент  $t = t_0 + 1/|v'(0)|$  и там остается. Функции  $\xi_{1,2}(t)$  определяются из уравнения  $\xi + v(\xi)(t - t_0) = 0$ .

### §12

- 1)  $\rho = \begin{cases} \rho_0 [1 - A(1 - \alpha)(t - t_0)] |x|^{-(1-\alpha)} & |x| \geq [A(1 - \alpha)(t - t_0)]^{1/(1-\alpha)}, \\ 0 & |x| \leq [A(1 - \alpha)(t - t_0)]^{1/(1-\alpha)}. \end{cases}$

- 2)  $\rho = \begin{cases} [m_0 - h(t - t_0)] \delta(x) + \begin{cases} hv_0^{-1} & (0 \leq x \leq v_0(t - t_0)), \\ 0 & (x \leq 0, x \geq v_0(t - t_0)), \end{cases} & \left( t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{m}{h} \right), \\ \begin{cases} hv_0^{-1} & (v_0(t - t_0 - m/h) \leq x \leq v_0(t - t_0)), \\ 0 & (x \leq v_0(t - t_0 - m/h), x \geq v_0(t - t_0)), \end{cases} & \left( t \geq t_0 + \frac{m}{h} \right). \end{cases}$

- 3) Для всех  $t \geq t_0$  справедливо первое выражение для  $\rho$  из предыдущего ответа.

### §13

- 1) Указанное условие квазистационарности для вещественного отрицательного  $p = -|p|$  имеет вид  $mp^2 \leq 0,1\lambda|p|$ , где  $mp^2 + \lambda p + k = 0$ . Приняв первое неравенство за равенство и исключая  $p$ , получим  $m = 0,09\lambda^2 k^{-1}$ . Значит, условие квазистационарности имеет вид  $m \leq 0,09\lambda^2 k^{-1}$  или, проще,  $m \leq 0,1\lambda^2 k^{-1}$  ( $= 0,1\lambda T$ , ср. условие (13.6)). Решение при заданных начальных условиях

$$x(t) = \frac{x_0}{2\mu} \left[ (\lambda + \mu) e^{\frac{\lambda - \mu}{2m} t} - (\lambda - \mu) e^{\frac{\lambda + \mu}{2m} t} \right],$$

где обозначено  $\mu = \sqrt{\lambda^2 - 4mk}$ . Отсюда при малых  $m$

$$x(t) \approx x_0 \left( e^{\frac{k}{\lambda} t} - \frac{mk}{\lambda^2} e^{\frac{\lambda}{m} t} \right).$$

Условие  $\lambda \dot{x}(\tau) = 0,9kx(\tau)$ , определяющее время релаксации, приобретает вид

$$1 - e^{\left(\frac{k}{\lambda} - \frac{\lambda}{m}\right)\tau} = 0,9, \text{ откуда } \tau = 2,3 \left( \frac{\lambda}{m} - \frac{k}{\lambda} \right)^{-1} \approx 2,3 \frac{m}{\lambda} = 2,3 \frac{mk}{\lambda^2} T. \text{ В силу условия}$$

квазистационарности коэффициент при  $T$ , во всяком случае, не превосходит 0,2, а при малом  $m$  он как угодно мал.

### §14

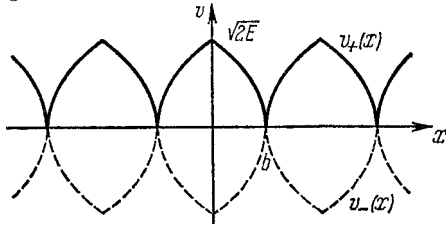


Рис. 55

$$1) a = 0, b = E/g, v_+(x) = \sqrt{2E - 2gx},$$

$$w_+(x) = -\frac{1}{g} \sqrt{2E - 2gx} \quad (0 \leq x \leq b),$$

$$\zeta_+(t) = b - \frac{1}{2} g t^2 \quad \left( -\frac{\sqrt{2E}}{g} \leq t \leq 0 \right); \text{ за пределами}$$

указанных интервалов функции продолжаются, как описано в §14, после чего можно применить формулы (14.5) и (14.6).

Интересной особенностью данного примера является то, что при  $x = a (=0)$  скорость частиц не обращается в нуль, а мгновенно сменяет значение  $\sqrt{2E}$  на  $-\sqrt{2E}$  (графики  $v_+(x)$  и  $v_-(x)$  после их продолжения на всю ось  $x$  показаны на рис. 55 соответственно сплошной и пунктирной линиями); поэтому и плотность среды при  $x = a$  остается конечной.

$$2) \rho_{\pm}(x) = \frac{M}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2E - kx^2}}.$$

### §15

- 1) Искомая разность потенциалов равна

$$\int_0^l 2\pi(|x_2 - x| - |x_1 - x|) \rho(x) dx = 2\pi j \sqrt{\frac{ml}{2e\varphi_A}} \int_0^l \frac{|x_2 - x| - |x_1 - x|}{\sqrt{x}} dx.$$

Представляя последний интеграл в виду суммы  $\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^l$ , получаем, что он равен

$$\left( \frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{l}x \right) \Big|_{x=x_1}^{x_2}. \text{ Функция, стоящая в скобках, для } 0 \leq x \leq h \text{ имеет минимальное}$$

значение  $-\frac{1}{6} l^{\frac{3}{2}}$  при  $x = l/4$  и максимальное значение  $\frac{2}{3} l^{\frac{3}{2}}$  при  $x = l$ . Значит, разность потенциалов будет максимальной при  $x_1 = l/4, x_2 = l$ , причем это максимальное

значение равно  $2\pi j \sqrt{\frac{ml}{2e\varphi_A}} \cdot \frac{5}{6} l^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3} \pi j h^2 \sqrt{\frac{m}{2e\varphi_A}}$ .

2) В общем случае решение получается в неявной форме

$$\pm \int_{y_0}^y (2e^y - 2e^{y_0} + y_0'^2)^{\frac{1}{2}} dy = x - x_0, \text{ где знак перед интегралом совпадает со знаком } y_0'.$$

Этот интеграл, вообще говоря, не выражается через элементарные функции, кроме специальных комбинаций начальных данных. В частности, при  $x_0 = 0, y_0 = 0, y_0' = \sqrt{2}$  он равен  $\sqrt{2}(1 - e^{-y/2})$ , откуда получаем требуемое частное решение  $y = -2 \ln(1 - x/\sqrt{2})$ .

### §17

1) Перепишем систему уравнений (17.6) в виде

$$dx/dq = a(x, t, \vartheta), dt/dq = b(x, t, \vartheta), d\vartheta/dq = g(x, t, \vartheta)$$

и обозначим через

$$x = \varphi_1(q; x_0, t_0, \vartheta_0), t = \varphi_2(q; x_0, t_0, \vartheta_0), \vartheta = \varphi_3(q; x_0, t_0, \vartheta_0), \quad (2)$$

решение этой системы при начальных условиях  $x(0) = x_0, t(0) = t_0, \vartheta(0) = \vartheta_0$ . Пусть начальное условие (линия  $\mathcal{L}$ ) на рис. 47) задано в параметрическом виде

$$x_0 = \alpha_1(p), t_0 = \alpha_2(p), \vartheta_0 = \alpha_3(p). \quad (3)$$

Тогда искомое решение получится, если из шести равенств (2), (3) исключить пять параметров  $q, x_0, t_0, \vartheta_0, p$ .

2) Система уравнений характеристик  $dx/dt = \vartheta, d\vartheta/dt = 0$  при начальных условиях  $x(t_0) = x_0, \vartheta(t_0) = \vartheta_0$  имеет решение  $x = \vartheta_0(t - t_0) + x_0, \vartheta = \vartheta_0$ . Начальное условие в формулировке упражнения запишем в виде  $t_0 = 0, \vartheta_0 = ax_0$ , после чего исключим  $t_0, x_0, \vartheta_0$ ; это даст искомое решение  $\vartheta = ax/(1 + at)$ . При  $a > 0$  решение определено для всех  $t \geq 0$ , тогда как при  $a < 0$  решение при  $t = 1/|a| - 0$  обращается в бесконечность. Если, далее, считать, что  $\vartheta$  играет роль  $\rho$  в уравнении (17.8) (не требуя положительности этой величины), то  $v = \frac{1}{2}\vartheta$ , откуда уравнение «движения частиц»

имеет вид  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{ax}{1 + at}$  и общее решение  $x = x_0 \sqrt{1 + at}$ . Аналог закона сохранения

числа частиц:  $\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \vartheta(t, x) dx = const$ ; проверка:  $\int_{x_1 \sqrt{1+at}}^{x_2 \sqrt{1+at}} \frac{ax}{1 + at} dx = \frac{a}{2} (x_2^2 - x_1^2)$  результат не

зависит от  $t$ .

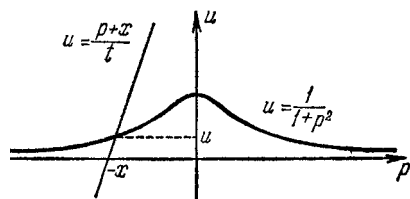


Рис. 56

3) Аналогично уравнению 2 получаем, что искомое решение  $\vartheta(x, t)$  можно найти как решение уравнения

$$\vartheta = \frac{1}{1 + (\vartheta t - x)^2}; \text{ обозначая } \vartheta t - x = p, \text{ получаем, что}$$

$$\vartheta = (p + x)/t, \text{ где } p \text{ удовлетворяет уравнению}$$

$$\frac{p + x}{t} = \frac{1}{1 + p^2}, \text{ геометрический смысл которого}$$

показан на рис. 56. Так как максимальное значение производной  $u$  функции

$$\vartheta = \frac{1}{1 + p^2} \text{ равно } \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ и достигается при } p = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ то решение строится однозначно}$$

и непрерывно при  $0 \leq t \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} = 1,54$ , после чего возникает переклест, начиная от

значения  $x = \sqrt{3}$ .

## Глава III Движения с заданными скоростями в пространстве

Задача о построении среды из частиц, движущихся с заданными скоростями на плоскости или в пространстве, аналогична соответствующей задаче на прямой, рассмотренной в гл. II. Поэтому здесь мы будем проводить рассмотрение более кратко, задерживаясь лишь на существенно новых моментах. Для определенности будем говорить о движении среды в пространстве, так как рассмотрение плоских движений проводится аналогично.

Отметим, что теория плоских движений окажется полезной в гл. IV для исследования одномерных движений с помощью вспомогательной фазовой плоскости.

### § 1 Введение

Будем считать, что в пространстве введена декартова система координат  $x, y, z$ , и обозначим радиус-вектор произвольной точки  $P(x, y, z)$  буквой  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные векторы, параллельные осям координат. Как и в §II.1, возможны две постановки задачи о построении среды из частиц, движущихся с заданными скоростями. В первой постановке скорость задается как функция лагранжевых координат

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}(t; \mathbf{r}_0),$$

$$\mathbf{r}_0 = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k} (= x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}) = \mathbf{r}|_{t=t_0}. \quad (1)$$

Здесь закон движения частицы имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{F}(t; \mathbf{r}_0) dt.$$

Во второй постановке скорость задается как функция эйлеровых координат

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

Здесь для построения закона движения частицы надо решить векторное дифференциальное уравнение (2) при начальном условии (1); проектируя это уравнение на оси координат, можно перейти к равносильной системе из трех скалярных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = f_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = f_z(x, y, z, t), \quad (3)$$

где<sup>24</sup>  $\mathbf{f} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$ , и к соответствующим начальным условиям

$$x|_{t=t_0} = x_0, \quad y|_{t=t_0} = y_0, \quad z|_{t=t_0} = z_0. \quad (4)$$

Система уравнений (3) интегрируется в явном виде практически только в случае, когда правые части линейны относительно  $x, y, z$  с коэффициентами, не зависящими от  $t$ .

Если к тому же свободные члены отсутствуют, то система (3) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ \frac{dy}{dt} &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ \frac{dz}{dt} &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Подобные системы рассмотрены в ЭПМ, §VIII.3. Частные решения системы (5) ищутся

<sup>24</sup> Не следует путать обозначения, которыми мы пользуемся в этой книге  $f_x$  – проекция вектора  $\mathbf{f}$  на ось  $x$  и  $f'_x$  – частная производная от скалярной функции  $f$  по  $x$ .



в виде

$$x = \lambda e^{pt}, \quad y = \mu e^{pt}, \quad z = \nu e^{pt}; \quad (6)$$

при этом оказывается, что  $p$  должно удовлетворять характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} a_1 - p & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - p & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - p \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Каждому корню  $p$  уравнения (7) отвечает решение вида (6) системы (5). Поэтому, если все корни уравнения (7) различны, то мы получаем три частных решения этой системы; общее решение получается из них в виде линейной комбинации с произвольными постоянными коэффициентами, которые можно определить с помощью начальных условий (4). (Если  $p$  – кратный корень уравнения (7), то в решении (6) коэффициенты  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  надо заменить на многочлены по  $t$ , степень которых на единицу меньше этой кратности, с неопределенными коэффициентами, которые находят, подставив формулы для решения в уравнения (5).)

Если в уравнениях системы (5) присутствуют еще свободные члены – известные функции  $t$ , то эту систему можно решить либо по методу вариации произвольных постоянных, либо с помощью построения функции влияния, как в §II.2. Здесь мы не будем на этом останавливаться.

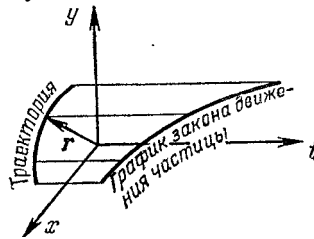


Рис. 57

В гл. II, при рассмотрении движения частиц по оси  $x$ , графиками законов этого движения служили линии  $x=x(t)$  в плоскости  $x, t$ . Аналогично, при движении частиц в плоскости  $x, y$  графиками законов этого движения служат линии, определяющиеся уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  (т.е.  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ) в трехмерном пространстве  $x, y, t$ . На рис. 57 изображен один из таких графиков; его проекция на плоскость  $x, y$  дает траекторию соответствующей частицы. Такие графики

заполняют все пространство  $x, y, t$ , так что через каждую точку этого пространства проходит ровно одна линия.

При рассмотрении пространственного движения частиц с непривычки возникает некоторая трудность с геометрической интерпретацией графиков законов движения частиц, так как здесь уже четыре переменных:  $x, y, z, t$ . Однако мы уже упоминали в ЭПМ, §IV.8, что можно рассматривать четырехмерное пространство (4-пространство)  $x, y, z, t$ , условившись считать, что каждый набор значений  $(x, y, z, t)$  определяет точку в этом пространстве. При таком подходе график  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  (т.е.  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ) будет представлять собой линию в 4-пространстве, проекция которой на 3-пространство  $x, y, z$  – это траектория частицы. Соответствующую картину нетрудно нарисовать в проекции на двумерную плоскость, для этого достаточно просто на рис. 57 изобразить еще одну ось, проходящую через точку  $O$ , обозначив эту ось буквой  $z$ . (Ведь и рис. 57 получается в результате проектирования трехмерного пространства на плоскость.) Через каждую точку 4-пространства проходит ровно одна линия, изображающая закон движения частицы.

Что касается вопроса о том, каким образом задается скорость движения частиц, то, как и в гл. II, проще всего представлять себе, что эта скорость определяется работой специально запрограммированных моторчиков, расположенных либо на самих частицах (если скорость задается в лагранжевых координатах), либо в неподвижном пространстве (если в эйлеровых). Тот же результат получится при рассмотрении квазистационарных движений (см. §11.13).

## Упражнения

- 1) Найдите решение системы уравнений  $dx/dt = x - y$ ,  $dy/dt = -4x + y$ , удовлетворяющее начальным условиям  $x|_{t=0} = 0$ ,  $y|_{t=0} = 4$ .

2) Применив функцию влияния, найдите решение системы уравнений  $dx/dt = y + \varphi(t)$ ,  $dy/dt = -x + \psi(t)$ , удовлетворяющее начальным условиям  $x|_{t=0} = y|_{t=0} = 0$ .

## § 2 Построение локального параметра среды

Это построение осуществляется совершенно аналогично одномерному случаю, в силу чего остановимся на нем совсем кратко. Будем для определенности говорить о температуре  $\vartheta = \vartheta(\mathbf{r}, t)$  среды в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  в момент  $t$ . Если температура малых порций среды в процессе ее эволюции не меняется, то уравнение процесса в лагранжевых координатах имеет вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad (1)$$

и при начальном условии

$$\vartheta|_{t=t_0} = \vartheta_0(\mathbf{r}_0) \quad (2)$$

имеет решение

$$\vartheta_0(\mathbf{r}_0, t) \equiv \vartheta_0(\mathbf{r}_0). \quad (3)$$

В эйлеровых координатах уравнение (1) имеет вид (см. формулы (I.4.2), (I.4.3) и (1.2))

$$f_x(x, y, z, t) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + f_y(x, y, z, t) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + f_z(x, y, z, t) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$$

или, в векторной записи,

$$(\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Чтобы переписать решение (3) в эйлеровых координатах, обозначим через

$$\mathbf{r} = \varphi(t; t_1, \mathbf{r}_1) \quad (5)$$

решение уравнения (1.2), удовлетворяющее начальному условию  $\mathbf{r}|_{t=t_1} = \mathbf{r}_1$ . Тогда лагранжевы координаты связаны с эйлеровыми по формулам

$$\mathbf{r} = \varphi(t; t_0, \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 = \varphi(t_0; t, \mathbf{r}) \quad (6)$$

и потому решение (3) в эйлеровых координатах приобретает вид

$$\vartheta(\mathbf{r}, t) = \vartheta_0(\varphi(t_0; t, \mathbf{r}))$$

(сравните с формулой (II.3.10)).

Если температура  $\vartheta$  малых порций среды не сохраняется, но эти порции между собой не взаимодействуют, то взамен (1) получается дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\vartheta}{dt} = h(t, \vartheta; \mathbf{r}_0), \quad (7)$$

которое надо решить при начальном условии (2), считая  $\mathbf{r}_0$  зафиксированным (параметром), чтобы получить закон изменения  $\vartheta(t)$  для частицы, отвечающей выбранному значению  $\mathbf{r}_0$ .

Если скорость изменения температуры задается в эйлеровых координатах, то взамен (4) получаем уравнение

$$(\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g(\mathbf{r}, t, \vartheta). \quad (8)$$

После перехода к лагранжевым координатам имеем уравнение

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g(\varphi(t; t_0, \mathbf{r}_0), t, \vartheta),$$

которое надо решить при начальном условии (2), после чего совершить обратную подстановку  $\mathbf{r}_0 = \varphi(t_0; t, \mathbf{r})$ .

Линии (5) в 4-мерном пространстве аргументов  $x, y, z, t$ , т. е. интегральные линии уравнения (1.2), называются *характеристиками* уравнений с частными производными 1-го порядка (4) и (8); другими словами, это линии, изображающие законы движения отдельных частиц. Как видим, вдоль характеристики почти линейное уравнение с

частными производными 1-го порядка превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, что и дает возможность произвести интегрирование. Если скорость частиц зависит от их температуры, то взамен (8) получаем *квазилинейное* уравнение

$$(\mathbf{f}(\mathbf{r}, t, \vartheta) \cdot \nabla) \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g(\mathbf{r}, t, \vartheta). \quad (9)$$

Характеристиками этого уравнения (сравните §II.17) служат линии в 5-мерном пространстве аргументов-функций, определяемые системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t, \vartheta), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = g(\mathbf{r}, t, \vartheta). \quad (10)$$

Каждая интегральная 4-поверхность  $\vartheta = \vartheta(\mathbf{r}, t)$  уравнения (9) целиком составлена из таких характеристик. Чтобы получить интегральную поверхность, удовлетворяющую начальному условию (2), нужно провести характеристику через каждую точку 3-мерной поверхности с уравнением (2) в 5-мерном пространстве.

### Упражнения

- 1) Пусть  $h(t, \vartheta, \mathbf{r}_0) = \alpha t + \beta \vartheta + \gamma x_0 + \delta z_0$ ,  $\vartheta(\mathbf{r}_0) = ax_0 + by_0$ ; найдите  $\vartheta(\mathbf{r}_0, t)$ .
- 2) Пусть  $g(\mathbf{r}, t, \vartheta) \equiv 0$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (x - z)\mathbf{i} + (-4x + z)\mathbf{k}$ ,  $\vartheta(\mathbf{r}_0) = x_0$ ,  $t_0 = 0$ . Найдите  $\vartheta(\mathbf{r}, t)$ .
- 3) Опишите аналитически процедуру решения уравнения (9) при начальном условии (2).

### § 3 Отыскание плотности 3-мерной среды

Б силу §I.8 уравнение неразрывности в пространстве имеет вид

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho_t = 0 \quad (1) = (1.8.4)$$

или, что то же,

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2)$$

Отсюда, разделяя переменные, при начальном условии

$$\rho|_{t=t_0} = \rho_0(\mathbf{r}_0) \quad (3)$$

получаем

$$\rho = \rho_0(\mathbf{r}_0) \exp \left[ - \int_{t_0}^t (\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{s}, \tau))_{\mathbf{s}=\varphi(\tau; t_0, \mathbf{r}_0)} d\tau \right], \quad (4)$$

где функция  $\varphi$  была определена в §2.

Этот результат можно записать в ином виде, заметив, что если масса порций среды не меняется, то увеличение плотности должно быть обратно пропорциональным локальному увеличению объема. Однако последнее в силу §I.4 (см., в частности, упражнение (1.4.1)) равно якобиану

$$\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial x_0 & \partial y / \partial x_0 & \partial z / \partial x_0 \\ \partial x / \partial y_0 & \partial y / \partial y_0 & \partial z / \partial y_0 \\ \partial x / \partial z_0 & \partial y / \partial z_0 & \partial z / \partial z_0 \end{vmatrix},$$

который мы для краткости будем обозначать через  $D\mathbf{r}/D\mathbf{r}_0$ . Таким образом,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}_0) \left( \frac{D\mathbf{r}}{D\mathbf{r}_0} \right)^{-1} = \rho_0(\mathbf{r}_0) \frac{D\mathbf{r}_0}{D\mathbf{r}}. \quad (5)$$

Конечно, здесь якобиан зависит не только от  $\mathbf{r}_0$ , но и от  $t$ . Чтобы выразить ответ через

эйлеровы координаты, надо еще подставить  $\mathbf{r}_0 = \varphi(t_0; t, \mathbf{r})$ ,  $\frac{D\mathbf{r}_0}{D\mathbf{r}} = \frac{D\varphi(t_0; t, \mathbf{r})}{D\mathbf{r}}$ .

Сравнивая равенства (4) с (5), мы приходим к формуле

$$\frac{D\mathbf{r}}{D\mathbf{r}_0} = \exp \int_{t_0}^t (\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{s}, \tau))_{\mathbf{s}=\varphi(\tau; t_0, \mathbf{r}_0)} d\tau, \quad (6)$$

связывающей якобиан деформации среды (т. е. коэффициент искажения объемов) с дивергенцией скорости. После логарифмирования и дифференцирования ту же формулу можно переписать так:

$$\frac{d}{dt} \frac{D\mathbf{r}}{D\mathbf{r}_0} = \frac{D\mathbf{r}}{D\mathbf{r}_0} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Из формулы (6) вытекает, в частности, что если поле скоростей  $\mathbf{v}$  задается как однозначная функция эйлеровых координат, то

$$\frac{D\mathbf{r}}{D\mathbf{r}_0} > 0.^{25}$$

Приведем непосредственный вывод формулы (6), причем для простоты выкладок будем рассматривать плоские движения. Для этого нам понадобится следующая *формула Абеля–Лиувилля – Остроградского*, связывающая любые два решения  $(u_1(t), v_1(t))$  и  $(u_2(t), v_2(t))$  линейной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$u' = a(t)u + b(t)v, \quad v' = c(t)u + g(t)v: \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = C e^{\int [a(t)+g(t)] dt}. \quad (8)$$

Определитель, стоящий в левой части, составленный из решений системы (7), называется *определителем Вронского* или *вронскианом*.

Для доказательства этой формулы обозначим левую часть буквой  $D$  и продифференцируем ее по  $t$ :

$$\dot{D} = \frac{d}{dt} (u_1 v_2 - u_2 v_1) = \dot{u}_1 v_2 + u_1 \dot{v}_2 - \dot{u}_2 v_1 - u_2 \dot{v}_1 = (a u_1 + b v_1) v_2 + \dots$$

Приведение подобных членов, которое мы предоставляем читателю, приводит к

равенству  $\dot{D} = (a + g)(u_1 v_2 - u_2 v_1) = (a + g)D$ , откуда  $\frac{\dot{D}}{D} = a + g$ . Интегрируя, приходим к

формуле (8). Аналогичная формула справедлива для линейных систем дифференциальных уравнений 1-го порядка с любым числом искомых функций.

Решение  $(x(t), y(t))$  системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_x(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = f_y(x, y, t) \quad (9)$$

(см. (2)) при начальных условиях  $x|_{t=t_0} = x_0, y|_{t=t_0} = y_0$ , зависит от  $x_0, y_0$  как от параметров. Продифференцировав оба уравнения (9) по параметру  $x_0$ , получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \right) = \frac{\partial f_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial x_0} \right) = \frac{\partial f_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_0}.$$

Аналогично находим, что производные  $\partial x/\partial y_0, \partial y/\partial y_0$  удовлетворяют в точности той же системе уравнений. Поэтому в силу формулы (8)

$$\frac{D(x, y)}{D(x_0, y_0)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial x_0 & \partial x/\partial y_0 \\ \partial y/\partial x_0 & \partial y/\partial y_0 \end{vmatrix} = C \exp \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) d\tau = C \exp \int_{t_0}^t \operatorname{div} f d\tau.$$

Так как левая часть при  $t = t_0$  равна 1, то  $C = 1$ , и мы приходим к формуле (6).

Вернемся к трехмерным движениям. Если скорость  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)$  среды была задана в лагранжевых координатах, то

<sup>25</sup> В §6 будем говорить о явлении перехлеста, при котором поле  $\mathbf{v}$  становится в эйлеровых координатах неоднозначным, а якобиан  $D\mathbf{r}/D\mathbf{r}_0$  меняет знак.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, \tau) d\tau. \quad (10)$$

Будем писать  $x_1, x_2, x_3$  вместо  $x, y, z$  и  $v_1, v_2, v_3$  вместо  $v_x, v_y, v_z$ . Тогда из (10) получаем

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{j_0}} = \frac{\partial x_{i_0}}{\partial x_{j_0}} + \int_{t_0}^t \frac{\partial v_i}{\partial x_{j_0}} d\tau = \delta_{ij} + \int_{t_0}^t \frac{\partial v_i}{\partial x_{j_0}} d\tau,$$

где смысл символа  $\delta_{ij}$  объяснен в §I.6. Отсюда

$$\frac{D\mathbf{r}}{D\mathbf{r}_0} = \begin{vmatrix} 1 + \int \partial v_1 / \partial x_{1_0} d\tau & \int \partial v_2 / \partial x_{1_0} d\tau & \int \partial v_3 / \partial x_{1_0} d\tau \\ \int \partial v_1 / \partial x_{2_0} d\tau & 1 + \int \partial v_2 / \partial x_{2_0} d\tau & \int \partial v_3 / \partial x_{2_0} d\tau \\ \int \partial v_1 / \partial x_{3_0} d\tau & \int \partial v_2 / \partial x_{3_0} d\tau & 1 + \int \partial v_3 / \partial x_{3_0} d\tau \end{vmatrix}$$

(все интегралы берутся от  $t_0$  до  $t$ ).

Важный частный случай образует случай малых деформаций, когда частицы движутся по закону

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_0, t), \quad (11)$$

где  $\boldsymbol{\psi}$  мало. Тогда элементы якобиана имеют вид  $\delta_{ij} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j_0}}$ . Выписывая значение

определителя через его элементы и раскрывая все скобки, получаем (проверьте!), что с точностью до членов второго порядка малости

$$\frac{D\mathbf{r}}{D\mathbf{r}_0} = 1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{1_0}} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_{2_0}} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_{3_0}} = 1 + \text{div}_0 \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_0, t), \quad (12)$$

где  $\text{div}_0$  означает, что дивергенция берется по переменным Лагранжа. Если представить<sup>26</sup>

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j_0}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j_0}} - \frac{\partial \psi_j}{\partial x_{i_0}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j_0}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_{i_0}} \right), \quad (13)$$

то можно проверить (ЭПМ, §XI.5), что первое слагаемое в правой части определяет вращение элемента среды вокруг некоторой оси, тогда как второе слагаемое определяет равномерное растяжение (или сжатие) этого элемента по трем взаимно перпендикулярным направлениям, со своим коэффициентом растяжения по каждому из этих направлений.

Покажем, как найти эти направления. Из равенства (11) получается соотношение, связывающее малые приращения координат до и после деформации

$$dx_i = dx_{i_0} + \sum_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x_{j_0}} dx_{j_0} \quad \left( \sum_j = \sum_{j=1}^3; \quad i = 1, 2, 3 \right);$$

если же вместо  $d\psi_j/dx_{j_0}$  взять второе слагаемое в правой части (13), то получим соотношение

$$dx_i = dx_{i_0} + \frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j_0}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_{i_0}} \right) dx_{j_0}. \quad (14)$$

Искомые направления после деформации не изменяются, т. е. для них

$dx_1:dx_2:dx_3 = dx_{1_0}:dx_{2_0}:dx_{3_0}$ . Обозначив  $dx_i/dx_{i_0} = 1 + \lambda$ , где  $\lambda$  пока неизвестно ( $1 + \lambda$  и есть

<sup>26</sup> Говоря на тензорном языке, мы представляем тензор с компонентами  $\partial \psi_i / \partial x_{j_0}$  в виде суммы антисимметрического и симметрического слагаемых. Эти слагаемые определяются исходным тензором однозначно. Отметим еще, что сумма  $\partial \psi_1 / \partial x_{1_0} + \partial \psi_2 / \partial x_{2_0} + \partial \psi_3 / \partial x_{3_0}$ , называемая следом тензора  $\partial \psi_i / \partial x_{j_0}$ , как видно из формулы (12), равна главной части коэффициента приращения объема. Для общего тензора с компонентами  $a_{ij}$  следом называется сумма  $\sum_i a_{ii}$ ; нетрудно проверить, что она инвариантна

относительно поворота осей координат.

коэффициент растяжения, отвечающий выбранному направлению), получаем в силу (14)

$$\lambda dx_{i0} + \frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j0}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_{i0}} \right) dx_{j0} = 0 \quad (i=1,2,3). \quad (15)$$

Таким образом, для отыскания возможных значений  $dx_{10}$ ,  $dx_{20}$ ,  $dx_{30}$  получилась система из трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными. Как известно (см., например, ЭПМ, §VIII.3) для существования ненулевого решения у такой системы ее определитель должен равняться нулю:

$$\det \left[ \lambda \delta_{ij} + \frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j0}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_{i0}} \right) dx_{j0} \right] = 0. \quad (16)$$

Это уравнение третьей степени относительно  $\lambda$ , из которого и можно найти коэффициенты растяжения в рассматриваемой точке. Найдя  $\lambda$  из уравнения (16), можно найти соответствующие значения  $dx_1:dx_2:dx_3$ , определяющие искомое направление, из системы (15).

Интересно отметить (этот факт мы приводим здесь без доказательства), что любое линейное отображение

$$dx_i = \sum_j \alpha_{ij} dx_j \quad (i=1,2,3), \quad (17)$$

относительно коэффициентов которого никакой малости не предполагается, сводится к комбинации растяжений по трем взаимно перпендикулярным направлениям и поворота. (При этом если коэффициент растяжения  $k$  по абсолютной величине меньше единицы, то «растяжение» на самом деле означает сжатие, а если  $k < 0$ , то к растяжению добавляется зеркальное отражение.) Произведение коэффициентов растяжения равно коэффициенту увеличения объема при отображении, т. е., в силу §1.4 (см. упражнение 1.4.8), определителю  $\det \alpha_{ij}$ .

При отображении (17) малый шар переходит, вообще говоря, в трехосный эллипсоид; если два из коэффициентов растяжения совпадают, – то в эллипсоид вращения, а если все три совпадают, – то в шар. Если  $\det \alpha_{ij} = 0$ , то один (или два, или даже все три) из коэффициентов растяжения обращаются в нуль, т. е. вся прямая по соответствующему направлению преобразуется в точку, а малый шар переходит в эллипс – «лепешку» (соответственно в отрезок, в точку). В этом случае отображение (17) – вырожденное, а если оно получилось в результате линеаризации некоторого нелинейного отображения, то, чтобы выяснить характер этого последнего в рассматриваемой точке, надо привлечь члены высшего порядка малости.

Описанный анализ произвольного линейного отображения оказывается существенным в гидродинамике, теории упругости, а также в астрофизике.

Эволюция Вселенной, описанная в §II.16, – «хэббловское расширение» – представляет собой частный случай деформации, при котором шар остается шаром с радиусом, меняющимся с течением времени; поворотов (вращения) здесь не происходит. При этом плотность является функцией времени, но не зависит от координат. Однако при учете возмущений плотности на общее расширение накладываются местные более или менее беспорядочные движения. Можно предполагать, что первоначально вещество было распределено почти равномерно, т. е.  $\rho - \bar{\rho} \ll \bar{\rho}$ , но затем беспорядочные движения (усиленные вследствие тяготения) привели к тому, что из общей массы газа выделились отдельные огромные облака более плотного газа – протоскопления, в переводе на русский язык – предтечи, предки скоплений галактик и звезд. Их размер достигал миллиона парсек =  $3 \cdot 10^{24}$  см, масса до  $10^{14} M_{\odot}$ , где  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$  г есть масса Солнца. Современная теория образования галактик будет подробно изложена, причем с применением математических фактов, приведенных в этом параграфе, в книге Я.Б.Зельдовича и И. Д. Новикова «Космология», упомянутой в §II.16.

## Упражнения

- 1) Напишите закон эволюции плотностей для однородного поля скоростей  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  и общего начального условия (3).
- 2) Пусть  $\rho_0(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{1 + |\mathbf{r}_0|^6}$ ,  $\mathbf{v} = -\mathbf{r}$ . Найдите  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{r}, t)$ .

## § 4 Стационарное поле скоростей

Пусть задано стационарное поле скоростей  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ . Тогда каждая характеристика допускает произвольный сдвиг во времени, т. е. если  $\mathbf{r} = \varphi(t)$  – характеристика, то и  $\mathbf{r} = \varphi(t - \text{const})$  тоже. Поэтому решение (2.6) уравнения характеристик зависит не от  $t$  и  $t_1$  порознь, как в общем случае, а от промежутка времени между  $t_1$  и  $t$ , т. е. можно написать это решение в виде

$$\mathbf{r} = \varphi(t - t_1; \mathbf{r}_1).$$

Соответственно решения (3.5) и (3.4) принимают вид

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\varphi(t_0 - t; \mathbf{r})) \frac{D\varphi(t_0 - t; \mathbf{r})}{D\mathbf{r}} = \rho_0(\varphi(t_0 - t; \mathbf{r})) \exp \left[ - \int_{t_0}^t \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=\varphi(\tau-t; \mathbf{r})} d\tau \right].$$

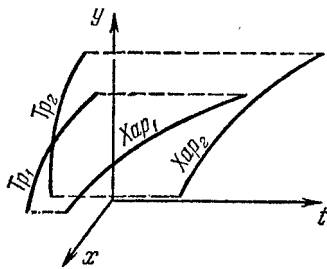


Рис. 58

Характерной чертой стационарного поля скоростей является то, что через каждую точку 3-мерного пространства  $x, y, z$  проходит ровно одна траектория частицы. В нестационарном случае характеристики в 4-мерном пространстве не пересекались, но их проекции в 3-мерное пространство  $x, y, z$  могли пересекаться, так как из одного и того же положения могли исходить различные траектории, начинающиеся там в разные моменты времени (см. рис. 58, где для наглядности изображены плоские движения). В стационарном же случае, если проекции двух характеристик в пространство  $x, y, z$  имеют хотя бы одну общую точку, то эти характеристики получаются друг из друга сдвигом во времени (почему?), а значит, их проекции полностью совпадают (рис. 59).

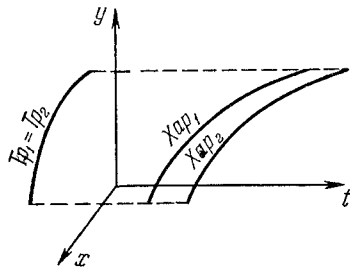


Рис. 59

Траектории частиц для стационарного поля скоростей можно строить непосредственно в 3-мерном пространстве  $x, y, z$ , без привлечения времени  $t$ . Для этого надо все уравнения (1.3) разрешить относительно  $dt$  и приравнять результаты, что даст

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z)} (= dt). \quad (1)$$

Интегральными кривыми этой системы дифференциальных уравнений и служат траектории частиц. (Существенно проще такое построение для случая плоских движений: тогда взамен системы (1) получается одно уравнение

$$\frac{dx}{v_x(x, y)} = \frac{dy}{v_y(x, y)}, \text{ т.е. } \frac{dy}{dx} = \frac{v_y(x, y)}{v_x(x, y)}. \quad (2)$$

Изобразив соответствующее поле направлений в плоскости  $x, y$ , можно приближенно построить траектории, как в ЭПМ, §VII.1, а в ряде важных случаев уравнение (2) можно проинтегрировать точно.)

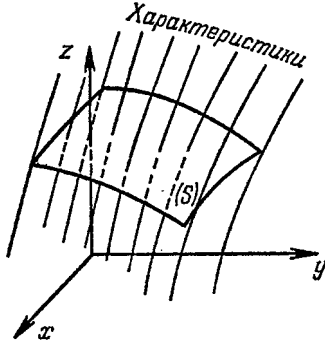
Рассмотрим теперь вопрос о построении произвольного локального параметра  $\vartheta$  среды (§2) для случая, когда не только поле скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ , но и поле этого параметра стационарны, т. е.  $\vartheta(\mathbf{r}) = \vartheta(\mathbf{r})$ .

Здесь заданное дифференциальное уравнение (2.8) для параметра приобретает вид

$$(\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \nabla) \vartheta = g(\mathbf{r}, \vartheta)$$

или, подробнее,

$$v_x(x, y, z) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y(x, y, z) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v_z(x, y, z) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = g(x, y, z, \vartheta). \quad (3)$$



В этом уравнении времени совсем не осталось, и потому его *характеристиками* принято называть интегральные кривые системы уравнений (1), т. е. траектории частиц в 3-мерном пространстве  $x, y, z$ . Уравнение (3) в переменных Лагранжа имеет вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g(\varphi(t - t_0; \mathbf{r}_0), \vartheta), \quad (4)$$

и потому знание значения  $\vartheta$  в какой-либо одной точке характеристики (траектории) определяет значения  $\vartheta$  во всех точках этой характеристики. Таким образом, чтобы функция  $\vartheta(\mathbf{r})$  оказалась однозначно определенной в некоторой области

Рис. 60

пространства  $x, y, z$ , эта функция должна быть задана на некоторой поверхности (S) (рис. 60): если провести через все точки (S) характеристики, то они заполнят *область определенности* (она же область влияния, см. §II.6), т. е. область, в которой решение задачи будет однозначно определенным. При этом, подобно §II.6, поверхность (S) должна быть такой, чтобы ни одна характеристика не только не лежала на ней, но даже не пересекала ее более одного раза.

Опишем, как построить решение аналитически. Для этого допустим, что поверхность (5) задана в параметрической форме

$$x = \chi_1(p, q), \quad y = \chi_2(p, q), \quad z = \chi_3(p, q) \quad (5)$$

(в частности, если уравнение поверхности имеет вид  $z = \chi(x, y)$ , то можно положить  $x = p, y = q, z = \chi(p, q)$ ). Тогда и значения  $\vartheta$ , заданные на (5), будут функцией параметров  $p$  и  $q$ :

$$\vartheta_{(S)} = \vartheta_0(p, q).$$

Обозначим через  $\psi(t; \mathbf{r}_0, \vartheta_0)$  решение уравнения (4) при  $t_0 = 0$  и начальном условии  $\vartheta|_{t=0} = \vartheta_0$ . Тогда значения вдоль  $\vartheta$  характеристики

$$x = \varphi_x(t; \chi_1(p, q), \chi_2(p, q), \chi_3(p, q)) \quad y = \varphi_y(\dots), \quad z = \varphi_z(\dots), \quad (6)$$

проходящей при  $t = 0$  через точку (5), меняется по закону

$$\vartheta = \psi(t; \chi_1(p, q), \chi_2(p, q), \chi_3(p, q), \vartheta_0(p, q)). \quad (7)$$

Теперь достаточно из четырех уравнений (6) и (7) исключить три переменные  $p, q, t$ , чтобы получить искомую зависимость  $\vartheta(x, y, z)$ .

Если такое исключение не удастся, то равенства (6) и (7) совместно можно рассматривать как параметрическую форму этого решения (параметрическое задание 3-мерного графика этого решения в 4-мерном пространстве  $x, y, z, \vartheta$ ).

Более прост случай  $g \equiv 0$ , когда уравнение (3) имеет вид

$$v_x(x, y, z) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y(x, y, z) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v_z(x, y, z) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0.$$

В этом случае выражение (7) приобретает вид  $\vartheta = \vartheta_0(p, q)$ , т. е. решение постоянно вдоль каждой характеристики. Однако и здесь проинтегрировать дифференциальные уравнения характеристик (1), как правило, в явном виде непросто, и приходится прибегать к численному интегрированию.

Нет смысла подробно останавливаться на математическом обобщении рассмотренной задачи, так как (3) – это общий вид почти линейного уравнения (этот термин был уже применен в §II.5) с тремя независимыми переменными. Отметим только, что тот же метод решения можно применить для *почти линейного* уравнения



$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_n} = g(x_1, \dots, x_n, \vartheta) \quad (8)$$

с любым числом независимых переменных, какой бы смысл они ни имели.

Коэффициенты  $a_i$  можно истолковать как координатные проекции поля скоростей некоторой абстрактной среды в  $n$ -мерном пространстве  $x_1, \dots, x_n$ ; при этом система дифференциальных уравнений *характеристик*, т. е. траекторий малых порций среды будет иметь вид

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n)} = dt.$$

Вдоль каждой характеристики  $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$  уравнение (8) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \vartheta),$$

так что, если известно значение  $\vartheta$  в какой-либо одной точке характеристики, это значение однозначно определяется во всех точках этой характеристики. Поэтому, чтобы получить решение  $\vartheta(x_1, \dots, x_n)$  в некоторой  $n$ -мерной области, оно должно быть задано на некотором  $(n - 1)$ -мерном многообразии; тогда фактическое построение решения будет совершенно аналогичным тому, как это описано выше при  $n = 3$ .

Для общего квазилинейного уравнения

$$a_1(x_1, \dots, x_n, \vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, \vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_n} = g(x_1, \dots, x_n, \vartheta)$$

характеристики определяются как линии в  $(n + 1)$ -мерном пространстве  $x_1, \dots, x_n, \vartheta$ , удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n, \vartheta)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n, \vartheta)} = \frac{d\vartheta}{g(x_1, \dots, x_n, \vartheta)} = dt.$$

Подобно §II.17, каждая интегральная поверхность  $\vartheta = \vartheta(x_1, \dots, x_n)$  целиком составлена из характеристик, так что, если в качестве начального условия задана  $(n - 1)$ -мерная поверхность  $(S)$ , через которую должна пройти интегральная поверхность, то для построения последней достаточно провести через каждую точку  $(S)$  характеристику. Вернемся к задаче о построении поля плотностей при заданном поле скоростей в 3-мерном пространстве, причем предположим, что оба поля стационарны. Тогда уравнение неразрывности (3.1) примет вид

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (9)$$

т. е. поток массы не имеет источников векторных линий, что естественно, если масса каждой порции среды остается неизменной. Уравнение (9) можно, как и в §3, переписать в виде (3.2), откуда получаем, что знание плотности среды в какой-либо одной точке однозначно определяет эту плотность во всех точках траектории частиц, проходящих через эту точку.

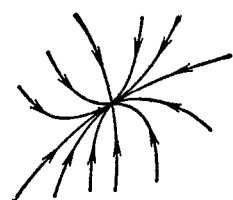


Рис. 61

Исследование асимптотического при  $t \rightarrow \infty$  поведения нестационарной плотности значительно сложнее, чем в одномерном случае (ср. §II.8), как из-за значительно большего разнообразия типов стационарного распределения плотности, так и из-за того, что нестационарная плотность среды в пространстве при  $t \rightarrow \infty$  далеко не всегда имеет тенденцию к установлению. Например, если среда с неосесимметричной плотностью вращается как абсолютно твердое тело,

то, конечно, никакого установления не будет. Возможны и более сложные типы движений без установления, о которых мы здесь не будем говорить.

Важную роль при исследовании асимптотического поведения плотности среды играют асимптотически устойчивые (притягивающие) точки покоя и притягивающие многообразия; для плоских движений наиболее распространенные виды таких точек и

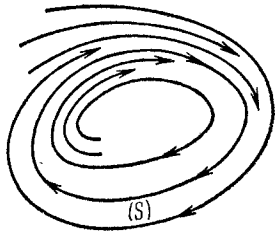


Рис. 62

многообразий (*устойчивый предельный цикл (S)*) показаны соответственно на рис. 61 и 62. Вблизи таких точек и многообразий при  $t \rightarrow \infty$  масса концентрируется все плотнее и плотнее, так что в пределе получается дельтаобразное распределение массы (в точке или на многообразии), тогда как вся масса в «зоне притяжения» вне указанных точки или многообразия в пределе «высасывается» до нуля. (Подчеркнем, что на рис. 61 траектории достигают точки покоя только в пределе, при  $t \rightarrow \infty$ , так что, строго говоря, точка покоя не принадлежит этим траекториям, она как бы составляет самостоятельную траекторию. В противном случае две различные траектории имели бы общую точку, чего, как мы говорили, не должно быть.) Аналогичным образом «выталкивается» в пределе до нуля вся масса из окрестности отталкивающих точек покоя и многообразий.

### Упражнения

- 1) Найдите решение уравнения  $x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0$  в полупространстве  $z > 0$ , удовлетворяющее условию  $\vartheta|_{z=x^2+y^2} = x - y$ .
- 2) Укажите какое-либо стационарное распределение плотностей плоского потока для поля скоростей  $\mathbf{v} = x^3 \mathbf{i} - y \mathbf{j}$ ; изобразите соответствующее семейство траекторий.

### § 5 Дивергентная форма уравнений

Рассмотрение дивергентной формы уравнения эволюции локального параметра  $\vartheta$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\vartheta) + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(v_x(x, y, z, t)\vartheta) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y\vartheta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z\vartheta) + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

проводится совершенно аналогично тому, как в одномерном случае (§II.9). Во-первых, нетрудно проверить, что интеграл

$$\Theta = \int \vartheta(\mathbf{r}, t) |d\mathbf{r}| \quad (|d\mathbf{r}| = dx dy dz),$$

распространенный по всему пространству, инвариантен, т. е. не зависит от  $t$ . В самом деле, в силу уравнения (1),

$$\frac{d\Theta}{dt} = \int \frac{\partial \vartheta}{\partial t} |d\mathbf{r}| = - \int \operatorname{div}(\mathbf{v}\vartheta) |d\mathbf{r}| = 0.$$

(При этом для осуществления последнего перехода надо применить формулу Остроградского к сфере весьма большого радиуса; равенство интеграла по поверхности нулю, вытекающее из достаточно быстрого обращения  $\vartheta$  в нуль при  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ , означает отсутствие источника величины  $\Theta$  на бесконечности.)

Более общее утверждение состоит в независимости от  $t$  интеграла

$$\Theta_{(\Omega_t)} = \int_{(\Omega_t)} \vartheta(\mathbf{r}, t) |d\mathbf{r}|, \quad (2)$$

где  $(\Omega_t)$  – это «жидкая» область, деформирующаяся при изменении  $t$  в соответствии с эволюцией частиц, т. е. согласно уравнению  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ . Можно представить себе, что некоторая порция жидкости зачернена и переносится потоком без диффузии, тогда  $(\Omega_t)$  – это часть пространства, занятая зачерненной жидкостью в момент  $t$ .

Докажем это более общее утверждение. (Отметим, что при изменении  $t$  область интегрирования  $(\Omega_t)$  меняется; поэтому при дифференцировании интеграла (2) по  $t$  нельзя ограничиться дифференцированием по  $t$  подынтегральной функции.)

Допустим, что после момента  $t$  прошло время  $dt$ ; тогда к области  $(\Omega_t)$  добавилась тонкая пленка, ограниченная поверхностью  $(\Gamma_t)$  этой области и поверхностью, проходящей «почти параллельно»  $(\Gamma_t)$ . При этом ширина пленки равна  $v_n dt$ , где  $\mathbf{n}$  –

внешняя нормаль к  $(\Gamma_t)$  (почему?). Отсюда

$$d\Theta_{(\Omega)} = \left[ \int_{(\Omega_t)} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} |d\mathbf{r}| + \int_{(\Gamma_t)} (\vartheta \mathbf{v})_n |d\mathbf{r}| \right] dt.$$

Преобразуя последний интеграл по формуле Остроградского и пользуясь уравнением (1), получаем

$$d\Theta_{(\Omega)} = \left[ \int_{(\Omega_t)} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} |d\mathbf{r}| + \int_{(\Omega_t)} \operatorname{div}(\vartheta \mathbf{v}) |d\mathbf{r}| \right] dt = 0,$$

т. е.  $\Theta_{(\Omega)} = \text{const}$ , что и требовалось доказать.

Если поле скоростей  $\mathbf{v}$  и параметр  $\vartheta$  стационарны, то уравнение (1) принимает вид

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{r})\vartheta) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(v_x(x, y, z)\vartheta) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y(x, y, z)\vartheta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z(x, y, z)\vartheta) = 0.$$

Утверждение о независимости интеграла

$$\int_{(\Omega_t)} \vartheta(\mathbf{r}) |d\mathbf{r}| \quad (3)$$

сохраняет силу.

Полученный результат очевиден физически, так как уравнение неразрывности, с которым мы здесь имеем дело, как раз и выражает закон сохранения масс. Однако приведенное формальное доказательство не только еще раз показывает, что здесь все в порядке, но и доказывает, что утверждение об инвариантности интегралов (2) или (3) остается справедливым для любого числа независимых переменных. В самом деле, это доказательство опиралось только на формулу Остроградского, которая, как нетрудно проверить, справедлива в пространстве любого числа измерений.

## Упражнение

- 1) Найдите решение уравнения  $\frac{\partial(x\vartheta)}{\partial x} + \frac{\partial(y\vartheta)}{\partial y} + \frac{\partial(z\vartheta)}{\partial z} = 0$ , равное  $y + z$  для  $x = 1$ .

Проверьте инвариантность интеграла (3) для «жидкой» области, которая при  $t = 0$  представляет собой куб с вершинами  $(2\pm 1; \pm 1; 1\pm 1)$  (комбинации знаков произвольные).

## § 6 Перехлесты

Как и в одномерном случае (§II.10), если скорости частиц задаются в лагранжевых координатах, для плоских и пространственных движений возможен «перехлест», при котором в одну и ту же точку придут частицы из различных начальных положений, так что плоскость или пространство окажутся как бы покрытыми несколькими слоями среды. Мы разберем для простоты плоские движения в случае, когда все частицы движутся по инерции, с постоянной скоростью, а о других видах движений коротко скажем позже.

Обозначим лагранжевы координаты частицы через  $\xi, \eta$ :

$$x|_{t=t_0} = \xi, \quad y|_{t=t_0} = \eta,$$

а ее (постоянную) скорость через

$$\mathbf{v}(\xi, \eta) = v_x(\xi, \eta)\mathbf{i} + v_y(\xi, \eta)\mathbf{j}.$$

Тогда уравнения движения частицы примут вид

$$x = \xi + v_x(\xi, \eta)(t - t_0), \quad y = \eta + v_y(\xi, \eta)(t - t_0). \quad (1)$$

В любой фиксированный момент времени  $t > t_0$  малая окрестность точки  $(\xi, \eta)$  преобразуется по формулам

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \Delta \eta = \left[ 1 + \frac{\partial v_x}{\partial \xi} (t - t_0) \right] \Delta \xi + \frac{\partial v_x}{\partial \eta} (t - t_0) \Delta \eta, \\ \Delta y = \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \Delta \eta = \frac{\partial v_y}{\partial \xi} (t - t_0) \Delta \xi + \left[ 1 + \frac{\partial v_y}{\partial \eta} (t - t_0) \right] \Delta \eta, \end{cases} \quad (2)$$

где буквой  $\Delta$  обозначены приращения координат и отброшены члены высшего порядка малости. Мы уже говорили в §1.4, что определитель из получающихся коэффициентов

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial v_x}{\partial \xi} (t - t_0) & \frac{\partial v_x}{\partial \eta} (t - t_0) \\ \frac{\partial v_y}{\partial \xi} (t - t_0) & 1 + \frac{\partial v_y}{\partial \eta} (t - t_0) \end{vmatrix} \quad (3)$$

называется якобианом рассматриваемого отображения. Если он отличен от нуля, то отображение (2) является невырожденным, т. е. обратимым: задаваясь значениями  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , мы получаем вполне определенные значения  $\Delta \xi$ ,  $\Delta \eta$ ; в этом случае линейное отображение (2) называется *аффинным* (ср. ЭПМ, §IX.5).

В соответствии с §3, если якобиан в некоторой точке обращается в нуль, то отображение (2) – вырожденное, а чтобы выяснить характер отображения (1), надо привлечь члены высшего порядка малости. Отметим, что приравнение нулю якобиана можно рассматривать как уравнение, связывающее переменные  $\xi$  и  $\eta$ ; поэтому, если якобиан равен нулю в некоторой точке плоскости  $\xi$ ,  $\eta$ , то он обычно обращается в нуль вдоль целой линии, проходящей через эту точку.

Впрочем, якобиан  $J$  может равняться нулю и в изолированной точке. Так обычно бывает в момент начала перехлеста в точке зарождения складки; после этого момента в плоскости  $\xi$ ,  $\eta$  начинает развиваться область, внутри которой  $J < 0$ , а на границе  $J = 0$ .

Рассмотрим в качестве примера поле скоростей

$$\mathbf{v} = \frac{1}{1 + \xi^2 + \eta^2} \mathbf{i},$$

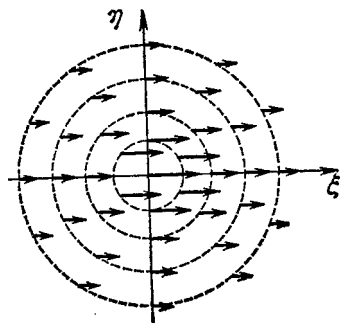


Рис. 63

показанное на рис. 63. Отсюда, приняв  $t_0 = 0$ , получим уравнения движения частиц

$$x = \xi + \frac{1}{1 + \xi^2 + \eta^2} t, \quad y = \eta, \quad (4)$$

и потому якобиан отображения  $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$  равен

$$J = \begin{vmatrix} 1 - 2\xi t (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-2} & -2\eta t (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{2\xi t}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2}.$$

Приравнение якобиана нулю приводит к уравнению

$$(1 + \xi^2 + \eta^2)^2 - 2\xi t = 0, \quad (5)$$

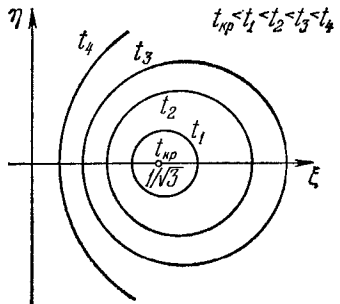


Рис. 64

определяющему при заданном  $t$  область перехлеста в плоскости  $\xi$ ,  $\eta$ . Таким образом, в данном примере каждая частица, для которой  $\xi \neq 0$ , попадает на границу складки в момент

$$t = \frac{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2}{2\xi}. \quad (6)$$

Легко проверить (это мы предоставляем читателю), что при  $\xi > 0$ , т. е.  $t > 0$ , функция (6) принимает минимальное значение

$$t_{кр} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \text{ при } \xi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \eta = 0; \text{ это и есть момент начала}$$

перехлеста и начальные координаты частицы, в которой начинается складка. Развитие границы складки в плоскости  $\xi, \eta$  показано на рис. 64: при каждом  $t > t_{кр}$  получается замкнутая линия, ограничивающая область, в которой  $J < 0$ , тогда как на самой этой линии  $J = 0$ . Развитие области складки на основной плоскости  $x, y$  показано на рис. 65; уравнение границы этой области получается, если из уравнений (4) и (5) исключить  $\xi, \eta$ , оставив  $t$  в качестве параметра.

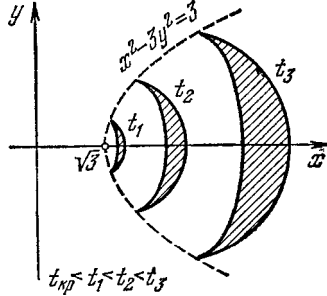


Рис. 65

Разобранный пример не вполне типичен в том отношении, что, как получилось, каждая частица попадает на край складки один раз (в момент (6)). В общем случае, если приравнять определитель (3) нулю, то получится квадратное уравнение относительно  $t$ . Это означает, что если  $t$  пробегает все значения от  $-\infty$  до  $\infty$ , то, за исключением особых случаев, малая окрестность любой частицы либо дважды «выворачивается наизнанку» (см. §I.4), если корни указанного квадратного уравнения вещественны и различны, либо вообще ни разу не попадает на складку, если эти корни мнимые. Здесь проявляется существенное различие между одномерными и двумерными движениями: если для одномерных движений с нетривиальным полем скоростей, постоянных для каждой частицы, перехлест обязательно имел место при  $t > t_0$ , либо при  $t < t_0$ , то для двумерных движений это не обязательно.

Простейшим примером поля скоростей, для которого перехлест не наступает, является поле скоростей вращающейся плоскости. Можно себе представить, что плоскость вращалась вокруг начала координат с угловой скоростью  $\omega$  как абсолютно твердое тело, но в некоторый момент  $t_0$  силы сцепления между частицами плоскости исчезли и эти частицы продолжают двигаться по инерции. Тогда уравнения движения частиц имеют вид

$$x = \xi - \omega\eta(t - t_0), \quad y = \xi + \omega\xi(t - t_0),$$

откуда якобиан

$$J = 1 + \omega^2(t - t_0)^2 \geq 1,$$

т. е. перехлеста не наступает ни при  $t > t_0$ , ни (если обратить процесс во времени) при  $t < t_0$ .

Любопытно, что указанное различие между одномерными и двумерными движениями связано с четностью или нечетностью размерности пространства, в котором происходит движение. Нетрудно проверить (это мы предоставляем читателю), что при рассмотрении трехмерных движений уравнение  $J = 0$  имеет, вообще говоря, третью степень относительно  $t$ , и потому обязательно обладает по крайней мере одним вещественным корнем. Таким образом, для трехмерных движений, за исключением некоторых вырожденных случаев, перехлест обязательно имеет место.

Вернемся к общим уравнениям (1) движения частиц на плоскости. Как ясно из предыдущего, при возникновении перехлеста появляется и линия заворота среды, ограничивающая область перехлеста. На этой линии якобиан  $J$  равен нулю, т. е. в силу (3) эта линия в плоскости  $\xi, \eta$  определяется уравнением

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = 1 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial v_y}{\partial \eta} \right) (t - t_0) + \left( \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \frac{\partial v_y}{\partial \eta} - \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \frac{\partial v_y}{\partial \xi} \right) (t - t_0)^2 = 0.$$

Чтобы получить соответствующую линию в плоскости  $x, y$ , надо это уравнение рассмотреть совместно с уравнениями (1). Если из полученных трех уравнений удастся исключить две переменных  $\xi, \eta$ , мы получим уравнение границы области перехлеста, в которое  $t$  войдет в качестве параметра.

Из уравнения (7) видно, что если производные 1-го порядка от скорости  $\mathbf{v}(\xi, \eta)$  ограничены на всей плоскости, то для  $t$ , достаточно близкого к  $t_0$ , перехлеста не будет, т. е. если он и произойдет, то не сразу. На рис. 66 показана типичная картина развития

перехлеста, возникшего в момент  $t_{кр}$ ; при этом в момент  $t_{кр}^{(2)}$  начинается повторный перехлест, так что при  $t = t_3$  густо заштрихованную область покрывает пять слоев среды.

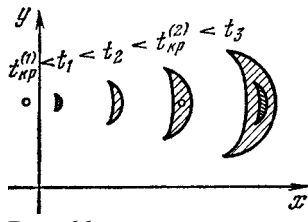


Рис. 66

Как определить момент начала перехлеста? В этой критической ситуации функция  $t(\xi, \eta)$ , определенная из (7), должна иметь минимальное значение, т. е. частные производные  $\partial t/\partial \xi$  и  $\partial t/\partial \eta$  должны равняться нулю. Поэтому с помощью дифференцирования равенства (7) и последующего сокращения на  $t - t_0$  мы получаем, что в критической ситуации имеют место соотношения

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial \xi \partial \eta} + \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial \xi^2} \frac{\partial v_y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial v_x}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial v_y}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial \xi^2} \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right) (t - t_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial v_y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial \eta^2} \frac{\partial v_x}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2} \frac{\partial v_y}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right) (t - t_0) = 0.$$

Эта два уравнения вместе с (7) образуют три уравнения с тремя неизвестными  $\xi, \eta, t$ , определяющими лагранжевы координаты и момент начала перехлеста; соответствующие эйлеровы координаты получаются из равенств (1).

В силу геометрического смысла якобиана, как коэффициента искажения площадей, обращение его в нуль на линии ( $\Gamma$ ) заворота среды влечет за собой обращение плотности среды в этих точках в бесконечность. При переходе через ( $\Gamma$ ) (точнее, через прообраз ( $\Gamma$ ) в плоскости  $\xi, \eta$  в выбранный момент времени)  $t > t_{кр}$  этот якобиан становится отрицательным, т. е. участок среды «выворачивается наизнанку». Как и в § II.10, при формальных вычислениях можно считать плотность такого «вывернутого» участка отрицательной и пользоваться тогда формулой

$$\rho_0 = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \rho,$$

связывающей исходную плотность с текущей, а также уравнением неразрывности (I.8.7) без простановки знака абсолютной величины у якобиана.

Если частицы движутся с переменной скоростью, то взамен (1) надо пользоваться уравнениями

$$x = \xi + \int_{t_0}^t v_x(\tau; \xi, \eta) d\tau, \quad y = \eta + \int_{t_0}^t v_y(\tau; \xi, \eta) d\tau,$$

и все выкладки соответственно усложняются, хотя их схема и качественная картина образования перехлеста остаются прежними. При рассмотрении пространственных движений выкладки изменяются очевидным образом. Продумайте как следует соответствующую качественную картину! Представляя себе перехлест на прямой, мы привлекаем добавочную геометрическую размерность, в которой «отсчитываются» слои среды; на плоскости же и в пространстве надо представлять себе, что слои проникают один в другой, – подробнее, частицы одного слоя проникают в промежутки между частицами другого.

## § 7 Движение с источником массы

Рассмотрим простейший источник массы – точечный. Допустим, что в начале координат  $\mathbf{r} = 0$  расположен такой источник мощности (обильности)  $Q$  единиц массы в единицу времени, причем, кроме этого источника, в конечной части пространства нет ни источников, ни стоков массы. Тогда возникшая масса должна уходить на бесконечность, т. е. на бесконечности  $|\mathbf{r}| = \infty$  имеется сток той же обильности  $Q$  или, что то же, источник обильности  $-Q$ .

Конкретный вид поля скоростей для точечного источника может быть различным в зависимости от дополнительных предположений. Рассмотрим простейший вариант, когда среда предполагается имеющей постоянную плотность  $\rho_0 = \text{const}$ , а течение стационарным и центрально-симметричным. Тогда поле скоростей должно иметь вид

$$\mathbf{v} = f(|\mathbf{r}|)\mathbf{r}^0 \quad \left( \mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right),$$

а из баланса масс внутри сферы  $|\mathbf{r}| = \text{const}$  получаем

$$4\pi|\mathbf{r}|^2 f(|\mathbf{r}|)\rho_0 = Q, \text{ т.е. } f(|\mathbf{r}|) = \frac{Q}{4\pi\rho_0|\mathbf{r}|^2} \text{ и } \mathbf{v} = \frac{Q\mathbf{r}^0}{4\pi\rho_0|\mathbf{r}|^2} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\rho_0|\mathbf{r}|^3}. \quad (1)$$

Это поле – безвихревое,  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ , и потому потенциальное (см., например, ЭПМ, §XI.9), с потенциалом, равным

$$\frac{Q}{4\pi\rho_0|\mathbf{r}|}.$$

(проверьте!). Из определения дивергенции (§I.8) сразу следует, что

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{Q}{\rho_0} \delta(\mathbf{r}),$$

где  $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$  – пространственная дельта-функция.

Многие другие движения с источником массы получаются в результате наложения рассмотренных простейших источников, расположенных в различных точках пространства. Так, в результате равномерного распределения простейших источников вдоль прямой получается плоскопараллельное течение с источником массы, которое можно рассматривать как плоское. В результате наложения источника и стока равной и притом бесконечно большой обильности на бесконечно малом расстоянии получается *диполь* и т. д. Но мы не будем рассматривать здесь эти поля. Дело в том, что рассмотренное здесь поле (1) совпадает, с точностью до единиц измерения, с электростатическим полем в пустоте, порожденным зарядом  $q = Q/\rho_0$ , помещенным в начале координат (ЭПМ, §X.5). Поэтому и результаты наложения получаются такие же, как для электрических полей, а они были рассмотрены в ЭПМ, §X.6.

## Ответы и решения

### §1

- 1) Характеристическое уравнение имеет корни  $p_1 = 3, p_2 = -1$ ; им отвечают решения  $x_1 = e^{3t}, y_1 = -2e^{3t}$  и  $x_2 = e^{-t}, y_2 = 2e^{-t}$ . Значит, общее решение системы имеет вид  $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, y = -2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-t}$ . Из начальных условий получаем  $C_1 = -1, C_2 = 1$ . Итак, искомое решение таково:  $x = -e^{3t} + e^{-t}, y = 2e^{3t} + 2e^{-t}$ .
- 2) Пусть сначала  $\psi(t) \equiv 0$ , тогда решение  $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  линейно зависит от  $\varphi(t)$ . Строя по обычным правилам функцию влияния (§II.2), получаем при  $t > 0, \tau > 0$

$$\mathbf{G}_\varphi(t, \tau) = \begin{cases} 0 & (t < \tau), \\ \cos(t - \tau)\mathbf{i} - \sin(t - \tau)\mathbf{j} & (t > \tau). \end{cases}$$

Аналогично находим

$$\mathbf{G}_\psi(t, \tau) = \begin{cases} 0 & (t < \tau), \\ \cos(t - \tau)\mathbf{i} + \sin(t - \tau)\mathbf{j} & (t > \tau). \end{cases}$$

Так как при сложении неоднородных членов уравнения и решения складываются, то получаем искомое решение

$$x = \int_0^t [\varphi(\tau)\cos(t - \tau) + \psi(\tau)\sin(t - \tau)]d\tau, \quad y = \int_0^t [-\varphi(\tau)\sin(t - \tau) + \psi(\tau)\cos(t - \tau)]d\tau.$$

Те же окончательные формулы справедливы для  $t < 0$ .

§2

1) Здесь уравнение (2.7) приобретает вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \beta\vartheta + \alpha + (\gamma x_0 + \delta z_0),$$

причем члены, взятые в скобки, постоянны. Интегрирование при заданном начальном условии дает результат

$$\vartheta(\mathbf{r}_0, t) = [\beta^{-1}(\alpha + \alpha\beta^{-1} + \gamma x_0 + \delta z_0) + \alpha x_0 + \beta y_0] e^{\beta(t-t_0)} - \beta^{-1}(\alpha + \alpha\beta^{-1} + \gamma x_0 + \delta z_0).$$

2) Решение уравнения характеристик имеет вид

$$x = \frac{1}{4}[(2x_0 - z_0)e^{3t} + (2x_0 + z_0)e^{-t}], \quad y = y_0, \quad z = \frac{1}{2}[(z_0 - 2x_0)e^{3t} + (z_0 + 2x_0)e^{-t}] \quad (1)$$

уравнение (2.3) дает  $\vartheta(\mathbf{r}, t) = x_0$ . Выражая из (1)  $x_0$ , получаем

$$\vartheta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-3t})x + \frac{1}{4}(e^t - e^{-3t})z.$$

3) Пусть система уравнений (2.10) при начальных условиях  $\mathbf{r}|_{t=t_1} = \mathbf{r}_1$ ,  $\vartheta|_{t=t_1} = \vartheta_1$  имеет решение  $\mathbf{r} = \varphi(t; t_1, \mathbf{r}_1, \vartheta_1)$ ,  $\vartheta = \psi(t; t_1, \mathbf{r}_1, \vartheta_1)$ . Тогда искомое решение, в неявной форме, имеет вид  $\psi(t_0; t, \mathbf{r}, \vartheta) = \vartheta_0(\varphi(t_0; t, \mathbf{r}, \vartheta))$ .

§3

1) 
$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \left( \mathbf{r} - \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau) d\tau \right).$$

2) Уравнение характеристик  $d\mathbf{r}/dt = -\mathbf{r}$  имеет решение  $\mathbf{r} = e^{t_0-t}\mathbf{r}_0$ . Отсюда  $\frac{D\mathbf{r}}{D\mathbf{r}_0} = e^{3(t_0-t)}$ ,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = [1 + |\mathbf{r}|^6 e^{6(t-t_0)}]^{-1} e^{3(t-t_0)}, \text{ т. е. при } t \rightarrow \infty \text{ вся масса концентрируется в начале}$$

координат. Но эта масса равна  $\int_0^\infty 4\pi \frac{|\mathbf{r}_0|^2 d|\mathbf{r}_0|}{1 + |\mathbf{r}_0|^6} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi^2$ , поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{r}, t) = \frac{2}{3}\pi^2 \delta(\mathbf{r}).$$

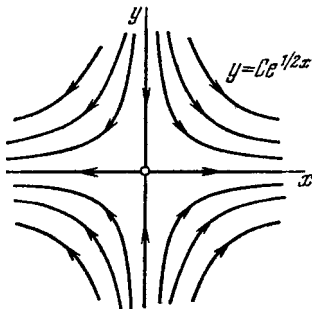


Рис. 67

§4

1) Система уравнений характеристик  $dx/x = dy/y = dz/z = dt$  имеет решение  $x = x_0 e^t$ ,  $y = y_0 e^t$ ,  $z = z_0 e^t$ . Исключая из этих равенств и уравнений  $z_0 = x_0^2 + y_0^2$ ,  $\vartheta = x_0 - y_0$  величины  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $t$ , получаем  $\vartheta = \frac{(x-y)z}{x^2 + y^2}$ . Решение имеет сложную особенность на оси  $z$ . Семейство траекторий показано на рис. 67. Уравнение движения среды  $dx/x^3 = -dy/y = dt$ , откуда  $x = x_0(1 - 2tx_0^2)^{-1/2}$ ,  $y = y_0 e^{-t}$ ; интересно, что  $t$  меняется

от  $-\infty$  до  $\frac{1}{2x_0^2}$ , т. е. частицы уходят в бесконечность за конечное время. Вычисление

дает  $\frac{D(x, y)}{D(x, y_0)} = (1 - 2tx_0^2)^{-3/2} e^{-t}$ . Поэтому, полагая, например,  $\rho|_{x_0=1} = 1$ , получаем

$$\rho(x, y) = (1 - 2tx_0^2)^{3/2} e^t, \quad x = (1 - 2t)^{-1/2}, \quad \text{откуда } \rho = x^{-3} e^{\frac{1-x^2}{2}}.$$

Считая зависимость  $\rho(x)$  четной, получаем окончательно  $\rho(x, y) = |x|^{-3} e^{\frac{1-x^2}{2}}$ . Отметим, что при этом

$$\rho|_{x=0} = \rho|_{x=\pm\infty} = 0.$$



## §5

1) Уравнение характеристик имеет решение  $x = x_0 e^t$ ,  $y = y_0 e^t$ ,  $z = z_0 e^t$ ; из уравнения  $d\vartheta/dt = -3\vartheta$  получаем  $\vartheta = \vartheta_0 e^{-3t}$ . Добавляя соотношения  $x_0 = 1$ ,  $\vartheta_0 = y_0 + z_0$ , получаем искомое решение  $\vartheta = (y + z)x^{-4}$ . Интеграл (5.3) равен

$$\int_{e^t}^{3e^t} dx \int_{-e^t}^{e^t} dy \int_0^{2e^t} (y+z)x^{-4} dz = \frac{104}{81} \text{ и не зависит от } t.$$

# Глава IV Движение под действием заданных внешних сил

## § 1 Прямолинейное движение одиночной частицы

Начнем с рассмотрения одиночной частицы массы  $m_0$ , движущейся вдоль оси  $x$  под действием некоторой силы, направленной вдоль этой же оси. Эта сила может задаваться по-разному, вследствие чего уравнение движения частицы будет иметь ту или иную структуру. Так, сила  $F$  может быть задана как функция от положения частицы и от времени, т. е.  $F = F(x, t)$ ; тогда на основании 2-го закона Ньютона уравнение движения частицы примет вид

$$m_0 \ddot{x} = F(x, t), \quad \left( \cdot = \frac{d}{dt} \right). \quad (1)$$

Таким образом, основное отличие от ситуации, рассмотренной в §II.1, состоит в том, что оказываются заданными не скорости, а ускорения частицы.

Силовое поле  $F(x, t)$  в одномерном случае всегда имеет потенциал, т. е. функцию  $U(x, t)$ , для которой

$$F(x, t) \equiv -\frac{\partial U}{\partial x} :$$

достаточно просто положить при каком-либо  $x_0$

$$U(x, t) = -\int_{x_0}^x F(s, t) ds .$$

Ясно, что потенциал определен с точностью до произвольной функции времени в качестве слагаемого.

Потенциал наиболее полезен в автономном случае, когда он (как и силовое поле) не зависит от времени. В этом случае уравнение движения

$$m_0 \ddot{x} = -U'(x) \quad (2)$$

имеет промежуточный интеграл

$$m_0 \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E (= const), \quad (3)$$

в чем легко убедиться с помощью дифференцирования последнего соотношения по  $t$ . Первое слагаемое в левой части представляет собой кинетическую, а второе – потенциальную энергию частицы, так что промежуточный интеграл (3) выражает закон сохранения полной энергии частицы, движущейся под воздействием автономного потенциального силового поля.

Если потенциал  $U(x, t)$  представляет собой линейную функцию  $x$ , то  $\partial U/\partial x$  вообще не зависит от  $x$ , т.е. мы приходим к уравнению

$$m_0 \ddot{x} = F(t) \quad (4)$$

движения частицы под действием силы, заданной как функция времени. Мы не будем останавливаться на интегрировании этого уравнения (см., например, ЭПМ, §VII.4), а приведем только окончательный результат

$$x(t) = \frac{1}{m_0} \int_{t_0}^t (t - \tau) F(\tau) d\tau + v_0(t - t_0) + x_0, \quad (5)$$

где

$$x_0 = x|_{t=t_0}, \quad v_0 = \dot{x}|_{t=t_0} \quad (6)$$

– начальные координата и скорость частицы, которые для однозначного определения закона движения частицы надо задать дополнительно. Мы советуем читателю самостоятельно вывести формулу (5) или же просто проверить, что ее правая часть удовлетворяет уравнению (4) и начальным условиям (6).

Если потенциал  $U$  представляет собой квадратичную функцию  $x$ , то сила  $F$ , т. е. правая часть уравнения (1) (или (2) в автономном случае) будет линейной функцией  $x$ . На этом случае мы остановимся немного позже.

Сила может быть задана в каждый момент времени как функция состояния, т. е. координаты и скорости частицы; тогда взамен (1) мы приходим к уравнению более общего вида

$$m_0 \ddot{x} = F(\dot{x}, x, t). \quad (7)$$

Такая сила уже не будет потенциальной; уравнение (7) получается, в частности, если в число сил, действующих на частицу, входит *демпфирующая сила* (например, сила трения), направленная противоположно скорости частицы.

Ограничимся автономным случаем, в котором законы воздействия сил на частицу не зависят от времени. В этом случае уравнение движения (7) несколько упрощается и приобретает вид

$$m_0 \ddot{x} = F(\dot{x}, x). \quad (8)$$

Оказывается удобным перейти от этого дифференциального уравнения второго порядка к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка, так как такие системы допускают более наглядное истолкование. Для этого введем в рассмотрение *импульс*  $p = m_0 \dot{x}$  частицы и перейдем от уравнения (8) к равносильной системе

$$\dot{x} = \frac{1}{m_0} p, \quad \dot{p} = F\left(\frac{p}{m_0}, x\right). \quad (9)$$

Так как для определения конкретного движения частицы, т. е. частного решения уравнения (8) надо задать не только  $x$ , но и  $\dot{x}$  или, что равносильно,  $p$ , то естественно принять, что *состояние* рассматриваемой системы определяется значениями  $x, p$ . Плоскость  $x, p$ , на которой изображаются всевозможные состояния системы, называется *фазовой плоскостью*, каждому закону  $x(t)$  эволюции системы отвечает движение *изображающей точки*  $(x(t), p(t))$  на этой плоскости. Система уравнений (9) определяет векторное поле на фазовой плоскости – поле скоростей изображающих точек, каждая из соответствующих линий тока (векторных линий) отвечает возможному закону изменения состояния системы во времени, а весь поток на фазовой плоскости для этого поля скоростей отвечает совокупности всевозможных таких законов.

Поделив одно из уравнений (9) на другое, можно полностью исключить время и перейти к дифференциальному уравнению

$$\frac{dp}{dx} = m_0 \frac{F(p/m_0, x)}{p}$$

траекторий на фазовой плоскости (*фазовых траекторий*). В силу автономности рассматриваемой системы каждая из фазовых траекторий описывает однопараметрическое семейство законов эволюции  $x = x(t + c), p = p(t + c)$ , получающихся один из другого простым сдвигом во времени.

Важное преимущество рассмотрения движений не на оси  $x$  (где они наблюдаются), а в фазовой плоскости состоит в том, что задание точки на оси не определяет траектории частицы, тогда как задание точки в фазовой плоскости полностью определяет эту

траекторию (а указание момента времени, отвечающего выбранной точке, полностью определяет и закон движения частицы). Другими словами, различные траектории на оси могут иметь общие точки, тогда как различные траектории на фазовой плоскости не могут иметь общих точек.

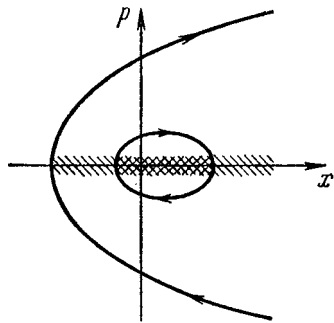


Рис. 68

Например, две траектории на фазовой плоскости могут иметь вид, показанный на рис. 68; отвечающие им (фактически наблюдаемые) траектории на оси  $x$  заштрихованы. Хотя линии в плоскости не пересекались, но проекция одной из них составляет часть проекции другой.

Траектории частиц, удовлетворяющих неавтономному уравнению (7), также можно изображать на фазовой плоскости. Однако соответствующее поле фазовых скоростей будет нестационарным, и потому такие траектории могут пересекаться друг с другом – ведь для такого поля траектории, начавшиеся в одной и той же точке, но в разные

моменты времени, могут быть совершенно различными. Таким образом, в неавтономном случае совокупность всех фазовых траекторий является двухпараметрической (в качестве параметров можно выбрать, например, абсциссу пересечения траекторией оси  $x$  и, в добавление к автономному случаю, момент этого пересечения), и потому изображение ее на плоскости не обладает наглядностью. Итак, с помощью перехода к фазовой плоскости задача об одномерном движении под действием заданных сил сводится к задаче о двумерном движении с заданными скоростями, что дает возможность применить результаты и методы гл. III. Однако происхождение этой последней задачи придает ей определенную специфику, и потому делает целесообразным ее самостоятельное рассмотрение.

Приведем несколько примеров. Упругие колебания линейного осциллятора без трения удовлетворяют уравнению  $m_0\ddot{x} + kx = 0$  или, что равносильно, системе

$$\dot{x} = \frac{p}{m_0}, \quad \dot{p} = -kx. \quad (10)$$

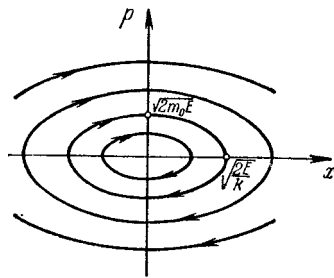


Рис. 69

Эта система имеет очевидный первый интеграл

$$\frac{p^2}{2m_0} + \frac{kx^2}{2} = E, \text{ выражающий закон сохранения энергии. В}$$

силу этого первого интеграла траекториями (линиями тока) на фазовой плоскости служат эллипсы, причем каждый из них отвечает некоторому уровню полной энергии  $E$ . Эти эллипсы, а также направление движения по ним показаны на рис. 69.

(Из первого уравнения (9) видно, что в верхней

полуплоскости  $p$  изображающая точка всегда движется слева направо, а в нижней – справа налево.) Каждому из этих эллипсов отвечает гармоническое колебание

осциллятора с амплитудой  $\sqrt{2E/k}$ . Хорошо видно, что наибольшему значению  $|x|$

отвечает значение  $p = 0$ , а наибольшему значению  $|p|$  – значение  $x = 0$ ; это означает, что в процессе колебаний происходит перекачка потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Поделив одно из уравнений (10) на другое, мы исключаем  $t$  и приходим к

уравнению для траекторий  $\frac{dp}{dx} = -km_0 \frac{x}{p}$ , из которого формально следует, что начало

координат будет особой точкой (ЭПМ, §VIII.1). Впрочем, это ясно непосредственно из рис. 69, причем видно также, что это особая точка типа центра.

Если ввести в осциллятор линейное трение, то взамен (10) получится система уравнений

$$\dot{x} = \frac{p}{m_0}, \quad \dot{p} = -kx - \frac{\lambda}{m_0} p, \quad (11)$$

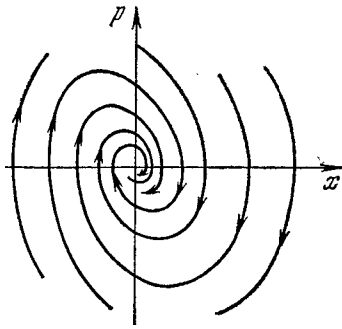


Рис. 70

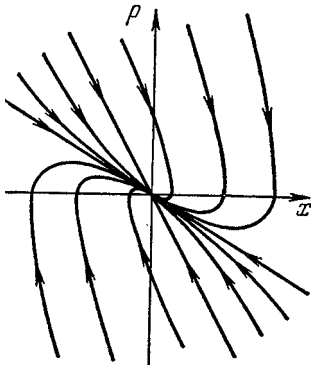


Рис. 71

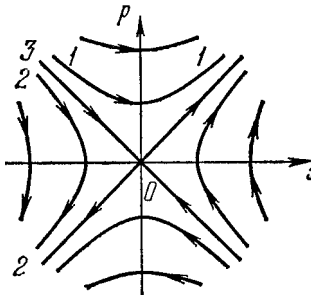


Рис. 72

в которой  $\lambda$  – коэффициент трения. Если трение невелико (см. упражнение 1), то при любом начальном состоянии в системе возникнут затухающие колебания, т. е. начало координат на фазовой плоскости будет особой точкой типа фокуса (рис. 70). Если же трение велико, то затухание будет аperiodическим, чему отвечает особая точка типа узла (рис. 71). (Различные виды затухания рассмотрены в ЭПМ, §VII.3.) Рассмотрим теперь систему без трения, в которой частица

отталкивается от начала координат по линейному закону. Уравнения эволюции такой системы на фазовой плоскости имеют вид

$$\dot{x} = \frac{p}{m_0}, \quad \dot{p} = kx, \quad (12)$$

закон сохранения энергии – вид  $\frac{p^2}{2m_0} - \frac{kx^2}{2} = E$ . Траекториями

на фазовой плоскости служат гиперболы, начало координат является особой точкой типа седла (рис. 72). Траекториям типа 11 отвечают такие движения частицы, когда она, приближаясь к точке отталкивания  $x = 0$ , обладает достаточным запасом кинетической энергии для того, чтобы пересечь эту точку и удалиться в противоположную сторону. Если запас кинетической энергии недостаточен, то частица не доходит до точки отталкивания и возвращается в ту же сторону, из которой прибыла; при этом получается траектория типа 22. Разделяет эти два типа траектория 30, называемая *сепаратрисой*; для нее кинетическая энергия как раз достаточна, чтобы частица асимптотически приближалась к точке отталкивания.

Рассмотрим теперь произвольную автономную систему без демпфирования, описываемую дифференциальным

уравнением (2), равносильным системе

$$\dot{x} = \frac{p}{m_0}, \quad \dot{p} = -U'(x). \quad (13)$$

Соотношение (3) можно переписать в виде первого интеграла этой системы:

$$\frac{p^2}{2m_0} + U(x) = E.$$

Знание потенциальной энергии  $U(x)$  позволяет легко построить семейство траекторий на фазовой плоскости. Такое построение показано на рис. 73, который мы предлагаем читателю продумать самостоятельно. На этом рисунке частица имеет три состояния равновесия: левое, устойчивое, с меньшим запасом устойчивости (величиной потенциального барьера); среднее, неустойчивое; и правое, устойчивое, с большим запасом устойчивости. Заштрихованные окрестности устойчивых состояний равновесия, заполненные *финитными* (т. е. расположенными в конечной части плоскости) траекториями и ограниченные сепаратрисами, называются *потенциальными ямами*. Глубина  $\Delta E$  потенциальной ямы (величина *потенциального барьера*) определяет запас устойчивости частицы в исходном состоянии равновесия, т. е. максимально возможную добавку энергии, для которой частица остается в

потенциальной яме и при как угодно малой диссипации энергии асимптотически придет в это состояние равновесия. (На рис. 73 показано значение  $\Delta E$  только для правого состояния равновесия.) Функция

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m_0} + U(x), \quad (14)$$

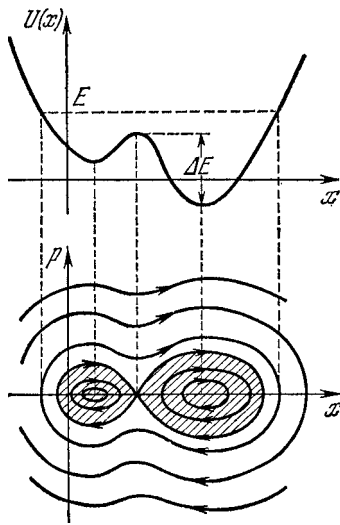


Рис. 73

равная полной энергии системы (т. е. в данном случае – частицы в заданном силовом поле) и постоянная вдоль каждой траектории на фазовой плоскости, называется *функцией Гамильтона (гамильтонианом)* рассматриваемой системы. Другими словами, для системы с одной степенью свободы траектории на фазовой плоскости совпадают с линиями уровня функции Гамильтона. Так как

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_0}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = U'(x) = -F(x),$$

то систему (13) можно с помощью функции Гамильтона записать в *каноническом виде*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (15)$$

Если потенциал  $U$  зависит также и от времени,  $U = U(x, t)$  (система неавтономная), то уравнения движения частицы все равно можно записать в каноническом виде (15), где

$$H = H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m_0} + U(x, t).$$

Однако теперь уже гамильтониан  $H$  в процессе движения частицы не остается постоянным, так как

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \left( -\frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Подчеркнем, что общее уравнение (7), правая часть которого включает  $\dot{x}$ , в переменных  $x$ ,  $p = m_0 \dot{x}$  не принимает канонического вида (15).

## Упражнения

- 1) Укажите, когда для системы (11) особая точка будет фокусом и когда – узлом. В последнем случае укажите направления, по которым траектории на фазовой плоскости могут входить в начало координат.
- 2) Рассмотрите систему с отталкиванием (12) с добавленным линейным трением.
- 3) Выведите уравнение колебаний математического маятника без трения и рассмотрите соответствующую картину траекторий на фазовой плоскости.

## § 2 Прямолинейное движение совокупности частиц

Рассмотрим теперь систему из  $N$  невзаимодействующих одинаковых частиц массы  $m_0$ , движущихся вдоль оси  $x$  в силовом поле  $F$ , действующем на каждую из частиц так, как это описано в §1. Для общего случая, когда эта сила может зависеть от координаты и скорости частицы, а также от времени, уравнения движения системы частиц принимают вид

$$m_0 \ddot{x}_i = F(\dot{x}_i, x_i, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1)$$

Мы будем считать, что эта система в каждый момент времени имеет разброс не только по координате  $x$ , но и при каждом значении  $x$  по импульсу  $p$  (или, что то же, – по скорости  $\dot{x}$ ), другими словами, в отличие от гл. II, теперь уже близкие частицы не обязаны иметь близкие скорости. (Но частицы, имеющие близкие координаты и

близкие скорости, должны иметь близкие ускорения, что вытекает из уравнений (1.) Так как силовое поле определяет ускорения частиц, но не определяет их скорости, то указанный разброс, если он был в начальный момент времени, сохранится и в дальнейшие моменты, т. е. совокупность частиц в каждый момент времени будет теперь двухпараметрической. В частности, теперь уже ничто не мешает частицам в процессе эволюции системы обгонять одна другую; как и в §II.1, мы будем считать, что и при таком обгоне частицы не взаимодействуют, друг с другом. При непрерывном разбросе скоростей такой «перехлест» происходит во все моменты времени во всех точках и потому, в отличие от ситуации, описанной в §II.10, после перехода к среде не приводит к появлению точек, в которых плотность среды бесконечна. От системы (1) из  $N$  уравнений второго порядка можно перейти к равносильной системе из  $2N$  уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m_0}, \quad \dot{p}_i = F\left(\frac{p_i}{m_0}, x_i, t\right) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

Поэтому состояние рассматриваемой системы частиц определяется указанием координат и импульсов каждой из частиц, т. е. может быть изображено точкой в  $2N$ -мерном фазовом пространстве координат-импульсов. Однако для невзаимодействующих идентичных частиц, находящихся в едином поле сил, это изображение можно упростить, заметив, что законы движения различных частиц служат различными частными решениями одного и того же уравнения второго порядка (1.7). Поэтому состояние такой системы можно изображать совокупностью  $N$  точек на одной и той же фазовой плоскости, отвечающей любой из рассматриваемых частиц<sup>27</sup>. Как и в §1, такое изображение особенно наглядно, если силовое поле, а потому и системы (1) и (2) автономны, т. е. не зависят от  $t$ . В этом случае фазовая плоскость расслаивается на фазовые траектории, не пересекающиеся друг с другом, по которым движутся  $N$  точек, изображающих в совокупности рассматриваемую систему частиц. Если рассматриваемая система автономна и силы не зависят от скоростей частиц, то систему уравнений (2) можно переписать в виде

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m_0}, \quad \dot{p}_i = -U'(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (3)$$

где  $U(x)$  – потенциал силового поля. В этом случае полная энергия каждой частицы сохраняется:

$$\frac{p_i^2}{2m_0} + U(x_i) = E_i (= const), \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

(здесь проявился эффект невзаимодействия!). Полная энергия такой системы

$$H(x_1, x_2, \dots, x_N, p_1, p_2, \dots, p_N) = \frac{1}{2m_0} (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_N^2) + U(x_1) + U(x_2) + \dots + U(x_N) \quad (4)$$

называется ее функцией Гамильтона и, конечно, также остается постоянной в любом процессе ее свободной эволюции. С помощью этой функции уравнения (3) движения системы можно записать в каноническом виде

<sup>27</sup> В  $2N$ -мерном фазовом пространстве координат-импульсов можно изобразить любую систему с  $N$  степенями свободы, эволюционирующую под действием произвольных сил, – в частности, систему из  $N$  взаимодействующих, не обязательно идентичных частиц, движущихся вдоль оси  $x$ . К фазовой плоскости можно перейти, если частицы идентичны; но если они взаимодействуют, то скорость каждой из  $N$  изображающих точек  $(x_i, p_i)$  будет зависеть от положения остальных точек, так что для отыскания закона движения каждой из этих точек надо интегрировать систему из  $2N$  дифференциальных уравнений 1-го порядка, не распадающуюся на независимые подсистемы. И лишь для невзаимодействующих идентичных частиц, находящихся в едином силовом поле, можно поведение отдельных изображающих точек на фазовой плоскости рассматривать независимо друг от друга, а упомянутая система дифференциальных уравнений распадается на  $N$  независимых подсистем (2). В этом случае применение фазовой плоскости наиболее удобно.

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i=1,2,\dots,N). \quad (5)$$

Функцию Гамильтона (4) для всей системы можно представить в виде суммы соответствующих функций для каждой отдельной частицы:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_N, p_1, p_2, \dots, p_N) \equiv H_0(x_1, p_1) + H_0(x_2, p_2) + \dots + H_0(x_N, p_N),$$

где через  $H_0$  обозначен гамильтониан (1.14) отдельной частицы. Такое представление опять-таки объясняется отсутствием взаимодействия частиц.

### § 3 Изображение среды из частиц на фазовой плоскости

Если число  $N$  частиц становится весьма большим или если, подобно §II.14, мы переходим к статистическому осреднению, то естественно, как и в предыдущих главах, схематизировать систему как сплошную среду (среду из частиц). Будем, как и выше, считать частицы идентичными и невзаимодействующими, так что движение каждой из них описывается системой из двух уравнений 1-го порядка (2.2).

Мы видели в §2, что такую систему частиц удобно изображать в виде совокупности изображающих точек на фазовой плоскости  $x, p$ , так как указание положения частицы на фазовой плоскости (мы будем иногда для краткости говорить «положение частицы на фазовой плоскости» вместо «положение точки, изображающей частицу на фазовой плоскости») в некоторый момент времени полностью определяет эволюцию этой частицы. Для перехода к среде введем *фазовую плотность*  $n^\Phi(x, p, t)$  числа частиц; другими словами, пусть число частиц в момент  $t$ , координата которых заключена между  $x$  и  $x + \Delta x$ , а импульс – между  $p$  и  $p + \Delta p$ , при малых  $\Delta x$  и  $\Delta p$  равно, с точностью до малых высшего порядка,

$$\Delta N = n^\Phi(x, p, t) \Delta x \Delta p.$$

Подчеркнем, что  $n^\Phi$  – это не плотность  $n$  числа частиц на оси, вдоль которой они движутся (см. §1.2),  $n^\Phi$  зависит также от  $p$  и учитывает разброс ансамбля частиц не только по координатам, но и по импульсам. Это видно уже из размерностей:

$$[n] = [l]^{-1}, \quad [n^\Phi] = [l]^{-2} [m]^{-1} [t].$$

Чтобы получить обычную (не фазовую) плотность  $n(x, t)$  числа частиц рассматриваемой среды в точке с координатой  $x$  в момент  $t$ , надо просуммировать при данном  $x$  частицы со всеми импульсами, т. е.

$$n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} n^\Phi(x, p, t) dp.$$

Закон распределения частиц среды на фазовой плоскости является важнейшей характеристикой этой среды. Знание фазовой плотности  $n^\Phi$  дает возможность найти и другие основные характеристики среды – такие, как фазовая массовая плотность  $\rho^\Phi = m_0 n^\Phi$ , обычная плотность

$$\rho(x, t) = m_0 n(x, t) = m_0 \int_{-\infty}^{\infty} n^\Phi(x, p, t) dp, \quad (1)$$

статический момент и т. д., и полностью проследить за эволюцией среды. Такое упрощенное описание среды является основной идеей физической статистики и особенно полезно в тех случаях, когда изучение совокупности всех траекторий затруднительно (например, для пространственных движений). Очень часто это изучение является и ненужным, избыточным: например, если мы узнаем, что  $n^\Phi = \text{const}$ , то нам, как правило, несущественно знать, как движутся отдельные частицы! Итак, система с большим числом степеней свободы обладает качественно новой характеристикой, позволяющей описать наиболее глубокие свойства этой системы. Приведем еще выражения через  $n^\Phi$  суммарного импульса  $P$  частиц, попавших на интервал  $a \leq x \leq b$ :

$$P_{a,b} = \int_a^b dx \int_{-\infty}^{\infty} pn^{\phi} dp ; \quad (2)$$

плотности этого импульса

$$\rho_p = \int_{-\infty}^{\infty} pn^{\phi} dp ; \quad (3)$$

плотности кинетической, потенциальной и полной энергий соответственно

$$\rho_T = \frac{1}{2m_0} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 n^{\phi} dp, \quad \rho_U = m_0 \int_{-\infty}^{\infty} n^{\phi} dp \cdot u(x,t), \quad \rho_E = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{p^2}{2m_0} + m_0 u \right) n^{\phi} dp, \quad (4)$$

где под  $u(x, t)$  понимается потенциал, отнесенный к единице массы (он называется *приведенным потенциалом* или *потенциалом ускорений*), т. е.  $F = -m_0 \frac{du}{dx}$ . Через

плотности энергий очевидным образом выражаются и сами энергии.

Обращаем внимание на то, что в приведенных формулах фигурирует  $m_0$  – масса отдельной частицы. Таким образом, при переходе к непрерывной среде мы не полагаем  $m_0 \rightarrow 0$ , а пользуемся осреднением. Если взамен  $p$  пользоваться в качестве фазовой координаты скоростью  $\dot{x} = p/m_0$  частицы, то можно было бы положить  $m_0 \rightarrow 0$ . Но в ряде отношений фазовая координата  $p$  оказывается более удобной – например, при рассмотрении взаимодействующих частиц, различной массы или при учете релятивистских эффектов, в частности, при рассмотрении частиц с нулевой массой покоя. Поэтому мы будем применять в качестве фазовых координат именно  $x, p$ . Дифференциальные уравнения движения частиц среды на фазовой плоскости имеют тот же вид (2.2), т. е.

$$\dot{x} = \frac{p}{m_0}, \quad \dot{p} = F\left(\frac{p}{m_0}, x, t\right). \quad (5)$$

Если обозначить через  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_p$  единичные векторы осей  $x$  и  $p$ , то из уравнений (5) получим

$$\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{p}\mathbf{e}_p = \frac{p}{m_0}\mathbf{e}_x + F\left(\frac{p}{m_0}, x, t\right)\mathbf{e}_p. \quad (6)$$

Левая часть этого равенства представляет собой вектор скорости  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, p, t)$  потока частиц в плоскости  $x, p$ . Таким образом, если считать силовое поле  $F(\dot{x}, x, t)$  заданным, то равенство (6) задает поле скоростей (вообще говоря, нестационарное) потока среды, изображенного на плоскости  $x, p$ . Как мы уже упоминали, в этом состоит удобство перехода от оси координат частиц к фазовой плоскости, так как на оси  $x$  силовое поле не задает поля скоростей. Отметим, кстати, что если сила  $F$ , действующая на частицы, зависит не только от  $x$  и  $t$ , но и от  $\dot{x}$ , то точнее говорить о силовом поле в фазовой плоскости, а не на оси  $x$ .

Переменные  $x, p$  в фазовой плоскости играют роль эйлеровых координат. Наряду с ними можно применять лагранжевы координаты

$$x_0 = x|_{t=t_0}, \quad p_0 = p|_{t=t_0}. \quad (7)$$

Это делается в точности, как в §I.4, поэтому мы не будем на этом задерживаться.

Уравнение неразрывности в фазовой плоскости, выражающее закон сохранения массы каждой порции частиц, вытекает из §I.8. Так, формула (I.8.4), которую из-за неравноправия фазовых координат лучше переписать в координатной форме, с учетом формулы (6) приобретает вид

$$\frac{\partial n^{\phi}}{\partial t} + \frac{p}{m_0} \frac{\partial n^{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p} \left[ F\left(\frac{p}{m_0}, x, t\right) n^{\phi} \right] = 0, \quad (8)$$

формула (I.8.6) – вид



$$\frac{dn^\phi}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p} n^\phi = 0; \quad (9)$$

здесь производная  $d/dt$  берется вдоль фазовой траектории  $x = x(t), p = p(t)$ . Система уравнений (5) – это система дифференциальных уравнений характеристик для уравнения с частными производными (8).

Уравнение неразрывности (I.8.7) в лагранжевых координатах теперь выглядит так:

$$\frac{d}{dt} \left[ n^\phi \frac{D(x, p)}{D(x_0, p_0)} \right] = 0 \quad (10)$$

(в силу §III.3 якобиан в этом уравнении можно писать без знака абсолютной величины).

Отметим важный частный случай: пусть  $F = F(x, t)$ , т. е. силы, действующие на частицы, не зависят от их скорости (но могут зависеть от времени, т. е. силовое поле

может быть нестационарным!). Тогда из уравнения (9) мы видим, что  $\frac{dn^\phi}{dt} = 0$ , т. е.

каждый элемент среды на фазовой плоскости в процессе своей эволюции не меняет

фазовой плотности. (Впрочем, отсюда, конечно, не следует, что и  $\frac{dn}{dt} = 0$ , более того,

из-за рассеяния скорости, т. е. отсутствия единой скорости частиц в фиксированной точке оси  $x$ , выражение  $dn/dt$  не имеет смысла!)

## Упражнения

- 1) Истолкуйте смысл каждого члена уравнения (8) и выведите это уравнение непосредственно, исходя из полученного истолкования.
- 2) Пусть  $F(\dot{x}, x, t) = -m_0 \omega^2 x$  ( $\omega = \text{const} > 0$ ) (осциллирующая среда). Положив  $t_0 = 0$ , выведите формулы, связывающие эйлеровы координаты с лагранжевыми. Напишите уравнение неразрывности в формах (8), (9) и (10).

## § 4 Законы сохранения

Мы вывели уравнение неразрывности (3.8), исходя из предположения о сохранении числа частиц. Мы сейчас покажем, что и обратно, из этого уравнения, не находя его решений, можно вывести ряд законов сохранения.

- 1) *Закон сохранения массы.* Исходя из формулы (3.1) для плотности, получаем формулу для общей массы:

$$M = m_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} n^\phi(x, p, t) dp.$$

Более коротко мы запишем эту формулу в виде

$$M = m_0 \iint n^\phi(x, p, t) dx dp, \quad (1)$$

полагая здесь и далее, что если пределы интегрирования не обозначены, то переменные интегрирования пробегают их максимально возможную область изменения (т. е. в данном случае от  $-\infty$  до  $\infty$ ), и заметив, что порядок интегрирования здесь несуществен.

Для сходимости интеграла (1) мы будем считать, что функция  $n^\phi(x, p, t)$  для достаточно больших  $|x|, |p|$  либо тождественно равна нулю (такие функции называются *финитными*), либо стремится к нулю с достаточной скоростью, так что все рассматриваемые интегралы будут сходящимися и с ними можно действовать как с обычными, «собственными» интегралами. Это означает, что на бесконечности масса не порождается и не поглощается.

В правую часть (1) время  $t$  входит как параметр. Для выяснения зависимости  $M$  от  $t$  продифференцируем обе части (1) по  $t$ :

$$\frac{dM}{dt} = m_0 \iint \frac{\partial n^\phi}{\partial t} dx dp .$$

Воспользуемся уравнением неразрывности (3.8), которому должна удовлетворять функция  $n^\phi(x, p, t)$ :

$$\frac{dM}{dt} = - \iint p \frac{\partial n^\phi}{\partial t} dx dp - m_0 \iint \frac{\partial (Fn^\phi)}{\partial p} dx dp . \quad (2)$$

Выполнив во втором слагаемом интегрирование сначала по  $p$ , мы получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial (Fn^\phi)}{\partial p} dp = (Fn^\phi)_{p=-\infty}^{\infty} ;$$

в силу предположения, сделанного в предыдущем абзаце, это выражение, а с ним и все второе слагаемое в правой части (2) равны нулю. Первое также равно нулю, что видно, если выполнить в нем интегрирование сначала по  $x$ . Таким образом,  $dM/dt = 0$ , т. е.  $M = \text{const}$ , суммарная масса частиц в процессе эволюции среды сохраняется.

Конечно, сохранение массы было ясно с самого начала, на этом сохранении был основан вывод уравнения неразрывности (3.8), а этим уравнением мы воспользовались при исследовании интеграла (1). Таким образом, приведенное рассуждение никак нельзя считать доказательством закона сохранения масс, это рассуждение показывает, что закон сохранения масс можно формально вывести из уравнения (3.8), и тем самым подтверждает, что это уравнение адекватно (во всяком случае, в данном отношении) описывает реальные процессы.

Здесь полезно напомнить, что всякое математическое уравнение описывает реальные процессы лишь приближенно, с большей или меньшей точностью. В данном случае такая приближенность произошла уже из-за осреднения, примененного при переходе от совокупности частиц к сплошной среде, в других случаях при выводе уравнений могут применяться гораздо более грубые допущения, отбрасывания факторов, принимаемых за малосущественные, и т. п. Поэтому правильность уравнения, адекватность его реальным процессам не может быть доказана чисто математически, она вытекает из сопоставления следствий из этого уравнения с реальностью, с экспериментом, с физическими законами. При этом особую роль играет получение в качестве следствий из изучаемого уравнения наиболее важных известных свойств, универсальных законов, так как каждое такое следствие служит подтверждением правильности уравнения. К доказанному закону сохранения, а также и к двум другим, речь о которых пойдет ниже, возможен также следующий подход. Рассмотрим сначала движение частицы единичной массы, имевшей в момент  $t = t_0$  координату  $x_0$  и импульс  $p_0$ . Закон сохранения массы для этой частицы можно записать в виде

$$\iint G(x, p, t; x_0, p_0, t_0) dx dp \equiv 1 \quad (\text{при всех } t), \quad (3)$$

где  $G$  – фазовая плотность, отвечающая этой частице в момент  $t$ , т. е. соответствующая функция влияния (она, конечно, имеет дельтаобразный характер!) для фазовой плотности. Если теперь в момент  $t = t_0$  было произвольное распределение фазовой плотности  $n_0^\phi(x_0, p_0)$ , то пользуясь соотношением

$$\iint G(x, p, t; x_0, p_0, t_0) n_0^\phi(x_0, p_0) dx_0 dp_0 = n^\phi(x, p, t),$$

из (3) получаем

$$\iint n^\phi(x, p, t) dx dp = \iint \iint G(x, p, t; x_0, p_0, t_0) n_0^\phi(x_0, p_0) dx_0 dp_0 dx dp = \iint n_0^\phi(x_0, p_0) dx_0 dp_0 = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

- 2) *Закон сохранения суммарного импульса  $P$  (закон сохранения количества движения) при отсутствии сил.*

В силу формулы (3.2)

$$P = \iint pn^\phi(x, p, t) dx dp .$$

Рассуждая, как в п. 1, найдем

$$\frac{dP}{dt} = - \iint p \frac{\partial(Fn^\phi)}{\partial p} dx dp . \quad (4)$$

В частности, если  $F \equiv 0$ , т. е. силы отсутствуют (движение частиц свободное), то  $dP/dt = 0$ , т. е.  $P = \text{const}$ , суммарное количество движения среды сохраняется.

Если в правой части (4) внутреннее интегрирование производить по  $p$  и осуществить интегрирование по частям, мы получим

$$\frac{dP}{dt} = \iint Fn^\phi dx dp .$$

Эта формула выглядит наиболее просто, если сила, действующая на частицу, зависит только от координаты этой частицы,  $F = F(x, t)$ . Выполняя внутреннее интегрирование по  $p$  и пользуясь формулой (3.1), приходим к равенству

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{m_0} \int \rho(x, t) F(x, t) dx .$$

Отсюда получаем более общее достаточное условие сохранения суммарного импульса  $P$ :

$$\int \rho F dx . \quad (5)$$

Отметим, что при этом из-за действия силы количество движения отдельных частиц меняется, но при выполнении условия (5) возрастание количества движения у одних частиц компенсируется убыванием его у других.

- 3) *Закон сохранения энергии при потенциальных автономных силах.* В силу последней формулы (3.4) в рассматриваемом случае получим выражение полной энергии для среды из частиц

$$E = \frac{1}{2m_0} \iint p^2 n^\phi(x, p, t) dx dp + m_0 \iint u(x) n^\phi(x, p, t) dx dp ;$$

при этом первое слагаемое в правой части равно кинетической энергии, а второе – потенциальной энергии среды.

Проверим, что  $E$  не зависит от времени  $t$ , для чего вычислим

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2m_0} \int dx \int p^2 \left[ -\frac{p}{m_0} \frac{\partial n^\phi}{\partial x} + m_0 \frac{\partial}{\partial p} (u'(x) n^\phi) \right] dp + \\ &+ m_0 \int u(x) dx \int \left[ -\frac{p}{m_0} \frac{\partial n^\phi}{\partial x} + m_0 \frac{\partial}{\partial p} (u'(x) n^\phi) \right] dp . \end{aligned}$$

Если раскрыть квадратные скобки и каждый из интегралов разбить на два, то после интегрирования производных первое слагаемое в первом интеграле и второе во втором обратятся в нуль. Оставшиеся два слагаемых перепишем в виде

$$\frac{1}{2} \int u'(x) dx \int p^2 \frac{\partial n^\phi}{\partial p} dp - \int p dp \int u(x) \frac{\partial n^\phi}{\partial x} dx ;$$

они взаимно уничтожаются после интегрирования внутренних интегралов по частям (проверьте!). Таким образом,  $dE/dt = 0$ , т. е.  $E = \text{const}$  – суммарная полная энергия среды сохраняется. Конечно, при этом кинетическая и потенциальная энергия среды, вообще говоря, меняются, сохраняется только их сумма.

С законами сохранения непосредственно связаны выражения баланса рассмотренных величин на конечном или полубесконечном интервалах оси  $x$ . Ограничимся для простоты полубесконечным интервалом  $a \leq x < \infty$ . Масса среды на нем равна

$$M_{a,\infty} = m_0 \int_a^\infty dx \int_{-\infty}^\infty n^\phi(x, p, t) dp .$$

Вычисления, аналогичные проведенным в п. 1, дают

$$\frac{d}{dt} M_{a,\infty} = - \int_{-\infty}^\infty p dp \int_a^\infty \frac{\partial n^\phi}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^\infty n^\phi(a, p, t) p dp = \rho_p(a, t), \quad (6)$$

где  $\rho_p$  означает плотность импульса среды (см. (3.3)). Отсюда, в частности, получаем, что  $\rho_p$  есть поток массы (§I.6) и что для стационарного процесса должно быть  $\rho_p(x) \equiv 0$ . Аналогичное рассмотрение импульса

$$P_{a,\infty} = \int_a^\infty dx \int_{-\infty}^\infty p n^\phi(x, p, t) dp ,$$

которое мы предоставляем читателю, приводит к формуле

$$P_{a,\infty} = \int_a^\infty dx \int_{-\infty}^\infty F n^\phi dp + \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^\infty n^\phi(a, p, t) p^2 dp . \quad (7)$$

Таким образом, изменение импульса на интервале объясняется, во-первых, действием силы  $F$ , ускоряющей или замедляющей частицы, и, во-вторых, тем, что через конец  $a$  интервала происходит обмен частицами, обладающими импульсом, с остальной частью оси  $x$ . Поэтому второе слагаемое в правой части (7) представляет собой поток импульса

$$q_p = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^\infty n^\phi(a, p, t) p^2 dp = 2\rho_T|_{x=a} \quad (8)$$

(см. первую формулу (3.4)). Оно имеет размерность силы и его естественно интерпретировать как *силу давления* среды в точке  $x = a$ . Аналогично тому, как говорилось в §I.6, давление в данном рассмотрении отнюдь не связано со столкновениями частиц, так как мы все время считаем, что частицы не взаимодействуют; оно порождается переносом импульса частицами через рассматриваемое сечение. При этом, поскольку  $p$  под знак интеграла (8) входит в квадрате, при подсчете давления несущественно, входят ли частицы через это сечение в интервал  $a \leq x < \infty$ , выходят из него или имеются как входящие, так и выходящие частицы: все они вносят в давление положительный вклад.

Если рассматривается стационарный процесс, то левая часть равенства (7) равна нулю и, дифференцируя это равенство по  $a$ , а затем заменяя  $a$  на произвольное  $x$ , получим соотношение

$$\frac{dq_p}{dx} = \int_{-\infty}^\infty F n^\phi dp .$$

Оно особенно просто, если сила, действующая на частицы, зависит только от их координаты, так как тогда

$$\frac{dq_p}{dx} = F \int_{-\infty}^\infty n^\phi dp = \frac{1}{m_0} F(x) \rho(x) (= -u'(x) \rho(x)).$$

Если умножить обе части на  $dx$ , то в правой части получится внешняя сила, действующая на элемент  $dx$ , т. е. мы приходим к очевидному условию статического равновесия; этим оправдывается истолкование выражения (8) как силы давления. Приведем еще формулы для скорости изменения кинетической энергии  $T_{a,\infty}$  и потенциальной энергии  $U_{a,\infty}$  среды в случае потенциальных автономных сил (вывод этих формул мы также предоставляем читателю):

$$\frac{d}{dt} T_{a,\infty} = \frac{1}{2m_0^2} \int_{-\infty}^\infty p^3 n^\phi(a, p, t) dp - \int_a^\infty u'(x) q(x) dx, \quad \frac{d}{dt} U_{a,\infty} = u(a) q(a) + \int_a^\infty u'(x) q(x) dx, \quad (9)$$

где под  $q$  понимается поток массы, определенный формулой (6). Отсюда получаем

выражения для потока кинетической и потенциальной энергий:

$$q_T = \frac{1}{2m_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} p^3 n^\Phi(x, p, t) dp, \quad q_U = u(x)q(x).$$

Складывая формулы (9), получаем выражение для скорости изменения полной энергии:

$$\frac{d}{dt} E_{a,\infty} = q_T + q_U = q_E;$$

это изменение порождается только переносом полной энергии частицами через конец  $x = a$  интервала  $a \leq x < \infty$ .

Мы не будем рассматривать решение начальной задачи при построении локального параметра (в частности, плотности) среды на фазовой плоскости, так как это построение осуществляется в точности так же, как в §§III.2–4, а ограничимся несколькими упражнениями на эту тему.

### Упражнения

- 1) Приведите для среды из частиц аналог утверждения: приращение кинетической энергии равно суммарной работе сил, действующих на систему.
- 2) Напишите закон эволюции фазовой плотности  $n^\Phi(x, p, t)$  при заданном ее начальном распределении  $n^\Phi|_{t=t_0} = n^\Phi_0(x_0, p_0)$  для однородного поля сил, т. е. для  $F = F(t)$ .
- 3) То же – для общего поля  $F(x, p, t)$  при  $n^\Phi_0(x, p) = \delta(x - x_0)\delta(p - p_0)$  ( $x_0$  и  $p_0$  – постоянные). Какой смысл полученного решения?
- 4) Напишите закон эволюции плотности для случая, когда среда в начальный момент была однородна и покоилась.
- 5) Найдите стационарное распределение плотности,  $n^\Phi(x, p)$  если  $F = -kx - \frac{\lambda}{m_0} p$ ,

$n^\Phi(x, 0) \equiv n^\Phi_0 = \text{const}$  при фиксированном  $k > 0$  и различных  $\lambda$ .

Указание. Воспользуйтесь параметрическим представлением плотности  $n^\Phi = n^\Phi(x_0, t)$ ,  $x = x(x_0, t)$ ,  $p = p(x_0, t)$ .

## § 5 Стационарное распределение частиц в консервативном поле

Для стационарного консервативного (т. е. не зависящего от скоростей и потенциального) поля сил  $F(x)$  система уравнений характеристик имеет вид

$$\dot{x} = \frac{p}{m_0}, \quad \dot{p} = F(x)$$

и обладает очевидным первым интегралом

$$\frac{1}{2m_0} p^2 + m_0 u(x) = E \quad (= \text{const}), \quad \text{где } m_0 u'(x) = -F(x), \quad (1)$$

выражающим закон сохранения энергии; здесь  $E$  – полная энергия частицы.

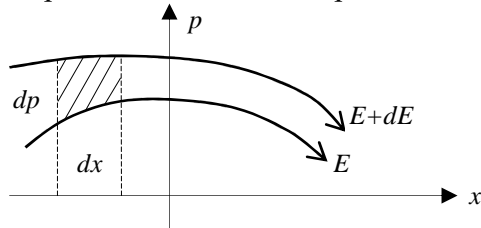


Рис. 74

Мы уже упоминали в конце §2, что в рассматриваемом случае каждый элемент среды на фазовой плоскости в процессе своей эволюции не меняет плотности. Отсюда непосредственно вытекает, в частности, что любое стационарное распределение фазовой плотности  $n^\Phi(x, p)$  постоянно вдоль каждой характеристики (почему?), хотя, вообще говоря, различно вдоль

разных характеристик.

Постоянство фазовой плотности вдоль характеристики находится в соответствии со следующими элементарными соображениями. Выделим в среде «струйку» частиц,

полная энергия которых заключена между соседними значениями  $E$  и  $E + dE$  (рис. 74). Тогда плотность элемента этой струйки, заштрихованного на рис. 74, равна

$$\rho = m_0 \frac{n^\phi dx dp}{dx} = m_0 n^\phi dp. \quad (2)$$

Однако, дифференцируя равенство (1) при зафиксированном  $x$ , получаем, что

$$p dp = m_0 dE|_{x=\text{const}}, \text{ откуда (2) можно переписать в виде } \rho = m_0 n^\phi dE|_x \frac{1}{\dot{x}}.$$

Но первые три множителя вдоль струйки постоянны, т. е. мы получаем, что плотность среды с нерассеянной скоростью обратно пропорциональна этой скорости, как и должно быть для стационарных одномерных течений при сохранении масс.

Предположим, что частицы среды обладают полной энергией в некоторых пределах  $E_1 < E < E_2$  и каждому уровню полной энергии отвечает на рис. 74. более одной траектории движения частицы на фазовой плоскости; так будет, если на интервале  $\alpha < x < \beta$ , заполненном средой (это может быть и вся ось  $x$ ), потенциал  $u(x)$  не имеет максимумов и по крайней мере одно из значений  $u(\alpha)$  и  $u(\beta)$  равно  $E_2$  ( $u(\alpha)/u(\beta)$  может оказаться меньше  $E_2$ , только если  $\alpha = -\infty/\beta = \infty$  (соответственно)). Тогда в силу предыдущего абзаца стационарная фазовая плотность  $n^\phi$  будет однозначной функцией энергии  $E$  частицы  $n^\phi = n^\phi(E)$ . Если считать этот закон распределения частиц по уровням энергии известным, то нетрудно получить формулу для плотности среды:

$$\rho(x) = m_0 \int n^\phi dp = 2m_0^2 \int n^\phi(E) \frac{dE}{|p|} = \sqrt{2}m_0^{3/2} \int_{m_0 u(x)}^{E_2} \frac{n^\phi(E) dE}{\sqrt{E - m_0 u(x)}}, \quad (3)$$

здесь коэффициент 2 появился из-за того, что каждому значению  $E > m_0 u(x)$

соответствуют два значения  $p = \pm \sqrt{2m_0 E - 2m_0^2 u(x)}$ , отвечающие двум встречным потокам. Отметим, что интеграл (3) – несобственный, но сходящийся: на нижнем

пределе, так как там получается интеграл вида  $\int_a^{b>a} \frac{ds}{\sqrt{s-a}}$ , а на верхнем, при  $E_2 = \infty$ , за счет достаточно быстрого затухания плотности  $n^\phi(E)$ .

## § 6 Примеры

Одним из важных примеров распределения фазовой плотности по энергии является уже рассмотренное в §II.14 распределение, для которого все частицы обладают одинаковой энергией<sup>28</sup>  $E_0$  и потому в фазовой плоскости занята только одна траектория, отвечающая уровню  $E_0$ , т. е.  $n^\phi = A \delta(E - E_0)$ , где  $A$  – некоторый коэффициент. Подстановка в (5.3) дает

$$\rho(x) = \sqrt{2}m_0^{3/2} \int \frac{A \delta(E - E_0)}{\sqrt{E - m_0 u(x)}} dE = \frac{\sqrt{2} A m_0^{3/2}}{\sqrt{E_0 - m_0 u(x)}}.$$

Мы видим, что среда размазана по области таких  $x$ , для которых значения потенциала  $u(x) < E_0/m_0$ , причем в точках, где  $u(x) = E_0/m_0$ , плотность среды обращается в бесконечность.

В качестве другого примера приведем *Ферми-распределение*, для которого  $n^\phi(E) = B e(E - E_0)$ , где  $e(s)$  – единичная функция (см., например, ЭПМ, §VI.3), равная единице для  $s > 0$  и нулю для  $s < 0$ . Вычисление плотности по формуле (5.3) дает:

$$\rho(x) = \sqrt{2}m_0^{3/2} \int \frac{B e(E - E_0)}{\sqrt{E - m_0 u(x)}} dE = \sqrt{2}m_0^{3/2} B \int_{m_0 u(x)}^{E_0} \frac{dE}{\sqrt{E - m_0 u(x)}} = 2\sqrt{2} B m_0^{3/2} \sqrt{E_0 - m_0 u(x)}.$$

Таким образом, среда здесь размазана по той же области, что в предыдущем примере,

<sup>28</sup> В §II.14 отмечалось, что такая совокупность частиц образует микроканонический ансамбль.

однако в концевых точках этой области плотность  $\rho$  обращается в нуль<sup>29</sup>.

Рассмотрим, наконец, *каноническое распределение по Максвеллу – Больцману*, определяемое формулой  $n^\Phi(E) = Ce^{-E/\vartheta}$ , где  $C$  и  $\vartheta$  – параметры распределения. Для вычисления плотности здесь удобно воспользоваться интегрированием по  $p$ , т. е. формулой (3.1):

$$\rho(x) = m_0 \int_{-\infty}^{\infty} n^\Phi dp = m_0 \int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-\frac{(p^2/2m_0) + m_0 u(x)}{\vartheta}} dp = Cm_0 e^{-\frac{m_0 u(x)}{\vartheta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2m_0 \vartheta}} dp = Cm_0 \sqrt{2\pi m_0 \vartheta} e^{-\frac{m_0 u(x)}{\vartheta}}.$$

Структура этой формулы, как и в предшествующих примерах, не зависит от конкретного вида потенциала  $u(x)$ . Однако в рассматриваемом случае, в отличие от двух предыдущих, среда оказывается размазанной по всей оси  $x$ .

Особая роль распределения по Максвеллу – Больцману выясняется при рассмотрении процессов, в которых частицы могут испытывать столкновения, связанные с перераспределением их кинетической энергии. Рассмотрение таких процессов выходит за рамки этой книги; отметим только, что любое распределение в среде, частицы которой не испытывают столкновений, после допущения столкновений превращается в нестационарное и начинает эволюционировать – исключение составляет распределение по Максвеллу – Больцману, которое при этом остается стационарным.

Пусть потенциал  $u(x)$  имеет следующий простой вид:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq l), \\ \infty & (-\infty < x < 0, \quad l < x < \infty). \end{cases} \quad (1)$$

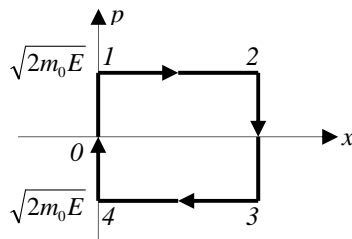


Рис. 75

Это означает, что частицы как бы находятся в ящике, осциллируя между стенками  $x = 0$  и  $x = l$  так, что каждая из частиц, обладающая полной энергией  $E$ , проходит от одной стенки до другой и обратно с постоянной по абсолютной величине скоростью  $\sqrt{\frac{2E}{m_0}}$  с мгновенным изменением

направления у стенки. Такой осцилляции отвечает циклическое движение по фазовому прямоугольнику 1234 (рис. 75) с мгновенным перескоком из 2 в 3 и из 4 в 1.

Допустим теперь, что внутри описанного «ящика» фазовая плотность распределена по закону Ферми. Тогда параметры  $E_0$  и  $B$  этого распределения связаны с массой  $M$  и полной энергией  $\mathcal{E}$  осциллирующей среды формулами

$$M = l \cdot 2\sqrt{2m_0 E_0} B m_0 = l B E_0^{1/2} (2m_0)^{3/2}, \quad (2)$$

<sup>29</sup> Константа  $B$  выражается через постоянную Планка  $h$ ,  $B = 2/h$ , где  $h = 6,5 \cdot 10^{-27} \text{ э} \cdot \text{см}^2/\text{сек}$ . (Для знатоков: значение  $B$  приведено для частиц со спином  $1/2$ .) Надо напомнить, однако, что природа, Вселенная характеризуются тремя пространственными координатами. Поэтому все приведенные выше формулы, относящиеся к одномерным задачам, носят характер упражнений. В трехмерном мире фазовую плотность надо относить к шестимерному элементу объема  $|d\mathbf{r}||d\mathbf{p}|$ , константа  $B = 2/h^3$ , а для плотности получается формула  $\rho(r) = B \frac{4\pi}{3} m_0 [2m_0(E - U(r))]^{3/2}$ . Уточним, что здесь мы говорим о состоянии

системы при абсолютном нуле температуры, когда эта система удовлетворяет условию минимума полной энергии. Опыт показывает, что Ферми-распределению подчиняются, в частности, электроны. Причина этого лежит в глубоком законе природы, согласно которому фазовая плотность среды из электронов не может в стационарном состоянии превышать указанную выше константу  $B$ . Но при выполнении этого условия минимальный энергетический уровень системы в целом достигается, только если на части фазовой плоскости (или фазового пространства, если идет речь о пространственных движениях) фазовая плотность равна  $B$ , а на остальной части плотность равна нулю, там среды нет. Другими словами, энергетические причины заставляют среду концентрироваться до максимально возможной фазовой плотности, что и приводит к распределению по Ферми. Это происходит аналогично тому, как в водоеме тяжелая жидкость в равновесии заполняет весь водоем до некоторого уровня, выше которого жидкости нет, что энергетически наиболее выгодно.

$$\mathcal{E} = l \cdot 2 \int_0^{\sqrt{2m_0 E_0}} \frac{p^2}{2m_0} B dp = \frac{2}{3} l B E_0^{3/2} (2m_0)^{1/2}. \quad (3)$$

Пусть правая стенка переместилась, т. е.  $l$  получило приращение  $dl$ . Тогда можно принять (мы не приводим здесь доказательство этого), что если это перемещение осуществляется достаточно медленно, то и после него фазовая плотность будет распределена по Ферми, но с другими параметрами распределения  $E_0 + dE_0$  и  $B + dB$ . Однако при такой деформации масса среды сохраняется, т. е.  $dM = 0$ ; кроме того, в конце п. 3 было показано, что даже если силовой потенциал зависит от времени, фазовая плотность движущегося элемента среды не меняется. Отсюда и  $dB = 0$ . Опираясь на эти сведения, вычислим  $d\mathcal{E}$ . Для этого продифференцируем равенство (2), что даст

$$dl \cdot E_0^{1/2} + l \cdot \frac{1}{2} E_0^{-1/2} dE_0 = 0, \text{ т. е. } dE_0 = -\frac{2E_0}{l} dl.$$

Отсюда в силу равенства (3)

$$d\mathcal{E} = \frac{2}{3} B (2m_0)^{1/2} \left( dl \cdot E_0^{3/2} + l \cdot \frac{3}{2} E_0^{1/2} dE_0 \right) = -\frac{4}{3} B (2m_0)^{1/2} E_0^{3/2} dl.$$

Итак, при увеличении  $l$  полная внутренняя энергия  $\mathcal{E}$  системы (которая в рассматриваемом примере равна кинетической) уменьшилась, т. е. система произвела работу. Отношение этой работы к элементарному пути, пройденному стенкой, т. е.

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{4}{3} B (2m_0)^{1/2} E_0^{3/2}, \quad (4)$$

есть давление среды на стенку «ящика».

Полученный результат можно проверить по формуле (5.5):

$$q_p(x, t) = \frac{1}{m_0} \cdot 2 \int_0^{\sqrt{2m_0 E_0}} B p^2 dp = \frac{2B}{3m_0} \left( \sqrt{2m_0 E_0} \right)^3,$$

что совпадает с (4). Мы предоставляем читателю с помощью формул (2) и (3) показать, что правая часть (4) равна  $2\mathcal{E}l$ .

Аналогичное рассмотрение распределения по Максвеллу–Больцману в «ящике» отнесено к упражнениям. Рассмотрим теперь другой вид потенциала

$$u(x) = \begin{cases} gx & (0 \leq x < \infty), \\ \infty & (-\infty < x < 0), \end{cases}$$

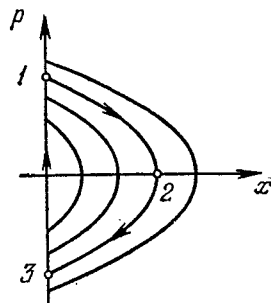


Рис. 76

отвечающий однородному силовому полю напряженности  $-g$ , расположенному по одну сторону от непроницаемой стенки  $x = 0$ . Можно представить себе, что мы рассматриваем ящик с дном но без крышки, причем на частицы, находящиеся внутри этого ящика, действует сила тяжести. Частица с полной энергией  $E$  в фазовой плоскости совершает циклические движения по линии вида 1231 (рис. 76), состоящей из дуги параболы с уравнением

$$\frac{p^2}{2m_0} + m_0 gx = E, \text{ т. е. } x = \frac{E}{gm_0} - \frac{p^2}{2gm_0^2}$$

и мгновенно проскакиваемого отрезка 31 оси  $p$ .

Если принять, кроме того, что фазовая плотность стационарна и распределена по закону Максвелла – Больцмана

$$n^\Phi(x, p) = C e^{-E/\vartheta} = C e^{-m_0 gx/\vartheta} e^{-p^2/2m_0\vartheta},$$

то рассматриваемая схема описывает распределение частиц в *изотермической атмосфере* (температура которой не зависит от высоты  $x$ ). Найдем некоторые характеристики такой атмосферы. Так, плотность на высоте  $x$  равна (см. (3.1))



$$\rho(x) = m_0 \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-m_0 g x / \vartheta} e^{-p^2 / 2 m_0 \vartheta} dp = 2 \sqrt{\pi \vartheta} C m_0^{3/2} e^{-m_0 g x / \vartheta}; \quad (5)$$

эта формула называется *барометрической формулой*. Если условно принять за высоту атмосферы значение  $x = H$ , для которого  $\int_0^{\infty} \rho dx = \rho(0)H$ , то получаем

$$H = \frac{1}{\rho(0)} \int_0^{\infty} \rho dx, \text{ т. е. } H = \frac{\vartheta}{m_0 g}.$$

Давление  $q_p$  на высоте  $x$  равно силе, действующей на столб  $x < s < \infty$ , т. е. на основании (5)

$$q_p(x) = g \int_x^{\infty} \rho(x) ds = 2 \vartheta \sqrt{\pi \vartheta} C m_0^{1/2} e^{-m_0 g x / \vartheta} = \frac{\vartheta}{m_0} \rho(x); \quad (6)$$

давление получается пропорциональным плотности. (Мы предоставляем читателю получить тот же результат с помощью формулы (4.5).) Вычислим еще среднюю кинетическую энергию частиц на высоте  $x$ : на основании формул (4.5) и (6) получаем

$$\bar{T} = \frac{dT}{dn} = \frac{\rho_T dx}{dn} = \frac{q_p dx}{2dn} = \frac{\vartheta \rho}{2m_0 dn/dx} = \frac{\vartheta}{2}.$$

Итак, эта энергия не зависит от высоты, а определяется только параметром  $\vartheta$  в распределении Максвелла – Больцмана. Этот важнейший параметр называется *температурой* рассматриваемой системы. Он имеет размерность энергии и потому может измеряться в любых единицах энергии. Однако на практике обычно оказывается более удобным измерять температуру в специальных единицах – градусах (Кельвина). Коэффициент перевода градусов в систему CGS называется *постоянной Больцмана*, он равен  $1,37 \cdot 10^{-16}$  эрг/град.

Из формулы (6) мы видим, что давление пропорционально не только плотности, но и температуре среды.

Отметим, что частицы в реальной атмосфере отнюдь не являются невзаимодействующими; напротив, средний пробег частиц между столкновениями имеет порядок всего  $10^{-5}$  см. Однако оказывается, что это взаимодействие не нарушает закона распределения Максвелла – Больцмана и, тем самым, справедливости выведенных здесь формул. Мы вернемся к этому вопросу в §V.22.

## Упражнения

- 1) Для линейного осциллятора, т. е. при  $u(x) = \frac{k}{2} x^2$ , установите связь параметров  $C$ ,  $\vartheta$  канонического распределения по Максвеллу – Больцману с массой  $M$  и полной энергией  $\mathcal{E}$  осциллирующей среды.
- 2) Выведите аналоги формул (2) – (4) для потенциала (1) и распределения Максвелла – Больцмана.

## § 7 Среда с нерассеянной скоростью

Допустим, что в начальный момент времени  $t_0$  частицы распределены вдоль оси  $x$  с плотностью  $\rho_0(x)$  и все частицы с координатой  $x_0$  имеют при  $t = t_0$  один и тот же импульс  $\chi_0(x_0)$ ; другими словами, в каждой точке оси  $x$  рассеивание скорости отсутствует. (Например, при  $t = t_0$  все частицы могли покоиться, это означало бы, что  $\chi_0(x_0) \equiv 0$ .) Тогда начальная фазовая плотность

$$n_0^\phi(x_0, p_0) = \frac{1}{m_0} \rho_0(x_0) \delta(p_0 - \chi_0(x_0)).$$

На фазовой плоскости  $x, p$  при  $t = t_0$  носителем потока частиц будет служить линия с уравнением  $p = \chi_0(x)$ .

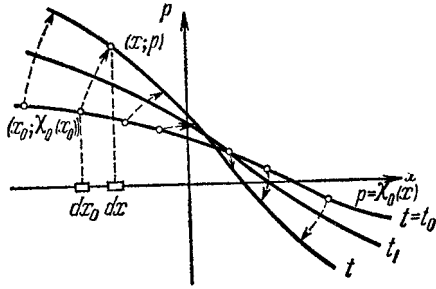


Рис. 77  $t_0 < t_1 < t$

С течением времени частицы перемещаются, и потому линия – носитель семейства изображающих точек среды – меняет свое положение на фазовой плоскости (рис. 77). Если обозначить через

$$x = \varphi(t; x_0, p_0, t_0), \quad p = \psi(t; x_0, p_0, t_0) \quad (1)$$

решение системы уравнений (3.5), удовлетворяющее начальным условиям (3.7), то получаем, что частица, имеющая в начальный момент  $t_0$  координату  $x = \xi$ , обладает скоростью, меняющейся по вполне

определенному однозначному закону  $v = \frac{1}{m_0} \psi(t; \xi, \chi_0(\xi), t_0)$ . Таким образом, мы

приходим к ситуации, рассмотренной в гл. II, с возможным явлением перехлеста (§II.10). В частности, на рис. 25 показана возможная эволюция носителя семейства изображающих точек среды в простейшем случае, когда  $F \equiv 0$ . (Какой вид имеет на рис. 25 поле фазовых скоростей?)

В §II.10 мы показали, что при возникновении перехлеста в точках «заворорта» среды ее плотность обращается в бесконечность. Подчеркнем, что эта возможность необходимо связана с нерассеянностью скорости. Если скорость рассеяна, так что фазовая плотность  $n^\Phi$  является всюду конечной, и к тому же скорость всех частиц ограничена, то и «обычная» плотность среды не может обратиться в бесконечность. Это видно из формулы (3.1), так как в рассматриваемом случае интеграл фактически распространен по конечному интервалу скоростей; более точно, если для всех частиц  $|p| < a$ , то  $\max_x \rho \leq 2am_0 \max_{x,p} n^\Phi$  (почему?). Для рассеянной скорости явление перехлеста не проявляется.

В частности, если всем точкам линии  $p = \chi_0(x)$  отвечает одинаковый уровень полной энергии  $E$ , то частицы на фазовой плоскости будут перемещаться по этой линии, которая будет, таким образом, оставаться неподвижным носителем изображающих точек среды во все моменты времени. Мы вновь приходим к ситуации, рассмотренной в §II.14, в которой явления перехлеста не будет. Однако при этом, как и при перехлесте, на оси  $x$  возникают точки с бесконечной плотностью; в обоих случаях это связано с обращением фазовой плотности в бесконечность.

## Упражнения

- 1) Для среды с нерассеянной скоростью вычислите  $d\rho/dt$ .
- 2) Пусть  $F = -m_0\omega^2x$ ,  $\rho_0(x) \equiv \rho_0 = \text{const}$ ,  $\chi_0(x_0) = x_0^2$ ,  $t_0 = 0$ . Найдите  $\rho_0(x, t)$ ,  $t_{кр}$  и уравнение каустики в плоскости  $x, t$ .

## § 8 Особые решения. Автомодельность

Если частица в начальный момент  $t_0$  имела координату  $x_0$  и импульс  $p_0$ , то, пользуясь обозначениями §7, получим, что в момент  $t$  она будет изображаться точкой фазовой плоскости с координатами (7.1); стало быть, соответствующая фазовая плотность равна

$$n^\Phi = G(x, p, t; x_0, p_0, t_0) = \delta(x - \varphi(t; x_0, p_0, t_0)) \delta(p - \psi(t; x_0, p_0, t_0)).$$

С помощью этой функции легко выразить решение

$$n^\Phi(x, p, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} G(x, p, t; x_0, p_0, \tau) r(x_0, p_0, \tau) dp_0 \quad (1)$$

задачи о распространении потока частиц, непрерывно возникающих с фазово-временной плотностью  $r(x_0, p_0, \tau)$  (это значит, что за время от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$  на участке оси

от  $x_0$  до  $x_0 + dx_0$  в интервале импульсов от  $p_0$  до  $p_0 + dp_0$  возникает  $r(x_0, p_0, \tau) dx_0 dp_0 d\tau$  частиц).

Рассмотрим в качестве примера простую задачу о распространении потока частиц, непрерывно возникающих в одной точке. Пусть силы на частицы не действуют, т. е.  $F \equiv 0$ , и, начиная с момента  $t = 0$ , в точке  $x_0 = 0$  возникают частицы с интенсивностью  $\nu$  штук в единицу времени, равномерно распределенные по импульсу на интервале  $0 \leq p_0 \leq h$ . Решение такой задачи совершенно наглядно. Именно, к любому моменту  $t > 0$  возникает  $\nu t$  частиц. Поэтому в указанном диапазоне импульсов на интервал от  $p$  до  $p + dp$  придется  $\frac{\nu t}{h} dp$  частиц. Эта порция будет равномерно распределена по интервалу  $0 \leq x \leq \frac{pt}{m_0}$ , т. е. с фазовой плотностью

$$\frac{\nu t}{h} dp : \frac{pt}{m_0} dp = \frac{m_0 \nu}{hp}.$$

Таким образом, получается фазовая плотность

$$n^\Phi(x, p, t) = \begin{cases} \frac{m_0 \nu}{hp} & \left( 0 \leq x \leq \frac{pt}{m_0}, \quad 0 \leq p \leq h \right), \\ 0 & \text{(при прочих комбинациях } x, p) \end{cases} \quad (2)$$

(рис. 78). Массовая плотность на оси  $x$  получается равной

$$\rho(x, t) = \begin{cases} m_0 \int_{m_0 x/t}^h \frac{m_0 \nu}{hp} dp = \frac{m_0^2 \nu}{h} \ln \frac{ht}{m_0 x} & \left( 0 \leq x \leq \frac{ht}{m_0} \right), \\ 0 & \left( \frac{ht}{m_0} < x < \infty \right). \end{cases}$$

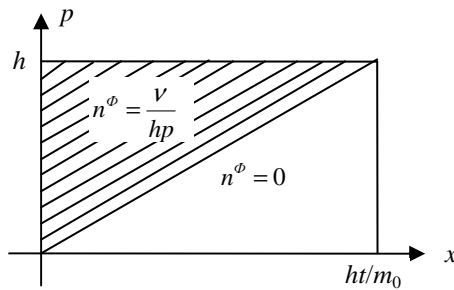


Рис. 78

Как видим, при  $x = 0$  плотность  $\rho$  равна бесконечности, что вызвано непрерывным возникновением как угодно медленных частиц (этим же объясняется то, что при любом фиксированном  $x$  плотность  $\rho(x, t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ ). На подвижном конце интервала, заполненного частицами, т. е. при  $x = ht/m_0$ , плотность  $\rho$  равна нулю, так как там находятся только самые быстрые частицы, вышедшие в начальный момент времени. Интеграл

$\int_0^{ht/m_0} \rho dx$  при каждом  $t$  хоть и несобственный, но сходящийся, он равен общей массе

частиц, возникших к моменту  $t$ , т. е.  $\nu m_0 t$  (проверьте этот результат с помощью формального вычисления интеграла!).

Для практики действий с  $\delta$ -функцией получим этот же результат как следствие общей формулы (1). Здесь  $\varphi(t; x_0, p_0, t_0) = x_0 + \frac{p_0}{m_0}(t - t_0)$ ,  $\psi(t; x_0, p_0, t_0) = p_0$ , так что

$$G(x, p, t; x_0, p_0, t_0) = \delta\left(x - x_0 - \frac{p_0}{m_0}(t - t_0)\right) \delta(p - p_0).$$

Кроме того,

$$r(x_0, p_0, \tau) = \begin{cases} \frac{\nu}{h} \delta(x_0) & (0 \leq p_0 \leq h, \quad 0 \leq \tau < \infty), \\ 0 & \text{(при прочих комбинациях } p_0, \tau). \end{cases}$$

Поэтому формула (1) дает при  $t > 0$

$$n^\phi(x, p, t) = \int_0^t d\tau \int_0^h dp_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - x_0 - \frac{p_0}{m_0}(t - \tau)\right) \delta(p - p_0) \frac{V}{h} \delta(x_0) dx_0. \quad (3)$$

Для преобразования правой части нам понадобится общая формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) \delta(a - b) da = \delta(x - b). \quad (4)$$

Для ее доказательства обозначим интеграл, стоящий в левой части, через  $J(x)$ , и заметим, что при каждом  $x \neq b$  подынтегральная функция равна нулю при всех  $a$ , т. е. и интеграл  $J(x) = 0$ . Отсюда видно, что зависимость  $J(x)$  похожа на дельта-функцию  $\delta(x - b)$ . Чтобы проверить это, воспользуемся определяющим соотношением для дельта-функции (§1.5) и вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(x) f(x) dx$$

при любой непрерывной функции  $f(x)$ . Совершая простые преобразования, получим (проверьте!):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} J(x) f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) \delta(a - b) f(x) da = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(a - b) da \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(a) \delta(a - b) da = f(b) \end{aligned}$$

(при этом мы дважды пользовались упомянутым определяющим соотношением). Так как определяющему соотношению удовлетворяет только дельта-функция, мы получаем, что  $J(x) = \delta(x - b)$ , т. е. приходим к формуле (4).

Применяя формулу (4) к решению (3), получим

$$n^\phi(x, p, t) = \frac{V}{h} \int_0^h \delta(p - p_0) dp_0 \int_0^t \delta\left(x - \frac{p_0}{m_0}(t - \tau)\right) d\tau.$$

Так как выражение  $x - \frac{p_0}{m_0}(t - \tau)$  во внутреннем интеграле пробегает интервал от

$x - \frac{p_0}{m_0}t$  до  $x$ , то внутренний интеграл отличен от нуля (и равен  $m_0/p_0$ ) только при

$0 < x < p_0/m_0t$ , т. е.

$$n^\phi(x, p, t) = \begin{cases} \frac{V}{h} \int_0^h \delta(p - p_0) \frac{m_0}{p_0} e\left(p_0 - \frac{m_0x}{t}\right) dp_0 & (x > 0), \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

При  $m_0x/t < p < h$  последний интеграл равен  $m_0/p$ , а при прочих комбинациях  $x, p, t$  — равен нулю. Мы приходим к выражению (2) для решения, полученному выше из элементарных соображений, с точностью до несущественной замены нестрогих неравенств на строгие. Полученное решение обладает замечательным свойством *автомодельности*, другими словами, при изменении времени оно преобразуется по правилу подобия. В общем случае функция  $f(x, y, t)$  координат  $x, y$  и времени  $t$  называется *автомодельной*, если она имеет вид

$$f(x, y, t) = t^\alpha \varphi(t^\beta x, t^\gamma y), \quad (5)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — некоторые постоянные, а  $\varphi$  — функция двух переменных; тогда при изменении  $t$  изменение функции сводится к перемене масштабов по осям аргументов и функции. (В принципе вместо степеней  $t$  можно было бы поставить любые функции от  $t$ ; однако практическое значение имеют только степени.) Аналогично дается определение *автомодельности* функции любого числа координат и времени.

Проверим, например, *автомодельность* функции

$$f(x, t) = x + a\sqrt{t}x^3 \quad (a = \text{const}).$$

Для этого представим ее в виде  $f(x, t) = t^\alpha (t^{-\alpha}x + at^{-\alpha+1/2}x^3)$ , где показатель  $\alpha$  мы подберем так, чтобы  $t^{-\alpha+1/2}x^3 = (t^{-\alpha}x)^3$ . Отсюда  $\alpha = -1/4$ , т. е.

$$f(x, t) = t^{-1/4} (t^{1/4}x + at^{3/2}x^3) = t^{-1/4} \varphi(t^{1/4}x),$$

где  $\varphi(s) = s + as^3$ .

Автомодельный характер решения (2), построенного выше, становится более ясным, если на минуту ввести функцию

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} 1/y & (0 \leq x \leq y \leq 1), \\ 0 & (\text{при прочих комбинациях } x, y). \end{cases}$$

Тогда решение (2) можно переписать в виде

$$n^\varphi(x, p, t) = \frac{m_0 V}{h^2} \Psi\left(\frac{m_0 x}{pt}, \frac{p}{h}\right).$$

Сравнивая с (5), мы видим, что  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = 0$ .

Предположение об автомодельности решения (такие решения называются также *особыми*) позволяет понизить число независимых переменных в дифференциальном уравнении на единицу и тем самым иногда построить решение даже в случае сложных нелинейных задач. Такие решения, несмотря на свой специальный вид, часто имеют узловое физическое значение (например, описывают развитие особенности, как это будет для формулы (5) при  $\beta < 0$ ,  $\gamma < 0$ ); кроме того, с их помощью можно иногда сделать полезные выводы о характере других, неавтомодельных решений. К сожалению, мы не имеем здесь возможности остановиться подробнее на этом важном вопросе, поэтому ограничимся указанием на книгу Л.И.Седова, Методы подобия и размерности в механике, «Наука», изд. 6, 1967, где рассмотрены теория и приложения автомодельных решений, а также на статью Г.И.Баренблатта и Я.Б.Зельдовича «Промежуточные асимптотики в математической физике» в журнале «Успехи математических наук», т. XXVI, №2 (1971), 115–129.

## Упражнение

1) Найдите автомодельные решения уравнения  $x\varphi'_x - t\varphi'_t = \varphi$ .

## § 9 Движение частиц в пространстве

Остановимся коротко на пространственных движениях среды (плоские движения рассматриваются аналогично), причем будем обозначать координаты частиц буквами  $x_1, x_2, x_3$ . Если известны силы, действующие на идентичные невзаимодействующие частицы, в зависимости от их координат, скоростей и времени, то уравнения движения каждой частицы приобретают вид, аналогичный (3.5):

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m_0}, \quad \dot{p}_i = F_i\left(x_1, x_2, x_3, \frac{p_1}{m_0}, \frac{p_2}{m_0}, \frac{p_3}{m_0}, t\right) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Мы получаем поле скоростей в 6-мерном фазовом пространстве состояний частицы (состояние частицы характеризуется ее положением и скоростью). Подчеркнем, что из-за рассеянной скорости задание начальной точки в пространстве координат не определяет однозначно траектории частицы. Для этого требуется задать также и начальные скорости частицы, другими словами, задать начальную точку в фазовом пространстве.

Важным частным случаем является тот, когда силы, действующие на частицы, не зависят от их скоростей, т. е. образуют поле в трехмерном пространстве. В отличие от одномерной картины, такое поле далеко не всегда будет потенциальным; условия потенциальности силового поля рассмотрены, в частности, в ЭПМ, §§X.3, XI.7 и XI.11.

Приведем, например, такое условие: для потенциальности силового поля необходимо и достаточно, чтобы работа, производимая полем при произвольном перемещении частицы, зависела только от начального и конечного ее положений, но не зависела от пути, соединяющего эти положения.

Наиболее прост случай, когда потенциал линеен по пространственным координатам: тогда его градиент не зависит от этих координат, т. е. силовое поле однородно, сила может зависеть лишь от времени.

Непотенциальными являются любое вихревое поле, безвихревое поле в многосвязной области с отличными от нуля циркуляциями, любое поле, для которого силы, действующие на частицу, зависят от ее скорости (силы трения, силы Лоренца, действующие на заряженную частицу в магнитном поле, и т. д.).

Движение трехмерной среды характеризуется фазовой плотностью

$n^\phi(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, t)$ , удовлетворяющей (при сохранении числа частиц в каждой порции частиц) уравнению неразрывности

$$\frac{\partial n^\phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{p_i}{m_0} \frac{\partial n^\phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial p_i} (F n^\phi) \right] = 0. \quad (2)$$

Пользуясь векторными обозначениями, это уравнение можно переписать так:

$$\frac{\partial n^\phi}{\partial t} + \frac{1}{m_0} \mathbf{p} \cdot \text{grad}_x n^\phi + \text{div}_p (n^\phi \mathbf{F}) = 0,$$

где индекс при знаке векторной операции указывает на ту совокупность переменных, по которой берется эта операция. Второй член в последнем уравнении можно

переписать также в виде  $\text{div}_x \frac{n^\phi}{m_0} \mathbf{p}$ , откуда видно, что уравнение неразрывности в

фазовом пространстве имеет дивергентную форму (§§II.9 и III.5). С помощью производной вдоль траектории уравнение (2) можно еще записать в следующем виде:

$$\frac{dn^\phi}{dt} + (\text{div}_p \mathbf{F}) n^\phi = 0. \quad (3)$$

Наряду с переменными Эйлера  $x_i, p_i, t$  можно пользоваться переменными Лагранжа

$$x_{i0} = x_i|_{t=t_0}, \quad p_{i0} = p_i|_{t=t_0} \quad (i = 1, 2, 3), \quad t.$$

Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left[ n^\phi \frac{D(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)}{D(x_{10}, x_{20}, x_{30}, p_{10}, p_{20}, p_{30})} \right] = 0, \quad (4)$$

оно полностью равносильно уравнению (3).

Из уравнения неразрывности, как и для одномерного случая, нетрудно вывести закон сохранения массы, выражаемой по той же формуле (4.1), в которой под  $x$  и  $dx$  (и аналогично под  $p$  и  $dp$ ) надо понимать  $x_1, x_2, x_3$  и  $dx_1, dx_2, dx_3$  соответственно. При отсутствии сил инвариантен вектор импульса (количества движения)

$$\mathbf{P} = \iint n^\phi(x, p, t) \mathbf{p} dx dp;$$

если же имеются силы  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, p, t)$ , то, подобно одномерному случаю,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \iint \mathbf{F} n^\phi dx dp,$$

а если силы не зависят от скоростей  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, t)$ , то

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int \rho \mathbf{F} dx.$$

При потенциальных автономных силах, т. е. для  $\mathbf{F} = -m_0 \text{grad}_x u(x_1, x_2, x_3)$  инвариантна полная энергия системы

$$E = \frac{1}{2m_0} \iint (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) n^\phi(x, p, t) dx dp + m_0 \iint u(x) n^\phi(x, p, t) dx dp. \quad (5)$$

Для пространственных систем возможен новый, по сравнению с одномерным случаем, инвариант – вектор момента количества движения

$$\mathbf{G} = \iint n^\phi(x, p, t) \mathbf{x} \times \mathbf{p} dx dp. \quad (6)$$

Для инвариантности этого вектора достаточно, чтобы все силы были направлены радиально, т. е. чтобы

$$\mathbf{F}(x, \dot{x}, t) = F(x, \dot{x}, t) \mathbf{x}^0 \quad (\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|, \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}).$$

Это вытекает из аналогичного утверждения для каждой частицы (см., например, ЭПМ, §XI.2); формальное доказательство на основе уравнения неразрывности мы предоставляем читателю (см. упражнение 1). Обращаем внимание читателя на то, что как в определении (6) момента количества движения, так и в условии его инвариантности существенную роль играет выбор точки, принятой за начало координат; другими словами, момент берется относительно некоторой выделенной, отмеченной точки.

Решение задачи с начальным условием при построении локального параметра среды в фазовом 6-мерном пространстве проводится по методам гл. III; в частности, формула для эволюции фазовой плотности сразу вытекает из уравнения неразрывности в форме (3) или (4).

Представляет интерес рассмотрение, подобное §7, среды с нерассеянной скоростью, для которой в начальный момент в каждой точке  $x$  все частицы имеют определенный импульс  $p_0(x)$  (при нашей системе обозначений записи  $p_0 = (p_{01}, p_{02}, p_{03})$  и  $\mathbf{p}_0$  равносильны); так будет, например, если в начальный момент среда покоилась. Интегрирование уравнений движения (4) дает возможность перейти к ситуации, рассмотренной в §III.6, с возможным образованием складок среды и обращением плотности среды на границе этих складок в бесконечность.

Если скорость рассеяна, так что в начальный момент фазовая плотность всюду конечна, то и в дальнейшем она остается конечной, так что складки, описанные в §III.6, появиться не могут. Если к тому же скорость всех частиц ограничена, то массовая плотность среды в пространстве  $x$  не может обратиться в бесконечность.

Остановимся еще на стационарном распределении фазовой плотности в случае автономного потенциального силового поля. Здесь имеется принципиальное отличие от одномерного случая.

Именно, для одномерного случая задание полной энергии  $E$  частицы определяло ее траекторию на фазовой плоскости (иногда дискретное множество траекторий); а так как фазовая плотность на такой траектории постоянна, то можно было говорить о фазовой плотности как о функции энергии  $n^\phi = n^\phi(E)$ . Другими словами, закон сохранения энергии определяет единственный возможный первый интеграл дифференциального уравнения фазовых траекторий (общее понятие первого интеграла см., например, в ЭПМ, §VIII.2).

В отличие от этого, в трехмерном случае закон сохранения полной энергии

$$\frac{1}{2m_0} |\mathbf{p}|^2 + m_0 u(x) \equiv \frac{1}{2m_0} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + m_0 u(x_1, x_2, x_3) = E, \quad (7)$$

как любое конечное уравнение, связывающее шесть переменных, определяет при заданном  $E$  некоторое 5-мерное многообразие ( $\Omega_E$ ) в 6-мерном фазовом пространстве  $x, p$ . Другими словами, вся 1-мерная фазовая траектория частицы целиком расположена на 5-многообразии ( $\Omega_E$ ), отвечающем уровню полной энергии этой частицы, но, конечно, эта траектория не исчерпывает ( $\Omega_E$ )! Все ( $\Omega_E$ ) целиком заполнено 5 – 1 = 4-параметрическим семейством фазовых траекторий, отвечающих одинаковому уровню полной энергии. Вообще, многообразия, целиком составленные из траекторий заданной

автономной системы дифференциальных уравнений, называются *инвариантными многообразиями* для этой системы. Поток, определяемый такой системой, скользит вдоль любого инвариантного многообразия, так что если частица начинает свое движение на нем, то она в дальнейшем на нем останется. Таким образом,  $(\Omega_E)$  представляет собой инвариантное 5-многообразие для системы уравнений движения частиц в фазовом 6-мерном пространстве.

Оказывается, что в некоторых случаях из постоянства фазовой плотности на траектории вытекает постоянство этой плотности на всем многообразии  $(\Omega_E)$ , содержащем эту траекторию; об этих случаях, в которых можно рассматривать фазовую плотность как функцию энергии, мы поговорим в §11. Однако так будет не всегда. В частности, если уравнения движения в фазовом 6-мерном пространстве обладают первым интегралом, независимым от (7), т. е. имеется добавочный закон сохранения, то фазовая плотность может зависеть не только от энергии, но и от другой сохраняющейся величины. Другими словами, тогда инвариантное 5-многообразие  $(\Omega_E)$  «расслаивается» на инвариантные 4-многообразия, отвечающие различным значениям добавочного инварианта. Знание нескольких независимых первых интегралов приводит к соответствующему числу величин, от которых может зависеть фазовая плотность. Рассмотрим, например, сферически-симметричное потенциальное силовое поле, т. е. поле, для которого  $u = u(|\mathbf{x}|)$ . Мы уже упоминали, что для такого поля частицы, помимо полной энергии  $E$ , сохраняют вектор момента количества движения  $\mathbf{L}$ , т. е. здесь имеется три добавочных первых интеграла. Поэтому и стационарно распределенная фазовая плотность зависит, вообще говоря, от четырех величин – от полной энергии и трех проекций момента количества движения в какой-либо системе декартовых координат.

Так, важную роль играет следующее обобщение канонического распределения по Максвеллу – Больцману (см. §6):

$$n^{\Phi}(x,p) = C e^{-E/\vartheta + \mathbf{a} \cdot \mathbf{L}} \quad (\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}), \quad (8)$$

где заданный вектор  $\mathbf{a}$ , наряду со скалярами  $C$  и  $\vartheta$ , служит параметром распределения. Хотя частицы вращаются вокруг начала координат во всевозможных плоскостях, но при  $\mathbf{a} \neq 0$  угловая скорость, направленная по  $\mathbf{a}$ , имеет преимущество, т. е. получается описание совокупности частиц, обладающей некоторым общим моментом количества движения, направленным по вектору  $\mathbf{a}$ . Такое распределение получается асимптотически с течением времени, если частицы находятся в ящике, вращающемся вокруг вектора  $\mathbf{a}$  с угловой скоростью  $a\vartheta$ . В равновесии газ в этом ящике за счет столкновений со стенками приобретает в каждой точке ту же среднюю угловую скорость.

Каждому конкретному потенциалу  $u(|\mathbf{x}|)$  отвечает 5-параметрическое семейство фазовых плотностей вида (8). Существенная трудность возникает при рассмотрении ньютонова потенциала  $u = -k/|\mathbf{x}|$ ; тогда при подсчете суммарных характеристик

(например, суммарной массы) возникает интеграл вида  $\int e^{\frac{k}{\vartheta|\mathbf{x}|}} d\mathbf{x}$  с крайне сильной особенностью у подынтегральной функции, т. е. расходящийся. Произвести нормировку за счет подбора параметров не удастся, и чтобы спасти положение, приходится уточнять закон распределения Максвелла – Больцмана, на чем мы здесь не останавливаемся.

## Упражнения

- 1) Докажите инвариантность момента количества движения при радиальном направлении сил.
- 2) Укажите, для каких действующих сил кинетическая энергия системы (первое слагаемое в правой части (5)) инвариантна во времени.



- 3) Пусть начало координат, начиная с момента  $t = 0$ , испускает частицы с постоянной интенсивностью во всех направлениях, причем силы на частицы не действуют. Напишите соответствующую формулу для фазовой плотности.

### § 10 Теорема Лиувилля

Вернемся к одномерному движению частиц в поле сил, не зависящих от скорости этих частиц; как мы видели, это движение на фазовой плоскости описывается системой уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m_0}, \quad \frac{dp}{dx} = F(x, t). \quad (1)$$

В конце §3 мы показали, что если в процессе эволюции среды масса каждой ее порции сохраняется, так что выполняется уравнение неразрывности, то и фазовая плотность каждого элемента среды на фазовой плоскости в процессе его эволюции остается неизменной. Это важное утверждение называется *теоремой Лиувилля*. Подчеркнем, что в ее условиях весьма существенно, чтобы силы не зависели от скорости: например, из уравнения (3.9) легко следует, что при наличии сил трения, для которых  $\partial F/\partial p < 0$ , фазовая плотность любого элемента среды в процессе его эволюции возрастает. В то же время стационарность силового поля в данном вопросе не важна: теорема Лиувилля связана не с сохранением энергии, а с существованием гамильтониана, даже если он зависит от времени.

Теорема Лиувилля имеет часто кинематическую трактовку. Именно, из общей формулы (III.3.6) для якобиана  $\frac{D(x, p)}{D(x_0, p_0)}$ , примененной к системе (1), вытекает, что в рассматриваемом случае

$$\frac{D(x, p)}{D(x_0, p_0)} \equiv 1. \quad (2)$$

В силу геометрического смысла якобиана (§I.4) это означает, что каждый элемент среды фазовой плоскости, а потому и любая конечная порция этой среды на фазовой плоскости в процессе эволюции не меняет своей площади. Итак, эволюция среды на фазовой плоскости, описывающая изменение состояний рассматриваемой системы во времени, оставляет «фазовые площади» (имеющие размерность  $[m][l]^2[t]^{-1}$ ) «растекающихся» областей инвариантными. Ясно, что эта формулировка полностью равносильна приведенной в предыдущем абзаце: если массы сохраняются, то инвариантность площади равносильна инвариантности плотности.

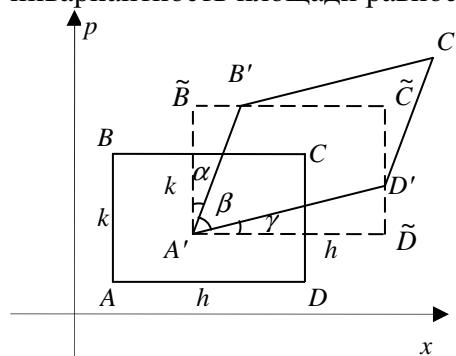


Рис. 79

Еще одно доказательство инвариантности площади «растекающихся» областей для системы (1) получится, если записать поле скоростей на фазовой плоскости в виде

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dp}{dt} \mathbf{e}_p = \frac{p}{m_0} \mathbf{e}_x + F(x, t) \mathbf{e}_p,$$

откуда

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial(p/m_0)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, t)}{\partial p} = 0,$$

так как  $p/m_0$  не зависит от  $x$ , а  $F(x, t)$  – от  $p$ . Однако в силу §I.8 это условие как раз и означает неизменность площадей «растекающихся» областей плоскости  $x, p$ .

Из-за важности теоремы Лиувилля дадим также непосредственное доказательство инвариантности растекающихся площадей. Рассмотрим на плоскости  $x, p$  малый прямоугольник  $ABCD$  со сторонами длины  $h$  и  $k$ , параллельными осям координат (рис. 79). Через время  $\Delta t$  того же порядка, что  $h$  и  $k$ , он перейдет в криволинейную фигуру,

площадь которой, с точностью до величин выше третьего порядка малости, можно подсчитать как площадь параллелограмма  $A'B'C'D'$ ; здесь

$$\overrightarrow{AA'} = \partial_t (x\mathbf{e}_x + p\mathbf{e}_p) = (\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{p}\mathbf{e}_p)dt = \left( \frac{p}{m_0}\mathbf{e}_x + F(x,t)\mathbf{e}_p \right) dt,$$

$$\overrightarrow{BB'} = \left( \frac{p+k}{m_0}\mathbf{e}_x + F(x,t)\mathbf{e}_p \right) dt,$$

аналогично выражаются  $\overrightarrow{CC'}$  и  $\overrightarrow{DD'}$ . Мы видим, что проекции векторов  $\overrightarrow{AA'}$  и  $\overrightarrow{BB'}$  на ось  $p$  одинаковы (тут используется независимость  $F$  от  $p$ !), т. е. если прямоугольник  $ABCD$  поступательно перенести в положение  $A'\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$  (рис. 79), то точка  $B'$  попадает на прямую  $\tilde{B}\tilde{C}$ . Аналогично проверяем, что точка  $D'$  попадет на прямую  $\tilde{C}\tilde{D}$ . Отсюда площадь прямоугольника  $A'B'C'D'$  равна

$$\begin{aligned} A'B' \cdot A'B' \sin \beta &= \sqrt{h^2 + \tilde{D}D'^2} \sqrt{k^2 + \tilde{B}B'^2} \cos(\alpha + \gamma) = \\ &= h \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{D}D'^2}{h^2} + \dots \right) k \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{B}B'^2}{k^2} + \dots \right) \left[ 1 - \frac{(\alpha + \gamma)^2}{2} + \dots \right] \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались разложением в ряд Тейлора). Однако последнее произведение, с точностью до членов выше третьего порядка малости, равно  $hk$ .

Значит, приращение площади параллелограмма имеет порядок выше  $hk\Delta t$ . Но тогда приращение площади любой конечной фигуры за время  $\Delta t$  имеет порядок выше  $\Delta t$  (почему?), т. е. скорость этого приращения равна нулю, а потому площадь остается постоянной.

Мы уже отметили в §5, что утверждение о постоянстве фазовой плотности находится в хорошем соответствии и с элементарными соображениями.

Было упомянуто также, что теорема Лиувилля справедлива и для случая плоских или пространственных движений частиц. В самом деле, если сила  $\mathbf{F}$  не зависит от скорости  $\dot{\mathbf{x}}$ , то из уравнения (9.3) вытекает равенство  $dn^\phi/dt = 0$ , т. е. постоянство фазовой плотности каждой мало рассеянной по координате и скорости порции среды. Эту теорему можно записать в виде формулы (2), в которой  $x$  означает  $x_1, x_2$  в плоском случае и  $x_1, x_2, x_3$  – в пространственном и т. д. Отсюда, как и выше, вытекает инвариантность фазового объема «растекающихся» областей фазового пространства. (Речь идет, конечно, о 4-мерном объеме для плоских движений и 6-мерном объеме для пространственных.)

Теорема Лиувилля, в случаях ее применимости, влечет за собой важные следствия о возможном характере эволюции среды. Так, рассмотрим основные, указанные в §1 возможные типы особых точек на фазовой плоскости в автономном случае. Нетрудно видеть, что из теоремы Лиувилля вытекает невозможность особых точек типа фокуса и узла (рис. 70 и 71). В самом деле, для таких точек в устойчивом случае любая конечная «растекающаяся» область, расположенная вблизи точки покоя, с течением времени попадает в как угодно малую окрестность этой точки, т. е. площадь такой области стремится к нулю и потому не может быть инвариантной. В неустойчивом случае (для его иллюстрации надо на траекториях рис. 70 и 71 поменять направления стрелок на противоположные) аналогичное противоречие получается при  $t \rightarrow -\infty$ . Таким образом, в условиях применимости теоремы Лиувилля из основных типов особых точек на плоскости возможны только центр (в устойчивом случае, рис. 69) и седло (в неустойчивом, рис. 72). Из подобных соображений исключаются предельные циклы на плоскости (рис. 62), так как любая «растекающаяся» область, расположенная вблизи предельного цикла, должна при  $t \rightarrow \infty$  или  $t \rightarrow -\infty$  попасть в как угодно узкое кольцо, содержащее этот цикл, т. е. площадь такой области стремится при этом к нулю.

Аналогичные выводы вытекают из теоремы Лиувилля для возможного расположения

траекторий в фазовом пространстве более высокой размерности. Из теоремы Лиувилля можно получить также утверждения, относящиеся к поведению среды в физическом пространстве (пространстве положений частиц). Так, пусть рассматривается движение среды, при котором скорости частиц при всех  $t$  остаются ограниченными, скажем, по модулю не превосходят некоторой постоянной  $A$ . Кроме того, пусть дано, что в начальный момент времени фазовая плотность также была ограниченной:  $\rho^\phi|_{t=t_0} \leq \rho^\phi_0$ . Тогда, если эта плотность остается постоянной (теорема Лиувилля), то из формулы (3.1) вытекает, что и «истинная» плотность среды при всех  $t$  остается ограниченной: например, в одномерном случае  $\rho \leq 2A\rho^\phi_0$  (почему?). Таким образом, если скорости частиц остаются ограниченными, то плотность не только не может обратиться в бесконечность, как для среды с нерассеянной скоростью (§7), но не может даже неограниченно нарастать при  $t \rightarrow \infty$ , как для системы с трением.

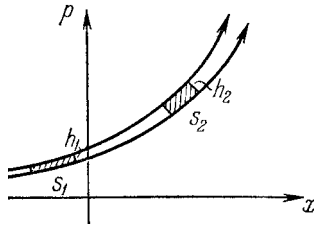


Рис. 80

Отметим для дальнейшего, что не следует думать, будто в условиях применимости теоремы Лиувилля не только площади фигур, но и длины дуг на фазовой плоскости<sup>30</sup> остаются инвариантными. На рис. 80 показано положение элементарной «растекающейся» области между близкими фазовыми траекториями в два момента времени. Так как площадь инвариантна, т. е.  $s_1 h_1 = s_2 h_2$ , то длина элемента дуги фазовой траектории меняется обратно пропорционально расстоянию между соседними траекториями,  $s_2 : s_1 = h_1 : h_2$ .

## § 11 Эргодичность

Вернемся к задаче о колебаниях среды (об этой задаче уже говорилось в §II.14). Рассмотрим одномерную среду, осциллирующую в потенциальной яме с потенциалом ускорений  $u(x)$ . Уравнение движения частиц

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -u'(x)$$

имеет промежуточный интеграл

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + u(x) = \frac{E}{m_0} \quad (1)$$

( $E$  – полная энергия частицы). В уравнении (1) легко разделяются переменные, что дает возможность вычислить период  $T$  колебаний частицы:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2 \left[ \frac{E}{m_0} - u(x) \right]}, \text{ откуда } T = \sqrt{2m_0} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - m_0 u(x)}}.$$

Здесь  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  определяются из уравнения  $u(x) = E/m_0$ , а добавочный множитель  $2\sqrt{2} = 2 \frac{1}{\sqrt{2}}$  появился из-за того, что интервал от  $x_{\min}$  до  $x_{\max}$  проходится частицей за

период (цикл) дважды – вперед и назад.

Мы видим, что период колебаний, вообще говоря, зависит от уровня энергии  $E$  частицы или, что равносильно, от амплитуды колебаний. Важным исключением является самый простой – линейный осциллятор, для которого  $F(x) = -kx$  ( $k = \text{const} > 0$ ), откуда

$$u(x) = \frac{k}{2m_0} x^2 \text{ и}$$

<sup>30</sup> Говорить о длине дуги можно только после того, как уравнены размерности осей координат. Для этого можно, например, выбрать некоторые длину и импульс за характерные и отнести все длины и импульсы к этим характерным, после чего считать величины  $x$  и  $p$  безразмерными.

$$x_{\min} = -\sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad T = \sqrt{2m_0} \int_{-\sqrt{2E/k}}^{\sqrt{2E/k}} \frac{dx}{\sqrt{E - kx^2/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{k}}$$

(проверьте!).

Напомним теперь результаты, полученные в §II.14. Пусть рассматривается произвольное (вообще говоря, нестационарное!) распределение частиц с одинаковой энергией  $E$ ; в частности, это может быть одна единственная осциллирующая частица. Тогда если осреднить это распределение по времени, то осредненное распределение с возрастанием интервала осреднения будет приближаться к стационарному распределению, которое не зависит от начальных условий, а однозначно определяется потенциалом  $u(x)$ , энергией  $E$  и общей осциллирующей массой  $M$ . (От последней стационарное распределение зависит линейно.) Такое асимптотическое выравнивание в среднем любого распределения равносильно равенству  $\overline{F(x(t))} = \overline{F(m)}$  средних по времени и по всему стационарному ансамблю частиц для любой функции  $F(x)$  от положения частицы и носит название эргодичности. Это свойство для одномерных движений с единым уровнем энергии частиц в определенном смысле является тривиальным, оно легко проверяется и всегда имеет место.

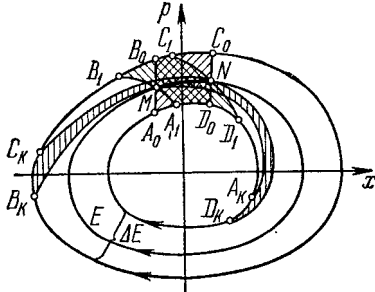


Рис. 81

Пусть теперь рассматриваемый ансамбль частиц имеет некоторый разброс  $\Delta E$  по энергии (см. рис. 81, где этот разброс утрирован). Как ведет себя тогда асимптотически само неосредненное нестационарное распределение частиц? Исключим пока случай линейного осциллятора и рассмотрим какой-либо участок  $A_0B_0C_0D_0$  фазовой плоскости, заштрихованный на рис. 81. Пусть прошел промежуток времени, для которого средняя линия  $MN$  этого участка совершила полный оборот и вернулась в исходное положение. Тогда из-за зависимости периода

обращения частиц от уровня их энергии один из краев участка, например,  $B_0C_0$ , не дойдет до исходного положения, тогда как противоположный край  $A_0D_0$  перейдет через него, в результате чего участок примет вид  $A_1B_1C_1D_1$  (рис. 81). При дальнейших оборотах эти отставание и опережение будут усугубляться: через несколько оборотов участок примет вид  $A_kB_kC_kD_k$  (рис. 81), а еще позже – вид куска спирали, число витков которой будет с ростом  $t$  безгранично возрастать.

Допустим теперь, что начальное распределение плотности среды на фазовой плоскости таково: плотность в каждой точке участка  $A_0B_0C_0D_0$  на рис. 81 равна 1, тогда как плотность во всех остальных точках равна нулю, т. е. среды там нет; другими словами, рассматривается эволюция сгустка частиц, первоначально мало рассеянного по координате и по скорости. Тогда, так как фазовая плотность любого участка среды в процессе его эволюции остается неизменной (теорема Лиувилля), то средняя плотность любой части ( $H$ ) плоскости в любой момент  $t$  равна относительной доле в ( $H$ ) площади заштрихованного участка, попавшего в процессе эволюции в ( $H$ ) в этот момент. В силу сказанного в предыдущем абзаце представляется правдоподобным, что эта доля при  $t \rightarrow \infty$  выравнивается, приближаясь к некоторому предельному значению, зависящему только от ( $H$ ); и действительно, это можно доказать строго, на чем мы здесь не будем останавливаться.

Но это означает, что при  $t \rightarrow \infty$  распределение массы на фазовой плоскости стремится к некоторому стационарному, т. е. такому, которое было рассмотрено в §5. Мы показали это для специального распределения начальной фазовой плотности. Однако так как любое распределение начальной фазовой плотности можно с любой точностью заменить на кусочно-постоянное, то получаем, что любое нестационарное распределение масс в рассматриваемых предположениях при  $t \rightarrow \infty$  стремится к стационарному.

Итак, среда из частиц, осциллирующих по нелинейному закону и не испытывающих внешних возмущений, асимптотически стремится к стационарному распределению масс. Интересно, что при этом фазовая плотность среды стремится к своему предельному значению только после осреднения. (Это ясно уже из того, что при рассмотренном выше специальном распределении начальной фазовой плотности эта плотность в любой момент времени принимает только значения 0 и 1, тогда как в пределе она принимает и все промежуточные значения.) Более точно это означает следующее: если обозначить через  $n^\phi(x, p, t)$  фазовую плотность среды в момент  $t$ , а через  $n_\infty^\phi(x, p)$  – фазовую плотность предельного распределения, то

$$n_\infty^\phi(x, p) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{4hk} \int_{x-h}^{x+h} du \int_{p-k}^{p+k} n^\phi(u, v, t) dv \right].$$

Другими словами, задавшись достаточно малыми длинами интервалов осреднения, мы по прошествии достаточно большого времени (зависящего от этих длин!) получим, что осредненная плотность будет как угодно близка к предельной.

Здесь картина совершенно аналогична той, которая возникает, когда мы рассматриваем последовательность функций  $f(x) + \sin mx$  при  $m \rightarrow \infty$ . Последовательность осредненных функций

$$\overline{\sin mx}^h = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \sin mudu = \frac{1}{hm} \sin mh \sin mx$$

при любом фиксированном интервале осреднения  $h > 0$  стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ . Значит, исходная последовательность функций после осреднения стремится к  $f(x)$ :

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{f(x) + \sin mx}^h \right].$$

Строго линейный (гармонический) осциллятор составляет исключение. При любом начальном распределении фазовой плотности в нем будут происходить периодические колебания, не стремящиеся асимптотически к пределу; об этом мы уже говорили в §II.14.

Различие между линейным и нелинейным (говорят также – гармоническим и ангармоническим) осцилляторами отчетливо проявляется также на поведении массовой плотности среды на оси  $x$ . В силу формулы (3.1) для вычисления этой плотности надо интегрировать фазовую плотность по фиксированной прямой, параллельной оси  $p$  в фазовой плоскости. Для нелинейного осциллятора из-за указанного в связи с рис. 81 «закручивания» исходного распределения плотности естественно ожидать (и это ожидание оправдывается!), что рассматриваемый интеграл при  $t \rightarrow \infty$  стремится к определенному пределу, т. е. массовая плотность для каждого  $x$  стремится при  $t \rightarrow \infty$  к некоторому пределу  $\rho(x)$ . (Это массовая плотность стационарного распределения среды, к которому стремится исходное распределение после его осреднения.) В отличие от этого, массовая плотность для гармонического осциллятора при каждом  $x$  будет периодически меняться во времени и потому не будет иметь предела.

Полезно представить себе, как происходит непрерывный переход нелинейного осциллятора с малой нелинейностью в линейный: например, потенциал может

равняться  $-\frac{k}{2}x^2 - \alpha x^4$ , где  $k$  фиксировано, а  $\alpha$  берется все ближе и ближе к нулю. Чем

меньше нелинейность, тем меньше деформируется элемент фазовой плоскости за каждый свой оборот по фазовым траекториям; в терминах рис. 81 – тем меньше отличается участок  $A_1B_1C_1D_1$  фазовой плоскости от участка  $A_0B_0C_0D_0$ . Таким образом, чем меньше нелинейность, тем больше требуется времени для того, чтобы нестационарное распределение среды приблизилось к осредненному, стационарному; и когда мы переходим к линейному закону колебаний, это время обращается в

бесконечность, приближения к стационарному распределению не будет. Эта ситуация напоминает поведение функции  $h_\alpha(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t$  при  $t \rightarrow \infty$ , если  $\omega$  фиксировано, а  $\alpha > 0$  берется все меньше и меньше. Эта функция при каждом фиксированном  $\alpha$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , однако с уменьшением  $\alpha$  – все медленнее и медленнее; в вырожденном состоянии, при  $\alpha = 0$ , мы получаем периодическую функцию  $h_0(t) = \sin \omega t$ , не имеющую предела при  $t \rightarrow \infty$ . На любом фиксированном конечном интервале  $0 \leq t \leq T$  функция  $h_\alpha(t)$  с достаточно малым  $\alpha$  близка к  $h_0(t)$ ; но если рассмотреть сразу всю полуось  $0 \leq t < \infty$ , то такой близости не будет, функция  $h_0(t)$  на полуоси обладает по сравнению с любой  $h_\alpha(t)$  ( $\alpha > 0$ ) качественно новым свойством. Из сказанного ясно, что при рассмотрении систем с малой нелинейностью важную роль играет время приближения нестационарного распределения среды к стационарному. Если это время окажется большим времени наблюдения системы, то указанное приближение не успеет проявиться.

Отметим, что вырожденный характер линейных колебаний теряется, если частицы испытывают случайные столкновения друг с другом и с окружающими телами. Перераспределение энергии и фазы колебаний при таких столкновениях приводит к тому, что система постепенно переходит в стационарное состояние, хотя время такого перехода может оказаться достаточно большим. При этом даже если первоначально частицы имели одинаковую энергию, в стационарном состоянии энергия оказывается размазанной (а фаза осредненной).

Перейдем теперь к пространственному движению частиц в стационарном потенциальном силовом поле. Мы уже упоминали в §9, что фазовые траектории частиц с заданной полной энергией  $E$  выполняют некоторое не меняющееся во времени 5-мерное многообразие ( $\Omega_E$ ) в 6-мерном пространстве  $x, p$ . Мы предположим, впредь для простоты, что это многообразие замкнутое; так будет, в частности, для потенциальной ямы, которая служит проекцией многообразия ( $\Omega_E$ ) в пространство  $x$ . Рассматриваемый поток, заданный в фазовом 6-мерном пространстве, по теореме Лиувилля оставляет 6-мерный объем инвариантным.

Для дальнейшего нам понадобится 5-мерный объем областей на ( $\Omega_E$ ). Но чтобы имело смысл говорить об этом объеме, нужно, как в сноске на стр. 147, уравнивать размерности фазовых координат. Для этого введем характерную длину  $l_{xap}$  и характерный импульс  $p_{xap}$ , а с их помощью – безразмерные координаты и импульсы по формулам

$$x_{i\bar{b}} = x_i / l_{xap}, \quad p_{i\bar{b}} = p_i / p_{xap}.$$

Теперь можно во всех формулах перейти от  $x_i, p_i$  к  $x_{i\bar{b}}, p_{i\bar{b}}$ , после чего опустить индекс « $\bar{b}$ » и подразумевать, таким образом, под  $x_i$  и  $p_i$  безразмерные координаты и импульсы; так мы и будем делать до конца этого параграфа. Например, закон (9.7) сохранения полной энергии, который одновременно является уравнением многообразия ( $\Omega_E$ ) в 6-мерном пространстве  $x, p$ , примет вид

$$\frac{p_{xap}^2}{2m_0} |\mathbf{p}|^2 + m_0 u(l_{xap} \mathbf{x}) = E \quad (\text{проверьте!}). \quad (2)$$

Из теоремы Лиувилля, конечно, не следует, что поток, рассматриваемый в пространстве  $x, p$  и преобразующий ( $\Omega_E$ ) в себя, оставляет инвариантным и 5-мерный объем на ( $\Omega_E$ ) (сравните аналогичное рассуждение в конце §10). Однако можно ввести в каждой точке  $A$  на ( $\Omega_E$ ) поправочный коэффициент  $s(A)$ , пропорциональный кратчайшему расстоянию от  $A$  до соседнего многообразия ( $\Omega_{E+dE}$ ). Для вычисления этого коэффициента заметим, что 6-мерный градиент функции  $E(x, p)$ , определенной формулой (2), равен

$$\text{grad}_{x,p} E = \frac{p_{xap}^2}{2m_0} \text{grad}_p |\mathbf{p}|^2 + m_0 \text{grad}_x u(l_{xap} \mathbf{x}) = \frac{p_{xap}^2}{m_0} \mathbf{p} - l_{xap} \mathbf{F}(l_{xap} \mathbf{x}).$$

Однако градиент по модулю обратно пропорционален расстоянию между

поверхностями уровня; это было показано в ЭПМ, §X.2, для функций двух и трех переменных, но это свойство немедленно распространяется на функции любого числа переменных. Поэтому можно положить

$$s(x, p) = \left| \text{grad}_{x,p} E \right| = \left( \frac{p_{xap}^4}{m_0^2} |\mathbf{p}|^2 + l_{xap}^2 |\mathbf{F}(l_{xap} \mathbf{x})|^2 \right)^{-1/2}. \quad (3)$$

Теперь можно определить меру  $\mu$  на  $(\Omega_E)$  с помощью ее элемента  $d\mu = sd\Omega$ . Эта мера, хоть была введена с помощью соседнего с  $(\Omega_E)$  многообразия  $(\Omega_{E+dE})$ , в силу формулы (3) опирается только на значения потенциала  $u$  (точнее, модуля его градиента) в точках  $(\Omega_E)$ , т. е. она полностью определяется самим многообразием  $(\Omega_E)$ . Мера  $\mu$  уже будет инвариантной для потока, индуцированного на  $(\Omega_E)$ , что вытекает опять-таки из теоремы Лиувилля. (Почему? Продумайте аналогичное свойство в условиях рис. 69.) Рассмотрим теперь некоторое стационарное распределение фазовой плотности  $n^\phi(x, p)$ . В силу теоремы Лиувилля эта плотность постоянна вдоль любой траектории. Следует ли отсюда, что  $n^\phi$  постоянна на всем многообразии  $(\Omega_E)$ ? Для одномерного случая, когда все  $(\Omega_E)$  состояло из одной единственной траектории, такой вопрос не возникал; однако теперь положение усложняется. Если ответ на поставленный вопрос – положительный, то поток называется *эргодичным*. Для таких потоков стационарная фазовая плотность  $n^\phi$  зависит только от энергетического уровня  $E$ ,  $n^\phi = n^\phi(E)$  (почему?); в частности, подобно §6 можно говорить о микроканоническом и каноническом распределениях.

Причиной эргодичности, когда она имеет место, является то, что произвольная траектория при своем неограниченном продолжении не концентрируется в какой-то части  $(\Omega_E)$ , а блуждает по всему  $(\Omega_E)$ , располагаясь на нем *всюду плотно*. Другими словами, хоть такая траектория не может проходить через каждую точку  $(\Omega_E)$  (так как траектория 1-мерна, а  $(\Omega_E)$  – 5-мерно), но проходит в любой близости от любой точки  $(\Omega_E)$ . А тогда  $n^\phi$ , принимая постоянное значение вдоль траектории, по непрерывности принимает то же значение во всех точках  $(\Omega_E)$ . (Более подробное исследование показывает, что непрерывность в свойстве эргодичности несущественна.)

Свойство эргодичности примерно равносильно свойству *перемешивания*, которое означает следующее. Пусть в начальный момент времени в  $(\Omega_E)$  выделена некоторая область  $(G)$ , причем  $\frac{\mu(G)}{\mu(\Omega_E)} = \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ); условно будем называть точки  $(G)$

черными, а остальные точки многообразия  $(\Omega_E)$  – белыми. Тогда поток, определенный в фазовом пространстве, разносит черные точки по всему  $(\Omega_E)$ , в результате чего область  $(G)$  с течением времени все более расплывается, выделяя отростки, которые перепутываются, проникая повсюду в  $(\Omega_E)$ ; более точно, для любой неподвижной области  $(H)$  отношение меры зачерненной части  $(H)$  к мере всей  $(H)$  при  $t \rightarrow \infty$  стремится к  $\alpha$ .

Другими словами, по истечении достаточного интервала времени черная область расплывается настолько, что в каждой части  $(\Omega_E)$  доля черных точек будет примерно одинакова.

Уже из свойства всюду плотности траекторий вытекает, что расплывающаяся черная область  $(G)$  в пределе при  $t \rightarrow \infty$  покроем все многообразие  $(\Omega_E)$  серым цветом.

Свойство перемешивания означает, что этот цвет будет во всех точках  $(\Omega_E)$  иметь одинаковую «густоту». Доказательство этого свойства опирается на наличие на  $(\Omega_E)$  инвариантной меры, в свою очередь, вытекающее из теоремы Лиувилля.

О свойстве перемешивания мы, по существу, говорили в связи с рис. 81, и приведенные там рассуждения хорошо иллюстрируют это свойство. Отличием рассматриваемого сейчас случая является то, что мы пользуемся фиксированным уровнем энергии  $E$ , без

какого-либо разброса.

Широко применяется также следующее, равносильное определение свойства эргодичности: для любой неподвижной области ( $H$ ) и любой траектории ( $l$ ) среднее время пребывания ( $l$ ) в ( $H$ ) за промежуток времени  $0 \leq t \leq T$  при  $T \rightarrow \infty$  стремится к  $\mu(H)/\mu(\Omega_E)$ . (Более подробное исследование показывает, что это свойство может нарушаться на совокупности траекторий, заполняющих множество нулевой меры, т. е. множество, размерность которого ниже, чем размерность  $(\Omega_E)$ , равная 5.) Отсюда вытекает важное следствие. Пусть на  $(\Omega_E)$  задана какая-либо функция  $\Phi(A)$ , где  $A$  – любая точка  $(\Omega_E)$ . Обозначим через  $A_t$  точку, в которую за время  $t$  поток переносит частицу из некоторой фиксированной точки  $A_0$ ; тогда при изменении  $t$  точка  $A_t$  опишет одну из траекторий. Среднее значение функции  $\Phi$  вдоль этой траектории за промежуток  $\alpha \leq t \leq \beta$  равно

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(A_t) dt.$$

С другой стороны, пользуясь эргодичностью, это среднее можно вычислить иным способом. Разобьем  $(\Omega_E)$  на большое число малых непересекающихся областей ( $H_k$ ) и обозначим через  $(\tau_k)$  ту часть временного интервала  $\alpha \leq t \leq \beta$ , на протяжении которой точка про  $A_t$  ходит по  $(H_k)$ . Тогда

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(A_t) dt = \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_k \int_{\tau_k} \Phi(A_t) dt. \quad (4)$$

Однако если область  $(H_k)$  – малая, то в каждом из полученных интегралов подынтегральная функция почти постоянная (почему?), а потому, с точностью до малых высшего порядка,  $\int_{\tau_k} \Phi(A_t) dt = \Phi_k \tau_k$ , где  $\Phi_k$  – значение функции  $\Phi$  в какой-либо

точке  $(H_k)$ , а  $\tau_k$  – суммарная длительность (мера) временного множества  $(\tau_k)$ .

Подставляя это выражение в правую часть (4) и пользуясь тем, что при больших  $\beta - \alpha$  в силу свойства эргодичности, сформулированного в начале этого абзаца,

$\frac{\tau_k}{\beta - \alpha} \approx \frac{\mu(H_k)}{\mu(\Omega_E)}$ , получаем приближенное представление при больших  $\beta - \alpha$

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(A_t) dt \approx \sum_k \Phi_k \mu(H_k) / \mu(\Omega_E).$$

Однако сумма, стоящая в правой части, – это интегральная сумма для интеграла по мере  $\mu$  (см. ЭПМ, §VI.4), и при измельчении областей  $(H_k)$  она стремится к этому интегралу. В пределе мы получаем равенство

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow \infty}} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(A_t) dt = \frac{1}{\mu(\Omega_E)} \int_{(\Omega_E)} \Phi d\mu.$$

Его можно сформулировать так: для эргодичных потоков временное среднее от функции вдоль траектории равно фазовому среднему от этой функции по всему многообразию заданного энергетического уровня; при этом фазовое осреднение осуществляется с помощью инвариантной меры на этом многообразии. (Сравните формулу (II.14.10).)

Такая замена временных средних на фазовые широко применяется в физике. Эргодичность и связанные с ней понятия вводятся для любой автономной системы с конечным числом  $N$  степеней свободы, находящейся в потенциальном силовом поле. (Более того – для любой гамильтоновой системы, т. е. системы, описываемой каноническими уравнениями (IV.2.5).) При этом приходится рассматривать поток на  $2N - 1$ -мерном многообразии  $(\Omega_E)$  заданного уровня  $E$  энергии в  $2N$ -мерном пространстве координат-импульсов.



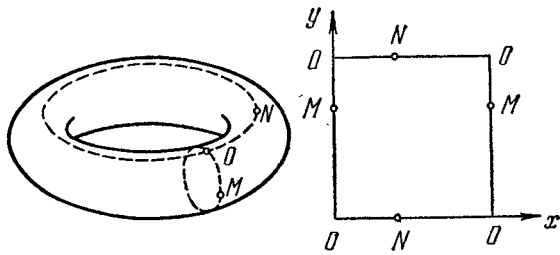


Рис. 82

Приведем некоторые примеры. Первый из них, на котором особенно легко понять разницу между эргодическими и неэргодическими потоками, строго говоря, не вполне относится к теме этого параграфа, так как он не описывает поведение системы в потенциальном силовом поле. Однако дело в том, что все рассмотренные здесь понятия непосредственно распространяются на потоки, заданные на замкнутом многообразии и обладающие инвариантной мерой, независимо от их происхождения. Потому рассмотрим простейшие потоки на поверхности тора (бублика идеальной формы). Чтобы наглядно представить себе такую поверхность, разрежем ее по параллели и меридиану и разложим (конечно, прибегая к деформации) на единичный квадрат плоскости  $x, y$  (рис. 82); при этом линии разреза перейдут в оси координат: параллель  $ONO$  – в ось  $x$ , а меридиан  $МОМ$  – в ось  $y$ . Боковые стороны квадрата, происшедшие из разреза, надо отождествить, т. е. считать одной и той же линией (две точки  $M$  на правой части рис. 82 считать за одну), равно как и верхнюю сторону квадрата с нижней. Пусть после такого отображения автономный поток на торе задается уравнениями

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = \lambda,$$

где  $\lambda$  – некоторая постоянная. Здесь инвариантной мерой служит просто площадь в плоскости  $x, y$ .

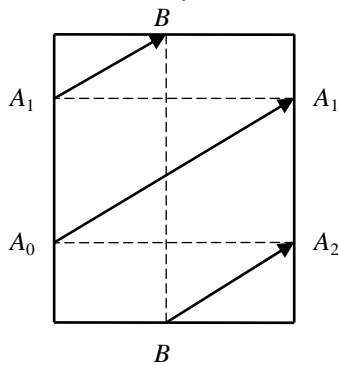


Рис. 83

Одна из траекторий при  $\lambda = 1/2$  показана на рис. 83; она замкнутая, так как  $A_2 = A_0$ . Ясно, что и при любом рациональном  $\lambda = m/n$  все траектории будут замкнутыми: каждая точка за время  $T$ , после «опоясывания» тора  $n$  раз в одном измерении и  $m$  раз в другом, вернется в исходное положение, после чего движение будет повторяться. Это случай – не эргодический, и непрерывная функция, постоянная вдоль каждой траектории, может на различных траекториях принимать различные значения. Однако если  $\lambda$  – иррациональное, то траектория не может замкнуться (почему?) и при своем продолжении будет проходить все в новых и новых местах поверхности. Такое движение получается в результате наложения двух периодических вращений с несоизмеримыми периодами и называется *квазипериодическим*. Можно показать, что такая траектория расположится на поверхности тора всюду плотно и поток будет эргодическим. А так как иррациональных чисел в некотором смысле несравненно больше, чем рациональных (множество рациональных чисел имеет меру нуль; кроме того, оказывается, рациональные числа можно пересчитать, тогда как для иррациональных такой пересчет невозможен), то типичным является именно эргодический случай. Эргодичности заведомо не будет, если система подчиняется какому-либо закону сохранения, независимо от закона сохранения полной энергии; другими словами – если соответствующая система дифференциальных уравнений имеет, помимо интеграла энергии, еще по крайней мере один первый интеграл. В самом деле, каждый такой первый интеграл имеет вид соотношения

$$y(p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_N) = C$$

(здесь  $q_i$  – обобщенные координаты, определяющие положение системы, а  $p_i$  – обобщенные импульсы), определяющего расслоение  $2N - 1$ -мерного замкнутого многообразия  $(\Omega_E)$  заданного уровня энергии на  $2N - 2$ -мерные замкнутые многообразия  $(\Omega_E^C)$ , каждое из которых отвечает некоторому значению константы  $C$ .

Если траектория начинается на некотором многообразии  $(\Omega_E^c)$ , то при своем продолжении она не может с этого многообразия сойти и, тем самым, не может заполнять  $(\Omega_E)$  всюду плотно. Если имеется два первых интеграла, независимых друг от друга и от интеграла энергии, то траектории на  $(\Omega_E)$  заполняют  $2N - 3$ -мерные многообразия, т. е. мы еще дальше отходим от эргодичности и т. д. Соответственно можно говорить о порядке вырождения системы: система имеет вырожденность  $k$ -го порядка, если она обладает  $k$  первыми интегралами, не зависящими друг от друга и от интеграла энергии, – т. е.  $k$  добавочными законами сохранения.

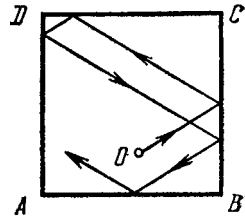


Рис. 84

В качестве примера вырожденной и потому неэргодической системы рассмотрим квадратный бильярд (рис. 84) без трения. Значением энергии  $E$  определяется модуль скорости бильярдного шара, однако направление скорости может быть произвольным; этим определяется трехмерное многообразие  $(\Omega_E)$  (две координаты шара и наклон вектора скорости) в четырехмерном пространстве состояний системы. Но из рис. 84 ясно, что при любой начальной скорости она

в дальнейшем будет иметь лишь четыре направления, т. е. здесь имеет место закон сохранения острого угла, образуемого вектором скорости с горизонтальной стороной бильярда. Поэтому все трехмерное пространство состояний расслаивается на двумерные поверхности, отвечающие различным значениям этого угла, причем каждая траектория в фазовом пространстве принадлежит одной из-таких поверхностей. Таким образом, рассматриваемая система имеет вырождение 1-го порядка. При этом, если тангенс упомянутого угла рационален (это зависит от начальных условий), то траектории получаются замкнутыми. Если же этот тангенс иррационален, то траектория заполняет пространство положений всюду плотно, однако в пространстве состояний всюду плотности не будет из-за закона сохранения угла.

Отметим, что такая вырожденность в определенном смысле неустойчива: достаточно как угодно мало изменить какую-либо из сторон бильярда, чтобы вектор скорости стал постепенно поворачиваться, так что траектория системы заполнит  $(\Omega_E)$  всюду плотно. Если же шар заменить на сгусток невзаимодействующих шариков с одинаковой начальной скоростью, то после указанной деформации стенки система в конце концов придет в стационарное состояние, хотя ожидать этого, возможно, придется очень долго. (Время релаксации, т. е. достижения с какой-либо заданной точностью этого состояния, будет весьма большим.)

Мы предоставляем читателю самостоятельно разобраться пример круглого бильярда. Он также имеет вырождение 1-го порядка. Интересно, что в круглом бильярде траектории не могут заполнять все пространство положений всюду плотно: если такая траектория незамкнута, то она заполняет всюду плотно некоторое кольцо.

Соответствующее осредненное стационарное распределение, инвариантно относительно вращений кольца и обладает бесконечной плотностью на его внутреннем контуре, откуда также ясна неэргодичность.

Вырожденным, а потому неэргодичным, является также движение частицы в сферически-симметричном потенциальном силовом поле. Мы уже упоминали в §9, что для каждой фазовой траектории при таком поле остаются инвариантными не только полная энергия, но и дополнительно вектор  $\mathbf{G} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$  момента количества движения. Значит, на 5-мерном многообразии заданного уровня полной энергии в фазовом пространстве траектории заполняют  $5 - 3 = 2$ -мерные поверхности, т. е. получается вырождение 3-го порядка. Даже если рассматривать всю картину в плоскости, проходящей через центр системы, то останется вырождение 1-го порядка (продумайте это!). Для важных частных случаев, когда потенциал  $u = k|\mathbf{x}|^2$  или  $u = -k/|\mathbf{x}|$  траектории получаются замкнутыми (см. ЭПМ, §XI.3), т. е. порядок вырождения повышается на единицу; мы предлагаем читателю выяснить дополнительный закон сохранения, который при этом появляется.

Следует отметить, что помимо более или менее очевидных законов сохранения, о которых, в основном, говорилось выше, система может обладать скрытыми законами сохранения, обнаружить которые или доказать отсутствие которых бывает довольно трудно. Обнаружение законов сохранения для физических систем очень важно, так как каждый такой закон существенно сказывается на поведении системы и знание его дает новые возможности ее изучения. Укажем в связи с этим, например, на книгу А.И.Базя, Я.Б.Зельдовича и А.М.Переломова «Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике», «Наука», 1971, в которой рассмотрен вопрос о том, как наличие законов сохранения отражается на поведении атомных систем в квантовой механике. До последнего времени на основании аналогии с простыми примерами считалось, что если у системы нет добавочных законов сохранения, т. е. если она невырождена, то она эргодична. А так как вырожденность при как угодно малом изменении системы, как правило, разрушается, то получалось, что эргодические системы являются более типичными, чем неэргодические. Правда, это не было доказано строго и потому обычно принималось как правдоподобный постулат. Недавние исследования А.Н.Колмогорова и В.И.Арнольда неожиданно показали, что картина на самом деле может быть более сложной. Оказалось, что траектории могут заполнять всюду плотно не все многообразие  $(\Omega_E)$ , а некоторые замкнутые многообразия меньшей размерности, чем  $(\Omega_E)$ , однако столь сложной структуры, что они оказываются обладающими положительной мерой; тогда система не будет ни вырожденной, ни эргодической в описанном выше смысле. Такая картина характерна, в частности, для систем, обладающих более чем одной степенью свободы и находящихся вблизи состояния устойчивого равновесия. При этом подобная структура оказывается «грубой», она сохраняется при достаточно малом изменении системы. Однако при более сильном изменении система может стать эргодической. Таким образом, система, включающая параметры, может в одной области их изменения быть эргодической, а в другой – неэргодической.

## Упражнение

- 1) Укажите аналог формулы (5.3) для плотности среды в случае трехмерного эргодического движения среды.

## Ответы и решения

### §1

- 1) Исключая  $t$  из уравнений (1.11) и обозначив  $\left(\frac{p}{x}\right)_0 = \left(\frac{dp}{dx}\right)_0 = \alpha$ , получаем уравнение

для наклона  $\alpha$ , под которым траектории могут входить в начало координат:

$$\alpha = \left(-k - \frac{\lambda}{m_0} \alpha\right) / \left(\frac{\alpha}{m_0}\right), \text{ т. е. } \alpha^2 + \lambda \alpha + km_0 = 0. \text{ Если } \lambda^2 < 4km_0, \text{ то направления}$$

мнимые, т. е. получается фокус. Если же  $\lambda^2 \geq 4km_0$ , то получается узел с

$$\text{направлениями входа } \alpha = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4km_0}}{2}.$$

- 2) Система уравнений имеет вид

$$\dot{x} = \frac{p}{m_0}, \quad \dot{p} = kx - \frac{\lambda}{m_0} p,$$

все коэффициенты положительные. Особая точка имеет тип седла.

- 3) Уравнение имеет вид  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{h} \sin \varphi = 0$ , где  $\varphi$  – угол отклонения маятника от

вертикали,  $h$  – его длина, а  $g$  – ускорение земного тяготения. Картина траекторий на

фазовой плоскости показана на рис. 85; при этом надо иметь в виду, что добавление к  $\varphi$  целого кратного  $2\pi$  не меняет положения маятника, так что более точно говорить не о фазовой плоскости, а о фазовом цилиндре. Бесконечным траекториям

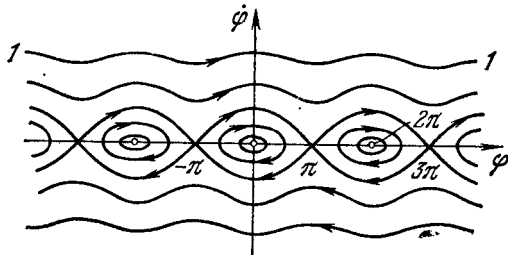


Рис. 85

типа 11 отвечают *ротационные* движения маятника, т. е. вращения его вокруг точки подвеса; замкнутым траекториям отвечают *либрационные* движения, т. е. покачивания около вертикали; сепаратрисам отвечают движения, асимптотически стремящиеся к вертикальному положению «вверх ногами» (конечно, при этом массивную точку надо считать подвешенной не на нити, а на стержне нулевой массы).

### §3

1) Чтобы говорить не о фазовой плотности и о скорости, а о массе, умножим обе части уравнения (3.8) на  $\Delta x \Delta p \Delta t$ . Тогда второй член будет равняться уменьшению за время  $\Delta t$  общей массы частиц с импульсами от  $p$  до  $p + \Delta p$ , расположенных в интервале координат от  $x$  до  $x + \Delta x$ , полученному за счет различия плотностей на концах этого интервала. Третий член равен аналогичному уменьшению за счет различия плотностей и ускорений при импульсах  $p$  и  $p + \Delta p$ . Первый член равен увеличению массы частиц в указанных интервалах координат и импульсов. Если частицы не создаются и не исчезают, то сумма всех трех членов должна равняться нулю.

2) Решая систему уравнений  $\dot{x} = \frac{p}{m_0}$ ,  $\dot{p} = -m_0 \omega^2 x$  при начальных условиях  $x_0 = x|_{t=0}$ ,

$p_0 = p|_{t=0}$ , получаем  $x = x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m_0 \omega} \sin \omega t$ ,  $p = -m_0 x_0 \omega \sin \omega t + p_0 \cos \omega t$ . Уравнение

$$\text{неразрывности: } \frac{\partial n^\phi}{\partial t} + \frac{p}{m_0} \frac{\partial n^\phi}{\partial x} - m_0 \omega^2 x \frac{\partial n^\phi}{\partial p} = 0, \quad \frac{dn^\phi}{dt} = 0.$$

### §4

1) Кинетическая энергия  $T = \frac{1}{2m_0} \iint p^2 n^\phi(x, p, t) dx dp$ . Применение уравнения (3.8) дает

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{m_0} \iint F n^\phi p dx dp, \text{ откуда } T_2 - T_1 = \frac{1}{m_0} \int_{t_1}^{t_2} dt \iint F \left( \frac{p}{m_0}, x, t \right) n^\phi(x, p, t) p dx dp. \text{ Это и}$$

есть требуемое утверждение.

2) Обозначим через  $x = \varphi(t; x_0, p_0, t_0)$ ,  $p = \psi(t; x_0, p_0, t_0)$  решение системы уравнений (3.5) при начальных данных  $x(t_0) = x_0$ ,  $p(t_0) = p_0$ . Тогда при  $F = F(t)$  будет

$$\psi(t; x_0, p_0, t_0) = p_0 + \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau,$$

$$\varphi(t; x_0, p_0, t_0) = x_0 + \frac{1}{m_0} \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau = x_0 + \frac{p_0}{m_0} (t - t_0) + \frac{1}{m_0} \int_{t_0}^t (t - \tau) F(\tau) d\tau.$$

Меняя ролями  $t$  и  $t_0$ , получаем отсюда

$$x_0 = x - \frac{p_0}{m_0} (t - t_0) + \frac{1}{m_0} \int_{t_0}^t (\tau - t_0) F(\tau) d\tau, \quad p_0 = p - \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau.$$

Поэтому  $\frac{D(x_0, p_0)}{D(x, p)} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{m_0}(t-t_0) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ , а значит, фазовая плотность остается

инвариантной, и мы получаем

$$n^\phi(x, p, t) = n_0^\phi(x_0, p_0) = n_0^\phi \left( x - \frac{p_0}{m_0}(t-t_0) + \frac{1}{m_0} \int_{t_0}^t (\tau-t_0) F(\tau) d\tau, p - \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau \right).$$

3) Решение

$$\delta(\varphi(t_0; x, p, t) - x_0) \delta(\psi(t_0; x, p, t) - p_0) \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, p)} \equiv \delta(x - \varphi(t; x_0, p_0, t_0)) \delta(p - \psi(t; x_0, p_0, t_0))$$

представляет собой закон движения единичной частицы под действием заданных сил и служит функцией влияния задачи о построении фазовой плотности по ее начальному распределению.

4) В данном примере  $n_0^\phi(x, p) = n_0^\phi \delta(p)$ ; поэтому  $n^\phi(x, p, t) = n_0^\phi \delta(\psi(t_0; x, p, t)) \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, p)}$ .

5) Параметрическое представление плотности:

$$n^\phi = n_0^\phi e^{-kt}, \quad x = \frac{x_0}{b_1 - b_2} (b_1 e^{b_2 t} - b_2 e^{b_1 t}), \quad p = \frac{b_1 b_2 m_0 x_0}{b_1 - b_2} (e^{b_2 t} - e^{b_1 t}),$$

где  $b_{1,2}$  – корни уравнения  $m_0 b^2 + \lambda b + k = 0$ . Если  $\lambda = 0$ , то  $n^\phi \equiv n_0^\phi$ . Если

$|\lambda| \geq 2\sqrt{km_0}$ , то особая точка  $x = p = 0$  поля характеристик на фазовой плоскости представляет собой узел (§1) и решение  $n^\phi(x, p)$  определено на всей плоскости  $x, p$ .

Если  $0 < |\lambda| < 2\sqrt{km_0}$ , то особая точка представляет собой фокус и решение можно строить в области, пересекающейся только с положительной или только с отрицательной полуосью  $x$ .

§6

$$1) M = \int_{-\infty}^{\infty} C m_0 \sqrt{2\pi m_0} \vartheta e^{-m_0 k x^2 / 2\vartheta} dx = 2\pi C m_0 \vartheta / \sqrt{k},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \iint E n^\phi(E) dx dp = \iint \left( \frac{p^2}{2m_0} + \frac{m_0 k x^2}{2} \right) C e^{-(p^2/2m_0) - (m_0 k x^2/2\vartheta)} dx dp = \\ &= \frac{C\sqrt{\pi}}{2} \int (\vartheta \sqrt{2m_0} \vartheta + m_0 k \sqrt{2m_0} \vartheta x^2) e^{-m_0 k x^2 / 2\vartheta} dx = \frac{\pi C \vartheta^2}{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

$$2) M = Cl\sqrt{2\pi} \vartheta m_0^{3/2}, \quad \mathcal{E} = Cl\sqrt{\frac{\pi}{2}} m_0 \vartheta^{3/2}; \text{ так как } n_{\max}^\phi = C, \text{ то из сохранения фазовой}$$

плотности движущегося элемента следует, что при медленном изменении  $l$  (нужном для сохранения распределения по Максвеллу – Больцману) и  $C$  сохраняется, откуда

$$\frac{d\vartheta}{dl} = -\frac{2\vartheta}{l}, \quad -\frac{d\mathcal{E}}{dl} = C\sqrt{2\pi m_0} \vartheta^{3/2} = \frac{2\mathcal{E}}{l}. \text{ Формула (5.5) дает тот же результат.}$$

§7

$$1) \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{m_0} \frac{dp}{dx}.$$

2) Решая уравнение  $\ddot{x} = \omega^2 x$  при начальных условиях  $x|_{t=0} = \xi$ ,  $\dot{x}|_{t=0} = \xi^2$ , находим

$$x = \xi \cos \omega t + \xi^2 \omega^{-1} \sin \omega t, \text{ откуда } dx = (\cos \omega t + 2\xi \omega^{-1} \sin \omega t) d\xi,$$

$\xi = \left( -\cos \omega t \pm \sqrt{\cos^2 \omega t + 4x \omega^{-1} \sin \omega t} \right) \omega / 2 \sin \omega t$ . Таким образом, при каждом  $t$  от 0 до  $\pi/\omega$  координата  $x$  может принимать значения только  $\geq -\omega \cos^2 \omega t / 4 \sin \omega t$ , причем если неравенство строгое, то в точке  $x$  имеются частицы с двумя различными

скоростями. В силу очевидной общей формулы  $\rho(x, t) = \rho_0(\xi) \left| \frac{d\xi}{dx} \right|$  получаем

$$\rho(x, t) = \rho_0(|\cos \omega t + 2\xi_1 \omega^{-1} \sin \omega t|^{-1} + |\cos \omega t + 2\xi_2 \omega^{-1} \sin \omega t|^{-1}) =$$

$$= 2\rho_0(\cos^2 \omega t + 4x \omega^{-1} \sin \omega t)^{-1/2}. \text{ Уравнение каустики в плоскости } x, t \text{ получается}$$

исключением  $\xi$  из равенств  $x = \xi \cos \omega t + \xi^2 \omega^{-1} \sin \omega t$  и  $\frac{dx}{d\xi} = \cos \omega t + 2\xi \omega^{-1} \sin \omega t = 0$ ,

откуда  $x = -\omega \cos^2 \omega t / 4 \sin \omega t$ . Таким образом, начиная с  $t_{кр} = 0$ , уплотнение приходит

из  $-\infty$ , доходит при  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  до  $x = 0$ , после чего вновь уходит при  $t = \frac{\pi}{\omega} - 0$  к  $-\infty$ ;

этим объясняется отличие от основного варианта, описанного в §II.10, где уплотнение зарождалось внутри среды. Интересно отметить, что в рассматриваемом примере  $\rho(x, +0) \equiv 2\rho_0$ , а не  $\rho_0$ : скорость далеких частиц столь велика, что при как

угодно малом  $t > 0$  они заполняют ось  $x$  вторым слоем. При  $\frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}$  картина

получается симметричной описанной относительно точки  $x = 0$ , после  $t = \frac{2\pi}{\omega}$

процесс периодически повторяется.

### §8

- 1) Положим  $\vartheta = t^\alpha f(s)$ , где  $s = t^\beta x$ ; подстановка в заданное уравнение даст после сокращения  $(1 - \beta) s f'(s) = (\alpha + 1) f(s)$ . Это равенство при  $\alpha = -1, \beta = 1$  представляет собой тождество, т. е. мы получаем решение в виде  $\vartheta = t^{-1} f(tx)$ , где  $f$  – произвольная функция. Случай  $\alpha \neq -1$  или  $\beta \neq 1$  ничего нового не дают.

### §9

- 1) Дифференцируя интеграл (9.6) по параметру  $t$  и пользуясь уравнением неразрывности, получаем

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = -\frac{1}{m_0} \int dp \int \sum_i p_i \frac{\partial n^\phi}{\partial x_i} \mathbf{x} \times \mathbf{p} dx - \int dx \int \sum_i x_i \frac{\partial (n^\phi F)}{\partial p_i} \mathbf{x} \times \mathbf{p} dp. \quad (1)$$

Выпишем первую проекцию первого интеграла и произведем интегрирование по частям; получим

$$\int dp \int \sum_i p_i \frac{\partial n^\phi}{\partial x_i} (x_2 p_3 - x_3 p_2) dx = -\int dp \int n^\phi \sum_i p_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x_2 p_3 - x_3 p_2) dx.$$

Однако полученная сумма равна  $p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot p_3 + p_3 \cdot (-p_2) = 0$ , а потому вся проекция равна нулю. Преобразуем аналогичным образом первую проекцию второго интеграла:

$$\int dx \int \sum_i x_i \frac{\partial (n^\phi F)}{\partial x_i} (x_2 p_3 - x_3 p_2) dp = -\int dx \int n^\phi F \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial p_i} (x_2 p_3 - x_3 p_2) dp = 0.$$

Подобным образом проверяется равенство нулю остальных проекций интегралов (1).

- 2) Вычислим производную от кинетической энергии  $T$  по  $t$ , воспользуемся уравнением неразрывности и произведем интегрирование по частям; получим

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{2m_0^2} \int dp \int (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \sum_i p_i \frac{\partial n^\phi}{\partial x_i} dx - \frac{1}{2m_0} \int dx \int (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \sum_i \frac{\partial (n^\phi F)}{\partial p_i} dp =$$

$$= 0 + \frac{1}{2m_0} \iint \sum_i n^\phi F_i \frac{\partial (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})}{\partial p_i} dx dp = \frac{1}{m_0} \iint \left( \sum_i F_i p_i \right) n^\phi dx dp.$$

Правая часть – это мощность внешних сил, действующих на среду. Чтобы она равнялась нулю и, тем самым, кинетическая энергия была постоянной, достаточно,

чтобы  $\sum_i F_i p_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{p} = 0$ , т. е. чтобы силы были направлены перпендикулярно скорости частиц (такие силы называются гироскопическими).

- 3) Пусть источник испускает  $r_0$  частиц в единицу времени, а импульс частиц по модулю равен  $\eta_0$ . Тогда

$$n^\phi(x, p, t) = \begin{cases} \frac{r_0 m_0}{4\pi \eta_0 n^\phi |\mathbf{x}|^2} \delta\left(\mathbf{p} - \eta_0 \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) & \left(|\mathbf{x}| < \frac{\eta_0}{m_0} t\right), \\ 0 & \left(|\mathbf{x}| > \frac{\eta_0}{m_0} t\right). \end{cases}$$

## §11

1)  $\rho(x) = 4\sqrt{2\pi} m_0^{5/2} \int n^\phi(E) \sqrt{E - m_0 u(x)} dE.$

# Глава V Случайные перемещения частиц и теория диффузии

Во всех предыдущих главах мы рассматривали *детерминированные* движения частиц; другими словами, знание начального состояния частицы полностью определяло ее дальнейшее движение, т. е. ее координаты в любой последующий момент. Другой важный класс составляют случайные движения частиц под действием случайных импульсов – например, движение молекул диффундирующего вещества под действием случайных толчков молекул среды, в которой происходит диффузия. Здесь принципиально невозможно предсказать движение каждой отдельной частицы, оно допускает только вероятностное описание. Однако замечательно, что если частиц, движущихся случайно и независимо друг от друга, много, то поведение среды из этих частиц, т. е. *диффундирующей среды*<sup>31</sup> в целом (а только это, как правило, и представляет основной интерес) может быть предсказано вполне однозначно. Мы начнем с рассмотрения самой простой схемы случайных перемещений, применяя элементарные понятия теории вероятностей (см., например, ЭПМ, гл. XIII).

## § 1 Простейшая схема блуждания по прямой

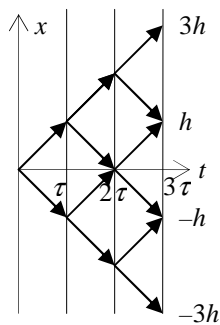


Рис. 86

Вдоль аллеи, на которой находится ось  $x$ , расположено большое число магазинов через равные промежутки  $h$  один от другого. Из одного из них, служащего началом отсчета, выбегает дама: она только что услышала, что где-то продают французские зонтики. Наугад выбрав направление вдоль аллеи, она за время  $\tau$  подбегает к соседнему магазину. Услышав, что там французских зонтиков нет, она от волнения полностью забывает, откуда она прибежала, и потому бежит опять наугад в одну из двух сторон. Через время  $\tau$  она опять получает отрицательный ответ и, вновь потеряв ориентировку, опять наугад выбирает направление дальнейшего пути и т. д. Где она окажется через время  $n\tau$ ? (Для простоты принимаем, что слух был ложным и потому процесс поиска французского зонтика бесконечен<sup>32</sup>.)

<sup>31</sup> Отметим, что в процессе диффузии участвуют две среды. Мы примем условно, что одна из них диффундирует, а другая служит как бы базой, опорой, в которой происходит диффузия. Вторую мы не будем исследовать (она для нас имеет только то значение, что влияет на параметры диффузии) и потому всегда, говоря о среде, будем иметь в виду первую. Конечно, такое разделение сред не имеет абсолютного характера, оно возможно, если концентрация первой среды мала.

<sup>32</sup> Для иллюстрации случайных блужданий обычно приводят пример пьяного, который падает каждые несколько шагов и после каждого падения забывает направление, по которому шел (см., например, Ф. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. I, ИЛ, 1958, стр. 653). Однако мы избрали иной

Конечно, точно предсказать это невозможно, можно лишь указать вероятности того, что дама в момент  $n\tau$  будет иметь ту или иную координату. Пусть, например,  $n = 3$ . Тогда у дамы имеется  $2^3 = 8$  вариантов движения (рис. 86), которые все равно вероятны и потому каждый имеет вероятность  $1/8$ . Один из этих вариантов (когда на всех трех этапах дама бежит вперед по оси  $x$ ) приводит в точку  $3h$ , три – в точку  $h$ , три – в точку  $(-h)$  и, наконец, один – в точку  $(-3h)$ . Поэтому вероятности того, что в момент  $3\tau$  дама будет иметь такие координаты, равны соответственно  $1/8, 3/8, 3/8$  и  $1/8$ .

Мы предоставляем читателю показать, что при любом  $n = 1, 2, 3, \dots$  в момент  $n\tau$  дама может оказаться в точках  $-nh, (-n + 2)h, (-n + 4)h, \dots, (-n + 2n)h, nh$ , причем

вероятность того, что она окажется в точке  $(-n + 2k)h$ , равна  $\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot 2^{-n}$ . (Нетрудно

понять, что вычисление этой вероятности равносильно рассмотренному в §§XIII.2–3 ЭПМ вычислению вероятности выпадания  $k$  гербов при бросаниях монеты. Более

подробно: в точку  $(-n + 2k)h$  при заданном числе шагов  $n$  приводит  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  вариантов

движения, а вероятность каждого варианта равна  $2^{-n}$ .) Эти вероятности служат

последовательными членами формального разложения степени  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^n$  по формуле

бинома Ньютона; отсюда, в частности, видно, что их сумма при любом  $n$  равна

единице, как и должно быть (почему?). Например,  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}$ , что отвечает

вероятностям, указанным выше в связи с рис. 86.

Непосредственное применение приведенной формулы удобно лишь для небольших  $n$  и  $k$ . В дальнейшем мы преобразуем эту формулу так, что ее окажется возможным применять и для больших  $n$  и  $k$ , что существенно, в частности, при рассмотрении множества из большого числа невзаимодействующих дам, блуждающих по оси  $x$ . Это позволит также перейти к простой непрерывной модели рассматриваемого процесса при  $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$  (причем будет ясно и необходимое соотношение между  $h$  и  $\tau$ ), которую можно будет исследовать независимо от ее более громоздкого дискретного первоисточника.

В дальнейшем, чтобы не пугать читателя толпой дам и не соблазнять его звоном монет, мы будем говорить о движении частиц. При этом будет, как всегда, считаться, что частицы не взаимодействуют между собой (по-прежнему, подвергаясь действию случайных сил!), в частности, различные частицы могут иметь одинаковую координату. Пусть в каждый момент  $t = 0, \tau, 2\tau, \dots$  любая из частиц может иметь любую из координат  $0, \pm h, \pm 2h, \dots$ , причем если какая-либо частица в момент  $n\tau$  имела координату  $jh$ , то в момент  $(n + 1)\tau$  эта частица может с равной вероятностью  $1/2$  оказаться либо в точке  $(j - 1)h$ , либо же в точке  $(j + 1)h$ . Можно себе представить, как будто частицы сидят в клетках, каждая из которых расположена на расстоянии  $h$  от следующей, причем через каждый промежуток времени  $\tau$  двери всех клеток раскрываются и каждая из частиц перебегает наугад в одну из двух соседних клеток – независимо от поведения остальных частиц и независимо от своего предшествующего поведения. Предсказать поведение каждой отдельной частицы при этом, конечно, невозможно; но каково поведение системы в целом?

Допустим, что число частиц в каждой из точек  $jh$ , в которой эти частицы находятся, велико. Тогда очевидно, что с как угодно большой относительной точностью можно утверждать, что половина всех частиц, находящихся в момент  $n\tau$  в точке  $jk$ , за время  $\tau$  перейдет по оси  $x$  на  $h$  вперед и половина – назад. Примем, что этот закон является

---

пример, чтобы лишний раз не напоминать читателю о распространенном пороке.



совершенно точным и обозначим через

$$N_{jn} \quad (j = , \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

количество частиц в точке  $jh$  в момент  $n\tau$ , тогда мы приходим к соотношению

$$N_{j,n+1} = \frac{1}{2}(N_{j-1,n} + N_{j+1,n}) \quad (2)$$

в последующий момент в любую точку придет половина всех частиц, находящихся в предыдущий момент в ближайшей точке слева, и половина всех частиц, находящихся в ближайшей точке справа.

Основное соотношение (2) дает возможность, зная начальное распределение частиц, т. е. все значения  $N_{j0}$ , найти это распределение и во все последующие моменты времени. В самом деле, положив в этом соотношении  $n = 0$ , мы найдем все значения  $N_{j1}$ ; зная эти значения и положив в соотношении (2)  $j = 1$ , мы найдем все значения  $N_{j2}$  и т. д. Как известно, соотношения такого типа в математике называются *рекуррентными*.

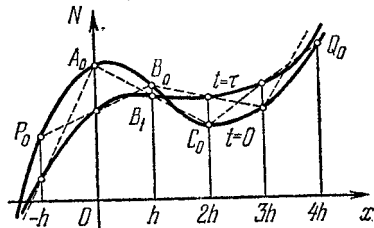


Рис. 87

Процесс построения решения с помощью рекуррентного соотношения (2) легко проиллюстрировать геометрически. Изобразим для наглядности закон начального распределения частиц в виде линии, проходящей через точки  $(jh; N_{j0})$  (на рис. 87 это линия  $P_0 A_0 \dots Q_0$ ); это – сглаженная начальная плотность системы частиц. Тогда построение значений  $N_{j1}$  по формуле (2) равносильно перемещению каждой из упомянутых точек по вертикали на середину хорды, проходящей через две соседние из этих точек. (На рис. 87 показано, как точка  $B_0$  перемещается на середину хорды  $A_0 C_0$  и определяет точку  $B_1$ .) Если так проделать со всеми точками начального распределения, мы получим распределение частиц при  $t = \tau$  (рис. 87). Затем то же можно проделать с построенными точками и получить значения  $N_{j2}$  и т. д. Этот графический метод построения решения называется *методом Шмидта*.

На этой иллюстрации хорошо видно свойство выравнивания, определяющее характер изменения распределения частиц с возрастанием времени. Именно, если число частиц в какой-либо точке меньше среднего арифметического значений в соседних точках, то это число возрастает, а если больше – то убывает. Только если на некотором интервале частицы распределены по линейному закону, то во внутренних точках число частиц некоторое время остается неизменным (сколько частиц приходит с одной стороны, столько же уходит в другую), пока этот интервал не «размоет» с краев<sup>33</sup>.

Нетрудно указать дискретный аналог понятия потока массы, введенного в §1.6. Так как за время от  $n\tau$  до  $(n+1)\tau$  интервал от  $jh$  до  $(j+1)h$  проходит  $N_{jn}/2$  частиц в положительном направлении и  $N_{j+1,n}/2$  – в отрицательном, то соответствующий поток,

который естественно сопоставить точке  $x = \left(j + \frac{1}{2}\right)h$  и моменту  $t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau$ , равен

$$q_{j+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \frac{m_0}{2} (N_{jn} - N_{j+1,n}) \frac{1}{\tau}, \quad (3)$$

где  $m_0$  – масса каждой частицы.

Допустим теперь, что значения  $n$  и  $n - |j|$  велики. (Говоря подробнее, значение  $n$  должно быть таким, чтобы «пики» в начальном распределении частиц, если они были, успели рассосаться настолько, что изменение числа частиц за один временной шаг будет

<sup>33</sup> Впрочем, при рассматриваемой схеме процесса возможная начальная асимметрия между точками с четными и нечетными номерами не выравнивается; это особенно хорошо видно, если все частицы были в начальный момент сосредоточены в одной точке (продумайте это!). Чтобы устранить эту асимметрию, можно осреднить результат по двум соседним точкам, либо рассмотреть схему блужданий, указанную в упражнении, в которой частицы могут не только переходить в соседние точки, но и с определенной вероятностью оставаться на месте.

существенно меньше характерного значения этого числа. Условие на  $n - |j|$  означает, что мы находимся вдалеке от краев расплывающегося по оси  $x$  с течением времени «облака» частиц, где потребовалось бы особое рассмотрение. Впредь мы, как правило, не будем приводить подобные уточнения, а будем пользоваться краткими формулировками.) Тогда можно дискретную картину заменить на ее непрерывную модель, введя плотность  $\rho = \rho(x, t)$  среды из частиц, причем

$$q(x, t) = \frac{m_0}{h} N_{jn} \quad (x = jh, \quad t = n\tau). \quad (4)$$

Из соотношения (3) получаем выражение для потока массы непрерывной среды

$$q(x, t) = \frac{m_0}{2\tau} \frac{h}{m_0} [\rho(x, t) - \rho(x + h, t)] = -\frac{h^2}{2\tau} \rho'_x(x, t) \quad (5)$$

(при этих переходах мы, отбрасываем величины высшего порядка малости).

Таким образом, мы получили, что *поток диффундирующей массы прямо пропорционален градиенту плотности и направлен противоположно этому градиенту*, т. е. в сторону убывания плотности, как это и следовало ожидать. Соответствующий коэффициент пропорциональности

$$\kappa = \frac{h^2}{2\tau} \quad (6)$$

называется *коэффициентом диффузии*. Таким образом, можно написать связь между потоком массы и градиентом плотности

$$q = -\kappa \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (7)$$

Мы приняли выше, что  $h$  и  $\tau$  постоянны, а  $n$  и  $n - |j|$  увеличиваются. Переход от дискретной схемы к непрерывной можно совершить и другим, в принципе равносильным способом, приняв, что  $x$  и  $t$  фиксированы, а  $h$  и  $\tau$  стремятся к нулю. (Это тот же способ, каким мы в §XII.1 ЭПМ перешли от системы частиц, связанных пружинками, к непрерывной струне.) Из формулы (6) видно, как при таком переходе должны быть связаны между собой  $h$  и  $\tau$ , именно,  $\tau$  должно иметь порядок  $h^2$  (а не  $h$ , как могло бы сначала показаться!). Отсюда вытекает, в частности, интересное следствие. Пусть в начальный момент все частицы были расположены на конечном интервале оси  $x$ . Тогда с ростом времени края «облака» частиц расходятся со скоростью  $v = \frac{h}{\tau} \sim \frac{h}{h^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$ . Таким образом, в пределе могут найтись частицы,

перемещающиеся за единицу времени как угодно далеко. Тем не менее, в §7 мы увидим, что среднее абсолютное значение приращения координаты частицы за единицу времени остается конечным, так как в условиях, когда направления перемещения случайны, вероятность того, что все эти перемещения будут совершаться в одну сторону, весьма быстро стремится к нулю при  $\tau \rightarrow 0$ .

Имея выражение (7) для потока массы, можно воспользоваться уравнением неразрывности в форме (I.7.2); мы получаем *уравнение диффузии*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (8)$$

которому должна удовлетворять плотность диффундирующего вещества.

Уравнение (8) играет важную роль в математической физике; оно описывает также процессы, родственные процессу диффузии. Одним из них служит процесс распространения тепла в прямолинейном однородном стержне. В самом деле, пусть  $\vartheta = \vartheta(x, t)$  – температура стержня в точке  $x$  в момент  $t$ . Тогда плотность тепловой энергии  $Q$  равна  $\rho_Q = c\rho_0\vartheta$ , где  $\rho_0$  – массовая линейная плотность стержня, а  $c$  – *коэффициент теплоемкости*, который при небольшом изменении температур можно принять постоянным. С другой стороны, с достаточной точностью оправдывается закон

Фурье, согласно которому поток тепловой энергии пропорционален градиенту температуры:  $q_0 = -a \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$  (ср. с (7)), где коэффициент теплопроводности  $a$  также можно считать постоянным. Отсюда, составляя по правилам §I.7 уравнение неразрывности для тепловой энергии, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -a \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (c\rho_0 \vartheta) = 0;$$

вынеся за скобки  $-a$  и  $c\rho_0$  и обозначив  $\kappa = \frac{a}{c\rho_0}$  (в данном рассмотрении  $\kappa$  называется коэффициентом температуропроводности), приходим к тому же уравнению (8) для температуры  $\vartheta$ . Поэтому уравнение (8) называется также уравнением теплопроводности.

Из-за важности уравнения (8) приведем еще один его вывод, исходя непосредственно из рекуррентного соотношения (2). Для этого с помощью равенства (4) перепишем его в виде

$$\rho(x, t + \tau) = \frac{1}{2} [\rho(x-h, t) + \rho(x+h, t)]. \quad (9)$$

Разлагая плотность в ряд Тейлора, получим

$$\rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dots = \frac{1}{2} \left( \rho - h \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \dots + \rho + h \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \dots \right)$$

(значения  $\rho$  и производных берутся при не сдвинутых значениях аргументов  $x, t$ ), откуда, приводя подобные члены и отбрасывая величины высшего порядка малости, легко приходим к (8).

Наконец, можно рассуждать следующим образом: перепишем соотношение (2) в виде

$$N_{j,n+1} - N_{j,n} = \frac{1}{2} (N_{j-1,n} - 2N_{j,n} + N_{j+1,n})$$

или, равносильно,

$$\frac{N_{j,n+1} - N_{j,n}}{\tau} = \kappa \frac{N_{j-1,n} - 2N_{j,n} + N_{j+1,n}}{h^2} \quad \left( \kappa = \frac{h^2}{2\tau} \right). \quad (10)$$

Левая часть и дробь в правой части служат известными приближенными выражениями для производных 1-го и 2-го порядков (см., например, ЭПМ, §II.2). Заменяя эти приближенные выражения на точные, мы вновь приходим к уравнению (8).

Обратите внимание на размерность коэффициента диффузии  $[\kappa] = [L]^2 [t]^{-1}$ , которая видна как из его явного выражения (6), так и из самого уравнения (8), так как размерности числителей в обеих частях одинаковы.

Обратно, если мы исходим из уравнения диффузии (8), то соотношение (2) можно рассматривать как конечноразностное приближение этого уравнения. Подобрать шаги  $h$  и  $\tau$  так, чтобы выполнялось равенство (6), можно с помощью соотношений (2) и (4) построить приближенное решение уравнения (8), если задано начальное условие  $\rho|_{t=0} = \rho_0(x)$ .

Отсюда, в частности, видно, что решения уравнения (8) обладают свойством выравнивания, о котором говорилось при рассмотрении дискретной картины. Впрочем, это свойство нетрудно вывести и непосредственно из уравнения (8). В самом деле, пусть для некоторого  $t$  значение  $\rho(x, t)$  будет для какого-то  $x$  меньше среднего арифметического значения  $\rho$  в близких симметричных точках. Тогда график зависимости  $\rho$  от  $x$  при рассматриваемом  $t$  – выпуклый книзу (почему?), а это означает,

что  $\left. \frac{d^2 \rho}{dx^2} \right|_t = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} > 0$ . Но тогда в силу уравнения (8) будет  $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ , т. е.  $\rho$  возрастает.

Аналогично проверяем, что если  $\rho(x, t)$  больше среднего арифметического значений  $\rho$  в близких симметричных точках, то  $\rho$  будет убывать. Таким образом, в обоих случаях зависимость  $\rho$  от  $x$  имеет тенденцию выравнивания либо до константы (так будет, в частности, если рассматривается эволюция среды из частиц суммарной конечной массы на бесконечной оси, так как тогда плотность среды в каждой точке оси стремится к нулю) либо до линейной зависимости, не сводящейся к константе. В первом случае на рассматриваемом интервале оси  $x$  в пределе, при  $t \rightarrow \infty$ , устанавливается полное статистическое равновесие, при котором поток массы в каждой точке равен нулю. Во втором же случае процесс в пределе переходит в стационарный, для которого плотность и поток в каждой точке не зависят от времени, причем (в одномерном случае, который мы сейчас рассматриваем!) поток одинаков во всех точках. Такая картина получится, если на одном конце интервала частицы поступают с постоянной интенсивностью, тогда как на другом конце частицы удаляются из системы с той же интенсивностью. Обратите внимание на различие между равновесием и стационарным процессом!

### Упражнение

- 1) Выведите аналог уравнения диффузии для случая, когда в интервал времени от  $n\tau$  до  $(n+1)\tau$  любая частица, имевшая координату  $jh$ , с вероятностью  $\alpha$  переходит в положение  $(j-1)h$ , с той же вероятностью – в положение  $(j+1)h$  и с вероятностью  $\beta$  остается на месте ( $2\alpha + \beta = 1$ ).

## § 2 Общая схема блуждания по прямой

Вернемся к дискретной схеме, с которой мы начали §1, когда одинаковые частицы в моменты  $0, \tau, 2\tau, \dots$  могут находиться в положении  $0, \pm h, \pm 2h, \dots$ ; однако рассмотрим теперь более общий по сравнению с §1 случай, когда в каждый промежуток времени от  $n\tau$  до  $(n+1)\tau$  частицы могут сменять любое из этих положений на любое другое (не обязательно соседнее!) с заданными вероятностями<sup>34</sup>. Как и раньше, эти вероятности для каждой частицы не зависят ни от поведения остальных частиц, ни от состояния всей системы в предшествующие моменты времени, т. е. от предыстории.

Вероятностные процессы, обладающие последним свойством (отсутствием последствия), называются *марковскими* по имени выдающегося русского математика А.А.Маркова, который их впервые глубоко исследовал. Первое же свойство, очевидно, приводит к возможности применения принципа суперпозиции – при сложении начальных распределений частиц их распределения в любой последующий момент также складываются (свойство линейности).

Обозначим через  $P(i, j, n)$  вероятность того, что частица, имевшая в момент  $n\tau$  координату  $ih$ , перейдет к моменту  $(n+1)\tau$  в положение  $jh$ . Ясно, что при любых  $i, n$  будет

$$\sum_j P(i, j, n) = 1, \quad (1)$$

так как частица обязательно должна где-нибудь оказаться; в остальных вероятности  $P(i, j, n)$  могут быть произвольными. Отметим, в частности, что сумма  $\sum_i P(i, j, n)$  не обязана равняться единице; она может оказаться большей (меньшей) единицы, если точка  $jh$  чем-то привлекательна (непривлекательна) для частиц.

<sup>34</sup> Как будто раз в год ( $\tau = 1$  году) для «крепостных» – частиц объявляется «Юрьев день», когда они могут по произволу сменить свое «имение» – узловую точку  $jh$  на оси  $x$ , причем не обязательно на соседнее имение, как в §1, а на любое другое. Можно представить себе также, что систему через каждый интервал времени  $\tau$  «встряхивают», в результате чего частицы могут перескакивать из одних «лунок» в другие.

Пусть обозначение  $N_{jn}$  имеет тот же смысл, что в §1; рассмотрим, что произойдет в точке  $jh$  на интервале времени от  $n\tau$  до  $(n+1)\tau$ . В начале этого интервала в точке было  $N_{jn}$  частиц. На протяжении интервала из этой точки в любую другую точку  $jh$  ( $i \neq j$ ) перешло  $N_{jn}P(j, i, n)$ , обратно же перешло  $N_{in}P(i, j, n)$  частиц. Таким образом, взамен (1.2) мы получаем рекуррентное соотношение

$$N_{j,n+1} = N_{jn} + \sum_{i \neq j} N_{in}P(i, j, n) - N_{jn} \sum_{i \neq j} P(j, i, n). \quad (2)$$

Соотношение (2) хорошо показывает баланс частиц, но формально его можно упростить. Для этого воспользуемся равенством (1), переставив в нем буквы  $i$  и  $j$ . Это даст

$$N_{j,n+1} = N_{jn} + \sum_{i \neq j} N_{in}P(i, j, n) - N_{jn}[1 - P(j, j, n)] = \sum_i N_{in}P(i, j, n). \quad (3)$$

Этот результат тоже ясен, так как любая частица в момент  $(n+1)\tau$  должна в положение  $jh$  откуда-нибудь прийти.

Теперь хорошо видно, что соотношение (1.2) является весьма специальным примером общего соотношения (3), равносильного (2): (1.2) получится, если в (3) положить

$$P(i, j, n) = \begin{cases} 1/2 & (|i - j| = 1), \\ 0 & \text{для прочих комбинаций } i, j. \end{cases}$$

Как и в §1, устремляя  $h$  и  $\tau$  к нулю, можно перейти к непрерывной модели рассмотренной дискретной схемы. Если при этом средний пробег частицы за один временной шаг (т. е. «свободный пробег») также стремится к нулю (так будет, например, если  $P = P(i - j)$ , причем  $P$  не зависит от  $n$ ), то в пределе мы получим уравнение, в котором будут «завязаны» только частицы, находящиеся в бесконечной близости друг от друга, т. е. дифференциальное уравнение – например, уравнение диффузии (1.8). Но если мы обобщаем рассмотрение и, вообще говоря, не требуем, чтобы свободный пробег при переходе к пределу стремился к нулю, то «завязанными» оказываются все частицы, т. е. в предельном соотношении суммы превратятся в интегралы, а не в производные, как выше. (То, что это действительно более общий случай, будет подробно показано в конце параграфа.) Перенеся в соотношении (2) член  $N_{jn}$  в левую часть, видим, что непрерывным аналогом этого соотношения будет

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \int K(s, x, t)\rho(s, t)ds - \rho(x, t) \int K(x, s, t)ds, \quad (4)$$

где интегрирование распространено по всему интервалу оси  $x$ , занятому средой; для простоты можно считать, что интегралы берутся от  $-\infty$  до  $\infty$ . Таким образом, для неизвестной плотности  $\rho(x, t)$  среды из диффундирующих частиц получается *интегро-дифференциальное уравнение*.

Смысл ядра  $K(x, s, t)$  в уравнении (4) вытекает из самого этого уравнения:  $K(x, s, t)$  равно относительной скорости переноса (плотности вероятности переноса, отнесенной к единице времени) в момент  $t$  частиц из положения  $x$  в положение  $s$ . Точнее говоря, вероятность того, что частица, которая в момент  $t$  находилась в положении  $x$ , в момент  $t + dt$  окажется на интервале от  $s$  до  $s + ds$  ( $s \neq x$ ), равна  $K(x, s, t)dsdt$ . Ядро  $K \geq 0$  может быть, вообще говоря, произвольным: его размерность  $[K] = [L]^{-1}[t]^{-1}$ .

Впредь мы будем для простоты считать рассматриваемую систему автономной, другими словами, считать, что ядро  $K$  не зависит от  $t$ . Не представляет труда проследить, какие из получающихся результатов немедленно распространяются на неавтономные системы.

Два интеграла в правой части (4) можно объединить, что дает возможность формально упростить уравнение. Для этого надо обозначить

$$K_1(s, x) = K(s, x) - \delta(x - s) \int K(x, s_1)ds_1. \quad (5)$$

Мы предоставляем читателю проверить, что ядро  $K_1$  удовлетворяет соотношению

$\int K_1(s, x) dx = 0$  и что с помощью этого ядра уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \int K_1(s, x) \rho(s, t) ds.$$

Однако мы будем впредь пользоваться ядром  $K$ , имеющим более наглядный смысл, чем  $K_1$ .

Физические предположения о рассматриваемой системе можно выразить в виде требований на ядро  $K$ . Так, если среда, в которой происходит диффузия, однородная, так что условия диффузии одинаковы во всех точках оси  $x$ , то ядро  $K(x, s)$  не меняется при добавлении к  $x$  и  $s$  одной и той же постоянной; другими словами, тогда  $K = K(x - s)$ . Если среда не только однородна, но и изотропна, то  $K(x - s) \equiv K(s - x)$ , другими словами,  $K = K(|x - s|)$ .

Получим выражение для потока диффундирующей массы в какой-либо точке  $x$  в момент  $t$ . Для этого надо просуммировать всю массу, переносимую за единицу времени из левой по отношению к  $x$  полуоси в правую, и из результата вычесть массу, переносимую в обратном направлении. Получится

$$q(x, t) = \int_{-\infty}^x d\xi \int_x^{\infty} K(\xi, s) \rho(\xi, t) ds - \int_x^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^x K(\xi, s) \rho(\xi, t) ds. \quad (6)$$

Мы предоставляем читателю проверить, что соответствующее уравнение неразрывности (I.7.2) совпадает с уравнением (4); это естественно, так как условие сохранения массы каждой порции частиц в процессе эволюции было заложено в вывод этого уравнения.

Перейдем теперь к рассмотрению важного специального случая, о котором мы упомянули при выводе уравнения (4), – случая, когда свободный пробег частиц мал (по сравнению с характерным интервалом изменения решения). Это означает, что ядро  $K(x, s)$  при любом фиксированном  $x$  отлично от нуля лишь при  $s$ , близких к  $x$ , или, во всяком случае, достаточно быстро стремится к нулю при возрастании  $|s - x|$  (мы уточним это требование в конце параграфа). В этом случае основной вклад интегралов в (4) совершается по интервалу  $s$ , близкому к  $x$ , и потому можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора

$$\rho(s, t) = \rho(x, t) + (s - x) \rho'_x(x, t) + \frac{(s - x)^2}{2} \rho''_{xx}(x, t) + \dots \quad (7)$$

Кроме того, будем требовать, чтобы среда, в которой происходит диффузия, была однородной и изотропной, т. е. чтобы  $K = K(|x - s|)$ .

Мы сейчас покажем, что в рассматриваемом специальном случае, независимо от конкретного вида ядра  $K$ , плотность  $\rho$  удовлетворяет уравнению диффузии (1.8). Это можно сделать, либо непосредственно исходя из общего уравнения (4), либо воспользовавшись выражением (6) для потока массы.

Пойдем сначала по первому пути и подставим разложение (7) в первый интеграл правой части (4); мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & \int K(|x - s|) ds \cdot \rho + \int K(|x - s|) (s - x) ds \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \\ & + \int K(|x - s|) \frac{(s - x)^2}{2} ds \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \dots - \int K(|x - s|) ds \cdot \rho. \end{aligned} \quad (8)$$

Первый и последний из выписанных интегралов взаимно уничтожаются, тогда как второй, как интеграл от нечетной относительно  $s - x$  функции по симметричному интервалу интегрирования, равен нулю. Обозначая

$$\int K(|x - s|) \frac{(s - x)^2}{2} ds = \int_0^{\infty} K(\xi) \xi^2 d\xi = \kappa \quad (9)$$

и отбрасывая члены высшего порядка малости, мы приходим к уравнению (1.8). В

формуле (9) можно воспользоваться и ядром  $K_1$  (см. (5)), взамен  $K$ , так как

$$\int_0^{\infty} K_1 \xi^2 d\xi = \int_0^{\infty} K \xi^2 d\xi \text{ (почему?).}$$

Чтобы применить второй способ, разложим в выражении (6) для потока массы плотность  $\rho(\xi, t)$  в ряд по степеням  $\xi - x$ , учитывая, что в каждом из интегралов (6) основной вклад дают значения, близкие  $\xi = x$ ,  $s = x$  (почему?). Мы получим

$$\begin{aligned} q = & \int_{-\infty}^x d\xi \int_x^{\infty} K(|\xi - s|) ds \cdot \rho + \int_{-\infty}^x d\xi \int_x^{\infty} K(|\xi - s|)(\xi - x) ds \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \dots - \\ & - \int_x^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^x K(|\xi - s|) ds \cdot \rho - \int_x^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^x K(|\xi - s|)(\xi - x) ds \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} - \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Первые интегралы в первой и второй строках взаимно уничтожатся, если во втором из них поменять обозначения  $\xi$  на  $s$  и обратно. Остальные два интеграла после такого преобразования объединяются в интеграл

$$\int_{-\infty}^x d\xi \int_x^{\infty} K(|\xi - s|)(\xi - x) ds = \left( \begin{array}{l} \xi = x - \xi_1 \\ s = x + s_1 \end{array} \right) = - \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} K(|\xi_1 + s_1|)(\xi_1 + s_1) d\xi_1.$$

Если во внутреннем интеграле сделать замену  $\xi_1 + s_1 = \xi$ , а затем переставить порядок интегрирования, мы получим (проверяйте вычисления!)

$$- \int_0^{\infty} ds_1 \int_{s_1}^{\infty} K(\xi) \xi d\xi = - \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\xi} K(\xi) \xi ds = - \int_0^{\infty} \xi^2 K(\xi) d\xi.$$

Получился в точности интеграл (9). Поэтому, отбрасывая в правой части (10) члены высшего порядка малости, обозначенные многоточиями, мы приходим к выражению (1.7) для потока массы, откуда уравнение диффузии (1.8) получается с помощью стандартного применения уравнения неразрывности (I.7.2).

Остановимся еще на вопросе о скорости убывания ядра  $K(\xi)$  при росте  $\xi$ . Уже из самой формулировки исходной задачи (см. уравнение (4)) вытекает, что интеграл  $\int_0^{\infty} K(\xi) d\xi$

должен быть сходящимся. Для перехода к уравнению диффузии требуется уже, чтобы сходилась и интеграл  $\int_0^{\infty} \xi^2 K(\xi) d\xi$ . Это требование сходимости проистекает из того, что в

разложении (7) функции  $\rho$  в ряд Тейлора мы воспользовались членом со второй производной.

Но, конечно, одной лишь сходимости подобных интегралов недостаточно, нужно, чтобы основные значения ядра  $K(\xi)$  были сосредоточены вблизи точки  $\xi = 0$ . Что это означает? Если продолжить разложение (8), то член с третьей производной отпадет, но член с  $\partial^4 \rho / \partial x^4$  останется. И чтобы можно было его отбросить, должно быть

$$2 \int_0^{\infty} K(\xi) \frac{\xi^4}{4!} d\xi \cdot \left| \frac{\partial^4 \rho}{\partial x^4} \right| \ll 2 \int_0^{\infty} K(\xi) \frac{\xi^2}{2} d\xi \cdot \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right|. \quad (11)$$

Пусть для функции  $\rho$  характерный интервал изменения  $\Delta x = L$ , а характерный диапазон изменения на этом интервале  $\Delta \rho = R$ . Тогда можно принять, что последовательные производные от  $\rho$  по  $x$  имеют порядки  $R/L$ ,  $R/L^2$  и т. д. Поэтому, отвлекаясь от числовых коэффициентов, можно переписать условие (11) в виде

$$\int_0^{\infty} K(\xi) \xi^4 d\xi \ll L^2 \int_0^{\infty} K(\xi) \xi^2 d\xi.$$

Это и есть условие возможности перехода к уравнению диффузии. Как видим, оно связывает ядро  $K$  с характерным интервалом изменения плотности. Таким образом,

одно и то же ядро может в задачах со сравнительно большим характерным интервалом изменения плотности приводить к уравнению диффузии, а в других задачах, для которых этот интервал мал, – к более сложному интегро-дифференциальному уравнению.

### Упражнения

- 1) Вычислите коэффициент диффузии для ядер;  $K(x, s) = A\delta(|x - s| - h)$ ;  $Ae^{h - |x - s|}$  ( $e$  – единичная функция);  $Ae^{-|x - s|/h}$ ;  $Ae^{-(x-s)^2/h^2}$  ( $A, h > 0$ ).
- 2) Пусть  $K(x, s) = A\delta(x - s)$ . Выпишите уравнение (4), его решение при заданном начальном условии  $\rho|_{t=0} = \rho_0(x)$  и истолкуйте результат.
- 3) То же для  $K(x, s) = A\delta'(x - s)$ .
- 4) Выпишите уравнение (4) для  $K(x, s) = A\delta''(x - s)$  и рассмотрите отличие результата от результата упражнения 2 на основе формулы (7).
- 5) Пусть  $K(x, s) = \frac{1}{2\tau} \delta(|x - s| - h)$  ( $h, \tau > 0$ ), а уравнение (4) решается приближенно, с помощью замены  $\partial\rho/\partial t$  на  $\frac{\rho(x, t + \tau) - \rho(x, t)}{\tau}$ . Покажите, что тогда мы приходим к ситуации, рассмотренной в §1.
- 6) Пусть  $K(x, s) \equiv K(|x - s|) = K(|\xi|)$  ( $\xi = x - s$ ); тогда и  $K_1(x, s) = K_1(|\xi|)$ . Выразите  $\int_{-\infty}^{\infty} \xi^n K_1(|\xi|) d\xi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) через аналогичный интеграл для  $K$ .

### § 3 Диффузия на плоскости и в пространстве

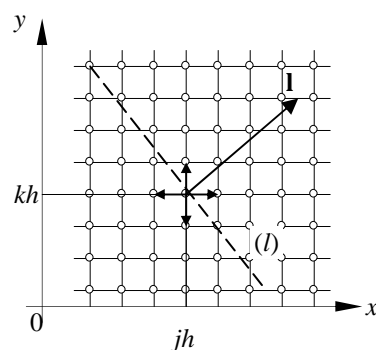


Рис. 88

Здесь мы распространим результаты §§1 и 2 на плоские и пространственные движения частиц; мы более подробно разберем плоские движения, так как пространственные рассматриваются совершенно аналогично.

Рассмотрим сначала простейшую дискретную схему.

Пусть частицы в каждый момент  $0, \tau, 2\tau, \dots$  могут находиться в любой из точек с координатами  $x = jh, y = kh$  ( $j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), т. е. узловых точек квадратной сетки с шагом  $h$ , причем за промежуток времени от  $n\tau$  до  $(n+1)\tau$  любая такая частица может с равной вероятностью  $1/4$  перейти в любую из четырех соседних узловых точек

(рис.88), т. е. точек с координатами  $((j-1)h; kh), (jh; (k+1)h), ((j+1)h; kh), (jh; (k-1)h)$ . Тогда, если обозначить через  $N_{jkn}$  число частиц в точке  $(jh; kh)$  в момент  $n\tau$  (которое предполагается большим), то аналогично (1.2) мы приходим к соотношению

$$N_{jk, n+1} = \frac{1}{4} (N_{j-1, kn} + N_{jk+1, n} + N_{j+1, kn} + N_{jk-1, n}). \quad (1)$$

С помощью этого рекуррентного соотношения можно, зная начальное распределение частиц  $N_{jk0}$  и полагая в (1)  $n = 0, 1, 2, \dots$ , найти последовательно все значения  $N_{jk1}$ , затем все значения  $N_{jk2}$  и т. д., т. е. распределение частиц в последовательные узловые моменты времени.

Как и в §1, если значения  $|j|, |k|, n$  велики (или, что то же, если изменения величин  $N_{jkn}$  за пространственный или временной шаг относительно малы), то можно перейти к непрерывным переменным. Для этого введем плотность  $\rho(x, y, t)$  среды из частиц, так что

$$\rho(x, y, t) = \frac{m_0}{h^2} N_{jkn} \quad (x = jh, \quad y = kh, \quad t = n\tau).$$



Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$\rho(x, y, t + \tau) = \frac{1}{4} [\rho(x - h, y, t) + \rho(x, y + h, t) + \rho(x + h, y, t) + \rho(x, y - h, t)].$$

Применение формулы Тейлора дает

$$\rho(x, y, t) + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dots = \frac{1}{4} \left( 4\rho + h^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + h^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \dots \right), \quad (2)$$

откуда после приведения подобных членов и отбрасывания членов высшего порядка малости приходим к уравнению диффузии (уравнению теплопроводности) на плоскости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right); \quad (3)$$

здесь коэффициент диффузии  $k = h^2/4\tau$ .

В правой части уравнения (3) получился лапласиан  $\nabla^2 \rho$ , инвариантный относительно выбора направления осей координат. Интересно, что эта инвариантность (изотропность) не была заложена в постановку задачи, где направления осей сетки были выделенными. Для изотропности было существенно, что мы в правой части разложения (2) удержали только члены второго порядка и тогда получилось уравнение диффузии, для которого выделенность осей не играет роли; в конечном счете здесь причина в том, что линия второго порядка с равными двумя главными осями есть окружность, у которой все оси равны. Если бы мы уточнили уравнение (3), удержав в разложении (2) дальнейшие члены (например, 4-го порядка), то такой изотропии уже не было бы, и после поворота осей, скажем, на  $45^\circ$  уточненное дифференциальное уравнение не осталось бы инвариантным.

Приведем еще один вывод уравнения диффузии, основанный на применении понятия потока массы при плоском движении (§I.6). Для этого заметим, что поток массы между соседними узлами  $(jh; kh)$  и  $((j+1)h, kh)$  равен

$$\frac{m_0}{\tau} \cdot \frac{1}{4} (N_{jkn} - N_{j+1kn}) = \frac{h^2}{4\tau} [\rho(x, y, t) - \rho(x+h, y, t)] = -\frac{h^3}{4\tau} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

(с точностью до членов высшего порядка малости). Поэтому если на плоскости  $x, y$  проведена линия  $(l)$  с ортом внешней нормали  $\mathbf{l}$  (см. рис. 88), то на единицу длины этой линии приходится  $\cos(\mathbf{l} \wedge x) h^{-1}$  горизонтальных слоев сетки, по которым через  $(l)$  проходит

$$-\frac{h^3}{4\tau} \frac{\partial \rho}{\partial x} \cos(\mathbf{l} \wedge x) h^{-1} = -\frac{h^2}{4\tau} \frac{\partial \rho}{\partial x} \cos(\mathbf{l} \wedge x)$$

единиц массы в единицу времени. Аналогично рассматривается движение массы по вертикальным слоям; в сумме получим, что через единицу длины линии  $(l)$  проходит в положительном направлении

$$-\frac{h^2}{4\tau} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial x} \cos(\mathbf{l} \wedge x) + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cos(\mathbf{l} \wedge y) \right]$$

единиц массы среды из частиц в единицу времени. Это выражение можно переписать в виде

$$-\frac{h^2}{4\tau} \text{grad } \rho \cdot \mathbf{l};$$

поэтому, применяя обозначения §I.6, наше утверждение можно записать в виде

$$-\frac{h^2}{4\tau} \text{grad } \rho \cdot \mathbf{l} = \frac{d^2 m}{dt}.$$

Сравнивая эту формулу с (I.6.2), получим выражение для вектора потока массы диффундирующих частиц

$$\mathbf{q}(x, y, t) = -\frac{h^2}{4\tau} \text{grad } \rho.$$

Отсюда можно стандартным образом написать уравнение неразрывности для массы (§I.8):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{q} = \frac{h^2}{4\tau} \text{div grad } \rho = \frac{h^2}{4\tau} \nabla^2 \rho.$$

Мы вновь пришли к уравнению (3).

При движении частиц в пространстве уравнение диффузии имеет вид, аналогичный (3),

но с трехмерным лапласианом; коэффициент диффузии при этом равен  $\kappa = \frac{h^2}{6\tau}$ .

Аналогом общего уравнения (2.4) распространения частиц при плоском или пространственном движениях служит интегро-дифференциальное уравнение

$$\rho'_i(P, t) = \int_{(H)} K(Q, P, t) \rho(Q, t) d_Q H - \left[ \int_{(H)} K(Q, P, t) d_Q H \right] \rho(P, t), \quad (4)$$

где  $P, Q$  – произвольные текущие точки области  $(H)$ , занятой средой из диффундирующих частиц, а индекс при дифференциале указывает на то, что интегрирование идет по точке  $Q$  при фиксированной  $P$ . Смысл ядра  $K$ . тот же, что в §2. Если среда, в которой происходит диффузия, является однородной, то ядро  $K(P, Q, t)$  зависит не от «разрозненных» точек  $P$  и  $Q$ , а от вектора  $\overline{PQ}$ ; если среда к тому же изотропная, то ядро  $K$  зависит от единственной геометрической скалярной величины – расстояния  $PQ$  (и, быть может, от времени  $t$ ).

Чтобы ввести для рассматриваемой системы понятие потока массы (§I.6), надо принять то или иное допущение (рабочую гипотезу), позволяющее судить, пересечет ли частица, перешедшая за время  $dt$  из положения  $A$  в положение  $B$ , мысленно выделенную площадку  $(d\sigma)$  или нет.

В однородном изотропном случае естественно принять, что такое пересечение состоится, если отрезок  $AB$  пересекается с  $(d\sigma)$ . Для подсчета потока массы частиц при таком допущении вычислим сначала, какая доля всех частиц, расположенных в некоторой точке  $Q$ , пройдет за время  $dt$  через малую ориентированную площадку  $(d\sigma)$ , расположенную в какой-либо другой точке  $P$ . Обозначив  $\overline{PQ} = \mathbf{r}$  и разбив часть пространства, затененную площадкой  $(d\sigma)$  при источнике света в  $Q$ , сферами с центром в  $Q$  и радиусами  $s$  ( $r \leq s < \infty$ ) на кусочки, получаем, что искомая доля равна

$$\int_r^\infty d\sigma \cdot \cos(\overline{QP} \wedge \mathbf{d}\sigma) \frac{s^2}{r^2} K(s) ds dt = - \left( \frac{1}{r^3} \int_r^\infty s^2 K(s) ds \right) \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}\sigma dt.$$

Суммируя все источники частиц, получаем, что баланс частиц, прошедших через  $(d\sigma)$  за время  $dt$  в положительном направлении, будет равен

$$- \int_{(H)} \left[ \left( \frac{1}{r^3} \int_r^\infty s^2 K(s) ds \right) \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}\sigma dt \right] \rho(Q, t) d_Q H.$$

Сравнивая этот результат с формулой (I.6.2), получаем выражение потока массы диффундирующих частиц в точке  $P$ :

$$\mathbf{q}(P, t) = - \int_{(H)} \left( \frac{1}{r^3} \int_r^\infty s^2 K(s) ds \right) \mathbf{r} \rho(Q, t) d_Q H \quad (\mathbf{r} = \overline{PQ}). \quad (5)$$

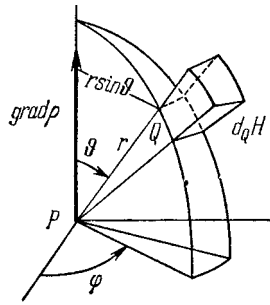
Предположим теперь дополнительно, что пробег частиц мал по сравнению с характерным интервалом изменения плотности  $\rho$ , так что можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора

$$\rho(Q, t) = \rho(P, t) + \text{grad } \rho \cdot \mathbf{r} + \dots \quad (\text{grad } \rho = \rho'_x(P, t) \mathbf{i} + \dots). \quad (6)$$

Можно заранее, из соображения инвариантности потока относительно выбора декартовых осей заключить, что если ограничиваться производными 1-го порядка, то поток должен быть пропорционален  $\text{grad}\rho$  – единственному, с точностью до скалярного множителя, вектору, выражающемуся через производные 1-го порядка и инвариантному относительно выбора декартовых осей. Мы получим тот же факт из формулы (5); это даст возможность выразить коэффициент пропорциональности между  $\mathbf{q}$  и  $\text{grad}\rho$  через ядро  $K$ .

Если подставить разложение (6) в правую часть (5), то интеграл от первого слагаемого будет равен нулю (члены с  $\mathbf{r}$  и с  $-\mathbf{r}$  взаимно уничтожаются) и остается, с точностью до малых высшего порядка,

$$\mathbf{q}(P, t) = - \int_{(H)} \left( \frac{1}{r^3} \int_r^\infty s^2 K(s) ds \right) (\text{grad } \rho \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} d_Q H,$$



причем за область  $(H)$  нужно взять все пространство, так как влияние далеких его частей на точку  $P$  несущественно. Чтобы вычислить последний интеграл, перейдем к сферическим координатам  $r, \vartheta, \varphi$  с центром  $P$  и осью, параллельной  $\text{grad}\rho$  (рис. 89). Тогда из рисунка видно, что

$$\text{grad}\rho \cdot \mathbf{r} = |\text{grad}\rho| \rho \cos \vartheta, \quad d_Q H = r d\vartheta dr \cdot (r \sin \vartheta) d\varphi,$$

т. е.

$$\mathbf{q}(P, t) = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty \sin \vartheta \cos \vartheta \left( \int_r^\infty s^2 K(s) ds \right) \mathbf{r} dr |\text{grad } \rho|.$$

Рис. 89

В этом интеграле проекции вектора  $\mathbf{r}$  на плоскость, перпендикулярную  $\text{grad}\rho$ , взаимно уничтожаются, поэтому вместо  $\mathbf{r}|\text{grad}\rho|$  можно поставить

$$r \cos \vartheta (\text{grad}\rho)^0 |\text{grad}\rho| = r \cos \vartheta \text{grad}\rho.$$

Весь интеграл принимает вид

$$\mathbf{q}(P, t) = - \int_0^\infty r dr \int_r^\infty s^2 K(s) ds \int_0^\pi \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \text{grad } \rho = - \frac{4\pi}{3} \text{grad } \rho \int_0^\infty r dr \int_r^\infty s^2 K(s) ds.$$

Перестановка порядка интегрирований по  $r$  и  $s$  (продумайте ее!) дает

$$\mathbf{q}(P, t) = - \frac{4\pi}{3} \text{grad } \rho \int_0^\infty r dr \int_r^\infty s^2 K(s) ds = - \frac{2}{3} \pi \text{grad } \rho \int_r^\infty s^4 K(s) ds.$$

Отсюда, введя коэффициент диффузии

$$\kappa = - \frac{2}{3} \pi \int_r^\infty s^4 K(s) ds, \quad (7)$$

получаем окончательно

$$\mathbf{q} = -\kappa \text{grad}\rho. \quad (8)$$

Таким образом, формула (7) и определяет искомый коэффициент пропорциональности. На основании уравнения неразрывности (I.8.3) приходим к уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{q} = \kappa \text{div grad } \rho = \kappa \nabla^2 \rho, \quad (9)$$

т. е. к тому же уравнению диффузии, которое было выведено ранее на основе дискретной схемы процесса.

Упомянем еще об одном выводе уравнения диффузии для общей схемы частиц с малым пробегом, не использующем понятие потока массы. Для этого надо выбрать в пространстве систему координат  $x, y, z$ , после чего разложить  $\rho(Q, t)$  в уравнении (4) по степеням приращений координат  $x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P$ , положив  $K = K(r)$ . Тогда интеграл от первого члена, не содержащего этих приращений, взаимно уничтожается с

последним интегралом в (4); интегралы от линейных членов, а также от квадратичных членов с произведением приращений координат равны нулю в силу нечетности подынтегральных функций. Таким образом, в группе квадратичных членов остается только интеграл

$$\left[ \int_{(H)} K(r) \cdot \frac{1}{2} (x_Q - x_P)^2 d_Q H \right] \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \left( r = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2} \right), \quad (10)$$

а также аналогичные интегралы, в которых вместо  $x$  стоит соответственно  $y$  или  $z$ . Вычисление этих интегралов осуществляется с помощью перехода к сферическим координатам, в точности так, как это было проделано выше. Мы предоставляем читателю проверить, что интеграл в выражении (10) как раз равен коэффициенту (7). Складывая полученные выражения и отбрасывая члены выше второго порядка малости, мы вновь приходим к уравнению (9).

Уравнение диффузии (9) допускает наглядное истолкование, о котором для одномерного случая мы говорили в конце §1. Для этого напомним (см., например, ЭПМ, §X.9) одно из равносильных определений лапласиана<sup>35</sup>:

$$\nabla^2 u(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{6}{r^2} [\bar{u}^{P,r} - u(P)], \quad (11)$$

где под  $\bar{u}^{P,r}$  понимается среднее значение функции  $u$  по сфере с центром в точке  $P$  и радиусом  $r$ . Поэтому уравнение (8) означает, что если плотность среды в некоторой точке  $P$  меньше, чем средняя плотность по малым сферам с центром в этой точке, то плотность в точке  $P$  будет возрастать (к точке  $P$  будет подходить больше частиц, чем отходить от нее). Если же плотность в  $P$  больше упомянутой средней плотности, то плотность в  $P$  будет убывать. Это свойство наглядно вытекает из однородности и изотропности среды, в которой происходит диффузия частиц с малым пробегом. Формулу (11) удобно применить для вывода уравнения диффузии для случая следующей схемы случайного движения частиц: в моменты  $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots$  каждая частица перескакивает на расстояние  $h$  в любом направлении (уже не обязательно параллельном одной из осей координат, как в начале этого параграфа), причем все направления такого перескока равновероятны; в промежутках между этими моментами частицы покоятся. Тогда в малый объем, расположенный в некоторой точке  $P$ , при таком перескоке приходят частицы со сферы радиуса  $h$  с центром в  $P$ , поэтому

$$u(P)|_{t+\tau} = \bar{u}^{P,h}|_t.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\tau} [u(P)|_{t+\tau} - u(P)|_t] = \frac{1}{\tau} [\bar{u}^{P,h} - u(P)]_t = \kappa \left\{ \frac{6}{h^2} [\bar{u}^{P,h} - u(P)]_t \right\} \left( \kappa = \frac{h^2}{6\tau} \right).$$

Заменяя при малых  $\tau, h$  левую часть на  $du/dt$ , а выражение в фигурных скобках, в силу формулы (11), – на  $\nabla^2 u$ , мы приходим к уравнению диффузии (9).

## Упражнения

- 1) Получите аналог формулы (11) для среднего значения по шару с центром в точке  $P$ .
- 2) Напишите общее уравнение (4) для  $K(P, Q, t) = Ae(h - PQ)$  ( $e(s)$  – единичная функция) и получите отсюда уравнение диффузии (9) при  $h \rightarrow 0$ ,  $A = A(h)$  с помощью упражнения 1.

<sup>35</sup> Для обозначения лапласиана часто вместо  $\nabla^2 u$  пишут  $\Delta u$ ; мы здесь не пользуемся таким обозначением, чтобы не смешивать лапласиан с приращением.

## § 4 Свойства решений уравнения диффузии в безграничной среде

В этом параграфе мы покажем, что целый ряд свойств решений уравнения диффузии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \rho \quad (1) = (3.8)$$

можно вывести непосредственно из самого этого уравнения, не располагая еще формулами для решения. Мы будем для определенности рассматривать одномерный случай ( $\nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ ), хотя аналогичные свойства справедливы также на плоскости и в пространстве. Кроме того, будем считать, что  $\rho$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  достаточно быстро стремится к нулю.

Первым свойством является принцип суперпозиции (возможность наложения плотностей друг на друга), о котором мы упоминали в §2. Математически это свойство выражается в том, что уравнение (1), которому удовлетворяют распределения плотностей, – линейное и однородное, а потому сумма его решений служат решением того же уравнения. Из принципа суперпозиции вытекает, в частности, что хотя плотность среды из частиц по своему физическому смыслу не может быть отрицательной, но имеет смысл рассматривать решения уравнения (1), имеющие произвольный знак, которые могут быть истолкованы как отличие одной плотности от другой (например, отличие плотности среды от некоторой постоянной), т. е. как разность между двумя реальными плотностями.

Следующим важным свойством является закон сохранения массы

$$\int \rho(x, t) dx = M_0 = const \quad (2)$$

(здесь и далее интегрирование производится от  $-\infty$  до  $\infty$ ). В интеграле (2) переменная  $t$  служит параметром, поэтому и результат интегрирования мог бы зависеть от  $t$ ; но оказывается, что на самом деле интеграл (2) от  $t$  не зависит. Конечно, это утверждение является весьма естественным, так как условие сохранения масс было положено в основу вывода уравнения диффузии, однако, поскольку при этом выводе были произведены упрощения, то все-таки приятно, что закон сохранения масс можно вывести из самого уравнения. Для доказательства формулы (2) продифференцируем левую часть по  $t$  как по параметру, после чего воспользуемся уравнением (1) и произведем интегрирование:

$$\frac{d}{dt} \int \rho(x, t) dx = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \kappa \int \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=-\infty}^{\infty}.$$

Однако в силу сказанного выше  $\partial \rho / \partial x$  на обоих концах интервала интегрирования, т. е.

при  $x = \pm\infty$ , должно равняться нулю. Значит  $\frac{d}{dt} \int \rho dx = 0$ , откуда и получаем

утверждение (2).

Свойством (2) обладают также решения общего уравнения (2.4). В самом деле, для таких решений

$$\frac{d}{dt} \int \rho(x, t) dx = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \int dx \int K(s, x, t) \rho(s, t) ds - \int \left[ \int K(s, x, t) ds \right] \rho(x, t) dx.$$

Замена в одном из полученных двойных интегралов букв  $s, x$  на  $x, s$  показывает, что правая часть равна нулю, откуда и следует наше утверждение.

Вернемся к уравнению диффузии (1) и покажем, что интеграл

$$\int x \rho(x, t) dx = M_1 \quad (3)$$

(момент 1-го порядка для решения  $\rho$ ) также инвариантен во времени. Это доказывается, как свойство (2), путем дифференцирования интеграла (3) по параметру  $t$

с последующим применением уравнения (1) и интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int x \rho(x, t) dx &= \int x \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \kappa \int x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = \kappa \int x d \frac{\partial \rho}{\partial x} = \\ &= \kappa \left( x \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \int \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) = \kappa \left( x \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \right) \Big|_{x=-\infty}^{\infty} = 0, \end{aligned}$$

откуда и вытекает наше утверждение.

Из инвариантности массы  $M_0$  и момента 1-го порядка  $M_1$  вытекает неподвижность центра тяжести рассматриваемой среды из частиц, который вычисляется по формуле  $x_{ц.т.} = M_1/M_0$ . Эта инвариантность, конечно, вытекает из изотропии закона диффузии. Интересно отметить, что распределение плотности при этом вовсе не обязано быть симметричным.

Проведем аналогичное рассмотрение момента 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int x^2 \rho dx &= \int x^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \kappa \int x^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = \kappa \left( x^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=-\infty}^{\infty} - 2 \int x \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) = \\ &= -2\kappa \int x \frac{\partial \rho}{\partial x} dx = -2\kappa \left( x \rho \Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \int \rho dx \right) = 2\kappa \int \rho dx. \end{aligned}$$

Мы пришли к интересной формуле

$$\frac{d}{dt} \int x^2 \rho dx = 2\kappa \int \rho dx; \quad (4)$$

а так как правая часть, в силу свойства (2), инвариантна во времени, то момент 2-го порядка для решения меняется по линейному закону:

$$M_2 = \int x^2 \rho dx = \int x^2 \rho dx \Big|_{t=t_0} + (2\kappa \int \rho dx)(t - t_0).$$

Из формулы (4), на основании инвариантности массы и момента 1-го порядка, сразу следует, что при любом постоянном  $a$  будет

$$\frac{d}{dt} \int (x - a)^2 \rho dx = 2\kappa M_0. \quad (5)$$

Нетрудно проверить (мы предоставляем это читателю), что интеграл в левой части, зависящий от  $a$ , принимает минимальное значение, если положить  $a = x_{ц.т.}$ ; тогда он будет представлять собой момент инерции  $I$  среды из частиц. Мы видим, что момент инерции не сохраняется, а возрастает по линейному закону; это связано с постепенным «расползанием» частиц.

Полученные соотношения приобретают более простой вид в терминах осреднения по мере  $m$  с элементом  $dm = \rho dx$  (сравните с §II.14). В самом деле, например

$$\overline{(x - a)^2}^m = \frac{1}{M_0} \int (x - a)^2 dm = \frac{1}{M_0} \int (x - a)^2 \rho dx,$$

поэтому формулу (5) можно записать так:  $d \left[ \overline{(x - a)^2}^m \right] / dt = 2\kappa$ .

Можно провести аналогичное исследование и моментов высшего порядка для решения (см. упражнения).

Другая группа свойств решений уравнения (1) имеет локальный характер и связана с рассасыванием максимумов и минимумов этих решений. Так, можно проверить, что (за исключением тривиального случая, когда  $\rho \equiv 0$ ) максимальное значение решения  $\max_x \rho(x, t)$  убывает во времени. В самом деле, пусть для некоторого  $t = t_1$  плотность  $\rho(x, t)$  имеет наибольшее значение (наибольший из максимумов, если их несколько)  $\rho_1$ , которое достигается при некотором  $x = x_1$ . Как известно, в точке максимума вторая

производная отрицательна, точнее,  $\left. \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right|_{x=x_1, t=t_1} \leq 0$ . Примем, что это неравенство строгое

(более детальное рассмотрение показывает, что это предположение несущественно).

Тогда из уравнения диффузии мы получаем, что и  $\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{x=x_1, t=t_1} < 0$ , а потому  $\max_x \rho(x, t)$  при

$t$ , больших  $t_1$  и близких к  $t_1$ , будет меньше, чем  $\rho_1$ . Отсюда, в силу произвольности  $t_1$ , получаем, что рассматриваемое наибольшее значение убывает для всех  $t$ , что и требовалось доказать.

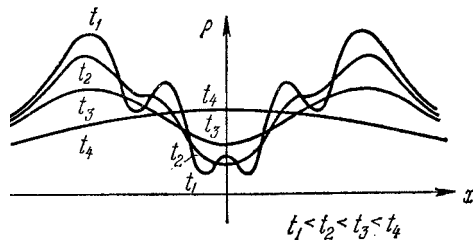


Рис. 90

Из проведенного рассуждения вытекает также, что значения  $\rho$  в малой окрестности точки любого (не обязательно наибольшего) максимума с ростом времени убывают и, аналогично, значения в окрестности точки минимума возрастают. Следует только иметь в виду, что если плотность, как функция  $x$ , имеет несколько максимумов и минимумов, то с течением времени соседние

максимумы и минимумы могут сливаться и нейтрализовать друг друга. Например, на рис. 90 показан случай, когда в некоторый момент  $t_1$  зависимость  $\rho(x)$  имела пять максимумов и четыре минимума. Максимальные значения убывали, а минимальные возрастали (причем точки экстремума, кроме центральной, смещались), пока в некоторый момент  $t_2$  крайние минимумы не слились с соседними внутренними максимумами, породив точки перегиба, а средние минимумы – с центральным максимумом, породив точку минимума. Далее происходила эволюция двух максимумов и одного минимума ( $t_3$ ), пока они не слились в один центральный максимум, после чего центральное максимальное значение стало монотонно убывать ( $t_4$ ). Таким образом, центральное значение сначала убывало, затем некоторое время возрастало, после чего стало монотонно убывать до  $\rho = 0$  при  $t = \infty$ .

Видно, что максимумы и минимумы могут только сохраняться или нейтрализоваться, новых экстремумов появиться не может. Из описанного поведения экстремальных значений вытекает, в частности, что если в некоторый момент  $\rho(x) > 0$  (достаточно даже, чтобы  $\rho(x) \geq 0$ , лишь бы  $\rho(x) \neq 0$ ), то и во все дальнейшие моменты будет  $\rho(x) > 0$ .

Аналогично, если  $\rho(x) < \rho_0 = \text{const}$  в некоторый момент, то и во все дальнейшие моменты тоже. Так как уравнению диффузии удовлетворяет и температура среды в процессе свободной теплопроводности, то мы видим, что невозможны «всплески» температуры, т. е. тепло нельзя «сфокусировать» с помощью теплопроводности.

Некоторые свойства решений вытекают из рассмотрения преобразований, при которых уравнение (1) переходит в себя. Так, например, уравнение (1) переходит в себя при замене  $x$  на  $-x$ . Отсюда следует, что если некоторая функция  $\varphi(x, t)$  служит решением этого уравнения, то и функция  $\varphi(-x, t)$  – тоже (изотропия закона диффузии!).

Поэтому при зеркальном отражении начального распределения плотностей относительно некоторой точки и дальнейшее распределение плотностей испытает такое же преобразование. Если же начальное распределение плотностей было симметричным (четным), то при указанном отражении оно переходит в себя, а потому и дальнейшее распределение плотностей будет симметричным (это свойство сохранения четности), как на рис. 90.

Рассмотрев одновременную замену  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ , нетрудно проверить аналогичное свойство сохранения нечетности. (Отметим, что нечетная функция обязательно меняет знак, так что тут надо иметь в виду сделанное в начале параграфа замечание о суперпозиции.)

Однако замены  $t$  на  $-t$  уравнение (1) не выдерживает! Это приводит к существенным

затруднениям при решении уравнения (1) назад во времени (т. е. при решении задачи о восстановлении исходного распределения плотностей по заданному конечному распределению), о которых мы еще скажем. Пока отметим только непосредственное следствие из формулы (4): если задано распределение  $r|_{t=t_0}$ , то при условии  $\rho \geq 0$  решение назад во времени может быть продолжено не дальше, чем на временной интервал  $\Delta t = l_{t=t_0}/(2\kappa M_0)$  (почему?). Таким образом, неограниченное продолжение решения назад во времени при условии  $\rho \geq 0$  невозможно.

## Упражнения

- 1) Получите аналог соотношения (2) для неоднородного уравнения диффузии  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + f(x, t)$ , в котором функция  $f$  пропорциональна пространственно-временной плотности частиц, поступающих в среду.
- 2) Найдите закон изменения во времени момента 3-го порядка для решения уравнения диффузии; то же – для момента  $n$ -го порядка.

## § 5 Особое (автомодельное) решение уравнения диффузии

Перейдем к построению решений уравнения диффузии, причем для простоты будем рассматривать одномерный случай, т. е. уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}; \quad (1) = (1.8)$$

коэффициент диффузии  $\kappa$  мы будем впредь считать постоянным. Мы начнем с построения особых (автомодельных) решений, о которых мы упоминали в §IV.6, причем привлечем соображения размерности. Дело в том, что из величин  $x$ ,  $t$ ,  $\kappa$ , которые могут входить в решение, можно составить, с точностью до возведения в степень, лишь одну безразмерную комбинацию

$$s = \frac{x^2}{\kappa t}.$$

Поэтому, если в решение входит какая-либо безразмерная функция от безразмерного аргумента, то она должна иметь вид  $f(s) = f\left(\frac{x^2}{\kappa t}\right)$ . Добавляя в качестве множителя

степень  $t$ , которая сохраняется, с точностью до постоянного коэффициента, при изменении масштаба, мы приходим к форме решения

$$\rho = At^\alpha f\left(\frac{x^2}{\kappa t}\right) \quad (2)$$

с размерным постоянным коэффициентом  $A$ .

Теперь нам надо подобрать функцию  $f$  и показатель  $\alpha$  так, чтобы удовлетворить уравнению (1) (в силу линейности уравнения (1) коэффициент  $A$  при этом остается произвольным). Конечно, не следует думать, что для любого уравнения возможно построить такое автомодельное решение. То, что нам все-таки удастся это сделать, получается в результате определенной симметрии (однородности и изотропности) в постановке физической задачи; эта симметрия проявляется как в дифференциальном уравнении, так и в начальном условии.

Будем считать решение (2) четной функцией  $x$  и уменьшим число подбираемых параметров, воспользовавшись законом (4.2) сохранения масс, который для решения (2) имеет вид

$$2 \int_0^\infty At^\alpha f\left(\frac{x^2}{\kappa t}\right) dx = 2 \int At^\alpha f(s) \sqrt{\kappa t} \frac{ds}{2\sqrt{s}} = 2A\sqrt{\kappa t}^{\alpha+1/2} \int s^{-1/2} f(s) ds = const$$



(мы применили замену переменной интегрирования  $x^2/\kappa t = s$ ). Так как результат не должен зависеть от  $t$ , то

$$\alpha + 1/2 = 0, \text{ т. е. } \alpha = -1/2. \quad (3)$$

(Нечетное по  $x$  автомодельное решение будет построено в §11.) Итак, мы пришли к форме решения

$$\rho = At^{-1/2} f\left(\frac{x^2}{\kappa t}\right). \quad (4)$$

Чтобы найти функцию  $f$ , подставим это выражение в уравнение (1), для чего вычислим производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{A}{2} t^{-3/2} f(s) - \frac{A}{\kappa} x^2 t^{-5/2} f'(s), \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{2A}{\kappa} x t^{-3/2} f'(s), \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{2A}{\kappa} t^{-3/2} f''(s) + \frac{4A}{\kappa^2} x^2 t^{-5/2} f''(s). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (1) и умножив обе части полученного равенства на  $\frac{2}{A} t^{3/2}$ , приходим к уравнению

$$-f(s) - \frac{2x^2}{\kappa} f'(s) = 4f'(s) + \frac{8x^2}{\kappa} f''(s),$$

т. е.

$$8sf''(s) + (2s + 4)f'(s) + f(s) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, для нахождения неизвестной функции в автомодельном решении получилось обыкновенное дифференциальное уравнение. В этом состоит важное преимущество автомодельных решений, когда их удается построить, так как в целом обыкновенные дифференциальные уравнения существенно проще, чем уравнения с частными производными.

Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами редко интегрируются в квадратурах. Однако уравнение (5) представляет собой счастливое исключение, так как его левая часть допускает факторизацию, т. е. представление в виде итерации двух дифференциальных выражений 1-го порядка. Обозначив операцию дифференцирования буквой  $D$ , мы можем переписать левую часть в виде

$$[8sD^2 + (2s + 4)D + 1]f \equiv (2sD + 1)(4D + 1)f.$$

(Продумайте это представление! Почему нельзя левую часть представить в виде  $(4D + 1)(2sD + 1)$ ?) Обозначив  $(4D + 1)f = h$ , перепишем уравнение (5) в виде

$$(2sD + 1)h = 0, \text{ т. е. } 2s \frac{dh}{ds} + h = 0.$$

Отсюда, разделяя переменные, получаем

$$\frac{dh}{h} = -\frac{ds}{2s}, \text{ т. е. } h = \frac{C_1}{\sqrt{s}}.$$

Теперь возвращаемся к функции  $f$ :

$$(4D + 1)f = \frac{C_1}{\sqrt{s}}, \text{ т. е. } 4f' + f = \frac{C_1}{\sqrt{s}}.$$

Решение этого уравнения, которое мы предоставляем читателю, приводит к формуле

$$f(s) = \left( \frac{C_1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{s}} e^{s/4} ds + C_2 \right) e^{-s/4}.$$

Таким образом, мы получили два линейно независимых решения

$$f_1(x) = e^{-s/4} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{s_1}} e^{s_1/4} ds_1, \quad f_2(s) = e^{-s/4}.$$

Первое из этих решений при  $s \rightarrow 0$  имеет порядок  $\sqrt{s} \sim x$ , т. е. является нечетной функцией  $x$ , вопреки предположению. Даже если не обращать на это внимания, но ограничиться положительными решениями, то это решение отпадает, как сменяющее знак. (Эту смену знака нельзя устранить добавлением второго решения, так как при  $s \rightarrow \infty f_1(s) \gg f_2(s)$ .) Второе решение вполне пригодно, и в силу (4) мы получаем автомодельное решение уравнения (1):

$$\rho(x, t) = At^{-1/2} e^{-x^2/4\kappa t}, \quad (6)$$

где  $A$  – произвольная постоянная.

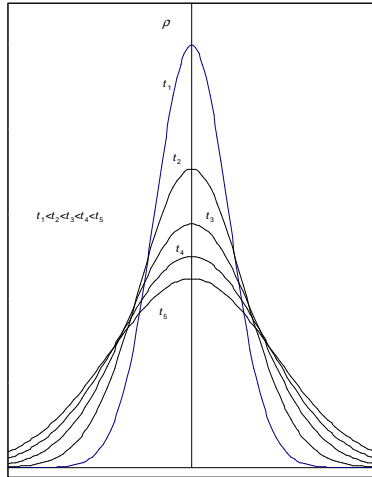


Рис. 91

Графики построенного автомодельного решения при различных  $t > 0$  показаны на рис. 91. Это симметричные колоколообразные кривые, очень быстро приближающиеся при увеличении  $|x|$  к оси  $x$ ; они хорошо известны в теории вероятностей, где описывают закон распределения Гаусса. Площадь, заключенная между любым из графиков рассматриваемого семейства и осью  $x$ , одна и та же, она равна суммарной массе диффундирующих частиц:

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4\kappa t} dx = \left| x = 2\sqrt{\kappa t} y \right| = \\ &= \frac{A}{\sqrt{t}} 2\sqrt{\kappa t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 2A\sqrt{\pi\kappa} \end{aligned} \quad (7)$$

(последний интеграл равен  $\sqrt{\pi}$ ; он вычислен, например, в ЭПМ, §IV.7). Как видим, результат не зависит от  $t$ . Так как при приближении  $t$  к нулю колокол все сильнее сжимается к оси  $\rho$ , становясь выше, т. е. растягиваясь от оси  $x$  во столько же раз, то в пределе, при  $t = +0$ , функция (6) становится пропорциональной дельта-функции  $\delta(x)$ . Учитывая (7), получаем

$$\rho(x, +0) = 2A\sqrt{\pi\kappa} \delta(x).$$

Таким образом, решение (6) описывает эволюцию сгустка частиц массы  $M = 2A\sqrt{\pi\kappa}$ , который в момент  $t = 0$  был сосредоточен в начале координат оси  $x$ . В частности, при  $M = 1$  получаем решение

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t}, \quad (8)$$

описывающее эволюцию единичной массы, первоначально сосредоточенной в точке  $x = 0$ .

Приведем еще один вывод рассматриваемого особого решения, основанный на его приближенной дискретной конструкции, по существу содержащейся в §1. Для этого заметим, что если в условиях §1 в момент  $t = 0$  в узле  $x = 0$  содержалось большое число частиц общей массы  $M$ , то в момент  $n\tau$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) эти частицы расположатся в узлах  $-nh, (-n+2)h, \dots, nh$ , причем масса частиц в каждом узле  $(-n+2k)h$  будет равна

$$m_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} 2^{-n} M.$$

Воспользуемся формулой Стирлинга (см., например, ЭПМ, §III.3) для факториалов больших чисел

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad (9)$$

относительная погрешность которой быстро стремится к нулю с возрастанием  $n$ . Мы получим приближенное представление

$$m_{n,k} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left[ \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \right]^{-1} 2^{-n} M =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} n^n k^{-k} (n-k)^{-(n-k)} 2^{-n} M. \quad (10)$$

Однако из равенств  $t = n\tau$ ,  $x = (-n + 2k)h$  получаем, что  $n = t/\tau$ ,  $k = \frac{x}{2h} + \frac{t}{2\tau}$ ,

$n - k = \frac{t}{2\tau} - \frac{x}{2h}$ ; подставляя эти выражения в (10), приходим к формуле

$$\rho(x,t) = \frac{1}{2h} m_{n,k} = \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{t}{2\pi\tau} \left(\frac{t^2}{4\tau^2} - \frac{x^2}{4h^2}\right)^{-1}} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{t/\tau} \left(\frac{x}{2h} + \frac{t}{2\tau}\right)^{-\frac{x}{2h} - \frac{t}{2\tau}} \left(\frac{t}{2\tau} - \frac{x}{2h}\right)^{\frac{x}{2h} - \frac{t}{2\tau}} 2^{-t/\tau} M.$$

Подставим сюда выражение  $\frac{1}{2\tau} = \frac{\kappa}{h^2}$  (см. (1.6)) и вынесем из скобок члены, содержащие  $t$ , которые при малом  $h$  являются главными (почему?). Это даст

$$\rho(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \left(1 - \frac{h^2 x^2}{4\kappa^2 t^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{xh}{2\kappa t}\right)^{-\frac{x}{2h} - \frac{\kappa}{h^2}} \left(1 - \frac{xh}{2\kappa t}\right)^{\frac{x}{2h} - \frac{\kappa}{h^2}} M.$$

При малом  $h$  (точнее, надо говорить о малом значении безразмерной комбинации  $hx/\kappa t$ ) второй множитель можно заменить на 1, тогда как два последних удобно преобразовать следующим образом:

$$\rho(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \left(1 + \frac{xh}{2\kappa t}\right)^{-\frac{x}{2h}} \left(1 - \frac{xh}{2\kappa t}\right)^{\frac{x}{2h}} \left(1 - \frac{h^2 x^2}{4\kappa^2 t^2}\right)^{-\frac{\kappa}{h^2}} M.$$

Теперь надо воспользоваться тем, что при малом  $\alpha$  будет  $(1 + a\alpha)^{b/\alpha} \approx e^{ab}$ . Мы получаем при малом  $h$

$$\rho(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-\frac{x}{2\kappa} \frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2\kappa} \frac{x}{2}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t^2} \kappa} M = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} M.$$

Итак, мы вновь пришли к формуле (6). Из нее уже нетрудно проверить свойства, о которых говорилось выше, – автомодельность и выполнение уравнения (1).

Отметим, что в §7 будет приведен еще один вывод формул для решения уравнения диффузии, основанный на применении преобразования Фурье.

Особое решение уравнения диффузии на плоскости и в пространстве строится аналогично тому, как на прямой. Так, в пространстве оно имеет вид

$$\rho(x, y, z, t) = A t^{-3/2} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)/4\kappa t},$$

где произвольная постоянная  $A$  связана с суммарной массой  $M$  диффундирующих частиц формулой

$$M = (2\sqrt{\kappa\pi})^3 A.$$

Множители  $t^{-1/2}$  в решении на прямой и  $t^{-3/2}$  – в пространстве легко понять из следующих соображений баланса. Как следует из вероятностных соображений и будет подробно обсуждаться в §8, средний пробег частиц при случайном блуждении пропорционален  $\sqrt{t}$ . Значит, с такой скоростью будут расти средние размеры расплывающегося облака частиц, а в пространственном случае объем облака пропорционален  $(\sqrt{t})^3 = t^{3/2}$ . (При этом мы игнорируем разлетающиеся с большей скоростью края облака, несущие ничтожную часть его общей массы; для этого можно рассматривать только ту часть облака, в которой плотность превышает определенную фиксированную долю от максимальной.) А так как масса облака не меняется во

времени, то плотность должна получить обратный множитель.

## § 6 Решение задачи Коши

Допустим теперь, что мы хотим найти решение уравнения диффузии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (1) = (1.8)$$

удовлетворяющее произвольному начальному условию

$$\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (2)$$

В силу линейности задачи (выражающейся в линейности уравнения (1)) решение  $\rho(x, t)$  зависит от начальной функции  $\rho_0(x)$  по линейному закону. Поэтому при построении решения можно применить общий метод, упомянутый в §II.2 и основанный на построении функции влияния. Для этого обозначим через  $G(x, t; \xi, t_0)$  решение уравнения (1) при начальном условии

$$\rho|_{t=t_0} = \delta(x - \xi).$$

Таким образом, функция влияния (функция Грина) в данной задаче описывает эволюцию при  $t > t_0$  частиц суммарной единичной массы, сосредоточенных в момент  $t = t_0$  в точке  $x = \xi$ . Поэтому при  $t_0 = 0$ ,  $\xi = 0$  выражение функции влияния имеет вид (5.8). При произвольных  $t_0$ ,  $\xi$  это выражение получается с помощью добавочного сдвига по  $t$  и по  $x$  (что возможно из-за однородности рассматриваемой системы во времени и в пространстве):

$$G(x, t; \xi, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa(t-t_0)}}. \quad (3)$$

Зная функцию влияния, мы можем написать искомое решение при произвольном начальном условии (2):

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, t_0) \rho_0(\xi) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa(t-t_0)}} d\xi. \quad (4)$$

Эта формула была получена выдающимся французским механиком, физиком и математиком С. Пуассоном (1781–1840). В ней, по существу, содержится и представление функции Дирака (функция (3) при  $t \rightarrow t_0 + 0$ )<sup>36</sup>.

Формула (4) дает возможность в отдельных случаях точно, а чаще численно получать решение рассматриваемой задачи. Кроме того, из нее можно получить и другие полезные следствия.

Выделим, например, из экспоненты в правой части (4) множитель, не зависящий от  $\xi$ ; это даст

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) e^{-\frac{(2x\xi - \xi^2)}{4\kappa(t-t_0)}} d\xi. \quad (5)$$

Отсюда, в частности, легко получить асимптотическое выражение решения при  $t \rightarrow \infty$ .

В самом деле, если  $x$  при этом остается конечным, то и экспонента под знаком последнего интеграла остается конечной и стремится к 1, а потому весь интеграл стремится к интегралу  $\int \rho_0(\xi) d\xi$ , равному общей массе  $M$  диффундирующих частиц.

Таким образом, в силу (5) решение имеет асимптотическое представление

$$\rho(x, t) \sim \frac{M}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-t_0)}} = MG(x, t; \xi, t_0); \quad (6)$$

<sup>36</sup> Это, конечно, отнюдь не единственное представление функции Дирака; широкий способ получения подобных представлений указан в ЭПМ, §VI.1.

другими словами, мы получили автомодельное решение, построенное в §5. Это и естественно: по прошествии достаточного времени детали начального распределения частиц становятся несущественными, играет роль только суммарная масса частиц<sup>37</sup>.

Взамен (6) можно воспользоваться асимптотическим представлением

$\rho(x, t) \sim MG(x, t; a_1, t_0)$  при любом постоянном  $a$ . Естественно ожидать, что, подбирая  $a$ , можно сделать это представление более точным, чем (6). При большом  $t$  имеем

$$\begin{aligned} \rho(x, t): G(x, t; a, t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) e^{\frac{2(x-a)(\xi-a) - (\xi-a)^2}{4\kappa(t-t_0)}} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) \left[ 1 + \frac{2(x-a)(\xi-a) - (\xi-a)^2}{4\kappa(t-t_0)} + \dots \right] d\xi = \\ &M + \frac{x-a}{2\kappa(t-t_0)} (M_1 - aM) - \frac{1}{4\kappa(t-t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) (\xi-a)^2 d\xi + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Второе слагаемое в правой части, зависящее от  $x$ , можно обратить в нуль, положив  $M_1 - aM = 0$ , откуда  $a = M_1/M$ , т. е.  $a$  равно центру тяжести  $x_{y.m.}$  рассматриваемой среды из частиц. Мы уже говорили в §4, что при этом  $a$  значение  $I$  последнего, не зависящего от  $x$  члена в правой части (7) будет минимально возможным.

Еще более точный результат получится, если в асимптотическом выражении изменить начальный момент времени так, чтобы уравнивать моменты инерции. В силу §4 для этого в формуле  $\rho(x, t) \sim MG(x, t; x_{y.m.}, t_1)$  надо положить  $2\kappa M(t-t_1) = \int (x - x_{y.m.})^2 \rho_0(x) dx$ ,

откуда легко найти  $t_1$ . Проводя преобразования, аналогичные (7), нетрудно проверить, что при так выбранном  $t_1$  в разложении отношения левой части асимптотической формулы к правой по степеням  $t^{-1}$  члены с первой степенью взаимно уничтожаются, и потому это отношение будет при больших  $t$  отличаться от 1 на величину порядка  $t^{-2}$ .

Из формулы (4) можно сделать также важный вывод гладкости решения при  $t > t_0$ .

Если под знаком интеграла (4) произвести любое число дифференцирований по параметрам  $x$  и  $t$ , то в качестве множителей появятся многочлены от  $\xi$ , которые не могут нарушить сходимости интеграла. Это означает, что интеграл (4) имеет при  $t > t_0$  непрерывные производные по  $t$  всех порядков. Значит, такие производные имеет и решение  $\rho(x, t)$ , не взирая на то, что начальное распределение плотности  $\rho_0(x)$  могло быть разрывным. Процесс диффузии приводит к немедленному устранению разрывов не только у самой плотности, но и у всех ее производных.

Из сказанного вытекают, в частности, дополнительные соображения по поводу трудностей, возникающих при решении уравнения диффузии назад во времени (см. конец §4). Именно, если заданное при некотором  $t_1$  распределение плотности имеет разрыв само или разрыв в производной любого порядка, то решение назад заведомо невозможно. Но и если таких разрывов нет, то задаваемое распределение могло получиться в результате «сглаживания» разрыва, который был в некоторый момент  $\tilde{t} < t_1$ , близкий к  $t_1$ ; в этом случае продолжение решения за  $\tilde{t}$  невозможно.

К этому вопросу мы еще раз вернемся при рассмотрении решений, экспоненциальных во времени.

## Упражнения

- 1) Пусть в момент  $t_0$  частицы суммарной массы  $M$  были равномерно распределены на отрезке  $a \leq x \leq b$ . Найдите закон эволюции плотности среды из частиц и выразите этот закон через интеграл вероятностей

<sup>37</sup> «Сотри случайные черты и ты увидишь – мир прекрасен» – сказал по аналогичному поводу А. Блок. Но, может быть, он имел при этом в виду всю математику?

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-s^2/2} dx. \quad (8)$$

Таблицы значений этого интеграла имеются, например, в ЭПМ, гл. XIII.

- 2) То же, если частицы были при  $t = t_0$  распределены на отрезке  $a \leq x \leq b$  в плотностью  $\rho_0(x) = \alpha x + \beta$  ( $\alpha, \beta = \text{const}$ ).
- 3) Найдите закон эволюции плотности при начальном условии  $\rho|_{t=t_0} = \alpha e^{-\beta x^2}$  ( $\alpha, \beta = \text{const} > 0$ ).

## § 7 Применение преобразования Фурье

В ЭПМ, §§XIV.2 и 4, мы уже говорили о применении интегрального преобразования Фурье к решению обыкновенных линейных автономных дифференциальных уравнений. Оно широко применяется и к решению уравнений с частными производными; это применение мы продемонстрируем на примере решения уравнения диффузии на всей оси  $x$  с заданным начальным распределением плотностей (§6). Напомним (см., например, ЭПМ, гл. XIV), что каждой функции  $f(x)$ , определенной при  $-\infty < x < \infty$  и достаточно быстро затухающей при  $x \rightarrow \pm\infty$ , можно поставить в соответствие ее фурье-образ (спектральную плотность)  $F(k)$ , связанный с  $f(x)$  формулами

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dx.$$

Это преобразование линейное: при сложении прообразов образы также складываются. Отсюда сразу следует, что если образ и потому прообраз зависят от некоторого параметра  $\mu$ , то при дифференцировании прообраза по  $\mu$  образ также продифференцируется по  $\mu$ : в самом деле, если  $f(x; \lambda) \rightarrow F(k; \lambda)$ , то

$$f(x; \mu + \Delta\mu) \rightarrow F(k; \mu + \Delta\mu), \quad \frac{f(x; \mu + \Delta\mu) - f(x; \mu)}{\Delta\mu} \rightarrow \frac{F(k; \mu + \Delta\mu) - F(k; \mu)}{\Delta\mu},$$

откуда  $f'_\mu(x; \mu) \rightarrow F'_\mu(k; \mu)$ . Кроме того, нам понадобится следующее свойство (см., например, ЭПМ, §XIV.4): при дифференцировании прообраза по  $x$  образ умножается на  $ik$ .

Вооружась этими сведениями, обозначим буквами  $R(k; t)$  фурье-образ искомого решения  $\rho(x; t)$  при фиксированном  $t$ , т. е.

$$R(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) e^{-ikx} dx, \quad \rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(k, t) e^{ikx} dx. \quad (1)$$

Если совершить над обеими частями уравнения (1.8) преобразование Фурье, то в силу предыдущего абзаца мы приходим к соотношению

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \kappa(ik)^2 R, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial R}{\partial t} = -\kappa k^2 R, \quad (2)$$

которому должен удовлетворять фурье-образ решения. Это соотношение при любом фиксированном  $k$  можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение, в чем и состояла цель проделанного перехода.

Решая уравнение (2) при любом фиксированном  $k$  с помощью разделения переменных, получим

$$R(k, t) = C(k) e^{-\kappa k^2 t} \quad (3)$$

(постоянная интегрирования может зависеть от  $k$ ). Произвольная функция  $C(k)$  определяется начальным условием, так как из первого равенства (2) имеем

$$C(k) = R|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) e^{-ikx} dx. \quad (4)$$

Найдя фурье-образ решения, надо вернуться к самому решению с помощью второй формулы (1). Пользуясь формулами (3) и (4), получаем

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{-\kappa k^2 t} e^{ikx} dk = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right) e^{-\kappa k^2 t} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa k^2 t + ik(x-\xi)} dk. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение в принципе получено, но его можно упростить, так как внутренний интеграл можно вычислить. Перепишем его в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k^2 + i\beta k} dk,$$

где  $\alpha$  – вещественное положительное число. Дополнив показатель степени до полного квадрата, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\alpha\left(k^2 - \frac{i\beta}{\alpha}k\right)\right] dk = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\alpha\left(k - \frac{i\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right] dk = e^{-\beta^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(k-i\lambda)^2} dk \quad \left(\lambda = \frac{\beta}{2\alpha}\right).$$

Выясним, как зависит последний интеграл  $I$  от  $\lambda$ , для чего продифференцируем его по  $\lambda$  как по параметру<sup>38</sup>. Это даст

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(k-i\lambda)^2} [-\alpha \cdot 2(k-i\lambda) \cdot (-i)] dk = -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(k-i\lambda)^2} [-\alpha(k-i\lambda)^2]_k dk = -i e^{-\alpha(k-i\lambda)^2} \Big|_{k=-\infty}^{\infty} = 0.$$

Стало быть,  $I$  на самом деле не зависит от  $\lambda$ , а потому при вычислении  $I$  можно положить  $\lambda = 0$ :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k^2} dk = \left| \sqrt{\alpha} k = s \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Итак, мы пришли к формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k^2 + i\beta k} dk = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha} \quad (\alpha > 0). \quad (6)$$

Применяя ее к правой части (5), получаем формулу (6.4) с  $t_0 = 0$  (проверьте!).

## § 8 Вероятностная трактовка решения

Вернемся к рассмотренной в §1 задаче о блуждании частиц по узлам дискретной сетки, с которой мы начали исследование процесса диффузии. Мы приняли рекуррентное соотношение

$$N_{j,n+1} = \frac{1}{2}(N_{j-1,n} + N_{j+1,n}) \quad (1) = (1.2)$$

между числом частиц в узле в последующий и предыдущий моменты времени за совершенно точное; однако на самом деле это допущение требует некоторого внимания и не может быть всегда безоговорочно принято. Так, на краях расплывающегося облака частиц значения  $N_{jn}$  могут оказаться сравнительно небольшими и соотношение (1) там будет нарушаться в результате флуктуации. Более того, это соотношение при малых  $N_{jn}$  вступает в очевидное противоречие с тем, что числа  $N_{jn}$  должны быть целыми, так как из него вытекает, например, что число частиц на самом краю облака за каждый временной шаг  $\tau$  должно делиться пополам.

Отметим, что вблизи края облака проведенный в §1 переход от дискретной схемы к

<sup>38</sup> Если бы в последнем интеграле вместо  $i\lambda$  стоял вещественный параметр  $\mu$ , то независимость этого интеграла от  $\mu$  сразу видна, если сделать замену  $k - \mu = k'$ . Однако замена  $k - i\lambda = k'$  привела бы к интегралу по линии в комплексной плоскости, поэтому здесь потребовались несколько более сложные рассуждения.

непрерывной, даже если принять соотношение (1) за совершенно точное, неприменим. Это ясно, например, из того, что в задаче об эволюции порции частиц, сосредоточенной при  $t = 0$  в точке  $x = 0$ , решение дискретной задачи при  $|x| > \frac{h}{\tau} t$  тождественно равно

нулю, тогда как решение соответствующей непрерывной задачи, построенное в §5, положительно для всех  $x$ . Условие, при котором можно перейти от дискретного решения к непрерывному, было указано в §1; поведение же дискретного решения у краев облака описывается иным способом, на котором мы здесь не будем останавливаться. Таким образом, в одной и той же задаче нужно упрощения производить по-разному, в зависимости от характера исследуемого вопроса.

Нетрудно указать непосредственный вероятностный смысл коэффициента диффузии  $k$ : Для этого напомним, что для любой случайной величины  $\xi$  вводится понятие ее

дисперсии  $\Delta_{\xi}^2 = \overline{(\xi - \bar{\xi})^2}$  (см., например, ЭПМ, §XIII.7), где чертой сверху обозначено среднее значение, которое для дискретной случайной величины вычисляется по формуле  $\bar{\xi} = \sum_i p_i x_i$  (здесь  $x_i$  – возможные значения величины  $\xi$ , а  $p_i$  – их вероятности).

При одиночном скачке частицы среднее значение приращения координаты равно нулю, а потому ее дисперсия равна  $h^2/2 + (-h^2)/2 = h^2$ . Но при сложении независимых величин их дисперсии также складываются<sup>39</sup>, а за время  $t \gg \tau$  частица совершает  $t/\tau$  независимых скачков. Значит, дисперсия (средний квадрат) суммарного приращения координаты частицы за время  $t$  равна  $\frac{t}{\tau} h^2 = 2kt$  (см. (1.6)). В частности, средний

квадрат этого приращения за единицу времени равен  $2k$ .

Теперь ясен характер предельного перехода при  $h, \tau \rightarrow 0$ , о котором говорилось в §1. Мы считали, что при этом  $\tau \sim h^2$ , а это в силу предыдущего абзаца равносильно предположению, что средний квадрат суммарного приращения координаты за фиксированное время  $t$  при этом переходе остается конечным. Интересно, что при этом суммарный путь, пройденный каждой частицей за время  $t$ , при подсчете которого все перемещения частицы, независимо от их направлений, суммируются абсолютными

величинами, равен  $\frac{t}{\tau} h = \frac{h^2}{\tau} \frac{t}{h}$  и поэтому стремится к бесконечности. Чем ближе к

пределу, тем больше мгновенная скорость частиц (поэтому в пределе край расплывающегося облака частиц полностью расплывается, мгновенно уходя на бесконечность), но тем чаще они осциллируют, так что эффективный путь (абсолютное приращение координаты) остается конечным. Смысл величины  $2k$  после перехода от дискретной картины к непрерывной остается тем же, что был указан в предыдущем абзаце.

Мы рассматривали равенство (1) как рекуррентное соотношение между количеством частиц в узловых точках в последовательные моменты времени, причем это соотношение выполняется с тем большей относительной точностью, чем эти количества больше. Но есть еще одно истолкование этого соотношения, при котором оно выступает как совершенно точное. Именно, допустим, что начальное распределение частиц нам неизвестно, а величина  $N_{j0}$  равна лишь среднему значению по многим экспериментам – говорят также, *математическому ожиданию* – числа

<sup>39</sup> Напомним доказательство этого простого, но важного утверждения (см., например, ЭПМ, §XIII.7). Как известно, при сложении случайных величин их средние значения складываются, а при умножении независимых случайных величин их средние значения перемножаются. Поэтому если величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\Delta_{\xi+\eta}^2 = \overline{[(\xi+\eta) - (\bar{\xi}+\bar{\eta})]^2} = \overline{(\xi - \bar{\xi})^2} + 2(\bar{\xi} - \bar{\xi})(\bar{\eta} - \bar{\eta}) + \overline{(\eta - \bar{\eta})^2} = \Delta_{\xi}^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + \Delta_{\eta}^2$ , так как  $\overline{(\xi - \bar{\xi})} = \bar{\xi} - \bar{\xi} = \bar{\xi} - \bar{\xi} = 0$ .



частиц в положении  $jh$  в начальный момент  $t = 0$ . Тогда среднее значение  $N_{j1}$  числа частиц в момент  $t = \tau$  в положении  $jh$  выражается через эти начальные значения по формуле (1), в которой положено  $n = 0$ ; через найденные средние значения выражаются средние значения  $N_{j2}$  и т. д. Конечно, эти средние значения уже не обязаны быть целыми.

Итак, равенство (1) можно рассматривать как (точное) рекуррентное соотношение между математическими ожиданиями числа частиц в заданный момент в выбранном месте. В частности, может идти речь о блуждании одной частицы по оси  $x$ ; тогда  $N_{jn}$  будет просто равно вероятности обнаружить эту частицу в момент  $n\tau$  в положении  $jh$ . Функцию  $\rho(x, t)$  можно истолковать также как плотность математического ожидания массы частиц, а если блуждает всего одна частица единичной массы – то как плотность вероятности, т. е. функцию распределения вероятности этой частицы. В последнем случае эта функция должна удовлетворять очевидному условию нормировки

$$\int \rho(x, t) dx \equiv 1.$$

В частности, функция влияния (см. (6.3))

$$G(x, t; 0, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t}$$

равна плотности вероятности частицы в момент  $t > 0$ , если эта частица в момент  $t = 0$  была расположена в точке  $x = 0$ .

Нетрудно подсчитать среднее абсолютное приращение координаты этой частицы за время  $t$ : оно равно

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^{\infty} x e^{-x^2/4\kappa t} dx = 2\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} t.$$

Как видим, результат пропорционален  $\sqrt{t}$  и  $\sqrt{\kappa}$ , что согласуется с подсчитанным выше средним квадратом приращения координаты. Казалось бы, средним абсолютным приращением координаты частицы за единицу времени, как достаточно наглядным понятием, можно было бы пользоваться в качестве характеристики скорости диффузии.

Однако в теории вероятностей обнаруживается, что характеристика  $|\overline{\xi - \bar{\xi}}|$  разброса случайной величины  $\xi$  вокруг ее среднего значения  $\bar{\xi}$  оказывается гораздо менее

удобной, чем дисперсия  $D_\xi = \overline{|\xi - \bar{\xi}|^2}$  и связанное с ней среднее квадратичное

уклонение  $\Delta_\xi = \sqrt{D_\xi}$ ; величину  $|\overline{\xi - \bar{\xi}}|$  часто бывает трудно вычислять и она не обладает такими хорошими общими свойствами, как дисперсия. Поэтому и при исследовании процесса диффузии основной характеристикой скорости процесса служит средний квадрат приращения координаты за единицу времени.

## § 9 Вероятностный вывод особого решения

Вероятностный подход дает возможность по-новому взглянуть на особое решение, построенное в §5. Именно, найдем плотность вероятности частицы, непрерывно блуждающей по оси  $x$  и расположенной в момент  $t = 0$  в точке  $x = 0$ , если процесс блуждания однороден и изотропен в пространстве и однороден во времени. Для этого представим случайную величину  $\xi$  – координату частицы в некоторый фиксированный момент времени  $t$  в виде суммы

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \quad (1)$$

где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  – приращения координаты частицы в последовательные промежутки времени протяженности  $t/n$ , а  $n$  – произвольно выбранное большое целое число. Тогда в силу сделанного выше предположения однородности все случайные величины  $\xi_i$  – независимые и обладают одинаковой функцией распределения и средним значением

$\bar{\xi}_i = 0$ . Но из теории вероятностей (см., например, ЭПМ, §XIII.8) известно, что в таком случае при большом  $n$  сумма (1) должна быть распределена по закону Гаусса, т. е. имеет плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_\xi} e^{-x^2/2\Delta_\xi^2}, \quad (2)$$

независимо от того, по какому закону была распределена каждая из величин  $\xi_i$ <sup>40</sup>. Однако в силу указанного в §8 вероятностного смысла коэффициента диффузии будет  $\Delta_\xi^2 = 2\kappa t$ , т. е.  $\Delta_\xi = \sqrt{2\kappa t}$ . Подставляя эти значения в (2), приходим к закону (5.8).

Заодно мы видим глубокий смысл этого закона, т. е. функции Грина для уравнения диффузии: это *нормальное распределение Гаусса*.

Приведем здесь доказательство того, что сумма вида (1) большого числа независимых одинаково распределенных случайных величин распределена именно по закону Гаусса. Для этого обозначим буквами  $\varphi(x)$  и  $f(x)$  законы распределения величин  $\xi_i$  и  $\xi$  соответственно; кроме того, нам понадобятся фурье-образы  $\Phi(k)$  и  $F(k)$  этих законов. Известно (см., например, ЭПМ, §XIII.7), что при сложении независимых случайных величин с функциями распределения  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  получается случайная величина с функцией распределения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-s)\varphi_2(s)ds; \quad (3)$$

это действие называется свертыванием функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . С другой стороны, нетрудно проверить, что при свертывании функций их фурье-образы просто перемножаются с точностью до множителя  $2\pi$ : фурье-образ функции (3) равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} dx \int \varphi_1(x-s)\varphi_2(s)ds &= \frac{1}{2\pi} \int \varphi_2(s)ds \int \varphi_1(x-s)e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-iks} \varphi_2(s)ds \int e^{-ikx_1} \varphi_1(x_1)dx_1 = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx_1} \varphi_1(x_1)dx_1 \cdot \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx_2} \varphi_2(x_2)dx_2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Доказанное свойство непосредственно распространяется на сумму любого числа независимых случайных величин. Поэтому, возвращаясь к сумме (1), получаем, что фурье-образы функций распределения величин  $\xi_i$  и  $\xi$  связаны между собой соотношением

$$F(k) = (2\pi)^{n-1} [\Phi(k)]^n = [2\pi \Phi(k)]^n / 2\pi. \quad (4)$$

Подчеркнем, что при выводе этого простого соотношения было очень существенно, что величины  $\xi_i$  считались независимыми, а потому при их сложении их функции распределения свертывались. Эта независимость вытекает из предположения о том, что каждый следующий шаг при случайном блуждании совершается независимо, от всех предыдущих, т. е. что процесс блуждания является марковским (см. начало §2).

По условию все  $\bar{\xi}_i = 0$ ; кроме того, дисперсия каждой из величин  $\xi_i$  равна  $\Delta_\xi^2/n$  (почему?). Эти два утверждения можно записать в виде равенств

$$\int x\varphi(x)dx = 0, \quad \int x^2\varphi(x)dx = \frac{1}{n} \Delta_\xi^2;$$

<sup>40</sup> В ЭПМ это утверждение не было полностью доказано, было показано только, что функция распределения суммы (1) при больших  $n$  удовлетворяет по  $n$  и  $x$  уравнению диффузии, остальное же было сообщено без доказательства. Теперь, когда в §5 мы убедились, что положительные решения уравнения диффузии асимптотически переходят в автомодельное решение, данное утверждение получает обоснование. Впрочем, вскоре мы дадим независимое доказательство этого факта.

кроме того, всегда  $\int \varphi(x) dx = 1$ . Поэтому

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int \left[ 1 - ikx + \frac{(ikx)^2}{2!} + \dots \right] \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left( 1 - \frac{1}{2n} k^2 \Delta_\xi^2 + \dots \right).$$

Подставляя этот результат в (4), получаем

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 - \frac{1}{2n} k^2 \Delta_\xi^2 + \dots \right)^n = \frac{1}{2\pi} \exp \left[ n \ln \left( 1 - \frac{1}{2n} k^2 \Delta_\xi^2 + \dots \right) \right]. \quad (5)$$

Но при большом  $n$  логарифм можно разложить в ряд Тейлора по формуле  $\ln(1 + \alpha) = \alpha + \dots$ . Поэтому из формулы (5) при большом  $n$  получаем, отбрасывая члены высшего порядка малости,

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} e^{-k^2 \Delta_\xi^2 / 2}.$$

Теперь возвращаемся к фурье-образу:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\Delta_\xi^2/2)k^2 + ikx} dk. \quad (6)$$

Применяя равенство (7.6), приходим к формуле (2) (проверьте!). Если независимые одинаково распределенные случайные величины имеют ненулевое среднее значение, то их сумма, при большом числе слагаемых, распределена по закону Гаусса со сдвинутым центром распределения, т. е. по закону

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_\xi}} e^{-(x-\bar{\xi})^2/2\Delta_\xi^2}. \quad (7)$$

Это легко вывести из предыдущего, сделав замену  $\xi_i - \bar{\xi}_i = \xi'_i$ ; см. также упражнение.

Отсюда следует, что если процесс диффузии однороден, но не изотропен, так что среднее положение каждой частицы дрейфует вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v_0$ , то соответствующая функция Грина будет иметь вид (см. (6.3))

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} e^{-(x-v_0(t-t_0)-\xi)^2/4\kappa(t-t_0)}.$$

Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет «уравнению диффузии с дрейфом»

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

которое получается из обычного уравнения диффузии (1.8) с помощью замены  $x \rightarrow x - v_0 t$ .

Итак, мы показали, что сумма большого числа независимых случайных величин, распределенных по одинаковому закону (каков бы ни был этот закон!), дает величину, распределенную по закону Гаусса. В курсах теории вероятностей показывается, что закон Гаусса получается и в случае, когда слагаемые распределены по различным законам, лишь бы не получилось так, что в этой сумме одно или несколько слагаемых превалируют над остальными (тогда получится, по существу, не сумма большого числа слагаемых, а сумма нескольких слагаемых с небольшой поправкой). В то же время предположение независимости или хотя бы слабой зависимости слагаемых является весьма существенным, так как если оно не выполнено, то в результате сложения может получиться все что угодно.

## Упражнение

1) Докажите формулу (7) по образцу того, как была доказана формула (2).

## § 10 Интегральной соотношение для функции Грина

Исходя из смысла функции Грина как функции влияния при решении задачи с начальными данными, мы сейчас выведем основное интегральное соотношение – тождество, которому удовлетворяет эта функция. Рассуждение на первом этапе будет иметь весьма общий характер и пригодно для любых линейных эволюционных процессов без последствия; в частности, мы не будем предполагать ни однородности, ни изотропии.

Итак, допустим, что в некоторый момент  $t_0$  в точке  $\xi$  была сосредоточена единичная масса. Тогда в любой момент  $t_1 > t_0$  эта масса в результате диффузии окажется распределенной по оси  $x$  с плотностью  $\rho_1(x) = G(x, t_1; \xi, t_0)$ . Примем это распределение за начальное и посмотрим, к какой плотности оно приведет в некоторый момент  $t > t_1$ ; по общему методу получаем

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; x_1, t_1) \rho_1(x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; x_1, t_1) G(x_1, t_1; \xi, t_0) dx_1.$$

Но, с другой стороны, окончательная плотность получается к моменту  $t$  в результате диффузии единичной массы, сосредоточенной в момент  $t_0$  в точке  $\xi$ , т. е. эта плотность равна  $G(x, t; \xi, t_0)$ . Приравнявая оба результата, приходим к требуемому соотношению

$$G(x, t; \xi, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; x_1, t_1) G(x_1, t_1; \xi, t_0) dx_1 \quad (t_0 < t_1 < t). \quad (1)$$

(Мы предоставляем читателю истолковать этот результат, опираясь на вероятностную трактовку решений и на теорему об умножении вероятностей независимых событий.)

Если рассматриваемый процесс блуждания частицы однороден на оси  $x$ , то функция влияния  $G$  зависит не от  $x$  и  $\xi$  в отдельности, а от разности  $x - \xi$  (если к тому же процесс изотропен, то от  $|x - \xi|$ ).

Аналогично, если процесс однороден во времени, то  $G$  зависит от  $t - t_0$ . Сделав эти предположения, мы можем переписать соотношение (1) в виде

$$G(x - \xi, t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x_1, t - t_1) G(x_1 - \xi, t_1 - t_0) dx_1,$$

а полагая  $\xi = 0$ ,  $t_0 = 0$  (что в силу предположений однородности не ограничивает общности) – в виде

$$G(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x_1, t - t_1) G(x_1, t_1) dx_1 \quad (0 < t_1 < t)$$

или, что равносильно,

$$G(x, t_1 + t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x_1, t_2) G(x_1, t_1) dx_1 \quad (t_1, t_2 > 0). \quad (2)$$

При каждом  $t > 0$  функция  $G(x, t)$  определяет закон преобразования произвольной начальной плотности  $\rho|_{t=0} = \rho_0(x)$  в плотность в момент  $t$ ; это преобразование осуществляется по формуле

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) \rho_0(\xi) d\xi. \quad (3)$$

Преобразование такого вида называется *интегральным*, а функция  $G$  – его ядром.

Таким образом, мы получаем однопараметрическую (параметром служит  $t$ ) *полугруппу* преобразований; при этом отличие полугруппы от группы<sup>41</sup> состоит в том, что

<sup>41</sup> Понятие группы, весьма важное для физики, подробно рассмотрено в книгах: С.Багавантам, Т.Венкатарайуду, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, ИЛ, М., 1959; Г.Я.Любарский, Теория групп и ее применение в физике, Гостехиздат, 1957, и др. Минимальные сведения о понятии группы имеются в ЭПМ, §XIV.4.

параметр  $t$  принимает только положительные значения, т. е. рассматриваемая совокупность преобразований не содержит обратных.

Нетрудно проверить, что соотношение (2) непосредственно вытекает из полугруппового свойства интегрального преобразования (3). В самом деле, выполнив последовательно над  $\rho_0(x)$  преобразование, отвечающее значению параметра  $t_1$ , а затем над результатом – преобразование, отвечающее значению  $t_2$ , мы получим функцию

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi_1, t_2) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi_1 - \xi, t_1) \rho_0(\xi) d\xi \right] d\xi_1.$$

Но в силу полугруппового свойства мы должны получить результат, отвечающий значению  $t_1 + t_2$ , т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t_1 + t_2) \rho_0(\xi) d\xi.$$

Приравнявая эти два результата и пользуясь произволом функции  $\rho_0(x)$ , можно легко получить соотношение (1), что мы и предоставляем читателю. (Здесь мы, по существу, повторили рассуждение, проведенное в начале параграфа.) Обратно, из соотношения (2) так же просто вытекает полугрупповое свойство преобразования (3).

Отметим, что полугрупповое свойство преобразования плотности вытекает только из отсутствия последействия и из однородности во времени процесса блуждания, хотя в случае неоднородности процесса в пространстве полугрупповое условие на ядро имеет вид, отличный от (2) (см. упражнение).

Из полугруппового свойства (2) также можно получить вид ядра  $G$ . Для этого обозначим через  $H(k, t)$  фурье-образ функции  $G(x, t)$  при фиксированном  $t$ . Тогда в силу доказанного в §9 умножения фурье-образов при свертывании функций (см. (9.3)) свойство (2), после перехода к фурье-образам, приобретает вид

$$H(k, t_1 + t_2) = 2\pi H(k, t_1)H(k, t_2),$$

т. е.

$$2\pi H(k, t_1 + t_2) = [2\pi H(k, t_1)][2\pi H(k, t_2)]. \quad (4)$$

При фиксированном  $k$  этим свойством обладают экспоненты и, как нетрудно проверить, только они (это доказано в ЭПМ, §XIV.4, где, впрочем, применены другие обозначения). Так как показатель экспоненты может зависеть от зафиксированного  $k$ , то мы получаем общее решение уравнения (4)

$$2\pi H(k, t) = e^{\alpha(k)t},$$

где  $\alpha(k)$  – пока произвольная функция. Конкретизацию ее вида можно получить из соображений размерности. Именно, показатель экспоненты должен быть безразмерным; а из §1 вытекает, что безразмерная комбинация вида  $\alpha(k)t$  должна иметь вид  $p\kappa k^2 t$ , где  $p$  – безразмерное число. Таким образом,

$$H(k, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-p\kappa k^2 t} \quad (5)$$

(знак минус в показателе добавлен для того, чтобы считать  $p > 0$ , что нужно для затухания функции (5) при  $t > 0$  и  $k \rightarrow \pm\infty$ ).

Чтобы получить значение параметра  $p$ , можно воспользоваться указанным выше смыслом коэффициента диффузии  $\kappa$  как половины среднего квадрата пробега частицы за единицу времени; это можно записать так:

$$\kappa = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 G(x, 1) dx. \quad (6)$$

Но если равенство

$$H(k, 1) = \frac{1}{2\pi} \int G(x, 1) e^{-ikx} dx$$

два раза продифференцировать по  $k$ , а затем положить  $k = 0$ , то мы получим, что правая

часть (6) равна

$$\kappa = -\pi \left[ \frac{d^2}{dk^2} H(k,1) \right]_{k=0}.$$

Подстановка в правую часть выражения (5) и вычисления, которые мы предоставляем читателю, дают результат  $p = 1$ . Таким образом,  $H = \frac{1}{2\pi} e^{-\pi k^2}$ . Переход к прообразу, который мы предоставляем читателю, приводит с помощью формулы (7.6) к уже известному выражению для функции Грина  $G$ .

### Упражнение

- 1) Укажите формулу, аналогичную (2), для случая процесса блуждания, неоднородного по  $x$ .

## § 11 Диффузия на полуоси

Рассмотрим теперь случай, когда частицы блуждают по полуоси  $0 \leq x < \infty$ . Ясно, что в этом случае закон изменения плотности зависит не только от ее начального распределения, но и от того, что происходит с частицами в конечной точке  $x = 0$  полуоси, другими словами, от краевого условия в этой точке.

Примем сначала, что частицы, попавшие в точку  $x = 0$ , навсегда покидают рассматриваемую полуось; можно представить себе полубесконечный горизонтальный желоб с открытым концом, достигнув которого, шарики-частицы падают и больше никогда не возвращаются в этот желоб. При этом допущении плотность  $\rho(x, t)$  частиц должна для  $x > 0$  удовлетворять уравнению диффузии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (1) = (1.8)$$

и для  $x = 0$  – граничному условию

$$\rho|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

так называемому *граничному условию 1-го рода*; к его обсуждению мы вернемся в конце параграфа.

Из постановки задачи вытекает, что число частиц в системе уже не будет постоянным, как в предыдущих рассмотренных, а будет все время убывать. Это легко вывести и

математически из уравнения (1) и условия (2). В самом деле, для массы  $M = \int_0^{\infty} \rho dx$

будет

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \rho(x,t) dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \int_0^{\infty} \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0}^{\infty} = 0 - \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (3)$$

Но поскольку  $\rho|_{x=0} = 0$ , а  $\rho|_{x>0} > 0$ , то  $\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} \geq 0$  (продумайте это!); отсюда и следует

убывание массы  $M = M(t)$ . Равенство (3), в силу формулы (2.10) для потока массы, представляет собой очевидный баланс числа частиц в системе.

Интересно, что момент 1-го порядка  $M_1 = \int_0^{\infty} x \rho dx$  от решения при этом остается

инвариантным:

$$\frac{dM_1}{dx} = \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} x \rho dx = \int_0^{\infty} x \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \kappa \int_0^{\infty} x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = \kappa \left( x \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx \right) = \kappa \left( x \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \right) \Big|_{x=0}^{\infty} = 0. \quad (4)$$

Иногда рассматривается более общий «момент 1-го порядка относительно точки  $x = a$ »,

т. е.

$$M_{1a} = \int_0^{\infty} (x-a)\rho dx.$$

Такой момент просто выражается через обычный момент 1-го порядка  $M_1$ :

$$M_{1a} = \int_0^{\infty} x\rho dx - a \int_0^{\infty} \rho dx = M_1 - aM.$$

Так как масса  $M$  убывает, то при  $a \neq 0$  такой момент не будет инвариантным во времени.

Чтобы получить конкретное решение, нужно задать начальное условие, т. е. начальное распределение плотности

$$\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x) \quad (0 \leq x < \infty). \quad (5)$$

Таким образом, получается задача с начальным и граничным условиями. Нетрудно построить функцию влияния  $G_1(x, t; \xi, t_0)$  для этой задачи, равную плотности единичной (по массе) порции частиц, сосредоточенной в момент  $t_0$  в точке  $\xi$ . Для этого допустим, что  $\rho$  может принимать значения обоих знаков, и представим себе, что частицы распространяются не только на полуоси, а на всей оси  $x$  (в точке  $x = 0$  нет никакой особенности), причем в момент  $t_0$  в точке  $\xi$  сосредоточена единичная положительная масса, а в точке  $-\xi$  – единичная отрицательная масса. Тогда из соображений симметрии ясно, что в точке  $x = 0$  плотность будет все время равняться нулю. Поэтому, если построенную картину рассматривать только на полуоси  $0 \leq x < \infty$ , то получится процесс, удовлетворяющий необходимым начальному и граничному условиям, а также неравенству  $\rho \geq 0$ . Это неравенство вытекает из того, что в силу соображений симметрии за каждый интервал времени в точку  $x = 0$  попадает одинаковое число положительных и отрицательных частиц, которые, таким образом, нейтрализуются; поэтому на полуоси  $0 < x < \infty$  остаются только частицы положительной массы.

Таким образом, мы получаем выражение для функции влияния в рассматриваемой задаче через функцию влияния в задаче с одними лишь начальными условиями на всей оси  $-\infty < x < \infty$ :

$$G_1(x, t; \xi, t_0) = G(x, t; \xi, t_0) - G(x, t; -\xi, t_0). \quad (6)$$

Отсюда, пользуясь формулой (6.3), получаем решение при произвольном начальном условии (5) и граничном условии (2)

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} \int_0^{\infty} \left[ e^{-(x-\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} - e^{-(x+\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} \right] \rho_0(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Описанный метод приведения новой задачи к уже известной с помощью расширения области, в которой строится решение, на основе соображений симметрии называется *методом отражения* или *методом фиктивных источников*.

Пусть, например,  $\rho_0(\xi) \equiv \rho_0 = \text{const}$ , т. е. в начальный момент частицы были распределены с постоянной плотностью. Тогда при  $t > t_0$

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} \int_0^{\infty} \left[ e^{-(x-\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} - e^{-(x+\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} \right] \rho_0(\xi) d\xi.$$

Этот интеграл легко выражается через интеграл вероятности (6.8). Вычисления, которые мы предоставляем читателю, дают результат

$$\rho(x, t) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\kappa(t-t_0)}}\right) \rho_0. \quad (8)$$

Получилось автомодельное решение, графики которого в последовательные моменты времени показаны на рис. 92. Все они получаются из одного растяжением вдоль оси  $x$

(в этом и заключается автомодельность), плотность на бесконечности все время остается равной  $\rho_0$ . Согласно методу симметрии, эта же картина получится при рассмотрении процесса диффузии на всей оси  $x$  при начальном условии  $\rho_0(x) = \rho_0(x > 0)$ ,  $\rho_0(x) = -\rho_0$ , т. е. когда у начальной плотности при  $x = 0$  будет скачок. Поэтому найденное решение, продолженное нечетным образом, описывает асимптотическое поведение решения для любой начальной плотности, обладающей точкой конечного разрыва  $x_p$ , вблизи этой точки и при настолько малых  $t - t_0$ , чтобы далекие значения начальной плотности еще не успели сказаться (рис. 93): В самом простом примере разрывной начальной плотности, когда  $\rho_0(x) = \rho_1(x < x_p)$ ,  $\rho_0(x) = \rho_2(x > x_p)$ , в соответствии с формулой (8) получаем точное решение (проверьте!)

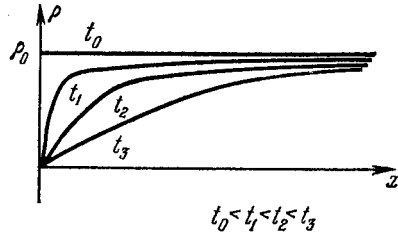


Рис. 92

Интересно, что хотя в примере (8) суммарная масса частиц бесконечна, можно говорить о скорости ее изменения, т. е. о производной от массы по времени. Так как

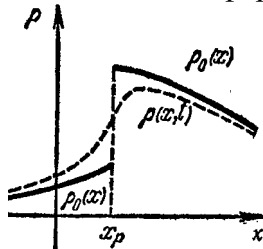


Рис. 93

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \Phi\left(\frac{x - x_p}{\sqrt{2\kappa(t - t_0)}}\right) \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \quad (t_0 < t < \infty, \quad -\infty < x < \infty).$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} = \Phi'(0) \frac{1}{\sqrt{2\kappa(t - t_0)}} \rho_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa(t - t_0)}} \rho_0,$$

то в силу формулы (3)

$$\frac{dM}{dt} = -\sqrt{\frac{\pi\kappa}{t - t_0}} \rho_0.$$

т. е.

$$M(t) = M_0 - 2\sqrt{\kappa\pi(t - t_0)} \rho_0, \quad \text{где } M_0 = \infty.$$

Дело в том, что при рассмотрении изменения массы для каждого конечного  $t$  оказывается существенным только конечный участок оси  $x$ , а условие на бесконечности, которое делает суммарную массу бесконечной, при этом не сказывается.

Физику не надо бояться подобных действий с бесконечностью, надо уметь правильно их расшифровывать и понимать.

Еще одно автомодельное решение можно найти, полагая в формуле (6.4) для решения начальной задачи на прямой  $\rho_0(x) = \delta(x)$ , где  $\delta(x)$  – дельта-функция. Так как функция  $\delta(x)$  – нечетная, то из соображений симметрии следует, что  $\rho(0, t) \equiv 0$  для всех  $t > t_0$ , а потому, как и выше, можно ограничиться рассмотрением полуоси  $x \geq 0$ . Применение формулы (6.4) дает по правилу действий с  $\delta(x)$  (ЭПМ, §VI.3)

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t - t_0)}} \int_0^\infty e^{-(x-\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} \delta'(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t - t_0)}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-(x-\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} \right]_{\xi=0} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} [\kappa(t - t_0)]^{-\frac{3}{2}} x e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-t_0)}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Это автомодельное решение описывает эволюцию «половины диполя». При этом общая масса  $M$  частиц равна

$$M = \int_0^\infty \frac{1}{4\sqrt{\pi}} [\kappa(t - t_0)]^{-\frac{3}{2}} x e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-t_0)}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t - t_0)}}.$$

Как видим, эта масса не постоянна. Равная бесконечности при  $t = t_0$  (как и должно быть, так как диполь получается при объединении двух бесконечных зарядов



противоположного знака, один из которых оказался здесь отрезанным), она убывает к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Функцию (9), подобрав к ней соответствующий множитель  $A$ , можно применить для описания асимптотического (при  $t \rightarrow \infty$ ) поведения решения, удовлетворяющего граничному условию (2) и произвольному начальному условию  $\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x)$ . При этом постоянную  $A$  лучше всего подобрать так, чтобы самые простые инварианты обоих решений – их моменты 1-го порядка – были одинаковыми. Так как момент решения (9) равен

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x \delta'(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \frac{1}{2}$$

(продумайте это вычисление!), то получаем, что должно быть

$$A \cdot \frac{1}{2} = \int_0^{\infty} x \rho_0(x) dx, \text{ т. е. } A = 2 \int_0^{\infty} x \rho_0(x) dx.$$

Мы предоставляем читателю подобно тому, как это делалось в §6, проверить, что при таком  $A$  отношение обоих решений стремится к 1 при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, для асимптотического поведения решения конкретное распределение начальной плотности не очень существенно, важен только ее момент 1-го порядка. Отметим, что, как и в §6, качество асимптотического представления можно повысить, если воспользоваться функцией (9) с измененным значением  $t_0$ . Для этого нужно по образцу вычислений (6.7) разложить отношение

$$\rho(x, t) : \left\{ \frac{A}{4\sqrt{\pi}} [\kappa(t - t'_0)]^{-3/2} x e^{-x^2/4\kappa(t-t'_0)} \right\},$$

в котором функция  $\rho(x, t)$  определена формулой (7), в ряд по степеням  $1/(t - t_0)$  и убедиться в том, что если положить

$$A = 2 \int_0^{\infty} x \rho_0(x) dx, \quad t'_0 = t_0 - \frac{1}{3\kappa A} \int_0^{\infty} x^3 \rho_0(x) dx,$$

то указанное разложение не будет содержать члена с первой степенью, т.е. будет

$$\text{иметь вид } 1 + \frac{\varphi(x)}{(t - t_0)^2} + \dots$$

Последнее автомодельное решение можно было бы получить и из формальных соображений. Именно, дифференцируя обе части уравнения (1) по какой-либо из независимых переменных или по какому-либо параметру, входящему в решение, а затем «загоняя» внутрь знак проведенного дифференцирования, мы приходим к выводу, что производная от любого решения уравнения (1) по независимой переменной или по параметру снова служит решением того же уравнения. (Это относится не только к уравнению (1), а к любому линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.) С другой стороны, из определения автомодельности сразу следует, что производная от любой функции, обладающей свойством автомодельности, по независимой переменной или по параметру также обладает этим свойством. Из этих двух утверждений вытекает, что, дифференцируя любое автомодельное решение уравнения (1) по независимой переменной или по параметру, мы снова получаем автомодельное решение того же уравнения. В частности, решение (8) получается в результате дифференцирования автомодельного решения (6.3) по  $x$  или по  $\xi$ . Ясно, что с помощью дальнейшего дифференцирования можно получить любое число линейно независимых автомодельных решений уравнения (1). Интересно, что из всех этих решений только исходное решение (6.3) обладает свойством положительности на всей оси  $x$ . Мы предоставляем читателю проверить возможность асимптотической аппроксимации

$$\rho(x - \xi, t - t_0) \approx \rho(x, t) + \alpha \rho'_x(x, t) + \beta \rho'_t(x, t) \quad (t \rightarrow \infty),$$

где  $\alpha, \beta$  подбираются по  $\xi, t_0$ , и уточнить, в каком смысле понимается эта аппроксимация.

Дискретным аналогом рассмотренной задачи с исчезновением частиц на краю полуоси служит следующая вероятностная задача о разоряющемся игроке. Допустим, что некий игрок, обладая целым числом  $j_0$  рублей, ставит на кон один рубль и в результате игры с равной вероятностью либо проигрывает его, либо выигрывает еще один рубль. Затем он вновь ставит рубль на кон, опять производится игра, в результате которой его состояние либо уменьшается, либо увеличивается на один рубль, и т. д. Пусть при этом игра в долг не идет, так что если игрок проиграет свой последний рубль, то ему нечего будет поставить на кон и он выбывает из игры.

Если представить себе полуось состояний  $0 \leq j < \infty$  с целочисленной сеткой на ней, то получается, что за каждый шаг (каждую игру) состояние игрока переходит из узла в соседний узел – с равной вероятностью налево или направо. Отличие от задачи §1 о даме состоит в том, что если состояние попадает в точку  $j = 0$ , процесс прекращается; это и есть аналог условия исчезновения частиц на конце полуоси.

Обозначим буквами  $p_{jn}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$ ) вероятность того, что после проведения  $n$  игр состояние игрока будет равняться  $j$ . Тогда ясно, что эти вероятности связаны рекуррентными соотношениями

$$p_{j,n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(p_{j-1,n} + p_{j+1,n}) & (j \geq 2) \\ \frac{1}{2}p_{2,n} & (j = 1) \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Впрочем, если формально положить  $p_{0,n} \equiv 0$  (это аналог условия (2)!), то можно пользоваться только первым из соотношений, при всех  $j \geq 1$ .

Так как известны начальные значения вероятностей

$$p_{j_0,0} = 1, \quad p_{j,0} = 0, \quad (j \neq j_0),$$

то соотношения (9) дают возможность найти, шаг за шагом, все значения  $p_{jn}$ . Приведем для примера таблицу 1 значений  $p_{jn}$  для  $j_0 = 3$  при небольших  $j$  и  $n$ ; для простоты записи эти значения умножены на 1000 и округлены до единицы.

Таблица V-1

$n \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	500	0	500	0	0	0	0	0	0	0	0
2	250	0	500	0	250	0	0	0	0	0	0	0
3	0	375	0	375	0	125	0	0	0	0	0	0
4	188	0	375	0	250	0	62	0	0	0	0	0
5	0	282	0	312	0	156	0	31	0	0	0	0
6	141	0	296	0	234	0	94	0	16	0	0	0
7	0	218	0	267	0	164	0	55	0	8	0	0
8	109	0	242	0	216	0	110	0	32	0	4	0
9	0	176	0	229	0	163	0	71	0	18	0	2

Если представить себе, что одновременно играют 1000 игроков, каждый из которых имел вначале три рубля, то строка с номером  $n$  этой таблицы показывает, сколько из этих игроков после  $n$  игр будет иметь по одному рублю, сколько по два и т. д. (Конечно, при реальном испытании приведенные числа могут быть искажены флуктуациями.) Хорошо видно, как убывает общее число игроков за счет разорения остальных: так, после 9 игр осталось лишь 659 игроков из 1000. Видно также, что аналогично задаче, рассмотренной в §1, различие между «четными состояниями» и «нечетными состояниями» стечением времени не сглаживается (см. сноску на стр. 161). Дисперсия состояний с течением времени, очевидно, растет. Интересно подсчитать

сумму состояний неразорившихся игроков: она оказывается практически постоянной, что можно строго доказать для произвольного начального распределения денег (упражнение 4).

Если число  $n$  игр велико и мы отвлекаемся от краевых эффектов, то, как и в §1, можно перейти к непрерывной схеме процесса, что дает возможность избежать утомительных подсчетов шаг за шагом. Обозначим через  $N_{jn}$  число игроков, которые после  $n$  игр имеют состояние в  $j$  рублей. Эти же значения, снабженные соответствующими размерностями, можно рассматривать как плотности числа игроков, в расчете на одну игру и на один рубль, после соответствующего осреднения. (Этот переход делается, чтобы избежать резких колебаний в значениях  $N_{jn}$ , которые хорошо видны из приведенной таблицы.) Тогда для  $N_{jn}$  получаем уравнение диффузии

$$\frac{\partial N}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial j^2} \quad (11)$$

с коэффициентом диффузии  $\kappa = \frac{(\Delta j)^2}{2\Delta n} = \frac{1}{2}$ ; при этом единицы измерения (рубль, одна игра, один игрок) зафиксированы, так что участвующие величины можно считать безразмерными. Искомое решение уравнения (11) должно удовлетворять граничному условию

$$N|_{j=0} = 0. \quad (12)$$

Как уже говорилось, положительное решение уравнения диффузии (1), обладающее конечной суммарной массой и удовлетворяющее граничному условию (2), при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически равно автомодельному решению (9). Применяя этот результат к уравнению (11) и граничному условию (12), мы приходим к асимптотической формуле

$$N_{jn} \sim An^{-3/2} je^{-j^2/2n} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (13)$$

Постоянный коэффициент здесь можно определить из условия инвариантности момента 1-го порядка (см. (4)); этот момент  $M_1$  равен математическому ожиданию суммарного состояния всех игроков, не выбывших из игры. Так как

$$M_1 = \int_0^{\infty} j \cdot An^{-3/2} je^{-j^2/2n} dj = An^{-3/2} n \int_0^{\infty} e^{-j^2/2n} dj = \left| \frac{j}{\sqrt{2n}} = s \right| = A\sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = A\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

то должно выполняться равенство

$$A\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sum_j jN_{j0}, \text{ откуда } A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_j jN_{j0}.$$

В частности, для разобранного примера  $\sum_j jN_{j0} = 3000$  (почему?).

Приведем некоторые следствия из формулы (13). Так, число  $\mathcal{N} \equiv N(n)$  неразорившихся игроков после  $n$  игр асимптотически равно

$$\mathcal{N} = \int_0^{\infty} An^{-3/2} je^{-j^2/2n} dj = -An^{-1/2} ne^{-j^2/2n} \Big|_{j=0}^{\infty} = \frac{A}{\sqrt{n}},$$

видно, что оно стремится к нулю с ростом числа  $n$  игр. Средний капитал, приходящийся на одного неразорившегося игрока после  $n$  игр, равен

$$\frac{M_1}{\mathcal{N}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}.$$

Как видим, оно растет в процессе проведения игр (происходит концентрация денег) и не зависит от начальной суммы и ее распределения между игроками. Наиболее вероятное состояние игроков определяется с помощью приравнения нулю производной по  $j$  от выражения (13):

$$\frac{dN_{jn}}{dj} \sim An^{-3/2} \left(1 - \frac{2j^2}{2n}\right) e^{-j^2/2n} = 0,$$

откуда  $j = \sqrt{n}$ .

Можно показать, что, независимо от начального состояния игрока, он с вероятностью 1 рано или поздно разорится. (В непрерывной модели аналогом этого утверждения

является то, что при любых фиксированных  $t_0$  и  $\xi$  будет  $\int_0^{\infty} G_1(x, t; \xi, t_0) dx \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , что

вытекает из формулы (8).) В связи с этим несколько неожиданным является то, что среднее значение суммарного состояния, ожидаемого по прошествии любого заданного числа  $n$  игр, не зависит от  $n$ , а равно исходному состоянию. (См. упражнение 4; для непрерывной модели аналогом этого утверждения служит равенство

$$\int_0^{\infty} x G_1(x, t; \xi, t_0) dx \equiv \xi, \text{ вытекающее из доказанной в (4) инвариантности момента 1-го}$$

порядка от решения.) Таким образом, получается, что эта игра безобидна для игрока.

Разгадка этого парадокса в том, что число игр до полного разорения заранее не ограничено, а возможное наибольшее увеличение состояния с ростом числа игр возрастает, чем и компенсируется возможность разорения, если число игр заранее задано. Другими словами, хотя с ростом числа игр вероятность не выбыть из игры стремится к нулю, условное математическое ожидание выигрыша игрока, вычисленное в предположении, что он не выбудет из игры, стремится к бесконечности обратно пропорционально этой вероятности. Поэтому безусловное математическое ожидание выигрыша, вычисленное без такого предположения, остается постоянным; именно в этом смысле игра является безобидной.

Вернемся к непрерывной схеме блуждания, с которой мы начали этот параграф, и подсчитаем еще среднюю продолжительность жизни (т. е. времени до исчезновения) частицы, которая в момент  $t_0$  находилась в точке  $\xi$ . Если считать, что в момент  $t_0$  в точке  $\xi$  находилась сосредоточенная порция частиц общей единичной массы, то в момент  $t > t_0$  за время  $dt$  из этой порции исчезнет часть общей массы

$$-q(0, t)dt = \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} dx, \text{ т. е. такова вероятность того, что время жизни } T \text{ частицы будет}$$

заключено между  $t - t_0$  и  $t - t_0 + dt$ . Поэтому среднее значение времени жизни

$$\bar{T} = \int_{t_0}^{\infty} (t - t_0) \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} dt,$$

куда вместо  $\rho$  надо подставить  $G_1(x, t; \xi, t_0)$ . Пользуясь формулами (5) и (6.3), получаем

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} \left[ e^{-(x-\xi)/4\kappa(t-t_0)} - e^{-(x+\xi)/4\kappa(t-t_0)} \right] \right\} \Big|_{x=0} = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi\kappa}} (t-t_0)^{-3/2} e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa(t-t_0)}},$$

откуда

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \xi \int_{t_0}^{\infty} (t-t_0)^{-1/2} e^{-\xi^2/4\kappa(t-t_0)} dt.$$

Так как на верхнем пределе подынтегральная функция асимптотически равна  $t^{-1/2}$ , то интеграл расходится, т. е.  $\bar{T} = \infty$ . И все же частицы с вероятностью 1 погибают. Вот чем оборачивается сходимость или расходимость интегралов!

Другой тип граничного условия для уравнения диффузии получится, если принять, что частицы через конец полуоси – точку  $x = 0$  – не могут проникнуть (в конце желоба поставлена непроницаемая перегородка). Тогда поток массы в точке  $x = 0$  должен равняться нулю, т. е. в силу (2.10) мы приходим к граничному условию

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (14)$$

– так называемому *граничному условию 2-го рода*. Согласно постановке задачи число частиц в системе в процессе эволюции не меняется. И действительно, в силу условия (14) получаем

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dt} \int \rho dx = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \int \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = \kappa \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0}^{\infty} = 0.$$

К решению полученной задачи, как и к предыдущей, можно применить метод отражения. Именно, будем считать, что диффузия происходит на всей оси  $x$ , и продолжим начальное распределение плотностей четным образом через точку  $x = 0$  на отрицательную полуось  $x$ . Тогда из соображений симметрии следует, что это распределение и во все последующие моменты останется четным относительно точки  $x = 0$ , а потому граничное условие будет автоматически выполняться (почему?). Из сказанного следует, что функция влияния для рассматриваемой задачи на полуоси  $0 \leq x < \infty$  с граничным условием (14) и произвольным начальным условием имеет вид (см. (6))

$$G_2(x, t; \xi, t_0) = G(x, t; \xi, t_0) + G_1(x, t; -\xi, t_0); \quad (15)$$

аналогично (7) можно написать решение при заданном начальном условии:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} \int_0^{\infty} \left[ e^{-(x-\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} + e^{-(x+\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} \right] \rho_0(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Можно рассмотреть также случай «просачивания», когда частицы могут выходить из полуоси  $0 \leq x < \infty$  через точку  $x = 0$ , после чего пропадать навсегда; при этом естественно принять, что поток выходящей массы прямо пропорционален плотности среды из частиц в концевой точке, т. е. во сколько раз сильнее «напор», во столько же раз больше скорость просачивания. В силу формулы (2.10) для потока массы мы получаем граничное условие

$$\kappa \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} = b \rho|_{x=0},$$

где  $b$  – некоторый коэффициент пропорциональности. (Куда делся минус в выражении для потока?) Это – *граничное условие 3-го рода*. Оно в качестве предельных случаев охватывает граничные условия как 1-го (при  $b \rightarrow \infty$ ), так и 2-го (при  $b \rightarrow 0$ ) рода. В заключение рассмотрим условие (2) подробнее. Если в него вдуматься, то оно может показаться парадоксальным. В самом деле, может показаться, что если при  $x = 0$  все время  $\rho = 0$ , т. е., грубо говоря, там частиц нет, то через этот конец полуоси нечему и проходить, т. е. там и поток  $q \equiv 0$ ; но это противоречит смыслу рассматриваемой картины.

Однако вернемся к интерпретации, с которой мы начали §1. Как мы теперь предположили, частицы, попавшие в точку  $x = 0$ , удаляются с полуоси и в дальнейшей эволюции системы не участвуют; но ведь они в эту точку все время поступают из точки  $x = h$ ! Поэтому в обозначениях §1 теперь получаем

$$N_{0,n+1} = \frac{1}{2} N_{1,n}, \text{ т. е. } \rho(0, t + \tau) = \frac{1}{2} \rho(h, t).$$

Отсюда, пренебрегая изменением  $\rho$  за один временной шаг, находим

$$\rho(0, t) = \frac{1}{2} \rho(h, t). \quad (17)$$

Таким образом, в действительности  $\rho(0, t) > 0$ , чем и объясняется убыль частиц из системы. Это значение легко выразить через поток массы  $q = q(0, t)$ . Заметим характерную особенность интервала  $0 < x < h$ : на нем частицы движутся только в

отрицательном направлении оси  $x$ . Отсюда  $q = -\frac{\rho(h,t)h}{2} \frac{1}{\tau}$  и в силу формул (17) и (1.6) получаем

$$\rho(0,t) = \frac{1}{2} \left( -\frac{2\pi q}{h} \right) = \frac{h}{2} \frac{2\tau}{h^2} (-q) = \frac{h}{2\kappa} (-q).$$

Мы видим, что при малом  $h$  и значении  $\rho(0,t)$  мало. Более точно, так как в силу формулы (1.7)  $q$  имеет порядок  $\kappa\rho_{\text{хар}}/L_{\text{хар}}$ , где  $\rho_{\text{хар}}$  и  $L_{\text{хар}}$  – характерные плотность и длина системы, то при  $h \ll L_{\text{хар}}$  будет и  $\rho(0,t) \ll \rho_{\text{хар}}$ , т. е. при расчете распределения

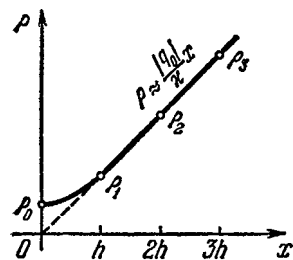


Рис. 94

плотностей в целом можно положить  $\rho(0,t) = 0$ ; мы приходим к условию (2). Интересно, что разложение правой части (17) по степеням  $h$  с последующим отбрасыванием членов выше 1-го порядка и применением формулы (1.7) привело бы к ошибочному результату. Дело в том, что распределение плотности в нашей задаче получается примерно такое, как показано на рис. 94. Например, легко проверить, что для стационарного распределения частиц будет  $N_{2n} = 2N_{1n}$ ,  $N_{3n} = 3N_{1n}$  и т. д., однако для  $N_{0n}$  эта пропорциональность нарушается.

Таким образом, формула (1.7) при  $x = 0$  относится не к реальной зависимости, подчиняющейся соотношению (17), а к зависимости, показанной на рис. 94 пунктиром и удовлетворяющей условию (2) точно. Такие же рассуждения применимы к диффузии газа при наличии стенки, к которой все молекулы диффундирующего газа мгновенно прилипают, при первом же ударе. Вблизи такой стенки имеются только молекулы, движущиеся по направлению к ней, но нет молекул, отскочивших от стенки. (Для простоты изложения о молекулах инертного, не прилипающего к стенке газа, сквозь который идет диффузия, временно забудем.) Тогда при расчете плотностей диффундирующего газа в сосуде в целом можно пользоваться уравнением диффузии и граничным условием  $\rho = 0$  на стенке. Этот расчет дает хорошие результаты на расстоянии от стенки, существенно большем длины  $l$  свободного пробега молекул; для ориентировки укажем, что в воздухе при нормальных условиях для малых молекул  $l$  имеет порядок  $10^{-6}$  см. Однако в пристеночном пограничном слое, ширина которого имеет порядок  $l$ , плотность меняется по иному закону, на который влияет непосредственная близость поглощающих стенок. В частности, на самой стенке плотность диффундирующего газа оказывается на самом деле положительной и имеющей порядок  $l\rho_{\text{хар}}/L_{\text{хар}}$ ; этим и обеспечивается возможность непрерывного оседания диффундирующего газа на стенке.

Итак, при применении простого, казалось бы, граничного условия вида (2) нужно правильно понимать, в каком смысле, в каком приближении оно выполняется, чтобы не впасть в дурной парадокс, с которого мы начали это обсуждение. В связи с этим уместно вспомнить определение специалиста, принадлежащее Нильсу Бору:

«Специалист это не тот, кто много работал в данной области. Специалист это тот, кто знает грубые ошибки в своей области и умеет их избегать».

## Упражнения

- 1) Выясните поведение моментов 2-го порядка от решения в случае граничного условия 1-го, 2-го и 3-го рода.
- 2) Пусть частицы в момент  $t=0$  были с постоянной плотностью распределены по отрезку  $0 \leq x \leq a$ . Выразите закон эволюции плотности среды из этих частиц, диффундирующих на полуоси  $0 \leq x < \infty$ , через интеграл вероятности для граничных условий 1-го и 2-го рода, проверьте инвариантность момента 1-го порядка в первом случае и массы во втором.
- 3) Найдите автомодельное решение уравнения диффузии с помощью

дифференцирования особого, найденного в §5 решения по  $t$ .

- 4) Докажите, что  $\sum_{j=1}^{\infty} j p_{jn} = j_0$  при всех  $n$ . Проверьте это на приведенной в тексте таблице; чем объясняются расхождения?
- 5) Сравните значения числа неразорившихся игроков после  $n = 1, 2, \dots, 9$  игр, вычисленные по асимптотической формуле, с истинными в разобранным примере.
- 6) Придумайте правила игры, отвечающей граничному условию (14), и составьте соответствующую таблицу, аналогичную приведенной выше, при тех же начальных условиях.

## § 12 Сферически-симметричная задача

Замечательно, что сферически-симметричная (или, что то же, центрально-симметричная в пространстве) задача для уравнения диффузии путем простой подстановки приводится к задаче о диффузии вдоль полупрямой. Прежде всего, выведем соответствующее дифференциальное уравнение. Для этого проще всего составить баланс массы диффундирующей среды между сферами с центром в начале координат радиусов  $r$  и  $r + dr$  за время  $dt$ . На основании выражения (3.8) для потока массы получаем

$$-\partial_r \left( -\kappa \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 \right) dt = \partial_t (4\pi r^2 dr \cdot \rho),$$

откуда получаем требуемое уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} \right). \quad (1)$$

Для преобразования этого уравнения положим  $\rho = r^k \tilde{\rho}$ , где постоянную  $k$  мы подберем позже. Непосредственная подстановка в (1) и вычисления, которые мы предоставляем читателю, приводят к уравнению

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{\kappa k(k+1)}{r^2} \tilde{\rho} + \frac{2\kappa(k+1)}{r} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} + \kappa \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial r^2}.$$

Отсюда видно, что если положить  $k = -1$ , то мы придем к простейшему уравнению диффузии (1.8)

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial r^2}; \quad \tilde{\rho} = r\rho. \quad (2)$$

Если исходная задача о диффузии рассматривается во всем пространстве, то переменная  $r$  меняется в интервале  $0 \leq r < \infty$ . Кроме того, из равенства  $\tilde{\rho} = r\rho$  мы получаем, что  $\tilde{\rho}|_{r=0} = 0$ . Таким образом, мы можем применить полученные в §11 результаты исследования уравнения (11.1) при граничном условии (11.2). На основании формулы (11.6) мы получаем решение задачи при начальном условии  $\rho|_{r=0} = \rho_0(r)$ :

$$\rho(r, t) = \frac{1}{2r\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^r \left[ e^{-(r-s)^2/4\kappa t} - e^{-(r+s)^2/4\kappa t} \right] s \rho_0(s) ds \quad (t \leq 0).$$

В частности, плотность в начале координат  $r = 0$ , на основании правила Лопиталья, равна (проверьте!)

$$\rho(0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\kappa t)^{-3/2} \int_0^r e^{-s^2/4\kappa t} s \rho_0(s) ds.$$

Интересно, что в §11 при рассмотрении граничного условия (11.2) масса среды убывала. В нашем случае масса среды равна

$$M = \int_0^{\infty} \rho(r, t) \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^{\infty} r \tilde{\rho} dr.$$

Таким образом, в терминах §11 это момент 1-го порядка, инвариантность которого была показана (см. (11.4)). Значит, в нашей задаче масса среды остается неизменной во времени, как и должно быть.

### Упражнение

- 1) Укажите, какие члены присутствуют в разложении решения  $\rho(r, t)$  по степеням  $r$  при  $t > 0$ .

### § 13 Диффузия на отрезке

Перейдем к случаю блуждания частиц по отрезку  $0 \leq x \leq l$ . Естественно, что при этом надо задать граничные условия на каждом из концов этого отрезка. Мы рассмотрим только случай, когда оба эти условия 1-го рода:

$$\rho|_{x=0} = 0, \quad \rho|_{x=l} = 0, \quad (1)$$

т. е. через оба конца частицы свободно покидают отрезок, и притом навсегда.

Функцию влияния для построения решения с дополнительно заданными начальными условиями нетрудно построить по методу отражения, аналогично §11. Для этого отразим сгусток, расположенный в точке  $\xi$ , от концов отрезка, одновременно изменив знак массы в сгустке; это даст сумму

$$G(x, t; \xi, t_0) - G(x, t; -\xi, t_0) - G(x, t; 2l - \xi, t_0). \quad (2)$$

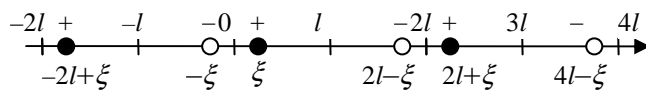


Рис. 95

Теперь в точке  $x = 0$  влияния сгустков в  $\xi$  и  $-\xi$  в взаимно уничтожаются, но возникает влияние сгустка в  $2l - \xi$ . Поэтому отразим его от точки  $x = 0$ , одновременно изменив знак;

аналогично надо отразить, сгусток в  $-\xi$  от точки  $l$ . Продолжая это рассуждение, мы приходим к бесконечной последовательности сгустков, расположение и знаки которых показаны на рис. 95. Применяя формулу (6.3), получаем выражение для функции влияния (для простоты записи полагаем  $t_0 = 0$ )

$$G_l(x, t; \xi, 0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [G(x, t; 2jl + \xi, 0) - G(x, t; 2jl - \xi, 0)] = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [e^{-(x-2jl-\xi)^2/4\kappa t} - e^{-(x-2jl+\xi)^2/4\kappa t}].$$

С помощью этой функции влияния закон эволюции плотности при заданном ее начальном распределении  $\rho_0(x)$  можно записать в виде

$$\rho(x, t) = \int_0^l G_l(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^l [G(x, t; 2jl + \xi, 0) - G(x, t; 2jl - \xi, 0)] \rho_0(\xi) d\xi. \quad (3)$$

Это решение можно переписать в ином виде, если формально продолжить функцию  $\rho_0(x)$  через точку  $x = 0$  нечетным образом, а затем с отрезка  $-l \leq x \leq l$  на всю ось  $x$  как  $2l$ -периодическую функцию; продолженную функцию мы также будем обозначать  $\rho_0(x)$ .

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^l G(x, t; 2jl + \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi &= \int_{2jl}^{(2j+1)l} G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi, \\ - \int_0^l G(x, t; 2jl - \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi &= \int_{(2j-1)l}^{2jl} G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

то от (3) мы переходим к обычному выражению

$$\rho(x, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{il}^{(i+1)l} G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi. \quad (4)$$



Полученное выражение наиболее удобно для малых  $t$ , так как тогда различные члены в средней сумме имеют разный порядок малости: один из них (с  $i = 0$ ) является главным, один из соседних (в зависимости от значения  $x$ ) – поправочным к нему и т. д. Ограничиваясь главным членом, получаем приближенную формулу для плотности, пригодную для малых значений  $t$  не слишком близко от концов  $x = 0$  и  $x = l$ :

$$\rho(x, t) = \int_0^l G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi, \quad (5)$$

где под  $\rho_0(x)$  понимается исходная (не продолженная) начальная плотность. Если на минуту обозначить

$$\tilde{\rho}_0(x) = \begin{cases} \rho_0(x) & (0 \leq x \leq l), \\ 0 & (-\infty < x < 0, l < x < \infty), \end{cases}$$

то приближение (5) можно формально переписать в виде

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, 0) \tilde{\rho}_0(\xi) d\xi.$$

Таким образом, смысл этого приближения состоит просто в том, что влияние концов отрезка не учитывается. Если  $x$  близок к 0 или  $l$  или если  $\rho_0(x)$  – линейная функция (в частности, константа), эволюция которой определяется влиянием концов, то, как будет видно из дальнейшего, формула (5) дает неправильный результат и главный член разложения (4) должен быть дополнен соседними к нему.

Рассмотрим закон изменения суммарной массы  $M$  частиц при малых  $t$ . Если бы мы исходили только из формулы (5), то получили бы:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^l dx \int_0^l G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi = \int_0^l dx \int_0^l \frac{\partial G}{\partial t} \rho_0(\xi) d\xi.$$

Но так как функция  $G$  удовлетворяет уравнению диффузии (1.8), то, переставляя порядок интегрирования, получаем

$$\frac{dM}{dt} = \kappa \int_0^l \rho_0(\xi) d\xi \int_0^l \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} dx = \kappa \int_0^l [G'_x(l, t; \xi, 0) - G'_x(0, t; \xi, 0)] \rho_0(\xi) d\xi.$$

Из явного выражения (6.3) для  $G$  получаем, что  $G'_x = -G'_\xi$ , откуда, интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= -\kappa [G(l, t; l, 0) - G(0, t; l, 0)] \rho_0(l) + \kappa [G(l, t; 0, 0) - G(0, t; 0, 0)] \rho_0(0) + \\ &+ \kappa \int_0^l [G(l, t; \xi, 0) - G(0, t; \xi, 0)] \rho'_0(\xi) d\xi = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} [\rho_0(0) + \rho_0(l)] + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где многоточием обозначены члены высшего порядка малости. Однако интересно, что на самом деле производная  $dM/dt$  будет в два раза большей! В самом деле, изменение массы на отрезке  $0 \leq x \leq l$  определяется ситуацией в окрестности точек  $x = 0$  и  $x = l$ . Но, например, в окрестности точки  $x = 0$  в средней сумме (4) начинает играть роль член  $i = -1$ ; он определяет течение «отрицательной массы» (в силу правила продолжения  $\rho_0(x)$ ) слева направо той же интенсивности, что учтенное течение положительной массы справа налево. Итак, получаем при малых  $t$

$$\frac{dM}{dt} = -\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} [\rho_0(0) + \rho_0(l)], \quad (7)$$

откуда, интегрируя, приходим к формуле

$$M(t) = M(0) - 2\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} [\rho_0(0) + \rho_0(l)] \sqrt{t}, \quad (8)$$

справедливой с точностью до членов высшего порядка малости.

Применение решения (3) при больших  $t$  неудобно, так как тогда многие слагаемые в выписанной сумме имеют одинаковый порядок, но различные знаки. В §14 будет получена иная форма решения рассматриваемой задачи, удобная при больших  $t$ .

## Упражнения

- 1) Постройте функцию влияния для решения задачи с начальным условием для уравнения диффузии на отрезке, на обоих концах которого заданы граничные условия 2-го рода.
- 2) Как изменится асимптотическая формула (8) в случае  $\rho_0(0) = \rho_0(l) = 0$ ?

## § 14 Решения, экспоненциальные во времени

В линейных однородных автономных (т. е. инвариантных во времени) задачах математической физики важную роль играют решения вида  $f(x)e^{-\lambda t}$ , экспоненциально зависящие от времени; здесь  $\lambda$  – постоянное, вообще говоря, комплексное число, а знак минус поставлен лишь для удобства формулировок (экспонента чаще оказывается затухающей, чем нарастающей). Если  $\lambda$  – вещественное положительное, то такому решению отвечает процесс, затухающий с одинаковой скоростью во всех точках; если  $\lambda$  – чисто мнимое, то – процесс гармонических колебаний; если  $\lambda$  – мнимое с положительной вещественной частью, – то процесс затухающих гармонических колебаний, и т. д. На роль экспоненциальных решений линейных автономных задач мы уже указывали в §XIV.4 ЭПМ: семейство всех решений такой задачи инвариантно относительно сдвига во времени и умножения на константу; совокупность же решений вида  $Cf(x)e^{-\lambda t}$ , где  $C$  – произвольная постоянная, представляет собой общий вид однопараметрического семейства решений, инвариантного относительно указанных преобразований. (Более подробно: сдвиг во времени на  $\Delta t$ , т. е. замена  $t$  на  $t - \Delta t$ , равносильна умножению  $C$  на  $e^{\lambda \Delta t}$ , так что  $\Delta \ln C = \lambda \Delta t$ .) Во многих задачах общее решение получается в результате сложения таких однопараметрических семейств, разыскание которых существенно легче, чем непосредственное построение общего решения.

Возможные значения постоянной  $\lambda$  и вид соответствующей функции  $f(x)$ , задающей пространственную зависимость (*моду*) рассматриваемого экспоненциального решения, определяются как дифференциальным уравнением процесса, так и поставленными граничными условиями. Каждое из таких значений  $\lambda$  называется *собственным значением* рассматриваемой задачи, оно определяет скорость затуханий экспоненциального решения (и частоту колебаний, если  $\lambda$  – мнимое); соответствующая функция  $f(x)$  называется *собственной функцией*.

Найдем экспоненциальные во времени решения уравнения диффузии на отрезке  $0 \leq x \leq l$  при граничных условиях

$$\rho|_{x=0} = \rho|_{x=l} = 0. \quad (1) = (13.1)$$

Для этого надо в уравнение диффузии (1.8) и в граничные условия подставить функцию

$$\rho = f(x)e^{-\lambda t}. \quad (2)$$

После сокращения на  $e^{-\lambda t}$  получаем, что функция  $f(x)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\kappa f''(x) + \lambda f(x) = 0, \text{ т. е. } \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\lambda}{\kappa} f = 0, \quad (3)$$

и граничным условиям

$$f(0) = f(l) = 0. \quad (4)$$

При этом нас, конечно, интересуют только ненулевые решения,  $f(x) \neq 0$ .

Подобрать требуемые решения возможно *не при любом*  $\lambda$ . Именно, уравнение (3) (в котором  $\lambda/\kappa = \text{const}$ ) и граничные условия (4) определяют синусоидальные решения

$$f_m(x) = \sin k_m x, \text{ где } k_m l = m\pi, \text{ т. е. } k_m = m\pi/l \text{ (} m = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

откуда в силу уравнения (3)

$$-\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{\lambda}{\kappa} = 0, \text{ т. е. } \lambda = \lambda_m = \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \kappa (= k_m^2 \kappa). \quad (6)$$

Таким образом, формула (6) определяет последовательность собственных значений в рассматриваемой задаче, а первая формула (5) – последовательность отвечающих этим значениям собственных функций. Мы предоставляем читателю проверить, что при отрицательных или мнимых  $\lambda$  удовлетворить уравнению (3) и граничным условиям (4) невозможно, т. е. нами найдены все собственные значения и собственные функции этой задачи. (Само собой разумеется, что собственные функции определены с точностью до произвольного постоянного множителя.)

Будем называть набор возможных собственных значений  $\lambda$  *спектром* рассматриваемой задачи (этот термин употребляется также по отношению к набору значений  $-\lambda, k, \kappa/\lambda$  и т. д., так что всегда нужно уточнять, в каком смысле он понимается). Таким образом, для уравнения диффузии на конечном отрезке спектр получился дискретным; оказывается, что это характерная черта задач, поставленных в конечной области. Итак, мы построили последовательность решений уравнения диффузии, экспоненциальных во времени и удовлетворяющих граничным условиям (1)

$$\rho_m(x, t) = \sin k_m x \cdot e^{-\lambda_m t} = \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot e^{-\kappa(m\pi/l)^2 t} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (7)$$

Если рассматривать эту функцию как добавку к некоторой постоянной плотности, то мы получаем периодическую последовательность чередующихся разрежений и сгущений с волновым числом  $k_m$ , причем эти разрежения и сгущения рассасываются со временем, тем быстрее, чем больше  $k_m$ . Последнее понятно: при заданном среднем пробеге частиц в единицу времени взаимная компенсация разрежений и сгущений происходит тем быстрее, чем ближе они расположены друг от друга.

Для каждого из однопараметрических семейств решений, экспоненциальных во времени,

$$\rho = C f(x) e^{-\lambda t},$$

справедлив следующий аналог закона Ньютона: суммарный поток массы через края отрезка пропорционален общей массе частиц, расположенных на этом отрезке<sup>42</sup>. В самом деле,

$$M = \int_0^l \rho dx = C \int_0^l f(x) dx \cdot e^{-\lambda t}, \text{ откуда } \frac{dM}{dt} = -\lambda M. \quad (8)$$

Таким образом,  $\lambda$  служит как бы «коэффициентом массоотдачи» для «чистых» решений, включающих лишь одну собственную функцию. В отличие от этого, для решений общего вида, включающих различные собственные функции, нельзя говорить об определенном коэффициенте массоотдачи, так как коэффициент, связывающий суммарную массу со скоростью ее изменения, зависит от времени.

Перейдем теперь к построению, с помощью найденных нами решений (7) специального вида, общего решения уравнения диффузии, удовлетворяющего граничным условиям (1) и произвольному заданному начальному условию

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (9)$$

Для этого заметим, что в силу линейности и однородности уравнения и граничных условий произведение решения на константу, а также сумма решений будет снова

<sup>42</sup> В законе Ньютона утверждается, что поток тепла от нагретого тела в окружающую среду пропорционален разности их температур. Приняв температуру среды за нулевую и заменив температуру тела на пропорциональное ей количество тепла, заключенного в теле, приходим к точному аналогу приведенной формулировки. Напомним, что уравнение теплопроводности совпадает с уравнением диффузии.

решением того же уравнения и будет удовлетворять тем же граничным условиям. Поэтому в качестве решения задачи можно взять также сумму ряда

$$\rho = b_m \sum_{m=1}^{\infty} \sin k_m x \cdot e^{-\lambda_m t} \quad \left( k_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \lambda_m = \kappa \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \right) \quad (10)$$

по функциям (7) с произвольными постоянными коэффициентами  $b_m$ . Чтобы удовлетворить начальному условию (9), положим в (10)  $t = 0$ ; мы придем к соотношению

$$\rho = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin k_m x \quad (0 \leq x \leq l), \quad (11)$$

которому надо удовлетворить за счет подбора коэффициентов  $b_m$ .

Однако легко проверить непосредственно, что построенные собственные функции ортогональны друг другу на отрезке  $0 \leq x \leq l$ , т. е.

$$\int_0^l \sin k_m x \sin k_n x dx = 0 \quad (m \neq n)$$

(докажите это!). Отсюда сразу следует, что если разложение (11) возможно, то коэффициенты  $b_m$  определяются однозначно следующим образом: если обе части разложения умножить на одну из собственных функций  $\sin k_m x$ , после чего произвести интегрирование от 0 до  $l$  и воспользоваться свойством ортогональности и легко

проверяемым равенством  $\int_0^l \sin^2 k_m x dx = \frac{l}{2}$ , то мы придем к формуле

$$b_m = \frac{2}{l} \int_0^l \rho_0(x) \sin k_m x dx \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

для коэффициентов ряда (10). (Общая схема этого метода описана в ЭПМ, §XIV.7.)

Вопрос о возможности разложения произвольной функции  $\rho_0(x)$  в ряд по системе собственных функций, другими словами, вопрос о *полноте* системы собственных функций в общем случае далеко не прост. К счастью, в рассматриваемой сейчас задаче можно воспользоваться свойством разложимости периодических функций в ряды Фурье (ЭПМ, §XIV.6). Для этого надо продолжить функцию  $\rho_0(x)$  с отрезка  $0 \leq x \leq l$  на всю ось  $x$  нечетным  $2l$ -периодическим способом, как это делалось в §9, после чего разложить в ряд Фурье. Тогда в силу нечетности разлагаемой функции члены с косинусами пропадут, и мы придем как раз к разложению (11) (проверьте!).

Так как решение задачи определяется начальным условием однозначно, то формулы (13.3) и (10) дают тождественно совпадающие результаты. Но если формула (13.3), как мы уже говорили, наиболее удобна для малых  $t$ , то формула (10) весьма эффективна при  $t \rightarrow \infty$ , так как  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$  и потому при больших  $t$  первый член разложения (10) является главным, второй – поправочным к нему и т. д. В частности, мы получаем асимптотическую формулу

$$\rho(x, t) \sim b_1 \sin k_1 x \cdot e^{-\lambda_1 t} = \frac{2}{l} \left( \int_0^l \rho_0(x) \sin \frac{\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{\pi x}{l} \cdot e^{-\kappa \pi^2 t / l^2} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Таким образом, мы приходим к решению из однопараметрического семейства, отвечающего собственному значению  $\lambda_1$ . Отсюда, в частности, вытекает, что и «коэффициент массоотдачи», о котором мы упоминали в связи с равенством (8), в общем случае асимптотически стремится к  $\lambda_1$ .

Рассмотрим пример: пусть  $\rho_0(x) = \alpha x(l - x)$ . Подсчет коэффициентов по формуле (12), который мы предоставляем читателю, дает

$$b_m = \frac{4\alpha}{lk_m^3} (1 - \cos k_m l) = \frac{4\alpha l^2}{\pi^3 m^3} [1 - (-1)^m],$$

откуда

$$\rho = \frac{8\alpha l^2}{\pi^3} \left( \frac{1}{1^3} \sin \frac{\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{3^3} \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_3 t} + \frac{1}{5^3} \sin \frac{5\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_5 t} + \dots \right). \quad (13)$$

Полученный ряд хорошо сходится даже при малых  $t$ . Интегрируя, получаем еще лучше сходящийся ряд для массы

$$M = \frac{16\alpha l^3}{\pi^4} \left( \frac{1}{1^4} e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{3^4} e^{-\lambda_3 t} + \frac{1}{5^4} e^{-\lambda_5 t} + \dots \right).$$

Рассмотрим еще один пример: пусть  $\rho_0(x) \equiv \rho_0 = \text{const}$ , т. е. в начальный момент масса на отрезке была распределена равномерно. Применение формулы (12) приводит к решению

$$\rho = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{1} \sin \frac{\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_3 t} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_5 t} + \dots \right) \rho_0. \quad (14)$$

Этот ряд при малых  $t$  сходится гораздо хуже, чем (13). Дело в том, что начальное распределение плотности в рассматриваемом примере не удовлетворяет граничным условиям (1), поставленным для решения; поэтому в разложении начальной плотности высшие члены должны иметь существенный вес. Кроме того, из-за указанной несогласованности граничных значений начальная скорость массоотдачи должна быть велика, откуда также вытекает медленная сходимость разложения (продумайте это!). И действительно, интегрируя разложение (14), получаем

$$M = \frac{8l}{\pi^2} \left( \frac{1}{1^2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{3^2} e^{-\lambda_3 t} + \frac{1}{5^2} e^{-\lambda_5 t} + \dots \right) \rho_0,$$

откуда

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{8\kappa}{l} (e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_5 t} + \dots) \rho_0.$$

Мы видим, что при  $t = 0$  коэффициент массоотдачи равен бесконечности; это же следует из формулы (13.7). Таким образом, для правильного качественного описания процесса число членов в ряде (14) надо брать тем большим, чем меньше  $t$ .

И в других задачах применение решений, экспоненциальных во времени, для построения произвольных решений приводит к разложению этих последних в ряд Фурье (для бесконечной области, как мы увидим, получится интеграл Фурье) или в сходного вида ряд по полной ортогональной системе собственных функций, набор которых зависит от поставленной задачи, т. е. дифференциального уравнения и граничных условий. Поэтому этот метод построения решений называется *методом Фурье*. Он был впервые предложен Л. Эйлером, применен в 1753 г. известным швейцарским математиком и механиком, тесно связанным в своей деятельности с Россией, Д. Бернулли к исследованию колебаний струны и широко использован в 1811 г. выдающимся французским математиком Ж. Фурье в его исследованиях по теплопроводности.

Покажем применение метода Фурье к задаче, в которой, в отличие от разобранных выше, непосредственное построение функции влияния затруднительно. Именно, рассмотрим диффузию частиц на отрезке  $0 \leq x \leq l$  при заданной начальной плотности частиц  $\rho_0(x)$ , если на левом конце отрезка частицы исчезают навсегда, а на правом происходит просачивание (§11), т. е. если выполняются граничные условия

$$\rho_0|_{x=0} = 0, \quad \left( \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} + b\rho \right) \Big|_{x=l} = 0 \quad (15)$$

(продумайте знак во втором условии!).

Для решений (2), экспоненциальных во времени, на основании уравнения (3) и первого

условия (15) получаем, что с точностью до несущественного коэффициента пропорциональности

$$f(x) = \sin kx; \quad (16)$$

из второго же условия (15) находим, что число  $k$  должно удовлетворять уравнению

$$k\kappa \cos kl + b \sin kl = 0, \text{ т. е. } \operatorname{tg} kl = -\frac{\kappa}{b} k. \quad (17)$$

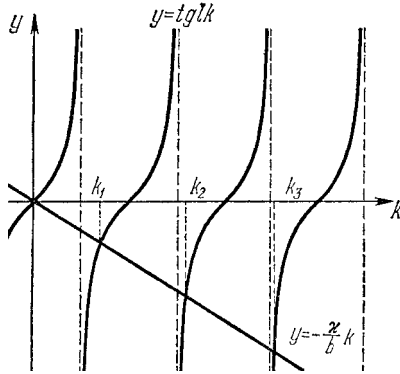


Рис. 96

Графическое решение этого трансцендентного уравнения для вещественных  $k > 0$  показано на рис. 96. Мы видим, что получается бесконечная последовательность  $k_1, k_2, k_3, \dots \rightarrow \infty$  возможных значений  $k$ . Можно проверить (мы на этом здесь не будем останавливаться), что не вещественных решений уравнение (17) не имеет, т. е. мы получаем таким путем все решения, экспоненциальные во времени.

Для построения более общего решения уравнения диффузии при граничных условиях (15) можно воспользоваться рядом по найденным решениям вида (1) с произвольными постоянными коэффициентами.

Принимая во внимание равенства (16) и (3), получаем ряд

$$\rho(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin k_m x \cdot e^{-k_m^2 t}, \quad (18)$$

где  $k_m$  – упомянутые выше решения уравнения (17), а  $b_m$  – пока произвольные постоянные. Подстановка значения  $t = 0$  приводит к равенству

$$\rho_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin k_m x \quad (0 \leq x \leq l), \quad (19)$$

которому надо удовлетворить путем подбора этих постоянных. Таким образом, мы опять пришли к задаче о разложении произвольной заданной функции в ряд по системе собственных функций; но так как граничные условия изменились, то и собственные функции стали иными.

Нетрудно проверить, что построенная система собственных функций обладает свойством ортогональности: при  $m \neq n$

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin k_m x \sin k_n x dx &= \int_0^l [\cos(k_m - k_n)x - \cos(k_m + k_n)x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(k_m - k_n)x}{k_m - k_n} - \frac{\sin(k_m + k_n)x}{k_m + k_n} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{tg} k_m x - \operatorname{tg} k_n x}{k_m - k_n} - \frac{\operatorname{tg} k_m x + \operatorname{tg} k_n x}{k_m + k_n} \right] \cos k_m x \cos k_n x = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\kappa}{b} \left[ \frac{k_m - k_n}{k_m - k_n} - \frac{k_m + k_n}{k_m + k_n} \right] \cos k_m x \cos k_n x = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

(в процессе преобразований мы воспользовались уравнением (17), которому удовлетворяют величины  $k_m$  и  $k_n$ ). Значительно сложнее доказать полноту этой системы, и мы не будем его здесь приводить. Опираясь на полноту и ортогональность, нетрудно с помощью равенства (19) получить выражение для коэффициентов разложения (18):

$$b_m = \int_0^l \rho_0(x) \sin k_m x dx \Big/ \int_0^l \sin^2 k_m x dx = 2 \int_0^l \rho_0(x) \sin k_m x dx \Big/ \left( l + \frac{\kappa}{b} \cos^2 k_m l \right)$$

(выражение, стоящее в знаменателе, преобразовано по образцу (20)).

Замечательно, что в задачах рассматриваемого типа система собственных функций всегда обладает свойствами полноты и ортогональности. Пользуясь этими свойствами, в тех случаях, когда систему собственных функций удастся построить эффективно, возможно представить решение, удовлетворяющее любому заданному начальному условию, в виде суммы ряда по решениям, экспоненциальным во времени. Таким рядом можно пользоваться как для численных расчетов, так и для уточнения асимптотического поведения решения при  $t \rightarrow \infty$ .

Остановимся коротко на пространственных задачах. Пусть уравнение диффузии (3.8) решается в ограниченной области  $(\Omega)$ , на границе  $(S)$  которой поставлено условие

$$\rho_{(S)} = 0. \quad (21)$$

Построение решений, экспоненциальных во времени,

$$\rho(x, t) = f(x)e^{-\lambda t} \quad (x = (x_1, x_2, x_3))$$

приводит к уравнению и граничному условию, определяющим собственные значения и собственные функции

$$\kappa \nabla^2 f + \lambda f = 0, \quad f_{(S)} = 0. \quad (22)$$

Можно показать, что все собственные значения вещественны и положительны, а соответствующие собственные функции обладают свойствами ортогональности и полноты. Решение уравнения (3.8), удовлетворяющее граничному условию (21) и произвольному начальному условию  $\rho|_{t=0} = \rho_0(x)$ , строится в виде

$$\rho(x, t) = \sum_m C_m f_m(x) e^{-\lambda_m t}, \quad (23)$$

а начальное условие приводит к равенству

$$\rho_0(x) = \sum_m C_m f_m(x),$$

из которого и определяются коэффициенты  $C_m$

$$C_m = \int_{(\Omega)} \rho_0 f_m dx / \int_{(\Omega)} f_m^2 dx \quad (dx = dx_1 dx_2 dx_3). \quad (24)$$

К сожалению, эффективное построение собственных функций и вычисление собственных значений в «замкнутой» форме удастся лишь для областей  $(\Omega)$  довольно специального вида. Пусть, например,  $(\Omega)$  представляет собой прямоугольный параллелепипед

$$0 \leq x_1 \leq l_1, \quad 0 \leq x_2 \leq l_2, \quad 0 \leq x_3 \leq l_3.$$

Тогда легко проверить, что уравнению и граничным условиям (22) удовлетворяют функции

$$f_m(x) = \sin \frac{m_1 \pi}{l_1} x_1 \sin \frac{m_2 \pi}{l_2} x_2 \sin \frac{m_3 \pi}{l_3} x_3 \quad (m_1, m_2, m_3 = 1, 2, 3, \dots);$$

при этом соответствующие собственные значения равны

$$\lambda_m = \pi^2 \left( \frac{m_1^2}{l_1^2} + \frac{m_2^2}{l_2^2} + \frac{m_3^2}{l_3^2} \right) \kappa \quad (m = (m_1, m_2, m_3)). \quad (25)$$

Формулы (24) для коэффициентов разложения приобретают вид

$$C_m = \frac{8}{l_1 l_2 l_3} \int_0^{l_3} dx_3 \int_0^{l_2} dx_2 \int_0^{l_1} dx_1 \rho_0(x) \sin \frac{m_1 \pi}{l_1} x_1 \sin \frac{m_2 \pi}{l_2} x_2 \sin \frac{m_3 \pi}{l_3} x_3 dx_3.$$

В разложении (23) суммирование производится по  $m_1, m_2, m_3$ , т. е. получается тройной ряд.

Для некоторых других областей аналогичное, хоть и более громоздкое построение удастся осуществить с помощью так называемых специальных функций. Обзор случаев, когда такое построение оказывается возможным, содержится в книге Ф. Морса и Г. Фешбаха «Методы теоретической физики», т. I (ИЛ, М., 1958).

Как и в одномерном случае, самую важную роль играет наименьшее собственное значение  $\lambda_{\min}$ , так как именно оно служит асимптотическим, при  $t \rightarrow \infty$ , значением

коэффициента массоотдачи при произвольном начальном распределении плотности. Поэтому был разработан ряд методов для грубых оценок и для приближенного подсчета этого значения. Один из методов такой оценки основан на применении следующего свойства, которое будет доказано в §23: если область  $(\Omega_1)$  целиком содержится в области  $(\Omega_2)$ , то  $(\lambda_{\min})_{(\Omega_1)} > (\lambda_{\min})_{(\Omega_2)}$ . Отсюда, заключая заданную область  $(\Omega)$  внутрь области достаточно простой структуры, с известными собственными значениями, или выбирая внутри  $(\Omega)$  такую область, мы получаем оценки  $\lambda_{\min}$  для  $(\Omega)$ . Например, из формулы (25) вытекает, что если  $(\Omega)$  можно заключить в прямоугольный параллелепипед со сторонами  $l_1, l_2, l_3$ , то  $\lambda_{\min} > \pi^2 \kappa (l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2})$ .

Метод приближенного подсчета  $\lambda_{\min}$  будет указан в §23.

Важнейшую роль в уяснении значения собственных функций для задач физики, в привитии навыков действий с этими функциями сыграла книга Р.Куранта и Д.Гильберта «Методы математической физики», на которой воспитывалось не одно поколение физиков и математиков.

## Упражнения

- 1) Постройте по методу Фурье решение уравнения диффузии на отрезке, на обоих концах которого поставлено граничное условие 2-го рода; найдите асимптотическое поведение этого решения при  $t \rightarrow \infty$ .
- 2) Опираясь на формулу (18), постройте функцию влияния для задачи, решением которой служит эта формула.
- 3) Получите формулу (10) непосредственно из (13.3), разложив функцию  $G_l(x, t; \xi, 0)$  в ряд по  $\sin \frac{m\pi}{l} x$ .

*Указание.* Преобразуйте формулу для коэффициента разложения функции  $G_l$  к виду (7.6).

## § 15 Задача с непрерывным спектром

Вернемся к одномерному случаю и перейдем к решению уравнения диффузии на всей оси  $-\infty < x < \infty$ . Отыскивая решения, экспоненциальные во времени, в форме (14.2), мы вновь приходим к уравнению (14.3). Будем пользоваться лишь решениями, ограниченными при  $x \rightarrow \pm\infty$ ; тогда из (14.3) следует, что  $\lambda$  должно быть вещественным и положительным (почему?). При этом уравнению (14.3) удовлетворяют функции

$$f(x) = e^{\pm ikx}, \text{ где } -k^2 + \frac{\lambda}{\kappa} = 0, \text{ т. е. } \lambda = \kappa k^2. \quad (1)$$

Таким образом, здесь спектр задачи получается непрерывным, он заполняет всю вещественную положительную полуось. Каждому положительному значению  $\lambda$  отвечают две линейно независимые собственные функции; конечно, любая их линейная комбинация также является собственной функцией, отвечающей тому же собственному значению. Поэтому удобно сопоставлять эти функции значениям не  $\lambda$ , а  $k$ , т. е. писать

$$f_k(x) = e^{ikx}, \quad (2)$$

где  $k$  уже может принимать значения любого знака. Функция (14.2) теперь приобретает вид

$$\rho = e^{ikx - \lambda t} = e^{ikx - \kappa k^2 t}, \quad (3)$$

а общее решение уравнения диффузии, взамен суммы (14.10), из-за непрерывности спектра приобретает вид интеграла

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikx - \kappa k^2 t} dk. \quad (4)$$

Здесь  $C(k)$  – произвольная функция, равная плотности, с которой экспоненциальные



решения (3) «размазаны» по оси  $k$ ; для определения  $C(k)$ , если задана начальная плотность  $\rho_0(x)$ , получаем уравнение

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k)e^{ikx} dk. \quad (5)$$

Собственные функции (2), по которым производится разложение, и теперь обладают свойством ортогональности, причем на бесконечном интервале это свойство надо определять с помощью средних значений, а не простых интегралов (для ортогональности на конечном интервале эти подходы равносильны). Именно, при  $k_1 \neq k_2$

$$\overline{e^{ik_1x}(e^{ik_2x})^*} = \overline{e^{i(k_1-k_2)x}} = 0.$$

Вопрос о полноте системы собственных функций, т. е. возможности подбора функции  $C(k)$  при произвольно заданной  $\rho_0(x)$  в данном примере решается просто, так как из формулы (5) мы видим, что  $C(k)$  служит фурье-образом функции  $\rho_0(x)$  (см. §7), т. е.  $C(k)$  можно найти по формуле (7.4). Итак, свойство полноты имеет место, т. е. можно сказать, что решения специального вида (3) образуют континуальный (так как решение (3) зависит от непрерывного параметра  $k$ ) базис в пространстве всех решений. Совпадение решения (4) с решением (7.5), полученным в §7 с помощью интегрального преобразования Фурье, объясняется тем, что решения (3), экспоненциальные во времени, одновременно являются гармоническими по  $x$ , т. е. служат базисными функциями этого преобразования.

Пространственным аналогом функций (3) служат функции

$$e^{ik \cdot x - \kappa|k|^2 t} \quad (\mathbf{k} = k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{e}_3).$$

С их помощью осуществляется построение произвольного решения в виде трехкратного интеграла по  $k_1, k_2, k_3$ .

Сделаем в заключение одно замечание. Мы видим, что в общем решении (4) присутствуют компоненты, как угодно быстро затухающие с ростом времени, – это слагаемые, пропорциональные решению (3) с большими  $|k|$ . Именно наличием как угодно быстро затухающих решений и объясняются трудности при решении уравнения диффузии назад во времени, о которых мы упоминали выше. В самом деле, при продвижении назад во времени такие решения окажутся как угодно быстро разрастающимися по амплитуде. Поэтому появление в «конечном» условии часто колеблющегося слагаемого малой амплитуды (это может случиться даже из-за ошибок округления) может привести к сильно разросшемуся слагаемому в решении. Такое нарушение непрерывной зависимости решения задачи от задаваемых данных называется *некорректностью* ее постановки и приводит к осложнениям при численном построении решения, так как приходится тем или иным способом отсеивать быстро разрастающиеся гармоники. Задача о решении уравнения диффузии назад во времени – это типичная некорректная задача. (Соображения, высказанные в конце §6, относились, по существу, тоже к некорректности этой задачи; см. по этому поводу также конец §4.) Глубокий анализ разнообразных классов некорректных задач, построение численных методов их решения провели в последние годы советский математик А.Н.Тихонов и коллектив его сотрудников.

## Упражнение

- 1) Постройте по методу Фурье решение уравнения диффузии на полуоси  $0 \leq x < \infty$ , если
  - а) при  $x = 0$  поставлено граничное условие 1-го рода и задано начальное распределение плотности;
  - б) то же для граничного условия 2-го рода.

## § 16 Стационарные решения

Пусть рассматривается процесс диффузии в некоторой области ( $\Omega$ ). Очевидно, что стационарное неоднородное (т. е.  $\rho \neq \text{const}$ ) распределение плотности диффундирующей среды возможно, только если эта область имеет границы, через которые частицы поступают в систему или исчезают из нее, либо если диффузия принудительно возбуждается поведением частиц на бесконечности (если на бесконечности имеются источники и стоки).

Если решение уравнения диффузии стационарно, т. е. не зависит от  $t$ , то  $\partial\rho/\partial t = 0$ , и потому уравнение в одномерном случае приобретает вид  $d^2\rho/dx^2 = 0$ , а в двумерном или трехмерном – вид

$$\nabla^2\rho = 0, \quad (1)$$

т. е. превращается в уравнение Лапласа (см. ЭПМ, §X.9). В одномерном случае решения очевидны и потому представляют малый интерес – это линейные функции, которым отвечает однородный поток массы. Поэтому мы будем впредь рассматривать диффузию частиц в пространстве; диффузия на плоскости рассматривается аналогично. Итак, стационарные решения уравнения диффузии удовлетворяют уравнению Лапласа (1), другими словами, являются гармоническими функциями. Пусть такое решение строится в некоторой области ( $\Omega$ ). Тогда решение существенно зависит от того, что известно на границе ( $S$ ) этой области, т. е. каково граничное условие. (Очевидно, что начальное условие для стационарных задач не ставится.) Так, на ( $S$ ) может быть задана плотность диффундирующей среды; тогда мы приходим к граничному условию 1-го рода

$$\rho(P)|_{P \text{ на } (S)} = \varphi(P) \text{ (задано)}. \quad (2)$$

В других задачах на ( $S$ ) может быть задана скорость ввода частиц в систему. Учитывая выражение (3.8) для потока массы, а также общие свойства потока, рассмотренные в §I.6, получаем, что если через площадку  $dS$ , расположенную в граничной точке  $P$ , за время  $dt$  в область поступает  $\psi(P)dSdt$  единиц массы диффундирующей среды, то должно выполняться граничное условие 2-го рода

$$\kappa \frac{d\rho}{dn} \Big|_{P \in (S)} = \psi(P) \text{ (задано)}, \quad (3)$$

где  $n$  – направление внешней нормали к ( $S$ ). (Продумайте знаки в этом условии!) Очевидно, что для существования стационарного решения общая масса частиц, поступающих в систему за любой промежуток времени, должна равняться нулю, другими словами,

$$\int_{(S)} \psi(P) dS = 0.$$

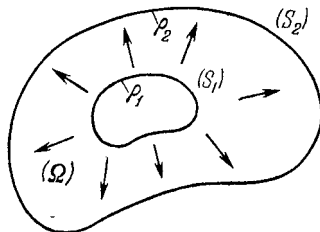


Рис. 97

С другой стороны, ясно, что в рассматриваемом случае решение определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого, так как для однородного граничного условия (т. е. при  $\psi(P) \equiv 0$ ), когда частицы в систему не проникают, в ней возможно распределение среды с любой постоянной (и только постоянной!) плотностью.

Для однородного тела, через которое диффундируют частицы, можно ввести естественное понятие коэффициента

массопередачи. Пусть тело ( $\Omega$ ) (рис. 97) ограничено двумя поверхностями ( $S_1$ ) и ( $S_2$ ), причем на ( $S_1$ ) поддерживается постоянная плотность  $\rho_1$  диффундирующей среды, а на ( $S_2$ ) – постоянная плотность  $\rho_2 < \rho_1$ . Тогда в ( $\Omega$ ) установится стационарный процесс диффузии: через ( $S_1$ ) в ( $\Omega$ ) будет входить масса с некоторой интенсивностью  $Q$  единиц массы в единицу времени, а через ( $S_2$ ) масса будет с той же интенсивностью из ( $\Omega$ ) выходить. В силу линейности задачи значение  $Q$  будет прямо пропорциональным

$\rho_1 - \rho_2$ ,

$$Q = \mu(\rho_2 - \rho_1), \quad (4)$$

где коэффициент массопередачи  $\mu$  (в тепловых задачах аналогичную роль играет коэффициент теплопередачи) зависит только от физических характеристик среды и от геометрии<sup>43</sup>.

Если плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$  зависят от времени, но меняются достаточно медленно, так что в каждый момент распределение плотности достаточно близко к стационарному, то процесс называется *квазистационарным*. Для приближенного расчета таких процессов можно пользоваться формулой (4), полагая в ней коэффициент  $\mu$  таким же, как в стационарном случае.

## § 17 Примеры

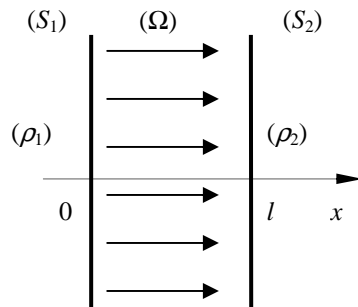


Рис. 98

Рассмотрим простейший пример, когда областью ( $\Omega$ ) служит часть пространства, заключенная между двумя параллельными плоскостями ( $S_1$ ) и ( $S_2$ ), расстояние между которыми равно  $h$  (рис. 98). Выбрав ось  $x$ , как на рис. 98, мы в силу (16.1) получим выражение для плотности

$$\rho = \rho_1 - (\rho_1 - \rho_2) \frac{x}{l}.$$

В данном примере суммарная интенсивность  $Q$  передачи массы бесконечна, и потому надо пользоваться потоком массы  $q$  (интенсивностью, в расчете на единицу площади):  $q = \tilde{\mu}(\rho_2 - \rho_1)$ . Но

$$q = -\kappa \frac{d\rho}{dx} = \frac{\kappa}{l}(\rho_1 - \rho_2), \text{ откуда } \tilde{\mu} = \frac{\kappa}{l}.$$

Таким образом, мы получаем еще один смысл коэффициента диффузии  $\kappa$ : это коэффициент массопередачи (§16) однородного потока, отнесенный к единице площади и единице длины ( $l = 1$ ).

Если  $l$  неограниченно возрастает, это решение переходит в  $\rho \equiv \rho_1$ ; влияние удаляющейся плоскости  $x = l$  в пределе сходит на нет. Коэффициент массопередачи

$$\tilde{\mu} = \frac{\kappa}{l},$$

рассчитанный на единицу площади, в пределе равен нулю, так как слой бесконечной толщины представляет собой непреодолимое препятствие для частиц. Все выводы, сделанные для этого примера, очевидно, относятся и к случаю, когда частицы диффундируют через прямой цилиндр, входя в него через одно основание и выходя через другое, если боковая поверхность этого цилиндра непроницаема для частиц (см. сноску на стр. 211).

В качестве другого примера рассмотрим диффузию между двумя соосными круговыми цилиндрами ( $S_1$ ):  $x^2 + y^2 = r_0'^2$  и ( $S_2$ ):  $x^2 + y^2 = R_0'^2$ , при граничных условиях

$$\rho|_{r'=r_0'} = \rho_1, \quad \rho|_{r'=R_0'} = \rho_2 \quad (r' = \sqrt{x^2 + y^2}). \quad (1)$$

В силу осевой симметрии задачи решение должно зависеть только от  $r'$ . Нетрудно переписать уравнение стационарной диффузии (16.1) для плотности  $\rho = \rho(r')$ . Для этого воспользуемся тем, что поток диффундирующей массы через поверхность  $x^2 + y^2 = r'^2$ ,  $0 \leq \zeta \leq z_0$  не должен зависеть от  $r'$  (почему?), откуда

<sup>43</sup> Таким образом, для стационарных задач рассматриваемого типа закон Ньютона точен; см. сноску на стр. 203. Отметим еще, что понятие коэффициента массопередачи имеет смысл и для случая, когда поверхности ( $S_1$ ) и ( $S_2$ ) не исчерпывают границы области ( $\Omega$ ), а в состав этой границы входит еще поверхность ( $S_3$ ), через которую частицы не проходят, т. е. на которой граничное условие имеет вид  $d\rho/dn|_{(S_3)} = 0$ .

$$\frac{d}{dr'} \left( z_0 \cdot 2\pi r' \cdot \kappa \frac{d\rho}{dr'} \right) = 0, \text{ т. е. } \frac{d}{dr'} \left( r' \frac{d\rho}{dr'} \right) = 0. \quad (2)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид  $\rho = C_1 \ln r' + C_2$ ; при граничных условиях (1) получаем решение

$$\rho = \rho_1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\ln(R'_0/r'_0)} \ln \frac{r'}{r'_0}.$$

Решение стремится к пределу  $\rho \equiv \rho_1$ , когда  $R'_0 \rightarrow \infty$ .

Подсчитаем в этом примере коэффициент массопередачи, отнесенный к единице высоты цилиндра. Поток массы, отнесенный к этой единице, равен

$$-2\pi r' \cdot \kappa \frac{d\rho}{dr'} = \frac{2\pi\kappa}{\ln(R'_0/r'_0)} (\rho_1 - \rho_2),$$

т. е. упомянутый коэффициент равен  $2\pi\kappa/\ln(R'_0/r'_0)$ . Подобно предыдущему примеру, он стремится к нулю при  $R'_0 \rightarrow \infty$ , хотя и гораздо медленнее.

Рассмотрим, наконец, центрально-симметричную стационарную диффузию между концентрическими сферами ( $S_1$ ):  $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$  и ( $S_2$ ):  $x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2$ , при граничных условиях

$$\rho|_{r=r_0} = \rho_1, \quad \rho|_{r=R_0} = \rho_2 \quad \left( r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right). \quad (3)$$

Здесь решение зависит только от  $r$ . Аналогично (2) получаем уравнение

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\rho}{dr} \right) = 0$$

с общим решением  $\rho = C_1/r + C_2$ . При граничных условиях (3) получаем решение

$$\rho = \frac{r_0 R_0 (\rho_1 - \rho_2)}{(R_0 - r_0)r} + \frac{R_0 \rho_2 - r_0 \rho_1}{R_0 - r_0}. \quad (4)$$

Коэффициент массопередачи равен

$$\mu = \frac{4\pi\kappa_0 R_0}{R_0 - r_0}. \quad (5)$$

Интересное новое обстоятельство обнаруживается при  $R_0 \rightarrow \infty$ : решение (4) переходит в решение

$$\rho = \frac{r_0 (\rho_1 - \rho_2)}{r} + \rho_2,$$

равное  $\rho_2$  на бесконечности; коэффициент массоотдачи (5) при этом уже не стремится к нулю, а имеет положительный предел. Если вспомнить, что уравнение диффузии описывает также и процесс распространения тепла в однородной теплопроводящей среде (при этом  $\rho$  означает температуру), то мы приходим к следующим выводам. Пусть температура окружающей среды принята за нулевую, и достаточно малым отклонением от этой температуры мы пренебрегаем. Тогда нагреватель конечных размеров имеет и зону обогрева конечных размеров – впрочем, тем большую, чем больше тепловой поток или, что то же, чем выше температура нагревателя. В отличие от этого нагреватель, бесконечно протяженный хотя бы в одном измерении, имеет тенденцию разогреть всю среду до его собственной температуры.

## Упражнение

- 1) Укажите решение уравнения (16.1) в каждой из рассмотренных областей, если через одну из поверхностей, ограничивающих область (левую в первом примере, внутреннюю в двух других), частицы поступают с заданной одинаковой интенсивностью, тогда как на другой поверхности частицы свободно исчезают.

## § 18 Задачи с порождением частиц

Рассмотрим теперь случай, когда в (вообще говоря, нестационарном) процессе одномерной диффузии в систему могут по заданному закону поступать новые частицы или система может терять частицы, причем, вообще говоря, во всех точках среды, в которой происходит диффузия. Можно себе представить, что в желоб, вдоль которого движутся шарики, подсыпают новые шарики или эти шарики убирают из желоба. Допустим, что частицы порождаются с пространственно-временной плотностью  $s(x, t)$ , т. е. за время  $t$  от  $t + dt$  на интервале от  $x$  до  $x + dx$  порождаются частицы общей массы  $s(x, t)dxdt$  (если  $s < 0$ , то частицы исчезают). Тогда, аналогично §1, нетрудно проверить, что уравнение диффузии, взамен (1.8), примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + s(x, t). \quad (1)$$

Решение этого уравнения при заданных начальных и граничных (если среда имеет границы) условиях особенно наглядно, если известна соответствующая функция влияния  $G(x, t; \xi, t_0)$  для задачи с начальным условием. В самом деле, пусть начальная плотность  $\rho_0(x)$  задана в момент  $t_0$ , а решение нас интересует в некоторый момент  $t > t_0$ . Тогда каждая порция  $s(\xi, \tau)d\xi d\tau$ , появившаяся в момент  $\tau$  ( $t_0 < \tau < t$ ) в точке  $\xi$ , диффундирует в дальнейшем по закону

$$d d\rho = G(x, t; \xi, t_0)s(\xi, \tau)d\xi d\tau.$$

Все эти «расползающиеся» порции накладываются на исходную плотность, которая также диффундирует, в результате чего мы получаем суммарное выражение для плотности:

$$\rho(x, t) = \int G(x, t; \xi, t_0)\rho_0(\xi)d\xi + \int d\xi \int G(x, t; \xi, t_0)s(\xi, \tau)d\tau.$$

Например, если рассматривается диффузия частиц на всей оси, то функция влияния задается формулой (6.3). Поэтому при наличии порождающихся частиц к уже найденному решению (6.4) надо добавить член, учитывающий это порождение, т. е.

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-(x-\xi)^2/4\kappa(t-\tau)} s(\xi, \tau)d\tau. \quad (2)$$

Рассмотрим, в частности, случай, когда частицы поступают в среду в одной точке  $a$  с определенной интенсивностью  $\varphi(t)$  единиц массы в единицу времени. Это означает, что надо положить  $s(x, t) = \varphi(t)\delta(x - a)$ , и потому при нулевом начальном условии из (2) получаем закон эволюции плотности

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-(x-a)^2/4\kappa(t-\tau)} \varphi(\tau)d\tau \quad (3)$$

(проверьте!). Этот интеграл, несобственный на верхнем пределе, зависит от  $x$  и  $t$  как от параметров: нетрудно проверить, что если функция  $\varphi$  – ограниченная, то этот интеграл – правильно и даже равномерно сходящийся (см., например, ЭПМ, §III.6) и потому зависимость  $\rho(x, t)$  – непрерывная, что, впрочем, очевидно и из физических соображений.

Но производная  $\partial\rho/\partial t$  будет при  $x = a$  разрывной, т. е. зависимость  $\rho$  от  $x$  имеет там излом! Для доказательства этого продифференцируем интеграл (3) по  $x$  как по параметру; мы получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi\kappa^3}} \int_{t_0}^t \frac{x-a}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-(x-a)^2/4\kappa(t-\tau)} \varphi(\tau)d\tau.$$

Будем считать, что  $\varphi(t) \equiv 0$  при  $t < t_0$ ; тогда нижний предел интегрирования можно положить равным  $-\infty$ . После замены  $\frac{|x-a|}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}} = s$  переменной интегрирования

получим (проверьте!)

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi \kappa}} \frac{x-a}{|x-a|} \int_{t_0}^t e^{-s^2} \varphi \left( t - \frac{(x-a)^2}{4\kappa s^2} \right) ds.$$

При малом  $|x-a|$  функция  $\varphi \left( t - \frac{(x-a)^2}{4\kappa s^2} \right)$  может принимать значения, далекие от  $\varphi(t)$ ,

только для малых  $s$ , поэтому при вычислении интеграла ее можно заменить на  $\varphi(t)$ . Таким образом,

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=a-0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi \kappa}} (-1) \int_{t_0}^{\infty} e^{-s^2} \varphi(t) ds = \frac{\varphi(t)}{2\kappa}, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=a+0} = -\frac{\varphi(t)}{2\kappa}. \quad (4)$$

Этот результат очевиден физически. В самом деле, производная  $\partial \rho / \partial x$  связана с потоком  $q$  массы формулой  $\partial \rho / \partial x = -q / \kappa$  (см. (1.7)). Так как из частиц, поступающих в среду, половина идет направо, а половина налево, мы приходим к формулам (4). Из сказанного вытекает еще одна возможность истолкования функции Грина  $G(x, t; \xi, t_0)$ . До сих пор мы считали, что она определена лишь при  $t > \tau$ , положим дополнительно, что для  $t < \tau$  ее значения равны нулю. Тогда эта функция при фиксированных  $\xi, \tau$  равна плотности диффундирующей массы в следующем процессе: при  $t < \tau$  массы в системе не было, а в момент  $t = \tau$  в систему в точке  $x = \xi$  внесена единичная масса, которая затем свободно диффундирует. Поэтому функция Грина является решением уравнения

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \delta(x - \xi) \delta(t - \tau)$$

для всех значений  $t$  ( $-\infty < t < \infty$ ) и для значений  $x$  отвечающих области, в которой происходит диффузия; она удовлетворяет нулевому начальному условию при  $t = -\infty$  и, если область ограничена, – то однородному граничному условию, описывающему граничный режим (например, если через конец  $x = a$  среда не диффундирует, – то граничному условию  $\left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=a} = 0$ , и т. д.).

Частицы могут поступать также через края среды. Пусть, например, рассматривается диффузия частиц на полуоси  $0 \leq x < \infty$ , причем через точку  $x = 0$  на полуось поступают частицы с заданным потоком  $s_0(t)$ . Задача о построении плотности среды из частиц здесь состоит в решении однородного уравнения диффузии (1.8) при неоднородном граничном условии 2-го рода

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{1}{\kappa} s_0(t) \quad (t_0 \leq t < \infty).$$

Эта задача решается весьма просто. В самом деле, порция частиц  $s_0(\tau) d\tau$ , появившаяся в момент  $\tau$  в точке  $x = 0$ , диффундирует в дальнейшем по закону (см. формулу (11.15))

$$d\rho = G_2(x, t; 0, \tau) s_0(\tau) d\tau = 2G(x, t; 0, \tau) s_0(\tau) d\tau.$$

Суммируя результаты, получаем добавку к решению (11.15)

$$\rho_{\text{доп}}(x, t) = 2 \int_{t_0}^t G(x, t; 0, \tau) s_0(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa}} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-x^2/4\kappa(t-\tau)} s_0(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Этот результат вытекает и из формулы (3) на основе метода отражения (продумайте это!).

Пусть, например, частицы поступают с постоянной интенсивностью, т. е.

$s_0(t) \equiv s_0 = \text{const}$ , а в начальный момент  $t = 0$  в системе частиц не было. Тогда получаем плотность

$$\begin{aligned}
\rho(x,t) &= \frac{s_0}{\sqrt{\pi\kappa}} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-x^2/4\kappa(t-\tau)} d\tau \Big|_{t-\tau=1/p^2} = \frac{2s_0}{\sqrt{\pi\kappa}} \int_{1/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{p^2} e^{-x^2 p^2/4\kappa} dp = \\
&= \frac{2s_0}{\sqrt{\pi\kappa}} \left[ -\frac{1}{p} e^{-x^2 p^2/4\kappa} \Big|_{p=1/\sqrt{t}}^{\infty} - \int_{1/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{2x^2}{4\kappa} e^{-x^2 p^2/4\kappa} dp \right] \Big|_{\frac{xp}{\sqrt{2\kappa}}=q} = \\
&= \frac{2s_0}{\sqrt{\pi\kappa}} \left\{ \sqrt{t} e^{-x^2/4\kappa} - \frac{x}{\sqrt{2\kappa}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\kappa t}}\right) \right] \right\} = 2s_0 \sqrt{\frac{t}{\pi\kappa}} e^{-x^2/4\kappa} - \frac{s_0 x}{\kappa} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\kappa t}}\right) \right],
\end{aligned}$$

где  $\Phi$  – интеграл вероятностей. В частности,  $\rho|_{x=0} = 2s_0 \sqrt{\frac{t}{\pi\kappa}}$ .

Неограниченное увеличение плотности при  $t \rightarrow \infty$  объясняется тем, что поступление частиц в систему пропорционально времени  $t$ , тогда как средний пробег их пропорционален  $\sqrt{t}$ , так что частицы не успевают «рассасываться».

Для точечного источника постоянной интенсивности на плоскости плотность при  $t \rightarrow \infty$  также неограниченно возрастает в каждой точке. В отличие от этого, для пространственного источника интенсивности  $s_0$ , расположенного в начале координат,

распределение плотностей при  $t \rightarrow \infty$  стремится к стационарному  $\rho = \frac{s_0}{4\pi\kappa r}$ , где  $r$  –

длина радиуса-вектора. (Продумайте это различие, исходя из соображений, высказанных в §17.) При этом масса среды в каждой конечной части пространства остается конечной, но масса  $M$  во всем пространстве неограниченно возрастает,  $M = s_0(t - t_0)$ .

Рассмотрим попутно схожую с предыдущей задачу о решении однородного уравнения диффузии при неоднородном граничном условии 1-го рода:

$$\rho|_{x=0} = \rho_0(t) \quad (t_0 \leq t \leq \infty).$$

При математическом решении этой задачи применим метод переменной системы отсчета, который состоит в том, что плотность отсчитывается от некоторого значения, зависящего от  $x$  и  $t$ , другими словами, вводится новая неизвестная функция  $\tilde{\rho} = \rho - \varphi(x,t)$ , причем функция  $\varphi$  (начало отсчета) подбирается так, чтобы граничное условие для  $\rho$  стало однородным. Например, в рассматриваемой задаче можно просто положить  $\varphi = \rho_1(t)$ . Подстановка выражения  $\rho = \tilde{\rho} + \varphi$  в дифференциальное уравнение, начальное и граничное условия для  $\rho$  приводят к соответствующим соотношениям для  $\tilde{\rho}$  (проверьте!):

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} - \rho_1'(t), \quad \tilde{\rho}|_{t=t_0} = \rho_0(x) - \rho_1(t_0), \quad \tilde{\rho}|_{x=0} = 0.$$

Таким образом, для  $\tilde{\rho}$  получилось неоднородное уравнение диффузии с однородным граничным условием; соответствующая задача была решена в этом параграфе выше:

$$\tilde{\rho} = \int_0^{\infty} G_1(x,t;\xi,t_0) [\rho_0(\xi) - \rho_1(t_0)] d\xi + \int_0^t d\xi \int_{t_0}^{\xi} G_1(x,t;\xi,\tau) [-\rho_1(\tau)] d\tau,$$

где ядро  $G_1$  определено формулой (11.6). Воспользовавшись формулой

$$\int_0^{\infty} G_1(x,t;\xi,t_0) d\xi = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\kappa(t-t_0)}}\right)$$

(см. (11.8)), получаем

$$\rho = \rho_1(t) + \int_0^{\infty} G_1(x,t;\xi,t_0) \rho_0(\xi) d\xi - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\kappa(t-t_0)}}\right) \rho_1(t_0) - \int_{t_0}^t \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}}\right) \rho_1'(\tau) d\tau.$$

Интегрирование по частям последнего интеграла и простые преобразования, которые

мы предоставляем читателю, приводят к окончательной формуле

$$\rho = \int_0^{\infty} G_1(x, t; \xi, t_0) \rho_0(\xi) d\xi + \frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^3}} e^{-x^2/4\kappa(t-\tau)} \rho_1(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Ядром в последнем слагаемом служит, с точностью до коэффициента пропорциональности, дипольное решение (11.9).

Примененный выше метод переменной системы отсчета широко используется и в других задачах для приведения неоднородных граничных условий к однородным. Отметим, что при  $\rho_0(\xi) \equiv 0$ ,  $\rho_1(t) = At^n$  ( $n > -1$ ) решение (6) является автомодельным. Мы предоставляем проверить это читателю. Для этого надо положить для простоты  $t_0 = 0$  и показать, что для любого  $\alpha > 0$  можно подобрать такие  $\beta$  и  $\gamma$ , что имеет место тождество  $\rho(\beta x, \alpha t) \equiv \gamma \rho(x, t)$ . Аналогичным свойством обладает решение (5).

Покажем теперь применение к задачам с порождением частиц метода Фурье.

Рассмотрим неоднородное уравнение диффузии (1) на отрезке  $0 \leq x \leq l$  при однородных граничных условиях 1-го рода  $\rho|_{x=0} = \rho|_{x=l} = 0$ , ограничившись для простоты нулевым начальным условием  $\rho|_{t=0} = 0$ .

Основная идея метода состоит в разложении всех участвующих функций в ряд по системе собственных функций, отвечающих однородному уравнению. В §13 мы показали, что в рассматриваемой задаче собственными функциями служат функции  $\sin \frac{m\pi}{l} x$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ). Таким образом, надо воспользоваться рядом

$$s(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m(t) \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad (7)$$

в котором коэффициенты

$$S_m(t) = \frac{2}{l} \int_0^l s(x, t) \sin \frac{m\pi}{l} x ds \quad (8)$$

– заданные функции, а также рядом

$$\rho(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t) \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad (9)$$

коэффициенты  $R_m$  которого подлежат определению.

Подставляя разложения (7) и (9) в уравнение (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$R'_m(t) = -\lambda_m R_m(t) + S_m(t) \left( \lambda_m = \frac{\kappa m^2 \pi^2}{l^2} \right), \quad (10)$$

которым должны удовлетворять искомые коэффициенты как функции  $t$ .

Удовлетворение граничным условиям обеспечено самой структурой формулы (9); начальное условие  $\rho|_{t=0} = 0$ , в силу (9), означает, что все  $R_m(0) = 0$ .

Поэтому нам нужно найти решение уравнения (10), удовлетворяющее нулевому начальному условию. Это уравнение того же типа, что (II.2.2), и потому при его решении можно воспользоваться формулой (II.2.6), которая в рассматриваемом случае примет вид

$$R_m(t) = \int_0^t e^{-\lambda_m(t-\tau)} S_m(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Итак, решение представляет собой сумму ряда (9), коэффициенты которого определяются формулой (11).

Пусть, например, частицы поступают на отрезок с постоянной интенсивностью, т. е.  $s(x, t) \equiv s_0 = \text{const}$ . Тогда в силу формулы (8) получаем



$$S_m = \frac{2}{m\pi} (1 - \cos m\pi) s_0 = \frac{2}{m\pi} [1 - (-1)^m] s_0,$$

а потому, согласно (11) и (9),

$$\begin{aligned} R_m(t) &= \frac{2}{m\pi} [1 - (-1)^m] s_0 \frac{l^2}{\kappa m^2 \pi^2} (1 - e^{-\lambda_m t}), \\ \rho(x, t) &= \frac{2l^2 s_0}{\kappa \pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^m}{m^3} (1 - e^{-\lambda_m t}) \sin \frac{m\pi}{l} x = \\ &= \frac{4l^2 s_0}{\kappa \pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} (1 - e^{-\lambda_{2k-1} t}) \sin \frac{(2k-1)\pi}{l} x. \end{aligned} \quad (12)$$

Нетрудно получить асимптотическое поведение плотности при  $t \rightarrow \infty$ : из (12) сразу следует, что

$$\rho(x, t) = \frac{4l^2 s_0}{\kappa \pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin \frac{(2k-1)\pi}{l} x. \quad (13)$$

Можно было бы проверить, что выражение (13) представляет собой разложение функции  $\frac{s_0}{2\kappa} x(l-x)$  в ряд по собственным функциям (ряд Фурье). Но в этом легче убедиться, исходя из следующих общих соображений.

Ясно, что если порождение частиц стационарно, т. е. если в уравнении (1)  $s = s(x)$ , то в результате *процесса установления*, т. е. предельного перехода при  $t \rightarrow \infty$  из нестационарного распределения плотности получается стационарное  $\rho = \rho(x)$ , которое должно удовлетворять предельному уравнению (1)

$$\kappa \frac{d^2 \rho}{dx^2} + s(x) = 0 \quad (14)$$

и поставленным граничным условиям. Это дает возможность получать предельный закон для нестационарного распределения, не исследуя само это нестационарное распределение, а решая предельную стационарную задачу. Так, в последнем примере предельное распределение плотности  $\rho|_{t=\infty}$  должно удовлетворять уравнению и граничным условиям

$$\frac{d^2 \rho}{dx^2} = -\frac{1}{\kappa} s_0 \quad (0 \leq x \leq l), \quad \rho|_{x=0} = \rho|_{x=l} = 0.$$

Интегрируя уравнение два раза и подбирая постоянные интегрирования из граничных условий, мы легко приходим (проверьте!) к уже указанному решению  $\rho = \frac{s_0}{2\kappa} x(l-x)$ .

При рассмотрении диффузии с порождением частиц в пространстве аналогом уравнения (1) будет

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \rho + s(x, t), \quad (15)$$

а аналогом уравнения (14) для стационарного распределения –

$$\kappa \nabla^2 \rho + s(x) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \nabla^2 \rho = -\frac{1}{\kappa} s(x). \quad (16)$$

Это – уравнение Пуассона (ЭПМ, §X.9). При решении его в ограниченной области (и) на границе (5) этой области должно быть задано граничное условие, например, вида (16.2) или (16.3). При этом для граничного условия (16.3), т. е. когда на границе задана плотность ввода частиц в систему, должно выполняться очевидное требование баланса

$$\int_{(\Omega)} s d\Omega + \int_{(S)} \psi dS = 0,$$

а решение определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

## Упражнения

- 1) Найдите закон изменения плотности частиц на полуоси  $0 \leq x < \infty$ , с конца  $x = 0$  которой частицы свободно исчезают, если в точке  $x = a > 0$  в систему, начиная с момента  $t = 0$ , поступают частицы с постоянной интенсивностью  $s_0$  (в момент  $t = 0$  в системе частиц не было). Найдите асимптотическое поведение этого закона при  $t \rightarrow \infty$ .
- 2) Рассмотрите аналогичную задачу на оси  $-\infty < x < \infty$  при  $a = 0$  и объясните полученный асимптотический закон.
- 3) Рассмотрите аналогичную задачу на отрезке  $0 \leq x \leq l$ , если  $a = l$ .
- 4) Укажите, решением какого уравнения служит  $\int_{t_0}^{\infty} \rho dt$ , где  $\rho$  – решение уравнения (15), удовлетворяющее заданному начальному условию при  $t = t_0$ . Примените полученный результат к уравнению для функции Грина и проверьте его для функции Грина в пространстве  $G(P, t; Q, \tau) = (2\sqrt{\pi\kappa(t-\tau)})^{-3} e^{-PQ^2/4\kappa(t-\tau)}$  (см. конец §5).
- 5) Пусть функция  $r(x, y, z, t)$  удовлетворяет уравнению (15) во всем пространстве; какому уравнению удовлетворяет  $\sigma(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho dy dz$  ?

## § 19 Диффузия в силовом поле

Вернемся к дискретной одномерной схеме блуждания, рассмотренной в §1, и допустим, что на систему наложено силовое поле  $F(x)$ . Это поле «подгоняет» частицы в определенную сторону, но так как система имеет статистический характер, то оно сказывается лишь на вероятностях перескока частицы из любого узла в соседние узлы налево и направо. Естественно принять, что пока эти вероятности мало отличаются от  $1/2$ , разность между ними пропорциональна «подгоняющей» силе.

Будем пользоваться теми же обозначениями, что в §1. Если дополнительно обозначить через  $\alpha$  и  $\beta$  вероятности перескока частицы в соседние узлы соответственно направо и налево ( $\alpha + \beta = 1$ ), то для потока массы, взамен (1.3), получится выражение

$$q_{j+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} = \frac{m_0}{\tau} (\alpha N_{jn} - \beta N_{j+1, n}).$$

Отсюда, переходя к непрерывной модели, мы взамен (1.5) придем к формуле

$$q(x, t) = \frac{h}{\tau} \left[ \alpha \rho \left( x - \frac{h}{2}, t \right) - \beta \rho \left( x + \frac{h}{2}, t \right) \right] = \frac{h(\alpha - \beta)}{\tau} \rho - \frac{\alpha + \beta}{2} \frac{h^2}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (1)$$

Пусть теперь  $h \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow 0$ , причем, как и в §1,  $\tau \sim h^2$ . Тогда из формулы (1) видно, что для того, чтобы получить в пределе процесс, в котором проявляются как диффузия, так и силовое поле,  $\alpha - \beta$  должно иметь порядок  $h$ . Учитывая связь этой разности с полем, о чем говорилось в первом абзаце, мы можем написать

$$\alpha - \beta = \gamma h F(x), \quad (2)$$

где  $\gamma$  – некоторый коэффициент пропорциональности. Из (2) следует, в частности, что  $\alpha \rightarrow 1/2$ ,  $\beta \rightarrow 1/2$  при  $h \rightarrow 0$ . Обозначая, как в §1,  $\kappa = h^2/2\tau$ , мы получаем из (1) в пределе

$$q = 2\gamma\kappa F(x)\rho - \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (3)$$

Мы видим, что в выражение для потока массы, по сравнению с (1.7), добавился член, пропорциональный как плотности, так и напряженности силового поля. Это «переносный» член, возникший из-за того, что поле «подгоняет» частицы. Кроме того, в выражении для потока остается член, пропорциональный градиенту плотности и отражающий диффузию частиц.

Имея выражение для потока массы, по обычному правилу составляем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - 2\gamma\kappa \frac{\partial(F\rho)}{\partial x}. \quad (4)$$

Таким образом, и здесь по сравнению с уравнением диффузии (1.8) появился дополнительный член. Если бы первого члена в правой части, отражающего диффузию, здесь не было, то в силу §I.7 это уравнение описывало бы среду, движущуюся со скоростью

$$v = 2\gamma\kappa F \quad (5)$$

в положительном направлении оси  $x$ .

Рассмотрим более подробно случай однородного поля, т. е.  $F(x) \equiv F = \text{const}$ . Тогда уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - 2\gamma\kappa F \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (6)$$

Перейдя к соответствующей лагранжевой переменной  $\xi = x - vt$ , получим

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\xi} - \left. \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right|_t, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_t = \left. \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right|_t, \quad \left. \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right|_t = \left. \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} \right|_t;$$

поэтому уравнение (6) в переменных Лагранжа переписывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

т. е. мы получаем обычный процесс диффузии.

Пусть сила  $F$  есть действие электрического поля на заряженные ионы в водном растворе. Диффузия накладывается на упорядоченное движение ионов относительно воды с определенной постоянной скоростью (5). Отношение этой скорости к силе, действующей на частицу, т. е.  $v/F$ , называется *подвижностью*  $z$  частиц. Размерность подвижности равна

$$[z] = \frac{[v]}{[F]} = \frac{[l][t]}{[l][m][t]^2} = [m]^{-1}[t].$$

Остановимся еще на возможном равновесном распределении частиц в общем случае  $F = F(x)$ . Так как при равновесии поток массы равен нулю, то из выражения (3) получаем, что при таком распределении

$$\frac{d\rho}{dx} - 2\gamma F(x)\rho = 0.$$

Отсюда

$$\rho = \rho_0 \exp\left(2\gamma \int_{x_0}^x F(s) ds\right). \quad (7)$$

В частности, если  $F(x) \equiv F_0 < 0$ , то  $\rho = \rho_0 e^{-2\gamma F_0(x-x_0)}$ . Такой вид имеет закон изменения плотности в атмосфере в зависимости от высоты  $x$ , если отвлечься от влияния изменения температуры.

Пусть причиной, вызывающей перескоки частиц, является хаотическое тепловое движение при температуре  $\tilde{\vartheta}$ . Тогда можно показать, что плотность частиц распределяется по формуле Максвелла – Больцмана, т. е. пропорциональна  $e^{-E/\vartheta}$ , где  $E$  – полная энергия частицы,  $\vartheta = k\tilde{\vartheta}$ , а  $k$  – постоянная Больцмана (см. конец §IV.6).

Естественно предположить, что отношение  $\alpha/\beta$  вероятностей скачка направо и налево в силовом поле  $F(x)$  равно  $e^{\Delta E/\vartheta}$ , где  $\Delta E$  есть изменение энергии, т. е. произведение  $hF(x)$  (в трехмерном случае  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{F}(x)$ ). Отсюда в силу формулы (2)

$$\gamma = \frac{\alpha - \beta}{hF} = \frac{\alpha/\beta - 1}{hF} \beta = \frac{hF/\vartheta}{hF} \frac{1}{2} = \frac{1}{2\vartheta}.$$

Подставляя в (7), убеждаемся в том, что при сделанном предположении об отношении  $\alpha/\beta$  получается стационарное решение

$$\rho = \rho_0 \exp\left(2\gamma \int_{x_0}^x F(s) ds\right) = \rho_0 e^{-U(x)/\vartheta}.$$

Попутно из формулы (6) можно получить соотношение Эйнштейна между подвижностью  $z$  частиц и коэффициентом диффузии

$$z = 2\gamma\kappa = \frac{\kappa}{k\vartheta}. \quad (8)$$

Это соотношение сыграло роль в становлении молекулярно-кинетической теории, когда А. Эйнштейн смело применил его к диффузии больших молекул – конкретно, сахара, растворенного в воде.

Представим себе, что молекулы сахара представляют собой шарики радиуса  $r_0$ . Известно, что при движении маленького шарика со скоростью  $v$  в вязкой жидкости действующая на него сила определяется законом Стокса

$$F = 6\pi\eta r_0 v, \quad (9)$$

где коэффициент вязкости  $\eta$  для воды равен  $0,0135 \text{ г/см}\cdot\text{сек}$ . Следовательно, подвижность шариков

$$z = \frac{v}{F} = \frac{1}{6\pi\eta r_0}. \quad (10)$$

С другой стороны, известен коэффициент диффузии растворенного сахара

$$\kappa = 0,33 \frac{\text{см}^2}{\text{сутки}} = 3,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}.$$

Поэтому формулы (8) и (10) определяют соотношение между  $r_0$  и постоянной Больцмана  $k$ . Другое соотношение между  $r_0$  и  $k$  можно получить, учитывая влияние концентрации растворенного сахара на вязкость раствора (на теории этого мы не останавливаемся). Исходя из этих данных, А. Эйнштейн в своей диссертации 1906 г. на соискание ученой степени доктора философии получил радиус молекулы  $r_0 = 4,9 \cdot 10^{-8} \text{ см}$  и отсюда число Авогадро  $A = 6,56 \cdot 10^{23}$ . Это было одним из первых определений числа Авогадро; отметим, что по современным данным оно равно  $6,02 \cdot 10^{23}$ .

Вернемся к рассмотрению общих свойств диффузии. Оказывается, что саму диффузию можно интерпретировать как движение вещества под действием силы давления. Для

этого припишем веществу давление  $p = nk\tilde{v} = \frac{\rho\vartheta}{m_0}$ , где  $n$  – плотность числа молекул, а

$m_0$  – масса одной молекулы. Тогда сила, действующая на молекулу, равна

$$-\frac{dp}{ndx} = -\frac{\vartheta}{n} \frac{dn}{dx}.$$

Предположим, что эта сила действует на молекулы так же, как «настоящая» внешняя сила. Тогда молекулы будут дрейфовать со средней скоростью

$$v = zF = -\frac{z\vartheta}{n} \frac{dn}{dx}.$$

При этом поток массы частиц будет равен

$$q = v\rho = vm_0 n = -z\vartheta \frac{dn}{dx} m_0 = -z\vartheta \frac{d\rho}{dx}.$$

Учитывая связь между  $z$  и  $\kappa$ , получаем, что  $q = \kappa \frac{d\rho}{dx}$ , т. е. мы приходим к тому же

выражению для потока, что в §1.

При таком подходе очень любопытна возможность отвлечься от случайных скачков молекул и рассматривать их среднее движение как дрейф под действием одного лишь давления, если внешней силы нет, или суммарного действия давления и внешних сил в общем случае. Особенно просто при этом выглядит равновесие: градиент давления должен уравновесить внешнюю силу, т. е.

$$-n \frac{dU}{dx} - \frac{d}{dx}(nk\tilde{\vartheta}) = 0, \text{ откуда } n \sim e^{-U/k\tilde{\vartheta}}.$$

В настоящее время соотношение между коэффициентом диффузии и подвижностью используется иначе, чем во времена Эйнштейна. Число Авогадро  $A$  и постоянная Больцмана  $k$  известны с точностью лучше чем 0,1%. Атомная теория не нуждается больше в дополнительных подтверждениях. Упомянутое выше соотношение (8) применяется теперь для вычисления коэффициента диффузии.

Рассмотрим шарик микроскопических размеров, диаметром  $10^{-4}$  см, находящийся в воде. Хорошо известно, что такой шарик совершает броуновское движение. (Это название дано по имени английского ботаника Броуна, обнаружившего при микроскопическом исследовании клеток растений, что мельчайшие видимые частицы находятся в непрерывном хаотическом движении. Это движение оказалось не связанным с жизнью клетки, позже такое же движение было наблюдаемо в «мертвых» растворах.) Средняя кинетическая энергия  $T$  поступательного движения частицы – такая же, как для любой молекулы:  $T = \frac{3}{2}k\tilde{\vartheta}$ . Отсюда легко найти и среднюю скорость:

$$\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{3}{2}k\tilde{\vartheta}, \text{ т. е. } v = \sqrt{\frac{3k\tilde{\vartheta}}{m_0}}. \quad (11)$$

Для частицы диаметра  $10^{-4}$  см и плотности  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup> – получаем  $m_0 = 5 \cdot 10^{-13}$  г, откуда при  $\tilde{\vartheta} = 300^\circ\text{K}$  ( $=27^\circ\text{C}$ , это комнатная температура) получаем  $v = 0,5$  см/сек.

Но знание скорости частицы или, точнее, ее среднеквадратичной скорости явно недостаточно для полной характеристики движения. Среднее перемещение частицы за большое время  $t$  отнюдь не равно  $vt$ , так как скорость не остается постоянной по направлению; среднее перемещение пропорционально корню квадратному из времени  $\sqrt{(\Delta r)^2} = \sqrt{6\kappa t}$  (см. §8 с естественной поправкой на трехмерность задачи). Напомним еще раз схему диффузии: скорость в среднем меняется по направлению через промежуток времени  $\tau$ , т. е. частица движется отдельными шагами длины  $h = v\tau$ , причем направления последовательных шагов не коррелированы. За время  $t$  происходит  $t/\tau$  шагов, при каждом из них средний квадрат перемещения равен  $(v\tau)^2$ . Так как при независимых случайных перемещениях их средние квадраты складываются, то

$$\overline{(\Delta r)^2} = (t/\tau)(v\tau)^2 = v^2 t = 6\kappa t \quad \left( \kappa = \frac{h^2}{6\tau} = \frac{1}{6}v^2\tau \right).$$

Трудной задачей является именно определение  $\tau$ . Изменение-скорости частицы происходит, очевидно, вследствие ее взаимодействия с молекулами воды, которые, в свою очередь, взаимодействуют между собой. Поэтому прямое вычисление  $\tau$  (или  $\kappa$ ) для данной частицы представляет собой безнадежно трудную задачу. Здесь и приходит на помощь соотношение Эйнштейна.

Поведение большой, «макроскопической» частицы в воде – т. е. частицы, которая не чувствует ударов отдельных молекул воды, – подчиняется уравнениям гидродинамики. В эти уравнения входит коэффициент  $\eta$  вязкости воды. Подвижность частицы, т. е. ее скорость под действием единичной силы выражается (см. формулу (10)) через  $\eta$ , следовательно, через  $\eta$  выражаются и коэффициент диффузии  $\kappa$  и характерное время  $\tau$ . Таким образом, все сведения о взаимодействии молекул воды между собой, необходимые для расчета поведения частицы, свелись к одной характерной величине  $\eta$ .

Эту величину можно измерить, например, исследуя течение воды по трубе, т. е. способом, совершенно не связанным с опытом над малыми частицами.

Из формул (8), (10), (11), а также  $\kappa = \frac{1}{2}v^2\tau$  легко вывести, что

$$\tau = \frac{m_0}{3\pi\eta r_0} \quad (12)$$

(проверьте!), где  $m_0$  – масса частицы, а  $r_0$  – ее радиус. По этой формуле и можно подсчитать среднее время между изменениями скорости частицы. Так, при  $r_0 = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ ,  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$  (см. выше) получаем  $\tau = 0,8 \cdot 10^{-7} \text{ сек}$ ,  $\kappa = 0,3 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2/\text{сек}$ . К выражению вида (12) можно прийти и с помощью непосредственного рассмотрения задачи о затухании скорости большого тела в жидкости (в рамках гидродинамики, т. е. без учетов флуктуации, ударов молекул). Из формулы (9) получаем

$$m_0 \frac{dv}{dt} = -6\pi\eta r_0 v,$$

откуда

$$v = v_0 e^{-6\pi\eta r_0 t / m_0}.$$

Если определить характерное время  $\tau_0$  как время, за которое скорость уменьшится в  $e$  раз, то мы получим

$$e^{6\pi\eta r_0 \tau_0 / m_0} = e, \text{ откуда } \tau_0 = \frac{m_0}{6\pi\eta r_0}.$$

Полученное выражение отличается от (12) только добавочным делителем 2.

Теория диффузии и подвижности частиц была создана Эйнштейном в 1905 г. Она сыграла важную роль в становлении атомно-молекулярной теории, в защите этой теории от нападок школы Оствальда, который ошибочно считал «ненаблюдаемые» атомы символами, имеющими лишь педагогическую ценность для облегчения запоминания химических формул, и полагал, что термодинамический подход достаточен для получения всех доступных наблюдению величин.

В работе Эйнштейна используется важнейший общий принцип современной науки – *принцип соответствия*, согласно которому учет новых обстоятельств, дальнейшее развитие теории не отменяет результатов старой теории, но лишь ограничивает область ее применения. (В данной работе этот принцип еще явно не сформулирован, но таково общее правило – законы сперва открывают и применяют в частных случаях и лишь позже, и притом иногда другие люди дают этим законам четкие формулировки и звучные названия.)

В самом деле, задумаемся в картину движения частицы под действием малой силы. Пусть при тех же размерах, что выше, плотность частицы равна  $1,1 \text{ г/см}^3$ , так что по закону Архимеда сила, вызывающая погружение частицы в воду, равна

$$981 \cdot \frac{4}{3} \pi (0,5 \cdot 10^{-4})^3 \cdot 0,1 = 5 \cdot 10^{-11} \text{ дин.}$$

Под действием этой силы частица погружается со скоростью, которая в силу формулы (9) равна  $0,4 \cdot 10^{-6} \text{ см/сек}$ . Эта скорость в  $10^5$  раз меньше скорости хаотического движения, но тем не менее Эйнштейн уверен в том, что в среднем за большой интервал времени гидродинамическое движение имеет место! Таким образом, для усредненного по времени движения частиц гидродинамика не отменяется, но она может быть дополнена картиной мгновенного движения на малых отрезках времени.

Принцип соответствия Эйнштейн позже с успехом применил, развивая квантовую теорию света и теорию относительности (как специальную, так и общую); этот принцип применяли и создатели современной квантовой механики.

Возвращаясь к частице в воде, приведем наглядное сравнение из одной американской статьи тридцатых годов. Представьте себе огромного быка, связанного длинной

веревкой с осликом. Бык совершает могучие хаотические прыжки и маленький ослик не в силах им помешать. Но «у ослика есть идея» – он хочет домой в родной загон; и в конце концов он приведет быка туда. Подставьте тепловое движение на место прыжков быка, а силу тяжести, систематически действующую в одном направлении, на место «идеи» ослика – и Вы получите наглядное представление о движении маленькой частицы в поле тяжести (или иона в газе или в растворе под действием электрического поля).

## Упражнение

- 1) Укажите решение уравнения (4) на всей оси  $x$  при начальном условии  $\rho|_{t=0} = \rho_0(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ).

## § 20 Диффузия в импульсном пространстве

Продолжим рассмотрение частицы, подвергающейся действию случайных сил. Согласно уравнениям механики сила создает ускорение частицы. Поэтому при строгом рассмотрении сначала находят, как меняется с течением времени скорость частицы, а уже после этого определяют закон изменения координаты.

Чтобы лучше понять соотношение между предыдущим изложением (§19) и данным параграфом, вспомним, как в начале книги мы рассматривали движение частиц с заданной скоростью и лишь после этого – движение частиц с заданным ускорением. Так и в теории диффузии мы сперва задавались определенными вероятностями изменения координаты, т. е. задавали (вероятностно) скорости; ниже мы будем задавать ускорения.

Итак, мы намерены рассмотреть задачу, основное уравнение которой имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = F,$$

где  $F$  – случайная сила, отнесенная к единице массы частиц. В правую часть удобно сразу включить и внешнюю детерминированную (т. е. не случайную) силу  $F_0$ , постоянную или медленно, плавно меняющуюся со временем. Тогда уравнение движения примет форму

$$\frac{dv}{dt} = F + F_0.$$

Какие предположения следует сделать относительно случайной силы? В аналогичной задаче, рассматривая случайные изменения координаты, можно было писать

$$\frac{dx}{dt} = X \text{ или } X + X_0.$$

При этом можно было предполагать, что  $X$  – величина, характеризующая случайные перемещения, – не зависит от координаты  $x$ . Для силы  $F$  подобное предположение неразумно, можно ожидать, что

$$F = F' - \alpha v, \tag{1}$$

где  $\overline{F'} = 0$ , так что  $\overline{F} = -\alpha v$  (черта означает среднее по времени).

В самом деле, если частица движется в среде с некоторой скоростью  $v$ , то она чаще и сильнее будет сталкиваться с молекулами среды, летящими навстречу, чем с молекулами, летящими вдогонку. Значит, случайная сила зависит от скорости! Только выделив член  $-\alpha v$ , получим «вполне случайную» силу<sup>44</sup>, в среднем равную нулю как при  $v = 0$ , так и при  $v \neq 0$ . Принцип относительности Галилея при этом не нарушается, так как рассматривается частица в среде, причем выбрана система координат, в которой среда покоится.

<sup>44</sup> Сравните с понятиями «дамы просто приятной» и «дамы, приятной во всех отношениях», введенными Гоголем в «Мертвых душах».

Коэффициент  $\alpha$  играет роль коэффициента трения. При отсутствии внешней силы средняя скорость затухает, стремясь к нулю:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} = \bar{F}' - \alpha\bar{v} = -\alpha\bar{v},$$

откуда

$$\bar{v} = \bar{v}_0 e^{-\alpha t}. \quad (2)$$

При наличии внешней силы средняя скорость стремится к  $\bar{v} = F_0/\alpha$ , так что  $1/\alpha$  играет роль подвижности – отношения скорости к силе (см. §19).

Обратимся к интегрированию уравнения движения. Ясно, что нельзя искать ответ в виде какой-то определенной функции  $v(t)$ , так как повторяя опыт 100 раз, мы получим 100 разных функций. На примере задачи, разобранный в предыдущих параграфах, мы уже знаем, что надо делать: будем рассматривать не одну частицу, а ансамбль частиц, будем изучать не одну траекторию, а совокупность огромного числа траекторий, и для этого введем понятие плотности  $n$  распределения числа частиц, т. е. плотности математического ожидания числа частиц. Раньше рассматривалась плотность  $n(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}$  – радиус-вектор в пространстве координат, но теперь нужно ввести фазовую плотность  $n(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  (в гл. IV она обозначалась буквами  $n^\Phi$ ).

Случайные перемещения, равновероятные во все стороны, давали в выражении потока числа частиц и в уравнении для  $n(\mathbf{x})$  (напомним, что  $n = \rho/m_0$ , где  $\rho$  – плотность) диффузионные члены:

$$\mathbf{q}_x = -\kappa \text{grad}_x n, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{q}_x = \text{div}(\kappa \text{grad} n) = \kappa \Delta n \quad (\Delta = \nabla^2).$$

По аналогии ясно, что вполне случайная сила даст аналогичные члены в пространстве скоростей:

$$\mathbf{q}_v = -\kappa' \text{grad}_v n, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = \kappa' \Delta_v n,$$

где

$$\Delta_v n = \nabla_v^2 n = \frac{\partial^2 n}{\partial v_x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial v_y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial v_z^2},$$

а  $\kappa'$  – коэффициент диффузии в пространстве скоростей. Отметим разницу в размерности коэффициентов  $\kappa$  и  $\kappa'$

$$[\kappa] = [L]^2 [t]^{-1}, \quad [\kappa'] = [v]^2 [t]^{-1} = [L]^2 [t]^{-3}. \quad (3)$$

Рассмотрим сперва задачу об изменении скорости в пространстве, равномерно заполненном частицами. При этом мы отбрасываем зависимость  $n$  от  $\mathbf{x}$ , считаем, что  $n$  зависит только от  $\mathbf{v}$ ,  $n = n(\mathbf{v})$ . Полное уравнение, соответствующее силе (1), имеет вид

$$\mathbf{q}_v = -\kappa' \text{grad}_v n + (\mathbf{F}_0 - \alpha \mathbf{v}) n, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = \kappa' \Delta_v n - \text{div}_v [(-\alpha \mathbf{v} + \mathbf{F}_0) n]. \quad (4)$$

Второй член в выражениях потока и производной концентрации соответствует постоянным (не статистическим, не флуктуирующим) слагаемым силы, т. е. скорости  $(d/dt)$  изменения скорости  $(\mathbf{v})$ .

Его вид ясен из §1.8 о движении невзаимодействующих частиц (для этого надо заметить, что ускорение частицы служит скоростью в пространстве ее скоростей).

Найдем статическое решение уравнения (4), для чего приравняем нулю поток:

$$q_v = 0 = -\kappa' \text{grad}_v n + n(\mathbf{F}_0 - \alpha \mathbf{v}). \quad (5)$$

Пусть сначала  $\mathbf{F}_0 = 0$ , т. е. внешней силы нет.

Ясно, что скаляр  $n$  в этой ситуации зависит только от модуля  $v = |\mathbf{v}|$ . Подставляя  $n(v)$  в (5) при  $\mathbf{F}_0 = 0$ , получаем

$$-\kappa' \frac{dn}{dv} - \alpha n v = 0,$$



откуда

$$n = \text{const} \cdot e^{-\frac{\alpha v^2}{2\kappa'}}.$$

Получилось гауссовское – т. е. максвелловское – распределение частиц по скорости! Но в тепловом равновесий должно быть

$$n = \text{const} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$$

Отсюда следует, что между коэффициентом диффузии в пространстве скоростей, температурой и подвижностью существует тождественная связь

$$\frac{\alpha}{\kappa'} = \frac{m_0}{kT}.$$

Пусть теперь  $\mathbf{F}_0 \neq 0$ . Сместим начало координат в пространстве скоростей, положив

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \alpha^{-1}\mathbf{F}_0.$$

Получим

$$-\kappa' \text{grad}_{\mathbf{v}'} n - n \alpha \mathbf{v}' = 0.$$

В этом уравнении не содержится больше выделенного направления, т. е. мы пришли к только что разобранным частному случаю. Таким образом, при наличии внешней силы  $\mathbf{F}_0$  распределение центрировано вокруг скорости  $\mathbf{v}' = \alpha^{-1}\mathbf{F}_0$ :

$$n = \text{const} \cdot e^{-\frac{m_0 (v - \alpha^{-1}\mathbf{F}_0)^2}{2kT}}.$$

При данном  $\alpha$  средняя скорость  $\alpha^{-1}\mathbf{F}_0$  не зависит от температуры.

Заметим, что описанная выше постановка задачи не является самой общей: вводя коэффициент диффузии, мы предполагаем, что изменение скорости происходит малыми порциями, малыми шагами. Такое приближение хорошо при рассмотрении тяжелой частицы, испытывающей броуновское движение: ее скорость  $v = \sqrt{kT/M}$ , скорость молекул  $v_m = \sqrt{kT/m_0}$ , при ударе молекулы

$$\Delta v \sim v_m \frac{m_0}{M} \sim \sqrt{\frac{kTm_0}{M}} \sim v \sqrt{m_0/M}.$$

Значит, при  $m_0/M \ll 1$  получим  $\Delta v \ll v$ .

К столкновению примерно одинаковых молекул в газе диффузионное приближение неприменимо. Стационарный ответ по-прежнему дает максвелловское распределение, но получать его в принципе нужно, решая интегральное уравнение (сравните с §2 о диффузии при произвольных скачках).

Итак, диффузионное приближение дает правильное решение в стационарном случае даже тогда, когда истинное уравнение сложнее, чем уравнение диффузии. Отсюда естественно ожидать, что ошибка от замены истинного уравнения диффузионным, как правило, не велика.

Диффузионное уравнение применимо и в том случае, когда взаимодействующие частицы имеют одинаковую массу, но имеет место *дальнодействие*. Этот неуклюжий термин означает, что главную роль играют взаимодействия между частицами, пролетающими далеко друг от друга. При каждом таком пролете скорость меняется мало, но число таких дальних пролетов гораздо больше числа ближних сильных взаимодействий. С такой ситуацией мы встречаемся при взаимодействии заряженных частиц в плазме или при гравитационном взаимодействии звезд в галактиках.

Приближение диффузии в пространстве скоростей ввели и систематически исследовали Ланжевен, Фоккер и Планк вскоре после пионерских работ Эйнштейна и опытов Перрена, относящихся к броуновскому движению. В более позднее время к плазме и к звездам эту теорию применяли Власов, Ландау, Чандрасекар и другие авторы.

## § 21 Пространственная диффузия в теории Ланжевена –

## Фоккера – Планка

Продолжим рассмотрение, начатое в §20, теперь уже с учетом неравномерного пространственного распределения частиц, т. е. положим  $n = n(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Общее уравнение для  $n$  тогда имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \kappa' \Delta_{\mathbf{v}} n - \operatorname{div}_{\mathbf{v}} [(\mathbf{F}_0 - \alpha \mathbf{v})n] - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\mathbf{v}n); \quad (1)$$

оно называется *уравнением Фоккера – Планка*. Здесь  $n$  есть плотность в фазовом шестимерном пространстве. Плотность и поток числа частиц в трехмерном пространстве координат будем в этом параграфе обозначать буквами  $\nu(\mathbf{x})$  и  $\zeta(\mathbf{x})$  ( $[\nu] = [l]^{-3}$ ,  $[\zeta] = [l]^2 [t]^{-1}$ ). При этом, очевидно,

$$\nu = \int n d^3 v, \quad \zeta = \int n \mathbf{v} d^3 v \quad (d^3 v = dv_x dv_y dv_z).$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = A \nu(\mathbf{x}) e^{-\frac{m_0(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1)^2}{2kT}},$$

т. е. предположим, что в каждой точке пространства распределение будет «смещенным максвелловским», центрированным вокруг некоторой скорости  $\mathbf{v}_1$ . Константа  $A$  легко

находится из нормировки:  $A = \left( \frac{2\pi kT}{m_0} \right)^{-3/2}$ . Поток в трехмерном пространстве при таком

распределении соответствует общему движению со скоростью  $\mathbf{v}_1$ . В самом деле,

$$\zeta = \int n \mathbf{v} d^3 v = \int n (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) d^3 v + \mathbf{v}_1 \int n d^3 v = \mathbf{v}_1 \nu.$$

Остается найти  $\mathbf{v}_1$ , подставляя угаданное решение в уравнение (1) и требуя стационарность, т. е. полагая  $\partial n / \partial t = 0$ .

Обозначим для краткости  $kT/m_0 = w^2$ ; таким образом,

$$n = A \nu(\mathbf{x}) e^{-(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1)^2/2w^2}. \quad (2)$$

Кроме того, введем обозначение

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\nu} \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \nu = -\operatorname{grad} \ln \nu(\mathbf{x}).$$

Подставляя  $n$  в уравнение (1), разделим все члены на  $n$ . Получим (проверьте!)

$$\kappa' \left[ -\frac{3}{w^2} + \frac{(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1)^2}{w^4} \right] + (\mathbf{F}_0 - \alpha \mathbf{v}) \cdot \frac{\mathbf{v}-\mathbf{v}_1}{w^2} + 3\alpha + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = 0.$$

Нулевое приближение – в отсутствии постоянной силы и пространственной неоднородности, т. е. при  $\mathbf{F}_0 = 0$ ,  $\mathbf{f} = 0$ , имеет решение с  $\mathbf{v}_1 = 0$ , причем  $\kappa' = \alpha w^2$ , как и было показано в предыдущем параграфе. Подставим это значение  $\kappa'$  в уравнение, отбросим взаимно уничтожившиеся члены нулевого приближения и умножим все на  $w^2$ ; получится

$$-\alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_1^2 + \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{v} - \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{v}_1 + w^2 \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Пренебрежем  $\mathbf{v}_1^2$  и  $\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{v}_1$  как малыми второго порядка. Тогда уравнение будет удовлетворено, если положить

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\alpha} (\mathbf{F}_0 + w^2 \mathbf{f}). \quad (3)$$

(Пусть вас не смущает, что  $\mathbf{v}_1$  получилось зависящим от  $\mathbf{x}$ , хоть это не учитывалось при подстановке формулы (2) в уравнение (1); на этом мы остановимся позже.)

Условия применимости этого решения и сделанные приближения обсудим чуть позже, сперва необходимо понять полученный результат<sup>45</sup>. В пространственно однородном

<sup>45</sup> Сначала результат, потом строгость – так поступают все физики!

случае  $\mathbf{f} = 0$  получаем  $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\alpha} \mathbf{F}_0$ ; здесь воспроизведен результат предыдущего

параграфа, оправдывающий смысл  $\alpha^{-1}$  как подвижности, т. е. отношения средней скорости  $\mathbf{v}_1$  к силе  $\mathbf{F}_0$ , вызывающей движение. В неоднородном случае оказывается, что к истинной силе  $\mathbf{F}_0$  добавляется на равных правах «сила»  $w^2 \mathbf{f}$ . Ее можно понять как отнесенную к массе одной частицы<sup>46</sup> силу  $p$  давления частиц.

Разность давлений на стенки единичного куба, перпендикулярные оси  $x$ , равна  $-\partial p / \partial x$ . Эта разность действует на частицы в направлении оси  $x$ . Подставив

$$p(x, y, z) = kT \nu(x, y, z)$$

и считая температуру постоянной, получим

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = kT \frac{\partial \nu}{\partial x}.$$

Но в единице объема содержится  $\nu$  частиц массы  $m_0$ ; поэтому сила (точнее – ее  $x$ -компонента), отнесенная к массе одной частицы, равна

$$\frac{1}{m_0} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) = -\frac{kT}{m} \frac{\partial \ln \nu}{\partial x} = w^2 f_x.$$

Вектор силы получается как раз  $w^2 \mathbf{f}$ , в точном соответствии с формулой (3), где  $w^2 \mathbf{f}$  стоит рядом с  $\mathbf{F}_0$ .

Значит, мы снова пришли к понятию давления ( $p = \nu kT$ ) как движущей силы диффузии. В частном случае отсутствия внешней силы, т. е. для  $\mathbf{F}_0 = 0$ , найдем среднюю скорость частиц и поток их:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{w^2}{\alpha} \mathbf{f} = -\frac{w^2}{\alpha \nu} \text{grad } \nu, \quad \zeta(\mathbf{x}) = \nu \mathbf{v}_1 = -\frac{w^2}{\alpha} \text{grad } \nu(\mathbf{x}).$$

Таким образом, от диффузии в пространстве скоростей мы перешли к уравнению диффузии в координатном пространстве. Но, как было показано в §3,

$$\zeta(\mathbf{x}) = -\kappa \text{grad } \nu(\mathbf{x}),$$

где  $\kappa$  – коэффициент диффузии. Теперь оказывается, что  $\kappa = w^2 / \alpha$ . Выше говорилось, что  $\alpha^{-1}$  есть подвижность – отношение средней скорости к силе. Но  $\alpha^{-1}$  есть также среднее время свободного пробега частицы, т. е. за время  $\tau = \alpha^{-1}$  средняя скорость уменьшается в  $e$  раз, что видно из формулы (20.2).

В трехмерном случае среднеквадратичная скорость в максвелловском распределении, как нетрудно проверить (попробуйте!), выражается через  $w^2$ , именно,  $\overline{v^2} = 3w^2$ .

Поскольку  $\tau = \alpha^{-1}$  есть среднее время свободного пробега, то  $\sqrt{\overline{v^2}} \tau = l$  можно принять за средний путь свободного пробега. Отсюда

$$\kappa = \frac{w^2}{\alpha} = \frac{l \sqrt{\overline{v^2}}}{3} = \frac{\overline{v^2} \tau}{3}$$

– получена известная формула для пространственного коэффициента диффузии  $\kappa$ . Имея в виду связь между  $\alpha$ ,  $w^2$  и  $\kappa'$ , эту формулу можно записать и иначе:

$$\kappa' \kappa = \left( \frac{kT}{m_0} \right)^2,$$

где  $\kappa'$  – коэффициент диффузии в пространстве скоростей,  $\kappa$  – в обычном пространстве. В силу формул (20.2) справа стоит четвертая степень скорости.

Вдумайтесь, почему при данных  $kT$  и  $m_0$  обычный коэффициент диффузии обратно пропорционален величине  $\kappa'$ : большое  $\kappa'$  означает частую смену направлений скорости, что уменьшает  $\kappa$ .

<sup>46</sup> Напомним, что  $\mathbf{F}_0$  также отнесено к массе одной частицы, так как  $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}_0 - \Phi_0/m_0$ , где  $\Phi_0$  – обычная сила, выраженная, например, в динах.

Каковы ограничения проделанного вывода? Наряду с упомянутыми выше квадратичными величинами  $\mathbf{v}_1^2$  и  $\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{v}_1$  мы пренебрегли еще одной квадратичной величиной – производной  $\mathbf{v}_1$  по координате. Только при медленно меняющихся в пространстве параметрах, когда  $|\mathbf{v}_1| \ll w$ , такое приближение оправдано. Но мы и раньше знали, что дифференциальное уравнение диффузии в обычном пространстве верно лишь для медленно меняющейся в пространстве концентрации.

В принципе, шестимерное уравнение позволяет решать изоэнтальные задачи, в которых в начальный момент задано не только распределение частиц по координате ( $\nu$ ), но и распределение по скоростям ( $n$ ). Решение грубо можно разбить на два периода: частицы сперва набирают скорость (за время  $1/\alpha$ ), соответствующую температуре среды, а уже после этого диффундируют в пространстве. Если характерные линейные размеры в задаче (размер сосуда и т. п.) во много раз больше длины пробега  $l = \sqrt{3}w/\alpha$ , то первый этап составляет малую долю общего времени, и, как правило, учет его не существен. Главное значение уравнения Фоккера – Планка заключается в установлении связи между  $\kappa'$ ,  $\alpha$  и  $T$ . В одних случаях легче найти  $\alpha$  и отсюда  $\kappa'$ ; в других случаях – например, в плазме – удобно найти  $\kappa'$  и отсюда вычислить  $\alpha$ . Уравнение Фоккера – Планка оказывается также полезным при рассмотрении задач с существенным  $\mathbf{F}_0$  – например, задачи о броуновском движении упруго закрепленного тела. Наконец, – и это самое главное – это уравнение описывает ясную принципиальную картину явления.

## § 22 О давлении и термодинамике

Вернемся к задаче §§20–21 о движении частиц под действием случайных внешних сил и будем искать равновесное (статическое) решение. Разница между стационарным и равновесным решением чрезвычайно существенна: горе теоретику, не сознающему отчетливо это различие! В стационарном решении  $dn/dt = 0$ , но  $\zeta(\mathbf{x}) \neq 0$ , все время идет поток вещества. Стационарное решение требует для своего поддержания каких-то внешних затрат – например, поддержания заданных и притом различных граничных условий  $\nu = \nu_1$ ,  $\nu = \nu_2$ ,  $\nu_1 \neq \nu_2$  на различных границах ( $S_1$ ) и ( $S_2$ ) сосуда, в котором происходит диффузия. В равновесной же ситуации потоки отсутствуют, т. е.  $\zeta(\mathbf{x}) = 0$ , так же как и «поток»  $\zeta'(\mathbf{v})$  в пространстве скоростей. Равновесное состояние возможно также и в полностью замкнутой системе.

Представим себе газ в поле сил; пример такого рода – атмосфера в поле тяжести – рассматривался в §IV.6. Будем рассматривать газ как сплошную среду; при этом давление есть сила, приходящаяся на единицу площади. Опыт и теория показывают, что сила давления направлена перпендикулярно поверхности и не зависит от ориентации этой поверхности. Можно представить себе тонкую перегородку (полиэтиленовую пленку) и аппарат, подсчитывающий среднюю силу, возникающую от ударов молекул об эту пленку. Можно выделить определенный малый объем ( $V$ ) газа, представить себе, что этот объем завернут в тонкую пленку, и подсчитать силы, действующие на все молекулы, находящиеся внутри пакета.

Равнодействующая сил поля равна

$$\Phi = m_0 \mathbf{F}_0 V,$$

где  $\mathbf{F}_0$  – сила, действующая на одну молекулу и отнесенная к единице ее массы.

Суммарная сила, с которой внешние молекулы действуют на пленку, окружающую пакет,

$$\Phi_1 = -V \text{grad} p,$$

где  $p$  – давление газа<sup>47</sup>.

Отсюда условие равновесия запишем в виде

<sup>47</sup> Этот простой результат выведен в ЭПМ, §X.10. Предлагаем читателю вывести его самостоятельно на основе формулы для вычисления градиента в декартовых координатах.

$$\Phi + \Phi_1 = m_0 \mathbf{F}_0 \nu V - V \text{grad} p = 0,$$

т. е.

$$\text{grad} p = m_0 \mathbf{F}_0 \nu.$$

При постоянной температуре (условие полного равновесия включает в себя отсутствие тепловых потоков, а значит  $t = \text{const}$ ) получаем

$$kT \text{grad} \nu = m_0 \mathbf{F}_0 \nu.$$

Если сила  $\mathbf{F}_0$  имеет потенциал<sup>48</sup>,  $m_0 \mathbf{F}_0 = -\text{grad} U$ , то

$$kT \text{grad} \nu = -\nu \text{grad} U, \quad \ln \nu = -\frac{U}{kT} + C, \quad \nu = \text{const} \cdot e^{-\frac{U}{kT}}.$$

(Этот результат уже встречался ранее; см., например, §IV.6.) Если мы уберем пленку, то давление предстанет перед нами как сила, с которой внешние молекулы действуют на молекулы, находящиеся внутри рассматриваемого объема ( $V$ ).

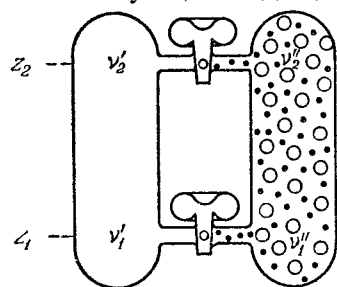


Рис. 99

Теперь рассмотрим совершенно иную задачу (рис. 99).

Представим себе сосуд, заполненный песком, и газ в такой малой концентрации, что молекулы газа между собой не сталкиваются – они ударяются только о песчинки. Теперь для вывода уравнения равновесия нельзя ограничиться простыми соображениями механики: если мысленно выделить некий объем ( $V$ ), то неизвестно, какие силы действуют между песчинками. Однако, рассматривая задачу о случайных столкновениях молекул с песчинками и о блужданиях

молекул в лабиринтах между песчинками, можно получить уравнение для равновесного распределения молекул, в точности совпадающее с полученным выше:

$$\nu = \text{const} \cdot e^{-U/kT}.$$

Этот результат можно было предвидеть с «высшей» точки зрения – с точки зрения термодинамики. Представим себе рядом две трубки – одну пустую, другую заполненную песком (рис. 99). Откроем нижний кран на уровне  $z_1$ . При этом выравниваются концентрации газа  $\nu_1' = \nu_1''$ . Возможно ли, чтобы на высоте  $z_2$  концентрации  $\nu_2'$  и  $\nu_2''$  были различны, может ли различаться функция  $\nu(z)$ , т. е. закон изменения с высотой концентрации газа в пустой и заполненной песком трубке? Если бы такое различие было, то, открыв второй кран наверху, мы получили бы условия циркуляции газа, который перетекал бы в одну сторону по верхней соединительной трубке и в другую сторону по нижней. Можно было бы поставить турбинку и динамо и извлекать электроэнергию из этого нехитрого устройства! При этом закон сохранения энергии не подвергается сомнению: можно было бы представить себе, что песчинки охлаждаются и прибор нуждается в подводе тепла, компенсирующем выработку электроэнергии. Однако второе начало термодинамики запрещает такое функционирование устройства, типичного вечного двигателя второго рода. Значит, из термодинамики можно было без вычислений сказать, что  $\nu$  (г) одинаково для двух трубок, пустой и заполненной песком.

Конечно, это вовсе не означает, что рассуждения предыдущих параграфов были не нужны: выше ведь получены не только условие равновесия, но и скорость диффузии, когда нет равновесия!

Если вдуматься, применение термодинамики содержит элементы порочного, т. е. логически замкнутого круга. В самом деле, мы применяем второе начало термодинамики, чтобы доказать, что неосуществим определенный тип вечного двигателя второго рода. Но, в свою очередь, второе начало термодинамики основано на том факте, что оказались неосуществимыми все предлагавшиеся до сих пор типы вечных двигателей второго рода.

Не правда ли, в целом ситуация характеризуется классической цитатой из Чехова:

<sup>48</sup> Если сила не имеет потенциала, то равновесие невозможно.

«Этого не может быть, потому что этого не может быть никогда!».

Обычно это выражение приводят как образец отсутствия логики. Но ведь это изречение можно прочесть и как блестящий пример индукции, творческого обобщения: если не удалось тысячи вечных двигателей («не может быть никогда»), то не удастся и данный конкретный! Наше рассмотрение равновесия с помощью сложного кинетического уравнения можно считать  $(n + 1)$ -й задачей, для которой ответ уже известен заранее, является выводом из второго начала. Но это же рассмотрение можно считать одним из тех  $n$  случаев, которые лежат в основе второго начала, которые его доказывают. В заключение несколько физических замечаний.

1. Достаточно отказаться от условия постоянства температуры газа, и ситуация станет нетривиальной, возникнет движение газа. Это движение возникнет даже при отсутствии внешней силы  $\mathbf{F}_0$ . В левой (пустой) трубке рис. 99 общее условие равновесия по-прежнему дается выражением для градиента давления: при  $\mathbf{F}_0 = 0$ , получим  $\text{grad} p = 0$ ,  $p = \text{const}$ ,  $v = \text{const}/T$ . В правой, заполненной песком, оказывается, что плотность числа частиц газа  $v = \text{const}/\sqrt{T}$ : дело в том, что если частицы газа не сталкиваются друг с другом, то условием стационарности служит постоянство потока, пропорционального  $\bar{v}$ ; но  $\bar{v}$ , как мы уже видели, пропорционально  $\sqrt{T}$ . При открытых обоих кранах газ циркулирует так, что в трубке, заполненной песком, он движется от холодного конца к горячему. Противоречия со вторым началом нет, так как выработка электроэнергии сопровождается не только охлаждением горячего песка, но и нагреванием холодного песка.

2. Молекулы газа в песчаных лабиринтах хороши для противопоставления газу в широкой трубе. Однако уравнению Фоккера – Планка газ в песке не подчиняется: при столкновении с песчинкой скорость молекулы меняется сильно, кинетическое уравнение является интегральным, оно приобретает вид

$$\frac{\partial n(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial t} = -an(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \int K(\mathbf{v}, \mathbf{v}')n(\mathbf{v}', \mathbf{x})d^3v' - \text{div}_v(\mathbf{v}n).$$

Здесь  $a$  дает полную вероятность столкновения с песчинкой, после которого скорость изменяется, молекула выбывает из данного элемента ( $d^3v$ ) пространства скоростей.  $K(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  дает вероятность молекуле со скоростью  $\mathbf{v}'$  после столкновения приобрести скорость  $\mathbf{v}$  (вероятность отнесена к единице времени и единице объема в  $\mathbf{v}$ -пространстве). Последний член уравнения характеризует движение в координатном пространстве в периоды между столкновениями. Поверьте, что выводы, сделанные выше, правильны; после того как эти выводы были связаны с термодинамикой, поверить в это нетрудно!

3. Мысленный опыт, к которому применимы уравнения Фоккера – Планка, можно представить себе так: пусть в правой трубке рис. 99 рассматриваемые молекулы перемешаны с очень легкими атомами, а песок выброшен. Легкие атомы, сталкиваясь с молекулами, часто, но слабо меняют скорость молекул, что можно описать как диффузию молекул в пространстве скоростей. Между собой молекулы практически не сталкиваются. Поэтому условие равновесия и нельзя получать из механики, нужно обращаться к статистическому рассмотрению. В левой трубке по-прежнему находятся одни только молекулы. Однако чтобы осуществить термодинамическое рассмотрение, нужно заменить краны на мембраны с очень своеобразными свойствами (рис. 100): молекулы – тяжелые, но маленькие, – проходят через мембрану слева направо и справа налево. В равновесии концентрация молекул  $v_1' = v_1''$ ,  $v_2' = v_2''$  слева и справа одинакова. Атомы – легкие, но большие по размерам, – не проходят вовсе через мембрану. Поэтому и можно себе представить, что неограниченно долго справа легкий газ есть, а слева его нет.

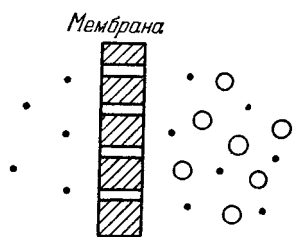


Рис. 100

Подобные полупроницаемые мембраны очень характерны для термодинамических рассуждений конца XIX века.

Замечательные теоретические результаты были получены с помощью мысленных опытов с мембранами.

Но полупроницаемые мембраны существуют в действительности, в жизни. Слова «в жизни» здесь это не просто литературный оборот, роль мембран в живых клетках огромна.

Итак, пусть мембраны Ваших органов чувств впускают в Ваш мозг сладкий раствор познания. С другой стороны, пусть лишняя ученость и схоластика будут извергнуты Вами!

### § 23 Вариационный метод. Скорость диссипации

Вернемся к уравнению Лапласа (§16). Его решение при заданном граничном условии в замкнутом виде или даже в виде суммы ряда возможно лишь для областей ( $\Omega$ ) наиболее простого вида (прямоугольный параллелепипед, шар, круговой цилиндр и некоторые другие области). В общем случае особенно большое значение приобретают численные методы, с помощью которых удастся построить решение для произвольных областей и произвольных граничных условий.

Один из основных численных методов – вариационный – основан на возможности приближенной минимизации функционала, уравнением Эйлера для которого служит уравнение (1). В §XII.6 ЭПМ было показано, что таким функционалом служит так называемый *интеграл Дирихле*

$$I[\rho] = \int_{(\Omega)} (\text{grad } \rho)^2 d\Omega = \int_{(\Omega)} \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (1)$$

(Л. Дирихле – немецкий математик, 1805–1859).

Это дает возможность применить к решению уравнения Лапласа при граничном условии (16.2) метод Ритца, описанный в ЭПМ, §XII. 12. Именно, плотность  $\rho$  ищется в виде

$$\rho = \rho_0 + C_1 \rho_1 + C_2 \rho_2 + \dots + C_n \rho_n, \quad (2)$$

где  $\rho_0$  – какая-либо функция, удовлетворяющая заданному граничному условию,  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  – какие-либо «базисные» функции» удовлетворяющие соответствующему однородному граничному условию  $\rho|_{(S)} = 0$ , а  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – постоянные множители, которые подбираются из условия минимизации выражением (2) интеграла (1).

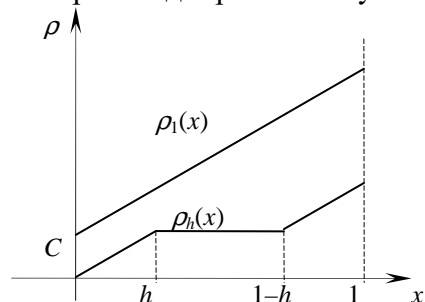


Рис. 101

Мы не будем здесь приводить численные примеры на применение метода Ритца для граничного условия (16.2), так как подобные примеры разобраны в §XII.12 ЭПМ; один такой пример приведен в упражнении 1, предлагаемом читателю.

Неожиданный «финт» возникает при решении уравнения Лапласа для граничного условия (16.3). Могло бы показаться, что это решение реализует минимум интеграла (1) среди всех функций, удовлетворяющих условию (16.3). Но это не так!

Рассмотрим, например, одномерную задачу о минимизации интеграла

$$J = \int_0^1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

на множестве всех функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$\rho(0) = 1, \quad \rho'(1) = 1 \quad (4)$$

(штрихом обозначена производная).

Уравнение Эйлера для функционала  $J$ , составленное по обычным правилам (ЭПМ, §XII.4), имеет вид  $-2\rho'' = 0$  и потому, при граничных условиях (4) – решение  $\rho_1 = x + C$ , причем  $J[\rho_1] = 1$ . Однако на функциях  $\rho_h(x)$ , показанных на рис. 101 и удовлетворяющих условиям (4), будет  $J[\rho_h] = 2h$ . За счет уменьшения  $h$  это значение можно сделать как угодно близким к нулю – минимальному значению  $J$  на всех вообще функциях; при этом  $\rho_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ . Итак, мы видим, что на функциях, удовлетворяющих условиям (4), функционал  $J$  минимального значения не достигает; в пределе же мы получаем функцию, которая этим условиям не удовлетворяет. Чтобы разобраться, в чем тут дело, составим вариацию функционала (3) и проинтегрируем ее по частям:

$$\delta J = \int_0^1 2 \frac{d\rho}{dx} \frac{d\delta\rho}{dx} dx = 2 \frac{d\rho}{dx} \delta\rho \Big|_{x=1} - 2 \frac{d\rho}{dx} \delta\rho \Big|_{x=2} - 2 \int_0^1 \frac{d^2\rho}{dx^2} \delta\rho dx.$$

Если функция  $\rho(x)$  удовлетворяла уравнению  $\rho'' = 0$  и граничным условиям (4), то получаем  $\delta J = 2\delta\rho|_{x=1} - 2\delta\rho|_{x=0}$ . Когда мы рассматривали граничные условия 1-го рода, то значения  $\delta\rho$  на концах интервала равнялись нулю, откуда и вытекала стационарность значения функционала. Но теперь это условие на  $\delta\rho$  не ставится, поэтому функция  $\rho_1(x)$  не придает функционалу (3) не только минимального, но даже и стационарного значения!

Рассмотренный пример является типичным. Оказывается, что неоднородное граничное условие 2-го рода для функционала (1) «не выдерживает» перехода к пределу и в пределе заменяется на соответствующее однородное граничное условие, которому отвечает решение  $\rho \equiv \text{const}$ . Поэтому и применение метода Ритца в рассматриваемой задаче приводит к аппроксимации этого решения, а совсем не того, которое нам нужно. Однако нетрудно видоизменить постановку вариационной задачи, в результате чего получится решение, удовлетворяющее условиям (4). Именно, рассмотрим функционал

$$I[\rho] = \int_0^1 \rho'^2 dx + 2\rho(0) - 2\rho(1) \quad (5)$$

на множестве всех функций (от них не требуется, чтобы они удовлетворяли каким-либо заранее заданным граничным условиям). Такая вариационная задача без граничных условий называется *естественной*. Если на какой-либо функции  $\bar{\rho}(x)$  функционал (5) принимает стационарное значение, то

$$\delta I = \int_0^1 2\bar{\rho}' \delta\rho' dx + 2\delta\rho(0) - 2\delta\rho(1) = 0.$$

Интегрируя полученный интеграл по частям, приходим к равенству

$$-2 \int_0^1 \bar{\rho}'' \delta\rho dx + [2 - 2\bar{\rho}'(0)]\delta\rho(0) + [2\bar{\rho}'(1) - 2]\delta\rho(1) = 0.$$

Отсюда, учитывая полную произвольность функции  $\delta\rho(x)$ , в частности, значений  $\delta\rho(0)$  и  $\delta\rho(1)$ , получаем, что  $\bar{\rho}(x)$  удовлетворяет уравнению  $\rho'' = 0$  и граничным условиям (4). Таким образом, хотя в постановке вариационной задачи граничные условия не ставились, но решение этой задачи автоматически удовлетворяет определенным граничным условиям, которые можно вывести из этой постановки (так называемым *естественным граничным условиям*). Аналогично можно проверить, что для получения решения уравнения Лапласа при граничном условии (16.3) нужно рассмотреть естественную вариационную задачу о придании стационарного значения функционалу

$$\frac{\kappa}{2} \int_{(\Omega)} (\text{grad } \rho)^2 d\Omega - \int_{(S)} \psi \rho dS$$



на множестве всех функций. Естественные вариационные задачи наиболее удобны при применении метода Ритца в областях сложной формы, так как для таких задач при выборе базисных функций не нужно заботиться о выполнении граничных условий. Вариационный метод можно применить также для отыскания собственных значений решений, экспоненциальных во времени (§14). Остановимся на случае, когда решения строятся в конечной пространственной области ( $\Omega$ ) с граничным условием

$$\rho|_{(S)} = 0, \quad (6)$$

где ( $S$ ) – граница области ( $\Omega$ ). Чтобы вывести соответствующий вариационный принцип, разложим произвольную функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую этому условию, в ряд по собственным функциям  $f_m(x)$ , которые нам пока неизвестны:

$$f(x) = \sum_m C_m f_m(x); \quad (7)$$

такое разложение возможно в силу полноты системы собственных функций. Если умножить разложение (7) само на себя, проинтегрировать результат по ( $\Omega$ ) и воспользоваться ортогональностью функций  $f_m$ , получим

$$\int_{(\Omega)} f^2 d\Omega = \sum_m C_m^2 \int_{(\Omega)} f_m^2 d\Omega. \quad (8)$$

С другой стороны, из (7) вытекает, что

$$\text{grad } f(x) = \sum_m C_m \text{grad } f_m(x). \quad (9)$$

Для дальнейшего нам потребуется формула

$$\int_{(\Omega)} \text{grad } u \cdot \text{grad } v d\Omega = \int_{(S)} u \frac{dv}{dn} dS - \int_{(\Omega)} u \nabla^2 v d\Omega, \quad (10)$$

для доказательства которой достаточно применить формулу Остроградского к полю  $u \text{ grad } v$  (проверьте!). Из формулы (10) вытекает, в частности, что для собственных функций  $f_i$  и  $f_j$

$$\int_{(\Omega)} \text{grad } f_i \cdot \text{grad } f_j d\Omega = - \int_{(\Omega)} f_i \nabla^2 f_j d\Omega = \frac{\lambda_j}{K} \int_{(\Omega)} f_i f_j d\Omega$$

(см. формулу (14.22)). Поэтому, возводя обе части равенства (9) в квадрат и интегрируя, получаем

$$\int_{(\Omega)} (\nabla f)^2 d\Omega = \sum_m \lambda_m C_m^2 \int_{(\Omega)} f_m^2 d\Omega. \quad (11)$$

Сравним теперь формулы (8) и (11). Если в правой части (11) заменить все собственные значения  $\lambda_m$  на минимальное  $\lambda_{\min}$ , то правая часть может только уменьшиться, после чего станет равной  $\lambda_{\min} \int_{(\Omega)} f^2 d\Omega$ . Таким образом,

$$\lambda_{\min} = \min_f \frac{\int_{(\Omega)} (\nabla f)^2 d\Omega}{\int_{(\Omega)} f^2 d\Omega}, \quad (12)$$

причем минимум берется среди всех функций, удовлетворяющих граничному условию (6). Минимум реализует собственная функция, отвечающая  $\lambda_{\min}$ .

Применение полученного вариационного принципа (12) осуществляется с помощью метода Ритца, описанного выше; при этом в выражении (2) слагаемое  $\rho_0$ , конечно, отсутствует. Имеются методы нахождения и дальнейших собственных значений, но чаще всего отыскивают наименьшее, так как именно оно играет важнейшую роль (см. по этому поводу §14).

Из полученного вариационного принципа вытекает, в частности, монотонная зависимость наименьшего собственного значения  $\lambda_{\min}$  от области ( $\Omega$ ), о чем мы уже упоминали в §14. Допустим, что при граничном условии (6) область ( $\Omega$ )<sup>(1)</sup> имеет

наименьшее собственное значение  $\lambda_{\min}^{(1)}$ , а область  $(\Omega)^{(2)}$  – наименьшее собственное значение  $\lambda_{\min}^{(2)}$ , причем область  $(\Omega)^{(1)}$  целиком содержится в  $(\Omega)^{(1)}$  и не совпадает с ней. Пусть  $f^{(1)}(x)$  – собственная функция, определенная в  $(\Omega)^{(1)}$  и отвечающая собственному значению  $\lambda_{\min}^{(1)}$ . Тогда, в силу сказанного выше,

$$\frac{\int_{(\Omega)^{(1)}} (\nabla f^{(1)})^2 d\Omega}{\int_{(\Omega)^{(1)}} f^{(1)2} d\Omega} = \lambda_{\min}^{(1)}.$$

Определим функцию  $F(x)$  в  $(\Omega)^{(2)}$ , положив ее равной  $f^{(1)}(x)$  на  $(\Omega)^{(1)}$  и нулю на остальной части  $(\Omega)^{(2)}$ ; так как  $f^{(1)}$  удовлетворяет условию (6), функция  $F$  получится непрерывной и потому при ее дифференцировании дельта-слагаемые не появятся. Функция  $F$ , очевидно, не является собственной, поэтому в силу принципа (12)

$$\lambda_{\min}^{(2)} < \frac{\int_{(\Omega)^{(2)}} (\nabla F)^2 d\Omega}{\int_{(\Omega)^{(2)}} F^2 d\Omega}.$$

Однако правая часть этого неравенства равна левой части предыдущего равенства (почему?), т. е.  $\lambda_{\min}^{(2)} < \lambda_{\min}^{(1)}$ , что и требовалось доказать.

Полученное свойство имеет очевидный физический смысл. Оно просто означает, что если область была разогрета, а после этого на границе области поддерживается нулевая температура, то область  $(\Omega)^{(1)}$  будет охлаждаться быстрее, чем  $(\Omega)^{(2)}$ .

Остановимся в заключение на физическом смысле интеграла (1), причем сначала поговорим о случае, когда процесс диффузии рассматривается в неограниченном пространстве.

Выше уже не раз отмечалось основное свойство решений уравнения диффузии (теплопроводности), а именно, сглаживание неоднородности в распределении концентрации или температуры. Одним из проявлений этой тенденции является уменьшение максимального значения и увеличение минимального значения  $\rho$  (или, соответственно, температуры). Значит, с течением времени монотонно уменьшается «амплитуда неоднородности»  $\rho_{\max} - \rho_{\min}$ .

Однако такая характеристика неоднородности мало удовлетворительна, потому что в ней никак не учитывается поведение  $\rho$  в областях между максимумом и минимумом, т. е. распределение  $\rho$  во всем пространстве. Естественной мерой неоднородности является интеграл квадрата уклонения концентрации (плотности) от средней  $\frac{1}{2} \int (\rho - \rho_{cp})^2 d\Omega$ ,

(коэффициент  $\frac{1}{2}$  взят для удобства выкладок). Но для задачи о диффузии в безграничной среде с общим конечным количеством вещества, очевидно,  $\rho_{cp} = 0$ . Таким образом, мерой неоднородности в этом случае является просто

$$I_0[\rho] = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\Omega. \quad (13)$$

Ясно, что при уменьшении  $\rho_{\max}$  и естественном увеличении эффективного занятого объема  $V$  величина  $I_0$  должна уменьшаться, в самом деле,  $\rho_{\max} V = M = \text{const}$ , поэтому

$$\frac{1}{2} \int \rho^2 d\Omega \approx \frac{1}{2} \rho_{\max}^2 V = \frac{1}{2} M \rho_{\max} \rightarrow 0 \text{ при } \rho_{\max} \rightarrow 0.$$

Замечательно, что уравнение диффузии позволяет дать количественное выражение закона изменения  $I_0$ ; при этом доказывается, что  $I_0$  уменьшается монотонно. В самом деле, продифференцируем равенство (13) по  $t$  и воспользуемся уравнением диффузии:

$$\frac{dI_0}{dt} = \int \rho \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = \kappa \int \rho \nabla^2 \rho d\Omega.$$

Воспользуемся теперь формулой (10) в «обратном направлении», мы получим

$$\frac{dI_0}{dt} = -\kappa \int (\nabla \rho)^2 d\Omega = -\kappa I[\rho], \quad (14)$$

откуда и вытекает убывание  $\rho$ .

Заметим, что такое преобразование возможно и в более сложном случае, когда коэффициент диффузии  $\kappa$  зависит от точки пространства, времени и самой плотности. В этом случае уравнение диффузии принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} \rho),$$

а соотношение (14) заменяется на

$$\frac{dI_0}{dt} = - \int \kappa (\nabla \rho)^2 d\Omega.$$

Нам удалось доказать нечто большее, чем простое уменьшение  $I_0$  с течением времени. В самом деле, поскольку  $dI_0/dt$  записано в виде интеграла, то можно сказать, какой вклад в уменьшение  $I_0$  вносит каждый элемент объема, можно говорить о диссипации (по-русски – рассеянии) неоднородности. Величина  $\kappa (\nabla \rho)^2$  представляет собой объемную скорость диссипации. (Она вполне аналогична «вязкому члену»  $\eta (\nabla v)^2$  при рассмотрении диссипации кинетической энергии в жидкости.)

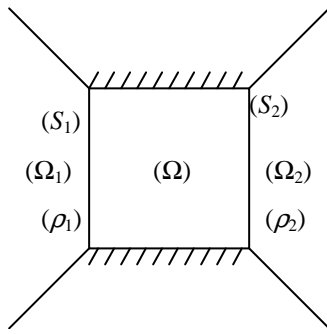


Рис. 102

Соображения о диссипации можно применить и к диффузии в ограниченном объеме рис. 102 с заданными граничными условиями на стенках. Пусть рассматривается диффузия в области  $(\Omega)$  (рис. 102), которая примыкает к большим резервуарам  $(\Omega_1)$  и  $(\Omega_2)$ , где диффундирующее вещество имеет соответственно плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , причем для определенности  $\rho_1 > \rho_2$ . Пусть стенки, отделяющие  $(\Omega)$  от этих резервуаров, обладают высокой проницаемостью, поэтому в  $(\Omega)$  на них выполняются условия

$$\rho|_{(S_1)} = \rho_1, \quad \rho|_{(S_2)} = \rho_2.$$

Остальные же стенки  $(\Omega)$  пусть непроницаемы, так что на них выполняется условие

$$\left. \frac{d\rho}{dn} \right|_{\text{остальная часть}(S)} = 0.$$

Обозначим через  $\bar{\rho}(x) = \rho(x, \infty)$  плотность, которая должна установиться в пределе, при  $t \rightarrow \infty$ . Проводя преобразования, аналогичные примененным для безграничной среды, получим (последите за выкладками, учитывая, что  $\nabla^2 \bar{\rho} = 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} (\rho - \bar{\rho})^2 d\Omega &= \int_{(\Omega)} (\rho - \bar{\rho}) \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = \kappa \int_{(\Omega)} (\rho - \bar{\rho}) \nabla^2 \rho d\Omega = -\kappa \int_{(\Omega)} \nabla(\rho - \bar{\rho}) \cdot \nabla \rho d\Omega = \\ &= -\kappa \int_{(\Omega)} (\nabla \rho)^2 d\Omega + \kappa \int_{(\Omega)} \nabla \bar{\rho} \cdot \nabla \rho d\Omega = -\kappa \int_{(\Omega)} (\nabla \rho)^2 d\Omega + \kappa \int_{(S_1)} \rho \frac{d\bar{\rho}}{dn} d\Omega + \kappa \int_{(S_2)} \rho \frac{d\bar{\rho}}{dn} d\Omega. \end{aligned} \quad (15)$$

Однако в среднем интеграле  $\rho = \rho_1 = \text{const}$ ; вынося  $\rho_1$  за знак интеграла, получаем

$$\kappa \int_{(S_1)} \frac{d\bar{\rho}}{dn} d\Omega, \text{ т. е. устанавливающийся поток } \bar{Q} \text{ массы, диффундирующей через } (\Omega).$$

Аналогично преобразуется последний интеграл в (15) и мы получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} (\rho - \bar{\rho})^2 d\Omega = -\kappa \int_{(\Omega)} (\nabla \rho)^2 d\Omega + \bar{Q}(\rho_1 - \rho_2). \quad (16)$$

Однако в какой-либо начальный момент  $t_0$  в качестве  $\rho$  можно выбрать произвольную функцию  $\rho_0(x)$ , удовлетворяющую заданным граничным условиям. Мы видим, что отклонение этой плотности от стационарной убывает тем быстрее, чем больше интеграл (1). В стационарном состоянии, когда левая часть равенства (16) равна нулю, суммарная диссипация  $\kappa \int_{(\Omega)} (\nabla \rho)^2 d\Omega$  принимает минимально возможное значение

$\bar{Q}(\rho_1 - \rho_2)$ , тогда как для любого другого состояния, как мы знаем, значение суммарной диссипации больше этого минимального. Принцип минимума интеграла Дирихле (1) физически равносителен принципу минимума диссипации: среди всех состояний, совместимых с заданными граничными условиями, в среде устанавливается такое состояние, при котором суммарная диссипация принимает минимально возможное значение.

Для стационарного состояния равенство (16) дает выражение для потока

$$\bar{Q} = \frac{\kappa}{\rho_1 - \rho_2} \int_{(\Omega)} (\nabla \rho)^2 d\Omega. \text{ Оказывается, что эта формула остается справедливой и для}$$

случая, когда среда, в которой происходит диффузия, стационарно движется в  $(\Omega)$  – например, этой средой служит жидкость и юна перемешивается. Из физических соображений ясно, что такое перемешивание увеличивает поток  $\bar{Q}$ , а потому и средний по  $(\Omega)$  квадрат градиента  $\rho$ , т. е. и суммарную диссипацию. Таким образом, при малых скоростях перемешивания мы находимся вблизи минимального значения  $\bar{Q}$ , и потому приращение  $\bar{Q}$  имеет второй порядок малости.

### Упражнения

1) Примените метод Ритца к решению уравнения (1) в квадрате  $0 \leq x, y \leq l$  при граничных условиях  $\rho|_{x=0} = \rho|_{y=0} = \rho|_{y=l} = 0$ ,  $\rho|_{x=l} = \sigma_0 \sin \frac{\pi}{l} y$ , выбрав в качестве  $\rho_0$  (см. (2)) функцию, линейную по  $x$ , а в качестве единственной базисной функции  $\sin \frac{\pi}{l} x \sin \frac{\pi}{l} y$ ; то же – для базисной функции  $x(l-x)y(l-y)$ ; сравните значения найденных решений в центре квадрата.

2) Докажите, что при граничном условии  $\left. \frac{d\rho}{dn} \right|_{(s)} = 0$  интеграл  $I[\rho]$  монотонно убывает во времени.

### § 24 Метод сеток для уравнения диффузии

Мы уже упоминали в §II.18, что важным методом численного решения задач математической физики является конечноразностный (сеточный), основанный на приближенной замене производных-отношениями приращений. Здесь мы опишем один из самых простых его вариантов в применении к решению уравнения стационарной диффузии (16.1) при граничном условии (16.2).

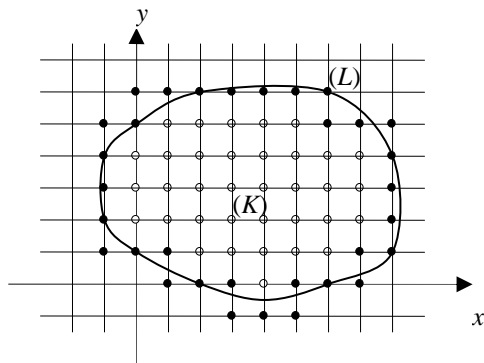


Рис. 103

Идея метода проста. Рассмотрим, например, двумерный случай и вспомним, что в §3 мы совершили переход от сеточного уравнения диффузии к дифференциальному; теперь же мы совершаем обратный переход. Для этого зададимся некоторым шагом  $h > 0$  и построим на плоскости  $x, y$  сетку из точек с координатами  $(jh, kh)$ , где  $j, k$  – произвольные целые числа. Область  $(K)$ , в которой надо построить решение, ограниченную контуром  $(L)$  (рис. 103), аппроксимируем «сеточной» областью; на рис. 103 соответствующий сеточный контур

обозначен крестиками<sup>49</sup>. Граничные значения плотности, заданные на  $(K)$ , снесем на

<sup>49</sup> Темными точками.

этот контур. (Имеются способы того, как при таком сносе совершить по возможности меньшую ошибку в решении; но мы не будем касаться здесь этого специального вопроса.)

Теперь надо перейти от уравнения (16.1) к соответствующему разностному уравнению, заменив лапласиан  $\nabla^2 \rho$  на его разностную аппроксимацию. В §3 была получена эта аппроксимация

$$\nabla^2 \rho(jh, kh) \approx \frac{1}{h^2} (\rho_{j-1,k} + \rho_{j+1,k} + \rho_{j,k-1} + \rho_{j,k+1} - 4\rho_{jk}), \quad (1)$$

где обозначено  $\rho_{jk} = \rho(jh, kh)$ . Приравнивая правую часть (1) нулю, мы получаем разностный аналог уравнения (16.1):

$$\rho_{jk} = \frac{1}{4} (\rho_{j-1,k} + \rho_{j+1,k} + \rho_{j,k-1} + \rho_{j,k+1}). \quad (2)$$

Это уравнение надо написать для всех внутренних точек сеточной области, обозначенных на рис. 103 кружками; при этом всякий раз, когда в правой части появляются граничные точки сеточной области, надо пользоваться заданными граничными значениями.

Таким образом, получается система алгебраических уравнений 1-й степени, причем как число уравнений, так и число неизвестных значений  $\rho_{jk}$  равно числу внутренних точек сеточной области: например, на рис. 103 это число равно 35. Однако не следует думать, что для решения этой системы нам потребуется выписывать и вычислять определители 35-го порядка! На самом деле положение вовсе не такое уж печальное, так как система (2) весьма приспособлена для применения метода итераций. Опишем один из наиболее наглядных вариантов этого метода.

Для этого зададим произвольно нулевое приближение  $\rho_{jk}^{(0)}$  значений  $\rho_{jk}$  во внутренних точках сеточной области, стараясь только, чтобы это приближение было по возможности ближе к искомому решению, каким мы его ожидаем. Подставив это приближение в правую часть равенств (2), найдем 1-е приближение  $\rho_{jk}^{(1)}$  и т. д. Общая формула, выражающая последующее приближение через предыдущее, такова:

$$\rho_{jk}^{(n+1)} = \frac{1}{4} (\rho_{j-1,k}^{(n+1)} + \rho_{j+1,k}^{(n+1)} + \rho_{j,k-1}^{(n+1)} + \rho_{j,k+1}^{(n+1)}), \quad (3)$$

причем при вычислении правой части надо в случае необходимости пользоваться заданными граничными значениями.

Формулы (3) – это, с точностью до обозначений, те же рекуррентные соотношения (3.1). Таким образом, смысл метода итераций состоит в том, что мы заменяем стационарный процесс на процесс установления, приняв нулевое приближение за начальное распределение плотностей.

	40	80	120	
0				0
0				0
	0	0	0	

Рис. 104

Приведем простой численный пример. Пусть внутренние узлы (точки) сеточной области образуют прямоугольник размера 2×3. На рис. 104 эти узлы для удобства вычислений изображены в виде маленьких прямоугольников; в граничных узлах указаны заданные граничные значения (частицы поступают сверху и исчезают снизу и по бокам).

Первым шагом в решении является выбор нулевого приближения. Хотя в данной задаче процесс итераций сойдется, каким бы нулевым приближением ни выбрать, но это произойдет тем быстрее, чем мы лучше угадаем искомое решение. При этом выборе большую роль играют, конечно, навыки и интуиция. Наглядно можно себе представить, что числа на рис. 104 показывают температуру на контуре металлической пластинки (ведь стационарное распределение температуры удовлетворяет тому же уравнению (16.1)), а требуется указать температуру во внутренних точках пластинки.

Допустим, что мы выбрали нулевое приближение, как указано на рис. 105. Теперь надо

	40	80	120	
0	20	40	60	0
0	10	20	30	0
	0	0	0	

Рис. 105

приступать к итерациям<sup>50</sup>. Если вычисления проводит один человек, то удобнее всего не применять непосредственно формулы (3), а пользоваться следующим *методом Зейделя*, который, кстати, и несколько ускорит сходимость. Внутренние узлы сетки нумеруются в некотором порядке – например так, как это показано на рис. 105 стрелками. Затем к первой точке применяется формула (3) с  $n = 0$ , что даст результат  $\frac{1}{4}(0+40+10+40) = 22$  (мы будем проводить вычисления только с точностью до единиц). После этого формула (3) с  $n = 0$  применяется ко второй точке, однако в правой части мы пользуемся уже вычисленным значением 22 в первой точке, что даст  $\frac{1}{4}(22+60+20+80)=46$ . (Практически удобно вычисляемые значения писать карандашом в соответствующих клетках и после каждого вычисления стирать предыдущий результат и писать новый, исправленный.) После шести вычислений мы получим 1-е приближение, приведенное на рис. 106. Хорошо видно, что в нулевом приближении мы недостаточно учли влияние правого бока и потому через этот бок ушло большое количество частиц из начального распределения.

	40	80	120	
0	22	46	49	0
0	10	18	17	0
	0	0	0	

Рис. 106

	40	80	120	
0	23	41	44	0
0	10	16	15	0
	0	0	0	

Рис. 107

Затем все описанные действия в том же порядке совершаются над 1-м приближением, в результате чего получится 2-е приближение и т. д., пока с выбранной при вычислениях точностью последующее приближение не совпадет с предыдущим. Мы предоставляем читателю проверить, что в нашем примере 4-е приближение совпадает с 3-м, и мы получаем результат, приведенный на рис. 107.

В применении к уравнению Пуассона метод сеток не имеет каких-либо принципиальных особенностей, и мы предоставляем продумать его читателю.

Остановимся еще на решении нестационарной задачи, причем для простоты ограничимся одномерным случаем. Пусть, например, надо решить уравнение (1.8) на отрезке  $0 \leq x \leq l$  при граничных условиях

$$\rho|_{x=0} = 0, \rho|_{x=l} = 0$$

и начальном условии

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x) \quad (0 \leq x \leq l).$$

Разобьем отрезок  $0 \leq x \leq l$  на некоторое число  $J$  равных частей, выберем некоторый временной шаг  $\tau$  и обозначим через  $\rho_{jk}$  значение искомого решения в точке  $x = jh$  ( $h = l/J$ ),  $t = n\tau$ . Тогда, заменяя производные разностными отношениями, можно уравнение диффузии (1.8) приближенно записать в виде

$$\frac{\rho_{j,n+1} - \rho_{jn}}{\tau} = \kappa \frac{\rho_{j-1,n} + \rho_{j+1,n} - 2\rho_{jn}}{h^2}, \quad (4)$$

откуда

$$\rho_{j,n+1} = \rho_{jn} + \frac{\kappa\tau}{h^2} (\rho_{j-1,n} + \rho_{j+1,n} - 2\rho_{jn}). \quad (5)$$

При этом значения

$$\rho_{j0} = \rho_0(jh) \text{ и } \rho_{0n} = \rho_{Jn} = 0$$

являются заданными.

Соотношение (5) дает возможность шаг за шагом находить значения  $\rho_{jn}$ . Так, полагая в (5)  $n = 0$  и пользуясь заданными значениями  $\rho_{j0}$ , мы подсчитываем значения  $\rho_{j1}$ . Зная

<sup>50</sup> Мы описываем процесс вычислений применительно к человеку, пользующемуся простейшими вычислительными средствами. Однако и мощная ЭЦВМ проводит вычисления по аналогичным схемам, хотя, конечно, для нее число узлов в сетке и, тем самым, точность вычисления можно значительно повысить.

эти значения и полагая в (5)  $n = 1$ , мы вычисляем значения  $\rho_{j2}$ ; при этом для  $j = 1$  и  $j = J - 1$  придется воспользоваться граничными значениями  $\rho_{01} = \rho_{J1} = 0$  (почему?) и т. д.

Таким образом, по терминологии §II.18, замена уравнения (1.8) уравнением (4) определяет явную схему вычислений. Чтобы проверить ее на устойчивость, надо в силу §II.18 в уравнении (4) положить  $\Delta\rho = \alpha e^{ij} p^n$ , что после сокращений приведет к соотношению

$$\frac{p-1}{\tau} = \kappa \frac{e^{-i\gamma} + e^{j\gamma} - 2}{h^2} \quad (6)$$

откуда

$$p = 1 + \frac{\kappa\tau}{h^2} (e^{-i\gamma} + e^{j\gamma} - 2) = 1 - 4 \frac{\kappa\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1 - 4 \frac{\kappa\tau}{h^2}.$$

Из условия  $|p| \leq 1$  при всех  $\gamma$  приходим к неравенству

$$4 \frac{\kappa\tau}{h^2} \leq 2, \text{ т. е. } \tau \leq \frac{h^2}{2\kappa}. \quad (7)$$

Мы видим, что при уточнении аппроксимации дифференциального уравнения разностным, т. е. при уменьшении  $h$  шаг  $\tau$  надо уменьшать еще более значительно. Этим рассматриваемая схема неудобна.

Отметим, что уравнение (4) в точности совпадает с (1.10), так что в методе сеток мы, действительно, совершаем переход, обратный проделанному в §1. При этом неравенство (7) показывает, что при заданных  $\kappa$  и  $h$  временной шаг в методе сеток не должен превосходить того, который в §1 в сочетании с данным  $h$  породил данное значение коэффициента  $\kappa$ .

Как и в §II.18, для экономии вычислений оказывается удобным перейти к неявной вычислительной схеме. Для этого можно уравнение (4) заменить на

$$\frac{\rho_{j,n} - \rho_{j,n-1}}{\tau} = \kappa \frac{\rho_{j-1,n} + \rho_{j+1,n} - 2\rho_{j,n}}{h^2}. \quad (8)$$

Проверка на устойчивость приводит, взамен (6), к соотношению

$$\frac{1-1/p}{\tau} = \kappa \frac{e^{-i\gamma} + e^{j\gamma} - 2}{h^2},$$

откуда легко подсчитать

$$p = \left( 1 + 4 \frac{\kappa\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)^{-1} \leq 1,$$

т. е. данная вычислительная схема – устойчивая при любом соотношении шагов  $h$  и  $\tau$ . При применении схемы (8) в каждом временном шаге, т. е. при каждом  $n \geq 1$ , приходится решать систему из  $J - 1$  уравнений первой степени с  $J - 1$  неизвестными  $\rho_{1n}, \rho_{2n}, \dots, \rho_{J-1,n}$ . Это делается несколько более громоздко, чем в неявной схеме §II.18, но все же не очень, из-за простой структуры системы. Например, при  $n = 1$ , после обозначения  $h^2/\kappa\tau = \alpha$ , система приобретает вид

$$\begin{aligned} (2 + \alpha)\rho_{11} - \rho_{21} &= \alpha\rho_{10}, \\ -\rho_{11} + (2 + \alpha)\rho_{21} - \rho_{31} &= \alpha\rho_{20}, \\ -\rho_{21} + (2 + \alpha)\rho_{31} - \rho_{41} &= \alpha\rho_{30}, \\ &\vdots \\ -\rho_{J-3,1} + (2 + \alpha)\rho_{J-2,1} - \rho_{J-1,1} &= \alpha\rho_{J-2,0}, \\ -\rho_{J-2,1} + (2 + \alpha)\rho_{J-1,1} &= \alpha\rho_{J-1,0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для ее решения можно применить обычный метод исключения (так называемый метод Гаусса; для систем, структура которых аналогична системе (9), он называется также

прогонкой). Именно, из первых двух уравнений исключаем  $\rho_{11}$ , в результате чего получается соотношение между  $\rho_{21}$  и  $\rho_{31}$  (напомним, что правые части системы заданы в силу начальных условий). Затем из полученного соотношения и третьего уравнения системы исключаем  $\rho_{21}$ , получается соотношение между  $\rho_{31}$  и  $\rho_{41}$  и т. д. На предпоследнем этапе получится соотношение между  $\rho_{J-2,1}$  и  $\rho_{J-1,1}$ , которое вместе с последним уравнением даст возможность найти  $\rho_{J-1,1}$ . Затем идем в обратную сторону: из последнего из упомянутых соотношений, зная  $\rho_{J-1,1}$ , находим  $\rho_{J-2,1}$ ; из предшествующего соотношения, зная уже  $\rho_{J-2,1}$ , находим  $\rho_{J-3,1}$  и т. д., вплоть до  $\rho_{11}$ . Эту схему вычислений легко записать в виде рекуррентных соотношений, удобных для применения ЭЦВМ. При  $n = 2$  в системе (9) надо все вторые индексы увеличить на 1, в результате чего в правых частях появятся найденные значения  $\rho_{j1}$ , а в остальной схеме вычислений останется прежней.

Таким путем можно произвольно увеличивать  $n$ , т. е. получить приближенные значения решения для любых значений  $t > 0$ .

## Упражнения

- 1) Исходя из результатов, приведенных на рис. 107, найдите решение задачи рис. 104 с точностью до 0,01; сколько потребовалось добавочных итераций?

		0	0	0	
0					0
0			100		0
0					0
	0	0	0		

		50	100			
0				100		
0				200	100	
0						0
0						0
	0	0	0	0		

Рис. 108

- 2) Найдите решение системы (2) с точностью до единицы для сеточных областей и граничных значений, показанных на рис. 108.

## Ответы и решения

### §1

- 1) Уравнение (1.8), где  $\kappa = \alpha h^2 / \tau$ .

### §2

- 1)  $Ah^2$ ;  $Ah^3/3$ ;  $2Ah^3$ ;  $\sqrt{\pi} Ah^3/4$ .

- 2)  $\partial\rho/\partial t = 0$ ;  $\rho(x, t) = \rho_0(x)$ . При данном ядре частицы не переносятся вдоль оси  $x$ , поэтому распределение плотности не зависит от  $t$ .

- 3)  $\frac{\partial\rho}{\partial t} = A \frac{\partial\rho}{\partial x}$ ;  $\rho(x, t) = \rho_0(x + At)$ . Система «перекачивает» частицы без рассеивания за время  $dt$  на расстояние  $Adt$  в отрицательном направлении оси  $x$ .

- 4)  $\frac{\partial\rho}{\partial t} = A \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$ . После подстановки в правую часть (2.4) разложения (2.7) и выполнения интегрирования в упражнении 2 остается только первый член разложения, а в упражнении 4 – только третий.

- 5) Уравнение (2.4) приобретает вид  $\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{2\tau} [\rho(x - h, t) + \rho(x + h, t)] - \frac{1}{\tau} \rho(x, t)$ . Заменяя

$\frac{\partial\rho}{\partial t}$  на  $\frac{\rho(x, t + \tau) - \rho(x, t)}{\tau}$ , получаем соотношение (1.9).



$$6) \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n K_1(|\xi|) d\xi = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n K(|\xi|) d\xi & (n = 2, 4, 6, \dots), \\ 0 & (n = 0, 1, 3, 5, \dots). \end{cases}$$

### §3

1) Умножив обе части равенства  $\nabla^2 u(P) \approx \frac{6}{r^2} [\bar{u}^{P,r} - u(P)]$  на  $r^4$ , а затем интегрируя по  $r$ ,

получаем, что  $\nabla^2 u(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{10}{r^2} [\bar{u}_{P,r} - u(P)]$ , где под  $u_{P,r}$  понимается среднее значение функции по  $u$  шару с центром в точке  $P$  и радиусом  $r$ .

$$2) \rho'_t(P, t) = A \int_{QP \leq h} \rho(Q, t) dQ - \frac{4}{3} \pi h^3 A \rho(P, t). \text{ Полагая } A = \frac{15\kappa}{2\pi h^5}, \text{ получаем при } h \rightarrow 0$$

уравнение (3.9).

### §4

$$1) \frac{d}{dt} \int \rho(x, t) dx = \int f(x, t) dx.$$

$$2) \int x^3 \rho dx = \int x^3 \rho dx \Big|_{t=t_0} + 6 \int \kappa x \rho dx (t - t_0). \text{ Обозначив для краткости } \int x^n \rho dx = M_n,$$

получаем рекуррентное соотношение  $\frac{dM_n}{dt} = \kappa n(n-1)M_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ), из которого

$$\text{находим } M_n = M_{n0} + \kappa n(n-1)M_{n-2,0}(t-t_0) + \kappa^2 n(n-1)(n-2)(n-3)M_{n-4,0} \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots,$$

где  $M_{n0} = M_n|_{t=t_0}$ , а сумма в правой части обрывается на члене с  $M_0$  или с  $M_1$  в зависимости от того, будет ли  $n$  четным или нечетным.

### §6

$$1) \rho = \frac{M}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}(b-a)} \int_a^b e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa(t-t_0)}} d\xi = \frac{M}{2(b-a)} \left[ \Phi\left(\frac{b-x}{\sqrt{2\kappa(t-t_0)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-x}{\sqrt{2\kappa(t-t_0)}}\right) \right].$$

$$2) \rho = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa(t-t_0)}} (\alpha\xi + \beta) d\xi \text{ Представив } \alpha\xi + \beta = [(\alpha x + \beta) - \alpha(x - \xi)] \text{ и}$$

раскрыв квадратные скобки, получаем

$$\rho = \frac{\alpha x + \beta}{2} \left[ \Phi\left(\frac{b-x}{\sqrt{2\kappa(t-t_0)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-x}{\sqrt{2\kappa(t-t_0)}}\right) \right] + \alpha \sqrt{\frac{\kappa(t-t_0)}{\pi}} \left[ e^{-\frac{(x-a)^2}{4\kappa(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x-b)^2}{4\kappa(t-t_0)}} \right].$$

$$3) \rho = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa(t-t_0)} + \beta\xi^2\right]} d\xi. \text{ Располагая выражение в квадратных скобках по}$$

степеням  $\xi$  и производя дополнение до полного квадрата, получаем

$$\rho = \frac{\alpha}{\sqrt{1+4\beta\kappa(t-t_0)}} e^{-\frac{\beta x^2}{1+4\kappa(t-t_0)}}.$$

### §9

$$1) \text{ Все } \bar{\xi}_i = \frac{1}{n} \bar{\xi}, \text{ поэтому } \Phi(k) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 - \frac{i}{n} k \bar{\xi} - \frac{1}{2n} k^2 \Delta_{\bar{\xi}}^2 + \dots \right), F(k) = \frac{1}{2\pi} e^{-ik\bar{\xi} - k^2 \Delta_{\bar{\xi}}^2 / 2},$$

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-k^2 \Delta_{\bar{\xi}}^2 / 2 + ik(x - \bar{\xi})} dk. \text{ Получилось выражение вида (9.6) с } x - \bar{\xi} \text{ вместо } x;$$

отсюда и следует (9.7).

### §10

- 1) Для процесса блуждания, однородного во времени, но неоднородного по  $x$ , функция влияния  $G = G(x, \xi, t - t_0)$ . Полугрупповое соотношение, взамен (10.2), приобретает вид  $G(x, \xi, t_1 + t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x_1, t_2) G(x_1, \xi, t_1) dx_1 \quad (t_1, t_2 > 0)$ .

## §11

- 1) Для любых граничных условий  $\frac{dM_2}{dt} = 2\kappa \int_0^{\infty} \rho dx$ . Поэтому для граничных условий 1-го или 3-го рода  $M_2(t)$  замедленно возрастает, а для условий 2-го рода – возрастает по линейному закону.

- 2) Для условия 1-го рода  $\rho = \frac{\rho_0}{2} \left[ 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\kappa t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-a}{\sqrt{2\kappa t}}\right) - \Phi\left(\frac{x+a}{\sqrt{2\kappa t}}\right) \right]$ ; момент 1-го порядка, после интегрирования по частям, преобразуется к виду

$$M_1 = \frac{\rho_0}{4\sqrt{\pi\kappa t}} \left[ \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{4\kappa t}} dx + \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x+a)^2}{4\kappa t}} dx - 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} dx \right].$$

Если сделать в первом интеграле замену  $x$  на  $x + a$ , а во втором на  $x - a$ , то после простых преобразований получаем, что

$$M_1 = \frac{\rho_0}{2\sqrt{\pi\kappa t}} a^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} dx = \frac{1}{2} \rho_0 a^2.$$

Для условия 2-го рода  $\rho = \frac{\rho_0}{2} \left[ \Phi\left(\frac{x+a}{\sqrt{2\kappa t}}\right) + \Phi\left(\frac{x-a}{\sqrt{2\kappa t}}\right) \right]$ ; инвариантность массы проверяется аналогично.

3)  $M_1 = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \left( \frac{1}{t} - \frac{x^2}{2\kappa t^2} \right)$ .

- 4) В силу (11.10)  $\sum_{j=1}^{\infty} j p_{j,n+1} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2} j (p_{j-1,n} + p_{j+1,n}) + \frac{1}{2} p_{2,n}$ . Разбивая в правой части

сумму на две и заменяя в первой  $j$  на  $j + 1$ , а во второй на  $j - 1$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} j p_{j,n+1} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (j+1) p_{j,n} + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{\infty} (j-1) p_{j,n} + \frac{1}{2} p_{2,n} = \\ &= \sum_{j=3}^{\infty} j p_{j,n} + \frac{1}{2} (2p_{1,n} + 3p_{2,n}) + \frac{1}{2} p_{2,n} = \sum_{j=1}^{\infty} j p_{j,n}. \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемая сумма не зависит от  $n$ . Но при  $n = 0$  она равна  $j_0$ , откуда и следует наше утверждение. Для чисел, приведенных в таблице 2, сумма принимает последовательные значения: 3000, 3000, 3000, 3000, 2997, 2996, 3001 и т.д.; непостоянство объясняется ошибками округления, сама по себе конечность  $h$  не вызывает ошибки.

5)

Таблица 2

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	$Y$
$N_{ac}$	2394	1690	1381	1197	1070	977	904	845	798
$N_{cm}$	1000	1000	875	875	781	781	712	713	659
$N_{ac} \cdot N_{cm}$	2,39	1,69	1,58	1,37	1,37	1,25	1,27	1,18	1,21

Видно, что  $N_{ac} \cdot N_{cm}$  приближается к единице, хотя и не монотонно.

- б) Дополнительное условие при игре: если у игрока остается 1 рубль, то в очередной игре этот игрок обязательно выигрывает. Соответствующая таблица 3:

Таблица 3

$n \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	500	0	500	0	0	0	0	0	0	0	0
2	250	0	500	0	250	0	0	0	0	0	0	0
3	0	500	0	375	0	125	0	0	0	0	0	0
4	250	0	438	0	250	0	62	0	0	0	0	0
5	0	464	0	344	0	156	0	31	0	0	0	0
6	234	0	406	0	250	0	94	0	16	0	0	0
7	0	437	0	328	0	172	0	55	0	8	0	0
8	218	0	384	0	250	0	114	0	32	0	4	0
9	0	410	0	317	0	182	0	73	0	18	0	2

§12

1)  $\rho(r, t) = C_0(t) + C_2(t)r^2 + C_4(t)r^4 + \dots$

§13

1) 
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} [G(x, t; 2jl + \xi, 0) + G(x, t; 2jl - \xi, 0)] = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ e^{-\frac{(x-2jl-\xi)^2}{4\kappa t}} + e^{-\frac{(x-2jl+\xi)^2}{4\kappa t}} \right].$$

2)  $M(t) = M(0) - k[\rho'(0) - \rho'(l)]t$ . Это можно получить либо с помощью повторного интегрирования по частям в формуле (13.6) и последующего удвоения результата, либо с помощью формулы (1.7) после продолжения плотности  $\rho_0(x)$  на всю ось  $x$ .

§14

1)  $\rho(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\frac{m^2 \pi^2 \kappa t}{l^2}} \cos \frac{m\pi}{l} x$ , где  $a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \rho_0(x) dx$ ,  $a_m = \frac{2}{l} \int_0^l \rho_0(x) \cos \frac{m\pi}{l} x dx$  ( $m \geq 1$ ),

$\rho(x, \infty) \equiv a_0$ .

2)  $2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin k_m \xi \left( l + \frac{\kappa}{8} \cos^2 k_m l \right)^{-1} \sin k_m x \cdot e^{-k_m^2 t}$ .

3) Имеем  $G_l(x, t; \xi, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(t, \xi) \sin \frac{m\pi}{l} x$ , где

$$B_m(t, \xi) = \frac{2}{l} \int_0^l \sum_{j=0}^{\infty} [G(x - 2jl, t; \xi, 0) - G(2jl - x, t; \xi, 0)] \sin \frac{m\pi}{l} x dx$$
. Преобразуя этот

интеграл, как при переходе к (13.4), получаем  $B_m = \frac{2}{l} \int_0^l G(x, t; \xi, 0) \sin \frac{m\pi}{l} x dx$ .

(Можно было просто заметить, что функция  $\rho_0(x) = \frac{2}{l} \sin \frac{m\pi}{l} x$  при своем

продолжении с отрезка  $0 \leq x \leq l$  на всю ось  $x$  по методу §9 воспроизводит себя, после чего применить формулу (13.4).) Подставляя выражение (6.3) для  $G$ , после чего совершая замену  $x - \xi = k$  и переходя от синуса к экспоненте, получаем

$$B_m = \frac{1}{l\sqrt{\pi\kappa t}} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{4\kappa t} + \frac{im\pi}{l}(k+\xi)} dk$$
. Применяя к этому интегралу равенство (7.6),

получаем формулу  $G_l(x, t; \xi, 0) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2 \pi^2 \kappa t}{l^2}} \sin \frac{m\pi}{l} \xi \sin \frac{m\pi}{l} x$ , из которой

непосредственно следует формула (14.10).

§15

$$1) \quad a) \quad \rho(x,t) = \int_0^{\infty} B(k) e^{-\kappa^2 t} \sin kx dk, \quad B(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_0(x) \sin kx dx;$$

$$b) \quad \rho(x,t) = \int_0^{\infty} A(k) e^{-\kappa^2 t} \cos kx dk, \quad A(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_0(x) \cos kx dx.$$

В обоих этих примерах спектр  $\lambda$  заполняет вещественную положительную полуось, а каждому собственному значению  $\lambda$  отвечает одна собственная функция.

### §17

- 1) Пусть интенсивность поступления частиц равна  $q_0$  единиц массы на единицу площади в единицу времени. Тогда решения соответственно равны  $\frac{q_0}{\kappa}(l-x)$ ,

$$\frac{q_0 r'_0}{\kappa} \ln \frac{R'_0}{r'}, \quad \frac{q_0}{\kappa} r_0^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_0} \right).$$

### §18

- 1) На основании формулы (11.6) получаем

$$\rho = \int_0^t G_1(x,t;a,t_0) s_0 dt_0 = \frac{s_0}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \left[ e^{-\frac{(x-a)^2}{4\kappa(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{4\kappa(t-t_0)}} \right] dt_0.$$

Заменяя переменную интегрирования по формуле  $t-t_0 = 1/\eta^2$  и полагая затем  $t = \infty$ , получаем  $\rho(x, \infty) = \frac{s_0}{\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta^2} \left[ e^{-\frac{(x-a)^2 \eta^2}{4\kappa}} - e^{-\frac{(x+a)^2 \eta^2}{4\kappa}} \right] d\eta$ . Интегрируя по частям,

находим

$$\rho(x, \infty) = \frac{s_0}{\sqrt{\pi\kappa}} \frac{1}{2\kappa} \int_0^{\infty} \left[ -(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2 \eta^2}{4\kappa}} + (x+a)^2 e^{-\frac{(x+a)^2 \eta^2}{4\kappa}} \right] d\eta =$$

$$= \frac{s_0}{2\kappa} [-|x-a| + (x+a)] = \begin{cases} \frac{s_0}{\kappa} x & (0 \leq x \leq a), \\ \frac{s_0}{\kappa} a & (a \leq x \leq \infty). \end{cases}$$

- 2)  $\rho = \int_0^t G(x,t;a,t_0) s_0 dt_0 = \frac{s_0}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-t_0)}} dt_0$ . После преобразования, как в

предыдущем упражнении, мы получаем выражение

$$\rho(x,t) \sim \sqrt{\frac{t}{\pi\kappa}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty).$$

Этот результат объясняется тем, что количество частиц, поступающих в систему, пропорционально  $t$ , тогда как интервал, на которой они «рассасываются», пропорционален лишь  $\sqrt{t}$ .

- 3) Надо решить уравнение диффузии на отрезке  $0 \leq x \leq l$  при нулевом начальном условии и граничных условиях  $\rho|_{x=0} = 0$ ,  $\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{s_0}{\kappa}$ . Полагая  $\tilde{\rho} = \rho - \frac{s_0}{\kappa} x$ , получаем

для  $\tilde{\rho}$  дифференциальное уравнение и дополнительные условия

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2}, \quad \tilde{\rho}|_{t=0} = -\frac{s_0}{\kappa} x, \quad \tilde{\rho}|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Применяя метод Фурье, находим  $\tilde{\rho}$ , а потому и  $\rho$ :

$$\rho = \frac{s_0}{\kappa} x - \frac{8ls_0}{\pi^2 \kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} e^{-(2m-1)^2 \pi^2 \kappa t / l^2} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l}.$$

Отсюда, в частности,  $r(x, \infty) = s_0 x / \kappa$ .

4) Уравнение  $\nabla^2 \int_{t_0}^{\infty} \rho dt = -\frac{1}{\kappa} [\rho|_{t=t_0} - \rho|_{t=\infty}] - \frac{1}{\kappa} \int_{t_0}^{\infty} s(x, t) dt$  вида (18.16). Для функции Грина

$G$ , полагая  $t_0 = -\infty$ , получаем, если  $G|_{t=\infty} = 0$ , уравнение

$\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty} G(P, t; Q, \tau) dt = -\frac{1}{\kappa} \delta(\overline{QP})$ . Для функции Грина, указанной в упражнении,

интеграл равен  $\frac{1}{\pi \kappa P Q}$ , т. е. мы приходим к известной формуле  $\nabla^2 \frac{1}{P Q} = -4\pi \delta(\overline{QP})$

(см., например, ЭПМ, гл. X).

5) Если  $\frac{\partial \rho}{\partial y} \Big|_{y=\pm\infty} = 0$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{z=\pm\infty} = 0$ , то  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \iint s dy dz$ .

### §19

1)  $\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-2\gamma \kappa F_0 t - \xi)^2}{4\kappa t}} \rho_0(\xi) d\xi$ .

### §23

1) Полагая  $\rho = \sigma_0 \frac{x}{l} \sin \frac{\pi}{l} y + C_1 \sin \frac{\pi}{l} x \sin \frac{\pi}{l} y$ , получаем

$$I[\rho] = \int_0^l \int_0^l \left[ \left( \frac{\sigma_0}{l} + C_1 \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l} x \right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{l} y + \left( \sigma_0 \frac{x}{l} + C_1 \sin \frac{\pi}{l} x \right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi}{l} y \right] dx dy =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} C_1^2 + \pi \sigma_0 C_1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) \sigma_0^2.$$

Из условия минимума  $C_1 = -\frac{1}{\pi} \sigma_0$ , откуда  $I[\rho]_{\min} = \frac{\pi^2}{6} \sigma_0^2 = 1,645 \sigma_0^2$ ; значение

	40	80	120	
0	22,62	40,74	43,96	0
0	9,76	16,40	15,09	0
	0	0	0	

a)

	0	0	0	
0	16	33	16	0
0	33	100	33	0
0	16	33	16	0
	0	0	0	

б)

	50	100			
0	44	85	100		
0	42	96	200	100	
0	29	59	86	52	0
0	14	26	33	21	0
	0	0	0	0	

в)

Рис. 109

решения в центре квадрата  $\rho_y = 0,1817 \sigma_0$ . При другой базисной функции получаем

$$\rho = \sigma_0 \frac{x}{l} \sin \frac{\pi}{l} y - \frac{15}{\pi} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{y}{l} \left(1 - \frac{y}{l}\right), \quad I_{\min} = \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{\pi^2} + \frac{\pi^2}{6} \right) \sigma_0^2 = 1,579 \sigma_0^2 \quad \rho_y = 0,2016 \sigma_0.$$

Так как во втором случае  $I_{\min}$  получилось меньше, то естественно ожидать, что второе решение является более точным.

2) Утверждение вытекает из равенства  $\frac{d}{dt} I[\rho] = -2\kappa \int_{(\Omega)} (\nabla^2 \rho)^2 d\Omega$ , которое доказывается

с помощью преобразований, аналогичных проведенным в тексте.

#### §24

- 1) Если принять рис. 109 за нулевое приближение, то 4-е приближение совпадает с 3-м и дает результат, показанный на рис. 109, *а*. Отметим, что описанный порядок действий, когда несколько первых приближений вычисляются с меньшей точностью, а последующие – с большей, часто оказывается целесообразным, при «ручных» вычислениях.
- 2) См. рис. 109, *б* и *в*.