Ф. Клейн

ЛЕКЦИИ о РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ в XIX столетии

I

Ф. Клейн

ЛЕКЦИИ о РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ в XIX столетии

Том I

ПОДГОТОВЛЕНО К ПЕЧАТИ
Р. Курантом и О. Нейгебауером

Перевод с немецкого *Н.М. Нагорного*

Под редакцией *М.М. Постникова*

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22г
К48
УДК 51 (091)

Felix Klein
Vorlesungen über die Entwicklung
der Mathematik
im 19. Jahrhundert
Teil 1
Für den Druck bearbeitet
von R. Courant und O. Neugebauer

Berlin
Verlag von Julius Springer 1926

К л е й н Ф. **Лекции о развитии математики в XIX столетии**: В 2-х томах. Т. I: Пер. с нем./Под ред. М.М. Постникова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 456 с. – ISBN 5-02-013920-3.

Новый перевод первого тома классического труда по истории математики девятнадцатого столетия, написанного выдающимся немецким математиком, педагогом и деятелем математического просвещения Ф. Клейном (1849–1925).

Первый перевод выходил в 1937 г.

Для студентов, преподавателей, научных работников и любителей математики.

К $\dfrac{1602010000 - 011}{053(02)-89}$ 18-89

ISBN 5-02-013920-3

ПРЕДИСЛОВИЕ[1]

Христиан Феликс Клейн – таково полное имя Клейна – родился в 1849 г. в семье чиновника, в которой царил "истинно немецкий старопрусский" дух. Неудивительно поэтому, что общественно-политическая деятельность Клейна – в отличие от научной – имела консервативное "охранительное" направление, хотя он и не был конформистом и его личная честность приводила иногда к конфликтам. Например, в 1914 г. тайный советник, член палаты господ Клейн отказался поставить свою подпись под печально известным, насквозь проникнутым духом шовинизма воззванием Оствальда, в котором снималась всякая ответственность рейха за возникновение первой мировой войны и ее ужасы и которое сочла возможным подписать почти вся научная элита Германии.

Еще студентом Клейн становится ассистентом престарелого Плюккера. Мы знаем Плюккера как выдающегося геометра, стоявшего у истоков современной геометрии, чьи идеи и до сих пор сохранили свою актуальность. Но Плюккер был также и талантливым экспериментатором, сделавшим целый ряд открытий в физике. Поразительно, что уже в наше время обе, казалось бы, никак друг с другом не связанные, области деятельности Плюккера обрели синтез в теории твисторов Пенроуза. Случайность ли это, или мы здесь имеем дело с проявлением какой-то закономерности?

Общение с Плюккером безусловно оказало глубокое воздействие на Клейна, который навсегда сохранил вкус к конкретным постановкам проблем, ценил и использовал связи математики с естествознанием, умел соединять подъем на высоты абстракции с яркостью образного геометрического и физического мышления. Клейн прохладно относился к типу мышления, который обычно – но справедливо ли? – связывается с име-

---

[1] В основной своей части настоящее предисловие является сокращенным – зачастую с точным сохранением текста – переизложением предисловия М.Я. Выгодского к первому русскому переводу "Лекций" Клейна (ОНТИ, 1937). Разумеется, ответственность за содержание этого предисловия всецело несем мы. – *Н.М. Нагорный, М.М. Постников.*

нем Вейерштрасса и ставит во главу угла строго логический анализ математических соотношений вне какой-либо связи с практикой.

В 1868 г. после смерти Плюккера на плечи Клейна легла подготовка к печати рукописей его учителя и, в частности, второй части его замечательного сочинения "Новая геометрия пространства...", вышедшей в свет в 1869 г. Отсюда берет свое начало и самостоятельная работа Клейна в области геометрии. Прошло каких-нибудь два-три года, и Клейн уже оформил круг идей, определивший всю его последующую научную работу. Большую роль в этом сыграли его встречи в 1870 г. с Софусом Ли, с которым Клейн продолжал сохранять – до самой смерти Ли в 1899 г. – самый тесный личный и научный контакт.

В октябре 1872 г. Клейн публично излагает свои уже окончательно выкристаллизовавшиеся идеи в лекции, прочитанной им при вступлении в должность профессора математики Эрлангенского университета. Эта лекция дает настолько ясную и отчетливую перспективу дальнейшего развития математики, что она по праву получила в обиходе математиков имя "Эрлангенской программы". Ее идеям была суждена обычная судьба больших научных парадигм: принятые сначала отнюдь не всеми и с большим скептицизмом, они быстро завоевали популярность, а ныне рассматриваются как само собой разумеющиеся тривиальности.

Следующие десять-двенадцать лет жизни Клейна были посвящены интенсивнейшей научной работе в целом ряде областей математики – от неевклидовой геометрии, где он впервые поставил на твердую почву гиперболическую геометрию Лобачевского, до теории алгебраических уравнений и эллиптических функций. Именно Клейну мы обязаны в теории римановых поверхностей открытым привлечением физических соображений к решению чисто математических проблем. По сообщению Клейна подобного рода соображениями руководствовался еще сам Риман, но Клейн был первым, кто сделал это в явном виде без боязни упреков в нарушении чистоты метода. Конечно, в дальнейшем все утверждения Римана – Клейна были обоснованы в строгом духе Вейерштрасса.

В 1882 г. Клейна постигла катастрофа – соперничая с Пуанкаре в построении теории автоморфных функций, он надорвался, тяжело заболел и вынужден был навсегда прекратить научную работу по математике.

Активная натура Клейна нашла теперь другой выход и проявилась в организационной, педагогической, литературной и общественной деятельности, поражающей своей продуктивностью. По мнению многих на этих поприщах Клейном были созданы, быть может, еще более значительные ценности.

В промежутке между 1882 и 1898 гг. были изданы монографии Клейна, в которых систематически излагались методы и результаты его обширных исследований – по римановой теории функций, по теории икосаэдра, по теории эллиптических модулярных функций (совместно с Фрике), первая часть теории автоморфных функций (также совместно с Фрике; заключительная третья часть вышла в 1912 г.) и первая часть теории волчка (совместно с Зоммерфельдом; последняя четвертая часть вышла в свет в 1910 г.). Эти книги до сих пор сохранили определенное значение; лекции Клейна по икосаэдру вскоре выходят в русском переводе в издательстве "Наука".

В 1886 г. Клейн переезжает в Гёттинген, который становится его постоянным местопребыванием до конца жизни. Здесь он с жаром отдается педагогической работе; избавленный от чтения обязательных курсов, Клейн ведет в течение ряда лет факультативные курсы по самым разнообразным вопросам, начиная с теории чисел и кончая технической механикой. И каждый из этих курсов блещет мастерством изложения, глубиной и оригинальностью постановки проблем и, главное, многосторонностью связей, ведущих от одних вопросов к другим, казалось бы, совершенно посторонним.

Лекции Клейна привлекали многочисленных слушателей, съезжавшихся в Гёттинген буквально со всех концов света. Многие из этих лекций, тщательно записанные, были изданы сначала литографским способом, а потом и типографским. Две из этих книг — "Высшая геометрия" и "Неевклидова геометрия" — появились и на русском языке (ГОНТИ, 1939 и ОНТИ, 1935), правда, в не очень удачных переводах — переводить Клейна всегда трудно!

Записи лекций Клейна, даже не опубликованные, читались и перечитывались несколькими поколениями математиков, и многие могут назвать себя — прямо или косвенно, в большей или меньшей мере — учениками Клейна. К их числу принадлежит и один из нас — к сожалению в меньшей, чем в большей мере.

В лекциях Клейна ярко проявляются его синтетические тенденции; имея в виду показать математическую дисциплину в ее целостности, Клейн старается возможно шире охватить ее возможные применения и вместе с тем представить ее — и всю математику — как составную часть общечеловеческой культуры.

Интерес к технике никогда не покидал Клейна и он живо чувствовал связь между математической теорией и инженерной практикой. Приобретя в Гёттингене определенный вес, Клейн выступил с предложением приблизить университетское преподавание к интересам техники и создать в германских университетах специальные факультеты технической физики. Но, встретив сопротивление прусского Министерства народного просвешения, в ведении которого находились университеты, он был вынужден ограничиться организацией инженерно-физического преподавания — в основном на собранные им же приватные средства — лишь в Гёттингенском университете.

Затем последовало создание при Гёттингенском университете научно-исследовательских институтов по электротехнике, аэро- и гидромеханике, математической статистике и т.д. и т.п. Эти гёттингенские институты получили мировую известность, привлекая к себе ученых и инженеров со всего света. Они во многом способствовали выдвижению немецкой технической науки на одно из первых мест в мире.

Неоценим вклад Клейна в реорганизацию всей системы народного образования в Германии. Идеи Клейна, вкратце изложенные в его "Элементарной математике с точки зрения высшей" (ГТТИ, 1933, и "Наука", 1987), актуальны для нашей школы и поныне. Клейн полагал, что всему образованию должен быть придан естественно-научный уклон, а математика должна преподаваться не как замкнутая в себе логическая дисциплина, но как составная часть обшей системы человеческих знаний, изложение которой должно начинаться с наглядных представлений и лишь постепенно — и очень медленно! — вести ученика к абстрактным построениям.

В 1908 г. Клейн совместно с американцем Смитом организует международную комиссию по изучению постановки преподавания математики во всех странах мира. Колоссальное по замыслу предприятие было прервано мировой войной, но возглавлявшееся Клейном германское отделение комиссии довело работу до конца, выпустив в 1909–1916 гг. пять томов своих трудов.

Уже перечисленных областей деятельности было бы более чем достаточно, чтобы полностью поглотить силы самого энергичного человека. Но Клейн обладал поистинне гигантской энергией и умел совместить все эти обязанности с целым рядом других, быть может, еше более трудоемких.

До самой своей смерти, в течение более пятидесяти лет, Клейн руководил журналом "Mathematische Annalen" и сделал его ведушим математическим журналом Германии и всего мира. Он более двадцати лет возглавлял издание Полного собрания сочинений Гаусса — работа, потребовавшая колоссального труда по собиранию и изучению неопубликованного наследия Гаусса. Клейн стоял также во главе еше более грандиозного литературно-математического начинания — издания полной энциклопедии математических наук, долженствовавшей объять не только собственно математику, но в полном соответствии с обшими методологическими установками Клейна — механику, геодезию, астрономию и физику. Конечно, столь грандиозный проект не мог получить завершения, но вышедшие тома принесли большую пользу и до сих пор служат ценным источником справок.

Время Клейна отнимала, конечно, и его деятельность в качестве члена палаты господ — верхней палаты прусского парламента, в которой он был представителем Гёттингенского университета.

Скончался Клейн 22 июня 1925 г.

Придавая большое значение истории математики, Клейн первым отважился взяться за XIX век. Для этого необходимо было обладать энциклопедическим образованием и широким взглядом на здание науки в целом, чтобы из огромной, поистине необозримой массы материала выбрать наиболее значительное и четко выявить связи, объединяюшие многочисленные кирпичи этого здания в одно величественное целое. Клейн взялся за эту задачу и успешно ее выполнил. При чтении книги Клейна перед нами развертывается широкая панорама, на которой четко различаются большие дороги развития науки и рельефно показаны отдельные фигуры и группы людей, их прокладывавшие. Дела и люди, описываемые Клейном, зарисованы с необычайной живостью и глубиной. Перед нами встает живой образ Гаусса, и мы знакомимся с интимнейшими приемами его творчества; развертывается бурная деятельность Политехнической школы, закаленной в огне Французской революции и наполеоновских войн; Клейн вводит нас в дом Дирихле и Якоби, знакомя с личными взаимоотношениями основателей современной математики, и мы имеем возможность видеть столкновение различных тенденций в развитии науки, как они преломляются в сознании ее творцов. Иногда одно запечатленное Клейном крылатое слово освещает, как вспышкой магния, общую картину и в кратком афоризме резюмирует характерные черты того или иного направления творческой мысли: "Для гауссовой строгости мы не имеем времени, господа!".

Эта яркость изображения обусловливается не только блестящим литературным талантом Клейна, но и тем, что для него люди и факты, о которых он повествует, – живые люди и живые факты. Большинство деятелей науки, о которых Клейн говорит, либо были его современниками и лично общались с ним, либо, как Гаусс и Риман, оставили после себя глубокий след в научных кругах, в которых вращался молодой Клейн.

Конечно, преимущества, которыми обладает книга, написанная живым участником исторического развития, имеют и оборотную сторону – ее автору практически невозможно избежать субъективизма как в отборе материала, так и в его освещении. Нетрудно заметить, что с особенной любовью Клейн пишет о вопросах, которые были близки ему в личной работе, а, например, теории вероятностей он фактически не уделяет никакого внимания. Не случайно, конечно, Клейн ничего не говорит и о русских математиках; даже имя Чебышева в его книге ни разу не упоминается. Допускает Клейн и отдельные фактические ошибки.

При подготовке повторного перевода "Лекций" Клейна основное внимание было уделено по возможности более точной передаче клейновской мысли и сохранению в неприкосновенности – без модернизации и видоизменений – общего духа его сочинения.

За немногими исключениями, оговоренными в подстрочных примечаниях, сохранена и авторская терминология. Формулировки теорем изменены лишь в тех немногих и концентрирующихся к концу книги случаях, когда они содержат лакуны и неточности – надо думать из-за того, что записывавшие лекции студенты их не вполне понимали, а сам Клейн не успел эти записи просмотреть.

Большое внимание было уделено также сохранению яркого и эмоционального стиля Клейна, существенное значение которому придавал и сам автор.

Ни переводчик, ни редактор не ставили себе целью комментировать Клейна, хотя в отдельных местах комментарии и напрашивались. Подстрочные примечания ограничены лишь самым необходимым минимумом: указанием на русские издания цитированных Клейном книг, переводом латинских и французских выражений, разъяснением отдельных реалий и т.п. Естественно, никаких попыток как-то дополнить или "усовершенствовать" текст Клейна не предпринималось.

К книге Клейна приложен уже выходивший на русском языке (см. Вейль Г. Избранные труды. – М.: Наука, 1984) перевод произнесенной при открытии Гёттингенского математического института речи Германа Вейля "Феликс Клейн и его место в современной математике" с комментариями А.Н. Паршина.

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

В процессе работы над переводом я пользовался помощью целого ряда лиц и хотел бы каждому из них в отдельности выразить мою глубокую благодарность. К сожалению, трудно – и фактически невозможно – упомянуть всех поименно. Я с особой признательностью и печалью вспоминаю всегда охотно приходившую мне на помощь в трудных языковых ситуациях Елизавету Викторовну Журавлеву, скончавшуюся, когда книга уже находилась в печати. Я чрезвычайно благодарен также редактору перевода Михаилу Михайловичу Постникову, который своей в высшей степени конструктивной критикой рукописи способствовал устранению многих недочетов изложения. Наконец, я хотел бы совершенно особо поблагодарить профессора Гейдельбергского университета Герта Х. Мюллера, благодаря дружественной инициативе которого я имел возможность посетить Гейдельберг, Гёттинген и другие, связанные с этой книгой места. Воспоминания о них, о подлинных рукописях Гаусса, Римана, Гильберта, Клейна, которые мне довелось держать в руках, стимулировали меня, и я не раз черпал в них силы, требовавшиеся для завершения этой работы.

Разумеется, я не могу – и не должен – сопоставлять предлагаемый перевод с предшествующим. Однако считаю своей обязанностью отметить, что его наличие в ряде случаев облегчило мне принятие отдельных переводческих решений.

Москва, март 1988 г. *Н.М. Нагорный*

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ НЕМЕЦКОГО ИЗДАНИЯ

Вряд ли труд, написанный историком, способен произвести на читателя столь сильное впечатление и открыть перед ним возможность такого глубокого проникновения в сущность истории, как мысли и воспоминания крупного государственного деятеля, который на протяжении всей своей долгой жизни, находясь на видном посту, лично вторгался в мирские судьбы и в своем творении соединил высокие достоинства глубокого интеллека с огромной силой художественного выражения и писательским мастерством.

Подобного рода труды, редкостные даже для политической истории и представляющие для нее исключительную ценность, в истории точных наук до сих пор, пожалуй, не создавались. И когда год тому назад Феликс Клейн скончался, нам показалось тем более необходимым не медлить с изданием его лекций по истории математики и математической физики в XIX столетии.

Лекции эти – зрелый плод богатой внутренней жизни, протекшей в самом средоточии научных событий; в них нашли свое выражение высочайшая мудрость и глубокое чувство истории, высокая человеческая культура и сила изображения, присущая мастеру, и они, вне всякого сомнения, окажут огромное воздействие не только на всех математиков и физиков, но и на тех, кто находится далеко за пределами этого профессионального круга. В эпоху, когда и в науке человеческие взоры сверх всякой меры прикованы к злободневному, когда существует тенденция неестественно преувеличивать частности, утрируя их значение в ущерб целому, творение Клейна многим вновь откроет глаза на взаимосвязи, имеющиеся в нашей науке, и на общее направление ее развития.

Распространившиеся в многочисленных машинописных копиях, лекции эти произвели сильное впечатление еще при жизни Клейна. Клейн читал их в первые годы войны у себя на квартире для узкого круга слушателей и с перерывами продолжал это чтение до 1919 г. Первоначальным толчком к лекциям послужил план написания некоего более развернутого труда в рамках серии "Современная культура" ("Kultur der Gegenwart"). Однако до осуществления этого намерения дело так и не дошло.

Сам Клейн в последние годы думал над тем, чтобы – в известном смысле завершая дело своей жизни – еще раз основательно переработать и дополнить эти лекции и затем опубликовать их в виде отдельной книги.

Его болезнь и последовавшая затем смерть помешали осуществлению этого проекта, и, таким образом, на долю тех, кому было доверено издание клейновского наследия, выпал нелегкий жребий решать вопрос о том, позволительно ли – и если да, то в какой степени – дополнять и изменять эти лекции. Мы остановились на том, что в текст, написанный самим Клейном, следует внести возможно меньшее число изменений и ограничиться лишь исправлениями фактического порядка, небольшими дополнениями и необходимыми переделками чисто внешнего характера. Разумеется, труд этот в виде, в каком он сейчас выходит в свет, по неизбежности несет на себе отпечаток фрагментарности и незавершенности; это скорее набросок, чем законченное, уравновешенное историческое сочинение. Изложение по характеру своему, безусловно, неоднородно. Наряду с материалом, представляющим огромный всеобщий интерес и изложенным вполне доступно, мы находим, особенно в конце книги, немало мест, где автор вдается в детали; второй том будет полностью посвящен изложению одной-единственной дисциплины – общей теории инвариантов и теории относительности в ее историческом развитии. Не везде выдержана и равномерность исторического освещения; в этом отношении, например, характерно, что в книге не отдано должное теории чисел, алгебре и теории множеств; имеются в ней и высказывания и оценки, выглядящие, пожалуй, несколько субъективными. Первоначально планировавшиеся главы о Пуанкаре и Ли вообще отсутствуют. Но какую роль может играть все это по сравнению с живым духом, веющим на нас с каждой страницы клейновской рукописи? И уже по одной этой причине было бы неправильным исправлять и дополнять ее, даже если бы достойное выполнение такой задачи и не в столь сильной степени превосходило наши силы.

Тем не менее при издании книги потребовалось проделать значительную работу, и бóльшую ее часть взял на себя младший из редакторов.

Мы чувствуем себя обязанными принести сердечную благодарность ряду коллег за ценные советы и помощь при чтении корректур; в частности – господину Каратеодори из Мюнхена, господину Стройку из Дельфта, господину Мюллеру из Ганновера; однако в первую очередь хотелось бы поблагодарить господина Бесселя-Хагена из Гёттингена, чья тщательность при чтении корректур и проверке исторических фактов оказала нем неоценимую услугу.

Гёттинген, август 1926 г.

Р. Курант[1]
О. Нейгебауер[2]

---

[1] Род. в 1888 г., умер в 1972 г. – *Примеч. пер.*
[2] Род. в 1899 г. – *Примеч. пер.*

ВВЕДЕНИЕ

При любых попытках так или иначе охватить духовную жизнь наших дней со всеми многочисленными ее ответвлениями и дать о ней – или, по крайней мере, об основных ее явлениях – законченное и обозримое представление у всякого интересующегося математикой возникает понимание того, что в подобного рода обзорах культурообразующих факторов современности наша наука отсутствовать не может; что, более того, следует попытаться отвести математике место, которое приличествует ей как одной из древнейших и благороднейших форм деятельности человеческого духа и как одной из сил, оказывающих решающее влияние на направление его развития, и которое она, увы, так редко занимает в сознании образованной публики – во всяком случае, у нас в Германии. Вина за это неутешительное положение вещей, пожалуй, в первую очередь ложится на одно обстоятельство, которое немалые трудности создает и на пути решения нашей задачи. Дело в том, что математика – как никакая другая наука – представляет собой сооружение, возведенное на основе небольшого числа исходных принципов по законам, действие которых носит принудительный характер. Эта исключительность ее строения, выделяющая математику среди других наук и придающая ей ее прославленную "ясность", делает ее вместе с тем и наименее доступной из всех наук, ибо каждый, кто пожелает глубоко вникнуть в нее, должен будет собственным трудом шаг за шагом повторить весь путь, по которому она развивалась, так как ни одним математическим понятием невозможно овладеть без предварительного усвоения не только всех предшествующих понятий, но и тех взаимосвязей, которые привели к его формированию.

Понятно, что эта суровая и непреклонная замкнутость математики делает ее в весьма малой степени пригодной для удовлетворения интересов непосвященного, направленных только на самые общие вопросы, ибо его цели не идут дальше того, чтобы в самых общих чертах и разве лишь приблизительным образом схватить суть чуждой ему области знания и получить кое-какое представление о ее своеобразии и красоте. И если, несмотря на сказанное, мы будем выпускать в свет нечто служащее достижению этой цели, то в любом случае придется сильно ограничить выбор материала и отрезать многое, знакомство с чем само по себе было бы желательно. Речь может пойти лишь о том, чтобы дать представление о вопросах, которыми занимаются математики, о безграничном разнообразии проблем, которые эта наука в своем поступательном движении мало-помалу пытается включить в подвластную ей область. При этом нельзя будет обойтись и без некоторой, можно сказать, "pia fraus"[1]. Все систематическое, для понимания чего требуется самостоятельная работа читателя, придется свести к минимуму. Историческое же развитие, напротив, нужно будет выдвинуть на передний план, так как естественный интерес к процессу созидания всегда невольно увлекает читателя. Та "pia fraus", о которой мы только что говорили и без которой едва ли может обойтись популярное изложение этой строгой в своей завершенности области знания, в том именно и заключается, что у читателя создается уверенность, что он приблизился к пониманию вещей, в то время как на самом деле он схватил лишь внешнюю их форму. Наконец, точкой соприкосновения с любым образованным читателем может служить акцент на воздействии, которое математика оказывает на смежные с ней области, а также живое изображение ее взаимоотношений со всей нашей культурной жизнью в целом.

Дать связное изложение того, как математика развивалась в XIX столетии, гораздо более трудно, чем изложить, например, ее развитие в древности и в средние века или же в XVI, XVII и XVIII столетиях. Действительно, если истории математики древних и средних веков приходится иметь дело с еще сравнительно элементарными вещами, а XVI, XVII и XVIII столетия составляют эпоху, по сути своей носящую целостный характер, причем достижения ее благодаря их связям со смежными областями без особого труда понятны и неспециалистам, то обращение к XIX столетию немедленно демонстрирует, с насколько иной ситуацией сталкиваемся мы в этом случае.

Наиболее важным событием предшествующей XIX столетию эпохи является начавшееся примерно с 1700 г. развитие дифференциального и интегрального исчислений, открывшее совершенно новые перспективы перед механикой и астрономией. Своего кульминационного пункта развитие это достигло в двух трудах французских математиков, которые хотя и были завершены лишь в XIX столетии, но по своей форме и по содержанию принадлежат еще XVIII веку. Это "Mécanique analytique" ("Аналитическая механика") Лагранжа, в двух томах, 1811–1815 гг.[2] и "Mécanique céleste" ("Небесная механика") Лапласа, в пяти томах, 1799–1825 гг.

---

[1] Благочестивая хитрость (*лат*). – *Примеч. пер.*

[2] Первое (однотомное) издание вышло в 1788 г.

Любой математик, интересующийся развитием своей науки, должен и сегодня знать эти труды. Возможно, рядом с ними я должен был упомянуть труд Лежандра "Exercises de calcul intégral" ("Упражнения по интегральному исчислению"), в трех томах, 1811–1819 гг. В нем подытожены исследования по интегралам по состоянию на указанное время, причем в основном с вычислительной точки зрения (таблицы эллиптических и эйлеровых интегралов; напомним, кстати, что примерно с 1500 г. началось распространение десятичных дробей и что около 1600 г. были изобретены логарифмы).

Разумеется, наряду с этими крупными достижениями в прикладной математике XVIII столетие добилось определенных успехов и в области чистой математики. Имея возможность подчеркнуть лишь несколько наиболее важных моментов, я напомню о труде Ньютона "Enumeratio linearum tertii ordinis" ("Перечисление кривых третьего порядка"), об Эйлере и о Лагранже, которым мы обязаны крупными достижениями в области алгебраических уравнений, многими теоретико-числовыми результатами и теоремой сложения эллиптических интегралов. И все же по сравнению с теми мощными творениями, которыми союз чистой и прикладной математики ответил на запросы своей эпохи, независимое развитие чистой математики отступает здесь на второй план.

Совершенно по-иному выглядит XIX столетие. Правда, прикладная математика не прекращает своего развития и тут. Более того, она охватывает все новые и новые области, о чем свидетельствует хотя бы тот факт, что в этот период была полностью создана "математическая физика" — этот арсенал теоретических средств для исследования областей физики, не укладывающихся в рамки механики. Но вместе с нею на передний план стала властно выступать и чистая математика, причем с одинаковой силой в двух различных направлениях: с одной стороны, стали создаваться новые области — такие, как теория функций комплексной переменной и проективная геометрия, с другой — были подвергнуты критическому пересмотру научные ценности, унаследованные от прошлого, как этого потребовало пробудившееся чувство строгости, несколько отошедшее на второй план в изобиловавшем новыми открытиями XVIII столетии.

Наряду с этими в идейном отношении новыми направлениями на научную жизнь стали оказывать влияние крупные социальные сдвиги, вызванные французской революцией и историческими событиями, последовавшими за ней. Демократизация взглядов привела к распространению культуры, а внутри культуры — к строгой специализации отдельных научных направлений. В соответствии с требованиями времени важное значение стала приобретать преподавательская деятельность. Возможность профессионально заниматься наукой, не стесняемая больше ни сословными, ни классовыми различиями, привела к немыслимому прежде наплыву лиц, руководствовавшихся при этом совершенно новой целью — получить ставшую теперь такой важной профессию преподавателя. С этого и началось перемещение центра тяжести научной жизни, основными носителями которой стали не академии, а высшие учебные заведения. Во Франции после первых попыток, предпринятых в Нормальной школе ("École Normale), это развитие началось с Монжа и основания Политехнической школы (École Polytechnique) в 1794 г., а в Германии – с Якоби, который в 1827 г. нечто аналогичное основал в Кёнигсберге.

Под давлением необычайно разросшихся и ставших чрезвычайно многообразными проблем начинается упоминавшаяся уже специализация наук. Математика отделяется от астрономии, геодезии, физики, статистики и т.д. Безмерно возрастает количество квалифицированных математиков-специалистов. Ими начинают становиться представители самых дальних наций. При таком экстенсивном развитии отдельных исследований даже самый универсальный ум оказывается уже не в состоянии синтезировать в себе целое и плодотворно применять его вне себя самого. Вместо живого личного общения ученых начинает возникать огромная литература (особенно периодическая), устраиваются большие международные конгрессы и создаются разного рода организации, стремящиеся поддерживать связь друг с другом.

Не вызывает никаких соменений, что в толкотне этого современного развития научная жизнь утратила многие свои ценные черты. Мы уже не можем испытывать того восхищения, которое вызывала небольшая группа избранников, представлявших нашу науку в XVIII столетии. Академики, свободные от национальных барьеров и непрерывно, путем личной переписки обменивающиеся друг с другом научными идеями, они плодотворнейшее научное творчество сочетали с идеальным, гармоничным развитием собственной личности. Одна из характерных черт того времени состояла в том, что ученый обладал богатейшими познаниями за пределами своей специальности и всегда ощущал живую связь с развитием науки, которую он воспринимал как единое целое. Не забудем, что ньютоновская теория всемирного тяготения получила во Франции признание благодаря Вольтеру. Это стремление к универсальности выходит и за рамки науки, ища связи со всеми культурными ценностями, с религией, искусством и философией. Во всем чувствуется великая цель – усовершенствование человечества. Проявлением этого является и тенденция излагать научные работы в связном и завершенном виде, представляя образованному читателю законченное целое. Лаплас сопровождает свою "Mécanique céleste" предназначенным для широкой публики "Изложением системы мира" ("Exposition du système du monde"), свою "Théorie analytique des probabilités") ("Аналитическую теорию вероятностей") – эссе "Essai philosophique sur les probabilités" ("Опыт философии теории вероятностей"). Конечно, красоты этой кристально ясной, законченной, классической манеры изложения даются не без потерь: по этим шедеврам часто почти невозможно представить себе историю их возникновения. Вследствие этого читатель лишается своеобразной, а для самостоятельного ума и величайшей радости – под руководством мастера еще раз заново открыть однажды уже найденные им результаты. В этом смысле творениям классической эпохи недостает внимания к собственно воспитательной задаче. Мысль, что читателя нужно не только услаждать и поучать, но что в нем надо будить силы, которые вели бы его дальше, побуждать его к самостоятельной деятельности (такое влияние исходит, например, из работ Монжа, Якоби и Фарадея), целиком принадлежит XIX столетию[1].

И если мы по многим причинами отказались от идеала универсальности XVIII столетия (и даже вынуждены были сделать это), то все же уместно, рассматривая ставшее нам сегодня привычным функционирование науки, вспомнить и о его преимуществах. Теперь в каждой культурной стране имеются сотни продуктивно работающих математиков, каждый из которых владеет лишь очень небольшим уголком своей науки, и уголок этот — понятным образом — представляется ему важнее всех остальных. Плоды своей работы он публикует в виде разрозненных статей во многих, по возможности разноязычных, разбросанных по всему свету журналах. Изложение, рассчитанное лишь на коллег-специалистов, не содержит в себе намека на какую-либо связь с крупными общими вопросами, а для широкого круга читаталей оно совершенно несъедобно.

Мы, конечно, не будем возрождать однажды утраченное и не станем перечислять преимуществ, с помощью которых можно было бы пытаться добиться компенсации за понесенный убыток. Не будет речи и о предложениях, направленных на улучшение существующего положения. Нет, все это ставит перед нами один-единственный вопрос: как нам разобраться во всем этом запутанном историческом процессе? Как надо построить изложение, чтобы широкому кругу читателей стал ясен ход этого процесса, его единство и существующие в нем взаимосвязи?

Моя точка зрения состоит в следующем. Конечно, было бы важно собрать все существенное воедино. Но это составляет задачу нашей большой "Энциклопедии математических наук" ("Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften"), деятельность которой мы не должны дублировать. Мы совершенно не достигли бы поставленной цели, если бы создали нечто вроде сокращенного варианта этой энциклопедии. Неприемлема и сама собой приходящая на ум идея выделить основные области и изложить их в систематическом виде. Мне хотелось бы дать лишь ряд беглых, разрозненных набросков, касающихся либо деятельности, которой посвятили свою

---

[1] Ситуация, обрисованная в этом абзаце, строго говоря, относится лишь к концу XVIII столетия. Так, например, Эйлер ведет читателя по пути, пройденному им самим, даже предостерегает его от возможных ошибок и довольно часто рассказывает о неудавшихся собственных попытках, предпринятых до того, как был найден правильный путь. Он сообщает также о непреодоленных до той поры трудностях и указывает, насколько может, путь, который по его мнению надлежит испробовать, тем самым стараясь побудить читателя к самостоятельной деятельности. То, что Клейн не оценил этой установки Эйлера, объясняется просто тем, что он никогда, по его собственным словам, детально не занимался сочинениями Эйлера. — *Примеч. ред. нем. изд.*

жизнь отдельные выдающиеся личности, либо целей и достижений тех или иных научных школ. При этом я совершенно не буду претендовать на какую бы то ни было полноту и наперед отказываюсь от педантичных предварительных штудий. Речь будет идти лишь о том, чтобы в сколько-нибудь сносном виде обрисовать общий характер и смысл того или иного достижения.

В любом случае во главу своего изложения я должен поставить первый большой раздел, целиком посвященный одному Гауссу. Гаусс не только в хронологическом отношении стоит в начале XIX столетия. Он служит еще и отправным пунктом многих новых отраслей науки этого столетия. Изучение великой личности Гаусса тем более подходит в качестве введения в излагаемый здесь предмет, что в этом человеке мы встречаемся со своеобразным, весьма счастливым соединением духа обеих эпох, на рубеже которых он стоит.

В своем внешнем проявлении, т.е. в характере воздействия на своих современников, Гаусс является еще типичным представителем XVIII столетия. Как раз у него мы встречаемся с научными связями в виде обширной переписки с немногими избранными учеными; он выделяется классической формой своих трудов, как выделялись ею лишь его предшественники. К этим его чертам присоединяется и определенная антипатия к педагогической деятельности, которую он, правда, понимал как преподавание основ предмета (от руководства отдельными высокоодаренными учениками Гаусс не отказывался). Но как раз в этом пункте он оказывается более консервативным, чем старший по годам Монж, который упоминавшимся уже основанием Политехнической школы (1794 г.) предвосхитил тот характер, который развитие математики приобрело в XIX столетии. Однако в то время как круг математических идей Монжа все еще пребывал в рамках XVIII века, Гаусс своими совершенно оригинальными идеями открыл поистине новую эпоху.

Глава первая

ГАУСС

Сначала приведем некоторые биографические данные.

Родился Гаусс в 1777 г. в Брауншвейге. В 1795–1798 гг. был студентом в Гёттингене. В 1799 г. получил степень доктора в Хельмштедте и стал приват-доцентом в Брауншвейге. С 1807 г. и до конца жизни был директором обсерватории[1] и ординарным профессором Гёттингенского университета. Скончался в 1855 г.

Научное наследие Гаусса в удобном для изучения виде стало доступно после выхода в свет его "Трудов" ("Werke"), изданных Гёттингенским научным обществом[2],[3].

---

[1] Серьезная организационная деятельность по созданию Гёттингенской обсерватории началась в 1811 г. при Жероме Бонапарте, но открыта обсерватория была только в 1816 г., уже после возвращения Ганноверской династии.

[2] Материал в "Трудах" расположен в следующем порядке: т. 1 – Disquisitiones Arithmeticae (Арифметические исследования); т. 2 – Высшая арифметика; т. 3 – Анализ; т. 4 – Теория вероятностей и геометрия; т. 5 – Математическая физика; т. 6 – Работы по астрономии; т. 7 – Теоретическая астрономия; т. 8 – Дополнения к тт. 1–4; т. 9 – Геодезия, продолжение т. 4; т. 10,1 – Дополнения к работам по чистой математике; т. 11,1 – Дополнения к работам по физике; тт. 10,2 и 11,2 содержат статьи о научном наследии Гаусса.

[3] На русском языке см.: Гаусс К.Ф. Избранные труды по земному магнетизму. – М.: Изд-во АН СССР, 1952; Гаусс К.Ф. Избранные геодезические сочинения. – М.: Изд-во геодезич. лит-ры, т. 1, 1957; т. 2, 1958; Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. – Изд-во АН СССР, 1959.

См. также: Карл Фридрих Гаусс: Сборник статей к 100-летию со дня смерти. – М., 1956. – *Примеч. пер.*

Прикладная математика

Я хотел бы начать с работ Гаусса по *прикладной математике*, так как, отправляясь именно от этой тематики, нам будет легче всего достичь взаимного понимания. Прикладная деятельность Гаусса всякий раз была вызываема к жизни какими-нибудь внешними причинами. Правда, после этого проблема ставилась и решалась с присущей ему силой, развитой им в себе занятиями чистой математикой и нашедшей свое выражение в следующих его словах: "Nil actum reputans si quid superesset agendum" ("Что не сделано до конца, вообще не сделано")[1].

Хронологически его деятельность в этом направлении может быть уложена примерно в следующие временны́е интервалы:

1800–1820 гг. – астрономия,

1820–1830 гг. – геодезия,

1830–1840 гг. – физика,

причем, конечно, эти даты следует рассматривать лишь как сугубо ориентировочные.

То обстоятельство, что с 1807 г. Гаусс занимал должность директора Гёттингенской обсерватории, имело для астрономии первостепенное значение, ибо такое положение, естественно, обязывало его к постоянным занятиям этой наукой. Следующие два крупных достижения венчают вклад, внесенный Гауссом в астрономию:

1. Разыскание Цереры и ряд примыкающих к этому вопросу усовершенствований в методах определения орбит.

2. Работы по теории возмущений – в особенности работы, связанные с вычислениями возмущений Паллады.

Как для самого Гаусса, так и вообще для присущего тому времени взгляда на науку, которая тогда еще не возвела перегородок между практическими нуждами и стремлением к творчеству в области чистой теории, чрезвычайно характерным является то обстоятельство, что исчерпывающие, весьма плодотворные даже с чисто математической точки зрения работы, посвященные решению обеих этих задач, были непосредственно связаны с внешними, практическими по своему характеру поводами.

Первого января 1801 г. Пиацци открыл первую из так называемых малых планет, которые, как теперь хорошо известно, сотнями рассеяны между Марсом и Юпитером. Между тем наблюдение за орбитой новой планеты, *Цереры*, могло производиться только на очень небольшом интервале; после того, как она наблюдалась на протяжении примерно 9°, она исчезала в солнечных лучах, чтобы больше не появляться на утреннем небосводе. Возникла задача определения орбиты этой планеты по немногим данным наблюдений. Воспользоваться прежними методами определения орбит здесь было невозможно, так как они требовали значительного по объему, под-

---

[1] Werke, т. 5, стр. 629.

твержденного повторными наблюдениями материала, который для больших планет, известных с древних времен, и в самом деле имелся.

Гаусс поставил перед собой задачу вычислить кеплерово движение по трем полным наблюдениям (время, прямое восхождение и склонение). Математически эта задача сводится к нахождению в пространстве конического сечения, один из фокусов которого (Солнце) известен, которое пересекает три заданные прямые (лучи, идущие к интересущей нас планете от движущейся по эллипсу Земли) и дуги которого, заключенные между заданными прямыми, проходятся за известные промежутки времени в соответствии со вторым законом Кеплера. Проблема эта приводит к уравнению восьмой степени, одно из решений которого, а именно орбита Земли, известно. Шесть других отбрасываются по физическим соображениям, и это позволяет найти искомое решение.

Решение этой задачи с проведением подробнейших вычислений было крупным достижением Гаусса, которому к тому времени исполнилось всего 24 года. Работая над ней, Гаусс пользовался весьма общими приближенными методами, специально разработанными с этой целью. Впоследствии он провел вычисление орбиты по четырем неполным наблюдениям и с помощью метода наименьших квадратов, который к тому времени хотя и не был опубликован, но, по собственному свидетельству Гаусса, был известен ему же с 1795 г., связал полученные результаты друг с другом. Этим путем Гаусс пришел к результатам, оказавшимся настолько точными, что Церера действительно была заново найдена в указанном им месте, причем не менее семи градусов восточнее того места, где ее следовало искать, исходя из грубого, кругового приближения. Этот блестящий результат, оценить который могла и широкая публика, принес молодому Гауссу первую славу. Он и поныне относится к числу самых популярных его достижений.

Опираясь на работы по Церере и продолжая развивать примененные им в этих работах методы, Гаусс создал свой большой труд "Theoria motus" ("Теория движения небесных тел"; опубликован в 1809 г. в издательстве Perthes[1])), который благодаря принятому в нем образцовому способу изложения задач небесной механики и доведению решений этих задач до числа приобрел себе репутацию настоящего свода законов вычислительной астрономии. Этот труд тоже написан Гауссом в уже охарактеризованной нами классической манере, цель которой заключается в том, чтобы произвести впечатление совершенством формы и законченностью построения, а не удовлетворить интерес читателя к процессу возникновения этого труда путем раскрытия его фундамента и деталей конструкции.

Разумеется, методы, применявшиеся Гауссом, с течением времени были продвинуты вперед и усовершенствованы; верно, равным образом, и то, что у него в этой области были свои предшественники. Мы ограничимся лишь двумя именами и назовем в качестве предшественника Гаусса Лагранжа, а в качестве его преемника – Гиббса. Подробная история этого раз-

---

[1]) Werke, т. 7, стр. 1 и далее.

дела науки изложена в т. VI, 2 "Математической энциклопедии"[1]) в статье Герглотца "Bahnbestimmung der Planeten und Kometen" ("Определение орбит планет и комет").

А теперь мы перейдем ко второму циклу астрономических работ Гаусса – к работам, посвященным *теории возмущений.* Поводом к их появлению также послужило некоторое открытие – обнаружение *Паллады.* Эта планета, найденная 28 марта 1802 г. другом отца Гаусса Ольберсом и также относящаяся к числу астероидов, отличается особенно большим эксцентриситетом ($e = 1/5$) и наклонением ($i = 34°$) своей орбиты – обстоятельство, с одной стороны, делающее ее особенно интересной из-за возникающего вследствие этого сильного возмущающего влияния других планет, а с другой – чрезвычайно затрудняющее вычисление ее орбиты. Парижская академия предпринимала неоднократные попытки стимулировать разработку этой проблемы путем назначения премий, но безуспешно. Только виртуозное вычислительное искусство Гаусса и его упорная, настойчивая энергия позволили ему дерзнуть взяться за решение этой задачи. Поэтому поистине трагично, что даже ему не удалось дойти до окончательных результатов. Поразительно, что его работы на эту тему, к которым он проявлял живейший интерес и которым посвятил многие годы неустанных стараний, остались лишь в виде фрагментов. После громадных приложенных Гауссом усилий, о которых свидетельствует огромный объем вычислений, опубликованных в 1906 г. Бренделем в седьмом томе "Трудов" Гаусса, и после того как вычисления возмущений, вызываемых Юпитером и Сатурном, уже были завершены с помощью его ученика Николаи, которого сам Гаусс называет "juvenem in calculis perficiendis indefessum" ("юношей, неутомимым в вычислениях"), работа, не доведенная до конца, вдруг обрывается.

Это тем более поразительно, что имеется огромное количество указаний на то, что Гаусс с большим интересом относился к этому вопросу. В 1812 г. (пусть читатель на мгновение вспомнит политическое положение Германии в то время!) он публикует загадочную анаграмму, состоящую из расположенных в определенном порядке нулей и единиц, содержащую важнейший результат, касающийся движения Паллады[2]). Анаграмма эта не расшифрована и по сей день несмотря на усилия, приложенные Бренделем, но сам Гаусс излагает ее содержание в одном из писем к Бесселю[3]). Судя по письму анаграмма содержит в себе утверждение, что частное от деления средних движений Юпитера и Паллады колеблется около некоторого фиксированного рационального числа (а именно около 7:8) и что, таким образом, в данном случае имеет место либрация.

Каковы же те методы, которые привели Гаусса к этому и к другим столь же важным результатам? Подобно всем предшествовавшим математикам

---

[1]) См. "Введение" автора, стр. 16. – *Примеч. пер.*

[2]) Werke, т. 6, стр. 350.

[3]) Werke, т. 7, стр. 421.

и астрономам, Гаусс пользовался бесконечными тригонометрическими рядами, аргументы которых выбираются специальным образом, а коэффициенты сообразно цели находятся путем вычисления значений некоторых определенных интегралов (механическими квадратурами). И вот здесь нельзя не испытать некоторого разочарования. Хочется исходить из того, что Гаусс, который был первым, кто в своей работе о гипергеометрическом ряде (1812 г.) сформулировал точные критерии сходимости, обязан был оценить погрешность, получающуюся в том случае, когда при вычислении в расчет принимается только конечное число членов ряда. Но подобного рода исследования мы у Гаусса не находим. Следуя принятому в то время обычаю, он как в этой своей работе, так и в позднейших геодезических вычислениях обрывает ряды, как только остальные их члены начинают казаться ему достаточно малыми.

И действительно, недавняя диссертация Струве[1]) показала, что орбита Паллады за 1803–1910 гг. не вполне описывается гауссовыми возмущениями одного только первого порядка. По мнению Струве, для получения достаточного совпадения с результатами наблюдений нужно было бы вычислить возмущения до третьего порядка включительно.

Математик современной школы с ее чисто абстрактной ориентацией, вероятно, был бы повержен в изумление, увидев, насколько иначе, чем в теории, ведет себя в практической ситуации Гаусс, этот родоначальник строгого подхода к проблемам сходимости. Ведь очевидно, что его приемы, не будучи в логическом отношении достаточно обоснованными, могут при известных обстоятельствах привести к совершенно неверным результатам.

Противоречие это может быть разрешено лишь психологическим осознанием того факта, что человека обычно интересует только то, что служит достижению поставленной им цели. Для чистого математика целью является полная, до конца исследованная и упорядоченная в соответствии с какими-либо крупными концепциями система всех возможностей, доставляемых избранным предметом. При этом для него существенным подспорьем является строго логическая классификация и упорядочение отдельных частных случаев. Поэтому искусственно построенные исключения представляют для него интерес в такой же – если не в большей – мере, как и естественно возникающие конструкции. Что же касается практической применимости, которая, например, могла бы как-то выделить эти последние, то он о ней совершенно не заботится.

Цель же вычислителя-практика состоит, напротив, в том, чтобы получить результат в виде числа. Поэтому он минует логически отточенное обоснование своего метода, т.е. более или менее бессознательно полагается на свой математический инстинкт, который велит ему молчаливо принять ряд необходимых соглашений – например, в данном случае это чередова-

---

[1]) Struve G. Die Darstellung der Pallasbahn durch die Gaußsche Theorie in dem Zeitraum 1803 bis 1910. – Berlin, 1911.

ние знаков и неограниченное убывание членов ряда. Скорее инстинктивно угаданное, чем осознанное, право поступать таким образом, право, которым он должен воспользоваться, если вообще желает продвигаться вперед, подтверждается для него постоянным сравнением полученных результатов с результатами наблюдений.

Впрочем, чтобы несколько упростить задачу изучения работ Гаусса (как и вообще литературы прошлого времени), я хотел бы добавить к этому, что гауссово употребление слова "сходимость" отличается от того, к которому привыкли мы. Гаусс называет ряд сходящимся, если его члены, начиная с некоторого места, неограниченно убывают. Мы же под "сходимостью" понимаем наличие предела у последовательности частичных сумм ряда. Гаусс был первым, кто обратил внимание на это различие, и именно он сформулировал первые критерии "сходимости" в нашем смысле этого слова; то и другое содержится в его работе о гипергеометрическом ряде (1812 г.). О ряде, обладающем свойством, которое мы сегодня называем сходимостью, он в одном месте [1]) говорит, что этот ряд "summam finitam ex asse determinatam praebet" ("обладает конечной, единственным образом определенной суммой").

После этого небольшого отступления я хотел бы вновь вернуться к вопросу о том, почему же все-таки Гауссу пришлось прекратить его столь энергично и успешно двигавшиеся работы по вычислению орбиты Паллады. Явление, с которым мы здесь сталкиваемся, в творчестве Гаусса встречается не раз; часто он оставлял неопубликованными самые прекрасные из своих результатов. Чем могла вызываться эта странная остановка, случавшаяся почти у самой цели? Быть может, причину следует искать в ипохондрии, которая иногда овладевала Гауссом посреди самого успешного творческого труда. Своеобразное свидетельство таких настроений можно найти, например, в набросках к работам по эллиптическим функциям, относящихся примерно к 1807–1810 гг. Здесь среди заметок чисто научного характера вдруг встречается очень мелко карандашом написанная фраза "Смерть мне милее такой жизни". – Повод к такого рода настроениям можно было бы искать в крайне тяжелых обстоятельствах, в которых Гаусс находился в то время. Его новая должность в Гёттингене пока не давала ему никакого заработка, французы наложили на него значительную по размеру контрибуцию, и все это поставило его в тяжелое финансовое положение. Он жил тогда в убогой квартире на Турмштрассе (Башенной улице), неподалеку от сохранившейся еще и в наши дни оборонительной башенки, на которой были установлены находившиеся в совершенно неудовлетворительном состоянии астрономические инструменты. Его окружение – и прежде всего его собственная семья – не обнаруживало ни малейшего понимания его гигантской работы, по видимости бессмысленной и бесцельной, которая отвлекала его от всех прочих интересов, не принося никакого

[1]) Werke, т. 3, стр. 126.

внешнего успеха. Его осыпали самыми горькими упреками, и подчас находились люди, которые сомневались, в здравом ли он уме.

Однако, мне кажется, что источник этого душевного недуга следует искать в чем-то более глубоком, чем это гнетущее будничное убожество. Мне кажется, что это была скорее ответная реакция на неимоверно интенсивную работу, некий паралич активности и силы воли, как это и должно было случиться со столь рано и столь сильно развившейся творческой натурой, которая беспрестанно находилась под давлением властно рвущегося наружу дарования. Жертвой такой душевной усталости могла, вероятно, стать и задача об орбите Паллады.

И хотя конечная цель этой работы оказалась недостигнутой, сама она, тем не менее, принесла богатые, чисто научные плоды. Свидетельством тому служат три большие опубликованные работы Гаусса:

1812 г.: "Über die hypergeometrische Reihe" ("О гипергеометрическом ряде");

1814 г.: "Über mechanische Quadratur" ("О механических квадратурах");

1818 г.: "Über Sekularstörungen" ("О вековых возмущениях").

Первая из этих работ, уже неоднократно цитировавшаяся (Werke, т 3, стр. 123–162), носит чисто аналитический характер, но, кроме того, она содержит большое количество всевозможных разложений в ряды, а также соотношений, полученных при вычислении возмущений. Эта работа вписывает астрономические проблемы в общую систему проблематики анализа.

Работы, посвященные механическим квадратурам интегралов, объединены под заглавием: "Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi" (Новый метод приближенного вычисления значений интегралов")[1]). Они возникли из задачи нахождения численных значений коэффициентов отдельных членов рядов, встречающихся при вычислении возмущений; в них приводятся общие соображения, которыми полезно руководствоваться при проведении такого рода вычислений.

В частности, "метод Гаусса" дает решение задачи о наилучшем приближении площади фигуры, образованной заданной кривой, двумя ординатами и осью абсцисс, с использованием возможно меньшего числа ординат, и по любому наперед заданному их числу он указывает набор абсцисс, наилучшим образом соответствующих поставленной цели. Этот метод позволяет, например, найти ответ на вопрос о том, как в течение дня должны быть распределены три измерения температуры для того, чтобы получить наилучшую картину общего ее состояния за день.

В третьей из перечисленных работ (Werke, т. 3, стр. 331–360) Гаусс дает соответствующее наглядным представлениям истолкование так называемых *вековых возмущений,* производимых планетой, и вычисляет их; при этом он пользуется представившейся возможностью изложить свой

---

[1]) Werke, т. 3, стр. 163–196.

метод вычисления периодов для эллиптического интеграла первого рода. Представление о характере этой работы можно составить уже по ее названию: "Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si eius massa per totam orbitam ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispartita" ("Определение притяжения, которое производила бы планета в заданной точке, если бы ее масса была непрерывно распределена по всей орбите пропорционально времени, в течение которого проходятся отдельные участки орбиты"). Оно показывает, ка́к Гаусс наглядно представляет себе вековое возмущение, производимое планетой: пусть масса планеты распределена вдоль всей ее орбиты, и притом обратно пропорционально скорости обращения в точке; тогда сила, с которой это кольцо притягивает какое-нибудь другое тело, как раз и дает величину векового возмущения. Такой подход к делу служит хорошим примером своеобразного пластического мышления, которое то и дело встречается у Гаусса. Он был не только виртуозом-вычислителем, одерживавшим победы над всеми трудностями, с которыми он сталкивался. Числа, с которыми ему приходилось иметь дело, были исполнены для него жизни, и он любил связывать их с различными наглядными представлениями.

Из научных результатов Гаусса, относящихся к этим годам, кроме того, что содержится в трех упомянутых публикациях, нам известны лишь разрозненные факты, да и то в самых общих чертах. Благодаря наследию, опубликованному Бренделем в седьмом томе "Трудов", мы теперь знаем некоторые подробности, касающиеся многолетних вычислений возмущений Паллады. Кстати, шестой и седьмой тома показывают, что кроме этих гигантских вычислений Гаусс выполнил множество других, а также произвел чудовищное количество наблюдений. Было бы напрасно спрашивать себя, каким образом он, который только в зрелом возрасте обратился к практической астрономии, приобрел необходимые навыки в обращении с инструментами, как он хотя бы просто физически находил время для такой громадной работы при всех тех неимоверно трудных проблемах, которые постоянно его занимали. Почти непостижимая энергия и сверхчеловеческое усердие, о котором свидетельствуют эти оставшиеся после него страницы, ставят этого несравненного по гениальности человека выше любых мерок, с которыми подходят к обычным людям.

Я обращаюсь теперь ко второй из тех областей прикладной математики, к которым были приложены усилия Гаусса, – к *геодезии*. Первая задача из числа вставших здесь перед ним тоже носила практический характер. Конкретно говоря, речь шла о геодезической съемке Ганноверского королевства.

Точные геодезические съемки были впервые предприняты в XVII и XVIII столетиях под влиянием чисто научного интереса к фигуре Земли. Речь, прежде всего, шла о том, чтобы с помощью точных градусных измерений разрешить спор о том, каким именно эллипсоидом вращения является наша планета – сжатым или же вытянутым. После того как была окончательно установлена справедливость первого их этих предположений, в XIX веке началось более детальное изучение фигуры Земли, в конце концов приведшее к уяснению того, что поверхность Земли представляет собой неправильную поверхность, названную Листингом "геоидом". Впрочем, уже Гауссу было известно, что истинная фигура Земли является эллипсоидом вращения лишь в некотором приближении.

В этот процесс развития геодезии, процесс, чисто научный по своему характеру, вторгается конец XVIII столетия, производя сильнейший переворот во всех сторонах жизни. Подобно тому как это было во многих других областях, Наполеон и здесь дал первый толчок к крупным достижениям и открытиям. Для стратегических целей, а также для нужд вновь организованного налогового управления требовались точные географические карты, которые можно было составить только на основе планомерно ведущихся точных съемок соответствующих местностей. Поэтому ряд стран принялся за систематическое решение этой задачи. Ганновер начал эту работу под влиянием Дании, где поселившийся в Киле Шумахер (директор тамошней обсерватории, издатель журнала "Astronomische Nachrichten"), бывший ученик Гаусса, уже начал эту работу, исходя из находившегося у Гамбурга геодезического базиса, которым впоследствии воспользовался также и Гаусс.

В 1816 г. правительство предложило Гауссу заняться соответствующей задачей для Ганновера. Его собственные измерения приходятся на 1821–1825 гг.; до конца же это дело было доведено его помощником лишь в 1841 г. Этой деятельности Гаусса обязаны своим происхождением следующие две важные его научные публикации:

1828 г.: "Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona" ("Определение разности широт между обсерваториями Гёттингена и Альтоны"), Werke, т. 9, стр. 1 и далее;

1843 г.: "Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" ("Исследования по вопросам высшей геодезии"), там же, т. 4, стр. 259 и далее.

В первом из названных сочинений среди прочего содержится намек на то, что истинная фигура Земли отклоняется от приближающего ее эллипсоида. Что же касается второго из них, то его следует рассматривать как отрывок из планировавшейся Гауссом более пространной работы [1].

В этих работах я хотел бы специально выделить два пункта, приобретших особенную популярность. Прежде всего здесь следует отметить знаменитое измерение самого большого из числа наблюденных и геодезически обработанных к тому времени треугольников – треугольника, образованного тремя горными врешинами: Высокий Хаген, Брокен и Инзельсберг. Кроме того, в этом сочинении описывается изобретенный и многократно использованный Гауссом *гелиотроп* – прибор, позволяющий путем концентрации

---

[1] Другое сочинение на эту тему опубликовано в 1847 г. (Werke, т. 4, стр. 301 и далее).

отраженных солнечных лучей получать хорошо видимые и пригодные для измерений точки визирования.

Конечно, подобно тому как этот прибор давно уже потерял свое значение в связи с появлением современных интенсивных точечных источников света и электрических прожекторов, работа Гаусса, благодаря усовершенствованию методов и уточнению результатов, была превзойдена и во многих других пунктах. Измерениям недостает, например, единого, сообразующегося с поставленной целью, общего плана действий, что, конечно, объясняется многочисленными трудностями разного рода – недостатком денежных средств, трудностью выбора подходящих наблюдательных пунктов на ровной, но лесистой местности и т.п., стоявшими на пути этой растянувшейся более чем на двадцать лет и не имевшей в прошлом прецедента работы.

Несмотря на отдельные устаревшие части работа Гаусса в целом внесла в науку огромный, непреходящий вклад, значение которого далеко выходит за пределы того, что Гаусс был первым, кто, преодолевая колоссальные трудности практического порядка, с помощью весьма несовершенных инструментов выполнил эти измерения на самом деле. Гаусс разработал методы и схемы, определяющие лицо измерительной геодезии и по сей день. Важнейшим его достижением, безусловно, следует считать последовательно применявшийся им метод наименьших квадратов. Гауссом была придумана и применена одна конформная проекция эллипсоида на плоскость, которую он, взяв за образец задачу градусного измерения, когда в качестве основного направления использовался меридиан Гёттинген – Альтона, вычислил сам вплоть до мельчайших отклонений геодезических линий от прямых. Обе эти находки, а также способ их реализации оказали такое определяющее воздействие на все дальнейшее развитие геодезии, что представители этой науки считают Гаусса всецело своим [1]).

На протяжении этих лет практической деятельности, явным образом принесших Гауссу отрадную перемену в образе жизни и давших ему возможность отдохнуть физически (напомним, что понятия "каникулярного путешествия" тогда еще не существовало), в его душе шла напряженная творческая работа. В 1821 и 1823 гг. он опубликовал свой *метод наименьших квадратов* [2]). Однако в первую очередь Гаусса занимали в это время глубокие размышления над дифференциальной геометрией, опубликованные им в 1827 г. в большой работе: "*Disquisitiones circa superficies curvas*" ("Общие исследования о кривых поверхностях"), Werke, т. 4, стр. 217 и далее. Хочу попытаться с помощью нескольких выдержек охарактеризовать содержание этой работы.

---

[1]) По поводу влияния, оказанного Гауссом на развитие геодезии, а также по поводу всех остальных здесь лишь затронутых вопросов я отсылаю к реферату Пицетти "Höhere Geodäsie" (Enzykl. т. VII, 1). См., далее: Galle. Über die geodätische Arbeiten von Gauß (Гаусс. Werke, т. 11, 2).

[2]) Werke, т. 4, особенно стр. 1–108.

Исходя из сферического отображения произвольной поверхности, Гаусс вводит важное понятие *кривизны* в данной точке поверхности (это $\frac{1}{R_1 \cdot R_2}$, где R_1 и R_2 означают главные радиусы кривизны поверхности в рассматриваемой точке). За этим идет большая теорема *о постоянстве кривизны* при произвольных изгибаниях (без растяжений), за которой, далее, следует, важная теорема о том, что площадь сферического образа геодезического треугольника пропорциональна сферическому избытку (или, соответственно, дефекту) этого треугольника. Уточняется также теорема Лежандра о том, что каждый из углов сферического треугольника со сторонами a, b и c на одну треть сферического избытка больше соответствующего угла плоского треугольника со сторонами той же самой длины.

Как установлено Штеккелем [1]), эти последние исследования относятся еще к 1816 г., когда Гаусс занимался составлением первых планов геодезических съемок.

Теорему о постоянстве кривизны при изгибании Гаусс в 1822 г. выводит из того факта, что элемент дуги может быть приведен к виду

$$ds^2 = m^2(dt^2 + dn^2)$$

(Werke, т. 8, стр. 381, 385); таким образом, куда менее прозрачный вывод из общей формулы

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2,$$

опубликованной Гауссом в "Disquisitiones" (Werke, т. 4, стр. 236), имеет более позднее происхождение.

Диапазон влияния "Disquisitiones" был необычайно широким. В дифференциальной геометрии эта работа явилась первым со времен Монжа крупным шагом вперед и указала этой дисциплине основное направление развития, которого она придерживается вплоть до сегодняшних дней (см. реферат Фосса о развертывании поверхностей; Enzykl., т. III, D6a).

Но ничто в изложении Гаусса не обнаруживает того факта, что он и здесь воздержался от опубликования своих самых смелых идей. Переписка с Ольберсом, Шумахером, Бесселем и другими, а также оставшиеся после Гаусса рукописи с несомненностью показывают, что Гаусс знал неевклидову геометрию. И хотя он никогда ни слова не напечатал об этом своем достижении, мысль о нем, как это отчетливо видно из его писем, сопутствовала всем его работам. Измерение большого треугольника, образованного световыми лучами, приобретает в этой связи совсем иное значение. Воспользовавшись терминологией Георга Кантора, можно сказать, что для Гаусса здесь речь шла вовсе не об одной только "имманентной" стороне математики, но что существенный интерес для него представляла и "транзиентная" ее сторона. Его интересовало не только непротиворечивое в себе построение науки, но и возможность устанавливать с ее по-

---

[1]) См. Stäckel. Gauß als Geometer (Гаусс. Werke, т. 10, 2, Abh. IV).

мощью связь между различными явлениями природы и овладевать ими. Какая из геометрий, одинаково для него живых и одинаково реальных, более подходит для этой цели – этот вопрос должен был решить эксперимент. И так как в неевклидовых геометриях сумма углов плоского треугольника с увеличением его размеров все более отклоняется от 180° (Гаусс в это время обсуждает возможность отклонения только в меньшую сторону), то он, вероятно, надеялся, что с помощью измерения такого большого треугольника сможет получить ответ на свой вопрос. Результат, между тем, оказался отрицательным, так как наблюденное отклонение суммы углов от 2π целиком уложилось в пределы возможной погрешности измерений. Как известно, этот поставленный Гауссом вопрос остается открытым и по сей день. Предложенное Лобачевским измерение треугольника, образованного неподвижной звездой и двумя диаметрально противоположными точками земной орбиты, не было реализовано из-за осложнений, вызываемых аберрацией света, собственным движением неподвижной звезды и солнечной системы и т.п.

Вопрос о том, в какой мере Гаусс уже тогда владел своей геометрией, которую он называл "антиевклидовой", мы подробно обсудим в одном из дальнейших разделов. В данный же момент я перейду к результатам, которыми Гауссу обязана *физика.*

Однако прежде, чем приступать к рассмотрению этой проблематики, я хотел бы напомнить об одном человеке, который хотя и не был математиком, но тем не менее сыграл в свое время важную роль в развитии точных наук в нашей стране. Я имею в виду Александра фон Гумбольдта. Приведу в качестве отправных точек несколько дат из его биографии. Родился Гумбольдт в 1769 г. в Тегеле, близ Берлина. Самым плодотворным периодом его жизни следует считать его путешествие по Южной Америке в 1799 – 1804 гг., из которого он привез на родину огромное количество научных материалов. После этого Гумбольдт в течение долгих лет жил в Париже, поддерживая контакты со всеми выдающимися умами своего времени. С 1827 г. он жил в Берлине, где и скончался в 1859 г. в возрасте 90 лет.

Гумбольдт был, как мы теперь должны были бы сказать, географом и биологом, и, значит, он являлся представителем описательного, а не точного естествознания. Однако он обладал редким даром понимать значение далеких от него областей науки без досконального их изучения. Поэтому нередко получалось так, что благодаря своему общему пониманию вещей и верному чутью к велениям времени, он оказывал плодотворное воздействие и на те науки, которые лично для него были чужды. С этой его особенностью тесно связана и его способность абсолютно точно инстинктивно угадывать молодые многообещающие таланты уже в то время, когда они по-настоящему себя еще не проявили. И так как Гумбольдт занимал к тому же в Берлине выдающееся общественное положение, которое благодаря связям с двором и с самыми различными кругами общества доставляло ему большое влияние, то он в течение многих лет оказывал решающее воздействие на развитие в Пруссии наук, входивших в сферу его интересов. Он являлся также подлинным инициатором того движения в области математики и точных наук, которое в филологических науках началось примерно на десять лет раньше (а именно – в 1810 г. основанием Берлинского университета) и которое мне хотелось бы назвать "немецким научным ренессансом". В 1824 г. Гумбольдт провел на кафедру в Гиссен 21-летнего Либиха, а в 1827 г. – в Бреславль 23-летнего Дирихле, преодолев в обоих случаях упорнейшее сопротивление со стороны факультетов. Гумбольдт хотел привлечь на службу в Пруссию также и Гаусса; в начале 20-х годов он попытался добиться для него должности директора политехнической школы, которую он собирался основать в Берлине. Предполагалось, что Гаусс не будет иметь постоянных педагогических обязанностей и что главным его делом будет лишь наблюдение за постановкой научной работы во всех государственных исследовательских институтах. Однако, несмотря, на столь предупредительное к нему отношение, Гаусс отклонил это предложение. Гумбольдту только в 1828 г. во время происходившего в Берлине съезда естествоиспытателей удалось познакомиться с Гауссом, которого он лично пригласил к себе в гости. Для науки значение этого знакомства, которое постепенно перешло в длившуюся на протяжении всей жизни дружбу (см. изданную в 1877 г. Брунсом переписку Гаусса и Гумбольдта), заключается прежде всего в том, что Гумбольдт дал первотолчок работам Гаусса над проблемами земного магнетизма.

Уже после своего путешествия в Южную Америку Гумбольдт основал ставший в дальнейшем всемирным *Союз геомагнитных наблюдений* и, как мы увидим ниже, Гаусс по его инициативе подверг собранный им материал тщательной математической обработке.

В доме Гумбольдта и благодаря его посредничеству завязалось (в 1828 г.) второе знакомство, сыгравшее огромную роль в дальнейшем развитии физики, а именно знакомство Гаусса с Вебером. Вильгельм Вебер (род. в 1804 г.) был в то время приват-доцентом в Галле. В 1831 г. он по предложению Гаусса был приглашен в Гёттинген, где за вычетом нескольких лет профессуры в Лейпциге (1843 – 1849 гг.) оставался до самой своей смерти (см. посвященную его памяти речь Рике в "Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften", 1890).

С переездом Вебера в Гёттинген началось чрезвычайно плодотворное сотрудничество этих двух различных в самой своей основе людей. Гауссу в то время было 54 года, и он находился в зените своей славы. Веберу же едва исполнилось 27 лет, и он сначала был только искусным помощником своего великого руководителя в работе с инструментами и в наблюдениях. Постепенно его деятельность становилась все более самостоятельной и значительной. Однако истинной высоты она достигла несколько позже рассматриваемого здесь периода, а именно в 1846 г. в Лейпциге, когда он выполнил свои первые работы по электродинамическим измерениям. Внутреннее различие этих людей нашло отчетливое выражение и в их внешности. Гаусс приземист, крепкого телосложения, типичный представитель Нижней Саксонии[1]), немногословен, замкнут в себе. Своеобразную противоположность ему представляет Вебер, он невысокого роста, изящен, подвижен; чрезвычайная любезность и разговорчивость сразу же выдают в нем коренного саксонца; он и действительно был родом из Виттенберга[2]), этого края "саксонцев в квадрате". В гёттингенском памятнике Гауссу и Веберу эта противоположность по художественным соображениям смягчена, и даже по возрасту они выглядят гораздо ближе друг к другу, чем были на самом деле.

А теперь, чтобы иметь возможность по достоинству оценить сотрудничество этих двух ученых, я хотел бы привести краткий обзор развития *электродинамики* – области, в которой оба они трудились, – за период, непосредственно предшествующий их работам.

В 1820 г. Эрстед открыл основное явление электромагнетизма – влияние электрического тока на магнитную стрелку.

В 1821 г. Био и Савар установили первый точный закон, которому подчиняется это явление, вычислив силу, с которой электрическая цепь действует на магнитный полюс. Дальнейшим успехом было открытие Ампером в 1822–1826 гг. взаимодействия между двумя электрическими цепями и данное на этой основе объяснение магнетизма с помощью молекулярных токов. Исследования в этом направлении продолжали развиваться с неслыханной быстротой. В 1827 г. появилась работа Ома о математической теории гальванических цепей, содержащая важнейший научный результат – *закон Ома*. В 1828 г. Грин создал свои первые работы по теории потенциала; однако в течение долгого времени они пребывали в совершенной неизвестности, так как Грин, сын бедного ноттингемского пекаря, на первых порах не пользовался влиянием. К сожалению, то обстоятельство, что его талант был позже открыт и извлечен на свет, не пошло ему на пользу; приглашенный в Кембридж, он стал добычей алкоголя. – Интересно, и с исторической точки зрения важно, уяснить, что именно Грин в своей работе понимает под названной в его честь *функцией Грина*. Это не что иное, как важный с точки зрения эксперимента частный случай электростатического потенциала, именно потенциал того распределения заряда, которое точечный заряд индуцирует на поверхности проводника, соединенного с землей. Грин для этих целей пользуется также термином "potential function", вкладывая в него смысл "функции сил". Гаусс, как мы увидим в дальнейшем, определяет термин "потенциал" совершенно иным способом. Поэтому представляется абсолютно невероятным, чтобы Гаусс знал эту никогда не упоминавшуюся им работу Грина. Это незнание, конечно, может быть объяснено тем, что работа Грина получила распространение поздно –

---

[1]) Ныне – земля в ФРГ; административный центр – Ганновер. – *Примеч. пер.*

[2]) Виттенберг и Галле входили в состав прусской провинции Саксония (гл. город Магдебург); Лейпциг входил в состав королевства Саксония (столица Дрезден). – *Примеч. пер.*

лишь после переиздания ее Вильямом Томсоном. Нет работы Грина и в библиотеке Гаусса. Следует также упомянуть о том, что в наши дни понятие "функции Грина" трактуется гораздо шире. В настоящее время под функцией Грина понимают вообще любую определенную в пространстве функцию с одной особой точкой, удовлетворяющую некоторому наперед заданному дифференциальному уравнению при заданных граничных условиях. Понятие "потенциала" содержится в этом понятии в качестве частного случая.

В 1831 г., благодаря открытию Фарадеем токов индукции, чрезвычайно важный шаг вперед сделала молодая электродинамика. (Заметим, кстати, что этот ученый тоже вышел из бедноты. Он начал с того, что был учеником у переплетчика и служителем в лаборатории.)

Так обстояли дела в этой области в то время, когда к ней обратились Гаусс и Вебер. Гаусс занимался физической проблематикой еще до появления Вебера в Гёттингене. В пятом томе его "Трудов" можно найти две статьи, написанные им в конце 20-х годов:

1829 г.: "Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik" ("Об одном новом общем принципе механики") – принцип наименьшего принуждения,

1830 г.: "Principia generalia theoriae fluidorum in statu aequilibrii" ("Общие начала теории равновесия жидкостей") – теория капиллярности, которые непосредственно примыкают к работам Лагранжа и Лапласа. С этого времени и начинается десятилетняя совместная работа Гаусса с Вебером. Период этот, заложивший основу содружества математики и физики в Гёттингене, является одним из самых славных периодов Гёттингенского университета.

Первым крупным плодом, принесенным ведшейся в это время работой, явилась статья Гаусса 1832 г. об абсолютной мере при измерениях магнитных величин[1]. Огромный прогресс, достигнутый в этой работе, заключается в том, что все измерения сводятся в ней к измерению трех основных величин – массы m, длины l и времени t. Математик выступает здесь в роли законодателя измерительной физики (см. общую схему, приведенную на стр. 630 пятого тома "Трудов" Гаусса). Кроме того, работа эта, благодаря введению отсчета с помощью зеркал, вносит такие усовершенствования в приборы для магнитных измерений, что точность их доводится до астрономической (в качестве характерной детали отметим, что Гаусс пользуется магнитной стрелкой, подвешенной на нити, а не установленной, как обычно, на острие). Здесь же я хотел бы упомянуть о еще одном достижении, которое, разумеется, никак нельзя считать лишь побочным продуктом, полученным в процессе работы с Вебером, и которое благодаря своему большому практическому значению пользуется особой известностью у

[1] "Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata" ("Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере"), Werke, т. 5, стр. 79 и далее.

широкой публики: я имею в виду изобретение электромагнитного телеграфа. Находка заключалась в том, чтобы использовать для телеграфирования не оптические (гелиотроп Гаусса) или электромеханические (Зёммеринг), как это было до сих пор, а электромагнитные эффекты, которые могут быть без ошибок переданы на гораздо бо́льшие расстояния. Впрочем, оба исследователя начали приведшие к этому открытию эксперименты с целью проверки закона Ома, а также некоторых законов разветвления, окончательный вид которым впоследствии был придан Кирхгофом. Тем не менее они отчетливо сознавали практическое значение этих результатов. В одном из своих писем к Шумахеру Гаусс высказывает по этому поводу мнение, что создание системы передачи сообщений, способной охватить весь мир, представляет собой лишь техническую и финансовую проблему[1]).

Детали конструкции были изготовлены Вебером. Передающий и приемный аппараты были установлены в Физическом институте (на месте нынешней университетской библиотеки) и в обсерватории; башня св. Иоганна служила опорой для соединявшей их линии. В пятом томе гауссовых "Трудов" можно найти заметки об этих работах (стр. 338, 356 и 369).

Если говорить о чисто научной стороне вопроса, то работы следующего, 1834 г. представляют, вероятно, еще больший интерес. В них начинает проявляться то стимулирующее воздействие, которое исходило от Гумбольдта. На земельном участке астрономической обсерватории возводится магнитная обсерватория, и Гаусс отдает свои силы расширению и развитию Магнитного союза, испытывая, кстати, от этой организаторской деятельности особое удовольствие. В 1836–37 гг. под редакцией Гаусса и Вебера вышел первый из семи номеров журнала "Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins" ("Результаты наблюдений Магнитного союза"). В нем приводятся данные об особенностях приборов и замечания по поводу искусства наблюдений.

Впоследствии, с использованием основных результатов Гаусса и Вебера, оказалось возможным перейти к ряду более тонких вопросов, средства для решения которых дала несколько продвинувшаяся тем временем техника. Гауссу и Веберу удалось при помощи наблюдений с пятиминутными интервалами (до той поры наблюдения производились с интервалом в час) в общем и целом констатировать суточный характер изменения напряженности земного магнетизма, а проведение подобных наблюдений во многих точках земного шара привело к неоспоримому выводу о том, что изменение это на всем земном шаре происходит одновременно и, следовательно, оно должно иметь во всяком случае земное происхождение. В дальнейшем на основе этих результатов с помощью более точных приборов и более частых наблюдений оказалось возможным обнаружить небольшие локальные вариации напряженности.

---

[1]) См.: Briefwechsel Gauß – Schumacher ("Переписка между Гауссом и Шумахером"), т. 2, стр. 411 и 417.

В дальнейших номерах журнала публикуются следующие основополагающие работы Гаусса в этой области:

1838–39 гг.: "Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus" ("Общая теория земного магнетизма": Werke, т. 5, стр. 119);

1839–40 гг.: "Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte" ("Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния": Werke, т. 4, стр. 195).

Название первой из этих работ, вероятно, может ввести читателя в заблуждение, ибо речь в ней идет не о какой-либо физической теории, а об интерполяционном представлении результатов наблюдения с помощью сферических функций, что до некоторой степени соответствует птоломеевскому изображению движения планет. Как это ни странно, сам Гаусс был совершенно иного мнения о значении своей работы. Он считал, что им было дано объяснение самой сущности магнитной силы – приблизительно в духе закона Ньютона, и в предисловии он категорически высказывается против того, чтобы изображать действие земного магнетизма в виде суперпозиции действий отдельных магнитов, как, например, это делал до него Тобиас Майер. Но в действительности и его способ тоже представляет собой нечто в этом роде, так как всякую сферическую функцию, если перейти к бесконечно малым размерам, можно рассматривать как результат действия мультиполя. Вследствие этого предельного перехода гауссово разложение оказывается значительно более удобным и точным, чем разложение, получающееся в результате суперпозиции конечных магнитов, но в принципиальном отношении оно от последнего не отличается.

Гаусс представляет потенциал земного магнетизма в виде конечного ряда, составленного из сферических функций, причем он доходит до функции четвертого порядка включительно:

$$V = \frac{P_1}{r^2} + \frac{P_2}{r^3} + \frac{P_3}{r^4} + \frac{P_4}{r^5},$$

где P_n – однородный многочлен, зависящий от переменных x, y, z и удовлетворяющий условию

$$\Delta P_n = 0.$$

Число независимых констант в таком многочлене равно $2n+1$, так что для указанного представления необходимо вычислить 24 коэффициента[1]. Из этого ряда дифференцированием находятся силы X, Y и Z. То, что эти формулы, а также формулы, полученные дифференцированием, находятся в прекрасном согласии с наблюдениями, вычислитель должен был чувство-

---

[1] Подробные сведения относительно этих констант можно найти в: Werke, т. 5, стр. 150, 151.

вать наперед. Реализация этого подхода впоследствии часто повторялась с опорой на бо́льшее число наблюдений, и все-таки оказалось, что наиболее целесообразно оборвать разложение на членах четвертого порядка; если же учитывать и члены пятого порядка, то коэффициенты становятся слишком неточными, а локальные и временны́е возмущения слишком значительными, чтобы получающиеся формулы имели ценность. Стоит упомянуть здесь еще одно достижение Гаусса, тоже получившее широкую известность, а именно вычисление положения Южного магнитного полюса, оказавшееся довольно точным.

Перехожу теперь ко второй из перечисленных выше работ Гаусса. В ней закладываются основы *теории потенциала* в том виде, как мы ее знаем сегодня. За историей этого вопроса я отсылаю к Математической энциклопедии (Enzykl., II A7b). Термин "потенциал" вводится в пятом томе "Трудов" на стр. 200; в "Атласе земного магнетизма"[1] он определяется как "возможная работа", которую пришлось бы выполнить для того, чтобы перенести единичный точечный электрический заряд из бесконечности в рассматриваемую точку. Не вполне ясно, откуда Гаусс заимствовал термин "потенциал". Идея силовой функции, из которой дифференцированием по определенному направлению получаются ньютоновские силы притяжения, впервые встречается у Лагранжа в 1773 г. Уравнение $\Delta V = 0$ рассматривалось Лапласом в 1782 г.[2], а частный случай уравнения $\Delta V = -4\pi\rho$ внутри действующих масс – Пуассоном в 1813 г. Эти подходы Гаусс, следовательно, уже знал. Но возникает еще один, интересный с исторической точки зрения вопрос. Именно: знал ли Гаусс связь между теорией потенциала и теорией функций комплексной переменной? По многим причинам утвердительный ответ на этот вопрос выглядит весьма правдоподобным, однако Гаусс никогда и ни в какой форме не высказывался по этому поводу.

Наряду с этими крупными математическими работами Гаусса занимали и размышления о сущности рассматриваемых электродинамикой сил. Эти его рассуждения должны представлять для нас особенный интерес. К ним относятся различные заметки за 1833–36 гг.; достойный внимания материал найдется, конечно, и в не обработанном еще до конца наследии Гаусса[3]. Здесь я хотел бы обратить внимание лишь на одно письмо к Веберу, относящееся к 1845 г. (Werke, т. 5, стр. 627–629). В нем имеется заслуживающее серьезного отношения замечание относительно того, что добавочные силы, вызывающие взаимодействие двух движущихся электрических частиц, должны были бы выводиться из некоторого, распространяющегося (как и в случае света) с конечной скоростью, действия. В этих

[1] Atlas des Erdmagnetismus nach den Elementen der Theorie entworfen. Supplement zu den Resultaten ..., herausgegeb. von C.F. Gauß und W.Weber, Leipzig, 1840. – *Примеч. ред. нем. изд.*

[2] Это уравнение встречается уже у Эйлера; см.: Hoppe E. Geschichte der Physik. – Braunschweig, 1926, стр. 80 и далее. – *Примеч. ред. нем. изд.*

[3] Тем временем материал этот подготовлен к включению в т. 11, 1 "Трудов" Гаусса. – *Примеч. ред. нем. изд.*

словах, вне всякого сомнения, выражается предчувствие связи, имеющейся, как мы теперь знаем, между электродинамикой и оптикой. К сожалению, мысль эта не встретила отклика со стороны Вебера; более того, она была совершенно вытеснена сформулированным вскоре после этого (1846 г.) *законом Вебера.* По этому закону между двумя движущимися частицами e и e' должна действовать мгновенная сила

$$K = e \cdot e' \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2 \cdot r^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{c^2 \cdot r} \frac{d^2 r}{dt^2} \right)$$

(которая, таким образом, зависит от относительной скорости и относительного ускорения двух этих частиц). Здесь c означает так называемую постоянную Вебера, которая имеет размерность скорости и равняется, как это было установлено Вебером и Кольраушем в 1855 г., $439450 \cdot 10^6$ мм/с. Этот закон в течение тридцати лет считался последним словом науки в физической картине мира, пока после упорного сопротивления он не был вытеснен теорией Максвелла. Хотя Кирхгоф еще в 1857 г. обнаружил замечательное числовое соотношение, а именно что $\frac{c}{\sqrt{2}}$ равняется скорости света, тем не менее он не высказал по этому поводу никаких замечаний. У Вебера этот факт также отмечается в его работе 1864 г. об электрических колебаниях (Werke, т. 4, стр. 105 и далее), но он добавляет (стр. 157), что из-за несходства ситуаций предполагать наличия каких-нибудь дальнейших связей не следует. Впрочем, и Вебер и Кирхгоф всегда наблюдали лишь колебания, распространяющиеся вдоль проводника; факт электрических колебаний в диэлектрике, как и само понятие диэлектрика, введенное лишь Фарадеем, им были в то время еще не известны. В 1858 г. Риман в сообщении Гёттингенскому научному обществу[1]) отважился высказать относящиеся к этому кругу вопросов соображения, которые можно охарактеризовать как предвосхищение теории Максвелла, созданной в 1865 г. Однако из-за небольшой неточности в вычислениях Риман взял это сообщение обратно, так что оно стало известно только после его смерти. Так дело обстояло еще в течение многих лет до тех пор, пока идеи Максвелла не проникли в Германию. Возражения, которые Гельмгольц выдвигал против закона Вебера, также не были приняты во внимание. Правда, косвенным образом Гельмгольц все-таки оказал влияние на развитие современной ему науки: он настойчиво обращал внимание своего ученика Г. Герца на шедшие из Англии идеи и вдохновлял его на продолжение ведшихся им опытов. Блестящий успех смелых экспериментов этого гениального молодого физика помог, наконец, в 1888 г. теории Максвелла одержать окончательную победу и в Германии.

[1]) R i e m a n n B. Werke, 1-е изд., стр. 270 и далее; 2-е изд., стр. 288 и далее.

Рассмотренные выше работы Гаусса в области прикладной математики представляются мне венцом его дела, которому была посвящена вся его жизнь. Но истинное ядро и фундамент его достижений лежат в области *чистой математики*, которой он посвятил годы своей молодости.

Я снова в качестве отправных точек приведу несколько уже упоминавшихся частично дат и остановлюсь здесь на них чуть-чуть более подробно.

Гаусс родился 30 апреля 1777 г. в Брауншвейге и вырос в очень скромных условиях. Многочисленные анекдоты рассказывают нам о рано развившемся одаренном мальчике, который, несмотря на жесточайшую загрузку и сопротивление со стороны своих домашних, упорно и энергично развивал свой ум, урывая для этого каждую свободную минуту, пока ему не посчастливилось своими необыкновенными успехами обратить на себя внимание высокопоставленных персон. Здесь в первую очередь следует упомянуть герцога Фердинанда Брауншвейгского, сердечную и благодарную преданность которому Гаусс сохранял на протяжении всей своей жизни. Именно он сделал для мальчика возможной учебу в гимназии, а впоследствии и в университете. В 1788 г. Гаус поступил в Екатерининскую гимназию (Catharineum), по окончании которой он в 1793 г. посещал Коллегию Карла (Carolinum), которая фактически готовила к поступлению в университет (впоследствии из нее выросло нынешнее Высшее техническое училище). Затем идет краткий период обучения в Гёттингенском университете (1795–1798 гг.), после которого Гаусс снова возвращается на родину к своему великодушному покровителю. Здесь, в Брауншвейге, в 1798–1807 гг. Гаусс переживает свой героический период – я сказал бы, период неудержимой творческой деятельности и великих, фундаментальных открытий.

Области, развитию которых Гаусс посвящает себя, – это, прежде всего, "три великих А": *арифметика, алгебра* и *анализ.* Геометрия, если отвлечься от интереса, который он проявлял к ее основаниям, вошла в круг его интересов лишь гораздо позже, и поэтому разговор о ней мы пока отложим.

Математическая деятельность Гаусса началась одним крупным открытием, которое и привело его к твердому решению навсегда посвятить себя этой науке; до этого он в течение длительного времени испытывал столь же сильное влечение к филологии. 30 марта 1796 г. ему удалось показать, что правильный семнадцатиугольник может быть построен с помощью циркуля и линейки, т.е., другими словами, что уравнение

$$x^{17} - 1 = 0,$$

или, что то же самое,

$$x^{16} + x^{15} + x^{14} + \ldots + x + 1 = 0$$

разрешимо в квадратных радикалах. Гауссу не исполнилось еще и девятнадцати лет, когда ему удалось сделать это открытие, единым ударом значительно продвинувшее вперед задачу о построении правильных многоугольников, остававшуюся без движения в течение двух тысяч лет. Даже более того, проблема эта была решена им до конца, ибо вскоре ему удалось найти критерий возможности построения любого правильного n-угольника. Гаусс показал, что разрешимость этой проблемы зависит от одной лишь арифметической природы числа n: в случае когда n простое, оно должно иметь вид $n = 2^{2^k} + 1$.

Этим поразительным результатом молодой, невзрачный, несколько неуклюжий студент, живший в Гёттингене очень уединенно и поглощенный исключительно своей работой, внезапно привлек к себе общественное внимание. Его покровитель Циммерман велел ему опубликовать в "Jenenser Intelligenzblatt" короткую заметку (1796 г.), к которой сам он добавил примечание, отмечающее необыкновенное достижение Гаусса[1]. Это была первая публикация Гаусса, хотя, как мы увидим позже, она была далеко не первой научной его работой. За ней следует хельмштедтская диссертация (1799 г.), предметом которой является *доказательство основной теоремы алгебры.* Уже в эти молодые годы Гаусс очень осторожно выбирает форму изложения, скрывая самые глубокие свои идеи – прежде всего для того, чтобы придать изложению законченный вид. Так, он старательно избегает в этой работе упоминаний о мнимых величинах (хотя ясно, что отчетливое представление о них лежит в основе всего его рассуждения) и говорит лишь о разложении многочлена на действительные множители первой и второй степени. При этом он работает в плоскости xy, нигде не указывая, что речь идет о геометрическом изображении комплексных чисел $x + iy$.

К этим самостоятельным публикациям, написанным в знак благодарности к герцогу, примыкает его первый, изданный в 1801 г. шедевр "Disquisitiones Arithmeticae" ("Арифметические исследования"). Из-за чрезвычайно затянувшегося печатания в Госларе труд этот вышел в свет с большим опозданием, так что начало работы над ним следует датировать несколькими годами раньше. Этим крупным рывком завершается период чисто математических открытий Гаусса, и его внимание, как мы уже видели, начинают все более и более привлекать вопросы прикладной математики, и прежде всего астрономии. Изданное в 1809 г. сочинение "*Theoria motus*" как по времени его возникновения, так и по математическому содержанию должно быть отнесено еще к брауншвейгскому периоду жизни Гаусса.

В "Disquisitiones Arithmeticae"[2] Гаусс в полном смысле слова создал современную теорию чисел и предопределил все ее дальнейшее развитие вплоть до нынешних дней. Восхищение этим трудом возрастает еще больше, когда видишь, как Гаусс с самого начала черпает весь этот мир идей из самого себя, без какого бы то ни было внешнего импульса. И действительно, исследование истории этого вопроса показывает, что бо́льшую часть своих открытий Гаусс успел сделать еще до того, как он познакомился в Гёттингене с первой относящейся к этой проблематике литературой, а имен-

---

[1] Werke, т. 10,1, стр. 3.

[2] Werke, т. 1.

но с работами Эйлера, Лагранжа и Лежандра, которые со временем побудили его с новым энтузиазмом вернуться к арифметическим исследованиям. Кроме этого чтения и редкого посещения лекций Кестнера Гаусс не подвергался никакому постороннему влиянию; он повиновался лишь велениям своей неуемной тяги к творчеству.

Сначала я изложу содержание этого труда в общих чертах. Он состоит из трех частей. Первая часть посвящена вопросу о квадратичных вычетах. В ней содержится первое доказательство *квадратичного закона взаимности*, этой основной теоремы всей теории чисел. Если, воспользовавшись удобной, предложенной Лежандром символикой, посредством равенства $\left(\frac{q}{p}\right) = +1$ выразить тот факт, что q является вычетом некоторого квадрата по модулю p, а посредством равенства $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, что это неверно ($q$ есть "невычет" mod p), то этот закон можно будет записать в виде равенства

$$\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

Оно означает, что $\left(\frac{q}{p}\right)$ и $\left(\frac{p}{q}\right)$ имеют общий знак за исключением случая, когда p и q представимы в виде $4n+3$. Сознавая огромную важность этой теоремы, Гаусс назвал ее "theorema aureum" ("золотой теоремой"). Теорема эта была известна уже Эйлеру. Правда, доказать ее он не смог. Гаусс тоже нашел ее сначала чисто индуктивным путем, проверив большое число примеров, и только потом, в результате упорнейшей работы, ему удалось найти для нее дедуктивное доказательство. С этим типичным для Гаусса способом работать нам придется встретиться еще не раз.

Во второй части "Disquisitiones Arithmeticae" Гаусс занимается теорией квадратичных форм, т.е. вопросом о том, какие числа представимы при целочисленных m и n в виде $am^2 + 2bmn + cn^2$, где a, b и c — данные целые числа.

И, наконец, в третьей части речь идет о разрешимости в квадратных радикалах уравнения деления круга $x^n = 1$. Критерий $n = 2^{2^k} + 1$ мы уже приводили.

Этими намеками мы и вынуждены здесь удовольствоваться [1]); ими не исчерпывается все содержание этого великого труда, и, конечно, меньше

---

[1]) Это одно из тех мест, где отчетливо проступает упомянутый в предисловии фрагментарный характер этих лекций. За подробностями мы отсылаем к написанной по инициативе Клейна статье П. Бахмана "Über Gauß' zahlentheoretischen Arbeiten" ("О работах Гаусса по теории чисел"), "Труды" Гаусса, т. 10, 2, Abh. I. – *Примеч. ред. нем. изд.*

всего они могут претендовать на то, чтобы воздать должное воплощенной в нем необычайной энергии мысли, которая, преодолевая все препятствия и зачастую идя неимоверно трудным путем, всякий раз приводит к полному доказательству результата. Правда, читатель, который пожелает составить представление о том, как были сделаны эти великие открытия, не будет удовлетворен изучением "Disquisitiones Arithmeticae". Это безупречное и неумолимое по своей строгости дедуктивное изложение не дает ни малейшего представления о попытках, предшествовавших открытиям, и о преодоленных при этом трудностях. Изложение не исходит ни из какой общей точки зрения не занимается вопросом о том, каково значение поднятых в нем и столь виртуозно разрешенных проблем; поэтому читать его невероятно трудно. И только благодаря толкованию, данному Дирихле в его лекциях, являющихся прекрасным введением в намеченную Гауссом проблематику и проясняющих характер его мышления, труд этот стал оказывать должное влияние.

Наряду с этими законченными самостоятельными трудами, которые своим ранним возникновением обязаны, как уже упоминалось выше, чувству долга, которое Гаусс испытывал по отношению к герцогу Фердинанду [1]), впоследствии появился целый ряд разрозненных статей, большей частью опубликованных в изданиях Гёттингенского научного общества.

В алгебре Гаусса прежде всего занимала ее основная теорема, к которой он возвращался снова и снова. За доказательством, данным в диссертации (1799 г.), в 1815 г. следует совершенно новое доказательство, а в 1816 г. идет еще одно, основанное на использовании совсем других методов. В то время как в статье 1815 г. доказательство устроено таким образом, что в нем требуется рассматривать только действительную область, в работе 1816 г. Гаусс пользуется двойными интегралами в комплексной области. В 1849 г., отмечая пятидесятилетний юбилей своей докторской степени, Гаусс еще раз возвращается к доказательству 1799 г. [2]).

В арифметике тоже все дальнейшие работы Гаусса примыкают к одной основной проблеме – к theorema aureum, которой Гаусс дал не менее шести различных доказательств. Они опубликованы в работах 1808 и 1817 гг., в которых Гаусс занимается также кубическими и биквадратичными вычетами. Теоремы о биквадратичных вычетах, соответствующие theorema aureum, содержатся в работах 1825 и 1831 гг.; эти работы, благодаря введенным в них в употребление числам $a + bi$, где a и b – целые, необычайно расширили и обогатили область теории чисел [3]).

Работы же по анализу, как заметил Шлезингер, следует рассматривать как части большого, распадающегося на три раздела труда, который, правда, не был доведен до полного завершения.

---

[1]) Посвящая ему "Disquisitiones Arithmeticae", Гаусс выражает свою благодарность в особенно красивой и достойной форме.

[2]) Перепечатано в: Werke, т. 3, стр. 1 и далее, стр. 31 и далее, стр. 57 и далее, стр. 71 и далее.

[3]) См.: Werke, т. 2. – См. также ниже стр. 50 и след.

Первую часть составляет работа 1812 г. о *гипергеометрическом ряде*

$$F(\alpha, \beta, \gamma\ ; x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1)} x^2 + \ldots,$$

особое значение которого заключается в том, что очень многие из известных нам рядов содержатся в нем в качестве частных случаев. Как уже говорилось при разборе работ Гаусса по астрономии, в этой статье, кроме всего прочего, приводятся первые точные критерии сходимости рядов.

Во второй части предполагалось изложить *теорию дифференциальных уравнений* с рационально зависящими от x коэффициентами, для которых гипергеометрический ряд служит частным интегралом. С этим планировалось связать изучение эллиптических модулярных функций и их обращений, которые тоже могут быть представлены с помощью гипергеометрических рядов.

Наконец, третья часть должна была содержать *теорию общих эллиптических функций.*

Но из вещей, которые должны были войти во вторую и третью части, Гаусс не опубликовал ничего, и только в результате изучения его неопубликованного наследия были обнаружены эти сокровища, обладанием которыми мир теперь раз и навсегда обязан Абелю (1825 г.) и Якоби (1827 г.). (Более подробно о соотношении между этими результатами Гаусса и результатами, впоследствии найденными Абелем и Якоби, см. в третьей главе, стр. 117 и далее.) У Гаусса по этому поводу можно найти только небольшие намеки. Так, например, в "Disquisitiones Arithmeticae"[1]) содержится намек, касающийся лемнискаты, а в "Вековых возмущениях" (1808 г.) приводится связь между периодом лемнискаты и арифметико-геометрическим средним, выражаемым формулой

$$\omega_1 = \frac{1}{\mu\ (m, n)} = \int_{0^\circ}^{360^\circ} \frac{dt}{2\pi\sqrt{m^2 \cos^2 t + n^2 \sin^2 t}}\ .$$

Таким образом, Гаусс и в этом случае проявил свою крайнюю сдержанность. И все-таки даже немногие опубликованные им отрывки из числа того, что было создано его умом, произвели на современников огромное впечатление как новизной и значительностью своего математического содержания, так и убедительной строгостью изложения. Вскоре распространились слухи, что Гаусс является обладателем еще более крупных и неожиданных результатов. Слухи эти, в свою очередь, столь же бурно опровергались. Так Гаусс приобрел — особенно у молодежи — безграничное уважение и почитание, не вполне, впрочем, свободное от недоверия, которое в сочетании с его необщительным характером не очень способствовало установлению с ним более близких отношений. Так, например, Абель во время сво-

---

[1]) Art. 335; Werke, т. 1, стр. 412 и след.

ей поездки из Парижа в Берлин специально не заехал в Гёттинген, чтобы избежать встречи с Гауссом. Вероятно, Гаусс вполне любезно встретил бы застенчивого, неловкого молодого человека. Так, Дирихле, а позже и Эйзенштейн сразу получили доступ к нему – оба по горячей рекомендации Гумбольдта. Зато он быстро избавился от Якоби, нелюбезный, саркастический характер которого был ему весьма антипатичен.

Только потомки оказались в состоянии квалифицированно судить о научном богатстве, которым владел Гаусс, и они открыли для себя такие сокровища, которые далеко превзошли все их ожидания. Чем глубже мы проникаем в наследие Гаусса, тем больше растет наше изумление этим могущественным гением, в конце концов преодолевавшим все трудности и препятствия.

Первые из числа рассматриваемых нами частей гауссова наследия были уже в начале 70-х годов опубликованы Шерингом во втором и третьем томах "Трудов" Гаусса, но они были лишь частично расположены в хронологическом порядке, так как тогда были известны не все те опорные точки, которыми мы располагаем сегодня. Затем постепенно была издана важнейшая переписка Гаусса. Так, уже в 1860 – 1862 гг. благодаря стараниям Петерса была издана переписка с Шумахером; в 1880 г. Ауверс издал переписку Гаусса с Бесселем, которая хотя и вращается главным образом вокруг астрономических вопросов, содержит много материала, представляющего в математическом отношении большую ценность. Так, например, в одном из писем[1]) за 1811 г. Гаусс рассматривает интеграл $\int \frac{dx}{x}$ в комплексной плоскости и указывает значение этого интеграла по контуру, k раз огибающему начало координат: $\int\limits_{\curvearrowleft} \frac{dx}{x} = 2k\pi i.$ И это задолго до того, как были созданы великие труды Коши об интегралах в комплексной области! Наконец, в этой связи следует упомянуть переписку Гаусса с Ольберсом, изданную в 1900 г. Шиллингом в Бремене. (Переписку с Бойяи и Герлингом, поскольку геометрии мы здесь не касаемся, мы оставляем в стороне.)

Начиная с 1898 г. руководство изданием сочинений Гаусса, имевшее целью обработку всего его наследия, в том числе и неопубликованного, переходит ко мне. Я хотел бы упомянуть здесь некоторые неблагоприятные обстоятельства, отнюдь не способствовавшие успеху этого мероприятия. Именно: после кончины Гаусса в 1885 г. оставленное им наследие было куплено правительством, однако лишь "поскольку оно имеет научное значение"; " частная", в особенности беллетристическая, часть библиотеки перешла к его семье и здесь с течением времени раздробилась настолько, что многое оказалось потерянным совершенно безвозвратно. Насколько досаден этот факт, явствует из одного, к счастью, благополучно закончившего-

---

1) Werke, т. 8, стр. 90 и далее.

ся эпизода – речь идет о дневнике Гаусса[1]). Этот документ, имеющий несравненную ценность для истории развития Гаусса и всей математики вообще, был передан, поскольку он представлял собой невзрачную маленькую тетрадку "частного" содержания, его семье. В 1899 г. он был найден Штеккелем у одного из внуков Гаусса в Гаммельне, и только с трудом удалось получить его для научной обработки. В нем содержится последовательная датировка сделанных Гауссом открытий: за 1796–1801 гг. почти полностью, а затем, с большими перерывами, до 1814 г. Сколько же могло пропасть другого важного материала? Эта мысль волнует с особенной силой, когда просматриваешь те немногие доставшиеся нам книги, которые принадлежали Гауссу в его молодости. Со своеобразной, быть может, коренящейся в тяжелых условиях его юношеской жизни мыслью об экономии бумаги Гаусс покрывает мелким, неразборчивым почерком любое свободное место. В этом отношении исключительно важен учебник арифметики Лейсте, который принадлежал Гауссу еще в догёттингенский период. В прочих отношениях неинтересный, он, благодаря вшитым в него чистым листам бумаги, наряду с дневником до 1798 г. служил Гауссу для всякого рода записей. Таким странным путем до нас дошло, например, представление эллиптических функций в виде бесконечных произведений.

Начиная с 1798 г. приходится учитывать записи на отдельных листках, а несколько позже – в записных книжках и на большом числе разрозненных клочков бумаги, которые частично удается датировать с помощью другого материала.

Само собой разумеется, что наше знание творчества Гаусса, приобретенное в процессе обработки этого материала, по своему характеру не может считаться окончательным. Многое среди собранного остается загадочным и в высшей степени запутанным. Однако мы не могли отложить его публикацию до тех пор, когда будут найдены ключи к разгадке – возможно, совершенно неожиданной – всех этих неясных мест. Напротив, мы чувствовали себя обязанными возможно скорее довести до всеобщего сведения эти исключительно интересные результаты, вполне допуская, что при дальнейшем изучении в отдельных местах могут обнаружиться допущенные нами ошибки. В качестве особо вопиющего примера того, как может ввести в заблуждение семейное предание, упомянем случай с мнимым портретом Гаусса времен его знакомства с Ольберсом. Этот портрет был помещен в изданном дневнике Гаусса. Вопреки всем свидетельствам и заверениям абсолютно бесспорно установлено, что на нем изображен Бессель, поддерживавший в те времена с Ольберсом тесное общение.

По тому, что мы знаем о Гауссе на сегодняшний день, картина его математического развития выглядит, по-видимому, следующим образом.

Первый, *доисторический период* – так мне хотелось бы назвать время до того момента, когда был начат его дневник.

---

[1]) Werke, т. 10,1, стр. 483 и далее.

Сначала естественный интерес — я почти готов сказать, какое-то детское любопытство — без всяких влияний извне приводит этого мальчика к математическим вопросам. Первое, что его привлекает, — это чистое искусство счета. Он беспрестанно считает с прямо-таки захватывающим прилежанием и неустанной выдержкой. Постоянно упражняясь в действиях над числами, например над десятичными дробями с фантастически невероятным числом знаков, он достигает не только поразительной виртуозности в технике счета, которой отличался всю свою жизнь; он накапливает в своей памяти чудовищное количество числовых значений различных величин и тем самым приобретает такой опыт и такой кругозор в царстве чисел, которым едва ли обладал кто-нибудь до или после него. Наряду с обычными вычислениями его занимают подсчеты значений различных бесконечных рядов. От наблюдений, которые он производит над встречающимися ему числами,— и, значит, индуктивным, "экспериментальным" путем—он уже в то раннее время приходит к постижению общих соотношений и законов. Этот его способ работать мы уже упоминали в связи с theorema aureum. Он был не так уж редок в XVIII столетии и встречается, например, у Эйлера. Но он резко противостоит привычкам и обычаям сегодняшних математиков.

Одним из древнейших сюжетов, пробудившим у Гаусса стремление быть первооткрывателем, является вопрос о так называемом *арифметико-геометрическом среднем.* Чтобы объединить, так сказать, путем смешения преимущество обоих средних $m' = \dfrac{m+n}{2}$ и $n' = \sqrt{m \cdot n}$, Гаусс продолжает порождающий их процесс

$$m'' = \frac{m'+n'}{2}, \quad n'' = \sqrt{m' \cdot n'} \quad \text{и т.д.}$$

и замечает, оперируя, естественно, с конкретными числами (например, с $m = 1$ и $n = \sqrt{2}$), что процесс этот сходится к некоторому пределу, который он вычисляет с бо́льшим числом десятичных знаков. Само собой разумеется, что Гаусс в это время и не подозревал, какое значение в один прекрасный день приобретет этот факт в теории эллиптических функций. И вот здесь мы сталкиваемся со странным и, безусловно, не случайным явлением. Все эти ранние, придуманные лишь для собственного удовольствия забавы ума оказываются не чем иным, как подступами к великой, лишь гораздо позже осознанной цели. Но провидческая мудрость гения в том и состоит, чтобы уже в первых пробах сил, в полуигре, еще не сознавая глубочайшего смысла своих действий, попасть киркой как раз в то самое место породы, где в глубине таится золотой слиток.

Но вот наступает 1795 г., о котором мы располагаем чуть-чуть более подробными сведениями. По собственным словам Гаусса, он нашел в этом году метод наименьших квадратов. И тогда — еще в догёттингенский период — им с новой силой овладевает страстный интерес к целым числам, интерес, живым свидетельством которого является предисловие к " Disquisitiones Arithmeticae". Не будучи знаком ни с какой литературой, он должен был сам создавать себе все и вся. И здесь он тоже проявляет себя неутомимым вычислителем, пролагающим пути в незнаемое. Гаусс составляет большие таблицы – простых чисел, квадратных вычетов и невычетов. Он выражает в виде десятичных дробей обратные величины $\frac{1}{p}$ для p от 1 до 1000, причем доводит вычисления до полного периода, что в отдельных случаях требует нахождения нескольких сотен десятичных знаков! При составлении последней из упомянутых таблиц Гаусс задался целью выяснить зависимость периода от знаменателя p. Кто из нынешних исследователей стал бы пролагать этот диковинный путь, надеясь найти на нем новую теорему? Но именно этот путь, по которому он продвигался с неслыханной энергией, и привел Гаусса к цели (сам про себя он утверждал, что отличается от других людей лишь своим прилежанием). Таким же численно-индуктивным способом он находит – как это уже сделал до него Эйлер – квадратичный закон взаимности, theorema aureum. Осенью 1795 г. Гаусс переселяется в Гёттинген, где он запоем читает впервые попавшую ему в руки литературу – Эйлера и Лагранжа. И вот 30 мая 1796 г. для Гаусса наступает день его творческого крещения. Начинается его

Второй период – период регулярного ведения дневника, охватывающий 1796 – 1801 гг.

Гаусс уже в течение долгого времени занимался группировкой корней из единицы, опираясь на созданную им теорию "первообразных корней". И вот однажды утром, когда он был еще в постели, он внезапно ясно и отчетливо осознал, что из его теории следует возможность построения правильного семнадцатиугольника. Как мы уже отмечали, это событие оказалось поворотным пунктом в жизни Гаусса. Он принимает решение полностью посвятить себя не филологии, а математике. Этой датой начинается его дневник – самый интересный из числа тех, которыми мы располагаем, документ, касающийся развития Гаусса. На его страницах перед нами предстает вовсе не высокомерный, замкнутый и осторожный человек; мы видим здесь, как Гаусс воспринимает и переживает свои великие открытия. Он живейшим образом выражает свою радость и удовлетворение, наделяет себя разными похвальными эпитетами и разражается восторженными восклицаниями. Перед нами проходит горделивый ряд великих открытий, сделанных в арифметике, в алгебре и в анализе (ряд, к сожалению, не полный). Мы становимся как бы очевидцами рождения "Disquisitiones Arithmeticae". Странно и почти трогательно видеть между этими следами неудержимо рвущегося гения проявления добросовестной, доходящей до мелочей ученической работы, от которой не освобождены и такие люди, как Гаусс. Здесь можно найти записи старательных упражнений в дифференцировании, и непосредственно перед делением лемнискаты мы видим совершенно банальные подстановки в интегралах, навык в обращении с которыми должен приобрести любой студент.

Теперь я хотел бы составить небольшой конспект ряда типичных для дневника записей (привожу их под теми номерами, под которыми они числятся в первой части десятого тома "Трудов" Гаусса).

1. 30 марта 1796 г.: деление круга с помощью циркуля и линейки на семнадцать частей.

2. 8 апреля: первое строгое доказательство " theorema aureum". Это крайне трудное доказательство, распадающееся на восемь случаев, которые надо разбирать по-разному, заслуживает самого пристального внимания из-за бесстрашной последовательности, с которой оно проводится. Кронекер называет его " испытанием силы гауссова гения".

51. 7 января 1797 г. начинаются занятия лемнискатой
и

60. 19 марта 1797 г. он находит причину – "cur" [1] – появления показателя n^2 в уравнении деления лемнискаты. Это, следовательно, означает, что Гаусс установил, воспользовавшись комплексной областью, двоякопериодичность лемнискатного интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-ix)(1+ix)}}.$$

80. В октябре Гаусс находит доказательство основной теоремы алгебры, которое в 1799 г. приносит ему степень доктора.

98. 30 мая 1799 г. Гаусс приходит к крайне важному результату: он обнаруживает связь между арифметико-геометрическим средним и длиной лемнискаты, причем снова путем чистых вычислений, подсчитав значение $\dfrac{1}{\mu(1, \sqrt{2})}$ с одиннадцатью десятичными знаками. Еще не уяснив себе всех обстоятельств, он прекрасно понимает, какое значение имеет это открытие, закладывающее основы "совершенно новой области анализа". Начиная с этого момента развитие теории эллиптических функций быстрыми темпами идет вперед. Поначалу Гаусс все еще занимается "лемнискатной" функцией, т.е. частным случаем, когда в роли параллелограмма периодов выступает квадрат. Но уже в записях

105 –109, относящихся к периоду с 6 мая по 3 июня 1800 г., фиксируется открытие общих двоякопериодических функций. Квадрат заменяется параллелограммом общего вида. Тем самым Гаусс в полном виде создает теорию общих эллиптических и модулярных функций и одним ударом предвосхищает будущее развитие науки, продвинувшись дальше Абеля и Якоби.

Нарастающие занятия астрономией приводят к завершению этого периода великих открытий. Я хотел бы упомянуть еще запись

144, относящуюся к 23 октября 1813 г. Здесь закладываются основы теории биквадратичных вычетов и в теорию чисел вводятся числа вида $a + bi$. Доказательство закона взаимности для биквадратичных вычетов, по-видимому, наполнило Гаусса особенной радостью, так как он прибавляет,

---

[1]) Почему (*лат.*). – ***Примеч. пер.***

что решение этой задачи, которое он безуспешно искал в течение семи лет, совпало с рождением сына.

Кое-кто испытает, вероятно, сожаление по поводу того, что Гаусс потратил столько сил на решение уже разрешенных проблем и что он должен был без всякого руководства и без помощи заново преодолевать все трудности, победа над которыми уже стала всеобщим достоянием. В противовес этому мнению я хотел бы самым настойчивым образом подчеркнуть благословенную роль самостоятельности. Как раз на этом примере мы можем постичь ту мудрую педагогическую истину, что для успешного развития личности приобретение знаний имеет, по-видимому, гораздо меньшее значение, чем развитие способностей. Упорство, с которым Гаусс следовал однажды избранному пути, юношеская стремительность и беспечность, с которой он атаковал самые крутые подступы к цели, – все эти суровые испытания закалили его силы и сделали его способным, преодолев препятствия, уже побежденные другими, неудержимо идти вперед, обгоняя своих предшественников.

К этой похвале, похвале самостоятельности, я хотел бы присовокупить еще одну – похвалу юности. Мне хочется сказать, что развитие математического гения подчиняется, по-видимому, тем же самым законам, что и развитие любой другой творческой одаренности: в юные годы, когда только что завершается процесс физического развития, настает время великих, с огромной скоростью сменяющих друг друга откровений; именно в это время создаются те новые, ему одному принадлежащие ценности, которые он должен принести миру, создаются, даже если имеющиеся у него средства выражения еще отстают от обилия стекающихся к нему идей.

Следующий за этими годами менее благоприятный и до отказа заполненный делами жизненный период является порой совершенствования и реализации накопленных знаний, для чего зрелость суждений, опыт, чувство меры и владение собственными силами – словом, все дары возраста – являются необходимыми предпосылками. Так, часто случается, что мир впервые узнает что-либо о шедевре, подлинная суть которого зародилась лет двадцать тому назад, и думает, что видит человека стоящим на вершине его творчества, тогда как тот занят лишь доработкой дела своей жизни и больше не в состоянии добавить к нему ни одного нового штриха.

После того как я таким, по большей части внешним способом охарактеризовал работы Гаусса по чистой математике, я хочу несколько изменить направленность своих лекций и поглубже вдаться в существо отдельных вопросов с тем, чтобы в дальнейшем обеспечить себе необходимую свободу действий. В качестве примеров, иллюстрирующих продуктивность работы Гаусса, я возьму кое-что из *теории эллиптических функций* и из *теории чисел,* а в заключение, чтобы охарактеризовать строгость его критического подхода, я рассмотрю несколько примеров из его работ по *основаниям геометрии.*

В первую из названных областей читателя легче всего ввести, напомнив ему одну совершенно элементарную картинку – разбиение плоскости двумя системами равноудаленных параллельных прямых (рис. 1). Всякому, кто когда-либо изучал кристаллографию, знакома "*решетка*" – пространственный образ, являющийся аналогом этой сетки конгруэнтных параллелограммов. Эта важная, отнюдь не только внешняя связь подчеркивается и самим Гауссом в его аннотации к книге Зеебера, посвященной тернарным квадратичным формам (1831 г.)[1]). В ней Гаусс впервые разъясняет теоретико-числовые факты при помощи геометрических соотношений.

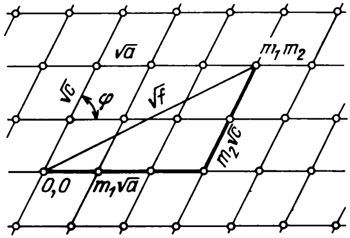


Рис. 1

Мы ограничимся здесь случаем двух переменных и рассмотрим лишь положительно определенные квадратичные формы, т.е. такие формы

$$f = am_1^2 + 2bm_1m_2 + cm_2^2,$$

которые при любых действительных m_1 и m_2 принимают положительные значения. Для этого необходимо и достаточно, чтобы a, b и c удовлетворяли следующим условиям:

$$a > 0,\quad b > 0,\quad b^2 - ac = -D < 0.$$

Относительно a, b и c мы пока будем предполагать, что они являются действительными числами, тогда как m_1 и m_2 – и это лежит в существе дела – должны быть целыми.

А теперь свойства такой формы мы будем изучать геометрически, на упоминавшемся уже рисунке (см. рис. 1). В этой косоугольной системе координат каждому узлу рассматриваемой решетки соответствует некоторая, вполне определенная пара чисел m_1 и m_2. Мы придадим сторонам основного параллелограмма значения $\sqrt{a}$ (в направлении m_1) и $\sqrt{c}$ (в направлении m_2), а угол наклона φ возьмем таким, чтобы выполнялось равенство $\cos\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{ac}}$. Тогда диагональ основного параллелограмма будет равна $\sqrt{a + 2b + c}$ и вообще форма $f = am_1^2 + 2bm_1m_2 + cm_2^2$ будет выражать квадрат расстояния узла m_1, m_2 рассматриваемой решетки от начала координат. Таким образом, оказывается возможным решать теоретико-

[1]) Werke, т. 2, стр. 188.

числовые проблемы экспериментально-геометрическими методами. Например, на вопрос о том, представимо ли конкретное целое число A заданной формой f, и если да, то посредством какой именно пары чисел m_1 и m_2, можно ответить следующим образом. Мы строим окружность радиуса $\sqrt{A}$ с центром в начале координат и смотрим, проходит ли она через какой-нибудь узел решетки. Важная с теоретико-числовой точки зрения величина D при таком подходе тоже приобретает простой геометрический смысл: в самом деле, $\sqrt{D} = \sqrt{ac - b^2}$ представляет собой площадь нашего основного параллелограмма.

Проинтерпретируем на геометрическом языке важнейшие теоретико-числовые понятия, встречающиеся уже у Лагранжа. И прежде всего понятие эквивалентности. Эквивалентными являются решетки, состоящие из одних и тех же узлов, но имеющие, вообще говоря, другие ребра. Такие решетки при преобразовании

$$m_1' = \alpha m_1 + \beta m_2, \quad m_2' = \gamma m_1 + \delta m_2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — целые числа, удовлетворяющие условию $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, переходят друг в друга. При такого рода преобразовании площадь $\sqrt{D}$ остается неизменной, но чтобы гарантировать эквивалентность решетки, одного этого недостаточно.

Интуитивно ясно, что имеется бесконечное число эквивалентных решеток и среди них по крайней мере одна такая, что ее основной параллелограмм наименее отличается от прямоугольника. Эту решетку мы будем называть *приведенной*; чтобы построить ее, надо взять в качестве сторон основного параллелограмма отрезки, ведущие из начала координат: 1. в ближайший узел решетки (его длину мы принимаем за $\sqrt{a}$) и 2. в ближайший из оставшихся, но лежащий на другом направлении (его длину мы принимаем за $\sqrt{c}$). Так как в этом случае каждая из диагоналей $\sqrt{a + c + 2b}$ и $\sqrt{a + c - 2b}$ должна быть больше $\sqrt{c}$, то критерием приведенности решетки (формы) является неравенство

$$|2b| \leqslant a \leqslant c.$$

Так как с точностью до симметрии среди эквивалентных решеток имеется только одна приведенная, то можно также сказать, что две формы эквивалентны, если они преобразуются в одну и ту же приведенную. Семейство всех эквивалентных форм называется *классом форм*.

В частном случае, когда a, b и c суть ц е л ы е числа, говорят о *целочисленной* или о *сингулярной решетке*. Мы уже видели, что площадь $\sqrt{D}$ является инвариантом преобразования. Возникает вопрос: сколько классов форм с целочисленными a, b и c имеется при заданном D? Иначе говоря, сколькими способами можно удовлетворить условию $|2b| \leqslant a \leqslant c$ при заданном постоянном значении $D = ac - b^2$? Так как по условию a, b и c — целые числа, то при заданном D число h приведенных форм конечно; это число называется *числом классов* определителя D.

Среди форм определителя D всегда имеется о д н а так называемая *главная форма.* Для нее $b = 0$, $a = 1$ и, значит, $c = D$. Она имеет, следовательно, вид $m_1^2 + Dm_2^2$. Ее основной параллелограмм является прямоугольником. Она представляет собой приведенную форму своего класса, который носит имя *главного класса* форм.

Теперь мы покинем область элементарной и перейдем к высшей теории чисел, отличающейся от элементарной одной существенно новой идеей. Пользуясь принятым у физиков способом выражаться, можно сказать, что до сих пор распределение чисел на плоскости рассматривалось со скалярной точки зрения, в то время как теперь мы, имея в виду учесть направление, станем на векторную точку зрения.

Именно: мы сделаем сейчас нашу плоскость носительницей комплексных чисел $x + iy$ и с их помощью изобразим узлы нашей решетки в прямоугольной системе координат. Если мы повернем сторону $\sqrt{a}$ параллелограмма так, чтобы она совпала с направлением оси x, и обозначим стороны параллелограмма посредством ω_1 и ω_2, то $\omega_2 = \sqrt{a}$ будет действительным, а $\omega_1 = \dfrac{b+\sqrt{-D}}{\sqrt{a}}$ комплексным числом. При этом

$$\frac{b+\sqrt{-D}}{\sqrt{ac}} = e^{i\varphi},$$

и, значит, $\omega_1 = \sqrt{c}\cdot e^{i\varphi}$, так что число $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ имеет положительную мнимую часть. Любая точка решетки будет характеризоваться числом $x + iy = m_1\omega_2 + m_2\omega_1$, или же, как мы будем писать впредь, поменяв обозначения целых чисел m_1 и m_2, числом $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. Это выражение мы будем называть *решеточным числом* (Gitterzahl).

Если сторона ω_2 не будет направлена вдоль оси x, то должен будет появиться еще некоторый вращающий множитель $e^{i\chi}$, так что решеточные числа будут иметь следующий общий вид:

$$\left(\sqrt{a}\,m_2 + \frac{b+\sqrt{-D}}{\sqrt{a}}\,m_1\right)e^{i\chi}.$$

Введя решеточные числа, мы добились важного преимущества: над этими числами стало возможным производить все обычные арифметические действия, включая и умножение, в то время как узлы решетки можно было только складывать. Это приводит к поразительной теореме, имеющей фундаментальное значение: произведение двух чисел, принадлежащих целочисленным решеткам G' и G'' одного и того же определителя D, принадлежит некоторой целочисленной решетке G''' того же определителя D. Символически это изображается следующим образом:

$$G'\cdot G'' = G'''.$$

Для случая главной формы это доказывается тривиальным вычислением:

$$(m_2 + m_1\sqrt{-D})\cdot(m_2' + m_1'\sqrt{-D}) =$$
$$= (m_2 m_2' - D m_1 m_1') + (m_1 m_2' + m_1' m_2)\sqrt{-D}.$$

Таким образом, в этом случае произведение будет принадлежать даже той же самой решетке, что мы символически запишем в виде

$$G \cdot G = G \qquad (G \text{ -- главная решетка}).$$

Следовательно, решетки одного и того же определителя образуют некий единый организм; они составляют, как мы теперь говорим, *группу*[1]), причем *коммутативную*, или *абелеву группу*, что непосредственно вытекает из коммутативности умножения комплексных чисел. При этом, так как $G \cdot G = G$, роль единицы этой группы играет главная решетка.

Это и есть проблема *композиции форм*, о которой идет речь в знаменитом по своей трудности пятом разделе "Disquisitiones Arithmeticae". Как и во всей более ранней литературе, у Гаусса не говорится о решеточных числах — он оперирует с самими формами. Однако это означает только то, что вместо комплексных решеточных чисел он пользуется их нормами (т.е. умножает их на сопряженные величины). В самом деле,

$$am_2^2 + 2bm_1m_2 + cm_1^2 =$$
$$= \left(\sqrt{a}\cdot m_2 + \frac{b+\sqrt{-D}}{\sqrt{a}}\, m_1\right)\left(\sqrt{a}\cdot m_2 + \frac{b-\sqrt{-D}}{\sqrt{a}}\, m_1\right).$$

Пользуясь таким способом выражаться, Гаусс исследует, не прибегая к комплексным величинам, общие групповые свойства форм с заданным детерминантом, причем не только положительно определенных, но и в самом общем случае, чем и обусловлена огромная трудность этого раздела. Такое изложение не дает представления о том, кáк первоначально выглядела теория; оно, скорее, наоборот, представляет собой отвечающую общей гауссовской тенденции маскировку общей идеи. Лагранж, дающий в своих "Additions a l'Algèbre d'Euler" ("Добавлениях к алгебре Эйлера", т. VII Собрания сочинений) первые примеры композиции форм, исходит из линейных множителей форм; идея композиции форм, несомненно, впервые и возникла именно из интереса к этим множителям и к их сочетаниям.

Встает, таким образом, вопрос, не был ли Гауссу известен способ исследования этой проблемы с помощью комплексных чисел и не скрыл ли он его из одной лишь свойственной ему осторожности. Историк не может определенно ответить на этот вопрос, так как в бумагах Гаусса на этот счет нет

---

[1])В современных терминах — моноид (полугруппа с единицей). Впрочем, как будет показано ниже, этот моноид является группой и в современном смысле этого термина (для любого элемента существует обратный элемент). — *Примеч. ред. перевода.*

ни малейшего намека. Тем не менее я убежден, что Гауссу этот ход мыслей был уже известен, хотя такая историческая гипотеза и выдвигается здесь мною впервые[1]).

В пользу моего предположения говорит не только то, что все необходимые для этого предпосылки были у Гаусса в руках. Особенно сильным аргументом я считаю то обстоятельство, что он в том же 1831 г. опубликовал уже упоминавшуюся выше аннотацию к книге Зеебера с ее геометрическими интерпретациями, а с другой стороны – работу о биквадратичных вычетах, в которой рассматриваются[2]) целые числа $m_2 + m_1 i$. Неужели же Гауссу действительно не пришла в голову мысль ввести комплексные числа и в том случае, когда параллелограмм имеет общий вид, и он не заметил связи с теорией композиции форм? Я считаю это абсолютно немыслимым и даже склонен думать, что Гаусс уже в 1799 г. владел этими теориями во всей их полноте.

Я перехожу теперь к теоретико-функциональному смыслу решеток. При изложении этого материала, содержащего особенно много рудиментарных следов исторического развития, я хочу опираться исключительно на математические факты, ибо только они дают нам сегодня ясное и полное представление обо всей этой области[3]). Я не намерен заниматься разными имевшимися здесь подходами. С исторической точки зрения они, быть может, и важны, но сами по себе они все же случайны.

Исходным пунктом для нас будет служить теоретико-групповой способ рассмотрения. Пусть u, ω_1 и ω_2 – три независимые переменные, такие, что отношение $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ имеет положительную мнимую часть. Рассмотрим трехчленную группу преобразований, состоящую из переносов

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

и унимодулярных подстановок

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,$$
$$\omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2,$$

где $m_1, m_2, \alpha, \beta, \gamma$ и δ – целые числа. Будем искать инвариантные, или *автоморфные функции* этой трехчленной группы преобразований. Я сразу

---

[1]) Дирихле и Дедекинд применяют подход, основанный на использовании решеток, лишь в косвенном виде; они сначала перемножают числа

$$am_2 + (b + \sqrt{-D})\, m_1 \quad \text{и} \quad a'm'_2 + (b' + \sqrt{-D})\, m'_1,$$

затем переходят к произведению норм, а затем из него снова выносят множитель aa'.

[2]) См. также S t ä c k e l. Gauß als Geometer (Werke, т. 10, 2, Abh. IV, особенно стр. 63 и след.).

[3]) См. также гл. 6 и 7.

же отмечу, что очень часто рассматривают только автоморфные функции первого из этих преобразований, т.е. только *двоякопериодические функции* $f(u|\omega_1, \omega_2)$, где ω_1 и ω_2 – константы. Однако не менее важным и интересным является изучение того, как ведут себя эти функции при подстановках с переменными ω. К теории *общих эллиптических функций* нас приводит лишь изучение инвариантов всей этой трехчленной группы.

Относительно этих общих функций $f(u|\omega_1, \omega_2)$ мы теперь, в соответствии с традицией, сделаем некоторые естественные для теории функций предположения. Наша придирчивая, проявляющая особый интерес к разного рода аномалиям эпоха требует недвусмысленной формулировки этих условий, которые предыдущими поколениями – когда, по словам П. Дюбуа-Реймона, "мы жили еще в раю" – безусловно соблюдались как нечто беспрекословно само собой разумеющееся. Мы будем считать, что $f(u)$ – функция, однозначно определенная во всех конечных точках плоскости и, значит, не имеющая ни существенно особых точек, ни естественной границы определения. Для функции $f(\omega_1, \omega_2)$ сформулировать, не вдаваясь в детали, эти требования, как хотелось бы сказать, " благонравия" сложнее; я удовольствуюсь тем, что скажу, что функция $f(\omega_1, \omega_2)$ должна вести себя по возможности более разумно. Следующее требование, выдвигаемое мной, – это *однородность* f по всем трем аргументам, причем степень однородности по u, по ω_1 и по ω_2 может быть любой. Благодаря такому предположению обсуждение всех этих вопросов становится значительно более элегантным и красивым. Замечу, что оно делается не всеми авторами, занимающимися этими вещами. Часто предпочитают ограничиваться рассмотрением функций, степень однородности которых равна нулю, т.е. функций отношений $u : \omega_1 : \omega_2$ – что-нибудь вроде $f\left(\dfrac{u}{\omega_2}, \dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)$. Так поступает, например, Якоби.

Наряду с уже упоминавшимися двоякопериодическими функциями $f(u|\omega_1, \omega_2)$ существуют также функции, зависящие только от ω_1 и ω_2. Я буду называть их *модулярными формами,* если степень их однородности равна нулю, т.е. если они зависят только от отношения $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$.

Наконец, в качестве еще одного интересного частного случая двоякопериодических функций я отмечу автоморфные функции группы преобразований

$$u' = u + m_2 + m_1 i.$$

Это так называемые *лемнискатные функции.* Своим названием они обязаны тому факту, что впервые встретились при вычислении длины дуги лемнискаты, точно так же как (чересчур узкое) название "эллиптические функции" происходит от эллипса, при вычислении длины дуги которого они применялись. При этом, однако, между дугой лемнискаты и дугой эллипса нельзя провести полной аналогии, потому что первая из них задается интегралом "первого рода"

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} \;,$$

а вторая – интегралом "второго рода". До этого различия Гауссу тоже пришлось дойти самостоятельно.

Приведем теперь простейшие общие эллиптические функции, удовлетворяющие перечисленным выше условиям.

В обозначениях Вейерштрасса это:

$$\wp(u\,|\omega_1, \omega_2), \quad g_2\,(\omega_1, \omega_2),$$

$$\wp'(u\,|\,\omega_1, \omega_2) = \frac{\partial\wp}{\partial u}, \quad g_3\,(\omega_1, \omega_2).$$

Они определяются абсолютно на всей плоскости сходящимися рядами, которые ведут свое происхождение от Эйзенштейна и которые я здесь приведу, чтобы тем самым сразу, простейшим способом, доказать существование искомых функций:

$$\text{степень } -2\text{: } \wp(u\,|\,\omega_1, \omega_2) = \\ = \frac{1}{u^2} + \Sigma' \left\{ \frac{1}{(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} \right\},$$

$$\text{степень } -3\text{: } \wp'(u, \omega_1, \omega_2) = -2\,\Sigma \frac{1}{(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^3},$$

$$\text{степень } -4\text{: } g_2(\omega_1, \omega_2) = 60\,\Sigma' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4},$$

$$\text{степень } -6\text{: } g_3(\omega_1, \omega_2) = 140\,\Sigma' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}.$$

Суммирование производится по всем парам m_1, m_2. Штрих при знаке суммы означает, что пара $m_1 = m_2 = 0$ должна быть пропущена. По поводу первого ряда необходимо специально заметить, что для обеспечения его абсолютной сходимости выражения, заключенные в фигурные скобки, не должны отрываться друг от друга.

Функции $\wp(u)$ и $\wp'(u)$ называются *основными*. В узлах решетки они имеют полюса второго и, соответственно, третьего порядка. Величины g_2 и g_3 называются *инвариантами*. Они представляют собой простейшие модулярные формы. Так называемый *дискриминант* Δ выражается через них формулой $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$, и поэтому функция $J = \dfrac{g_2^3}{\Delta}$ дает простейший пример модулярной функции.

Между этими четырьмя функциями имеет место следующее алгебраическое соотношение:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\,\wp - g_3,$$

а кроме того для них справедлива замечательная, фундаментальная по своей важности теорема о том, что любая другая автоморфная функция трех переменных, удовлетворяющая упомянутым выше условиям разумности, может быть рационально выражена через эти функции. Таким образом, теорема эта дает полное описание всей области интересующих нас функций.

Однако в теоретических исследованиях особую важность имеет другое представление этих функций, а именно – в виде частных *целых функций* (в конечной части плоскости нигде не обращающихся в бесконечность). Числитель и знаменатель представленной таким образом автоморфной функции, конечно, уже не являются двоякопериодическими. Важнейшей в этой связи целой функцией является введенная Вейерштрассом *σ-функция,* которая может быть изображена следующим бесконечным произведением:

$$\sigma(u) = u \cdot \Pi'\left(1 - \frac{u}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}\right) \times$$
$$\times\, e^{\frac{u}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}\right)^2}.$$

Сходимость этого произведения обеспечивается наличием экспоненциальных множителей. Функция является однородной, степени +1 по u, ω_1 и ω_2. Во всех узлах решетки она обращается в нуль. Через нее могут быть выражены обе $\wp$-функции. Так, например,

$$\wp = \frac{d^2\,[\ln \sigma(u)]}{du^2} = \frac{\sigma\sigma'' - \sigma'^2}{\sigma^2}.$$

Как уже отмечалось, сама σ не является двоякопериодической. Более того, имеют место равенства

$$\sigma(u + \omega_1) = -\sigma(u) \cdot e^{\eta_1\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)},$$

$$\sigma(u + \omega_2) = -\sigma(u) \cdot e^{\eta_2\left(u + \frac{\omega_2}{2}\right)},$$

где η_1 и η_2 – некоторые константы, в смысл которых я бы не хотел вдаваться. Однако σ является модулярной формой, т.е. для любых целых α, β, γ и δ имеет место равенство

$$\sigma(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \sigma(u \mid \omega_1, \omega_2).$$

Эта в высшей степени важная функция была, как уже упоминалось, открыта Вейерштрассом. И тем не менее Гаусс и Абель вплотную приблизились к ней. Действительно, они оперировали с функцией

$$C \cdot \sigma \cdot e^{-\kappa \cdot u^2}$$

(где константы C и κ я ради краткости описывать не стану), встречающейся в вычислениях, к которым приводит использование обычной нормальной формы эллиптических интегралов, и дающей для разложения двоякопериодических функций на числитель и знаменатель те же самые возможности, что и $\sigma(u)$. Сейчас мы назвали бы ее функцией "второй ступени", потому что она инвариантна не относительно всей модулярной группы в целом, а только относительно некоторой ее подгруппы [1]. Вейерштрасс обозначил ее в честь Абеля символом Al. Особенное распространение эта функция получила благодаря книге "Théorie des fonctions doublement périodiques" ("Теория двоякопериодических функций") Брио и Буке -- двух учеников Лиувилля, вышедших из школы Коши. Это книга была опубликована в 1859 г. и в течение долгого времени оставалась основным учебником по этим вопросам. Как это ни странно, обозначение "Al" ставится в этой книге в связь с немецким словом "Alles" – поучительный пример того, с какой быстротой создаются этимологические легенды.

Перечислив основные эллиптические функции и указав важнейший способ их представления, я не хотел бы совсем оставить в стороне одну связанную с этим кругом вопросов область, даже если рассмотрение ее и не даст ничего в идейном отношении нового для построения интересующей нас теории, которую я стремлюсь изложить здесь по возможности кратко. Я имею в виду подробно и глубоко разработанную теорию *тета-функций*. Эта теория, благодаря поразительному обилию имеющихся в ней вычислительных по своему характеру задач, а также вследствие блестящих возможностей, которые она открывает для приложений, приобрела теперь большое самостоятельное значение.

Дело в том, что σ-функцию удается разложить на множители таким образом, чтобы один из них был автоморфным относительно одного из периодов. Так возникает функция, которую Якоби обозначает посредством ϑ_1; способ, которым получается эта функция, дает для нее блистательно сходящееся разложение в ряд, в равной степени удобное как для аналитических рассмотрений, так и для фактических вычислений. Формула, из которой извлекается это разложение, имеет вид

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2) = \frac{e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2} \cdot \sqrt[8]{\Delta}}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, q\right),$$

[1] См. гл. 6, стр. 318.

где

$$q = e^{i\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}} = e^{i\pi\omega}, \quad \Delta = g_2^3 - 27 q_3^2.$$

Функция ϑ_1 – однородная, нулевой степени по u и ω. Путем некоторых преобразований из этой формулы получается ряд

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, q\right) = 2\left(q^{\frac{1}{4}} \sin\frac{\pi u}{\omega_2} - q^{\frac{9}{4}} \sin\frac{3\pi u}{\omega_2} + q^{\frac{25}{4}} \sin\frac{5\pi u}{\omega_2} - \ldots\right).$$

Аналогичными рядами определяются и другие "тета-функции". Существует целая наука о так называемых *тета-соотношениях*, т.е. о тождествах, которые выполняются для тета-функций при надлежащем выборе аргументов. В течение долгого времени здесь были главные отъезжие поля, где охотились математики всех мастей. В настоящее же время эта проблематика отошла на задний план – пример того, что мода изменчива и в науке.

В отношении сложения периодов тета-функции ведут себя очень просто, но при подстановках вместо ω_1 и ω_2 вид их изменяется весьма сложным образом. Изучение всех этих вопросов привело к возникновению целой науки о способах задания тета-функций.

Как читатель, вероятно, уже догадался, я излагаю здесь весь этот материал лишь для того, чтобы сообщить, что Гаусс уже владел всем этим кругом идей. Тета-функции в лемнискатном случае он построил еще в 1798 г., в общем случае он построил их в 1800 г., а в 1808 г. он занимался тета-соотношениями.

Теперь я продолжу изложение основных идей теории автоморфных функций. После того как основные функции построены, а их связи со всеми другими функциями интересующего нас типа выяснены, очередную плодотворную идею подсказывает нам систематика теории групп (см. мою Эрлангенскую программу [1]) 1872 г.), которая ставит вопрос об автоморфных функциях различных *подгрупп* рассмотренной выше трехчленной группы подстановок. Эти функции мы будем называть "функциями *высших ступеней*". Спрашивается: существуют ли такие функции и в какой связи находятся они с основными? Когда такая связь носит алгебраический характер и какие алгебраические соотношения "униформизуются" ими [2])?

Из великого множества возникающих здесь проблем я хочу отобрать лишь те, которые встают применительно к одной только переменной u. Здесь намеченный путь приводит к учению о *преобразовании* эллиптических функций (в особом смысле, который мы сейчас определим), о их *умножении* и *делении*.

---

[1]) Klein F. Ges. math. Abh., т. 1. стр. 460 и далее.

[2]) Иначе говоря: какие алгебраические равенства тождественно удовлетворяются этими однозначными функциями?

Функции, автоморфные не относительно всех подстановок нашей трехчленной группы, а только относительно некоторой их части, можно получить, "вкладывая" в заданную решетку какую-либо новую, получающуюся из заданной изъятием определенных ее узлов. Элементарный параллелограмм новой решетки будет тогда иметь площадь, равную не $\sqrt{-D}$, а некоторому целому кратному этой величины: $n \cdot \sqrt{-D}$. Стороны его задаются формулами

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \bar{\alpha}\omega_1 + \bar{\beta}\omega_2, \\ & \qquad\qquad (\bar{\alpha}\bar{\delta} - \bar{\beta}\bar{\gamma} = n), \\ \bar{\omega}_2 &= \bar{\gamma}\omega_1 + \bar{\delta}\omega_2, \end{aligned}$$

где $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ и $\bar{\delta}$ обозначают некоторые целые числа. Если для этой новой решетки, получающейся из заданной *преобразованием n-го порядка,* ввести основные эллиптические функции

$$\wp(u \mid \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = \bar{\wp} \text{ и } \wp'(u \mid \omega_1, \omega_2) = \bar{\wp}',$$

то относительно первоначальной группы

$$\begin{aligned} u' &= u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \\ \bar{\omega}_1 &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad\qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \\ \bar{\omega}_2 &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}$$

они будут функциями искомого типа. Если, например, новый параллелограмм получился в результате объединения нескольких старых и, значит, гомотетичен старому, то значения функций $\bar{\wp}$ и $\bar{\wp}'$ будут повторяться не при любом переносе $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, а только в том случае, когда m_1 и m_2 будут кратными некоторых целых чисел.

Теперь речь пойдет о взаимосвязи, существующей между $\wp$ и $\wp'$, с одной стороны, и $\bar{\wp}$ и $\bar{\wp}'$ – с другой. Она совсем просто получается из теоремы о том, что все эллиптические функции рационально выражаются через соответствующие основные. Так как новые периоды $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ являются периодами и для старых функций $\wp$ и $\wp'$, то отсюда получается, что $\wp$ и $\wp'$ рационально выражаются через $\bar{\wp}$ и $\bar{\wp}'$. Что же касается $\bar{\wp}$ и $\bar{\wp}'$, то они выражаются через $\wp$ и $\wp'$ алгебраически. Частным случаем этого преобразования n-го порядка является *умножение,* задаваемое посредством формул

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \kappa \cdot \omega_1, \\ & \qquad n = \kappa^2 \quad (\kappa \text{ – целое}). \\ \bar{\omega}_2 &= \kappa \cdot \omega_2, \end{aligned}$$

Новый параллелограмм в этом случае гомотетичен старому. Подстановкой в эйзенштейновские ряды получаем, что

$$\bar{\wp} = \wp(u \mid \kappa\omega_1, \kappa\omega_2) = \frac{1}{\kappa^2}\wp\left(\frac{u}{\kappa} \mid \omega_1, \omega_2\right),$$

$$\bar{\wp}' = \wp'(u \mid \kappa\omega_1, \kappa\omega_2) = \frac{1}{\kappa^3}\wp'\left(\frac{u}{\kappa} \mid \omega_1, \omega_2\right)$$

и, полагая $\frac{u}{\kappa} = v$, что

$$\bar{\wp} = \wp(\kappa v \mid \kappa\omega_1, \kappa\omega_2) = \frac{1}{\kappa^2}\wp(v \mid \omega_1, \omega_2),$$

$$\bar{\wp}' = \wp'(\kappa v \mid \kappa\omega_1, \kappa\omega_2) = \frac{1}{\kappa^3}\wp'(v \mid \omega_1, \omega_2).$$

Так как

$\wp$ и $\wp'(\kappa v \mid \omega_1, \omega_2)$ рационально выражаются через $\bar{\wp}$ и $\bar{\wp}'$.

то

$\wp$ и $\wp'(\kappa v \mid \omega_1, \omega_2)$ рационально выражаются через $\wp$ и $\wp'(v \mid \omega_1, \omega_2)$.

Здесь новым множителем снабжены уже не периоды, а переменные u или v. Этот переход называется *умножением эллиптических функций,* а обратный переход – их *делением.* Алгебраический характер последнего перехода, конечно, должен быть изучен более подробно.

Однако, чтобы быть в состоянии полностью воздать Гауссу все почести, которых он заслуживает, мы должны продвинуться еще на один шаг вперед и перейти к так называемому *комплексному умножению* эллиптических функций. Оно возможно лишь в отдельных решетках, обладающих тем свойством, что в них могут быть вложены параллелограммы, гомотетичные основным. Для таких решеток можно построить рационально через $\wp(v)$ выражающиеся функции $\wp(\kappa v)$, где $\kappa = \kappa_1 + i\kappa_2$ – некоторое комплексное число.

Мы подвергнем этот вопрос подробному исследованию в простейшем случае лемнискаты, когда $\omega_1 = i\omega_2$. Выполняя комплексное умножение, получаем

$$\bar{\omega}_1' = (\kappa_1 + i\kappa_2)\omega_1 = \kappa_1\omega_1 - \kappa_2\omega_2,$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = n.$$

$$\bar{\omega}_2' = (\kappa_1 + i\kappa_2)\omega_2 = \kappa_2\omega_1 + \kappa_1\omega_2,$$

Таким образом, эта операция представляет собой "преобразование" степени $n = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$. Следовательно, в данном случае функции

$\wp(\kappa v \mid \omega_1, \omega_2)$ и $\wp'(\kappa v \mid \omega_1, \omega_2)$

могут быть рационально выражены через функции

$$\wp(v \mid \omega_1, \omega_2) \text{ и } \wp'(v \mid \omega_1, \omega_2),$$

даже если κ является комплексным. Нечто аналогичное может быть доказано для произвольных решеток, допускающих комплексное умножение; однако если решетка будет не главной, придется вовлечь в рассмотрение все решетки определителя D. Понятно, что эта проблема теснейшим образом связана с композицией форм определителя D.

Весь намеченный здесь круг вопросов, всегда считавшийся одной из самых интересных и изысканных областей теории эллиптических функций, подвергался Гауссом разнообразной разработке. С самого начала, занимаясь лемнискатой, он применял и обычное и комплексное умножение. Например, умножение на 5 он разбивает на два последовательных комплексных шага: $5 = (2+i) \cdot (2-i)$ и, пользуясь этим, решает в квадратных радикалах уравнение 25-й степени деления лемнискаты. По поводу этого крупного достижения имеется лишь беглое замечание в "Disquisitiones Arithmeticae" во введении к проблеме деления круга (см.: Werke, т. 1, стр. 412 и 413). Это в высшей степени замечательное место, причем даже не столько само по себе, сколько по тому влиянию, которое оно оказало в дальнейшем. Именно оно и послужило в 1825 г. Абелю толчком к занятиям этой проблемой, которую он исчерпывающим образом решил, обнаружив двоякопериодичность, а также возможность введения комплексного умножения для эллиптических функций общего вида.

До сих пор мы в основном занимались зависимостью наших автоморфных функций от u, рассматривая решетку параллелограммов в плоскости u. Теперь мы станем на противоположную точку зрения и, оставив u в стороне, более подробно изучим зависимость этих функций от одних только ω_1 и ω_2. Такой подход приводит нас к *теории модулярных форм* и, в частности, *модулярных функций*. Этими последними мы здесь и ограничимся. Как уже отмечалось, функции эти по переменным ω_1 и ω_2 являются однородными функциями степени 0. Мы положим теперь $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ и сделаем объектом нашего рассмотрения подстановки вида

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

Возникает вопрос, можно ли группу этих подстановок наглядно представить себе, разбив плоскость комплексной переменной ω на фундаментальные области [1] подобно тому, как выше плоскость переменной u была разбита на фундаментальные параллелограммы относительно группы $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. Оказывается, что это действительно возможно. При этом возникает так называемая *модулярная фигура,* и Гаусс был первым,

[1] См. стр. 378. – ***Примеч. пер.***

кто владел ею, опередив в этом отношении Абеля, Якоби и других, непосредственно следовавших за ними. Только начиная с Римана эта фигура (рис. 2) получила в рассматриваемой теории всеобщее признание в качестве удобного рабочего инструмента. На нашем рисунке исходная область фигуры дана штриховкой, а границы ее указаны жирными линиями. Если число ω не является действительным, то в случае, когда его мнимая часть положительна, оно всегда некоторым преобразованием рассматриваемой группы может быть переведено в верхнюю часть фундаментальной области, а в случае, когда мнимая часть отрицательна, — в нижнюю ее часть. По существу, в этих словах выражена вся теория приведения квадратичной формы

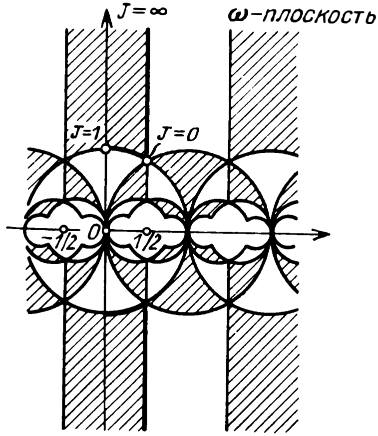


Рис. 2

$$am_2^2 + 2bm_1m_2 + cm_1^2,$$

ассоциированной с решеткой $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. Всякая точка ω, лежащая в фундаментальной области, изображает приведенную решетку, а точки, эквивалентные точке ω и лежащие в других областях, изображают эквивалентные решетки. Их число бесконечно.

Эти другие области получаются из фундаментальной путем последовательных отражений в двух прямых и окружности, части которых составляют границу модулярной фигуры. В результате вся плоскость переменной ω будет без пробелов покрыта кривоугольными треугольниками, сторонами которых являются дуги окружностей. Эти треугольники все более и более прижимаются к действительной оси. Как уже было сказано, точки верхней и нижней полуплоскости не могут быть переведены друг в друга преобразованиями модулярной группы. Действительная ось для всех модулярных функций представляет собой так называемую "естественную границу". Все ее рациональные точки являются устьями, в которые вливается бесконечное число областей. Таким образом, действительная ось несет на себе бесконечное всюду плотное множество точек, к каждой из которых сходятся две бесконечные последовательности областей. Однако этими точками она не исчерпывается. Ввиду того что точки действительной оси ведут себя таким совершенно особым образом (как говорит Гордан, "в них живут демоны"), случай действительного ω требует специального подробного рассмотрения.

Мы спрашиваем теперь, какие модулярные функции соответствуют этому разбиению плоскости. Простейшей из них является так называемый *"абсолютный инвариант"* $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$. В фундаментальной области эта функция каждое значение принимает один и только один раз и обладает тем свойством, что в указанных на рис. 2 точках она принимает значения 0, 1 и ∞. Ввиду этого $J(\omega)$ находится в особенно простой связи с теорией квадратичных форм. Так как каждый класс эквивалентных форм (решеток) изображается единственной точкой нашей фундаментальной области, то этому классу отвечает одно-единственное значение функции $J(\omega)$. И обратно, если отвлечься от абсолютной величины параллелограммов, то каждому значению $J(\omega)$ будет соответствовать один-единственный класс форм. Все это определяет важную роль, которую функция $J(\omega)$ играет как в теоретико-функциональном, так и в теоретико-числовом плане. Роль эта становится еще более важной ввиду того обстоятельства, что все другие модулярные функции рационально выражаются через J. Само собой разумеется, они, в отличие от J, принимают каждое свое значение уже не в одной, а в нескольких точках фундаментальной области.

Гаусс знал эту функцию и важные ее свойства. В третьем томе его "Трудов" на стр. 386 опубликована одна его запись о "сумматорной функции" (J). Модулярная функция и принцип отражения, как уже упоминалось, также были ему известны.

Опираясь на теоретико-групповой подход, мы зададимся теперь вопросом о *подгруппах* группы подстановок $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ и о взаимосвязи, существующей между этими подгруппами и всей группой в целом. К сожалению, я не смогу привести здесь общий принцип разыскания подгрупп и ограничусь рассмотрением одного примера – *главной конгруэнц-подгруппы n-й ступени.* Так называется группа подстановок с коэффициентами, удовлетворяющими условиям

$$\alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv 1 \pmod{n},$$

которые я запишу в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n}.$$

Мы вкратце рассмотрим главную конгруэнц-подгруппу второй ступени. Для коэффициентов α, β, γ, δ имеется шесть различных возможностей:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \pmod{2}.$$

Фундаментальная область этой подгруппы включает в себя шесть областей первоначальной группы. Фундаментальной функцией в этой области является так называемое *двойное* (или *ангармоническое*) *отношение* $\lambda(\omega)$, которое иногда записывают также в виде $\kappa^2(\omega)$, где $\kappa(\omega)$ известно под именем *модуля Лежандра.* Функция $\lambda(\omega)$ инвариантна относительно конгруэнц-подгруппы второй ступени и называется *модулярной функцией второй ступени.* Так как фундаментальная область этой функции в шесть раз больше фундаментальной области функции $J(\omega)$ и, значит, одному значению функции J соответствует шесть значений функции λ, то ясно, что эти значения связаны друг с другом рациональным соотношением шестой степени. И, действительно, имеет место равенство

$$J = \frac{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{27\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Эта подгруппа тоже была известна Гауссу. Отрывочные заметки на эту тему и соответствующий рисунок можно найти на стр. 103 и 105 восьмого тома "Трудов", а также на стр. 386 третьего тома. Но только дневник позволяет составить более точное представление о том, что было известно Гауссу по этому вопросу. См. его замечание от 3 июня 1800 г. (Werke, т. 10.1, стр. 550).

Я перехожу теперь к совершенно другой стороне рассматриваемого предмета, имея в виду и здесь воспользоваться накопившимися у нас знаниями. Исторически развитие теории эллиптических функций шло, как известно, иным путем, отличным от того, который пройден в нашем изложении. Сначала были найдены *эллиптические интегралы,* а затем из них посредством обращения были получены рассматривавшиеся выше эллиптические функции. Мы же, отталкиваясь от эллиптических функций, познакомимся со свойствами эллиптических интегралов, рассматривая их как обращения функций.

Из соотношения

$$\wp'(u)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

полагая в нем $\wp(u) = z$, получаем

$$u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z^2 - g_2 z - g_3}}.$$

Эта форма, ведущая свое начало от Эйзенштейна и часто употреблявшаяся Вейерштрассом, называется *однородной нормальной формой первой ступени,* поскольку фигурирующие в ее подынтегральном выражении коэффициенты являются модулярными формами первой ступени. Однако иногда, в зависимости от обстоятельств, может оказаться целесообразным выразить *u* через интеграл более высокой ступени, коэффициенты которого инвариантны только относительно некоторой подгруппы модулярной группы. За *нормальную форму второй ступени* (в неоднородном виде) принимается интеграл

$$v = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}},$$

где λ означает уже упоминавшееся выше двойное отношение. Полагая здесь $z = \sin^2\varphi$, $\lambda = \kappa^2$, мы получим часто употребляемую еще и ныне *нормальную форму Лежандра:*

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}}.$$

Гаусс и здесь оказывается принципиальнее большинства современных ему авторов; он строго соблюдает однородность нормальной формы второй ступени. Введенная им в теории вековых возмущений [1]) и теснейшим образом связанная с приведенной выше нормальной формой второй ступени *гауссова форма* имеет вид

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}.$$

А теперь, наконец, я могу объяснить, в каком отношении ко всей изложенной здесь теории находится так часто упоминавшееся нами *арифметико-геометрическое среднее.* Гаусс рассматривает вопрос о вычислении одного из периодов предыдущего эллиптического интеграла, т.е. о вычислении определенного интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}.$$

Оставив в стороне другие приближенные методы, Гаусс вычисляет этот интеграл, воспользовавшись идеей, встречающейся, кстати сказать, еще у Лагранжа, – последовательным квадратичным преобразованием; он шаг за шагом удваивает прямоугольник периодов интегрируемой функции – способ, который в пределе дает полосу периодичности тригонометрической функции, а высота этой полосы и является предельным значением рассматриваемого интеграла. При каждом таком преобразовании интеграл переходит в новый, устроенный точно таким же образом:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos^2\varphi' + n'^2\sin^2\varphi'}},$$

где

$$m' = \frac{m+n}{2}, \quad n' = \sqrt{mn},$$

---

[1]) Werke, т. 3, стр. 331 и далее; особенно см. стр. 352 и далее, а также стр. 359.

так что в пределе получается

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi^{(\infty)}}{2\pi\mu\sqrt{\sin^2\varphi^{(\infty)} + \cos^2\varphi^{(\infty)}}} = \frac{1}{\mu},$$

что и приводит к искомому результату. Для случая лемнискаты ($m^2 = 1$, $n^2 = 2$) Гаусс, согласно дневнику, получил его 23 декабря 1799 г. Опубликован он был лишь в 1818 г. в его теории вековых возмущений.

На этом я хотел бы закончить свой небольшой экскурс в область теории эллиптических функций. Я старался всюду продемонстрировать, как рано и насколько глубоко Гаусс владел самыми разными разделами этой теории. Удивительное зрелище представляет собой картина того, как эта наука стекается к нему из трех совершенно разнородных источников, которые затем плодотворнейшим образом сливаются воедино. Эти источники суть:

1) чисто случайные занятия арифметико-геометрическим средним;
2) теория положительно определенных квадратичных форм;
3) изучение лемнискаты.

Естественно, возникает вопрос о тех разделах данной теории, которыми Гаусс еще не владел. Так, ему не был известен общий способ нахождения периодов эллиптических интегралов, т.е. интегралов от многозначных функций, основанный на интегрировании по контуру в комплексной области. Возможно, именно это обстоятельство и заставило Гаусса отказаться от публикации своих результатов. Первым, кто проложил путь в этом направлении, был Пюизё (Comptes Rendus, т. 32, 1851), а окончательная ясность в этих вопросах наступила лишь после того, как Риман ввел свое понятие "многолистной поверхности". Полностью теория эллиптических функций была завершена лишь теоремой о том, что параллелограмм периодов в плоскости переменной u представляет собой конформный образ двулистной, наложенной на плоскость переменной z и надлежищим образом разрезанной поверхности функции $\wp'(u) = \sqrt{f(z)}$.

Таким образом, я в общих чертах обрисовал богатства, подаренные нам гением Гаусса в области этих новых, плодотворных идей. Завершая задуманный мною портрет, я хочу теперь обратиться к тем его достижениям, которыми наша наука обязана ему в части *критики ее оснований* и строгости применяемых в ней методов. Изложению этого вопроса я хотел бы предпослать три общих тезиса, которые, как мне кажется, вытекают из размышлений над историей развития рассматриваемого вопроса.

Понятие "строгости" в нашей науке и требование придерживаться идеала, заключенного в этом понятии, ведут свое начало от древних греков, которые понимали все это как необходимость выводить математику чисто логически из возможно меньшего числа предположений. Однако я хотел бы подчеркнуть, что даже при идеальной, понимаемой в этом смысле "строгости" в процессе возведения фундамента математики продолжает принимать участие определенный элемент интуиции и алогизма. Он участвует уже в формировании понятия числа. Греки в качестве субстрата своей интуиции использовали простейшие плоские фигуры, и им удалось развить на этой основе систему действия над отрезками. Мы же сегодня предпочитаем оперировать с буквами. Тем не менее между тем и другим нет принципиальных различий в логическом плане: ведь в процессе нашего оперирования со знаками тоже присутствует определенный элемент интуиции. Именно в этом смысле логик Э. Шрёдер формулирует в одном месте в качестве аксиомы положение, что знаки, которые мы пишем на бумаге, за ночь не меняются ("аксиома имманентности знаков")[1].

Исторически идеал "строгости" не всегда играл одну и ту же роль в развитии нашей науки. Наоборот, роль эта в зависимости от обстоятельств времени оказывалась весьма различной. В периоды бурной научной продуктивности строгость часто отступала на второй план, уступая дорогу тенденции к возможно более быстрому росту научного достояния, чтобы затем в периоды критицизма – периоды просеивания и классификации накопленных богатств – акцент на ней становился более сильным. Вспомним хотя бы период возникновения в XVIII столетии дифференциального и интегрального исчисления, когда бурный полет фантазии и страстная жажда открытий в сочетании с недостаточной обоснованностью некоторых вещей вызывали к жизни и кое-что такое, что впоследствии оказывалось просто неверным. Или же вспомним создание в XIX столетии теории алгебраических кривых. В качестве примера обратной картины я хотел бы напомнить эпоху схоластики, когда незначительная продуктивность сочеталась с крайней остротой критического и диалектического мышления. Глубоко несправедливо часто с презрением высказываемое мнение, будто схоластика представляла собой погрязшее в неплодотворной изощренности направление ума. Как раз наша эпоха должна была бы отмежеваться от этого поверхностного суждения, причина которого заключается, по-видимому, в чуждой нам мистико-метафизической подоплеке, общей для всех творений того времени. Однако если с этих схоластических спекуляций снять покрывало, из-за которого они на поверхностный взгляд кажутся чисто теологическими ухищрениями, то они во многих случаях окажутся в высшей степени корректными подступами к тому, что мы сегодня называем "теорией множеств". Так, если задаться вопросом о том, может ли бог в течение одного часа создать нашу бесконечную вселенную, то, рассуждая на эту тему, нам придется столкнуться с вещами, к которым сегодняшних математиков приводит проблема бесконечности множества точек единичного отрезка. Недаром Георг Кантор, творец теории множеств, учился у схоластиков. Окидывая взглядом путь, пройденный наукой, мы должны признать, что только в редкие моменты и дух критики, и стремление разложить каждый мыслительный шаг на мельчайшие детали, и "идеал строгости" – все это было столь же исполнено жизни, как и во времена схоластики.

---

[1] Schroeder E. Arithmetik und Algebra, т. 1. – Leipzig, 1873, стр. 16 и след.

Тот же контраст, наличие которого мы констатировали между различными научными эпохами, можно наблюдать и между различными типами ученых. Есть смелые завоеватели, обладающие огромной интуицией, но нисколько не заботящиеся об упорядочении применяемых ими понятий; опираясь на свой инстинкт, они открывают и делают всеобщим достоянием все новые и новые сокровища. Наряду с ними другие умело приводят завоеванное в тщательный порядок; они обладают даром правильно оценивать любую вещь и находить ей свое место, опираясь во всем на ясную, надежную критическую силу своего интеллекта. Лишь в редких случаях можно встретить соединение этих двух несовместимых друг с другом талантов; история по праву отводит каждому из них единственное в своем роде положение, делая их властелинами и повелителями в своих областях, возвышающимися над любыми столкновениями мнений и времен. То, что Гаусс в полной мере должен быть причислен к этим немногим избранникам, я хочу теперь продемонстрировать, разобрав также и критическую сторону его дарования. Однако предварительно я должен сделать еще одно, не имеющее прямого отношения к рассматриваемому вопросу замечание общего характера.

Рассматривая историю нашей науки, мы видим, что "строгость" при всем нашем отношении к ней представляет собой нечто относительное — требование, развивающееся лишь постепенно, в процессе общего поступательного движения науки. Интересно наблюдать, как в периоды общей устремленности к строгости современники всякий раз уверены, что ими в этом направлении достигнут максимум возможного, и как потом одно из последующих поколений оставляет их в своих требованиях и достижениях далеко позади. Так были превзойдены и Евклид, и Гаусс, и Вейерштрасс. Границ развитию в этом направлении может быть поставлено, по-видимому, столь же мало, как и самой творческой силе человека.

Я хотел бы в первую очередь подчеркнуть этот последний пункт, когда буду говорить о достижениях Гаусса в области критических проработок. Гаусс и здесь не является чем-то неожиданным и единственным в своем роде. Он представляет собой звено непрерывной, уходящей в обе стороны цепи — правда, звено, несравненное по своему значению.

Вновь обнаружившаяся в конце XVIII столетия тяга к строгости нашла свое первое выражение в "Éléments de la géométrie" ("Элементы геометрии") Лежандра (1794 г.) и в "Théorie des fonctions" ("Теория функций") Лагранжа (1797 г.). Оба эти труда в части критики не удовлетворяют требованиям, предъявляемым нами сегодня, но они сохраняют свое значение в качестве первых рабочих попыток, предпринятых в давно уже не разрабатывавшемся направлении. Но вот в 1801 г. выступает с "Disquisitiones Arithmeticae" Гаусс и дает неизвестное дотоле по строгости и отсутствию пробелов изложение предмета, которое ставит его намного впереди современников и быстро приносит его методам репутацию неоспоримых и непревзойденных. И эта репутация является вполне заслуженной — в той мере, в какой это касается доказательств, принадлежащих ему самому.

Но Гаусс еще не ощущал тогда потребности расширить область дедукции и уменьшить число предположений до пределов возможного. В "Disquisitiones Arithmeticae" без каких-либо попыток анализа принимается весь аппарат обычных вычислений, производимых над числами и буквами. Анализ аксиом и оснований этой науки не вызывал у него интереса. Однако когда ему приходилось расширять привычные рабочие границы, Гаусс поступал совершенно иначе. Так, при введении "мнимых чисел", правомерность которых еще нередко вызывала у его современников сомнения, Гаусс проявляет крайнюю добросовестность. В 1799 г. он в своей диссертации с осторожным утаиванием обсуждает проблему, которая около 1800 г. занимала умы многих математиков. Однако позже, поборов все сомнения по части логики, он отчетливо высказывает свою точку зрения, особенно в своем классически прозрачном резюме второй работы по биквадратичным вычетам (1831 г.; Werke, т. 2, стр. 174–178). Здесь он тщательно избегает всего, что могло бы придать новой арифметике налет мистики и фантастики, особенно в обозначениях. Он вводит в научный обиход термин "комплексное число"; к сожалению, его предложение вместо "положительной и отрицательной мнимой единицы" говорить о "прямой и обратной боковой единице" не было принято. Но своей геометрической интерпретацией он раз и навсегда переместил арифметику этого двумерного многообразия из сферы мистических фантазий в область ясных представлений.

Я хотел бы теперь несколько более подробно рассмотреть ряд областей, привлекших к себе внимание Гаусса с точки зрения критического обоснования. Это прежде всего *основная теорема алгебры*, за работу над которой он принимался снова и снова. Имеются три доказательства: 1799, 1815 и 1816 гг. (Werke, т. 3, стр. 1, 31 и 57). Более позднее доказательство 1845 г. представляет собой лишь уточненный вариант первого из них. Затем нужно упомянуть еще одну важную область – строгое изложение теории сходящихся рядов. В своей работе о гипергеометрическом ряде (1812 г.; Werke, т. 3, стр. 123 и далее, а также стр. 139–143) Гаусс устанавливает первые общие критерии сходимости степенных рядов. В этой связи представляет интерес тот факт, что имеется область, не привлекшая к себе внимания Гаусса, хотя именно здесь недостаток критической проработки оснований мешал дальнейшему росту и процветанию одного из самых замечательных творений человеческого ума – я имею в виду дифференциальное и интегральное исчисление. Задача внести порядок и ясность в эту область досталась Коши, и она была решена им только в 1821 г. Само собой разумеется, что Гаусс корректно пользуется вычислительным аппаратом анализа, но по вопросам его логической структуры он не высказывается.

Теперь мы несколько более подробно рассмотрим доказательства *основной теоремы алгебры*. Именно на этих доказательствах можно видеть, в чем Гаусс превзошел своих предшественников по части сторогости и какие коррективы вносятся сюда современной наукой. При этом я хочу ограничиться лишь первыми двумя из них, так как третье потребовало бы привлечения несколько более сложных средств.

Основная теорема алгебры была сформулирована и в известной мере доказана Даламбером в его "Recherches sur le calcul intégral" ("Исследования по интегральному исчислению", 1746 г.). Работа эта была опубликована им в издании, называвшемся тогда "Histoire de l'Academie de Berlin" ("История Берлинской академии")[1]). Французы поэтому и сейчас называют эту теорему "теоремой Даламбера", а Гаусс назвал свою диссертацию "demonstratio nova" ("новое доказательство"), чем, следовательно, подчеркнул, что он никоим образом не претендует на достижение, которое теперь так часто ему приписывается, — создание "первого строгого доказательства" этой теоремы. Разумеется, его сочинение начинается подробной критикой всех предшествующих доказательств. Затем Гаусс приводит собственное, новое рассуждение, которое в переводе на современный язык можно было бы изложить примерно следующим образом. Он рассматривает функцию

$$P + Qi = f(x + iy),$$

где $f(x + iy) = f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, и исследует поведение кривых $P = 0$ и $Q = 0$ на плоскости $x + iy$. На большом расстоянии от начала координат, т.е. для больших по абсолютной величине значений переменной $z = re^{i\varphi}$, эти кривые асимптотически приближаются к кривым $z^n = 0$, т.е. к кривым

$$r^n \cos n\varphi = 0, \qquad r^n \sin n\varphi = 0.$$

Оба эти уравнения изображают две системы лучей, выходящих из начала координат, причем лучи этих систем чередуются друг с другом. Из такого взаимного расположения асимптот Гаусс делает заключение о существовании точки их пересечения.

С нашей сегодняшней точки зрения мы по поводу этого доказательства должны были бы сказать примерно следующее: в принципе оно правильно, но не закончено. Гаусс молчаливо использует здесь свойства алгебраических кривых, пользуясь понятием "кривой", так сказать, простодушно. Тот факт, что "кривая" не может прерываться, хотя и формулируется, но затем дальше никак не анализируется. Кроме того, недостаточно исследованы отдельные комбинации, могущие образоваться при пересечении различных ветвей кривых $P = 0$ с теми или иными ветвями кривых $Q = 0$. Но, конечно, прежде всего считаются само собой разумеющимися некоторые фундаментальные теоремы непрерывности для двумерных областей — например, теорема о том, что две перекрещивающиеся кривые обязательно имеют точку пересечения.

---

[1]) Еще раньше эта теорема была высказана Альбером Жираром в его работе "Invention nouvelle en l'algèbre", Amsterdam, 1629 (переиздана Беренсом де Хааном, Лейден, 1884).

Второе доказательство по части применяемых в нем средств является гораздо более простым. Оно целиком укладывается в рамки представлений, связанных с одномерным континуумом.

Теорему о том, что уравнение нечетной степени $\varphi = 0$ имеет хотя бы один действительный корень, Гаусс считает самоочевидной. Затем он применяет следующий гениальный прием: из уравнения $f(z) = 0$ степени n, где n таково, что в разложении его множитель 2 содержится лишь в первой степени, можно получить целую функцию новой переменной u, а именно результант функций

$$P(z, u) = f(z + u) + f(z - u)$$

и

$$Q(z, u) = \frac{f(z + u) - f(u)}{u},$$

коэффициенты которой по коэффициентам многочлена $f(z)$ получаются с помощью рациональных действий. Степень этой функции равна $n(n-1)$, но она может рассматриваться как функция $F(u^2)$ степени $\frac{n(n-1)}{2}$ относительно переменной u^2. Теперь можно, не предполагая существования корней у уравнения $f(z) = 0$, показать, что обращение $F(u^2)$ в нуль является условием, необходимым и достаточным для того, чтобы уравнения $P(z, u) = 0$ и $Q(z, u) = 0$ имели общий корень. Так как степень функции $F(u^2)$ относительно переменной u^2 нечетна, то уравнение $F(u^2) = 0$ имеет корень h. Следовательно, уравнения $P(z, \sqrt{h}) = 0$ и $Q(z, \sqrt{h}) = 0$ имеют общий корень $z = g$, откуда вытекает существование у уравнения $f(z) = 0$ корней вида $g \pm \sqrt{h}$. При этом по заданному $\sqrt{h}$ и по коэффициентам многочлена f число g находится с помощью рациональных действий (с помощью алгорифма нахождения наибольшего общего делителя).

Если в n множитель 2 входит во второй степени, то в $\frac{n(n-1)}{2}$ он входит только в первой степени. Значит, F подпадает под только что рассмотренный случай и можно применить предыдущее рассуждение. Следовательно, по принципу полной индукции утверждение о существовании корня справедливо для любого натурального n.

К этому блестящему доказательству современная теория могла бы сделать одно-единственное дополнение, относящееся к его первому шагу, — имеется в виду утверждение, что в случае нечетного n уравнение $f = 0$ имеет действительный корень. Гауссу было очевидно, что если при возрастающем z функция f переходит из положительных значений к отрицательным (или наоборот), то она проходит через нуль. Что же касается нас, то мы сегодня ощущаем потребность проанализировать это умозаключение и при этом наталкиваемся на понятие, играющее фундаментально важную роль, – понятие непрерывности. Таким образом, по поводу этого доказательства можно сказать, что ему, во-первых, недостает явно сформулированной теории действительных чисел, полнота которых устанавливается, например, по Дедекинду, с использованием его сечений; во-вторых, в нем отсутствует доказательство того факта, что если непрерывная функция $f(z)$ принимает значения разных знаков, то в некоторой промежуточной точке она обращается в нуль; в-третьих, в нем отсутствует доказательство того, что рассматриваемая функция $f(z)$ непрерывна.

Все эти моменты были преодолены лишь в 1817 г. в работе Б. Больцано "Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege" ("Чисто аналитическое доказательство теоремы о том, что между двумя значениями, доставляющими результаты противоположных знаков, лежит по крайней мере один действительный корень уравнения", Прага; переиздано в серии Ostwald's Klassiker, № 153). Этой работой Больцано превзошел более поздние исследования Коши. Больцано является одним из отцов подлинной "арифметизации" нашей науки. Он был католическим священником и религиозным философом, и для меня поэтому несомненно, что основой первых импульсов к его исследованиям послужили традиции схоластики. Впрочем, теорему эту во вполне вразумительном виде можно найти уже у грека Евдокса! Если сравнить со сказанным написанные в 1810 г. с каким-то простодушным самодовольством слова француза Лакруа [1]: "Подобная изощренность, которой мучили себя древние греки, больше нам не нужна", то получится весьма живая иллюстрация к словам, сказанным выше относительно различий в характерах отдельных периодов развития математической науки.

Перехожу теперь к области, которая в данной связи должна считаться самой важной: я имею в виду работы Гаусса по *основаниям геометрии.* По поводу этого крайне интересного и весьма значительного по объему материала можно было бы сказать очень много. Однако желающих познакомиться с ним более подробно я отсылаю к статье Энриквеса и Цахариаса в Энциклопедии (Enzykl., III AB1 и AB9).

Из всех своих работ по этому кругу вопросов Гаусс не опубликовал ничего, и только в связи с некоторыми его замечаниями и письмами стали постепенно, часто с искажениями и в виде слухов распространяться сведения о том, что, занимаясь теорией параллельных прямых, он натолкнулся на новую, в высшей степени парадоксальную геометрию. Как бы там ни было, разговоры об этом приобрели достаточно широкий характер, и в последующие годы все, у кого в той или иной мере возникали сходные идеи, стали группироваться вокруг Гаусса. Здесь нашел яркое проявление один из самых примечательных законов человеческой истории, состоящий в том, что новые идеи открываются не только отдельным творцам, но что, так сказать,

---

[1] Lacroix P. Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, 2-е изд., т. I, предисловие, стр. 11.

само время таит в себе великие идеи и проблемы и в моменты их созревания оно ставит их (может быть, даже навязывает) осененным гениальностью умам. Так и здесь – внезапно, почти одновременно, в различных, никак не связанных друг с другом местах на свет появляется производящая полный переворот идея неевклидовой геометрии, которая в течение многих тысячелетий не приходила на ум ни одному человеку. Однако если мы проследим историю отдельных сделанных здесь открытий, то убедимся, что Гаусс в любом вопросе был впереди всех остальных на несколько лет. И если даже отвлечься от вопроса о приоритете, которого из-за молчания Гаусс лишился, то и тогда надо будет признать, что Гаусс имеет перед неевклидовой геометрией величайшие заслуги, поскольку весом своего авторитета он способствовал привлечению к ней всеобщего внимания и в конечном счете содействовал победе этого ожесточенно оспаривавшегося в то время творения человеческого духа.

Первое открытое упоминание о новом геометрическом творении Гаусса можно найти в работе Сарториуса фон Вальтерсхаузена "Gauß zum Gedächtnis") ("Памяти Гаусса", 1856 г.; относящееся к данному вопросу место перепечатано в "Трудах" Гаусса, т. 8, стр. 267). Начиная с 1862 г. стала печататься переписка Гаусса с Шумахером, в которой на данную тему содержится богатый материал. Однако весь размах и вся глубина этой стороны творчества Гаусса окончательно смогли проясниться только после опубликования его наследия в том виде, как оно было издано в 1900 г. Штеккелем в восьмом томе "Трудов" Гаусса.

Как мы теперь представляем, развитие гауссовых идей в общих чертах выглядит следующим образом.

Начиная с 1792 г. он, как и все его современники, занимался безуспешными попытками доказать теорему о параллельных, исходя из остальных аксиом. Он опроверг одно за другим все "доказательства", полученные им от других математиков (см., например, письма к Бойяи-старшему от 1799 и 1804 гг.; Werke, т. 8, стр. 159 и 160). Занимаясь разоблачением всех этих псевдодоказательств, он стал все более и более обращать свои помыслы в сторону позитивного решения проблемы – построения неевклидовой геометрии. Он не смог найти в ней никакого противоречия. В одном письме к Шумахеру от 1808 г.[1] он указывает, что из принятия неевклидовой гипотезы вытекает существование абсолютной единицы длины в пространстве. Его одолевают сомнения – разумна ли такая гипотеза? Однако в 1816 г. он уже стоит на гораздо более твердой почве, как показывает его письмо к Герлингу (Werke, т. 8, стр. 168) и, пожалуй, еще более отчетливо вводные слова одного его доклада, опубликованного в 1816 г. в "Göttinger gelehrte Anzeigen" (Werke, т. 8, стр. 170 и 171). Он без обиняков говорит в нем о "пробеле, который невозможно восполнить".

---

[1] Werke, т. 8, стр. 165.

Гаусс рассматривал свою неевклидову геометрию вовсе не с номиналистской точки зрения и не считал ее простой игрой ума. Он был далек и от прагматического подхода, который в евклидовой геометрии видит если и не абсолютную истину, то во всяком случае такое приближение к ней, которое оказывается достаточным в любой области нашего знания, в том числе и в астрономии. Он стоял, скорее, на чисто эмпирической точке зрения. Для него существовало пространство, лежащее вне нас и имеющее свои собственные, незыблемые свойства, которые требовалось исследовать.

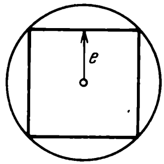


Рис. 3

Вопрос о том, какая геометрия существует "в действительности" и, следовательно, является правильной, должен был решаться путем эксперимента. В этом духе Гаусс высказывается в одном из своих писем к Ольберсу (1817 г.; Werke, т. 8, стр. 177). Априорную истинность он приписывает в нем только арифметике, а геометрию он относит к экспериментальным наукам и ставит ее на одну ступень с механикой. Большое значение имеет также переписка с Герлингом (1818 г., т. 8, стр. 178). Последний прислал Гауссу короткую записку некоего Швейкарта, юриста, жившего в 1812–1816 гг. в Харькове, затем в Марбурге и, наконец, в Кёнигсберге. Швейкарт утверждал, что он открыл новую, "астральную" геометрию. На самом же деле речь шла о гауссовой неевклидовой геометрии, что Гаусс подтверждает с великой радостью. Швейкарт тоже приходит к неожиданному выводу о существовании в пространстве абсолютной единицы длины. В качестве иллюстрации к этому обстоятельству он приводит следующее странное замечание: если бы эта единица равнялась земному радиусу, то линия, соединяющая две звезды, видимые из центра Земли под углом 90°, касалась бы поверхности Земли. Очевидно, своим замечанием Швейкарт хотел указать, как можно эмпирически решить вопрос о том, какая из этих двух, отличающихся друг от друга геометрий имеет место в реальной действительности. Он приводит при этом рисунок, очень похожий на тот, который имеется в рукописном наследии Гаусса. Эта единица длины задается перпендикуляром, опущенным из центра на сторону квадрата, вписанного – как мы сегодня, располагая проективным мероопределением, сказали бы – в абсолют (см. рис. 3).

Гаусс с похвалой отозвался об идеях Швейкарта, но предостерег от их опубликования. Для Гаусса причиной полного молчания по этому вопросу была абсолютная безнадежность найти у широкой публики хоть какоенибудь понимание столь парадоксально выглядящих вещей. Он настойчиво предостерегает от "ос", которые будут жалить всякого, кто отважится высказать что-нибудь в этом роде, или от "криков беотийцев" (т. 8, стр. 179, 181 и 200). И в письме к Тауринусу (1824 г., т. 8, стр. 186), в котором он сообщает ему некоторые подробности, он просит держать эти подробности в тайне. Тем бо́льшую радость Гаусс испытывал, когда встречал понимание у человека с незаурядным, живым умом. Свидетельством тому служит его переписка с Бесселем (1829 г., т. 8, стр. 200–201), который немедленно, поскольку речь шла о фигурах на земной поверхности, стал на практическую точку зрения.

Между тем с неотвратимостью наступило время, когда тайна оказалась разглашенной устами молодых, самостоятельных первооткрывателей. В 1832 г. появились результаты Яноша Бойяи-младшего, изданные в виде приложения к труду его отца. В письме к отцу (там же, стр. 220) Гаусс в тонах высочайшей похвалы и величайшего изумления отозвался о работах молодого человека, которые предали широкой гласности его собственные сокровеннейшие находки. К сожалению, благожелательные слова этого великого человека не внушили доверия молодому Бойяи, человеку пылкому, терзаемому внутренними сомнениями, которому, кроме того, много душевных потрясений доставляла его офицерская карьера. Его, по-видимому, задело, что Гаусс пожелал быть владельцем его идей до него и независимо от него. Он совершенно ожесточился против Гаусса; дело зашло так далеко, что он объявил опубликованные вскоре после этого работы Лобачевского хитрой уловкой со стороны Гаусса, рассчитанной исключительно на то, чтобы причинить ему, Бойяи, вред в глазах общественности. Лобачевский, который был российским статским советником в Казани, попал в поле зрения Гаусса примерно в 1841 г. Его опубликованные в 1829 г. работы были встречены Гауссом с энтузиазмом и радостью (см. "Труды", т. 8, стр. 232).

На этом я хотел бы закончить краткий обзор гауссова наследия, опубликованного в восьмом томе. Каждому питающему интерес к этому предмету я горячо рекомендую прочесть напечатанные в этом томе рукописи. Они подверглись подробному исследованию в монографических работах, которые в последних томах "Трудов" опубликованы в качестве научных биографий Гаусса (т. 10, 2, Abh. IV, Stäckel: "Gauβ als Geometer").

Итак, мы в какой-то мере совершили путешествие по всей необъятной области гауссовых трудов и теперь можем попытаться составить себе общее представление о его роли в науке. Уже его современники чувствовали все превосходство его гения, о чем кратко и убедительно сказано в надписи, которую его король повелел выгравировать на отчеканенной в 1855 г. в честь Гаусса медали: Mathematicórum princeps (Принцепс математиков). И если бы его современники имели возможность ознакомиться с его неопубликованными результатами, которые теперь стали доступны нам, то, вероятно, они употребили бы еще более высокие выражения.

И если мы теперь спросим себя, в чем же, собственно, кроется необычность, своеобразие силы этого ума, то ответ будет гласить: в сочетании величайших конкретных достижений в каждой занимавшей его ум области с величайшей разносторонностью; в совершенном равновесии между его творческой силой, строгостью изложения и практическим чутьем по части приложений вплоть до тщательно произведенных наблюдений и измерений; и, наконец, в совершеннейшей форме, в которой это созданное им богатство преподносит он миру.

Среди сколько-нибудь сравнимых с ним титанов нашей науки только два предшественника Гаусса были столь же щедро, как и он, одарены природой: это Архимед и Ньютон. И подобно этим двоим Гаусс прожил необычайно долгую жизнь и имел возможность полностью проявить свою личность.

Но величие Гаусса заключается не в одной только многосторонности в выборе своей сферы деятельности. В подтверждение этой мысли я хотел бы привести один замечательный пример, поставив рядом с Гауссом Лежандра – математика, который был на 25 лет старше его и который, как бы подчиняясь какому-то странному принуждению, работал почти во всех областях над теми же самыми вопросами, что и Гаусс. Однако какого бы признания все его достижения ни заслуживали, он все-таки ни в чем не достиг той глубины, которой достигал Гаусс в каждой проблеме, за которую он принимался. Краткий обзор этих областей поможет нам осознать это удивительное сходство и различие.

Т е о р и я ч и с е л. В 1798 г. появляется учебник Лежандра "Essai d'une Théorie des nombres" ("Опыт теории чисел"), в котором среди прочего рассматривается теория квадратичных форм. В 1801 г. этот труд был превзойден "Disquisitiones Arithmeticae" Гаусса.

А н а л и з. Начиная в 1786 г. Лежандр занимается эллиптическими интегралами $\int R(z, \sqrt{f_4(z)})\,dz$. Он делит их на интегралы первого, второго и третьего рода. Питая такой же интерес к числам, что и Гаусс, и обладая таким же вычислительным талантом и такой же энергией, он составил подробные таблицы для $\int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$. Однако мысль о том, чтобы рассмотреть обратную функцию этого интеграла и тем самым получить в руки ключ к теории эллиптических функций, в голову ему не пришла. Лежандр работает (с 1793 г.) и над эйлеровыми интегралами. Он составляет таблицы для $\Gamma(p)$, в точности соответствующие гауссовым в его теории гипергеометрического ряда (1812 г.).

Г е о м е т р и я. Лежандр делает первую попытку создать строго построенный элементарный учебник. Это "Элементарная геометрия" 1794 г., которая впоследствии выдержала бесчисленное множество переизданий и сыграла значительную роль в истории преподавания математики. Он беспрестанно занимается также теорией параллельных, но до самого конца жизни упорствует в тщетных попытках найти доказательство евклидова постулата.

Г е о д е з и я. В 1792 г. было организовано точное градусное измерение между Дюнкирхеном и Барселоной, в котором Лежандр принял самое горячее участие – как теоретическое, так и практическое. Ему принадлежат крупные заслуги в деле проведения этого первого надежного градусного измерения, которое послужило основой для введения метра в качестве единицы длины и сыграло важную роль в теоретической разработке геодезического дела. Эта работа послужила источником импульсов, приведших его к ряду важных теорем сферической тригонометрии. Но Лежандру и здесь не удалось дойти до глубочайшей идеи Гаусса, занимавшей его в связи с аналогичной деятельностью, – до вопроса о неевклидовой геометрии. Следует также упомянуть, что Лежандр активно участвовал в предпринимавшихся в то время, но, к сожалению, не увенчавшихся успехом попытках введения так называемых "новых градусов", т.е. десятичной системы измерения углов, для которой он составил подробные тригонометрические таблицы.

А с т р о н о м и я. В 1805 г. Лежандр занимался вопросом о притяжении эллипсоидов. Он нашел и опубликовал метод наименьших квадратов, непосредственно соприкасаясь с Гауссом, следовательно, и здесь.

И, наконец,

Ф и з и к а. В этой области Лежандр не имеет таких достижений, которые можно было бы поставить в один ряд с гауссовой теорией земного магнетизма. Возможно, все-таки стоит отнести к теоретической физике теорию сферических функций одной переменной – так называемых многочленов Лежандра. Лежандр владел этой теорией уже в 1795 г. и использовал ее в своей работе о притяжении эллипсоидов. Гаусс и здесь превзошел Лежандра созданием теории потенциала. (Сферические функции двух переменных были тем временем найдены Лапласом.)

Это сопоставление, не ставящее своей целью объяснить загадку гауссова дарования, а только еще более отчетливо показывающее всю его непостижимость, поучительно, однако, в другом отношении. Именно: оно показывает, что математика в основной своей массе не является, как утверждают некоторые, субъективной наукой, обязанной своим развитием случайному, произвольному воздействию творящих ее личностей. Наоборот, дело выглядит таким образом, как если бы предметы исследования давались нам самим характером эпохи с какой-то присущей ему внутренней логичностью и последовательностью. Эта точка зрения находит подтверждение в своеобразной судьбе гауссовых открытий, обнаруженных в его наследии и доставшихся участникам дальнейшего научного развития. Почти все они раньше или позже были независимо от Гаусса сделаны другими учеными. И если среди непонятных нам пока набросков Гаусса имеются еще какие-то новые научные открытия, то мы можем питать твердую уверенность, что дальнейшее развитие нашей науки вторично обнаружит их в каком-нибудь другом месте и объяснит нам намеки, сделанные Гауссом. Предназначение гения, по-видимому, в том и состоит, чтобы, значительно опережая сознание своих современников, предугадать ход естественного развития и именно этим и вызвать решительный поворот и рост творческой активности в новой, дотоле неизвестной душе. Гений служит водоразделом исторических эпох; он – высшая точка развития прошедшей, которой он подводит итог, и одновременно фундамент новой, становлению которой он помогает – быть может, гораздо решительней и эффективней, чем об этом будет помнить время – последними лучами своего влияния. Если мне будет позволено воспользоваться сравнением, Гаусс предстает мне в образе Цугшпитце[1] среди наших баварских гор, как они видны наблюдателю, глядящему на них с севера. Купола, постепенно уходящие вверх с востока на запад, венчаются исполинским гигантом, который, круто обрываясь, переходит в долины новой формации, в которые еще на многие десятки километров вдаются его отроги и стекают его воды, несущие с собой новую жизнь.

На этом я хотел бы закончить обзор научного творчества Гаусса, в заключение упомянув лишь о том, что даже этот всеобъемлющий ум был типичным представителем XVIII века. Гауссу недостает именно тех черт, которые в следующей главе выступят на передний план: интенсивной преподавательской деятельности среди широких кругов слушателей, работы по созданию школы, которая формировала бы определенное научное направление, живого общения с учеными других стран. Все это – черты, характеризующие исследователя современного типа. Наконец, Гауссом совершенно не затронут ряд областей науки из числа тех, которые вскоре нашли себе самое широкое применение, например проективная геометрия. Все это самым блистательным образом выступает на передний план у математиков того круга, к рассмотрению которого мы сейчас перейдем.

---

[1] Высочайшая вершина Баварских Альп (Веттерштейнских гор); высота 2964 м. – *Примеч. пер.*

Глава вторая

ФРАНЦИЯ И ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА В ПЕРВЫЕ ДЕСЯТИЛЕТИЯ XIX СТОЛЕТИЯ

Для того чтобы облегчить понимание дальнейшего, мне придется сказать несколько слов о сущности и структуре Политехнической школы (École Polytechnique) в Париже. При этом я буду придерживаться основного замысла этой школы, не останавливаясь на неоднократных частных изменениях, которые она претерпевала за время своего существования.

О Политехнической школе часто говорят как об аналоге или даже прообразе наших высших технических учебных заведений. Однако, хотя и невозможно отрицать значительного влияния со стороны Политехнической школы на то, что происходит у нас, сопоставление такое, тем не менее, верно лишь с известными оговорками. В частности, военная сторона образования, играющая в Политехнической школе очень большую роль, у нас совершенно отступила на второй план. В пояснение сказанного я хотел бы привести здесь французскую схему преподавания математических дисциплин.

Основой французского школьного образования служит полная средняя общеобразовательная школа, соответствующая нашей Unterprima[1]). За ней в качестве своего рода Selekta[2]) идет "Mathématiques spéciales" – учебное заведение с чрезвычайно большим объемом математических дисциплин (до 16 часов в неделю). Здесь преподаются аналитическая геометрия и механика, а в последнее время еще и элементарный курс анализа бесконечно малых. Большое количество упражнений дает учащимся полную возможность прочно овладеть всем этим материалом. К сожалению, у нас нет учебного заведения, которое можно было бы сравнить с этим. Далее следует очень строгий вступительный экзамен, в результате которого из большого числа претендентов отбирают 150 человек, допускаемых в Политехническую школу. Отбор производится чисто статистически, по количеству "пунктов", набранных из 2000 возможных. Абсолютный рекорд за все

---

[1]) Младшее отделение первого (старшего) класса в германской средней школе. – *Примеч. пер.*

[2]) Старшие классы школы. – *Примеч. пер.*

время существования школы составляет 1875 пунктов, и он принадлежит Адамару!

Обучение в Политехнической школе длится два года, и оно является единственным путем, ведущим к занятию высших технических государственных должностей. В течение следующих двух лет инженер готовится к этому в одной из нескольких специальных школ. Из числа последних я хотел бы упомянуть здесь "École des Ponts et Chaussées" (Институт путей сообщения), "École des Mines" (Горный институт) и военные школы "École de Génie" (Военно-инженерную школу) и "École d'Artillerie" (Артиллерийскую школу). Эти школы неодинаковы по своему рангу и положению (мы перечислили их в порядке убывания), и выпускник Политехнической школы не может свободно выбрать любую из них; выбор этот зависит от отметок в выпускном свидетельстве, так что владельцу первого диплома открыт доступ в любую из этих школ, а владельцу диплома похуже – например, лишь в "Génie" и ниже. Впрочем, кроме выпускников Политехнической школы эти специальные учебные заведения посещает еще большое количество приватных инженеров (курс их обучения длится 4 года). Однако эти не имеющие шансов на государственную карьеру студенты не пользуются таким авторитетом и такими привилегиями, как питомцы Политехнической школы, которые в качестве государственных служащих получают определенное содержание. Еще находясь в Политехнической школе, учащиеся эти – кандидаты на все высокие государственные должности – считаются на службе у государства несмотря на то, что вместо выплаты содержания, предусмотренного при основании школы, с учащихся, наоборот, стала взиматься плата за обучение. Строгий военный порядок в интернате – учащиеся носят форму – и внешне подчеркивает своеобразное положение Политехнической школы, подогнанной исключительно под государственные и военные интересы. По немецким меркам статус выпускников Политехнической школы с учетом их общественного положения, организации обучения, а также влияния на дела государства более всего походит, по-видимому, на статус наших юристов.

Своеобразный, совершенно чуждый нам тип этой школы, естественно, может быть понят только в его историческом развитии. Блестящее изложение деталей этого развития дано Якоби в его докладе о Политехнической школе, прочитанном в 1835 г. в Кёнигсбергском физико-экономическом обществе (Якоби "Труды", т. 7, стр. 355).

Школа была основана в самую тяжелую пору революции, когда ликвидация всех учебных заведений и постоянная убыль молодых, сильных, подготовленных к несению военной службы мужчин настойчиво требовали пополнения именно в этом плане. Такому происхождению школа и обязана своим военным укладом, своим глубоким ощущением государственных интересов – вещами, которые само собой разумеющимся образом должны были оказать длительное и серьезное влияние на характер преподавания и на дух всего этого учебного заведения. Школа была предназначена для подготовки и воспитания офицеров революционной армии, а позже – армии

Наполеона. Только подчеркивая эту цель и опираясь на строго республиканский характер патриотизма, который в принципе не признавал привилегий таланта, в 1794 г. оказалось возможным получить разрешение на открытие этой школы, которая именно благодаря своей военной направленности пережила все бури менявшейся конституции. Мы не говорим уж о материальных трудностях того времени, когда деньги были совершенно обесценены и субсидии школе могли носить только натуральный характер. Несмотря на огромные требования, которые выдвигались войной, пожиравшей учителей и учеников, несмотря на ставшие в результате этого обычным явлением пониженные требования на экзаменах, ускоренный курс обучения и т.д.[1]), школа непрерывно расширялась, а значение ее росло, и в конце концов она превратилась в один из важнейших факторов духовного развития XIX столетия.

Говоря о людях, проделавших всю эту громадную работу, первым следует упомянуть геометра и государственного деятеля Монжа (1746–1818), который до самой своей смерти был истинной движущей силой этого большого дела. Именно он, который еще до парижского периода своей жизни разработал в военной школе в Мезьере методику преподавания начертательной геометрии, передал многочисленной, переживающей период бурного развития аудитории импульс к дальнейшей работе в области современной, нацеленной на нужды действительности геометрии. Его научное влияние, вышедшее далеко за пределы его школы и его отечества, дало и в Германии толчок начавшемуся там вскоре развитию геометрии. Сам я, благодаря моему учителю Плюккеру, еще воспитывался в традициях Монжа. Научная и педагогическая деятельность Монжа находилась в полном равновесии с его административными и организаторскими интересами. Ему неоднократно доверялись важные государственные посты. Свою общественную деятельность он продолжал и при Наполеоне, доверием которого пользовался. Одно время он занимал пост морского министра. Он участвовал в египетской экспедиции, затем занимался организацией промышленного производства пороха. Итак, мы видим, что в те времена математик и инженер был героем дня, каким теперь у нас может быть разве лишь юрист.

Как и следовало ожидать, школа, решающее влияние в которой принадлежало такому человеку, по своему характеру оказалась нацеленной на практическую жизнь. Это сказалось и в организации обучения, целиком рассчитанной на крайнее напряжение сил, на достижение как можно более высокой успеваемости. Какая противоположность идеалу всестороннего, гармонического развития личности, парившему перед воображением XVIII века! Все меры строгости, подогреваемое честолюбие, картины блестящих жизненных перспектив – все это использовалось здесь для предельного раскрытия сил. Знания вколачивались в голову до полного овладения

---

[1]) Наполеон положил этому конец, сказав, что не следует убивать курицу, которая несет ему золотые яйца.

материалом. Наряду с профессорами имелись репетиторы, которые разъясняли материал и проводили опрос учащихся. И наконец, экзаменаторам давалось задание путем исключительно строгого и тщательного выпускного экзамена, которому подвергался каждый кандидат, выяснить, в какой мере был достигнут намеченный результат. Пуассон в конце года обычно бывал занят этими экзаменами в течение четырех недель по девять часов ежедневно.

Такой организации преподавания соответствовал и продуманный, предъявлявший высокие требования учебный план школы. В течение первых десятилетий, которые здесь нас интересуют, математика стояла в этом плане на прочном первом месте и включала в себя следующие разделы:

Чистый анализ	108	двойных лекций	(по 1½ часа)
Приложения анализа к геометрии	17	–"–	–"–
Механика	94	–"–	–"–
Начертательная геометрия	153	–"–	–"–
Черчение	175	–"–	–"–
Всего	547	–"–	–"–

В пересчете на немецкие единицы это соответствует примерно пяти четырехчасовым курсам в неделю. Если к этому прибавить постоянные занятия с репетиторами, то можно составить себе представление о том, какова была рабочая нагрузка студента-политехника.

Так как в это поразительное мероприятие в качестве преподавателей были вовлечены самые значительные математики Франции, то неудивительно, что в очень короткий срок достижения школы поднялись на недосягаемую высоту. Свой вклад сюда внесло и рвение учащейся молодежи, которая во время практических занятий встречалась в чертежных залах и лабораториях с вдохновлявшими их выдающимися педагогами и попадала под их непосредственное влияние. Внешнее воздействие, оказываемое жизнью этой школы, становилось тем более значительным, что был издан закон, обязывавший публиковать читавшиеся в ней лекции. Подавляющее большинство ведущих учебников по математике в начале XIX века возникло из курсов, в свое время читавшихся в Политехнической школе, и из этого источника ведут, так сказать, свое начало все наши современные учебники [1]).

Интенсивное функционирование школы не могло не отразиться и на всей науке в целом. Почти все, чего Франция в первые десятилетия XIX века достигла в области математики, физики и химии, фактически идет из Политехнической школы. Но первой по самой сути школы пережила свой

[1]) См.: Klein, Schimmack. Der mathematische Unterricht in den höheren Schulen, стр. 176 и далее.

расцвет прикладная математика. Поэтому результаты этого мощного взлета, к рассмотрению которых я сейчас перехожу, мне хотелось бы расположить в следующей очередности:

1. Механика и математическая физика.
2. Геометрия.
3. Анализ и алгебра.

Механика и математическая физика

Время, которое мы рассматриваем, испытывало на себе последействие великой астрономической эпохи XVIII столетия, итоги которой классически подведены в трудах Лагранжа и Лапласа. Значительное влияние оказывали также предпринятые Лапласом первые плодотворные попытки перенесения астрономических методов на проблемы поведения физических тел, которые рассматривались как агрегаты молекул; так, например, обстояло дело в теории капиллярности. Правда, наряду с этим играла роль и развивавшаяся под влиянием Эйлера и Лагранжа тенденция к феноменологическому подходу к физическим явлениям. Впрочем, следуя традиции Кулона (1736–1806), физика сосредоточила свой интерес исключительно на установлении количественных характеристик таких классов явлений, которые с качественной стороны уже были известны. О работах по установлению метра мы уже говорили. Подобным же образом интерес был сосредоточен и на фиксации других метрических единиц, длины секундного маятника и т.п.

Внезапно, с первых же десятилетий нового века начинается период выдающихся открытий. Он начинается с открытий в *оптике.* В 1808 г. Малюсом было обнаружено явление поляризации света, после чего, начиная с 1815 г., бурно расцветает гений Френеля (1788–1827)[1]. Он обнаруживает поперечный характер световых колебаний, которые он считает происходящими в квазиупругом эфире. Кроме того, он наблюдает и объясняет распространение света в двухосных кристаллах, круговую поляризацию в кварце, явления аберрации и дает исчерпывающие формулы для теории отражения. Затем в 1821 г. открытием Эрстеда с захватывающей быстротой начинается развитие теории *электромагнетизма* и *электродинамики,* о чем я уже говорил ранее (см. стр. 31 и далее). Классическое по своему характеру изложение этих новых теорий содержится в вышедшем в 1826 г. в Париже труде Ампера (1775–1836) "Théorie des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience" ("Теория электромагнитных явлений, выведенная исключительно из опыта"). Название это может до некоторой степени удивить читателя, когда он узнает, что ни одного из описанных им экспериментов Ампер на самом деле не производил. Для

---

[1]) См. статью Вангерина в Математической энциклопедии (Enzykl., V 21). В подлиннике в качестве года рождения Френеля указан 1799 г. – *Примеч. пер.*

него "эксперимент" имел по существу чисто методическую ценность, и было достаточно одной лишь мысленной его выполнимости. По поводу развития этих идей я тоже хотел бы указать на одну статью в энциклопедии, а именно на статью Райффа и Зоммерфельда (Enzykl., V 12).

Напор этих физических открытий оказывал сильное стимулирующее воздействие на продуктивность математиков; хаос и сумятица набегавших друг на друга новых представлений и теорий безотлагательно требовали упорядочивающей руки математика. Здесь и начали свою работу люди, рассмотрение трудов которых нам предстоит[1]).

Нам прежде всего следует назвать и охарактеризовать трех математиков, которые в историческом плане выглядят связанными друг с другом, хотя при жизни они находились в почти непрерывной полемике: это Пуассон, Фурье и Коши.

Пуассон (1781–1840) является типичным представителем Политехнической школы, в которой он последовательно был учащимся, репетитором, профессором и экзаменатором. В качестве преподавателя этой школы он создал систематический курс механики, из которого потом возникла его книга "Traité de Mécanique" ("Курс механики"; в двух томах, 1-е изд. в 1811 г.), и поныне не утратившая своего значения. Его исследовательская деятельность в части, касающейся механики в узком смысле этого слова, протекала под воздействием идей Лагранжа и Лапласа, которые он развил и усовершенствовал. Его занимали и отдельные проблемы (движение волчка на плоскости), но более всего он интересовался вопросами общеметодического характера. Так, ему мы обязаны важным переходом от употреблявшихся Лагранжем скоростей $\dot{q}_i$ к импульсам $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$. Благодаря этому переходу все соотношения механики приобрели значительно более удобный вид. Кроме того он подверг принесшей большую пользу обработке все разделы прежней математической физики: капиллярность, изгибание пластин, электростатику, теплопроводность. Насколько плодотворной и многосторонней была его деятельность, можно судить по многим деталям, которые и до сих пор связаны с его именем: скобки Пуассона в механике, константы Пуассона в теории упругости, интеграл Пуассона в теории потенциала и, наконец, общеизвестное, получившее широкое применение уравнение Пуассона $\Delta V = -4\pi\rho$, которое он установил для внутренней части притягивающего тела, поставив его рядом с уравнением Лапласа $\Delta V = 0$ для внешнего пространства. Пуассон написал более 300 работ и получил результаты во всех областях, которыми он занимался. Однако из-за велеречивости сочинения его читаются с трудом. В плане теории он был ортодоксальным последователем атомистики в лапласов-

---

[1]) Их подробные биографии, написанные современником, можно найти в собрании сочинений Араго, в особенности в тт. 1 и 2; по-немецки они изданы Ганкелем в Лейпциге в 1854 г.

ском духе. Он заходил в этом так далеко, что видел в производных и интегралах лишь сокращенный способ записи для частных от деления конечных приращений и для сумм.

Фурье (1768–1830) также работал в Политехнической школе, однако лишь с 1796 по 1798 г. В последующие, богатые событиями годы он, как и Монж, принимал участие в египетской экспедиции, а затем, в 1802 г., стал префектом департамента Изера в Гренобле [1]). В 1817 г. он возвратился в Париж. Будучи членом Академии, он собрал вокруг себя небольшой кружок, состоявший из молодых, многообещающих талантов. В числе прочих в кружок этот недолгое время входил и Дирихле. Основные достижения Фурье изложены главным образом в его классическом, совершенном по форме труде "Théorie analytique de la chaleur" ("Аналитическая теория теплоты"), написанном в 1807–1811 гг., но вышедшем из печати лишь в 1822 г. В нем рассматриваются задачи теплопроводности при различных граничных условиях, в диапазоне от чисто теоретической постановки проблемы до фактически выполненных вычислений. Физическая основа рассмотрения весьма близка к феноменологической точке зрения. Характерным отличием этого труда является принципиально выдержанное употребление тригонометрических рядов и интегралов, которые учениками Фурье были названы в его честь рядами и интегралами Фурье; названия эти сохранились за ними и до настоящего времени.

Прежде чем перейти к более подробному рассмотрению содержания этого труда Фурье, я хотел бы немного сказать о принципиальной установке, которой Фурье придерживался в отношении своей науки. Первая фраза его Введения гласит: "Les causes primordiales ne nous sont point connues; mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes, que l'on peut découvrir par l'observation et dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle" ("Первопричины явлений нам неизвестны; но они подчиняются простым и постоянным законам, которые можно открыть путем наблюдения и изучение которых составляет предмет натуральной философии").

Фраза эта характеризует подход Фурье к рассмотрению природы как чисто феноменологический. Орудием, которым он пользуется в этом, обозначенном им в качестве предмета натуральной философии, изучении является математика и прежде всего – анализ в той его части, которая была существенно продвинута самим Фурье: я имею в виду теорию дифференциальных уравнений и их интегрирования. В этой теории он надеется найти непревзойденный инструмент, который, естественно, будет служить своей настоящей цели лишь в том случае, если он будет давать возможность доводить рассмотрение "до числа": "La méthode qui en dérive ne laisse rien de vague et d'indéterminé dans les solutions; elle les conduit jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche, et sans laquelle on n'arriverait qu'à des transformations inutiles" ("Вытекаю-

[1]) Главный город департамента. – *Примеч. пер.*

щий отсюда метод не оставляет в полученных решениях ничего туманного и неопределенного; он доводит их до численных приложений – необходимого условия всякого исследования, без которого мы не получили бы ничего, кроме бесполезных преобразований"; стр. 12).

Он питает твердую уверенность, что все явления природы постижимы средствами математики и что отношения между нами с помощью этой науки могут быть освещены с полной и безупречной ясностью: "Considérée sous ce point de vue, l'analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même, . . . Son attribut principal est la clarté; elle n'a point de signes pour exprimer des notions confuses" ("Рассматриваемый с этой точки зрения анализ столь же широк, как и сама природа. . . Главным его атрибутом является ясность; в нем нет знаков для обозначения неопределенных понятий"). Этой точке зрения соответствует и его изложение – мастерски ясное и совершенное по форме.

Предметом этого труда является вывод дифференциального уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

и интегрирование его при различных граничных условиях; на границе могут быть заданы либо v, либо $\frac{\partial v}{\partial n}$, либо $\frac{1}{v}\,\frac{\partial v}{\partial n}$. Интегрирование производится путем нахождения подходящих частных решений, сумма которых и представляет собой общее решение этого уравнения. Таким образом, здесь систематически применяется методика разложения функций в ряды. Побочным продуктом этой работы оказывается представление произвольно заданных граничных значений в виде рядов, что с теоретико-функциональной точки зрения весьма интересно и само по себе. Имя Фурье и в наше время связывается с обычными тригонометрическими рядами

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

хотя они, конечно, были известны и часто использовались и до него. Идя по сравнению со своими предшественниками гораздо дальше, Фурье, там, где этого требует предмет, использует и более сложные ряды; так, например, он рассматривает ряды

$$f(x) = \Sigma(a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x),$$

где λ определяется довольно хитрыми условиями, трансцендентными по своему характеру: например, условием $\operatorname{tg}\lambda\pi = a\lambda$ (a – некоторая положительная константа), которому удовлетворяют бесконечно много различных λ (см. Enzykl., II, A 12, № 43). Встречаются и разложения по бесселевым функциям. И наконец, используется – также названное именем Фурье –

представление функции в виде интеграла

$$f(x) = \int (a(\kappa) \cos \kappa x + b(\kappa) \sin \kappa x)\, dx,$$

получающееся из ряда предельным переходом.

С помощью всех этих средств Фурье получил представление для большого числа новых функций, кажущихся весьма произвольными по сравнению с известными ранее. Каким-либо строгим доказательством общей приложимости своих методов он не обладал, но он повсюду отстаивал само по себе верное утверждение, что с их помощью можно представить "des fonctions absolument arbitraires" ("совершенно произвольные функции"), т.е. функции, составленные из каких-нибудь "кусков" закономерно устроенных функций. Утверждение это он подкрепляет многочисленными примерами.

Импульс, сообщенный нашей науке Фурье, вплоть до настоящего времени продолжает действовать во всех разделах математической физики и чистой математики. (Примером может служить Пуанкаре, использующий существование собственных колебаний материальных частиц для объяснения акустических явлений.) И хотя истинной побудительной причиной творчества Фурье была мысль о полезности, о применимости развитых им методов к решению больших, поставленных природой практических задач, в нынешнем, становящемся все более рафинированным математическом аппарате начинает брать верх абстрактный, чисто теоретико-функциональный интерес. Если мне будет позволено прибегнуть к примеру, то я скажу, что математика наших дней походит на крупный оружейный магазин мирного времени. Его витрина заполнена роскошными вещами, которые своим остроумным, искусным, пленяющим глаз исполнением восхищают знатока, а подлинные истоки и назначение этих вещей, их способность поражать врага отходят в сознании на задний план вплоть до полного забвения.

На этом я хотел бы закончить свои замечания относительно Фурье и обратиться к ученому, которого по его блистательным достижениям во всех областях математики можно поставить почти что рядом с Гауссом. Речь идет о Коши. Сейчас, когда мы временно будем говорить только о его работах по механике и математической физике, мы сможем воздать ему должное лишь в очень слабой мере. Но мы еше детально займемся им, когда будем рассматривать чистый анализ.

Во внешних обстоятельствах жизни Коши важную роль играли великие исторические события его эпохи; более подробно об этом см. в его биографии, написанной Вальсоном [1]). Родился Коши в 1789 г. в Париже, где и провел свою юность. Воспитывался он в строго клерикальных традициях, верность которым сохранил до конца своей жизни. По окончании Политехнической школы Коши служил путейским инженером в Шербуре, откуда в 1813 г. возвратился в Париж. Будучи с 1816 г. академиком и профессо-

---

[1]) Valson. La vie et les travaux du baron Cauchy. – Paris, 1868.

ром Политехнической школы, он в 1830 г. после июльской революции в силу своих клерикально-роялистских настроений вынужден был вместе с Бурбонами отправиться в изгнание, во время которого жил в основном в Турине и Праге, одно время являясь воспитателем герцога Бордосского. В 1838 г. Коши возвратился в Париж, однако из-за отказа принести присягу новому режиму занять никакой государственной должности он не мог и удовольствовался преподаванием в одной иезуитской коллегии. В конце концов в 1848 г. после новой революции он получил место в Сорбонне, хотя присяги все-таки не принес. В 1852 г. Наполеон III оставил его в этой должности. Умер Коши в 1857 г.

В лице Коши мы встречаемся с человеком со столь отчетливо выраженной политической позицией, что сам собой возникает вопрос о том, имеется ли вообше корреляция между склонностью к математическому мышлению и определенной точкой зрения на жизненно важные общие вопросы, будь то политического, социального или же религиозного характера. Вопрос этот представляется тем более оправданным, что в широких кругах распространено мнение, будто математики и естествоиспытатели, на которых я тоже хотел бы распространить это рассуждение, должны были бы в силу своего свободного от предрассудков и логически точного мышления быть склонными к либеральным и даже радикальным настроениям. Однако взгляд, брошенный в ретроспективу, показывает, что мнение это совершенно не соответствует действительности и что, напротив, наука наша имеет выдаюшихся представителей во всех лагерях и партиях.

Эпоха просвешения XVIII столетия и последовавшая за ней революционная пора и в нашей науке выдвинули людей с радикальными тенденциями. Отсюда, вероятно, и ведет свое начало господствуюшая в общественном мнении точка зрения. Даламбер, один из вождей энциклопедистов, был решительным сторонником нового, оппозиционного по отношению к существующим порядкам направления; Монж был якобинцем и во время революции занимал пост морского министра; в лице Карно-старшего, зашитника Антверпена в 1815 г., мы встречаемся с чистейшим образцом строго республиканского образа мыслей, верность которому он сохранял при любых обстоятельствах. Но вот пример Коши показывает, что в рамках нашей науки возможны взгляды и прямо противоположного характера. При этом Коши не представлял собой какого-нибудь единичного явления; в более позднее время его образ мыслей разделяли Эрмит, Камилл Жордан и Пастер, которые тоже придерживались строго клерикального направления. Им противостоят Фарадей и Риман как представители простодушной протестантской набожности, которая не была подавлена высоким развитием их интеллекта; у Сальмона, профессора богословия, в его протестантизме сильнее выступает догматическое начало. Религиозность Гаусса, который и в этом отношении должен особенно интересовать нас, тоже была простой и глубокой; вне самого себя он желал "упорядоченной власти, которая обеспечивала бы ему возможность спокойной работы". Человеком совсем иного душевного склада был более энергичный в общественном отношении Якоби; в смутную пору 1848 г. он принадлежал к партии с ярко выраженным радикальным направлением. Для его позиции был характерен взгляд на государство как на некую формацию, логически выводимую из предпосылок внеисторического характера.

Этот краткий обзор подтверждает вывод, к которому приводит любое рассмотрение человеческой натуры, а именно что в вопросах мировоззрения умственная одаренность человека не имеет решающего значения. В формировании мировоззрения участвуют предрасположенность характера и воли, влияние образования, пережитого, а также все воздействия окружающего мира и собственной натуры. Возможно, однако, что противоположность характеров, обнаруживающую себя в мировоззрении, можно поставить во взаимосвязь с разделением мыслителей по принципам отношения их к собственной науке: одна группа математиков считает себя неограниченными самодержцами в своей области, которую они творят по своему произволу, логически выводя ее из самих себя; другая исходит из представления о том, что наука в ее идеальной завершенности существует вне нас и до нас и что нам всего лишь дано, прокладывая новые пути, в счастливые моменты открывать те или иные целинные участки. Сущность их творчества представляется им состоящей не в открытии (Erfinden) по собственному благоусмотрению, а в обнаружении (Auffinden) вечно сущего, не каким-либо осознанным действием, а независимой от сознания и воли, дарованной свыше интуицией.

Теперь я обращаюсь к трудам Коши. Коши не был классиком формы. Подавляющее большинство его публикаций – Вальсон насчитывает их 789, и среди них восемь отдельно изданных книг – по мере роста их числа носит все более и более спешный, эскизный характер. Сказанное однажды он повторяет бесчисленное множество раз, чтобы в связи с прежней – незаконченной – работой изложить внезапно мелькнувшую идею, которая опять-таки не будет доведена до конца. Чуть бóльшую заботу о форме Коши проявляет в своих отдельно изданных трудах, которые в 20-х годах принесли ему раннюю славу. Уже тогда, наряду с этими трудами, отдельные его работы стали появляться в "Journal de l'École Polytechinique" и в "Mémoires de l'Académie". Но начиная с 1835 г. Коши для своих бесчисленных сообщений стал использовать "Доклады" Академии ("Comptes Rendus"), которые начали еженедельно выходить с 1-го июля этого года. Объем материала, печатаемого им в журнале, был настолько велик, что из-за него было введено ограничение на длину статей (не более четырех страниц). И тем не менее потребности Коши в публикациях еще долгое время этим не покрывались; наряду с этими статьями выходили издаваемые им самим сборники "Exercices de Mathématique", состоявшие из многих серий, лекции и т.д.

Все публикации Коши изданы в его "Собрании сочинений". Правда, издание это мало способствует проникновению в дремучую чащу его трудов; в нем без разбора, в хронологическом порядке опубликовано все – и важное, и второстепенное – с разбивкой по чисто внешним признакам: серия 1 – публикации в изданиях Академии; серия 2 – остальные публикации. Наследия, представляющего собой научную ценность, подобного тому, которое осталось после Гаусса, у Коши, по-видимому, не обнаружилось.

В связи с рассматриваемой нами сейчас проблематикой мы должны обсудить достижения Коши в области механики и математической физики. Я смогу здесь коснуться лишь самых важных моментов, а именно его *теории упругости* и *оптики*.

Дифференциальные уравнения теории упругости для трехмерного случая были впервые выведены Навье в 1821 г.; при этом он, движимый интересами техники, исходил из представлений молекулярной теории и исследовал случай одних лишь изотропных сред. Коши, начиная примерно с 1825 г., обосновывает феноменологический способ описания этих явлений, который рассматривает тело как непрерывную среду и оперирует с двумя "тензорами" – *напряжением* и *деформацией*. Введение этих понятий представляло собой огромный шаг вперед по сравнению с одним лишь равномерно распределенным по всем направлениям давлением жидкости, которое только и было известно в XVIII столетии. В 1827 г. Коши распространил этот подход на анизотропные (кристаллические) среды, а в 1828 – 1830 гг. ему удалось дать на этой базе математическое обоснование простейших законов *оптики Френеля* – достижение, к которому он с самого начала своих исследований стремился как к одной из основных целей. Правда, в двух важных пунктах его теория разошлась с наблюдениями Френеля и с его точкой зрения:

1. она требовала, чтобы колебания поляризованного света, которые, согласно Френелю, лежат в плоскости поляризации, были п е р п е н д и к у л я р н ы этой плоскости;

2. она во всех средах наряду с поперечными колебаниями давала также и продольные, которые, в соответствии с наблюдениями, в оптике абсолютно никакой роли не играют.

Оба этих спорных вопроса потом на протяжении нескольких десятилетий занимали умы вплоть до окончательной победы максвелловской теории. Даже в 1896 г., когда появились рентгеновские лучи, высказывалось мнение, что это и есть давно разыскиваемые продольные световые колебания.

Но кроме этих несоответствий имелась и другая обширная область оптических явлений, которая совершенно не поддавалась описанию с помощью феноменологической теории упругости. Речь идет о *дисперсии света*. Чтобы объяснить это явление, Коши в своей работе "Mémoire sur la dispersion de la lumière" ("Мемуар о рассеянии света"; Прага, 1835 (36)) возвращается к молекулярным представлениям и – по крайней мере качественно – достигает цели, выдвинув предположение, что расстояния между молекулами не являются пренебрежимо малыми по сравнению с длиной волны света. Дисперсионная формула Коши

$$n = a + \frac{b}{\lambda} + \frac{c}{\lambda^2} + \ldots$$

еще и нынче применяется по отношению к средам, полосы поглощения которых лежат в инфракрасной части спектра. –

Исследования по механике и математической физике, о которых мы в общем и целом рассказали выше, вскоре сделались международным достоянием и, в частности, быстро пустили корни в германских университетах. Но наряду с этой, основной ветвью развития науки не следует упускать из виду и еще одну, побочную, которая лишь долгое время спустя проявила свое влияние вне мест, где произрастали ее корни. Мы имеем в виду производившуюся в кругах Политехнической школы разработку технического аспекта механики. Здесь тоже речь шла о придании математической формулировки явлениям новых классов, но при этом всегда должен был иметься в виду момент технической приложимости.

Здесь надо упомянуть, хотя она и стоит совершенно особняком, книгу рано умершего Сади Карно (1796–1832) "Réflexions sur la puissance motrice du feu" ("Размышления о движущей силе огня")[1]; ее первое издание, вышедшее в свет в 1824 г., теперь с трудом можно найти в библиотеках. Это небольшое сочинение, которое было переиздано в 1878 г. с биграфическими сведениями об авторе (сыне Карно-старшего, деятеля наполеоновской эпохи), имело своей целью объяснить принцип действия паровой машины. Но значением своим оно по существу обязано дальнейшему, последовавшему за ним развитию этой области. Хотя мнение, будто в этом сочинении уже содержится второе начало термодинамики, решительно преувеличено, тем не менее своей идеей о том, что причиной движущей силы тепла является переход от более высокой температуры к более низкой и, следовательно, тепловой поток, идущий от более высокого температурного уровня к более низкому, идеей, которую Карно развивал, опираясь на аналогию с действием водяного колеса, он наметил подход к теории, впоследствии завершенной Клаузиусом. Идеи эти, которые можно рассматривать как зачаточную форму первого и второго начал термодинамики, изложены в довольно нематематичном виде. Более точную в этом отношении формулировку им придал инженер Клапейрон в 23-м номере "Journal de l'École Polytechnique" (т. XVI, 1834; имеется немецкий перевод в "Poggendorffs Annalen"). С историко-математической точки зрения работа Клапейрона важна тем, что метод графического изображения, давно уже вошедший в обиход у техников, в ней впервые проникает в изрядно отставшую в этом отношении среду физиков. Правда, теперь, когда рассматриваешь пять маленьких приведенных Клапейроном диаграмм, скромность их кажется поистине удивительной.

Как уже отмечалось, *техническая механика* (понимаемая в узком, современном смысле этого слова) обязана своим возникновением кругам Политехнической школы. В связи с ней в первую очередь следует упомя-

---

[1]) Имеется русский перевод: Л.: ГИЗ, 1925. – *Примеч. пер.*

нуть Понселе и Кориолиса. Понселе (1788–1867) [1] мы еще будем в дальнейшем заниматься как фактическим основоположником проективной геометрии. Из числа его серьезных технических усовершенствований в свое время получило известную популярность "водяное колесо Понселе"; теперь, с распространением турбин оно предано забвению. Имя Кориолиса (1792–1843) известно всем нам по так называемым силам Кориолиса, которые проявляются при относительном движении – в частности, при движении относительно вращающейся Земли (если пользоваться движущейся вместе с ней системой координат).

Мы рассмотрим здесь следующие труды этих ученых:

Понселе: "Cours de Mécanique, appliquée aux machines" ("Курс механики в приложении к машинам"; 1826 г.).

Кориолис: "Traité de la Mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines" ("Курс механики твердых тел и расчетов мощности машин"; 1829 г.).

В сущности, оба сочинения имеют одну и ту же направленность; в противоположность абстрактным формулировкам "Аналитической механики" Лагранжа ("благородная механика, не учитывающая трения") они стремятся к синтетическому рассмотрению сил, действующих в машинах, с учетом фактически имеющих место обстоятельств – таких, как трение и т.п. В математическом отношении сочинения эти элементарны; но мы обязаны им разработкой одного фундаментального понятия, оказавшего решающее воздействие на развитие механической теории теплоты и на формулировку великого закона сохранения энергии: понятия *механической работы.* Я с большим удовольствием отмечаю этот важный пример, когда весьма плодотворным оказалось обратное воздействие чисто технической проблемы – в данном случае вопроса об определении коэффициента полезного действия машин – на теоретическое исследование.

В известной мере с этими учеными был связан геометр Шарль Дюпен (1784–1873), которым мы подробнее займемся, когда будем говорить о геометрии. Как истинный сын своего времени, он тоже был теоретиком, практиком и организатором одновременно. Его технические интересы лежали главным образом в области кораблестроения, к которому он как морской офицер имел непосредственное отношение. Подобно Понселе он тоже совершал большие поездки научного характера – в Англию, для изучения тамошней промышленности. Как профессор Музея искусств и ремесел (Conservatoire des Arts et des Métiers) он основал в 1819 г. Высшие народные курсы, благодаря которым его передовые идеи, обращенные к технике, индустрии и национальной экономике, смогли получить широкое распространение. Здесь, как мы видим, уже начинают проявляться социальные интересы – черта, выглядящая вполне современной.

---

[1]) В подлиннике на стр. 75 и 76 в качестве года рождения Понселе указан 1789 г. На самом деле Понселе родился 1 июля 1788 г. – *Примеч. пер.*

Более подробно я хотел бы остановиться на личности и судьбе Понселе, ввиду особого психологического интереса, который они представляют.

Понселе родился в 1788 г. в Меце. После окончания Политехнической школы (1808–1810 гг.) он младшим лейтенантом инженерных войск (Sous-Lieutenant du génie) попадает в Прикладную школу (École d'application) в Меце; в начале 1812 г. призывается в "великую армию" Наполеона и в ноябре 1812 г. во время русской зимней кампании попадает в плен. Два года он в качестве военнопленного проводит в Саратове на Волге, и, странным образом, именно это время вынужденного досуга и полной оторванности от всех необходимых для работы пособий способствовало появлению его гениальнейшего творения – *проективной геометрии.* Свои новые идеи он излагал перед небольшим кружком политехников, находившихся в плену вместе с ним. Заключенный мир подарил ему свободу. С 1815 г. он в качестве военного инженера работает в арсенале Меца. Полученные им во время плена результаты он опубликовал в 1822 г. в книге "Traité des propriétés projectives des figures" ("Трактат о проективных свойствах фигур"). Однако общественная деятельность все более и более поглощала его силы и отвлекала его от задач, которые были ему милее всего, – от задач чистой науки. Против своих склонностей и уступая, как он говорил позже, желанию Араго, он стал профессором Прикладной школы в Меце (1825–1835 гг.). Стремясь содействовать успехам своей родины, он, находясь в продолжительных научных командировках, посвятил себя изучению чужих стран; в частности, ему представлялся важным расцвет индустриальной жизни Англии. И хотя в 1826 г. он опубликовал свой "Cours de Mécanique" ("Курс механики"), организаторские и педагогические проблемы вскоре совершенно поглотили его. Начиная с 1835 г. он занимал в Париже высокие военные посты, был членом Фортификационного комитета (comité des fortifications) и вместе с тем в 1838–1848 гг. профессором физической и прикладной механики в Сорбонне, а затем начальником (Commandent) Политехнической школы. Его высокое положение дало ему возможность оказаться в 1851 г. избранным на пост представителя Франции на первой лондонской Всемирной выставке, а также на пост председателя жюри; он участвовал также в подготовке первой парижской Всемирной выставки 1855 г. Подлинный трагизм его жизни заключался в том, что достигший такого редкого успеха человек, который, казалось бы, как немногие, смог развить свои силы, считал, что он не оправдал истинного своего назначения. Стариком, выпуская в 1864–1866 гг. новое издание своего "Traité" он горько жалуется на свою судьбу, которая принудила его полностью оставить любимые занятия и лишила возможности добиться должного их признания. Древний конфликт между vita activa [1]) и vita contemplativa [1]) внес диссонанс в конец его жизненного пути. Умер Понселе в 1867 г.

---

[1]) Жизнь действенная; жизнь созерцательная (лат.). – *Примеч. пер.*

Геометрия

Я перехожу теперь ко второму разделу моего обзора достижений, непосредственно связанных с Политехнической школой, – к *геометрии.*

Мы уже упоминали о той выдающейся роли, которую в создании и развитии Политехнической школы сыграл геометр Монж (1746–1818). В результате его чрезвычайно плодотворной организаторской и преподавательской деятельности геометрия в течение первых двадцати лет существования школы стала подлинным центром всего учебного процесса. Сущность манеры преподавания, этот секрет огромного успеха Монжа, очевидно таилась в особом характере личности Монжа, который в непосредственном общении со своими учениками необычайно захватывал их и пробуждал их собственные силы. Разумеется, дошедшие до нас печатные свидетельства дают лишь несовершенное представление об энергии и живом характере его лекций, хотя они все-таки несут на себе отпечаток того воодушевления, которое охватывало слушателей этих лекций.

Монж оставил нам два сочинения, возникших на почве его преподавательской деятельности:

1. "Géométrie descriptive" ("Начертательная геометрия"), выходившая сперва, начиная с 1795 г., отдельными листами, а затем ставшая основным учебником по этому предмету, которому Монж придал четкую форму. В книге опубликован стандартный учебный план в том виде, как Монж разработал его еще в Мезьере. Имеется и еще одно, более позднее издание 1849 г. под редакцией Бриссона, а также немецкий перевод Хаусснера с издания 1798 г., вышедший в серии "Ostwalds Klassiker" (№ 117). В обоих изданиях содержится яркое описание педагогической деятельности Монжа.

2. "L'application de l'analyse à la géometrie" ("Приложения анализа к геометрии"). Эта книга, постепенная публикация которой также началась в 1795 г., представляет собой учебник аналитической геометрии в пространстве, в котором особый акцент делается на дифференциальных соотношениях. Имеется издание, осуществленное в 1850 г. Лиувиллем; оно включает в себя много дополнений, среди которых полная перепечатка "Disquisitiones circa superficies curvas" Гаусса.

Рядом с этими двумя отдельными трудами должна быть поставлена большая научная продукция учеников Монжа, красноречиво говорящая о направленности ума и богатстве идей их учителя. Продукция эта публиковалась в "Annales des mathématiques pures et appliques" Жергонна (21 том, 1810–1831 гг., Nîmes) – первом чисто математическом (в противоречие с его названием) журнале, получившем широкое распространение.

Журнал этот, вместе с трудами Монжа, дает нам полное представление о характере его геометрической школы, отличающейся естественнейшим сочетанием живого пространственного воображения с аналитическими выкладками. Аналитическая формула является при этом не самоцелью, а лишь предельно сжатым выражением реально воспринятых, пространственных отношений; дальнейшее их развитие производится на основе пространственных построений.

Я вряд ли должен заниматься подробным анализом содержания первого из названных выше трудов Монжа, ибо разработанный в то время порядок чтения лекций и ведения упражнений по начертательной геометрии сохранился и до сих пор. Интерес представляет, быть может, лишь то обстоятельство, что не ограничиваясь одними чертежами, Монж перешел к изготовлению моделей; его последователями, особенно Оливье, такой прием наглядного изображения стал применяться при решении все более и более общих задач. К сожалению, из-за недостаточной прочности шелковых нитей модели Оливье в Музее искусств и ремесел теперь совершенно разрушились. Исторически эти попытки положили начало созданию позднейших коллекций математических моделей. В те времени, как и сегодня, создание моделей было нацелено не на восполнение слабостей пространственного восприятия, а на развитие живого и отчетливого представления — цель, которая прежде всего и наилучшим образом достигается самостоятельным изготовлением моделей.

Второй из упомянутых трудов Монжа читается, как роман, отличаясь связным, ясным (отнюдь не по старой схеме: аксиома, утверждение, доказательство) и плавным изложением. Из элементарных формул путем свободного фантазирования возникает множество различных геометрических соображений, прилагаемых в первую очередь к проблемам, выдвигаемым самой природой. Этим способом рассматриваются поверхности вращения, винтовые и линейчатые поверхности и задача развертывания поверхностей. В заключение Монж приходит к общей и убедительной трактовке лагранжевой теории интегрирования дифференциального уравнения

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

в частных производных. При этом в качестве движущей силы всего изложения ясно прослеживается то, что по выражению Клебша, употребленному им в биографии Плюккера, делает человека настоящим геометром, а именно — ощущение радости формы. Целью Монжа, как и в другой области у Фурье, является не формальная точность умозаключений, а ясность познания и разработка естественно возникающих проблем.

Этот подход применялся Монжем прежде всего к образам второго порядка — окружностям и сферам, коническим сечениям, поверхностям второго порядка. Среди всего прочего здесь было создано понятие о полюсе и поляре, о двойной системе прямолинейных образующих однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида, о линиях кривизны вообще и о линиях кривизны на поверхностях второго порядка и т.д. и т.п.

Импульс, сообщенный Монжем развитию геометрии, действовал на протяжении долгого времени, и высший успех Монжа-учителя заключается в том, что среди его учеников выдвинулся целый ряд самостоятельных личностей, которые в отдельных вопросах превзошли своего руководителя. Среди них я могу назвать здесь только тех, чьи работы в дальнейшем сыграли особо важную роль.

Прежде всего я хотел бы вернуться к Дюпену, об успехах которого в области судостроения уже упоминалось выше. Геометрия обязана ему многими соображениями и теоремами, отличающимися особой элегантностью. Они содержатся в огромном геометрическом труде Дюпена "Développements de géométrie" ("Развитие геометрии, 1813). Я отмечу лишь наиболее известные теоремы и понятия, связываемые с его именем. Это прежде всего знаменитая *циклида Дюпена* – поверхность, огибающая семейство сфер, касающихся трех заданных (и, тем самым, целого второго семейства сфер); далее, это так называемая *теорема Дюпена*, которая утверждает, что поверхности, образующие ортогональную систему, взаимно пересекаются по их линиям кривизны. Обе эти темы соприкасаются друг с другом в теории конфокальных поверхностей второго порядка. Можно также упомянуть *индикатрису Дюпена* на касательной плоскости в данной точке поверхности. Пусть эта небольшая подборка отдельных, замечательных по красоте открытий даст некоторое представление о том множестве драгоценных приобретений, которыми геометрия обязана Дюпену.

Теперь, прежде чем перейти к самому крупному из учеников Монжа, к Понселе, нужно напомнить об одном человеке, стоящем несколько особняком, – о Карно-старшем. Его интересующая нас в этой связи книга "Géométrie de position" ("Геометрия положения") вышла из печати в 1803 г.[1]). Карно (1753–1823) был учеником Монжа еще в Мезьере. Как генерал и убежденный республиканец он во время революции играл важную роль, что мы уже отмечали выше. Лишь в зрелом возрасте у него снова оказалось достаточно досуга, чтобы заняться научной работой. Карно употребил его главным образом на занятия фундаментальными математическими проблемами.

Его "Géométrie de position" представляет собой весьма замечательную книгу. В ней содержится одна очень важная сама по себе и совершенно современная мысль: в геометрии нужно не отделять друг от друга, как это постоянно делалось со времен Евклида, различные случаи, могущие представиться в зависимости от взаимного расположения частей данной фигуры, а включать их в общее рассмотрение, придерживаясь принципа знаков[2]). Собственно, в такой форме Карно свою мысль не формулирует. Наоборот, он настойчиво высказывается против принятого в анализе учения о зна-

---

[1]) Имеется немецкий перевод Х.К. Шумахера: Geometrie der Stellung. – Альтона, 1810.

[2]) То есть считая длину отрезка, площадь треугольника, объем тетраэдра и т.п. величины со знаком плюс или минус в зависимости от порядка обхода вершин этих фигур. – *Примеч. пер.*

ках во всем его объеме, объявляя его плохо обоснованным и противоречивым. Свое утверждение он пытается обосновать, проводя в формалистическом духе пространные вычисления с многозначными функциями, чтобы прийти, наконец, к "ложному" результату (что-нибудь вроде $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{a^2} = a$ и т.д.). Для своих геометрических нужд он пытается вывести правила расстановки знаков путем рассмотрения фигуры и ее модификаций, и на этой основе он создает "théorie des figures corrélatives" ("теорию коррелятивных фигур"). Геометрия у него на этом пути должна была освободиться от "иероглифической письменности анализа" и возродиться в чисто синтетическом виде.

Реализация этого замысла временами содержит большое количество интересных идей, но часто элементарна до тривиальности. Пожалуй, эту книгу надо рассматривать как отражение неподкупной, но, конечно, не гениальной личности Карно.

Специально отметим, что широко известная элементарная теорема о равенстве произведений отрезков, отсекаемых любой секущей на сторонах треугольника, ведет свое происхождение от Карно, почему она часто и называется его именем.

Историческое значение книги Карно состоит в том, что в ней провозглашается отказ от анализа. Она явилась источником того антагонизма между аналитической и новой синтетической геометрией, который вскоре выдвинулся на первый план и перерос в острое, принципиальное соперничество.

Если Карно дал нам какое-то смутное представление о том, в какую сторону должно быть направлено развитие новой геометрии, то Понселе предстает перед нами как ее великий творец, с величайшей гениальностью воспринявший идеи Монжа и Карно и помогший им пробиться через все стоящие на их пути препятствия. Выдвинув на передний план *проецирование* и *двойственность* и превратив их в некий единый геометрический принцип, он становится первооткрывателем и основателем "проективной геометрии", которая, соединив все антитезы прежних времен, должна была достичь состояния высшей плодотворности. Геометрическая интуиция нового типа – "проективное мышление" – вот что возвышает Понселе над всеми его предшественниками.

Об особых обстоятельствах, при которых возник "Traité des propriétés projectives des figures" (1813–1822), этот великий геометрический труд Понселе, мы уже говорили.

Понселе исходит из рассмотрения *центральной проекции*, которая изучается им с точки зрения тех отношений между частями фигуры, которые сохраняются при любой центральной проекции. Такой подход вынуждает его добавить к исходным геометрическим элементам новые, совершенно конкретные "бесконечно удаленные" элементы: на каждой прямой – бесконечно удаленную точку, на каждой плоскости – бесконечно удаленную прямую, в пространстве – бесконечно удаленную плоскость. Тогда он оказывается в состоянии во всей общности формулировать ряд теорем, среди которых основную роль играет теорема о постоянстве двойного (ангармонического) отношения четырех точек на прямой. Я не буду здесь исследовать вопрос о том, в какой мере такого рода идеи имелись у предшествовавших ему авторов; у Понселе они осознанно кладутся в основу всего дальнейшего, и в этом заключается существенный прогресс, который был внесен его точкой зрения.

Вторым важным элементом этой новой геометрии является перенесенное на общий случай учение о полюсе и поляре кривых и поверхностей второго порядка, приведшее к общей *теории двойственности.* Точка и прямая на плоскости, точка и плоскость в пространстве становятся равноправными, могущими заменять друг друга базисными геометрическими элементами. Так, например, состоящая из точек плоская кривая соответствует плоской кривой, огибаемой касательными к ней, т.е. себе самой; пространственной кривой соответствует развертывающаяся поверхность и т.д.

К двум этим новым идеям присоединяется также освобожденная от всяких неясностей и гениально претворенная в жизнь мысль Карно о коррелятивности фигур — принцип непрерывности. Принцип этот гласит, что достаточно общее свойство, обнаруженное у какой-либо одной фигуры, имеется и у любой другой, могущей быть полученной из исходной путем непрерывного изменения ее положения.

Этому принципу Понселе находит самые смелые и неожиданные применения. Отбросив всякие сомнения, он вторгается — там, где этого по его мнению требуют обстоятельства, — в область мнимого. Так, например, из того факта, что два конических сечения могут пересекаться не более, чем в четырех точках, он заключает, что такое число точек пересечения всегда и должно иметься; возможно только, что две из них (или даже все четыре) могут оказаться мнимыми. Отсюда Понселе получает *проективное определение окружности* как конического сечения, пересекающегося с бесконечно удаленной прямой в двух фиксированных мнимых точках — "циклических точках", как бы мы теперь сказали. В точности так же сферу он определяет как поверхность второго порядка, пересекающуюся с бесконечно удаленной плоскостью по некоторой вполне определенной мнимой кривой, которую мы теперь называем сферической окружностью. Поскольку однополостный гиперболоид имеет два семейства прямолинейных образующих, то же самое утверждение должно быть справедливо и в случае эллипсоида — только в этом случае оба семейства очевидным образом являются мнимыми. И т.д. и т.п.

И если мы теперь зададимся вопросом о том, какое же все-таки обоснование дает Понселе этим неслыханно смелым умственным построениям, то к великому своему удивлению должны будем признать, что ничего такого у него нет вообще. Нет никакого подхода к доказательству принципа непрерывности, который Понселе был интуитивно ясен; не делает он и никаких попыток дать хоть какое-нибудь определение мнимой точки. По-видимому, у Понселе не возникало в этом ни малейшей потребности —

в частности, потому, что его конечные результаты всегда содержат комплексно сопряженные элементы и, следовательно, целиком интерпретируются в области действительных величин.

Поставить это новое сооружение на прочный фундамент можно было бы лишь со ссылкой на анализ, который Понселе отвергал в принципе. В этом случае мнимая точка, равно как и действительная, всего-навсего была бы лишь общим корнем нескольких совместно рассматриваемых уравнений, каждое из которых изображает один из пересекающихся друг с другом геометрических образов. Тот факт, что заданное число образов одного и того же порядка в пересечении всегда дает образ одного и того же типа (например, одно и то же число "точек"), означал бы не что иное, как существование совместного решения системы некоторых алгебраических уравнений; при этом в зависимости от соотношений между коэффициентами уравнений эти решения могли бы оказаться действительными или мнимыми, но при одном и том же числе уравнений и при одних и тех же степенях число их всегда было бы одним и тем же. И сам принцип непрерывности без труда обосновывается средствами современной теории функций. Действительно, любую геометрическую теорему (если ограничить геометрию теми пределами, которые были приняты в то время) можно аналитически выразить путем приравнивания нулю некоторой алгебраической или же аналитической функции $f\ (a,\ b,\ c,\ \ldots)$, где $a,\ b,\ c,\ \ldots$ – части фигуры, соотношение между которыми устанавливается. Тогда принцип непрерывности выражает всего-навсего тот факт, что аналитическая функция, равная нулю на сколь угодно малом отрезке ее области определения, равна нулю всюду.

Понселе является одним из самых благородных представителей плеяды храбрых завоевателей, как мы их в свое время однажды охарактеризовали. Оказанное им огромное влияние сказывалось в течение всего XIX столетия и стало существенной частью нашего собственного мышления.

Анализ и алгебра

Я перехожу теперь к третьему разделу моего обзора – к алгебре и анализу в Политехнической школе.

Здесь мы должны будем ограничиться только рассказом о Коши, причем из великого множества важных работ, имеющихся у него во всех областях чистой математики, мы выберем лишь самые выдающиеся.

Впереди всех остальных его работ стоят работы по *обоснованию анализа*; их публикация была теснейшим образом связана с преподавательской работой Коши в Политехнической школе. Сюда относятся:

1. "Cours d'Analyse (Analyse algébrique)" ["Курс анализа (алгебраический анализ)", 1821; собр. соч., сер. 2, т. 3, стр. 1–331].

2. "Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal" ("Конспект лекций по анализу бесконечно малых", 1823[1]); Собр. соч., сер. 2, т. 4, стр. 1–261).

3. Многочисленные публикации отдельных работ по дифференциальным уравнениям, связанные с литографированными записками 20-х годов, но опубликованные только около 1840 г. в "Comptes Rendus" и в ряде других изданий.

Два первых труда Коши относятся еще к тому периоду его деятельности, когда он тщательно заботился о форме своих сочинений. Это учебники с хорошей разбивкой материала, в которых на передний план выступает четко упорядоченная дедуктивная система, излагающая ход его мыслей, а вовсе не свободная игра ума, как у Фурье или у Монжа. В "Cours d'Analyse" рассматривается проблематика, которую мы сегодня, следуя Коши, обычно называем "алгебраическим анализом"; это исследование элементарных функций, в том числе и в комплексной области, с включением теории бесконечных рядов. Примерно тот же самый материал рассматривает в своем "Introductio in analysin infinitorum" ("Введение в анализ бесконечно малых") и Эйлер; но именно сравнение с этим более ранним трудом выявляет совершенно оригинальный критический подход Коши. Давно известный материал излагается Коши на основе исключительно четко очерченных чисто аналитических понятий. Так, на стр. 37 и далее (Собр. соч., сер. 2, т. 3) можно найти безупречно строгое определение "бесконечно малой" через предельный переход. С помощью введенного таким образом понятия бесконечно малой на стр. 43 обосновывается определение непрерывности: функция непрерывна, если бесконечно малому приращению аргументов отвечает бесконечно малое приращение функции.

Затем со стр. 114 начинается подробное изложение учения о *сходимости бесконечных рядов.* Даются всевозможные строгие критерии сходимости. И в этой главе Коши тоже нигде не пользуется широко распространенными в то время неясными понятиями вроде бесконечной суммы и т.п. Он имеет дело с конечными, где возможно – числовыми, суммами, сходящимися к определенному значению со скоростью, измеряемой при помощи точно оцениваемого остаточного члена. Однако Коши занимается своим предметом не только с точки зрения строгого его обоснования, он подходит к нему как творец нового. Так, на стр. 240 мы находим у него теорему о том, что степенной ряд имеет в комплексной плоскости круг сходимости. Сразу за этой главой, на стр. 274 и следующих за ней Коши приводит доказательство основной теоремы алгебры. Существование нуля у целой рациональной функции $f(x + iy) = u + iv$ доказывается при помощи рассмотрения функции $z = u^2 + v^2$ и ее минимумов.

Представление о том, сколь велики заслуги Коши в деле обоснования и изложения этих ныне общеизвестных вещей, можно составить, лишь

[1]) Новое, переработанное издание появилось в 1829 г. (Собр. соч., сер. 2, т. 4, стр. 263–609).

проведя сравнение с его предшественниками и современниками. Книга Коши, если говорить о принципиальной стороне дела, отличается как от занимавших до этого времени главенствующее положение неопределенных, интуитивных попыток обоснования исчисления бесконечно малых, так и от совершенно формальной точки зрения Лагранжа, изложенной им в его книгах "Théorie des fonctions analytiques" ("Теория аналитических функций") и "Leçons sur les calcul des fonctions" ("Лекции об исчислении функций")[1]), где Лагранж по существу затемняет новые идеи. Вместо этого в книге Коши во всех ее критических местах приводится совершенно безупречное арифметическое обоснование; с этого фундаментального труда и начинается так называемая "арифметизация" всей математики в целом.

Для исторически мыслящего человека нет ничего удивительного ни в том, что этот блестящий ум имел своих предшественников, ни в том, что он оставил после себя ряд незаконченных дел, завершить которые выпало на долю его преемников. Из его предшественников (которых Коши не цитирует) следует прежде всего упомянуть Больцано, который к 1817 г. в той же мере, что и Коши, владел абсолютно точным понятием непрерывности и даже подверг его еще более глубокому анализу; см. выше стр. 71. Ряд критериев сходимости рядов был предложен Гауссом (1812 г.); правда, критерии эти носили не столь глубокий характер, как у Коши. И наконец, что касается основной теоремы алгебры, то аналогичное доказательство еще в 1815 г. было дано Арганом в "Annales" Жергонна. Арган, кроме того, был одним из первых, кто предложил геометрическое истолкование комплексных чисел $x + iy$; это было сделано им в 1806 г. в специальной статье[2]).

В заключение нам остается обратить внимание читателя, на то, что у Коши отсутствовало важнейшее понятие равномерной (соответственно, неравномерной) сходимости в данном интервале, что мешало его теории бесконечных рядов достичь окончательного совершенства. Отсутствие этого понятия у Коши привело к тому, что на стр. 120 своей книги он высказал неверное утверждение, будто сумма сходящегося ряда непрерывных функций обязательно непрерывна. Здесь же, обходя важное понятие равномерности, Коши дает неправильное доказательство этого утверждения. Внести сюда полную ясность удалось лишь в более позднее время[3]).

Второй труд Коши, "Leçons sur le calcul infinitésimal", посвящен вопросам обоснования исчисления бесконечно малых. В нем содержится строгое, освобожденное от какой бы то ни было метафизики и покоящееся на понятии предельного перехода изложение этой дисциплины, которое с того времени стало в математике стандартным. В отличие от "Cours d'Analyse"

---

[1]) "Théorie des fonctions": 1-е изд., 1797; 2-е изд., 1813; Труды, т. 9. "Leçons...": 1801 соответственно 1806; Труды, т. 10.

[2]) Впервые оно встречается у Каспара Весселя в 1798 г. (воспроизведено в Arch. for Math. ok Nat., 1896, т. 18).

[3]) Смотри стр. 119.

действие в этом труде почти полностью разворачивается в действительной области.

Краеугольным камнем всего этого сооружения Коши делает саму по себе известную с давних пор (во всяком случае, со времен Лагранжа) теорему о среднем значении (стр. 46), которую мы, пользуясь новейшей, введенной Коши системой обозначений, записываем в виде

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\vartheta h).$$

Интегральное исчисление Коши начинает (стр. 122) с введения понятия определенного интеграла, для которого дается арифметическое доказательство его существования. Лишь после этого, начиная со стр. 214, дается разложение функций в ряд Тейлора, рассматриваемое с позиций практического приближения наперед заданных функций и с неизменным вниманием к точной оценке остаточного члена. Практическая пригодность этого метода показывается на численных примерах. Само собой разумеется, что теоретическую сторону вопроса Коши тоже не оставляет без внимания. На стр. 230 приводится знаменитый пример функции $f(x) = e^{-1/x^2}$, неразложимой в точке $x = 0$ в ряд Тейлора, хотя последний там и сходится.

Было бы естественно, если бы в этом месте была высказана основная теорема анализа, а именно теорема о том, что операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны:

$$\frac{d}{dx}\int^{x} f(x)\,dx=f(x).$$

(При других изложениях соотношение это часто используется для определения интеграла.) Тем не менее, теоремы этой здесь нет, и она впервые в полном виде формулируется лишь в книге аббата Муаньо "Leçons sur le calcul différentiel et intégral (d'après Cauchy)" ["Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению (по Коши)"], которую он в 1840–1844 гг. издал, следуя идеям Коши и по его инициативе. Это место находится во втором томе на стр. 4.

Область *дифференциальных уравнений* Коши разрабатывал столь разнообразными способами и в столь многих направлениях, что представляется совершенно невозможным перечислить все его результаты или хотя бы дать полный обзор всех его публикаций, относящихся к этому кругу проблем. Я ограничусь тем, что подчеркну несколько особенно существенных моментов.

В этом вопросе Коши снискал себе славу в качестве автора первого *доказательства существования* решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих в области, не содержащей особых точек, данным начальным условиям. Из всего разнообразия методов, применяемых Коши, я укажу здесь два наиболее известных:

1. Дифференциальная задача заменяется разностной, искомая кривая – ломаной, и производится предельный переход путем последовательного

уменьшения интервалов, определяющих эту ломаную. Существование решения доказывается путем установления сходимости этого процесса к некоторому пределу, который и оказывается решением. Этот прием в точности соответствует способу, с помощью которого Коши вводит понятие определенного интеграла и вычисляет его значение. (Для практических приближенных вычислений метод улучшается по правилу Симпсона.)

2. Делается предположение, что коэффициенты рассматриваемого дифференциального уравнения могут быть разложены в бесконечные ряды. Тогда для искомых интегралов могут быть формально составлены степенные ряды, сходимость которых доказывается подбором соответствующих мажорант. Коши назвал этот метод "méthode des limites" ("методом пределов") и распространил его также и на комплексную область.

И эти идеи Коши тоже обязаны своим возникновением уже 20-м годам. Мы видим в них последовательно, шаг за шагом осуществляемую арифметизацию основ современного анализа. Удивительно, что все это возникло в результате чтения лекций в Политехнической школе. Это еще раз показывает, какие необычайно высокие требования к чисто математической стороне дела были положены в основу этой – ориентированной на практические потребности – системы обучения.

В менее тесной связи с его преподавательской деятельностью находится второе крупное достижение Коши, которое по своему значению может быть поставлено рядом с критическим обоснованием анализа; я имею в виду заложенные им *основы общей теории функций комплексной переменной.*

Как и в области дифференциальных уравнений, здесь я тоже лишен возможности дать исчерпывающий обзор всего созданного Коши. Я выделю лишь две фундаментальные по своей важности проблемы, вокруг которых группируется все остальное:

1. *Интегрирование в комплексной области по замкнутым кривым.* Знаменитая теорема Коши об интеграле от однозначных комплексных функций по замкнутой кривой:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \Sigma k,$$

где k – вычеты в отдельных точках нарушения аналитичности [1]), лежащих внутри кривой C, была найдена постепенно, наощупь. Коши, который вовсе не ставил себе сознательной цели построить общую теорию комплексных функций, начал с интегрирования по сторонам прямоугольника, причем он рассматривал два различных пути, соединяющих его противоположные вершины. За этими исследованиями последовало интегрирование по произвольной кривой, соединяющей заданные точки, что было гораздо труднее, так как это уже предполагало наличие определения интеграла по кривой. К окончательной и ясной формулировке теоремы Коши при-

---

[1]) Особенностей более высокого порядка, таких, например, как существенно особые точки, точки сгущения полюсов и т.п., Коши еще не знал.

шел только в 1840 г., но его относящиеся к этому вопросу результаты обычно датируют по одному небольшому сочинению, которое отдельно появлялось в 1825 г.: "Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires" ("Мемуар об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами")[1].

Содержание этой работы во многом соприкасается с третьим гауссовым доказательством основной теоремы алгебры. Коши тоже исходит из двойных интегралов, взятых по области, ограниченной кривой. Впрочем, высказанное Вальсоном утверждение, будто до этой работы Коши идея интеграла по области, заключенной внутри некоторой кривой, не приходила на ум никому, является неверным; оно опровергается хотя бы тем (см. выше стр. 42), что Гаусс еще в 1811 г. имел точное представление о характере интеграла $\int \frac{dz}{z}$. Знал он, по-видимому, и общую, относящуюся к произвольным подынтегральным выражениям теорему, которую мы приписываем Коши[2]. Коши глубоко осознал значение этой теоремы, которой он тут же нашел многочисленные и важные применения.

2. *Разложение произвольной функции комплексной переменной в степенной ряд,* радиус сходимости которого равняется расстоянию до ближайшей особой точки.

Теорема эта была опубликована в 1831 г. в "Туринских мемуарах", когда Коши жил уже в изгнании. В 1837 г., готовясь к возвращению в Париж, которое состоялось в 1838 г., он сообщил ее в одном письме к Кориолису, напечатанном в "Comptes Rendus". В процессе решения Коши тоже оперирует с конечными суммами, которые он рассматривает в качестве приближенных формул, точно оценивая остаточный член.

Хотя по возвращении в Париж Коши и не занимался публичной преподавательской деятельностью, тем не менее публикацией своих работ, которые постепенно стали производить заметное воздействие, он оказал огромное влияние на дальнейшее развитие науки. Так, усилиями двух молодых математиков его теорема была подвергнута следующему существенному обобщению:

В 1843 г. Лорану (Comptes Rendus, т. 17, стр. 938) удалось показать, что любая однозначная в данной области функция $f(x + iy)$ внутри кольца, граничные окружности которого определяются двумя ближайшими особыми точками, разлагается в ряд по положительным и отрицательным степеням аргумента $x + iy$.

В 1850 г. Пюизё (J. math. pures appl., т. 15, стр. 365) показывает, что в "точке ветвления" функция разлагается в ряд по дробным степеням аргумента $x + iy$.

---

[1] Переиздана в Bull. Soc. math. France, 1874, т. 7, стр. 265; 1875, т. 8, стр. 43, 185. Переведена на немецкий язык и под редакцией Штеккеля напечатана в серии "Ostwalds Klassiker", № 112.

[2] См. письмо Гаусса к Бесселю ("Труды" Гаусса, т. 10.1, стр. 365 и далее).

Этими дополнениями, приводимыми здесь для полноты картины, я уже далеко вышел за пределы того промежутка времени, роль которого в истории развития Политехнической школы мы рассматриваем и который завершается 1830-м годом. Представляется естественным принять этот год в качестве некоего рубежа, ибо примерно около этого времени с отъездом Коши из Парижа начинается совершенно очевидное ослабление продуктивности французских математиков, и одновременно немцы в своем развитии достигают положения ведущей нации.

Приводилось много различных причин, объясняющих это поразительное явление — угасание столь пышно расцветавшей до того времени математической науки во Франции. Часто ответственность за это возлагалась на представлявшуюся в свое время Пуассоном и другими учениками Лапласа точку зрения, что развивать и поддерживать следует только прикладную математику. Однако мне кажется, что причину здесь путают со следствием. Я придерживаюсь того мнения, что столь одностороннее развитие, больше не способное поддерживать должное равновесие между теорией и ее приложениями, уже само является следствием и внешним симптомом далеко зашедшего недуга. Точка же зрения, что причиной этого упадка является трагическое истребление молодого поколения в беспрерывных больших войнах, тоже не выдерживает критики перед лицом расцвета науки в Германии, подвергшейся по меньшей мере таким же суровым испытаниям.

Причина, действию которой я приписал бы это своеобразное явление, представляется мне кроющейся скорее в общем психологическом законе, который проявляет себя как в применении к отдельным людям, так и к целым народам. Он состоит в том, что за периодами подъема всегда неумолимо следуют периоды покоя и бесплодия. И как для отдельных людей в большинстве случаев находится крепкая молодая замена, если только дать ей простор, чтобы она могла подрасти и развиться, так и в жизни народов одни нации становятся на место других, уставших, чьи достижения кладутся ими в основу собственной, приносящей новые плоды работы.

Разумеется, любая историческая периодизация может и должна служить лишь целям внесения большей ясности в процесс выявления основных линий развития; она не должна восприниматься механически, в слишком буквальном смысле слова. Так, противоречащим только что сказанному выглядит тот поразительный факт, что именно около 1830 г. во Франции на небосводе чистой математики небывалым блеском засияла новая звезда — правда, чтобы подобно метеору внезапно погаснуть. Речь идет об Эваристе Галуа.

Галуа родился в октябре 1811 г. близ Парижа. Печатать свои работы он начал в 1828 г., еще будучи учеником лицея. Он намеревался поступить в Политехническую школу, но в 1829 г. дважды провалился на вступительном экзамене. Сам он объяснял это тем, что заданные ему вопросы были слишком детскими, чтобы он стал отвечать на них. В конце концов Галуа был принят в Нормальную школу (École Normale), но уже в 1830 г. он был исключен из нее за непозволительное поведение. В особенную вину ему ставилось его "невыносимое высокомерие". Галуа впал в политическую ажитацию, вступил вследствие этого в конфликт с правительством и в конце концов попал в тюрьму, где и пробыл в течение нескольких месяцев. Уже в мае 1832 г. его бурная жизнь пришла к концу; Галуа был убит на дуэли, в которую был вовлечен какой-то любовной историей.

Подробную биографию Галуа в 1896 г. в "Annales de l'École Normale Supérieure" опубликовал Дюпюи. Лиувилль был первым, кто в 1846 г. сделал труды Галуа доступными широким математическим кругам[1]). В отдельном издании 1897 г. они занимают 60 страниц форматом в восьмую долю листа! К изданию приложен портрет юного автора, чье мальчишески дерзкое, почти озорное выражение странно контрастирует с удивительно глубоким, и притом совершенно ясным, зрело продуманным текстом. Этот контраст наглядно объясняет то внутреннее противоречие, которое погубило Галуа. Неслыханно ранняя зрелость, соединенная с неукротимым темпераментом, не желавшим подчиняться никакому порядку, никаким правилам, страстность натуры, пожирающей самое себя, делают Галуа типичным представителем неупорядоченного, истинно французского гения.

Великие достижения Галуа простираются в следующих двух направлениях:

1. Он создал первую решительную по замыслу классификацию иррациональностей, определяемых алгебраическими уравнениями, учение, которое еще и сегодня носит краткое название *теории Галуа*.

2. Он далеко продвинулся в своих занятиях интегралами от произвольных алгебраических функций одной переменной – как мы теперь говорим, *абелевыми интегралами* – и оставил в этой области результаты, позволяющие говорить о нем как о предшественнике Римана.

И возможно, в качестве третьего пункта следовало бы упомянуть о еще одном кратком намеке, точный смысл которого, однако, трудно понять из-за чрезмерной сжатости изложения. В своем прощальном письме к Шевалье Галуа говорит об исследованиях, касающихся "ambiguité des fonctions" ("двусмысленности функций"); вполне возможно, что здесь содержится намек на идею римановой поверхности и на понятие многосвязности.

Выдающиеся достижения Галуа не могут быть оценены по достоинству без знания теории Галуа. Поэтому я хотел бы попытаться наметить в нескольких словах основные направления, в которых развиваются идеи этой теории, хотя в рамках столь сжатого изложения и невозможно дать представление о всей ее важности. Однако предварительно я хотел бы обратить

---

[1]) Journ. math. pures appl., т. 11, стр. 381 и далее. – Немецкий перевод опубликован в изданной Мазером книге "Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen von N.H. Abel und E. Galois", Berlin, 1889. См., далее: Таннери Ж. (J. Tannery). Manuscripts de Evariste Galois. – Paris, 1889 (извлечение из Bull. sci. Math., 2 ser., 1906, т. 30; 1907, т. 31). ["Сочинения" Э. Галуа на русском языке были изданы под редакцией и с примечаниями Н.Г. Чеботарева и с приложением статьи П. Дюпюи "Жизнь Эвариста Галуа" (М.; Л.: ОНТИ, 1936). – *Примеч. пер.*]

внимание на ту странную роль, которую теория Галуа как учебная дисциплина играет в наших университетах. Она является у нас причиной разногласий, одинаково прискорбных как для обучающих, так и для обучаемых. Дело заключается в том, что, с одной стороны, преподаватели, воодушевленные гениальностью открытия и важностью и глубиной его результатов, с особенной охотой читают лекции по теории Галуа; с другой стороны, для понимания ее средним начинающим студентом именно эта область представляет совершенно непомерные трудности. В большинстве случаев это приводит к тому прискорбному результату, что усилия преподавателей, затраченные с большим энтузиазмом и радостью, за редкими исключениями проходят мимо большинства слушателей, не встречая с их стороны никакого понимания. В этот результат определенный вклад вносят и те особые сложности, которые перед лектором ставит задача изложения теории Галуа.

Ореол славы, постепенно окруживший теорию Галуа вследствие трудностей, связанных с проникновением в эту теорию, способствовал тому, что широкая математическая общественность нередко стала ее переоценивать. Многие считают, что все проблемы теории алгебраических уравнений нашли в теории Галуа свое окончательное решение. Разумеется, это не так. Хотя теория Галуа и дает в самой общей форме ответы на некоторые важные вопросы, поставленные теорией уравнений, тем не менее она представляет собой лишь ворота, ведущие в новую, широко раскинувшуюся, совершенно неизведанную область, все обилие проблем которой мы пока не в состоянии даже обозреть. Эту область, следуя одной моей частной беседе с Горданом, можно было бы назвать областью "гипер-Галуа".

Перейдем теперь к изложению самой этой теории. Я начну с традиционной постановки вопроса, который в случае уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

формулируется следующим образом: как обстоит дело с нахождением общего решения этого уравнения путем построения его резольвент, т.е. уравнений, корни которых являются рациональными функциями искомых корней заданного уравнения? Может ли это уравнение с помощью рациональных операций быть сведено к ряду более простых вспомогательных уравнений? В частности, например, возможно ли свести его к какой-либо цепочке двучленных уравнений, или, что то же самое, возможно ли решить это уравнение в радикалах?

Мы должны будем с самого начала различать отдельные случаи по степени общности, с которой задано рассматриваемое уравнение. Приведем два крайних случая:

1. Коэффициенты уравнения a_0, a_1, ... являются абсолютно произвольными переменными величинами. В этом случае мы фактически имеем дело с целым семейством уравнений, которые из совокупности всех алгебраических уравнений выделяются одной лишь общей степенью n.

2. Коэффициенты a_0, a_1, ... означают вполне определенные, фиксированные величины – например, конкретные целые числа.

Между двумя этими крайними случаями простирается великое множество промежуточных. Например, упомянутые коэффициенты могут быть целочисленными рациональными функциями какого-либо параметра и т.д. и т.п.

Первый важный поворот, который Галуа совершает в идейном плане, заключается в том, что он с самого начала требует точного определения того, что будет рассматриваться в качестве "рационального". Он создает понятие "области рациональности". Название это возникло позже; само же понятие встречается – независимо от Галуа – и у Абеля в его "Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement" ("Мемуар об одном частном классе алгебраически разрешимых уравнений")[1]. Простейшей, "естественной" областью" рациональности является совокупность коэффициентов a_0, a_1, ... и всего того, что с помощью рациональных операций может быть из них построено с использованием целых чисел, – т.е. область рациональных целочисленных функций от a_0, a_1, ... Эту область рациональности можно расширить, присоединив к элементам a_0, a_1, ..., из которых она состоит, одну или же несколько каких-нибудь конкретных величин и образовав из них и коэффициентов рассматриваемого уравнения рациональные целочисленные функции, совокупность которых и будет составлять интересующую нас "область". Про упомянутые только что величины говорят, что они "присоединены" к этой области. Так, например, к области рациональности могут быть присоединены корни n-й степени из единицы или какие-нибудь другие важные с точки зрения этих коэффициентов параметры.

Пользуясь этим понятием, Галуа формулирует следующую фундаментальную теорему:

Для любого наперед заданного уравнения $f = 0$ и любой области рациональности существует *группа перестановок* корней $x_1, x_2, ..., x_n$ этого уравнения, обладающая тем свойством, что любая "рациональная" функция $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ – т.е. функция, построенная с помощью рациональных операций из этих корней и элементов области рациональности, – которая при перестановках этой группы сохраняет свои числовые значения, имеет "рациональные" (принадлежащие области рациональности) значения, и обратно: всякая функция $R(x_1, x_2, ..., x_n)$, принимающая "рациональные" значения, при перестановках данной группы сохраняет эти значения.

Само собой разумеется, что всю важность и все значение этой теоремы, на доказательство которой я не могу здесь дать даже и намека, невозможно осветить и понять в течение нескольких минут; осознать все это по-настоящему может лишь тот, кто сам работал в этой области. Чтобы не увязнуть в рассмотрениях общего характера, я особо остановлюсь на одном частном примере, которым занимался еще сам Галуа. Речь идет о том, чтобы найти условия, при которых неприводимое уравнение степени p, где p простое, разрешимо при помощи двучленных уравнений. Галуа

[1] Журнал Крелля, 1829, т. 4; Собрание сочинений, т. 1, стр. 479.

обнаруживает, что условия эти заключаются в возможности так упорядочить корни уравнения, чтобы упомянутая "группа" перестановок задавалась формулами

$$x_{\nu'} = x_{a\nu+b}, \quad \nu' \equiv a\nu + b (\operatorname{mod} p), \quad \nu = 1, 2, ..., p,$$

где a может быть равно любому из чисел $1, 2, ..., p-1$, а b равняется $0, 1, 2, ..., p-1$. Такая группа содержит самое большее $p(p-1)$ перестановок. В случае $a = 1$, когда имеется лишь p перестановок, говорят о *циклической* группе; в общем случае группы называются *метациклическими*. Таким образом, необходимым и достаточным условием разрешимости неприводимого уравнения простой степени в радикалах является требование, чтобы его группа была метациклической – в частном случае, циклической группой.

Теперь уже можно обозначить пределы, поставленные сфере действия теории Галуа. Она дает нам некий общий критерий разрешимости уравнений с использованием резольвент, а также указывает путь к их разысканию. Но тут сразу же встает целый ряд дальнейших проблем: найти все уравнения $f_n = 0$, имеющие при данной области рациональности определенную, наперед заданную группу перестановок; исследовать вопрос о том, сводимы ли друг к другу два уравнения такого рода, и если да, то какими средствами и т.д. Все это вместе составляет огромную совокупность проблем, не решенных еще и сегодня. Теория Галуа указывает нам на них, не давая, однако, никаких средств для их решения.

Работы Галуа при всей их самобытности, естественно, не были оторваны от общего развития науки. Решающее влияние на него оказали Лагранж, Гаусс и Абель. Однако в то время как эти его предшественники располагали решением проблемы уравнений только в отдельных частных случаях, когда оказывалось возможным свести ее к функциям деления круга или же к эллиптическим функциям, Галуа поставил ее во всей ее общности.

Можно думать, что Галуа на найденном им пути достиг бы новых успехов и одарил бы мир неожиданными открытиями, если бы его страстный темперамент не уготовил ему столь ранний конец. О смелости и уверенности, с которыми он относился к своему творению и к еще ожидавшим своего решения проблемам, дает представление письмо, в котором он в вечер накануне смерти сообщает своему другу Шевалье свою последнюю научную волю (см. "Сочинения", стр. 32[1])). Этот необычный документ производит потрясающее впечатление своей простотой и ясностью, с которой двадцатилетний автор гордо и скромно оценивает себя и свое значение для науки. Он заключает это письмо словами:

"Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr; mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me

---

[1]) В русском издании см. стр. 59. – *Примеч. пер.*

soupçonne d'énoncer des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète.

Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauß de donner leur avis non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.

Après cela, il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis".

("Я в своей жизни часто отваживался высказывать утверждения, в которых не был уверен; но все, что я написал здесь, у меня в голове скоро год, и слишком в моих интересах не ошибаться, чтобы меня можно было заподозрить в том, что я высказываю теоремы, полным доказательством которых не обладаю.

Ты публично попросишь Якоби или Гаусса высказать их мнение не об истинности, а о важности этих теорем.

После этого, надеюсь, найдутся люди, которые с пользой для себя расшифруют все эту путаницу".)

Галуа был прав, утверждая, что он не оставляет ничего неправильного; но, к сожалению, его надежда на признание со стороны Якоби и Гаусса и на то, что они продолжат его деятельность, не оправдалась. Лишь гораздо позже, с 1846 г., его работы, благодаря усилиям Лиувилля, постепенно начали становиться достоянием общественности[1].

---

[1] См. также L. Koenigsberger. C.G.J. Jacobi. Festschrift... – Leipzig, 1904, стр. 435.

Глава третья

ОСНОВАНИЕ ЖУРНАЛА КРЕЛЛЯ И РАСЦВЕТ ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ В ГЕРМАНИИ

Новая Германия XIX столетия, постепенно выраставшая из наполеоновских войн, в сущности своей определялась импульсами, шедшими из Франции и перерабатывавшимися здесь в соответствии с германским духом. Подобно тому, как в другой области это было с Гёте, в нашей науке Гаусс стоял в стороне от этого движимого течением времени развития. Начало процессу было положено в Берлине, но в точных науках он начался несколько позже, чем в других областях. Для гуманитарных наук исходным пунктом развития явилось основание в 1810 г. Берлинского университета. Пышный расцвет этих наук был поддержан неогуманистическим учением о свободе формирования личности, которое открыто заявляло о своем безразличии к точным наукам.

В области точных наук новые веяния стали проявляться только с 1820 г. — в основном, в результате инициативы, шедшей от Александра фон Гумбольдта, о чем я уже говорил выше. В тесном общении с этим предприимчивым и смелым умом находился генерал фон Мюфлинг, который с 1820 г. занимал должность начальника Генерального штаба. В его лице нашла свое продолжение наполеоновская традиция уважения к математике с точки зрения военных интересов, впоследствии, благодаря Шарнхорсту, сыгравшая в Пруссии важную роль. Здесь и появилась мысль о создании по образцу Политехнической школы большого, чисто научного политехнического института. Она родилась на свет независимо от возникших одновременно устремлений к повсеместному подъему промышленности, из которых выросли наши средние специальные и высшие учебные заведения. На пост директора этого нового учреждения была сделана попытка заполучить Гаусса, который без каких бы то ни было педагогических обязанностей (не считая подготовки специально им самим отобранных учеников) должен был служить этому делу своим научным авторитетом и организаторским талантом. Все государственные научные учреждения (например, обсерватории) должны были ему подчиняться, и ему было бы обеспечено определенное влияние на дело общего развития просвещения в Пруссии (B r u h n s. Briefe zwischen A. von Humboldt und Gauß, 1877). Но в конце 1824 г. Гаусс отклонил данное предложение, и этот широко задуманный план зашел в тупик. Военные власти тоже устранились от участия в этом проекте. Была предпринята попытка превратить его в проект создания особого института для подготовки учителей старших классов, и в таком виде план обсуждался министерством по делам культов[1]) в течение еще нескольких лет. Когда, наконец, приглашение, посланное Абелю в 1829 г. и полученное в Христиании через несколько дней после его смерти, также не привело ни к какому результату, план этот был оставлен окончательно. Именно по этой причине подготовка учителей математики и естественных наук в конце концов выпала на долю университетов в качестве одной из важных и весьма существенных для их развития задач. Таким образом, нынешнее положение вещей, которое любят иногда рассматривать как логически вытекающее из самого понятия университета, обязано своим возникновением случайному стечению обстоятельств.

Рассматривая процесс этого развития, нужно напомнить об одном человеке, который хотя и не играл, если говорить о собственном его творчестве, существенной роли, но тем не менее благодаря своим разносторонним интересам, посредническим наклонностям и организаторским способностям сослужил науке большую службу. Речь идет о главном советнике по вопросам строительства (Hauptbaurat) Крелле (1780–1855). Крелль начал с техники, к организации преподавания которой он проявлял живой интерес. С 1824 г. он стал заниматься улучшением постановки исследований в области точных наук, а в 1828 г. вошел в состав прусского министерства по делам культов в качестве эксперта. Он был также избран членом Берлинской академии. Его собственные математические работы, которых он никогда не оставлял несмотря на многие другие интересы, многочисленны, но большого значения не имеют. Они носят широко распространенный в то время в Германии энциклопедический характер (традиция XVIII столетия!), касаясь большого количества различных областей и ничего глубоко не затрагивая. Однако Крелль оказал науке огромные услуги своим организаторским даром, своей приветливостью и многосторонностью, своим умением находить молодые таланты и привлекать их к себе. Многим, создав им университетское положение, он помог найти себе поле деятельности и свободно развернуть свои силы. Однако более всего наша наука в долгу перед ним за то, что он сплотил математиков и создал стимулы для их работы основанием в 1826 г. своего "Journal für die reine und angewandte Mathematik" ("Журнала чистой и прикладной математики").

Если сегодня взять в руки том этого журнала, то название его может, вероятно, вызвать некоторое удивление. Разумеется, в первую очередь оно имеет историческое объяснение, ибо заимствовано у журнала

---

[1]) По давней традиции, которая в ряде земель ФРГ соблюдается и сейчас, это министерство ведает также вопросами культуры и просвещения. – *Примеч. пер.*

"Gergonnes Annales des mathématiques pures et appliquées" – точно так же, как впоследствии, давно потеряв свой смысл, оно перешло к журналу Лиувилля (1836 г.). Не подлежит, однако, никакому сомнению, что Крелль связывал с этим названием серьезное намерение создать журнал, который охватывал бы всю математику. Как показывает предисловие к первому тому, Крелль намеревался способствовать не только развитию науки, но и распространению знаний. Поэтому он обращается не только к представителям отдельных специальностей, но и к "широкому" кругу читателей, которых он публикацией переводов с иностранных языков, рецензий на выходящие книги, задач и т.п. имел в виду приобщить ко всем источникам научной жизни. Так, например, первый том начинается работой Эйтельвейна[1]) об определении количества воды в источнике, после чего идет первая из помещенных в нем работ Абеля – соседство, которое сегодняшнему читателю журнала, вероятно, показалось бы обескураживающим.

Причина того, что фактическое развитие журнала пошло совсем не по тому пути, который имел в виду Крелль, кроется в духе, господствовавшем в ту эпоху. Неогуманистический фон новой научной жизни, изысканнейшим органом которого должен был вскоре стать этот журнал, оказался сильнее, чем достаточно схематичный образ мыслей его основателя, бывшего склонным скорее к посреднической, нежели к руководящей роли. Неогуманистический идеал чистой науки как самоцели, таивший в себе пренебрежение ко всякой в общежитейском смысле этого слова полезности, вскоре привел к решительному отходу от каких бы то ни было устремлений к практической направленности. Эта общая ориентация умов сказалась и на журнале, который первоначально предполагалось посвятить всем ветвям нашей науки; он превратился в орган отчетливейшим образом выраженной абстрактной математики, что и дало повод к шуточному названию: "Журнал чистой, неприкладной математики"[2]).

Крелль, не будучи в силах противостоять общему потоку этого развития, сохранил, тем не менее, верность самому себе; однако и это оказалось для него возможным лишь за счет того, что ему пришлось внешне разделить две бывших ему близкими сферы деятельности. Начиная с 1829 г. он, влекомый своим интересом к технике, стал издавать специальный "Journal für Baukunst" ("Архитектурный журнал"). О том, как велико значение этой стороны деятельности Крелля, свидетельствует тот факт, что строительство важнейшей железной дороги Берлин – Потсдам было осуществлено по его плану. А еще раньше по его проектам было построено большинство шоссированных дорог в Пруссии.

Тем временем журнал Крелля, несмотря на первоначальные финансовые трудности, превратился в важнейший орган быстро прогрессировавшей,

---

[1]) Эйтельвейн, Иоганн Альберт (1764–1848) – известный прусский инженер. Руководитель ряда крупных гидротехнических работ. – *Примеч. пер.*

[2]) Игра слов, основанная на сходном звучании сочетания "und angewandte" ("и прикладной") и слова "unangewandte" ("неприкладной"). – *Примеч. пер.*

чистой математики, которая в ту пору в своем несколько одностороннем, но блистательном развитии совершала победное шествие по германским университетам.

Первый том журнала содержит пять работ Абеля; рядом с ними напечатана работа Якоби и несколько работ Штейнера. В третьем томе (1828 г.) появились новые имена: Дирихле, Мёбиус и Плюккер.

Тем самым перечислены имена шести ученых, на которых нам в настоящий момент надлежит остановиться. Я начну с трех "аналитиков" – Дирихле, Абеля и Якоби, – а затем рассмотрю трех "геометров" – Мёбиуса, Плюккера и Штейнера.

Аналитики креллевского журнала

Я начну с Дирихле, потому что он теснейшим образом примыкает к исследованиям, обсуждавшимся выше: я имею в виду Гаусса и французов. Имея меньшие революционные наклонности, чем оба его современника Абель и Якоби, он утверждал унаследованную традицию, энергично развивая ее.

Лежён Дирихле (1805–1859) происходил из французской эмигрантской семьи. Он родился в семье почтмейстера в Дюрене и, стало быть, воспитывался под знаком рейнской крупной индустрии. В 1822–1827 гг. он жил в Париже. Был там домашним учителем и, как уже упоминалось выше, поддерживал тесные отношения с кругом Фурье. По рекомендации Гумбольдта он в 1827 г. был приглашен в Бреславль. В 1829 г. он переселился в Берлин, где непрерывно работал в течение 26 лет – сначала в качестве доцента, затем с 1831 г. в качестве экстраординарного и, наконец, с 1839 г. в качестве ординарного профессора. С этой своей профессорской деятельностью он сочетал большую преподавательскую работу в военной и строительной академиях; такое совмещение стало с тех пор у берлинских преподавателей нередким. В 1855 г. Дирихле был приглашен в качестве преемника Гаусса в Гёттинген, где ему, однако, суждено было работать лишь недолгое время. В 1859 г. он умер.

Прочное место в истории математики Дирихле заслужил не одними своими научными открытиями; не главную роль играет и совершенно исключительное влияние, оказанное им на выработку того типа лекций, который и по сегодня принят в наших университетах. Что увековечивает его имя прежде всего – так это присущий ему способ постижения и передачи математического знания. Внутренне ясно увиденные им вещи он умел настолько убедительно излагать, пользуясь одними только языковыми средствами, что они казались совершенно естественным образом вытекающими из порождающих их причин. Никто не воздал должного своеобразию этого человека столь прекрасно, как это сделал Минковский в 1905 г.

в своей речи, посвященной памяти Дирихле, произнесенной им по случаю столетнего юбилея Гёттингенского университета (Minkowskis Werke, т. 2, стр. 447 и далее). В особо проникновенной и живой манере Минковский рисует этого близкого ему мастера. Я хотел бы процитировать эту речь, чтобы живее дать почувствовать манеру Дирихле: "Он обладал искусством соединять с минимумом слепых формул максимум зрячих мыслей". Эту тенденцию Минковский называет "истинным принципом Дирихле".

Поскольку и у самого Дирихле исследовательская работа и преподавание были неразрывно связаны друг с другом, я тоже хотел бы совместно обсудить эти два направления его деятельности.

В первой из областей, которые должны быть здесь названы в *теории чисел,* крупная заслуга Дирихле заключается прежде всего в том, что он ликвидировал долг, в котором до него пребывали перед Гауссом современники и потомки этого великого математика. Дирихле был первым, кто с пониманием дела прочел "Disquisitiones Arithmeticae". Он всегда имел их при себе, неустанно штудировал и в упрощенном изложении сделал их достоянием широкого круга читателей. Духом этого творения навеяно и то, что было создано им самим. Важнейшими среди его работ являются: **1**. доказательство неограниченности числа простых членов у любой арифметической прогрессии, первый член и разность которой взаимно просты (1837 г.; Werke, т. I, стр. 313 и далее); **2**: определение числа классов бинарных квадратичных форм с данным определителем (Журнал Крелля, т. 18, стр. 1838 и далее); **3**. разработка начал теории алгебраических чисел высших степеней (начиная с 1840 г.). Два первых вопроса находятся в тесной взаимосвязи друг с другом; величайшим достижением Дирихле, указавшим пути всему дальнейшему развитию теории чисел, было применение к арифметической проблематике аппарата аналитических функций; в частности, центральное место в его исследованиях занимают ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, называемые теперь "рядами Дирихле". Способ, с помощью которого он из своих рядов выделяет как раз интересующие его составные части, искусно пользуясь корнями из единицы (теперь мы вместо этого говорим о "характерах по модулю *m*"), тоже является одним из важнейших его открытий и остается образцом для последующих исследований. В теории алгебраических чисел Дирихле был первым, кто вывел исследования за пределы квадратичных иррациональностей и корней из единицы, поставив во главу угла понятие о величине, определяемой уравнением

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + p = 0$$

с целочисленными коэффициентами (т.е., в терминологии Дедекинда, о "целом алгебраическом числе"), и сформулировав вопрос о единицах, лежащих в определяемом этим уравнением, как мы теперь говорим, "поле". "Единица" есть целое алгебраическое число, удовлетворяющее уравнению

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots \pm 1 = 0$$

с целочисленными коэффициентами. Дирихле удалось очень просто определить число независимых единиц в данном поле. Особой чертой этих работ Дирихле является такой впервые примененный им способ доказывать утверждения о существовании, при котором происходит полный отказ от прямого построения искомых величин и даже от указания какого-либо метода их построения.

Вторую область, *основания анализа,* Дирихле особенно обогатил своими лекциями по теории рядов и определенных интегралов. Здесь он впервые высказывает ясное понимание того, что сходимость ряда может быть условной, и на примерах убедительно показывает, что в случае условно сходящегося ряда путем надлежащей перестановки его членов его можно заставить приближаться к любому наперед заданному значению. Вслед за этим идет критическое рассмотрение поколебленного таким образом понятия "суммы ряда". Сходимость тригонометрических рядов тоже ставится им на более прочный, чем у Фурье, фундамент. Строго определяется и точно описывается понятие кусочно непрерывной и монотонной функции и дается строгое доказательство изобразимости таких функций тригонометрическими рядами.

Дирихле — в-третьих — занимался также *механикой и математической физикой,* но в гораздо более абстрактном, математическом смысле, чем Гаусс или Фурье . К нему восходит теорема о том, что система материальных точек находится в устойчивом равновесии, если ее потенциальная энергия достигает своего истинного минимума. Она трактуется им чисто абстрактно и излагается с полной убедительностью без приведения по неизбежности сложных, выражаемых формулами критериев, обусловливающих существование такого минимума. Дирихле весьма часто читал курсы, посвященные силам, действующим обратно пропорционально квадрату расстояния, или, как бы мы сказали сегодня, *теории потенциала.* Здесь он рассматривал фундаментальную по своему значению краевую задачу, которую французы еще и сейчас называют "задачей Дирихле" ("problème de Dirichlet"), хотя она формулировалась и обсуждалась еще Фурье и многими другими. Новое, что внес сюда Дирихле, — это доказательство единственности решения этой задачи и его идея исходить из определенного, характеризуемого немногими свойствами потенциала. — Здесь излагался им и так называемый *принцип Дирихле,* т.е. метод, позволяющий делать заключение о существовании искомого решения из того факта, что среди всех функций v, принимающих на границе заданное значение, искомое решение доставляет минимум интегралу

$$\int\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] dk.$$

С изрядными неточностями этот метод применялся еще Гауссом, Вильямом Томсоном и другими; затем в результате критики, которой он подвергся со стороны Вейерштрасса, к нему было потеряно всякое доверие, и только Гильберт поставил его на прочный фундамент[1].

Хотя Дирихле и не основал школы в узком смысле этого слова, тем не менее читанные им лекции оказали огромное влияние на многих выдающихся математиков более позднего времени – например, на Эйзенштейна, Кронекера, Дедекинда и прежде всего на Римана. Влияние этих лекций оказалось тем более глубоким и всеобъемлющим, что впоследствии они были изданы его благодарными учениками, а именно:

"Zahlentheorie" ("Теория чисел") Дедекиндом;

лекции по анализу под названием "Bestimmte Integrale" ("Определенные интегралы") Г.Ф. Мейером (1871); они были изданы еще раз (с меньшими отклонениями от Дирихле) Г. Арендтом (Braunschweig, 1904);

"Über Krafte, die im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirken" ("О силах, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния") Грубе (1876).

Идеи Дирихле, относящиеся к области дифференциальных уравнений в частных производных, а также к области электричества и магнетизма, продолжили свою жизнь в изданных Хаттендорфом лекциях Римана.

Еще и в наши дни лекции Дирихле, будучи надлежащим образом пополнены, составляют основу курсов, читаемых сколько-нибудь продвинутым слушателям. Правда, я хотел бы отметить один важный пункт, в котором метода преподавания Дирихле существенно отличается от нынешней. Дирихле всегда читал только для избранного круга слушателей, а не широкой аудитории кандидатов на учительские места, для которых этот материал далеко выходил за рамки предъявлявшихся к ним требований. Для этих кандидатов существовали особые курсы лекций, которые в Гёттингене читались Штерном и Ульрихом. В течение всей своей продолжительной преподавательской деятельности Дирихле ни разу не был членом экзаменационной комиссии; он никогда не принимал участия в руководстве здешним математическим семинаром. Новые тенденции, последствия которых мы сегодня видим и ощущаем, своим появлением обязаны огромному авторитету Якоби, который разрушил стоявшую до тех пор преграду между преподавателем и ученым-исследователем. В дальнейшем мы расскажем об этом более подробно.

В противоположность весьма активному и грубому Якоби, с которым его со студенческой скамьи связывала многолетняя дружба, Дирихле был натурой более созерцательной, сдержанной и даже почти робкой. Единственной целью, к которой он стремился всем своим существом, было уяснение идеальных связей, существующих в математическом мышлении; ради достижения этой цели он охотно отказывался от внешних эффектов и успеха. Как это часто случается с тихими, ищущими и находящими удовлетворе-

---

1) См. об этом Enzykl., IIA7b, §§ 23–25 и II C, §45.

ние в самих себе людьми, судьба поставила его в агрессивное, прочно ориентированное на внешний мир окружение. Дирихле породнился с богатым, изобретательным домом Мендельсонов, женившись на Ревекке, одной из сестер Феликса Мендельсона[1]). Как в Берлине – тогдашнем Берлине W[2]), – где дом этот был одним из самых блистательных центров всяческого рода дружеского общения, так и в короткий гёттингенский период госпоже Дирихле удалось собрать вокруг себя оживленное изысканное общество, объединявшее всех интересующихся наукой и искусством. Рассказывают, что участие Дирихле во всех мероприятиях, устраивавшихся в их доме, было очень сдержанным и скромным. Беспрестанная мелкая зыбь слепящего интеллекта его окружения, вероятно, не вполне соответствовала более глубоким, штормовым волнам его духа. Одна близкая родственница Дирихле в разговоре со мной на нашем празднике в 1905 г.[3]) согласилась с таким мнением, добавив, что ей была чрезвычайно приятна оценка, которую Дирихле получил наконец как личность; в своей семье его никогда всерьез не ценили. Таким образом, и в данном случае не смогло состояться то, в чем, по-видимому, немецкому обществу отказано вообще: создание единого культурного настроения, которое элемент точного научного знания включало бы в себя в качестве характерной и само собой разумеющейся составной части.

Обращаясь к современнику Дирихле и его товарищу по науке Нильсу Генрику Абелю, мы переносимся в мир, устроенный совершенно по-иному.

В лице Абеля мы сталкиваемся с великим, самобытным гением нашей науки, который подобно Галуа полностью посвятил себя проблемам чистейшей, абстрактнейшей математики в наиболее общем смысле этого слова. Быть может, только то, что его жизнь и жизнь великого француза была такой краткой, помешало им обоим развить свой талант и в других отношениях.

Абель, происходивший из очень бедной семьи – он родился 5 августа 1802 г. в семье пастора в маленьком норвежском местечке Фингё (Finhö), – был робок по природе, придавлен нуждой и внешними неудачами. Доминирующим его настроением, в котором известную роль сыграла, возможно, ранняя чахотка, была глубокая меланхолия, из которой его могло вывести только живое общение с его норвежскими друзьями, а еще быстрее – воодушевление от собственных научных открытий, которое неизменно охватывало его.

Относительно всех деталей жизни Абеля и о нем самом как личности мы достаточно хорошо знаем благодаря "Мемориалу", опубликованному

---

[1]) Якоб Людвиг Феликс Мендельсон-Бартольди (1809–1847) – выдающийся немецкий композитор, сын крупного банкира и внук известного философа Моисея Мендельсона (1729–1786). – *Примеч. пер.*

[2]) Аристократическая часть тогдашнего Берлина. – *Примеч. пер.*

[3]) Имеется в виду празднование столетнего юбилея Гёттингенского университета. – *Примеч. пер.*

в 1902 г. норвежским правительством по случаю празднования столетнего юбилея Абеля, собравшего математиков всех стран. Книга эта является чрезвычайно удачным дополнением к образцово изданному двухтомнику сочинений Абеля, которое Силов и Ли выпустили в 1881 г.[1]).

Абель был полным самоучкой. Советы нескольких друзей-математиков и немногие доступные ему книги были единственной опорой в его по собственному почину начатых занятиях, когда еще в 1822 г. он посещал университет в Христиании, где в ту пору не читалось никаких математических курсов. В 1823 г "студиозус Абель" странным образом привлек к себе довольно большое внимание и вызвал удивление одним своим ошибочным исследованием: ему показалось, что он нашел решение в радикалах для произвольного уравнения пятой степени. Однако очень скоро Абель обнаружил свою ошибку и, идя по найденному пути, пришел к ясному пониманию того, что подобного рода решение вообще невозможно – теорема, которую он опубликовал отдельной брошюрой (Собрание сочинений, т. I, стр. 28–33).

Этот успех и работа об интегрировании алгебраических выражений – которая в оригинальной ее редакции утеряна – создали счастливый поворот в судьбе лишенного абсолютно каких бы то ни было средств Абеля; ему была предоставлена стипендия для образовательной поездки за границу. Поездка эта имела для Абеля решающее значение; во время нее возникли главные его идеи – или, правильнее сказать, в результате контакта с появившимся у него математическим окружением он был вынужден придать своим идеям законченную форму, чтобы иметь возможность распространять их: так пересыщенный раствор сразу кристаллизуется от малейшего толчка извне.

Его маршрут сначала привел Абеля в Берлин, где он пробыл с сентября 1825 г. по февраль 1826 г. Величайшее значение имело то обстоятельство, что тотчас же по приезде состоялась его встреча с Креллем, который, сам будучи человеком уже зрелого возраста (ему в то время было 45 лет), в первой же беседе, несмотря на языковые трудности, распознал в неловком молодом человеке великого гения и привлек его в качестве сотрудника в задуманный им журнал. И в дальнейшем Крелль всегда оставался верным и заботливым другом Абеля; в его доме Абель, так обделенный судьбой, нашел дружеский прием и слова ободрения, в которых нуждалась его робкая и застенчивая натура. Абель со своей стороны отнесся к проявленной доброте с большим доверием. С истинным рвением принял он приглашение Крелля, так что в первом же томе журнала вышло шесть принадлежащих его перу статей и заметок; все они написаны (или во всяком

---

[1]) N.H.Abel. Mémorial publié a l'occasion du centenaire de sa naissance. – Kristiania, 1902. См. также его биографии: C.A. Bjerknes. N.H. Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique. – Paris, 1885, а также Ch. Lucas de Pesloüan. N.H. Abel. Sa vie et son oeuvre. – Paris, 1906. Отметим, что в первом издании сочинений Абеля, подготовленном Хольмбе (Христиания, 1839), имеются отрывки, которые Силов и Ли не включили во второе издание.

случае завершены) за короткое время первого его пребывания в Берлине. Все существо Абеля расцвело; в его жизни, обычно полной горестей, эти немногие месяцы были временем чистого блаженства.

Из числа его трудов этого периода я в первую очередь назову работу о *невозможности решения в радикалах уравнений пятой степени,* которая и до сегодняшнего дня не утратила своего классического значения. В этом исследовании предполагается, что коэффициенты уравнения можно рассматривать как независимые переменнные величины; общего понятия области рациональности, как у Галуа, здесь, стало быть, еще нет. (В более поздних заметках оно появляется и у Абеля.) Наоборот, избранный им путь заключается в том, что рассматриваются выражения самого общего вида, составленные из радикалов, и затем доказывается, что ни одно из них не может удовлетворять произвольному уравнению пятой степени.

За этой работой идет равное ей по силе сочинение о *биномиальном ряде.* Оно представляет собой важнейший вклад Абеля в точное обоснование анализа. Проблеме, часто изучавшейся другими авторами, он дает новую постановку, формулируя вопрос следующим образом: какого рода функцию представляет собой ряд

$$1 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + \dots ?$$

Когда он сходится? Эту работу нужно рассматривать исключительно как результат пребывания Абеля в Берлине, где в библиотеке Крелля он познакомился с "Cours d'analyse" Коши. Абель наверняка заметил пробел в изложении Коши, о котором мы уже говорили выше (см. стр. 100), потому что в этой своей работе он полностью заполнил этот пробел, противопоставив ложному утверждению Коши предложение, которое и по сей день называется *теоремой Абеля о непрерывности:* если степенной ряд сходится в какой-либо граничной точке его круга сходимости, то он равномерно сходится на всем ведущем в эту точку радиусе, и, значит, функция, представляемая этим рядом внутри круга сходимости, при стремлении к заданной точке по радиусу имеет предел, равный сумме ряда.

В феврале 1826 года Абель присоединился к группе своих норвежских друзей, отправлявшихся в Италию. Он провел с ними несколько месяцев в Венеции, а затем перебрался в Париж, где оставался до конца года.

Пребывание Абеля в Париже оказалось для него гораздо менее счастливым, чем время, проведенное в Берлине. В более фешенебельном благодаря своей долгой и славной традиции научном Париже он оставался в совершенном одиночестве и очень страдал от этого. Какое бы то ни было сближение с академическими кругами, и в частности, с Коши, оказалось невозможным, хотя Абель 30 октября передал Академии свой большой "Mémoire sur une classe très étendue de fonctions transcendentes" (Мемуар об одном чрезвычайно широком классе трансцендентных функций"), который содержал *теорему Абеля.* Рукопись была передана на отзыв Коши, в бумагах которого она поначалу и затерялась. Потом, в 1830 г., когда Коши был выслан, она была передана на хранение Жергонну. Но напечатана она была лишь в 1841 г. в седьмом томе "Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences" по настоятельному ходатайству норвежского правительства; при этом оригинальная рукопись была утеряна окончательно. И хотя эта важная работа тем самым была спасена от полной гибели, это позднее посмертное удовлетворение не может загладить тех обид и огорчений, которые Абель вынужден был пережить в Париже вследствие несправедливого обращения и многих горьких неудач.[1])

К огорчениям, вызванным этими печальными разочарованиями, добавились и другие гнетущие заботы, в особенности денежного характера, которые к концу 1826 г. стали все больше омрачать душу Абеля. Даже многочисленные знаки дружбы со стороны его соотечественников в Париже – к этому времени относится известный портрет Абеля, акварель работы одного его друга – смогли лишь на время улучшить его настроение. И все же, несмотря на эту тяжелую депрессию и полное отсутствие помощи, Париж, как мы вскоре убедимся, был для научного развития Абеля очень полезен.

А теперь я хотел бы подробнее, насколько позволяют рамки настоящего повествования, остановиться на важнейшем разделе "Мемуара" – на теореме Абеля.

Теорема Абеля представляет собой весьма далеко идущее обобщение теоремы сложения эллиптических интегралов. В свое время Эйлер обнаружил, что конечная сумма эллиптических интегралов, т.е. интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{f_4(x)})\,dx$$

(степень 4 многочлена f_4 может вырождаться в 3), равняется одному-единственному интегралу такого же вида, не считая алгебраических функций от величин, стоящих под знаком интеграла, или их логарифмов:

$$\int_0^a R(x, \sqrt{f_4(x)})\,dx + \int_0^b + \ldots + \int_0^h R(x, \sqrt{f_4(x)})\,dx =$$

$$= \int_0^N R(x, \sqrt{f_4(x)})\,dx + R_1(a, \sqrt{f_4(a)}; b, \sqrt{f_4(b)}; \ldots; h, \sqrt{f_4(h)};\ N, \sqrt{f_4(N)}) +$$

$$+ \Sigma\,\mathrm{const} \cdot \ln R_2(a, \sqrt{f_4(a)};\ b, \sqrt{f_4(b)}; \ldots; h, \sqrt{f_4(h)}; N, \sqrt{f_4(N)}).$$

Нечто подобное имеет место и для общих гиперэллиптических или, соответственно, "абелевых" интегралов $\int R(x, y)\,dx$, где вместо равенства $y^2 = f_4(x)$ величины x и y предполагаются связанными произвольным алгебраическим уравнением $F(x, y) = 0$. Хотя сумма таких интегралов, вообще говоря, может и не выражаться **одним** интегралом того же самого типа

---

[1]) Уже после смерти ему была присуждена Большая премия (Гран при) Парижской Академии (1830 г.). Более подробно о судьбе работ Абеля см. Koenigsberger L. Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten. – Leipzig, 1879, стр. 30. и далее.

(отвлекаясь от алгебраических функций и логарифмов), она тем не менее выражается через некоторое вполне определенное число p таких интегралов, где p зависит только от природы алгебраического уравнения $F(x, y) = 0$. Это p, нахождение которого в отдельных случаях доставило Абелю много хлопот, Клебш впоследствии назвал *родом* уравнения $F(x, y) = 0$[1]. Это и есть теорема Абеля. В случае гиперэллиптических интегралов наименьшей степени многочлен $F(x, y)$ имеет вид $y^2 - f_6(x)$ (где вместо f_6 может стоять и многочлен пятой степени f_5), а p оказывается равным 2. Таким образом, в этом случае

$$\int_0^a R(x, \sqrt{f_6(x)})\,dx + \int_0^b + \ldots + \int_0^h R(x, \sqrt{f_6(x)})\,dx =$$

$$= \int_0^A R(x, \sqrt{f_6(x)})\,dx + \int_0^B R(x, \sqrt{f_6(x)})\,dx +$$

$$+ R_1(a, \sqrt{f_6(a)}; \ldots, h, \sqrt{f_6(h)}; A, \sqrt{f_6(A)}; B, \sqrt{f_6(B)}) +$$

$$+ \Sigma \operatorname{const} \cdot \ln R_2(a, \sqrt{f_6(a)}; \ldots, h, \sqrt{f_6(h)};$$

$$A, \sqrt{f_6(A)}; B, \sqrt{f_6(B)}).$$

Та польза, которую Абель, несмотря на все трудности и тревоги, все же извлек из своего пребывания в Париже, заключалась прежде всего в стимулах, которые он получил от более близкого знакомства с французской математикой того времени. Сопоставив свои подходы с тем, чем занимались Коши и Лежандр, он понял истинное значение своих прежних идей и возвратился к ним. Пример Коши вдохновил его без страха обращаться с комплексными величинами. В трудах Лежандра он нашел образец неустанного стремления к построению теории эллиптических интегралов. В 1811 – 1819 гг. вышло первое издание книги Лежандра "Exercises de calcul intégral" ("Упражнения по интегральному исчислению"), содержащее теорию эллиптических интегралов, и во время пребывания Абеля в Париже автор готовил второе ее издание, которое вышло в 1827 – 1832 гг. под названием "Traité des fontctions elliptiques et des intégrales eulériennes" ("Курс эллиптических функций и эйлеровых интегралов").

Под впечатлением от полученных стимулов Абель в Париже начал – сначала для "Annales" Жергонна – разрабатывать идеи, касающиеся *обращения эллиптических интегралов первого рода*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}},$$

– идеи, которые он вынашивал уже давно. В декабре 1826 г. он письменно сообщил Креллю и Жергонну о делении лемнискаты и комплексных числах. Из этих идей в следующем году возникли его "Recherches sur les fonctions

---

[1]) Обозначение p было введено Риманом.

elliptiques" ("Исследования по эллиптическим функциям"), которые вопреки первоначальной договоренности в конце концов были опубликованы у Крелля, а именно – первая часть (20 сентября 1827 г.) во втором томе, а вторая (26 мая 1828 г.) в третьем. Это большая, фундаментальная по своему значению публикация, с которой – поскольку Гаусс воздержался от опубликования своих результатов – для математической общественности и начинается теория эллиптических функций – в противоположность теории эллиптических интегралов, которая принадлежит Лежандру.

Чтобы лучше выявить двойную периодичность интеграла первого рода, Абель записывает его в виде

$$\alpha = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+c^2x^2)}}.$$

Замысел Абеля заключается в том, чтобы обратить этот интеграл и рассмотреть функцию $x=\varphi(\alpha)$. От двойной периодичности он переходит к умножению и делению эллиптических функций (алгебраическое решение уравнения деления) и, наконец, с помощью предельного перехода – к представлению функции $\varphi(\alpha)$ в виде частного от деления двух бесконечных двойных произведений.

Путь, по которому Абель идет в этом исследовании, целиком и полностью укладывается в направление, проложенное Гауссом: совпадения в работах этих двух математиков простираются вплоть до обозначений.

Тем более достойно сожаления, что Абель уклонился от посещения Гаусса, который несомненно проявил бы самый горячий интерес к столь близким ему устремлениям. Очевидно, наслышавшись от Лежандра и других математиков преувеличенных рассказов о неприступности Гаусса, Абель решил не заезжать в Гёттинген на обратном пути из Парижа – поступок, который можно объяснить только его робким характером.

Несмотря на большие успехи Абеля в науке, подавленное настроение не покинуло его и по возвращении в Берлин. У него впервые появились признаки тяжелого заболевания. Но самые мрачные времена ждали его, когда в мае 1827 г. он возвратился в Христианию. Во всех его надеждах получить там хоть какое-нибудь место его ожидало разочарование. Как прежде, он должен был теперь влачить свои дни в качестве "студиозуса Абеля", бедного, по его словам, как церковная мышь. Небольшое временное улучшение принес ему 1828 год, когда он заменял одного из университетских преподавателей. Вскоре после этого у него началась тяжелая болезнь, от которой он уже не оправился. Абель умер 6 апреля 1829 г. за несколько дней до прибытия радостной вести о приглашении его в Берлин.

При виде этих удручающих, трагических обстоятельств, нельзя не испытывать величайшего восхищения этим человеком и его гениальностью, тем, что и в эти годы ему все-таки удалось завершить свои "Recherches", а последующие работы довести до такого состояния, когда он, казалось играя, преодолевал огромнейшие трудности в решении стоящих перед ним проблем в самой общей их постановке.

В последних, сверхчеловеческих усилиях Абеля, внесших свой вклад в дело приближения его конца, свою роль сыграл и некий сильный внешний фактор: поведение Якоби. Здесь снова повторилась та странная ситуация, с которой мы уже однажды столкнулись в связи с неевклидовой геометрией: после того, как в течение стольких лет эти идеи Гаусса тихо покоились в его бумагах, они вдруг почти одновременно возникли в умах двух молодых гениальных людей, которые стали в жаркой борьбе оспаривать друг у друга славу авторства.

Отталкиваясь от результатов Лежандра, но значительно их перекрыв, Якоби как раз в сентябре 1827 г. публикует в журнале Шумахера "Astronomische Nachrichten" первую общую теорему о существовании рациональных преобразований эллиптических интегралов для случая преобразований любой степени. В ноябре того же года он публикует доказательство, в котором пользуется идеей обращения эллиптических интегралов и двойной периодичностью.

Следующий, 1828 год является периодом напряженнейшего соперничества между Якоби и Абелем на почве построения теории эллиптических функций. Из-за совпадения разрабатываемых проблем принципиальное различие в характерах обоих участников проявилось здесь с особой резкостью. Абель с величайшей гениальностью справляется с самыми общими из стоящих в этой области задач; математическая идея становится у него активно действующим элементом, причем в чисто абстрактной форме, без обращения к геометрической интуиции. Якоби, напротив, хотя в отдельные моменты и руководствуется провидческой силой своего таланта, немедленно придает завоеванному четкую структуру с помощью блистательного, виртуозно применяемого вычислительного мастерства. В то время как Якоби с неустанной энергией движется по пути, который указывает ему его проницательность и который через все препятствия ведет его к цели, дух Абеля обладает силой, позволяющей ему подыматься ввысь и, обозревая все окрест, в полете, на первый взгляд не требующем никаких усилий, достигать еще более общих целей.

К сожалению, я не смогу войти в рассмотрение деталей этого соревнования, представляющего для любого математика ни с чем не сравнимый интерес. Я отсылаю интересующихся к статье Силова в "Мемориале", посвященном Абелю (1902 г.) и к статье Кёнигсбергера в сборнике, выпущенном к столетию со дня рождения Якоби[1]). Здесь же мы должны будем удовольствоваться рассмотрением лишь нескольких основных моментов.

Что касается Абеля, то сначала им была опубликована ("Astronomische Nachrichten", май 1828 г.) работа о наиболее общем подходе к теории

---

1) N.H. Abel: Memorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. – Kristiania, 1902; C.G.J. Jacobi: Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. – Leipzig, 1904. – См также Koenigsberger L. Zur Geschichte der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826–1829. – Leipzig, 1879.

преобразований (Собрание сочинений, т. 1, № 29). В этой работе Абель приходит также и к идее комплексного умножения. Однако относительно него он делает только некоторые намеки. Якоби высказывал величайшее восхищение этой работой. Он писал Лежандру, что она "au dessus de ses éloges" (выше его похвал), равным образом, как и "au dessus de ses forces" (выше его сил). Затем Абель начал публиковать систематическое изложение своей теории в "Précis d'une théorie des fonctions elliptiques" ("Введение в теорию эллиптических функций"). Однако в свет вышла лишь первая, хотя и наиболее объемистая часть этого сочинения (Журнал Крелля, 1829, т. 4).

Якоби заполняет третий и четвертый тома креллевского журнала своими в высшей степени интересными "Notices sur la théorie des fonctions elliptiques" ("Заметками об эллиптических функциях"), вышедшими в свет без доказательств, и в 1829 г. публикует в Кёнигсберге в виде отдельной книги свои "Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" (Новые основы теории эллиптических функций"; см. 1-й том Собрания сочинений в семи томах, издававшегося Берлинской академией начиная с 1881 г.).

Если сравнить труды обоих мастеров и их невольного товарища по оружию Гаусса, о работах которого им ничего не было известно, то особенно значительным достижением Якоби – во всяком случае, в позднейших его работах – выглядит подчеркивание роли самостоятельной трансцендентной функции ϑ и оперирование с тета-соотношениями. Все это, конечно, имелось и у Гаусса. Абель превзошел их обоих своими результатами, касающимися интегралов от произвольных алгебраических функций. Ключ к этим результатам ему дала его "теорема Абеля". В одном же из пунктов победителем оказался Гаусс: он был единственным из них, кто имел в своем распоряжении теорию модулярных функций.

Со смертью Абеля эта необычная цепь событий, едва ли имевшая нечто подобное себе в истории математики, обрывается. Переживший Абеля Якоби продолжал работу один, но с постоянной памятью о коллеге, которого он высоко чтил, хотя он вообще и не очень был склонен к признанию чужих работ. В признание заслуг Абеля он ввел в употребление выражения "абелевы трансцендентные функции" и "теорема Абеля".

На этом мы должны будем закончить рассмотрение работ Абеля; к сожалению, я вынужден отказаться от рассказа о дальнейших его работах, касающихся решения алгебраических уравнений. Многое в наследии Абеля, связанное с этими работами, ведет непосредственно к Галуа.

Я не хотел бы расстаться с этим идеальным типом ученого, подобных которому лишь изредка являет нам история науки, не напомнив о фигуре, относящейся к совершенно иной сфере деятельности и несмотря на это кажущейся родственной Абелю. Будучи совершенно лишен музыкального дара, Абель разделял судьбу многих математиков. И тем не менее, я полагаю, что выскажу правильную мысль, если сравню тип его творчества и самую его личность с личностью Моцарта. Поэтому и памятник этому

Математику милостию божьей нужно было бы воздвигнуть такой же, какой поставлен Моцарту в Вене: Моцарт, сам простой и незаметный, стоит, прислушиваясь, окруженный грациозными духами, которые, как бы играя, из другого мира подносят ему свои дары.

Нельзя поэтому с горечью не вспомнить совершенно по-иному выглядящий памятник Абелю, воздвигнутый в Христиании и тяжело разочаровывающий всякого, кто знает его истинную натуру. На высоко вздымающейся отвесной глыбе гранита молодой атлет байроновского типа устремляется ввысь, переступая двух отвратительных чудовищ. И если героя еще, пожалуй, можно трактовать как символ человеческого духа, то было бы напрасно спрашивать себя, что́ должны означать эти монстры. Побежденные ли это уравнения пятой степени или же эллиптические функции? Или это горести и заботы повседневной жизни? Цоколь памятника несет гигантскими буквами сделанную надпись: ABEL.

Мы должны теперь обратиться к личности совершенно иного типа: к великому сопернику Абеля – Якоби. Менее глубокий и самобытный, но гораздо более разносторонний, чем Абель, Якоби обладал не только тягой к чисто научному познанию, но и живой потребностью изложить познанное, сообщить его другим и таким образом сделать его действенным. Эта наклонность воздействовать на других с одной стороны выразилась в виде блестящего педагогического таланта, а с другой – в доходящей до беспощадности воле к утверждению собственной личности. Четкость и подвижность его блестящего интеллекта, и в особенности его знаменитые и нагонявшие страх саркастические остроты, давали ему в тех непрерывных боях, которые должна была провоцировать столь агрессивная натура, чрезвычайно эффективное оружие, в применении которого он не всегда бывал разборчив.

Как по внутренней природе, так и по внешним обстоятельствам различие между Абелем и Якоби было настолько большим, насколько это вообще возможно.

Карл Густав Якоб Якоби родился 10 декабря 1804 г. Он был сыном потсдамского банкира и рос в самых благоприятных условиях, в состоятельной семье с широким кругом интересов, в соприкосновении со всеми возможностями образования, которые давало то время. Блестяще и в ранние годы закончив свое школьное образование, Якоби стал студентом Берлинского университета. Однако здесь он слушал лишь немногие лекции по математике и в основном занимался своей наукой приватно, особо углубляясь в труды Эйлера. Наряду с этим он сумел получить широкое и вместе с тем основательное образование в самых разнообразных областях знания. В частности, он следовал своей сложившейся еще в ранней юности склонности к классическим языкам и в течение некоторого времени был активным участником университетского семинара по классической филологии, который тогда под руководством Бёка (Böckh) расцветал особенно пышно. Влияния, испытанные здесь Якоби, надолго сохранили для него свое значение. Бытовавший в этих кругах идеал высокой чисто научной культуры и выработанная здесь система преподавания сыграли определяющую роль в его дальнейшей педагогической деятельности.

Осенью 1825 г. Якоби становится доктором и одновременно получает доцентуру. Уже к пасхе 1826 г. он переселяется в Кёнигсберг, где – подобно Дирихле в Берлине – в течение семнадцати лет развивает грандиозную деятельность сначала как доцент, а потом как экстраординарный (1827 г.) и ординарный (1831 г.) профессор. В качестве штриха, характерного для поведения Якоби, отметим, что при его вступлении в должность на кёнигсбергском факультете возникли известные трудности, "так как каждому из членов факультета он сказал что-нибудь неприятное". Но в конце концов победу одержало все-таки неоспоримое значение его научных достижений. Исключительно разносторонняя, энергичная деятельность, которой Якоби отдался здесь, в Кёнигсберге, привела его в 1843 г. к истощению сил. В течение полутора лет он должен был искать отдыха в Италии, а затем принял приглашение в Берлин, где ему была предложена чисто академическая должность без определенных педагогических обязанностей. Несмотря на спокойную жизнь, в которую, впрочем, вторгались тяжелые внешние заботы, так как в 40-х годах Якоби потерял все свое состояние, прежняя работоспособность больше к нему не возвращалась. Политические дела, увлекшие этого ученого, ранее пребывавшего у короля на хорошем счету, в сторону революции или, во всяком случае, поставившие его под подозрение, также омрачили последние дни Якоби, когда он уже стал прихварывать. Скончался Якоби 18 февраля 1851 г. от оспы.

Интересно процитировать строки из одного письма, написанного проницательной госпожей Ревеккой Дирихле по поводу смерти Якоби. Оно особенно хорошо характеризует как Якоби, так и более спокойного Дирихле, который был почти его ровесником: "Его отношение к Дирихле было даже слишком хорошим; они могли часами сидеть вместе (я называла это: молчать о математике); они отнюдь не щадили друг друга, и Дирихле часто говорил ему горчайшие истины, а Якоби так хорошо понимал это и умел смирять свой великий ум перед великим характером Дирихле".

Будучи по натуре необычайно разносторонним, Якоби не оставил незатронутой практически ни одной области математики. Но не только теория эллиптических функций и непосредственно вытекающая из нее проблематика получили благодаря его трудам интенсивное развитие, хотя относящиеся к этой области творения Якоби и должны рассматриваться как самые оригинальные из его достижений; он занимался и прикладной математикой, неоднократно отправляясь здесь, как и в работах по чистой математике, от Гаусса; к этим занятиям его подталкивало общение, которое он по вопросам астрономии поддерживал с Бесселем. К этому периоду относится возникновение крупнейших его работ, которые он, идя вслед за Гамильтоном, посвятил *механике, дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка* и *вариационному исчислению*; работы эти доведены Якоби вплоть до численных приложений. Тем не менее, на этих достижениях Якоби мы остановимся только в одном из следующих разделов. В данной же связи мы займемся тем, что было сделано им в области чистой математики — в частности, в теории трансцендентных функций, которая в течение последующих десятилетий была тем центром, где сосредоточилось развитие высокой науки.

Важнейшее после опубликования в 1829 г. "Fundamenta" достижение Якоби заключается в том, что ему удалось, начав с тета-рядов и связывающих их тождеств, повести наступление на теорию эллиптических функций. Именно по этому пути он пошел в своем огромном десятичасовом докладе 1837 — 1838 гг., обработанном Борхардтом и опубликованном в Собрании сочинений Якоби (т. 1, стр. 497 и далее).

Буквой ϑ, ставшей после Якоби традиционной (название "функция Якоби" в Германии не укоренилось), обозначаются функции вида

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{a\nu^2+2b\nu},$$

где (в наших прежних обозначениях)

$$a=\frac{\pi i\,\omega_1}{\omega_2},\ b=\frac{\pi i\,u}{\omega_2}.$$

От эллиптических функций Якоби переходит теперь к *абелевым функциям.* Однако в поисках этих новых трансцендентных функций ему сначала суждено было пойти по неправильному пути. Казалось естественным по образцу эллиптических интегралов применить идею обращения к гиперэллиптическим интегралам. В самом простом случае, когда $p = 2$, обращение "всюду конечных" интегралов

$$\int^{x} \frac{dx}{\sqrt{f_6(x)}} = u_1 \text{ и } \int^{x} \frac{xdx}{\sqrt{f_6(x)}} = u_2$$

приводит к четырежды периодическим функциям $x(u_1)$ и $x(u_2)$, поведение которых выглядит загадочным. Как показал Якоби, из четырех периодов этих функций можно составить бесконечно малое приращение аргумента, которое также является периодом, так что функции $x(u_1)$ и $x(u_2)$ в каждой точке принимают любое произвольно заданное значение! Отсюда он сделал вывод, что функции эти "неразумны" и что на этом пути невозможно никакое проникновение в теорию эллиптических функций.

Это явление было объяснено только Риманом; для этого потребовалось ввести не известное еще Якоби понятие многолистной поверхности. Функции $x(u_1)$ и $x(u_2)$ являются совершенно "разумными" аналитическими функциями, но только бесконечнозначными. Риманова поверхность такой функции получается путем все повторяющегося отображения на плоскость фигуры, состоящей из двух сшитых друг с другом по разрезу параллелограммов (рис. 4). Каждому значению u соответствует бесконечно много значений x, которые сколь угодно близко подходят к любому наперед заданному числу, но отвечающие какому-либо u почти равные значения x лежат на различных листах этой поверхности.

И хотя Якоби еще был далек от понимания такого рода вещей, ему все же удалось найти смелый, действительно гениальный выход из указанного затруднения. Теорема Абеля навела его на мысль построить две суммы д в у х всюду конечных интегралов

$$\int^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{f_6(x)}} + \int^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{f_6(x)}} = u_1$$

и

$$\int^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{f_6(x)}} + \int^{x_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{f_6(x)}} = u_2$$

и рассмотреть симметрические функции $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$ верхних пределов. Эти функции являются четырежды периодическими в обычном смысле (и, в частности, однозначными!) функциями двух переменных u_1 и u_2. Их в этом простейшем случае и называют абелевыми функциями.

Эта удивительная, ведущая к очень интересным результатам постановка проблемы впервые появилась в 13-м томе журнала Крелля (1834–1835 гг.) "De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur" ("О четырежды периодических функциях двух переменных, к которым приводит теория трансцендентных абелевых функций") или даже в 9-м томе этого журнала (1832 г.): "Considerationes generales de transcentibus Abelianis" ("Общие исследования абелевых трансцендентных функций"). Содержащееся в этих работах провидческое достижение является тем более великим, что Якоби имел совершенно недостаточные представления даже о поведении функций

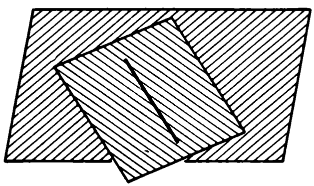


Рис. 4

одной комплексной переменной. Но его смелые догадки этим не ограничиваются. Он делает дальнейший шаг, предполагая, что эти новые функции должны изображаться *кратными тета-рядами*

$$\vartheta = \sum_{\nu_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu_2=-\infty}^{\infty} c^{a_{11}\nu_1^2 + 2a_{12}\nu_1\nu_2 + a_{22}\nu_2^2 + 2\nu_1 v_1 + 2\nu_2 v_2},$$

где a_{11}, a_{12} и a_{22} строятся по периодам, а v_1 и v_2 суть линейные комбинации величин u_1 и u_2. На доказательство этого предположения Парижской Академией был объявлен конкурс, и в 1846 г. оно было получено в работе Розенгайна, которая за это была удостоена премии; в 1851 г. эта работа была опубликована в 11-м томе мемуаров "Savants étrangers". Розенгайн достигает цели чисто алгорифмическими средствами, путем вычислений, производимых над тета-функциями. Несколько позднее Гёпель (Журнал Крелля, 1847, т. 35) дал более прозрачное решение этой задачи с помощью очень абстрактных соображений.

Не приходится удивляться, что при бурном и стремительном развитии, которое испытывала тогда наука, многие детали оставались недоделанными. Существенным пробелом теории у Абеля, равно как и у Якоби, следует считать полное отсутствие не только доказательства однозначности функций, получаемых путем обращения интегралов, но даже потребности в такого рода доказательстве. Как мы видели, неведение относительно этой стороны проблемы и ввергло Якоби в ошибки при рассмотрении гиперэллиптических интегралов.

У обоих авторов полностью отсутствует весь комплекс вопросов, связанных с модулярными функциями. Но без точного знания, как ведут себя эти функции, без знания модулярной фигуры (которая Гауссу была известна) невозможно и построение этой теории в части, касающейся эллиптических функций. В варианте Якоби трудности начинаются тогда, когда нужно доказывать, что отправляясь от допустимых значений величины $a = i\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$, можно прийти к произвольным значениям функции $\kappa^2 = \lambda\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)$.

Если бы мы стали говорить о работах Якоби по дифференциальным уравнениям в частных производных, то к нашей критике добавились бы и многие другие пункты. Якоби полностью игнорировал доказательства существования, необходимость которых ощущал Коши; почти всегда он рассматривает лишь "общий случай" и т.д. и т.п. Его неутомимо рвущейся вперед и нуждающейся в переменах натуре нехватало спокойствия, необходимого для гармоничного завершения предпринятого построения с учетом всех его сторон. Именно это Якоби однажды выразил словами: "Для гауссовской строгости у нас нет времени, господа".

Тихая деятельность ученого не могла удовлетворить такого инициативного и агрессивного человека, как Якоби, и потому неотъемлемой чертой его облика является необычайная, направленная наружу активность. Сначала она нашла себе яркое выражение в его педагогической деятельности в Кёнигсберге. Влияние, которое Якоби оказывал на своих учеников, было колоссальным. Тех, кто сопротивлялся наиболее упорно, он насильно заставлял подчиниться своему образу мышления; любого и каждого он увлекал за собой на вершины особого математического честолюбия, зажигая жгучий интерес к выдвинутой им проблеме дня. Не только стимулируя и пробуждая чужие способности, как это делали, например, Гаусс или Дирихле, но и насильно увлекая каждого очарованием потока возникших у него в данное мгновение мыслей, Якоби был предназначен для того, чтобы создать большую школу, которой суждено было долгое процветание. Так называемая "кёнигсбергская школа", основанная Якоби и Францем Нейманом, представлявшим математическую физику, является первым подобного рода явлением в Германии, приобретшим длительное влияние. (Преходящее значение имела созданная около 1790 г. Гинденбургом "комбинаторная" школа, которой мы в нашем изложении не коснулись, так как она представляется скорее ответвлением научных тенденций прошлого (Лагранжа и др.), чем началом нового этапа развития науки[1].) Насколько новым для того времени было такое педагогическое начинание, диаметрально противоположное традициям XVIII столетия, видно хотя бы из того, что Бессель уклонился от участия в (первом в Пруссии) физико-математическом семинаре, основанном в 1834 г.

Состояние полного расцвета школы Якоби длилось еще долго – по крайней мере, в течение тридцати лет после ухода учителя – особенно благодаря стараниям его любимого ученика Ришело, который с необычайным рвением сохранял традиции, унаследованные от основателя школы. Тем не менее, ее структура, понятным образом, приобрела в руках Ришело совсем иной вид. Запас идей, которыми он располагал, был задан для него раз и навсегда, и так как теперь – в отличие от времен Якоби – не было нового их притока, то школа стала с неизбежностью отставать от современного ей развития. На передний план все больше и больше стало выступать несущественное – например, стала односторонне подчеркиваться необходимость изучения эллиптических функций и т.д. и т.п. И, тем не менее, в медленном окостенении этой системы, видимо, заключается основа стойкой ее действенности, ибо лишь очень немногие способны, не теряя почвы под ногами, следить за всеми изгибами и поворотами такого динамичного и живого ума, как ум Якоби; основная масса еще не доросла до таких требований.

Мощный импульс, исходивший от Якоби, оказывал влияние, выходящее далеко за пределы Кёнигсберга. Все германские университеты испытали на себе его воздействие, иногда косвенно, а часто и путем все расширявшейся практики приглашать к себе кёнигсбержцев. Кирхгоф и Гессе попали в Гейдельберг, Клебш – в Карлсруэ, Гиссен и Гёттинген и т.д. Дух углубленной научной специализации охватил все германские математические круги и постепенно преодолел царившие до того времени поверхностные, энциклопедические по своей широте наклонности. Процесс этого развития захватил, в частности, и великое множество кандидатов на учительские должности, обучавшихся в университетах. Здесь тоже получила господствующее влияние тенденция к высоким научным и соответствующим образом специализированным требованиям. Своей кульминации эти устремления достигли в прусском положении об экзаменах (1866 г.), которое от

---

[1] По этому поводу см. H a n k e l H. Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. – Вступительная речь, Тюбинген, 1869, стр. 24 и далее.

каждого кандидата требовало настолько глубоко проникнуть в высшую геометрию, высший анализ и аналитическую механику, чтобы он был в состоянии вести в этих областях успешные самостоятельные исследования.

Но влияние Якоби оказывало значительное воздействие и за пределами Германии. Многообещающие, растущие математики Франции 40-х годов – такие, например, как Эрмит и Лиувилль – считали себя учениками Якоби. В Англии Кэли выглядит находящимся в полном плену у Якоби, а астрономы всех стран еще и сегодня опираются на него; в качестве примера можно назвать Тиссерана с его книгой "Traité de Mécanique céleste" ("Курс небесной механики"; Париж, 1889 – 1896).

И если мы зададимся теперь вопросом о духе, который присущ был всему этому процессу в целом, то можно будет кратко ответить, сказав, что это был естественно-научно ориентированный неогуманизм, который видел свою цель в неумолимо строгом культивировании чистой науки и который односторонним напряжением всех сил, направленных на достижение этой цели, привел высокую специализированную культуру к неведомому дотоле расцвету. Якоби сам неоднократно признавал себя ответственным за эти взгляды – например, в своей речи при вступлении на должность ординарного профессора в Кёнигсберге в 1831 г. [Math. Annalen, т. 56, стр. 252 и далее (Дик); см. также написанную Кёнигсбергером биографию Якоби, стр. 131 и далее]. В этой речи, произнесенной на латинском языке, был выдвинут знаменитый тезис: "Mathesis est scientia eaurum quae per se clara sunt" ("Математика относится к числу тех наук, которые ясны сами по себе"). Еще яснее и убежденнее он высказался в другой своей помпезной речи, которую сам в письме к Лежандру назвал "подобной молнии" ("fulminant"; Werke, т. 1, стр. 454 и след., 2 июня 1830 г.; Журнал Крелля, т. 80, стр. 272 и след.):

"Ill est vrai que Monsieur Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre une question de nombres vaut autant qu'une question du système de monde".

("Господин Фурье придерживался, правда, мнения, что главной целью математики является общественная польза и объяснение явлений природы; но как философ он должен был бы знать, что единственная цель науки заключается в том, чтобы возвысить честь человеческого разума, и что, таким образом, какой-нибудь вопрос о числах ничуть не менее важен, чем любой вопрос о системе мира".)

Прежде, чем закончить рассмотрение научного творчества Якоби, нужно упомянуть о еще одном факте, который представляется немаловажным как с точки зрения характеристики этого человека, так и с точки зрения развития нашей науки. Как известно, 1812 год принес с собой равноправие для евреев в Пруссии. Якоби был первым еврейским математиком, занимавшим в Германии ведущее положение. И в этом он тоже стоит во главе большого и важного для нашей науки процесса развития. С равноправием евреев для нашей страны открылся новый большой резервуар математической одаренности, силы которого вместе с притоком, возникшим благодаря французской эмиграции, очень скоро продемонстрировали в нашей науке свою плодотворность. Мне кажется, что такого рода обновление крови приносит науке мощное подкрепление; наряду с затрагивавшимся уже законом миграции продуктивности я хотел бы охарактеризовать это явление как один из результатов национальной "инфильтрации".

Геометры крелевского журнала

В области геометрии развитие современной математики в Германии тоже начинается с влияния, которое было оказано французами. Однако если оставить в стороне основополагающие гауссовы "Disquisitiones circa superficies curvas" (1827 г.), то здесь воспринята была не дифференциальная геометрия; главный интерес оказался направленным скорее на *алгебраическую геометрию,* в частности, — на линейные и квадратичные образы.

Однако прежде, чем остановиться на этом процессе более подробно, я хотел бы отметить два противоречия, оказавших на него решающее влияние.

Это, во-первых, встретившееся нам уже при анализе Политехнической школы расхождение во взглядах по вопросу о том, как должна разрабатываться геометрия — аналитически или же синтетически. С течением времени противоречие это приобрело острый, принципиальный характер; приверженцы обоих направлений считали для себя делом чести работать только тем орудием, которое однажды было ими избрано. Преимущества и недостатки каждого из этих методов выступали с тем большей четкостью, чем более односторонне они разрабатывались. Аналитическая геометрия располагает удобным алгорифмом, открывающим возможность широчайших обобщений, но алгорифм этот таков, что он легко может привести к соблазну упустить из виду подлинный объект геометрии — фигуру и построение. В свою очередь, синтетической геометрии грозит опасность увязнуть в рассмотрении конкретных частных случаев или — в лучшем случае — небольшого числа возможностей; положение мало улучшается даже тогда, когда в процессе поиска выхода из него ad hoc отыскивается какой-нибудь новый алгорифм — он будет оставаться громоздким до тех пор, пока не будет преобразован в простые формулы аналитической геометрии. Что в синтетической трактовке следует приветствовать, так это отчетливое осознание живого корня всякой геометрии — радости созерцания образа.

Любое здоровое направление пользуется обоими этими методами и пожинает плоды их взаимного, стимулирующего воздействия друг на друга.

Второе противоречие, которое нужно отметить, по своей природе менее существенно; однако ввиду большого значения, которое оно приобрело впоследствии, пройти мимо него нельзя. И хотя вообще говоря куда более важную роль оно играет в искусстве, наша "самая объективная" из наук тоже не свободна от него в той мере, в какой это касается ее распространения и организации. Я имею в виду противоречие между мнениями различных школ, между кликами, всю ту громаду научной полемики, которая зачастую, переносясь на личности, превращается в резкий обмен субъективно окрашенными мнениями, передающимися по наследству младшим поколениям.

В нашем случае речь идет о борьбе синтетика Штейнера, поддержанного Якоби и его приверженцами, против Плюккера. Мёбиус с его тихим характером стоял в стороне от этих сражений, усугублявшихся к тому же антагонизмом между столицей и провинцией. Следы этой борьбы можно нередко встретить еще и сегодня; так, до недавнего времени в определенных кругах Штейнер чтился как несравненный, величайший геометр первой половины XIX столетия.

Имеется хорошее средство защиты от диктатуры таких групповых мнений, противостоять которым отдельному, особенно молодому человеку трудно. Его однажды рекомендовал лейпцигский физиолог Людвиг: нужно верст на шестьсот удалиться от родины этих споров и оттуда посмотреть на складывающуюся ситуацию; любопытно будет при этом наблюдать, как отпадут многие представления, которые до тех пор считались само собой разумеющимися.

Последующее развитие, обычно, как правило, ставящее личные заслуги на их подлинное место, разрешило и этот важный спор, дав аналитической геометрии перевес по всем направлениям. Я напомню хотя бы о связях, существующих между теорией алгебраических кривых и высшей теорией функций, об отношении этой теории к теории множеств, о дифференциальной геометрии – ни в одно из этих направлений "синтетическая" геометрия не входит. В остальном же я придерживаюсь тезиса, высказанного в 1831 г. Якоби на диспуте при его вступлении в должность на кёнигсбергском факультете: "Principium methodi geometricae et analyticae idem est" ("Геометрические и аналитические принципы – это одно и то же").

По времени появления первых опубликованных ими крупных трудов я располагаю этих трех великих геометров в следующей последовательности: Мёбиус, Плюккер, Штейнер.

Август Фердинанд Мёбиус, подобно Гауссу, Гамильтону и многим другим, кому математика обязана своим прогрессом, первоначально был астрономом. Должности, занимаемые этими учеными, доставляли им обеспеченное существование, создававшее предпосылки для математического творчества. И, действительно, на протяжении большей части своей тихо прожитой жизни Мёбиус был директором Плейсенбургской обсерватории в Лейпциге. Здесь он имел возможность спокойно вынашивать свои мысли, чтобы затем с совершенной ясностью излагать их, не заботясь ни о чем, кроме воплощения идей, которые сами собой напрашивались его таланту геометра-первооткрывателя, когда в процессе изучения различные области этой науки встречались на его пути.

Родился он 17 ноября 1790 г. в княжеской школе Шульпфорта[1]. Всякого, кто представляет себе этого скромного, тихого человека, вероятно, до некоторой степени должно удивить, что его отец занимал в этой школе должность учителя танцев. И чтобы окончательно продемонстрировать различие между поколениями, я позволю себе упомянуть, что сын этого математика был известным неврологом, автором вызвавшей много разговоров книги "О физиологической слабости женщины".

В 1813 – 1814 гг. Мёбиус довольно длительное время провел у Гаусса в качестве его ученика. Однако в основном Гаусс готовил его, как и других своих учеников, к астрономическим наблюдениям и вычислениям. Хотя на дальнейшее это и обеспечило Мёбиусу постоянное место работы, тем не менее Гаусс не проник в суть его дарования, которое развилось лишь на изучении французских геометров. С 1816 г. Мёбиус становится сначала наблюдателем, а затем и директором в Плейсенбурге. Позже он стал и профессором математики в университете. На этих должностях он оставался до самой смерти (1868 г.).

Четырехтомное Собрание сочинений Мёбиуса было издано Королевским Саксонским научным обществом в 1885 – 1887 гг. В конце четвертого тома помещен обзор наследия Мёбиуса, в котором детально изложен генезис всех его научных идей. Факты более личного характера можно найти в труде Брунса "Die Astronomen der Pleißenburg" ("Астрономы Плейсенбурга").

Среди трудов Мёбиуса первой и по времени и по содержанию стоит его основополагающая работа "Der barycentrische Calcul" ("Барицентрическое исчисление"), опубликованная в 1827 г. Это подлинный кладезь новых идей, изложенных с поразительной ясностью.

Название книги объясняется ее основной идеей – дать геометрическое применение понятию центра тяжести. Рассмотрим случай плоскости. В этом случае в качестве координат точки P Мёбиус берет веса p_1, p_2 и p_3 грузов, которые надо поместить в вершины фиксированного треугольника для того, чтобы центр тяжести этих грузов попал в точку P. Это первый пример *однородных координат*, т.е. таких координат, для которых значение имеет только их отношение (у грузов λp_1, λp_2, λp_3 тот же самый центр тяжести, что и у грузов p_1, p_2, p_3). Однако это еще не те однородные координаты наиболее общего типа, которые впоследствии ввел Плюккер. Чтобы получить координаты Плюккера, требуется произвести еще одно небольшое обобщение, заключающееся в том, что каждая координата снабжается дополнительным множителем λ_i, т.е. в том, что в разных верши-

---

[1] Самая знаменитая из трех княжеских школ, основанных герцогом Морицем Саксонским (1521 – 1553). Первоначально Шульпфорта была цистерцианским монастырем, который после закрытия его в 1540 г. вследствие реформации был в 1543 г. преобразован в школу. – *Примеч. пер.*

нах грузы измеряются в различных единицах. Уравнение рассматривавшейся Понселе бесконечно удаленной прямой, которое уже и у Мёбиуса получило ощутимую реальность в форме $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, в общих однородных координатах приобретает вид $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$. Это дает возможность рассматривать, применяя предельный переход, обычные аффинные координаты как частный случай треугольных – мысль, от которой Мёбиус был еще очень далек.

И хотя эта новая система координат является уже более гибкой, чем обычная, ибо располагает шестью произвольными константами (у Плюккера их восемь), все-таки главная ее ценность заключается в том, что она позволяет Мёбиусу выявить ряд новых идей.

1. Мёбиус был первым, кто абсолютно последовательно использовал в геометрии принцип знаков, причем "направление обхода" принималось им во внимание не только при измерении длин отрезков, но и при измерении площадей и объемов.

2. Начав приравнивать координаты p_1, p_2, p_3, p_4 текущей точки пространства рациональным функциям некоторых параметров, Мёбиус получил новый способ изображать кривые и поверхности, ведущий к совершенно новой, отличной от принятой в то время классификации этих образов. При этом он обнаружил пространственные кривые третьего порядка.

3. Мёбиус четко осознал идею точечного соответствия между двумя пространствами и с ее помощью создал представление о простейших, систематически расположенных ступенях "родства": равенство, теперь обычно называемое конгруэнтностью, подобие, аффинность (название, идущее от Эйлера), коллинеарность; последним термином он называет самый общий тип родства, при котором прямые снова переходят в прямые[1)].

4. С этой классификацией он непосредственно связал идею разыскания выражений и геометрических образов, остающихся неизменными при каждом из этих соответствий. В связи с этим Мёбиус впервые дает подробную теорию двойного отношения четырех точек, лежащих на одной прямой, теорию ставшую возможной лишь после введения знаков у отрезков.

5. Задать коллинеацию ему удалось без каких бы то ни было метрических понятий, одним лишь указанием четверок взаимно соответствующих друг другу точек в соотносимых плоскостях (пяти точек в пространстве) и указанием соответствия между соединяющими их прямыми. Эта так называемая "сеть Мёбиуса" легла впоследствии в основу предпринятого фон Штаудтом синтетического построения геометрии.

Приведенная выборка показывает, какое исключительное значение имела рассматриваемая книга. Однако, несмотря на все богатство заключенных в ней идей, эта книга лишь с очень большим запозданием стала

---

1) Хотя Мёбиус еще и не располагал понятием группы в современной его формулировке, тем не менее, понятие "родства" давало ему некоторый эквивалент этого понятия: Мёбиус является поэтому одним из предшественников "Эрлангенской программы".

оказывать подобающее ей влияние – отчасти потому, что изучение ее было затруднено обилием новых специальных терминов, а отчасти потому, что из-за своего скромного характера Мёбиус не обладал необходимой настойчивостью. Так же обстояло дело и со вторым его в высшей степени значительным трудом "Lehrbuch der Statik" ("Учебник статики"), вышедшим в двух томах в 1837 г. (перепечатан в Werke, т. 3, стр. 1 и далее, а также стр. 272 и далее).

Труд этот содержит геометрический вывод соотношений, выполняющихся при совместном действии сил на жесткие тела, а также на системы тел и представляет собой продолжение рассмотрений, предпринятых в 1804 г. Пуансо в его известном учебнике "Eléments de statique" ("Элементы статики"), где впервые наряду с отдельными силами были рассмотрены и "пары сил". Книге предшествовал ряд отдельных работ (Журнал Крелля, 1833, т. 10; см. также Ges. Werke, т. 1, стр. 489 и далее), в которых Мёбиус развил понятие "нулевой системы", т.е. совокупности всех таких прямых в пространстве, что относительно них данная пара сил имеет момент, равный нулю. Используя возникающие здесь соотношения двойственности между "нулевыми точками" и "нулевыми плоскостями", Мёбиус пришел к ряду очень красивых теорем; так, например, он открыл тот факт, что только тетраэдры являются фигурами, которые одновременно могут быть вписаны и описаны друг около друга.

Отдельные удивительно красивые открытия, отличающие творения Мёбиуса в любой области, можно найти и во многих разрозненных заметках, которые он вплоть до глубокой старости публиковал в "Berichte der Königlichen sächsischen Gesellschaft"; собрание сочинений Мёбиуса состоит из четырех томов. В возрасте 68 лет ему удалось сделать еще одно капитальное открытие, которое, правда, будучи посланным в 1861 г. в Париж на соискание премии, покоилось в бумагах Академии до тех пор, пока в 1865 г. Мёбиус сам не опубликовал его, – речь идет об односторонних поверхностях и многогранниках, для которых не действует "закон ребер" и которые не имеют объема[1]. "Лист Мёбиуса", для раскраски которого краски требуется в два раза больше, чем это кажется на первый взгляд (такое наглядное толкование имеется уже у самого Мёбиуса), известен теперь достаточно широко. Удивительным образом он в том же самом 1858 г. был найден еще и Листингом, опубликовавшим свое открытие в 1862 г. в работе "Zensus räumlicher Komplexe"[2] ("Перечень пространственных комплексов") – еще один пример, подтверждающий мысль о принудительном характере развития науки.

В лице Мёбиуса мы встречаемся с редким примером поздно созревшей гениальности ("Барицентрическое исчисление" было написано в 37 лет!), которой была ниспослана стойкая, сохранившаяся до глубокой старости продуктивность. Если придерживаться оствальдовского разделения мате-

---

[1] "Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders". – Werke, т. 2, стр. 472 и далее.

[2] Abh. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, 1862, т. 10, стр. 97 – 180. – *Примеч. пер.*

матиков на романтиков и классиков, то Мёбиуса нужно причислить к типичным представителям второй из этих групп.

С Юлиусом Плюккером мы вступаем в период, с которым мы уже сами связаны многочисленными отношениями. Лично я чту в нем своего учителя, ассистентом которого по физике я был с 1866 по 1868 г. и с которым меня связывает еще и общая родина.

Особенно активные связи Плюккер поддерживал с Францией и Англией, а с Берлином, как я уже об этом упоминал, у него сложились недружественные отношения. Плюккер был гораздо более обычным явлением, чем Мебиус, но и он являет собой пример человека с нетривиальным типом развития. На тридцать пятом году своей жизни он соединил математическую и физическую профессуры в Бонне и вследствие этого стал постепенно отрываться от прежних математических занятий, чтобы целиком предаться физическому эксперименту. Только под конец свой жизни он снова вернулся к геометрии – обстоятельство, которое сыграло решающую роль и в моем собственном развитии (я имею в виду работу по изданию сочинений Плюккера).

Семья Плюккера, тесно связанная с нижнерейнской индустрией, была во время религиозных волнений изгнана из Аахена и переселилась в Эльберфельд. Здесь Плюккер и родился 16 августа 1801 г. Он учился в дюссельдорфской гимназии, был студентом в Бонне и в Париже в 1823/24 гг. и в 1825 г. получил докторскую степень в Бонне, где в 1828 г. стал экстраординарным профессором. В 1832 – 1834 гг. он был экстраординарным профессором в Берлине и одновременно преподавал в гимназии Фридриха-Вильгельма. Одно время его тоже намечали на пост директора планировавшегося тогда Политехнического института, который, правда, в то время мыслился уже как учебное заведение для подготовки преподавателей старших классов. К берлинскому периоду и относится обострение его конфликта с кругом Якоби – Штейнера. Сам Штейнер стал экстраординарным профессором в Берлинском университете в 1835 г., когда Плюккер уже в течение года был ординарным профессором в Галле. В 1836 г. он был приглашен в Бонн, где со смертью фон Мюнхова оказались вакантными три кафедры – математики, физики и астрономии. Последняя из них досталась Аргеландеру, а первые две до самой смерти (22 мая 1868 г.) занимал Плюккер.

Обращаясь к работам Плюккера, я сначала хотел бы остановиться на его достижениях в области физики из-за тех личных взаимоотношений, которые связывают с этой проблематикой нас, гёттингенцев. Работы Плюккера по физике помещены во втором томе Собрания его сочинений, изданного Гёттингенским научным обществом и снабженного предисловием, написанным Рике.

Хотя свою деятельность Плюккер и начал с математики, в физике он отнюдь не был математическим физиком. Наоборот, его привлекали чисто экспериментальные исследования, в которых он, подобно Фарадею, с наибольшей охотой вторгался в совершенно неизученные области. Ему удалось сделать таким образом целый ряд открытий. В 1847 г. он обнаружил явление кристалломагнетизма на пластинке турмалина, подвешенной между полюсами магнита: в зависимости от того, ка́к она была подвешена, пластинка устанавливалась аксиально или трансверсально[1]). Начиная с 1857 г. он исследовал влияние магнита на электрический разряд в разреженном газе – в частности, на положительный разряд и на отрицательное катодное свечение; в этих наблюдениях он вплотную подошел к открытию катодных лучей, которое было сделано его учеником Гитторфом. Вытягивание гейслеровых трубок в капилляры и ставшие в результате этого возможными первые наблюдения над разрядными спектрами также были осуществлены Плюккером (1857 г.; Werke, т. 2, стр. 502). Он установил, что спектры являются атрибутами газов и, в частности, наблюдал первые три водородные линии. В 1864 г. Плюккер вместе с Гитторфом (Werke, т. 2, стр. 665 и далее) существенно уточнил эти результаты и, в частности, открыл обусловленные природой электрического разряда двойные спектры (линейчатые и, соответственно, полосатые). Все работы по этой проблематике опубликованы в "Philosophical Transactions". Но в результате тормозящего берлинского воздействия эти вещи тоже признания в Германии не получили. В Гейдельберге Кирхгоф и Бунзен в 1858 г. также занялись спектральным анализом, но вначале они наблюдали только простые спектры паров металлов. То, что природа спектра одного и того же газа может быть различной при различных условиях свечения, ими замечено не было. Отрицательное отношение Гитторф испытал на себе и позже, когда он демонстрировал ряду берлинских физиков (Магнусу, Поггендорфу и др.) свои замечательные открытия, касающиеся катодных лучей. Этот антагонизм в значительной мере чувствуется и по сей день.

Теперь я вернусь к нашей основной теме и обращусь к геометрическим работам Плюккера. Кроме работ, напечатанных в первом томе Собрания сочинений, мы обязаны ему пятью большими, отдельно опубликованными трудами:

1. "Analytisch-geometrische Entwicklungen" ("Аналитико-геометрические исследования"), т. 1, 1828; т. 2, 1831.

2. "System der analytischen Geometrie (der Ebene)"("Система аналитической геометрии (на плоскости)"), 1834.

3. "Theorie der algebraischen Kurven"("Теория алгебраических кривых"), 1839.

4. "System der analytischen Geometrie des Raumes" ("Система аналитической геометрии пространства"), 1846.

---

[1])Исследования эти в определенном смысле доведены до конца в книге: B e e r A. Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik (Брауншвейг, 1865), изданной под редакцией Плюккера.

5. "Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement" ("Новая геометрия пространства, основанная на рассмотрении прямой линии как элемента пространства"), 1868, 1869 (вторая часть посмертно издана мной).

О последнем из этих трудов, созданном Плюккером в его второй геометрический период, я буду говорить в этих лекциях позже. Но в качестве примечательной детали я хотел бы уже сейчас отметить, что 1863-й год, год возобновления Плюккером его геометрических работ, совпадает с годом смерти Штейнера. Имеется ли между этими событиями какая-нибудь связь, решить, разумеется, невозможно.

Целью, поставленной и достигнутой Плюккером в геометрии, является создание новой системы аналитической геометрии. Здесь он придерживается метода, возникшего из восходящей к Монжу традиции полного слияния построения с аналитической формулой. В предисловии к первому из перечисленных здесь сочинений он на стр. IX говорит: "Я придерживаюсь той точки зрения, что анализ представляет собой науку, которая существует самостоятельно, для самой себя, независимо от каких бы то ни было приложений; а геометрия, так же как с некоей другой стороны механика, представляется только образным истолкованием соотношений, существующих в великом и возвышенном целом". В этих словах отчетливо слышатся отзвуки воззрений Монжа, с которыми мы в несколько иной форме встречались и у Гаусса.

В плюккеровской геометрии комбинация уравнений превращается в геометрический факт, и наоборот – геометрические факты управляют аналитическими операциями. Вычислений, когда это возможно, здесь стараются избежать, но зато развивается и находит широкое применение

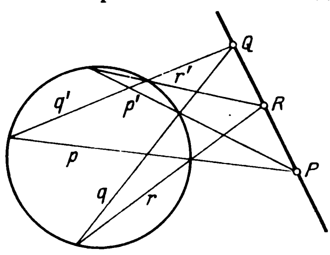


Рис. 5

доведенная до виртуозности острота внутреннего восприятия и геометрического истолкования встречающихся по ходу дела аналитических уравнений.

В качестве примера, демонстрирующего плюккеровский способ мышления, я приведу принадлежащее ему доказательство теоремы Паскаля.

Речь идет о двух тройках прямых p, q, r и p', q', r', таких, что из девяти точек их пересечения шесть лежат на некотором коническом сечении (см. рис. 5). Утверждается, что остальные три лежат на одной прямой.

Мы рассматриваем p, q, r, p', q', r' как линейные выражения, приравнивание которых нулю дает соответственно уравнения шести рассматриваемых нами прямых. Тогда комбинация

$$pqr - \mu p'q'r' = 0$$

представляет собой уравнение пучка кривых третьего порядка, каждая из которых проходит через все девять точек пересечения рассматриваемых троек прямых. По условию шесть точек из девяти лежат на коническом сечении. Кроме того, выбрав надлежащим образом константу μ, которая в принципе не подчинена никаким ограничениям, мы можем добиться того, чтобы наша кривая имела с рассматриваемым коническим сечением еще одну, седьмую, общую точку. Но кривая C_3 третьего порядка и кривая C_2 второго порядка имеют, вообще говоря, только шесть точек пересечения. Если уравнение шестой степени, определяющее эти точки, имеет более шести корней, то оно равно нулю тождественно. Следовательно, в этом случае кривая C_3 должна распасться на данное коническое сечение и прямую, которая с необходимостью должна содержать три другие точки пересечения. Таким образом, эти три точки, действительно, лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

Доказательство это, при известном навыке становящееся настолько очевидным, что его даже можно было бы несколько сократить, сразу же обнаруживает еще две чрезвычайно ценные особенности плюккеровского подхода. Одна из них заключается в "сокращенном способе обозначений", который довольствуется обозначением уравнения вместо того, чтобы явно выписывать его; другая особенность состоит в том, что Плюккер при всяком удобном случае применяет неопределенный коэффициент – "плюккеровское μ". Это μ можно то здесь, то там встретить уже в "Annales" Жергонна. (Штейнер тоже знал его, но только от Якоби, почему и назвал его "еврейским коэффициентом".) Однако только у Плюккера оно стало важным инструментом, оказавшим ему большую помощь в его искусстве "чтения уравнений".

К охарактеризованному выше общему методу Плюккера следует добавить также частные его достижения. Однородные треугольные координаты самого общего вида – о их преимуществах мы уже говорили – в "Системе" 1834 г. определяются как умноженные на произвольные наперед заданные константы расстояния от точки P до сторон фиксированного треугольника; в 5-м томе журнала Крелля (1830 г.) в качестве координат брались еще сами расстояния, из-за чего возникали ограничения, подобные тем, которые имелись у Мёбиуса. Благодаря таким координатам уравнения всех геометрических образов становятся однородными, а это – с использованием теоремы Эйлера об однородных функциях – позволяет достичь большой элегантности изложения, чем Плюккер и пользовался в самых широких масштабах. В частности, полную перестройку испытала у него теория касательных и поляр. Так, если уравнение $f = 0$ задает коническое сечение, проходящее через точку (x, y, z), то уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot z' = 0$$

изображает в зависимости от того, какие координаты (x', y', z' или же x, y, z) рассматриваются в качестве текущих, либо касательную к кривой $f = 0$ в точке (x, y, z), либо поляру фиксированной точки (x', y', z') относительно кривой $f = 0$. Чередование этих истолкований одного и того же уравнения было разработано Плюккером до виртуозности и использовалось им для получения элегантных доказательств самых разнообразных теорем.

Благодаря однородным координатам удалось также дать блестящую аналитическую реализацию и смелым концепциям Понселе – бесконечно удаленным прямым, циклическим точкам и т.п. Действительно, в результате введения координат x_1, x_2, x_3, связанных с x и y соотношениями

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

уравнение окружности

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

переходит в уравнение

$$(x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = r^2 x_3^2.$$

Поэтому пересечение бесконечно удаленной прямой $x_3 = 0$ с любой окружностью имеет уравнение $x_1^2 + x_2^2 = 0$ и, значит, является парой точек с координатами

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : +i : 0 \text{ и } x_1 : x_2 : x_3 = 1 : -i : 0;$$

но это как раз и есть так называемые циклические точки.

Не менее важным, чем введение однородных координат, является следующий, новый поворот точки зрения. Уравнение прямой

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

выглядит совершенно симметричным относительно коэффициентов u и координат x. Плюккер начинает рассматривать величины u как переменные, каждая система значений которых дает некоторую прямую, проходящую через закрепленную точку x_1, x_2, x_3. Величины u_1, u_2, u_3 он называет *линейными координатами*[1]. В них наше уравнение изображает пучок прямых, проходящих через данную точку, т.е. саму эту точку. С тем же правом, с каким линейное соотношение можно рассматривать как уравне-

[1] Теперь линейные координаты обычно называются "тангенциальными". Их аналоги в пространстве называются *плоскостными координатами*. – *Примеч. ред. пер.*

ние прямой в точечных координатах, на него можно смотреть и как на уравнение точки в линейных координатах.

Эта идея произвольного выбора "элемента пространства", который берется затем в качестве отправного пункта построения геометрии, вносит полную ясность в принцип двойственности Понселе – Жергонна: так как уравнение, описывающее взаимное расположение точки и прямой (в пространстве – точки и плоскости), симметрично относительно обоих этих элементов, то во всех утверждениях, формулируемых в терминах одних лишь сочетаний этих элементов, их можно менять друг с другом местами!

Вот те существенно новые идеи, которые Плюккер внес в хорошо уже разработанную область геометрии линейных и квадратичных образов. Оказавшись за пределами этой области, он взялся за совершенно новые объекты исследования. В то время как французские геометры по большей части ограничивались указанной областью, а Понселе при первых попытках дальнейшего продвижения натолкнулся на серьезные трудности, Плюккеру впервые удалось осуществить успешное наступление на общую *теорию плоских алгебраических кривых.*

В качестве главного достижения в этом пункте я хотел бы отметить *формулы Плюккера,* связывающие порядок кривой n (степень задающего ее уравнения в точечных координатах) с ее классом k (степенью уравнения в линейных координатах) и простыми (так называемыми необходимыми) особенностями [1]. Формулы эти можно найти в конце его "Системы" 1834-го года. Сначала Плюккер нашел соотношение

$$k = n(n-1) - 2d - 3r,$$

где d означает число двойных точек кривой, а r – число точек возврата. Это равенство уже нельзя было дуализировать немедленно, простой заменой n посредством k и наоборот. Принципу двойственности оказалось возможным удовлетворить лишь путем открытия и введения так называемых "линейных особенностей" [2]. Двойным точкам d двойственны *двойные касательные* t, точкам возврата r – соприкасающиеся, т.е. проникающие сквозь кривую *касательные перегиба* w, точки касания которых называются *точками перегиба.* Для числа точек перегиба Плюккер нашел соотношение $w = 3n(n-2)$, которое в случае наличия особых точек имеет вид

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r.$$

Вместе с двойственными формулами это дает полную систему формул

---

[1] Понселе никак не мог понять, почему от равенства $k = n(n-1)$ нельзя с использованием принципа двойственности перейти к равенству $n = k(k-1)$ ("парадокс Понселе").

[2] В русской математической литературе этот термин не утвердился. Обычно говорят о "дуальных или тангенциальных особенностях", а также об "особенностях в смысле Плюккера". – *Примеч. ред. пер.*

для особенностей кривой:

$$k = n(n-1) - 2d - 3r, \qquad n = k(k-1) - 2t - 3w,$$
$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r, \qquad r = 3k(k-2) - 6t - 8w.$$

В случае $n = 3$, $d = 0$, $r = 0$ число w равно 9. До тех пор было известно, что у общей кривой третьего порядка C_3 имеется только три точки перегиба. Следовательно, остальные шесть всегда должны быть мнимыми. Еще в XVIII столетия Маклореном было показано, что три действительные точки перегиба кривой C_3 лежат на одной прямой – "прямой перегиба". Так как с точки зрения общей геометрии положения эти действительные точки ничем не отличаются от шести остальных, то утверждение это должно быть справедливо и для любой другой тройки точек перегиба. Доказательство его можно провести с помощью сокращенных обозначений по образцу приведенного выше доказательства теоремы Паскаля. Таким образом, кривая C_3 обладает двенадцатью прямыми перегиба, простая схема взаимного расположения которых впоследствии была указана Гессе. Этот пример показывает, насколько открытие Плюккера обогатило геометрию кривых. На стр. VI "Системы" 1834-го года он говорит сам: "Необходим новый взлет интуиции, чтобы постичь то, что во всех случаях является мнимым и быть им не перестает".

Чтобы уверенно чувствовать себя в этой новой геометрии, необходима была тренировка интуиции, и это хорошо видно на примере самого Плюккера, который впал в ошибку при попытке навести порядок среди 28 двойных касательных к общей кривой четвертого порядка C_4 ("Алгебраические кривые", 1839). Подсчитав число произвольных постоянных у общей кривой C_4, он с полным правом делает вывод (тоже специфически плюккеровское заключение!), что ее уравнению может быть придан вид $\Omega^2 - \mu pqrs = 0$, где $\Omega = 0$ – уравнение некоторого конического сечения, а $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ и $s = 0$ – некоторые прямые, являющиеся двойными касательными кривой C_4. Но отсюда он ошибочно заключает, что точки касания любых четырех двойных касательных лежат на одном коническом сечении, в то время как это утверждение справедливо лишь при определенном выборе этих касательных и их точек касания. Не все прямые p, q, r, s могут быть выбраны свободно; после выбора двух из них остальные две могут быть выбраны лишь пятью различными способами. (Это позднее было обнаружено Штейнером.)

Правда, одну сторону проблемы формулы Плюккера, несмотря на их высокую плодотворность, полностью оставляют открытой: они ничего не дают для отделения действительного от мнимого. И хотя для абстрактного мышления этот вопрос десятилетиями оставался безразличным, он все-таки, представляет огромнейший интерес для любого, кто пытается изучить истинный геометрический облик исследуемой кривой, и, несомненно, тот факт, что важность этого вопроса отрицается в принципе, следует рассматривать как современное геометрическое извращение. Эта проблема поведения действительной части геометрических образов по характеру своему, в общем, весьма глубока и требует исследований, проникающих в глубь алгебраической природы уравнений. С тем большей охотой я приведу здесь одну найденную мною в 1876 г. формулу (Math. Ann., 10 = Ges. Abh., т. 2, стр. 78 и далее), которая элементарным образом выводится с помощью уже имевшихся в распоряжении у Плюккера средств и которая – по крайней мере, отчасти – дополняет его формулы в указанном отношении. Если через w' обозначить число действительных точек перегиба, через t'' – число действительных изолированных двойных касательных, а через r' и d'' соответственно – число действительных двойных точек и действительных изолированных точек возврата, то будет иметь место следующее равенство:

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''.$$

С использованием этой формулы может быть, например, решен вопрос о действительных точках перегиба у кривой C_3. В самом деле, из равенства

$$3 + w' + 0 = 6 + 0 + 0$$

получается, что $w' = 3$. Тем самым теорема о числе действительных точек перегиба кривой C_3 перестает носить изолированный характер.

То обстоятельство, что Плюккер не знал этой формулы, лежавшей на его пути, вызывает тем бóльшую досаду, что при его глубоком интересе к истинному геометрическому облику кривой она была бы ему весьма приятна.

При всем том вкладе, который Плюккер внес в построение проективной геометрии, он не был проективистом в собственном смысле этого слова. Работая в стиле старых геометров XVIII века, Плюккер придерживался конкретного, уделял большое внимание поведению кривых на бесконечности, посвящал, например, подробные исследования вопросу об асимптотах и т.д. – все это вещи, значение которых с чисто проективной точки зрения исчезающе мало. Последовательная разработка проективного мышления, а тем более – окончательное оформление теории инвариантов остались на долю более позднего поколения.

Однако, прежде, чем подробнее войти в детали этих вопросов, мы должны будем заняться реставратором синтетической геометрии в Германии – Якобом Штейнером.

Штейнер, сын швейцарского крестьянина, до девятнадцати лет пахавший землю, а затем, движимый страстной тягой к профессии педагога, посвятивший себя преподаванию по системе Песталоцци, является, насколько мне известно, единственным в нашей науке примером того, как математические способности, начав развиваться в зрелом возрасте, дошли, тем не менее, до мастерства; он является также единственным в своем роде примером крупного ученого и видного университетского педагога, вышедшего из методичной муштры народной школы.

Штейнер родился 18 марта 1796 г. в Утцендорфе близ Золотурна. Выросши крестьянином, он занялся своим образованием только в 1815 г.; позднее он стал преподавать в педагогическом институте, основанном Песталоцци в Ифертене [1]) с целью практического осуществления своих реформаторских идей в области воспитания. И хотя идеи Песталоцци были необычайно творческими и живительными, – о чем свидетельствует многостороннее их влияние, – по-видимому, ему самому недоставало умения осуществить свои идеи на деле. Его попытка в Ифертене потерпела неудачу – и прежде всего из-за трудностей финансового порядка. Штейнер, страстно желавший усовершенствоваться в науке, покинул Ифертен в 1818 г. и до 1821 г. продолжал свои занятия в Гейдельберге, главным образом, самостоятельно штудируя французских геометров. Жалкие средства на жизнь он добывал частными уроками. Однако прежняя его педагогическая деятельность помогла ему выдвинуться. В берлинских министерских кругах был жив интерес к системе Песталоцци, и Штейнер был приглашен в Берлин. Сначала он занимал различные учительские посты, но доступ в дом Вильгельма фон Гумбольдта, бывшего министра, сына которого он обучал, помог ему продвинуться дальше. В 1834 г. в качестве последнего отголоска попыток создания политехнической школы для Штейнера был учрежден пост экстраординарного профессора в берлинском университете. Скончался Штейнер 1 апреля 1863 г.

Может показаться странным, что Штейнеру в Берлине не было предоставлено место ординарного профессора. Многие считают, что причиной тому была явно недостаточная для такого рода должности светскость Штейнера. И действительно, в официальных кругах Штейнер мог бы прижиться только чудом, особенно в пожилые годы, когда этот стареющий человек, рассорившийся со всем миром и с самим господом богом, имел обыкновение подкреплять в разговоре свои аргументы нелегко переносимой, стихийной грубостью. О личности Штейнера и о том, как протекал процесс его развития, много интересного можно найти в статье его племянника К.Ф. Гейзера "Zur Erinnerung an Jacob Steiner" ("Памяти Якоба Штейнера"), Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, 1872–73, 56. Jahresversammlung, 1873, стр. 215 и далее).

По всему тому, что Гейзер рассказывает о Штейнере, и по манере, в которой проявлялась его одаренность, талант Штейнера, исходивший из сообразующегося с интуицией восприятия пространственных форм и именно поэтому с презрением отвергавший анализ, следует рассматривать как совершенно самобытный. Попытка объяснить силу его интуиции влиянием Песталоцци не выдерживает никакой критики. Это очевидно каждому, кто когда-либо держал в руках песталоцциеву "ABC der Anschauung" ("Азбуку наглядного восприятия"). Книга эта настолько бедна содержанием, что поистине может напугать читателя, и уж никак не позволяет признать в ее авторе основателя новой, нацеленной на наглядное представление педагогики. В ней во все возрастающем, доводящем до отвращения ко-

[1]) Немецкое название Ивердона (Yverdon) – швейцарского города в кантоне Во.– *Примеч. пер.*

личестве производятся одни лишь разбиения отрезков на равные части да квадратов на равные квадраты. О том, какие странные представления по поводу реализации своих планов имели эти первые педагоги, выдвинувшие, тем не менее, действительно новые, чрезвычайно плодотворные идеи, можно судить и по комментарию, который составил к труду Песталоцци крупный философ и педагог Гербарт. Гербарт для развития интуиции составляет некую таблицу, состоящую из одних лишь прямоугольных треугольников различной формы и величины, и созерцание этой таблицы должно было пробудить у его воспитанников живое представление о форме прямоугольного треугольника; для длительного и прочного запоминания он даже советует повесить эту таблицу у колыбели грудного младенца! Чтобы суметь извлечь из этих педагогических уродств зерно истины и направить искусство воспитания по более разумному пути, потребовался такой человек, как Фрёбель. Он, а вместе с ним и Гарниш, выдвинули на передний план телесный, т.е. трехмерный образ. У обоих этих педагогов дает о себе знать путь их собственного развития: оба они вышли из минералогии и кристаллографии.

Таким образом, силу своей пространственной интуиции Штейнер, конечно, почерпнул не в этом источнике; но своему пути самоучки он обязан кое-чем другим – своим педагогическим искусством. Система Песталоцци культивировала любовный, бережный подход к точке зрения учащегося и применяла для ее развития так называемый сократовский метод. Любое знание должно было быть выработано, открыто, получено самим учащимся; учитель должен руководить самостоятельно мыслящим учеником только в выборе направления. Исходя из этого принципа, который он развивал с большим умением и весьма успешно, Штейнер никогда не пользовался на своих лекциях никакими рисунками; живое соучастие слушателей в мыслительном процессе должно было создать в их представлении такую отчетливую картину, что чувственное восприятие должно было оказаться излишним. (Еще дальше впоследствии пошел Дистервег, который на семинарских занятиях по геометрии, проводимых им в Мёрсе, специально затемнял помещение!)

Работы Штейнера изданы Берлинской академией в виде двухтомного Собрания сочинений (1880–1882 гг.). Они распадаются на две четко разделяющиеся группы.

Первая из них охватывает период с 1826 г. (Журнал Крелля, т.1) по примерно 1845 г. Здесь мы находим все поистине оригинальные концепции Штейнера, правда, реализованные на относительно элементарных геометрических образах.

Второй период охватывает работы, относящиеся к высшим алгебраическим образам; часто это только сообщения о результатах, приводимые без доказательств. Увы, как с несомненностью вытекает из переписки Штейнера с Шлефли за 1848–1856 гг., изданной в 1896 г. Графом, Штейнер здесь широко пользовался английскими (и другими) источниками, притворяясь, будто он их не знает. Трагедия этого несомненно необычного человека заключалась в том, что окруженный после на редкость славного взлета почитанием и изумлением, он не вынес уготованного к старости судьбой снижения творческой продуктивности и, будучи очень ожесточен, боролся с ним сомнительными средствами, пытаясь сохранить перед собой и перед другими блеск прошедших дней. Кто захочет рассудить, сколько в этом было настоящего обмана и насколько Штейнер сам пал жертвой неправильной оценки собственной творческой силы – оценки, помраченной его горячим желанием?

Во всяком случае, в связи с вопросами, которые сейчас нас интересуют, мы здесь ограничимся рассмотрением лишь ранних работ Штейнера. Главной его работой является "Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" ("Систематическое изложение зависимости геометрических образов друг от друга"). Из пяти запланированных ее частей вышла, однако, лишь первая (Берлин, 1832).

План какого-либо проективного построения геометрии обычно основывается на идее *проективного порождения*. Отправляясь от проективности "основных образов" (на плоскости это – прямая, пучок лучей, сама плоскость; в пространстве – прямая, плоский пучок лучей, пучок плоскостей, связка лучей, связка плоскостей, само пространство), здание геометрии возводится путем последовательного порождения образов более высоких ступеней. Основные образы проективно сопрягаются друг с другом, и то, что получается в результате этих сопряжений, в дальнейшем и исследуется в качестве следующих по своей важности образов – образов более высоких ступеней.

В имеющейся первой части работы Штейнера такого рода исследование проводится только для конических сечений и однополостных гиперболоидов, порождающихся пересечением соответствующих плоскостей двух проективных пучков плоскостей. Несколько дальше идут лекции Штейнера, изданные в 1867 г. Шрётером.

Новое и важное в этой работе имеется только с точки зрения систематики; в части материала ничего существенно нового в ней нет. Но строгость, с которой реализуется намеченный однажды план, сочетающаяся с блестящей манерой изложения, берет читателя в плен своей пристрастностью и оригинальностью. У Штейнера наряду с интересом к исследованию всегда наблюдается вкус к изложению, к тому, чтобы материал был преподан надлежащим образом. Какое значение придавал своим исследованиям он сам, видно из его предисловия:

"Настоящее сочинение представляет собой попытку раскрыть механизм, посредством которого связаны друг с другом разнообразнейшие явления, происходящие в пространственном мире... В хаос вступает порядок, и мы видим, как все части этого мира сообразно своей природе прорастают друг через друга, а те, которые являются родственными, объединяются в отчетливо очерченные группы".

Средства, которыми Штейнер намеревался достичь этой цели, сегодня достаточно хорошо известны, но мы знаем также и то, что с их помощью можно охватить лишь некоторый фрагмент геометрии и что сам Штейнер, с другой стороны, полностью их не реализовал.

Штейнеров принцип последовательного порождения геометрических образов более высоких ступеней, исходя из более низких, аналитически соответствует тому, что приравниваются нулю определители некоторых вполне определенных матриц. Так, например, линейчатая поверхность второго порядка может быть проективно порождена путем приравнивания нулю определителей, получающихся из уравнений плоскостей. Это может быть осуществлено двумя способами: равенство

$$\begin{vmatrix} p, q \\ p', q' \end{vmatrix} = 0$$

дает в качестве двух семейств образующих либо прямые

$$\begin{aligned} p - \mu q &= 0, \\ p' - \mu q' &= 0, \end{aligned}$$

либо прямые

$$\begin{aligned} p - \lambda p' &= 0, \\ q - \lambda q' &= 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, дальнейшее развитие принципа Штейнера, осуществленное Рейе, Шуром и Штурмом, приводит к систематическому комбинированию миноров некоторой матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi & \psi & \chi & \cdots \\ \varphi' & \psi' & \chi' & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Приравнивание нулю этих миноров дает все новые и новые теоремы. Но как бы ни был прозрачен этот принцип, он все же не может служить фундаментом, достаточным для построения всей геометрии. Он полностью исчерпывает себя уже на проблемах третьего порядка.

Штейнер не достиг поставленной цели даже в том, что было им сделано; перечеркивая достижения Мёбиуса, Штейнер отказался от введения в синтетическую геометрию принципа знаков и тем самым лишил себя возможности общих формулировок. Так, рассматривая двойное отношение, он оказался вынужденным специально указывать порядок фигурирующих в нем элементов. Однако прежде всего ему нехватало умения обращаться с мнимыми величинами. Он никогда не мог смириться с ними и употреблял такие выражения, как "призрак" или же "царство теней геометрии". Ясно, что такое самоограничение должно было нанести ущерб и его систематике[1]). Так, например, с проективной точки зрения имеется два конических сечения

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \text{ и } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Места для второго из них в системе Штейнера не находится. От этого и от других несовершенств синтетическая геометрия была освобождена только фон Штаудтом, о чем мы еще будем подробно говорить.

Рядом с первой частью "Систематического изложения" нужно упомянуть вышедшую в 1833 г. самостоятельным изданием небольшую книжку "Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises (als Lehrgegenstand auf höheren Schulen und zur praktischen Benutzung)" ["Геометрические построения с помощью прямой и фиксированной окружности (для изучения в высших учебных заведениях и для практического использования)"]. Основная ее идея заимствована у Понселе; изложение и на этот раз чрезвычайно увлекательное. Подзаголовок свидетельствует о том (это известно и из других источников), что Штейнер хотел зарекомендовать себя на пост руководителя предполагавшегося тогда политехнического института. Характерно также, что после 1835 г., когда он получил в университете должность, которой так страстно желал, он уже не писал обобщающих трудов, хотя они и были им запланированы.

Из числа разрозненных работ раннего периода я упомяну еще одну небольшую статью, которая своим содержанием, совершенно иным по характеру, показывает, насколько все-таки широким, несмотря на всю свою односторонность, был Штейнер в чисто геометрическом отношении; кроме того, статья эта отличается исключительно ясным и блестящим изложением. Я имею в виду его работу "Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, et sur la sphère dans l'espace en général" ("О максимумах и минимумах плоских фигур и о сфере", Журнал Крелля, т.34, 1842). В ней методами элементарной геометрии решается большое число задач на максимум и на минимум. Известна, например, следующая задача: вписать в заданный треугольник фигуру с заданным периметром (бóльшим, чем длина вписанной окружности) так, чтобы площадь ее была максимальной. Искомая фигура состоит из трех дуг окружности одного и того же радиуса и трех отрезков сторон треугольника. Однако самым знаменитым является содержащееся в этой работе доказательство того, что если отбросить все несущественные условия, то плоской фигурой, которая при наименьшем периметре обладает наибольшей площадью, будет круг. Правда, блистательно, с помощью одних элементарных средств проведенное исследование этой "изопериметрической задачи", а также некоторых других ее вариантов

[1] Основным определениям Штейнера тоже присущи некоторые несовершенства, так что исключения оказались в гораздо большем числе теорем, чем он это сознавал. См. об этом B a l d u s R. Zur Steinerschen Definition der Projektivität // Math. Ann. – 1922/23. – т. 90, стр. 86 и далее.

содержит в себе логический пробел; я имею в виду недоказанность существования решения рассматриваемой задачи. Пробел этот в общем был восполнен Вейерштрассом, а в ряде частных случаев – Г.А. Шварцем.

Подводя итог рассказу о Штейнере, мы должны констатировать, что даже и он не был тем односторонним и последовательным проективистом, на появление которых было нацелено развитие всех этих лет. В основном его труде двойное отношение вводится – по примеру Понселе и Мёбиуса – на метрической основе, и во всей его геометрической системе проблема соотношения между метрической геометрией и геометрией проективной не оказывается выясненной до конца.

Как эта проблема была разрешена последующей эпохой, мы увидим, рассмотрев в следующей главе процесс развития геометрии, протекавший после 1830 г.

Глава четвертая

РАЗВИТИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОСЛЕ МЁБИУСА, ПЛЮККЕРА И ШТЕЙНЕРА

В противовес дифференциальной геометрии, под *геометрией алгебраической* я понимаю здесь, как это постепенно стало теперь общепринятым, теорию низших алгебраических образов (прежде всего, образов первого и второго порядка). Таким образом, в этой главе речь будет идти о дисциплине, основанной Монжем и Понселе и сформировавшейся под влиянием Мёбиуса, Плюккера и Штейнера, а также о дальнейшем ее развитии. При этом я откажусь от обычного разделения геометрии на аналитическую и синтетическую, которое несущественную сторону методики превращает в важнейший отличительный признак, и предпочту сконцентрировать внимание на вопросе о том, какой вклад в развитие этой дисциплины внесли руководящие идеи геометрического характера и какой – алгебраического. Не претендуя на исчерпывающую полноту изложения, мы рассмотрим:

1. Обстоятельства становления *чисто проективной геометрии*, которая, опираясь на восходящий к Понселе проективный способ мышления и используя штейнеровскую систематику основных алгебраических образов, развилась во вполне замкнутое в себе, строго систематическое построение;

2. Историю формирования параллельно развивавшейся алгебраической дисциплины – *теории инвариантов*, изучающей свойства однородных алгебраических форм первого, второго и более высоких порядков, сохраняющиеся при произвольных линейных преобразованиях переменных.

Создание чисто проективной геометрии

Мы начнем со Штаудта – немецкого геометра, которому мы обязаны важнейшими достижениями в развитии принципиальной стороны интересующих нас теперь геометрических идей.

Жизненный путь и развитие Христиана фон Штаудта во многом созвучны с жизненным путем и развитием его предшественника Мёбиуса, на которого он похож также по характеру одаренности и по темпераменту.

Штаудт родился в 1798 г. в Ротенбурге на Таубере в давно осевшей здесь патрицианской франконской семье. Как и Мёбиус, он в течение некоторого времени был учеником Гаусса, который и его ориентировал в сторону астрономических и теоретико-числовых проблем, не принимая во внимание его геометрических наклонностей, полностью прорвавшихся наружу, лишь когда Штаудт был уже в зрелом возрасте. В 1822–1825 гг. Штаудт преподавал в Вюрцбурге – в университете и одновременно в гимназии. Подобного рода положение он в 1825 –1835 гг. занимал и в Нюрнберге, где преподавал в гимназии и в политехническом училище (в техникуме, как сказали бы мы сегодня). В 1835 г. он стал профессором в Эрлангене, где и оставался до самой своей смерти, последовавшей в 1868 г. (см. посвященную его памяти речь Нётера, произнесенную в 1906 г. по случаю празднования столетия со дня присоединения Эрлангена к Баварии). В тиши и простоте тогдашней эрлангенской жизни, не соприкасавшейся с жизнью больших городов, Штаудт нашел покой и уединение, необходимые для того, чтобы спокойно развивать свои идеи. В глубочайшей оторванности от всех, ведя размеренный и регулярный образ жизни – что отразилось даже на внешнем его облике[1]) – Штаудт завершил здесь свои основополагающие труды – зрелые плоды его долгой и наполненной размышлениями жизни:

"Geometrie der Lage" ("Геометрия положения"), вышедшая в 1847 г. в Нюрнберге;

"Beiträge zur Geometrie der Lage" ("К вопросу о геометрии положения") – работа, вышедшая тремя выпусками (Нюрнберг, 1856, 1857 и 1860 гг.).

Книги эти содержат исключительное богатство мыслей, изложенных без пробелов, в застывшей до безжизненности форме, вполне соответствующей основательной и систематической натуре Штаудта, а также его возрасту – когда он закончил вторую из книг, ему шел уже шестьдесят третий год.

Лично для меня штаудтовская манера изложения всегда была абсолютно недоступной. И если, несмотря на это, я находился под большим влиянием его идей и немало поработал над их развитием, то я обязан этим исключительно моему, ныне уже покойному, товарищу по учебе – уроженцу Тироля Штольцу (родился в Галле вблизи Инсбрука), с которым я провел много времени в 1869/70 г. в Берлине и летом 1871 г. в Гёттингене (лето 1871 г. мы прожили вместе). Штольц много читал родственного ему по духу Штаудта, и его подробными рассказами я был введен в этот мир, живейшим образом интересовавший и воодушевлявший меня.

Как бы то ни было, в рамках этих лекций я смогу лишь в очень вольной форме изложить те важные достижения, которыми мы обязаны Штаудту. Я затрону также вопрос о том, как они были дополнены в дальнейшем. К

---

[1]) Когда я в 1872 г. занял его кафедру, которую до меня занимали Ганкель (1868–1869 гг.) и Ганс Пфафф (1869–1872 гг.), мне все еще рассказывали, что у него было лицо, похожее на цифру.

сожалению, здесь, как и во многих других местах, я буду вынужден ограничиться лишь несколькими избранными вопросами.

Чрезвычайно важен следующий момент. Как я уже отмечал в конце предыдущей главы, весь процесс развития последних десятилетий подталкивал нашу науку к такому построению проективной геометрии, которое не зависело бы от метрических соображений. Проективная геометрия Понселе и Штейнера содержала в себе роковую непоследовательность, так как в ней в качестве основной цели провозглашалось устранение метрической геометрии с переднего плана или даже – что вскоре и удалось осуществить – превращение метрической геометрии в особый раздел проективной геометрии, в то время как важнейшее понятие проективной геометрии, двойное отношение, а вместе с ним и общая проективная система координат, покоились на определении, существенно использующем метрику. Как говорит уже само его название, "двойное отношение"

$$DV = \frac{(\xi - \xi')}{(\xi - \xi''')} \cdot \frac{(\xi'' - \xi''')}{(\xi'' - \xi')} = x$$

являлось отношением отрезков или расстояний в обычном смысле этого слова. Сделать же это отношение "общей проективной координатой" x, отнесенной к трем основным точкам

$\xi = \xi'$ или $x = 0$,
$\xi = \xi''$ или $x = 1$,
$\xi = \xi'''$ или $x = \infty$,

установить при помощи некоторой опирающейся на нее конструкции проективную шкалу на прямой и в соответствии с этим ввести треугольные координаты на плоскости и тетраэдральные в пространстве – все это, раз уж мы желаем освободиться от основывающейся на понятии расстояния метрической геометрии, представляет собой явную и очевидную непоследовательность.

Радикальную перемену во всем этом произвел Штаудт, который понял, что независимое от метрики определение общей проективной координаты не только необходимо, но и возможно. Чтобы устранить даже воспоминания о прежней непоследовательности, он отказался от термина "двойное отношение" и введенную им в рассмотрение и выдержанную в духе геометрии положения конфигурацию назвал *вурфом*. Вурф, образуемый текущей точкой P и тремя произвольно выбранными точками 0, 1 и ∞, имеет в системе Штаудта числовое значение, которое и берется в качестве координаты точки P.

Определение этого значения, уложенное в рамки чистой проективной геометрии, имитирует конструкцию сети Мёбиуса. В современных терминах штаудтовская формулировка 1847-го года утверждает, что числовая шкала вурфов точек данной прямой после фиксации трех основных точек может быть построена чисто проективным образом путем одного лишь проведения прямых через данные точки и построения точек пересечения данных прямых. Эта конструкция как раз и представляет собой сеть Мёбиуса. В рамках обычной метрической геометрии, где мы имеем право проводить параллельные линии, это построение выглядит следующим образом (рис. 6): через точки *0* и *1* проводится по одному произвольно взятому лучу; через точку *M* пересечения этих прямых проводится прямая, параллельная прямой *01*; через точку *1* проводится прямая *1N*, параллельная прямой *0M*; тогда прямая, проведенная через *N* параллельно прямой *1M*, пересечет

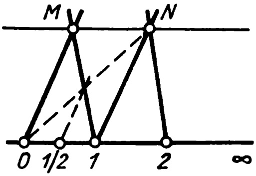


Рис. 6

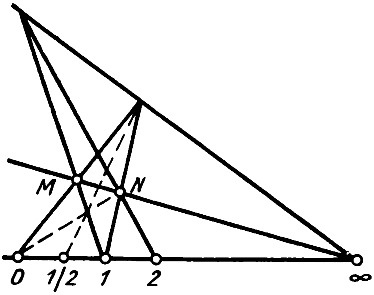


Рис. 7

прямую *01* в точке 2. Достаточно вспомнить теорему о равенстве противоположных сторон параллелограмма, чтобы понять, что таким образом может быть получена вся обычная метрическая шкала. Проводя диагонали и производя соответствующие подразбиения, можно получить все двоичные точки, а затем и все рациональные значения нашей шкалы. Теперь достаточно посмотреть на этот рисунок с проективной точки зрения, перенеся бесконечно удаленную прямую в конечную область, и общий случай введения проективных координат на основе трех произвольно выбранных основных точек можно будет считать рассмотренным (рис. 7).

Разумеется, для того, чтобы это построение могло лечь в основу определения проективных координат, надо доказать однозначность конструкции, т.е. доказать, что конструкция эта после выбора трех основных точек всегда приводит к одной и той же шкале, независимо от того, какие вспомогательные прямые мы станем проводить. К сожалению, у меня не хватает времени изложить это доказательство, представляющее собой истинное достижение Штаудта, потому что мы должны еще хотя бы вкратце заняться переносом его идей на числовую систему анализа.

Здесь надо с самого начала покончить с одним недоразумением. Из-за легкости и изяшества, с которыми проективная геометрия, отправляюшаяся от немногих исходных понятий, быстро приводит к содержательным утверждениям, ее приверженцы часто ее переоценивают. Распространено мнение, что, идя по этому пути, можно избегнуть тяжелых исследований аксиоматического толка, извечно связанных с евклидовой геометрией. Так, Ганкель в своей ораторски блестящей, но не вполне аргументированной вступительной речи, произнесенной в Тюбингене в 1869 г., утверждал, что новейшая геометрия и есть тот "царский путь" в нашей науке, в котором Евклид несправедливо отказал царю Птолемею[1]).

Евклид, однако, был прав – в математике "царского пути" действительно не существует. И если пытаться проникнуть в нее со стороны проективной геометрии, то и в этом случае возникнут те же самые трудности, с которыми мы уже знакомы по евклидовой геометрии и которые могут быть преодолены лишь тонкими, логическими по своей природе исследованиями.

Так, например, после того, как выполнено штаудтовское построение, дающее нам все рациональные значения координаты x, встает вопрос об иррациональных значениях и о том, каков их смысл в геометрии. И подобно тому, как это делается в обычной геометрии, мост через эту пропасть здесь тоже может быть переброшен с помощью некоторой аксиомы, которую можно сформулировать примерно следующим образом: каждому значению нашей числовой области, пополненной для непрерывности дедекиндовыми сечениями, должна отвечать некоторая точка на прямой, и обратно.

С введением в проективную геометрию этой *аксиомы непрерывности* и в особенности с представлением о том, что иррациональные значения могут быть сколь угодно точно приближены путем последовательного построения в сети Мёбиуса соответствующих рациональных значений, странным образом связывались всякого рода заблуждения. Некоторые логики полагали, что в проективной геометрии вообще нельзя говорить о предельном переходе, поскольку в ней не имеет смысла не только понятие актуально или потенциально бесконечно малой величины, но даже понятие большого или малого расстояния. К сожалению, я не могу остановиться на этих трудностях более подробно. Отмечу лишь два обстоятельства, из которых, как мне кажется, проистекают все недоразумения. Первое – это перекос во взгляде на число, сопоставляемое отрезку в качестве его "меры". Метрическая геометрия могла способствовать укоренению наивного представления о том, что в данном случае речь идет о количестве каких-то предметов, например, о числе единичных отрезков, содержащихся в данном, и, значит, о некотором "кардинальном числе". Но уже в метрической геометрии в том случае, когда дело доходит до иррациональных чисел, подобный взгляд на вещи оказывается несостоятельным, а в проективной геометрии он и вовсе не годится. Числовое значение координаты здесь всего навсего носит характер порядкового числа. Но только это одно – однозначное упорядочение значений координаты – и необходимо для осуществления предельного перехода. И из этого, как мне кажется, проистекает второе недоразумение. По-видимому, в головах у многих процесс предельного перехода – вследствие того, что исторически он возник из наглядно-геометрических представлений, – связан с представлениями, не имеющими ничего об-

[1]) H a n k e l. H. Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten: Vortrag, Tübingen, 1869.

щего с его подлинной сутью. Вместо единственно необходимых здесь понятий "уменьшения", "приближения" и т.п. появляются представления о "малом", "близком" и т.п., которые ни в каком предельном переходе никакой роли не играют.

Если преодолеть трудности введения иррациональных чисел, то аналитическое построение проективной геометрии можно будет осуществить с той же степенью строгости, что и построение метрической, и с той же широтой, включающей, в частности, теорию произвольных трансцендентных кривых. Само собой разумеется, что при этом должны применяться однородные координаты $x_1 : x_2 : x_3$ (на плоскости) и плюккеровский способ трактовки уравнений.

На этом я оставлю проблемы обоснования проективной геометрии и перейду ко второму крупному достижению Штаудта – *истолкованию мнимого в проективной геометрии* ("Beiträge", 1857).

По поводу вопроса о статусе мнимого в геометрии можно, конечно, стать на ту точку зрения, что как только мы налаживаем надежный контакт между геометрией и анализом, потребность в геометрическом истолковании мнимого исчезает, что логически безупречного аналитического представления о мнимом хватит на все случаи жизни. И хотя такой, в логическом отношении неуязвимой точки зрения придерживаются многие, ни один истинный геометр ею, конечно, не удовлетворится. Ведь тот факт, что он в состоянии в и д е т ь мыслимое, придает в его глазах науке, которой он занимается, особенную ценность и прелесть. Поэтому несмотря ни на что будут продолжать существовать попытки создания чисто действительных геометрических образов мнимых элементов, чтобы таким путем освободить их от какого бы то ни было налета мистики.

Еще до Штаудта была известна идея изображать пару комплексно сопряженных мнимых точек действительной инволюцией второго рода (т.е. совокупностью всех пар точек, гармонических по отношению к данным двум), которую эти точки индуцируют на соединяющей их действительной прямой. Если задать две разделяющие друг друга пары точек a, a' и b, b' (рис. 8),

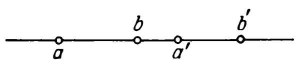


Рис. 8

то инволюция – а вместе с ней и изображаемая ею пара мнимых точек – будет однозначно определена. В точности таким же способом два комплексно сопряженных мнимых луча мы можем изобразить инволюцией второго рода в действительном пучке лучей. Так как понятие инволюции является проективным, то мы и в самом деле получаем вещественную проективную интерпретацию пары комплексно сопряженных мнимых элементов.

Конечно, это представление приводит к цели лишь в применении к п а р е элементов; хочется также уметь зримым образом (в области действительного) отделить оба элемента пары друг от друга. Гениальная идея Штаудта состоит в том, чтобы приписать прямой, являющейся носителем инволюции, определенную "ориентацию", указанную на чертеже стрелкой. Если вообразить себе — на мгновение воспользовавшись геометрическим представлением совсем иного рода — нашу прямую дополненной до гауссовой плоскости, то фундаментальные точки нашей инволюции будут задаваться на ней двумя комплексными точками, симметрично расположенными по отношению к действительной оси. Чтобы отличить обе гауссовы полуплоскости друг от друга метками, имеющими вещественный смысл и связанными с нашей прямой, мы снабдим прямую стрелкой и условимся считать, что прямая со стрелкой изображает ту полуплоскость, которая при движении по стрелке обходится в направлении, обратном движению часовой стрелки (рис. 9). Аналогичное соглашение может быть заключено и для пучка лучей.

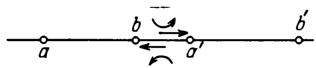


Рис. 9

Тем самым мы, действительно, разделяем комплексно сопряженные пары, и каждый отдельно взятый мнимый элемент становится вполне осязаемым действительным образом, над которым могут производиться любые геометрические построения. Таким образом, по Штаудту, мнимая точка есть не что иное, как инволюция второго рода на прямой с заданной ориентацией; мнимая прямая есть инволюция второго рода в пучке прямых с указанной в нем ориентацией. Задача провести прямую через действительную точку P и мнимую точку Q превращается в задачу по точке P и по инволюции Q построить пучок прямых вместе с инволюцией и с ориентацией так, чтобы он давал мнимую прямую PQ.

Пользуясь такой интерпретацией, мы теперь можем внести в сеть координат, построенных нами на плоскости (и, соответственно, на прямой), также и комплексные числа, обычным образом добавляя к их действительным частям мнимые. Если $u+iv$ и $u-iv$ (где $v>0$) — пара комплексно сопряженных точек, то

$$(x-(u+iv))\cdot(x-(u-iv))=(x-u)^2+v^2=0$$

является уравнением этой пары, а

$$(x-u)\cdot(x'-u)+v^2=0$$

— уравнением инволюции, определяемой этой парой. Если при помощи подстановок

$$x=\frac{\xi}{\tau} \qquad \text{и} \qquad x'=\frac{\xi'}{\tau'}$$

перейти к однородным координатам, то уравнение рассматриваемой инволюции примет вид

$$(\xi - u\tau)\cdot(\xi' - u\tau') + v^2\tau\tau' = 0.$$

Отсюда уже нетрудно найти две пары точек этой инволюции. Например, эти точки можно задать формулами

$$\tau' = 0, \qquad \frac{\xi}{\tau} = u,$$

$$\frac{\xi'}{\tau'} = 1 + u, \qquad \frac{\xi}{\tau} = u - v^2.$$

Это означает, что две пары соответствующих точек (рис. 10) имеют координаты

$$x = u, \qquad x' = \infty,$$

$$x = u - v^2, \qquad x' = u + 1,$$

значения которых могут быть отложены на действительной оси. Таким образом, чтобы, оставаясь в области действительного, чисто проективно построить точку $u + iv$, нужно найти точки $u - v^2$, u, $u + 1$, ∞, взять их в качестве двух разделяющих друг друга пар точек некоторой инволюции и считать, что они пробегаются в направлении $0, 1, \infty$. Тем самым наша задача будет решена [1]).

Как применяется этот метод, я могу показать на примере, которым мы уже занимались, когда шла речь о Плюккере. Я имею в виду теорему о том, что всякая плоская кривая третьего порядка C_3 имеет девять точек перегиба, из которых три всегда являются действительными, шесть – мнимыми и которые по три лежат на одной прямой – а значит, всегда, на двенадцати, составляющих некую конфигурацию. Естественно возникающая в связи с этим задача состоит в том, чтобы с помощью методики Штаудта дать наглядное изображение этим девяти точкам и образуемой ими конфигурации.

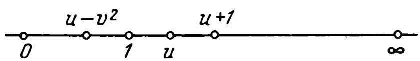


Рис. 10

Чтобы несколько облегчить разбор ситуации, я произведу одну – в принципиальном отношении несущественную – модификацию нашей задачи: а именно, перейду к двойственной задаче и вместо кривой третьего поряд-

---

[1]) В связи с этим см. также Klein F. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. – Bd. 2. – 3. Aufl. – Berlin, 1925 стр. 133 и далее. (Русский перевод: Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. – Т. 2. – М.: Наука, 1987, с. 191 и далее.)

ка C_3 рассмотрю кривую третьего класса C^3. Согласно сформулированной выше теореме, эта кривая обладает девятью касательными в точках возврата, которые по три пересекаются в одной точке. Задача теперь сводится к тому чтобы изобразить эти девять касательных и двенадцать точек, в которых они пересекаются по три.

Из формул Плюккера следует, что рассматриваемая кривая третьего класса является кривой шестого порядка C_6. При надлежащем выборе координат она будет иметь вид, изображенный на рис. 11. В первую очередь

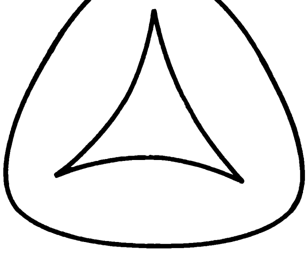


Рис. 11

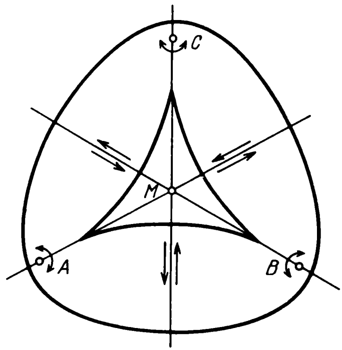


Рис. 12

мы должны охарактеризовать действительные точки, через которые проходят мнимые касательные. Оказывается, что это в точности те точки, через которые к кривой C_6 можно провести только одну действительную касательную. Они заполняют некоторую кольцеобразную область – и даже дважды, так как через каждую точку этой области проходят две мнимые касательные. (Можно считать, что рис. 11 изображает фронтальный вид некоторой кольцеобразной поверхности. Эта поверхность представляет собой пример "римановой поверхности нового типа", введенной мною в статье из седьмого тома Math. Annalen. Каждая точка этой поверхности является центром пучка прямых с инволюцией. Ориентацию этого пучка можно выбрать в зависимости от того, на передней или задней части поверхности находится точка [1]).)

Теперь уже нетрудно построить девять касательных. Кроме трех действительных это три – при симметричном изображении прямоугольные – инволюции в пучках прямых (каждая из них с двумя ориентациями) с центрами в трех точках указанной кольцеобразной области. По теореме о двенадцати точках каждая из этих точек должна лежать на одной из действительных касательных. Двенадцать точек пересечения касательных изображаются на чертеже (рис. 12):

---

[1]) Klein F. Ges. Abh., т. 2, стр. 89 и далее; см. также стр. 69.

точка *1* – центр M нашей фигуры – точка пересечения трех действительных касательных;

точки *2 – 4* – обозначенные буквами A, B, C три точки с двойными стрелками; в этих точках одна действительная касательная пересекается с двумя комплексно сопряженными;

точки *5 – 10* представлены инволюциями на прямых AM, BM и CM, на каждой из которых возможны обе ориентации. В этих точках одна действительная касательная пересекается с двумя мнимыми, но не комплексно сопряженными касательными. Так, например, инволюция на прямой CM с ориентацией $\overrightarrow{CM}$ изображает точку пересечения касательной CM с касательными $A \curvearrowright$ и $B \curvearrowright$;

точки *11* и *12* – это циклические точки, т.е. инволюция на бесконечно удаленной прямой с двумя ориентациями. В этих точках пересекаются три мнимые касательные, проходящие через точки A, B и C, – а именно: A ⤴, B ⤴ и C ⤴ в одной циклической точке и $A \curvearrowright$, $B \curvearrowright$ и $C \curvearrowright$ в другой.

По части наглядности и обозримости это почти тривиальное решение не оставляет, пожалуй, желать ничего лучшего.

На этом я закончу рассмотрение достижений, которыми проективная геометрия обязана Штаудту, и перейду к описанию ее развития во Франции и Англии, которое шло в это время независимо от Германии. Из великого множества выдающихся достижений я снова остановлюсь лишь на том, что оказалось важным для уяснения взаимосвязей между проективной и метрической геометриями.

Начиная свой рассказ с Франции, я обращусь к Мишелю Шалю как типичному представителю французской математики того времени. Родившись в 1793 г. (в Эперноне близ Парижа), он, собственно говоря, принадлежит к более раннему поколению; но вследствие не вполне обычно сложившихся жизненных обстоятельств период научной продуктивности наступил у него сравнительно поздно. После того как, будучи еще учащимся Политехнической школы, Шаль в 1813 г. напечатал в ее "Журнале" интересную работу о проективном порождении однополостного гиперболоида, он в дальнейшем совершенно отстранился от научной жизни и посвятил себя банковской карьере в своей родной провинции Шартр. Занимаясь этой деятельностью в течение многих лет, он нажил себе большое состояние. Лишь в 1837 г., т.е. в возрасте 44 лет, он выступил с первым своим большим трудом "Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes de la géométrie" ("Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов")[1].

В 1841 г. он стал профессором машиноведения в Политехнической школе, и с этого времени в его общественной и научной жизни начинается постепенный подъем. В 1846 г. в Сорбонне для него как для представителя

[1] Имеется русский перевод: М., 1883. – *Примеч. пер.*

géométrie supérieure была создана специальная кафедра. В качестве главы этой кафедры он постепенно стал руководителем и душой французской геометрии, развитию которой способствовал своими многочисленными публикациями, а также своей широко развернувшейся педагогической деятельностью, приведшей к образованию научной школы. Росту его влияния способствовала также долгая его жизнь. Шаль умер в 1880 г. в возрасте 87 лет.

В работах Шаля позднего периода рассматриваются алгебраические образы высших порядков. Здесь, в частности, Шаль становится создателем направления, называемого теперь "вычислительной геометрией". Эта последняя занимается определением числа решений у некоторых алгебраических задач с помощью геометрических рассмотрений, предполагающих, однако, что основные алгебраические понятия заданы, – метод, который я более подробно рассмотрю в дальнейшем. В настоящий же момент нас будет интересовать то новое, что Шаль внес в теорию образов первого и второго порядков, и прежде всего – его трактовка синтетической проективной геометрии и включения в нее метрической геометрии.

В этом отношении для Шаля очень характерен его "Traité de géométrie supérieure" ("Трактат по высшей геометрии", 1852 г.). Всякий читавший Мёбиуса и Штейнера найдет в нем много знакомого; в то же самое время Шаль совершенно проходит мимо Штаудта.

С Мёбиусом Шаля роднит принятие и строгое проведение в жизнь принципа знаков, подчеркивание фундаментальной роли двойного отношения, исследование в самом общем виде коллинеаций и отношения двойственности. Со Штейнером у него общий интерес к проективному порождению конических сечений при помощи находящихся в проективном соответствии пучков прямых или рядов точек. Вероятно, Шаль сравнительно рано владел этими идеями, но высказал он их во всяком случае лишь тогда, когда они уже давно оформились в Германии; в этом отношении заслуга Шаля заключается только в том, что он способствовал переносу этих идей во Францию, а также – благодаря широкому влиянию французского образования – в Англию, Италию, Скандинавию и т.д.

В своих работах Шаль пользуется терминологией, сильно отличающейся от немецкой. С ней следует познакомиться, так как она получила широкое распространение. Отчасти она основывается на передаче латинских терминов с помощью греческого языка. Так, двойное отношение называется у него "rapport anharmonique" (ангармоническим отношеним), что, будучи образовано от слова ana-harmonique, должно обозначать отношение, "превосходящее гармоническое", – термин, выбранный, на мой взгляд, совершенно неудачно. "Коллинеацию" Шаль заменяет равнозначащим греческим словом "гомография". Вместо "двойственного преобразования" он говорит о "корреляции", так что термин этот имеет у него совсем иной смысл, чем у Карно-старшего. Терминология Понселе в руках Шаля тоже предстает в сильно измененном и, как мне кажется, не улучшенном виде. Если Понселе пытался проникнуть в смысл мнимых элементов с помощью своего мистического принципа непрерывности (principe de continuité), то Шаль уже говорит о фактах, имеющих смысл только в действительном случае, как о случайных свойствах ("qualités contingentes"), причем, конечно, он не указывает абсолютно никаких критериев, которые в каждом отдельном случае говорили бы, что́ является существенным, а что́ "случайным". Так, например, две окружности всегда имеют действительную радикальную ось; при известных обстоятельствах они могут иметь две действительные точки пересечения (точки эти "случайны"). Но как Шалю с помощью его понятия "случайного свойства" выразить тот факт, что из девяти точек перегиба общей кривой третьего порядка C_3 три являются действительными, а шесть мнимыми?

Однако у Шаля, особенно в его "Aperçu historique", появляется одна совершенно новая нота: это чувство того, что развитие науки носит исторический характер. Многие из предшественников новой геометрии были открыты Шалем, и он возвратил их на место, которого они заслуживали. В первую очередь это относится к Дезаргу, период особой продуктивности которого падает примерно на 1630 г. Его имя еще и теперь широко известно благодаря теореме Дезарга. Особенно велики заслуги Шаля в изучении вопроса о трех потерянных книгах Евклида – так называемых "Поризмах". Шаль высказал предположение, что книги эти могли быть посвящены изучению простейших проективных отношений – догадка, которая была подтверждена позднейшими исследованиями.

Научное исследование истории математики, которому Шаль сообщил новый импульс, дало нам много ценного, показав необходимость видеть глубокие связи между отдельными явлениями и чувствовать характер поступательного развития человеческого познания, всегда складывающегося из прогресса и регресса. Конечно, осознание того, что каждая новая идея, казалось бы целиком созданная современным творцом, в готовом виде таилась в глубине времен (мудрость, грубовато выраженная пословицей "ничто под луной не ново"), может не прийтись по душе иному очень уж плодовитому автору; ведь она в равной мере ограничивает как его собственную самооценку, так и оценку со стороны его окружения. Этим и объясняется та враждебность, которую Шаль своими устремлениями вызвал у ряда лиц; ведь утверждал же Понселе, этот ожесточенный противник Шаля по многим вопросам, что "Aperçu historique" был написан со специальной и единственной целью принизить его, Понселе, достижения.

С другой стороны, Шаль сам оказался жертвой событий, мало подходящих для того, чтобы поднять авторитет его усилий по части истории. Он не избежал опасности, кроющейся в исследовании истории любой узко-специальной области человеческой культуры: энтузиазм и радость открытия в конце концов вызывают спортивный интерес к разысканию возможно большего числа утерянных деталей, и этот интерес постепенно начинает влечь за собой потерю ощущения важности и достоверности найденного. Критический отбор вытесняется коллекционерским стремлением к полноте. Шалю выпало несчастье отчетливо продемонстрировать всему миру вредоносность такого развития событий – обстоятельство, которое я не хотел бы оставить неупомянутым, так как оно во многих отношениях представляет всеобщий интерес.

В 1861 г. Шаль приобрел большое собрание автографов, из которого он в 1867–1869 гг. публиковал вещи, будоражившие умы. Шаль начал с публикации писем юного Паскаля, относящихся примерно к 1650 г., в которых тот якобы предвосхитил в общих чертах ньютоновскую теорию тяготения в том виде, как она появилась на свет в 1687 г. Постепенно стали следовать публикации все более фантастических документов – например, письма Марии Магдалины апостолу Петру, написанного якобы из Марселя, частного письма Вара к Цезарю и т.д.

Публикации Шаля немедленно вызвали горячие возражения – в особенности со стороны астронома Леверье. Академия в течение двух лет самым бурным образом занималась этим – о чем свидетельствуют хотя бы заполненные публикациями на эту тему "Comptes Rendus" с 1867 по 1869 гг., – пока Шаль в конце концов не был вынужден признать, что сделался жертвой грандиозной подделки.

Вся эта история, вызвавшая в свое время неслыханную сенсацию, была, ввиду ее большого психологического интереса, опубликована в так называемом "Новом Питавале" (сборник редких юридических казусов), где можно найти все относящиеся к этому делу подробности [1)]. По-человечески нельзя не заинтересоваться и личностью фальсификатора, который в конце концов был пойман с поличным. Несомненно, ему были присущи не только огромная ловкость и значительные познания, но и большое чувство юмора, которое давало ему возможность живейшим образом втайне наслаждаться ситуацией, когда он водил за нос самых что ни на есть выдающихся академиков.

Эти критические замечания не уменьшают положительного вклада, который Шалем, а вместе с ним и всей французской школой, был внесен в вопрос о соотношении между проективной и метрической геометриями введением в качестве реальных образов сферической окружности на бесконечно удаленной плоскости и циклических точек на бесконечно удаленной прямой.

Рассказу о нем я предпошлю несколько разъяснений, которые я сделаю в аналитическом виде, как они впервые были даны Плюккером в журнале Крелля (т. 5, 1830 г.).

Введем однородные координаты, заменив x, y и z на $\frac{\xi}{\tau}$, $\frac{\eta}{\tau}$ и $\frac{\zeta}{\tau}$.

[1)] Питаваль (Pitaval), Франсуа Гейо (1673–1743) – французский юрист и писатель. Известен своим сборником юридических казусов "Causes célèbres et intéressantes" (в 20 томах; 1-й том в 1734 г.). В дальнейшем этот труд был продолжен де Лавилем (1766/70 гг.; 4 тома) и Рише (1772/88 гг.; 22 тома). Имя Питаваля используется в качестве нарицательного для разного рода сборников уголовных дел. – *Примеч. пер.*

Тогда сферическая окружность будет задаваться уравнениями

$$\tau = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0.$$

Я хотел бы уже здесь обратить внимание на нелепость разговоров о "бесконечной удаленности" сферической окружности. Расстояние любой точки от начала координат всегда дается выражением

$$r = \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\tau^2}}.$$

В случае сферической окружности выражение это равно $\frac{0}{0}$ и, следовательно, не определено. Это означает, что точкам сферической окружности можно с равным правом приписывать любое расстояние от начала координат; только так и можно понимать утверждение о том, что они принадлежат любому шару с произвольным фиксированным радиусом r.

Одной из особенно часто использовавшихся французскими математиками и совершенствовавшихся ими теорем является теорема о взаимно ортогональных направлениях. Ортогональность двух направлений, будучи выражена равенством

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0,$$

получающимся поляризацией равенства

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,$$

с проективной точки зрения представляет собой не что иное, как их гармоничность относительно сферической окружности. Если здесь оперировать, как это делали французы, с прямыми, пересекающими сферическую окружность, то, казалось бы, возникнут противоречия. В самом деле, пусть для простоты такая прямая проходит через начало координат. Тогда для ее точек выполняется равенство

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,$$

откуда получается, что она как бы перпендикулярна самой себе. Кроме того, длина ее оказывается равной нулю!

Из-за этих парадоксальных свойств рассматриваемых прямых Ли в начале своей деятельности (1869 – 1870 гг.) называл их не иначе как "сумасшедшими прямыми". Позднее в своих публикациях он называл их более благородным именем *минимальных прямых*. Во Франции за ними закрепилось идущее от Рибокура название *изотропных прямых* (droites isotropes); оно основывается на том, что при любом вращении вокруг начала координат две из этих прямых – а именно, прямые, соединяющие начало координат с циклическими точками плоскости, перпендикулярной к оси вращения, – остаются неподвижными.

Все эти ошарашивающие факты, касающиеся минимальных прямых, опять таки объясняются неопределенными значениями. Действительно, угол между двумя прямыми, проходящими через начало координат, с направлениями $\xi : \eta : \zeta$ и $\xi' : \eta' : \zeta'$ равен

$$\arccos \frac{\xi \cdot \xi' + \eta \cdot \eta' + \zeta \cdot \zeta'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \cdot \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}}.$$

Если совместить эти прямые, полагая тем самым

$$\xi' : \eta' : \zeta' = \xi : \eta : \zeta,$$

и принять во внимание, что речь идет о прямых, пересекающих сферическую окружность, т.е. что

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,$$

то рассматриваемый угол будет равен $\arccos \frac{0}{0}$. Таким образом, угол этот будет опять-таки неопределенным, и, значит, ему на полном основании можно приписать значение 90°, – что соответствует обращению числителя в нуль, – равно как и любое другое значение. Что же касается длины этих прямых [1]), то она действительно равна

$$r = \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\tau^2}} = 0$$

за исключением случая, когда $\tau = 0$. Иначе говоря, прямая эта пересекается с бесконечно удаленной плоскостью на неопределенном расстоянии, как и должно быть, поскольку пересечение происходит в точке сферической окружности.

Эти обстоятельства использовались французскими математиками для чрезвычайно своеобразных умозаключений, с помощью которых они с большой легкостью, – "по воздуху", как имел обыкновение говорить Ли, – получали важные геометрические результаты. Исследовать принципы такого мышления я особенно рекомендовал бы философам, которые зачастую ограничиваются рассмотрением одних лишь математических тривиальностей.

В качестве типичного примера этого способа рассуждать я хочу привести результат Шаля (в "Aperçu historique", примечание 31, 2-е изд., стр. 384 и далее) о том, что конфокальные поверхности второго порядка суть поверхности, вписанные вместе со сферической поверхностью в одну и ту же

---

[1]) Речь идет о длине отрезка *OM* минимальной (изотропной) прямой, где *M* – ее точка с координатами $\xi : \eta : \zeta : \tau$. – *Примеч. ред. русского перевода.*

мнимую развертывающуюся поверхность, единственными действительными частями которой являются две двойные кривые, состоящие из фокальных кривых семейства.

Уравнение семейства конфокальных поверхностей F_2 в однородных координатах имеет вид

$$\frac{\xi^2}{a^2 - \lambda} + \frac{\eta^2}{b^2 - \lambda} + \frac{\zeta^2}{c^2 - \lambda} = \tau^2.$$

В однородных тангенциальных координатах оно запишется в виде

$$(a^2 - \lambda)u^2 + (b^2 - \lambda)v^2 + (c^2 - \lambda)w^2 = \omega^2,$$

т.е. в виде

$$(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - \omega^2) - \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Так как $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ есть уравнение сферической окружности в тангенциальных координатах, то, стало быть, это семейство поверхностей второго класса содержит (при $\lambda = \infty$) и сферическую окружность. Общей для всех этих поверхностей является развертывающаяся поверхность с уравнениями

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - \omega^2 = 0,$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Отсюда Шаль весьма просто получает теорему, что конфокальные поверхности F_2 не только ортогональны в обычном смысле, но что и кажущиеся их контуры, рассматриваемые из произвольной точки, тоже пересекаются под прямым углом.

Действительно, рассмотрим прямую, соединяющую наш глаз с точкой пересечения обоих контуров. Эта прямая касается двух поверхностей F и F' нашего семейства, и через нее проходит по паре касательных плоскостей к каждой поверхности семейства. Эти пары определяют инволюцию, двойными плоскостями которой являются касательные плоскости T и T' поверхностей F и F' в точках касания нашей прямой с этими поверхностями. Следовательно, две плоскости, касательные к какой-нибудь поверхности семейства и проходящие через нашу прямую, будут гармонически расположены по отношению к плоскостям T и T' (будут гармонически их разделять). Но в число поверхностей семейства входит также и сферическая окружность. Поэтому касательные к ней плоскости, проходящие через нашу прямую, будут гармонически расположены относительно T и T'.

Следовательно, плоскости T и T' гармонически разделяют плоскости, касающиеся сферической окружности, и потому эти плоскости ортогональны. Это и означает, что контуры наших поверхностей мы видим пересекающимися под прямым углом.

Такого рода способ рассуждений был широко распространен среди геометров группы Шаля. Конечно, в высшей степени удивляет, как много материала здесь втиснуто в немногие общие понятия, позволяющие после их полного постижения и освоения почти автоматически получать огромное количество все новых и новых следствий с богатым и сложным содержанием. Поначалу Шаль применял такие рассуждения еще с некоторой робостью, большей частью облекая их в абстрактную форму, и лишь впоследствии он стал пользоваться ими с той свободой и мастерством, добиться которых делом своей чести считает теперь и более молодое поколение. Когда в 1870 г. я вместе с Ли был в Париже, эта математическая деятельность достигла там своего расцвета. Я приведу еще один пример, показывающий, как высоко был развит математический аппарат того времени и как виртуозно научились тогда им пользоваться.

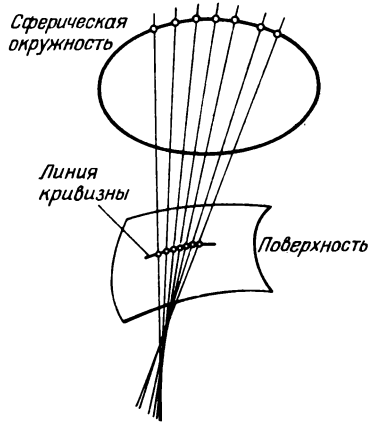


Рис. 13

Проблема, которой в то время много занимались, заключалась в нахождении *линий кривизны* на заданных поверхностях; решить ее удавалось, вообще говоря, только в отдельных случаях, с помощью интегрирования. И вот Дарбу удалось, используя рассматриваемый метод, обнаружить, что такая линия может быть безо всякого труда найдена на произвольной поверхности как линия соприкосновения этой поверхности с развертывающейся поверхностью, описанной вокруг данной поверхности и сферической окружности.

Теорема эта может быть получена следующим образом. Линиями кривизны данной поверхности являются линии, образуемые основаниями бесконечно близких нормалей к поверхности. С другой стороны, согласно теореме о том, что нормаль к плоскости проходит через полюс плоскости относительно сферической окружности, нормалями к поверхности в точке соприкосновения с минимальной плоскостью являются прямые этой плоскости, проходящие через точку касания плоскости со сферической окружностью. Эти нормали — они же минимальные прямые — будут пересекаться, когда минимальная плоскость будет катиться, касаясь поверхности и сферической окружности (рис. 13). Таким образом, катящаяся плоскость — последовательные положения которой огибаются упомянутой развертывающейся поверхностью — оставляет на наших поверхностях след, являющийся линией кривизны (само собой разумеется, мнимой).

Читатель видит, с каким поистине чудесным искусством используются здесь понятия комплексной проективной геометрии и какое обнаруживается при этом необыкновенное мастерство и элегантность. Эти характерные свойства манеры Шаля находятся в удивительном, обусловленном, возможно, и национальными причинами контрасте с основательностью и глубиной Штаудта – качествами, которым мы в основном и обязаны безупречным обоснованием всего здания проективной геометрии.

Этими немногими избранными вопросами мы и вынуждены здесь ограничиться. За дальнейшими сведениями я отсылаю читателя к весьма обширной имеющейся здесь литературе, из которой мы упомянем лишь следующие сочинения:

1. Шаль: "Rapport sur les progrès de la géométrie en France" ("Обзор достижений по геометрии во Франции", Париж, 1870).

2. Enzyklopädie, Bd III C 1 (Dingeldey), C 2 (Staudt).

3. Э. Кёттер: "Entwicklung der syntetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt" (Развитие синтетической геометрии от Монжа до Штаудта", Jahresber. Deutsch. Math.-Ver., 1901, т. 5).

Внезапный скачок, происшедший в развитии проективной геометрии в сороковых годах, переносит нас из Франции в Англию, где в это время стало складываться совершенно самостоятельное направление, стимулируемое одним лишь литературным влиянием.

Здесь перед нами предстает математик первостепенного значения – Артур Кэли. Он родился в 1821 г. в Ричмонде, но вырос в Петербурге, его отец был купцом. В 1838–1841гг. он, как это было принято, учился в университете в Кембридже, где получил высшие существовавшие в староанглийской системе степени отличия: по математике звание лауреата (senior wrangler) и первую смитовскую премию. В том же 1841 г. в "Cambridge Journal" появились первые его публикации. Эти его работы стимулировались исключительно литературными факторами – главным образом, статьями Якоби, а также публикациями французских математиков.

Но как и у Шаля, во внешнем его поприще происходит диковинный перерыв: в 1843 г. Кэли становится адвокатом в Лондоне и в течение двадцати лет сохраняет верность этой своей деятельности. Как ему удалось – в отличие от Шаля – наряду с этой основной профессией развивать еще и ни с чем не сравнимую математическую деятельность, это навсегда останется загадкой. Именно в это время и были созданы все его основополагающие работы. В 1863 г. Кэли стал профессором в Кембридже, где, согласно тамошней традиции, собрал вокруг себя небольшую аудиторию слушателей, а остававшееся от учебных занятий время делил между научной работой и административными заботами по университету. Свою тихую, полную трудов жизнь он окончил 26 января 1895 г.

Многочисленные и широкие по своему диапазону труды Кэли были изданы в тринадцати больших томах in quarto, один из которых представляет собой Указатель, прекрасно составленный Форсайтом. Труды эти охватывают самые разнообразные области нашей науки – здесь можно найти, например, работы по механике и астрономии. Но в первую голову Кэли является все-таки представителем (и в широком смысле слова создателем) современной алгебраической геометрии – и в том, что касается теории инвариантов, и в части геометрических теорий.

В рассматриваемом нами контексте нас в первую очередь интересует продвижение, которого Кэли удалось добиться в вопросах уяснения взаимоотношений между проективной и метрической геометриями. И прежде всего мы рассмотрим его знаменитый "A Sixth Memoir on Quantics" ('Шестой мемуар о формах", Лондон, Phil. Trans., 1859; Собрание сочинений, т. II, стр. 561). Термин "Quantic" означает "форму", т.е. однородный многочлен от двух, трех или большего числа переменных, в зависимости от чего формы называются бинарными, тернарными и т.д.

Основополагающая мысль Кэли, с которой мы и начнем наше изложение, заключается в том, что основные понятия метрической геометрии представляют собой коварианты сферической окружности относительно произвольных линейных преобразований однородных координат. (При этом инвариантами и ковариантами мы называем выражения, находящиеся с основным образом в связи, которая сохраняется при линейных преобразованиях. Традиционно инвариантами называют выражения, в которых фигурируют только константы, описывающие какие-нибудь заданные образы; если же в этих выражениях содержатся еще и переменные, то они называются ковариантами. Однако так как константы всегда можно ввести в качестве переменных, указанное различие на самом деле оказывается несущественным.)

Ковариантом сферической окружности является, например, угол, заключенный между двумя плоскостями, который через плоскостные координаты выражается формулой

$$\arccos \frac{u \cdot u' + v \cdot v' + w \cdot w'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}\,.$$

В числителе этой формулы стоит поляра основной формы – ее простейший ковариант, а в знаменателе – сама эта форма. В параллель этому, расстояние между двумя точками в точечных координатах дается формулой

$$r = \sqrt{\frac{(\xi \cdot \tau' - \xi' \cdot \tau)^2 + (\eta \cdot \tau' - \eta' \cdot \tau)^2 + (\zeta \cdot \tau' - \zeta' \cdot \tau)^2}{\tau^2 \cdot \tau'^2}}\,,$$

числитель которой обращается в нуль, когда точки ξ, η, ζ и ξ', η', ζ' принадлежат какой-нибудь минимальной прямой, а обращение в нуль знаменателя происходит на бесконечно удаленной плоскости.

Когда говорят, что аналитическое выражение для угла между плоскостями является ковариантом сферической окружности, то прежде всего имеется в виду следующее: если с помощью линейного преобразования от обычных прямоугольных координат перейти к любым другим однородным координатам u_1, u_2, u_3, u_4 и если при этом уравнение сферической окружности перейдет в уравнение

$$\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k = 0,$$

то выражение для угла между двумя плоскостями примет вид

$$\arccos \frac{\Sigma \alpha_{ik} u_i v_k}{\sqrt{\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k} \cdot \sqrt{\Sigma \alpha_{ik} v_i v_k}},$$

где системы значений u_1, u_2, u_3, u_4 и v_1, v_2, v_3, v_4 задают те плоскости, угол между которыми мы измеряем.

Это подсказывает следующее естественное обобщение: если в системе координат u_1, u_2, u_3, u_4 какое-либо коническое сечение (не обязательно сферическая окружность) будет задаваться уравнением $\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k = 0$, то, пользуясь только что указанной формулой, мы можем определить "угол" между плоскостями, а затем аналогичным образом "расстояние" между точками и все остальные метрические понятия. Таким образом, каждое коническое сечение дает нам своего рода квазиметрику. Идя еще дальше, можно в качестве $\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k$ взять произвольную квадратичную форму, зависящую от четырех переменных, – не только такую, которая, будучи приравнена нулю, задает коническое сечение. Это снова даст нам некую квазиметрику.

В этом и заключается идея *общего проективного мероопределения,* или, как теперь говорят, *метрики Кэли.* Место метрической геометрии внутри проективной (или – выражаясь в терминах Кэли – дескриптивной) и основополагающее значение этой последней Кэли выражает следующей фразой, стоящей того, чтобы ее запомнить: "Metrical geometry is thus a part of descriptive geometry and descriptive geometry is all geometry" ("Таким образом, метрическая геометрия – это часть дескриптивной, а дескриптивная геометрия – это вся геометрия в целом"). Всякая метрическая геометрия представляет собой теорию инвариантов каких-то наперед заданных геометрических образов, к которым добавлена некоторая поверхность второго порядка; в частности, обычная метрическая геометрия получается из проективной присоединением сферической окружности.

Теперь нужно было детально продумать и реализовать эту фундаментальную идею. Мое собственное участие в данной работе началось именно с этого. Основная задача состояла в детальном изучении мероопределения Кэли для всех случаев, т.е. для всех проективно различных образов второго порядка. Если ограничиться образами, задаваемыми уравнениями с действительными коэффициентами, то это будут

а) Невырожденные поверхности второго порядка:

1. действительные линейчатые (однополостный гиперболоид, гиперболической параболоид);
2. действительные нелинейчатые (эллипсоид, эллиптический параболоид, двуполостный гиперболоид);
3. мнимые поверхности.

б) Невырожденные кривые второго порядка:

1. действительные (эллипс, гипербола, парабола);
2. мнимые.

в) Пары точек:

1. действительные;
2. мнимые.

г) Двойная точка.

Если в качестве фундаментального конического сечения – Кэли называет его *абсолютом* -- взять сферическую окружность, т.е. иметь дело со случаем б) 2, то получится обычная метрика. А случаи а) 2 и а) 3 приводят как раз к тем двум разновидностям неевклидовой геометрии, которые были обнаружены Гауссом, Лобачевским и Бойяи, с одной стороны, и Риманом – с другой; они получаются из обычной геометрии в зависимости от того, какой мы считаем сумму углов треугольника – меньшей или большей π. Таким образом, эти системы тоже встраиваются в проективную геометрию и тем самым теряют свою парадоксальность. Путь Кэли наиболее простым образом позволяет оценить все своеобразие этих неевлидовых геометрий и убедиться в их непротиворечивости.

Можно, конечно, реализовать и другие случаи, и они приведут к занятным и странным системам мира. Случай

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

в четырехмерном пространстве или более общий случай

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = 0,$$

где, чтобы остаться в трехмерном пространстве, нужно все координаты считать однородными, в последнее время приобрел особое значение в связи с физической теорией относительности.

Здесь я хотел бы остановиться на своеобразной связи, существующей между чистой и прикладной науками, связи, которую я по примеру Лейбница называю "предустановленной гармонией". Эта связь проявляется в том, что теоретические понятия, созданные и развившиеся из чисто научных побуждений, очень часто делаются необходимыми для решения пришедших извне прикладных проблем. Тем не менее, – хотя значение абстрактных творений человеческого разума и очень хотелось бы измерять тем, насколько действенными им удается быть за пределами тех абстрактных объектов, которые имелись в виду их создателем, – мир чисто математических идей подобен цветущему дереву, и от него нельзя требовать, чтобы каждый распустившийся цветок приносил зрелый плод.

Кроме конкретного построения геометрий программа Кэли ставила еще и другую задачу; ее нужно было полностью освободить от ряда принципиальных несовершенств и тем самым показать, что здесь действительно дается некоторое новое *построение основ геометрии*.

Именно, требовалось обосновать первый шаг всей этой системы – введение самих координат. У Кэли они представляют собой либо просто переменные, о геометрическом смысле которых мы не заботимся, либо же они вводятся обычным, принятым в метрической геометрии способом через посредство расстояния в евклидовой метрике. В противовес этому и надо было подчеркнуть, что однородные координаты могут быть, следуя Штаудту, введены чисто проективным путем, как это уже указывалось выше (см. стр. 153).

Теперь система геометрии конструируется следующим образом:

1. Следуя идеям Штаудта, строится – без использования метрических соотношений – проективная геометрия. Пользуясь терминологией, ставшей теперь благодаря Гильберту общепринятой, можно сказать, что здесь на основе аксиом порядка, сочетания и непрерывности возводится некоторая геометрия.

2. Разрабатываются – так сказать, про запас – различные частные случаи геометрии Кэли (геометрии с проективным мероопределением).

3. Чтобы обеспечить привычный способ измерения углов вводится новая аксиома о том, что "абсолют" представляет собой либо действительную нелинейчатую поверхность F_2, во "внутренности" которой мы находимся, либо мнимую поверхность F_2, либо мнимое коническое сечение – это те три случая, когда конус касательных к абсолюту для точек доступного нам пространства является мнимым.

При такой реорганизации идейной стороны дела формулы Кэли не меняют своего имманентного значения, но меняется транзиентная роль, которую они играют в обосновании нашей конкретной геометрии. Теперь образы неевклидовой геометрии уже не должны строиться внутри традиционной метрической геометрии. Вместо этого осуществляется идея построения проективной геометрии, свободного от каких бы то ни было метрических понятий и включающего в себя в качестве частных, поддающихся прозрачной классификации случаев все известные геометрические системы.

Эта постановка вопроса, когда я начал заниматься рассматриваемой проблематикой, казалась мне ясной, даже самоочевидной. И тем не менее, с этими своими идеями я встретил сильнейшее противодействие с самых неожиданных – порой противоположных – сторон и по самым различным причинам. Вот характерный пример того, как много усилий даже в нашей, кажущейся такой объективной науке требуется для того, чтобы провести в жизнь новые идеи. Тот, кому посчастливилось найти их, настолько отчетливо видит, как они вырастают из ранее известных вещей и какой при этом приобретают вид, что, выпуская их в свет, он, может статься, недостаточно надежно защищает их от сомнений и возражений, которые ему самому не приходилось преодолевать, так как он с ними не встречался. Но зрители, не участвовавшие в его работе, когда перед их глазами внезапно встает готовая картина, требующая признать ее право на существование, только с трудом могут – особенно если они сами работают в этой области – идти путем, отвечающим его, а не их индивидуальности; они предпочтут приблизиться к предмету по избранному ими самими и привычному для них пути, даже если он является обходным и полным всяческих трудностей. Работа Гельмгольца о сохранении энергии или же построенные Георгом Кантором трансфинитные числа могли бы послужить другими примерами, иллюстрирующими эту мысль. Я вкратце расскажу о том, что мне довелось изведать на собственном горьком опыте.

В 1869 г. я по фидлеровской обработке сальмоновских "Conics" ("Конических сечений") познакомился с теорией Кэли и после этого зимой 1869–70 г. в Берлине впервые услышал от Штольца о Лобачевском и Бойяи. Из этих кратких намеков я мало что понял, но у меня сразу же возникла мысль, что между этими вещами должна существовать какая-то связь. В феврале 1870 г. я сделал в семинаре у Вейерштрасса доклад о мероопределении Кэли и закончил его вопросом о том, нет ли здесь пересечения с идеями Лобачевского. Я получил, однако, ответ, что это – два совершенно не связанных друг с другом круга идей и что для оснований геометрии первостепенное значение имеет свойство прямой быть кратчайшим расстоянием между двумя точками.

Я отнесся к этой отрицательной позиции с уважением и отложил в сторону уже созревшую идею. Я всегда робел перед критикой логиков, которая была далека от моих интересов. Только гораздо позже я понял, что суть дела заключается в различии наших подходов и что психология математического творчества таит в себе огромные проблемы. Очевидно, Вейерштрасс по натуре своей был склонен к тщательной, постепенной работе, шаг за шагом пролагающей путь к вершине; ему менее свойственно было издали распознавать не достигнутые еще высоты. По крайней мере, в данном случае он не продемонстрировал умения видеть перспективу.

Лето 1871 г., как я уже упоминал, вновь свело меня в Гёттингене со Штольцем, которого я еще раз вспоминаю с особенной признательностью, потому что, как это было и с трудами Штаудта, он познакомил меня с работами Лобачевского и Бойяи, из которых я сам не прочел ни единой строчки. В бесконечных дебатах с ним, являвшимся логиком par excellence, я с полной отчетливостью понял, что неевклидовы геометрии являются частями проективной геометрии в смысле Кэли, и несмотря на упорное сопротивление с его стороны мне удалось навязать эту мысль и моему другу. Я изложил эту идею в краткой заметке в "Göttinger Nachrichten" и в первой работе *о так называемой неевклидовой геометрии* в четвертом томе Math. Annalen (1871)[1]).

Однако эти мои публикации вызвали разнообразные возражения, и прежде всего – философского порядка. Не кто иной, как сам Лотце, именно тогда выдвинул лозунг, что все неевклидовы геометрии представляют собой чепуху. К этому добавилось и еще одно, до сих пор не искорененное и бытующее у философов и пищущих на научно-популярные темы недоразумение, которое я не хотел бы оставить здесь без обсуждения. Оно касается выражения "кривизна", которое, на свое несчастье, имеет очень наглядный смысл. Это введенное Гауссом и широко использовавшееся Риманом чисто математическое понятие представляет собой некий рассматриваемый

---

[1]) См. Klein F. Ges. Abh., Bd 1, Nr XV, XVI.

в дифференциальной геометрии инвариант

$$K = f\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial p}, \frac{\partial E}{\partial q}, \frac{\partial F}{\partial p}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial q}, \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}, \ldots, \frac{\partial^2 G}{\partial q^2}\right)$$

восходящего к Гауссу выражения для элемента дуги

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2,$$

причем имеет место теорема, что это K в неевклидовых пространствах постоянно. Этому математическому утверждению, носящему чисто имманентный характер, философы и всяческого рода мистики совершенно недопустимым образом придали некое транзиентное значение, как если бы оно говорило о каком-то наглядно воспринимаемом свойстве пространства. В связи с этим было немало разговоров и споров о четвертом измерении, так как считалось, что пространство непременно должно обладать еще одним – новым – измерением, чтобы иметь возможность быть "искривленным". (Даже Гёттингенское математическое общество в течение многих лет участвовало в такого рода дискуссиях. Сто́ит вспомнить стихи Блюменталя:

Die Menschen fassen kaum es
Das Krümmungsmaß des Raumes [1].)

Все эти извращения, которые порой играли нам на руку, а иной раз оборачивались и против нас, доставили нам большие затруднения. Вспоминаю бесконечные разговоры, которые я зимой 1871/72 г. каждый вечер вел со своими друзьями в погребке Гебхарда и которые зачастую принимали весьма жаркий характер.

Но еще более существенным было сопротивление, которое я испытывал со стороны математиков. В своей статье из четвертого тома Math. Annalen я, не принимая в расчет логических трудностей, которые могла доставить эта проблема, начал с безобидного использования метрической геометрии и только под конец в очень сжатой форме, со ссылкой на Штаудта указал на независимость проективной геометрии от какой бы то ни было метрики. Тут на меня со всех сторон посыпались обвинения в порочном круге. Чисто проективное штаудтовское определение "вурфа" как числа не воспринималось, и все твердо считали, что это число представляет собой двойное отношение четырех евклидовых расстояний.

В результате изучения ряда работ, а также переписки с другими математиками летом 1872 г. возникла моя в т о р а я работа по *неевклидовой геометрии*, напечатанная в шестом томе Math. Annalen [2]. Я подверг в ней, в частности, специальному исследованию основания штаудтовской системы и рискнул предпринять первую вылазку в область современной аксиоматики.

---

[1]) Люди едва-едва могут постичь кривизну пространства. – *Примеч. пер.*

[2]) См. K l e i n F. Ges. Abh., Bd 1, Nr XVIII.

Но даже это детальное изложение предмета не внесло в данный вопрос полной ясности. В частности, Кэли навсегда остался при ошибочном убеждении, что в моих рассуждениях кроется порочный круг [см., например, Добавления Кэли ко второму тому его "Трудов" (1889), где он ссылается, кроме того, и на Роберта Болла, с которым я тоже поддерживал оживленное, но в данном пункте совершенно безуспешное общение]. Таким образом, мы здесь снова сталкиваемся с тем своеобразным фактом, что состарившийся ум бывает уже не в состоянии делать выводы из положений, выдвинутых им же самим. Последствия психологически неизбежного процесса, в результате которого мозг со временем утрачивает свою подвижность и пластичность, можно наблюдать весьма часто. Так, например, Лоренц, благодаря идеям которого только и смог возникнуть принцип относительности, всегда этому принципу противился.

А с другой стороны я встретился с обычными упреками, с которыми неизбежно приходится встречаться каждому творчески активному человеку, — с утверждениями, что сделанные мною вещи не новы, что около 1868 г. Бельтрами выступил в Италии с соображениями, которые находились в том же самом русле идей. И действительно, в моей работе 1871 г. я сам отмечал, что для перехода от формул Бельтрами к формулам Кэли остается сделать только один шаг. Я хорошо сделал, что, печатая эту статью, подчеркнул в нем слово "формулы". Этим я хотел сказать, что речь идет о том, чтобы правильно понимать взаимодействие этих формул.

Но что касается Бельтрами (который, впрочем, не имеет никакого отношения к Штаудту), то логические следствия этих обстоятельств ввели его, как я указывал уже в 1871 г., в одном весьма характерном месте в заблуждение. Конкретно речь идет об ошибке, которая постоянно встречается у Гельмгольца и у многих других. Интерпретируя на сфере неевклидову геометрию с суммой углов треугольника, бóльшей π, они приходят к заключению, что любые две кратчайшие линии должны пересекаться в двух точках. Но на проективной плоскости — даже в случае мнимого конического сечения, взятого в качестве абсолюта, — любые две прямые пересекаются только в одной точке! Этот пример показывает, что при интерпретации какой-либо метрической геометрии на кривой поверхности надо принимать во внимание связность последней. Проективная плоскость имеет необычную связность, которая в корне отличается от связности сферы: она представляет собой односторонную поверхность, подобную листу Мёбиуса, но при этом она еще и замкнута. Во вполне отчетливом виде эти вещи были высказаны мною только в 1874 г. в переписке со Шлефли (Math. Annalen, т. 7, стр. 549 — 550[1])).

Я мог бы рассказать и о многих других деталях этого сложного процесса, который зачастую бывал отягощен разного рода затруднениями, однако я ограничусь тем, что уже было сказано. Эти сражения отражены в соответствующих томах Math. Annalen (в особенности в 37-м томе). И лишь одно

[1]) См. Klein F. Ges. Abh., т. 2, стр. 63 и далее.

имя мне хотелось бы еще упомянуть здесь - имя Клиффорда. Я вспоминаю о нем с особой радостью как о человеке, который сразу понял, а вскоре и превзошел меня.

На этом я оставлю историю развития чистой геометрии. Построением системы, в которой отсутствовали пропуски и которая в сгруппированном виде органически включила в себя все геометрические исследования того времени, был завершен определенный этап. Я перейду теперь к обзору связанных с этой деятельностью достижений в области алгебры.

Параллельное развитие алгебры; теория инвариантов

В связи с рассказом о проективной точке зрения возникает – в виде следующего ниже вопроса – тема *теории инвариантов*. Вопрос этот таков: в каком виде в алгебраическом исчислении отображаются проективные свойства фигур, т.е. свойства, сохраняющиеся при любых коллинеациях? Таким образом, речь в дальнейшем пойдет не о том, чтобы избежать, как это делал Плюккер, вычислений, а о том, чтобы проводить их в систематизированной форме, которая с самого начала позволяла бы подчеркнуть инвариантность исследуемых свойств относительно произвольных линейных замен переменных. Правда, исторически становление теории инвариантов шло по другому пути, определяющему существенно более широкое значение этой теории. Именно, в ее точной, рассматриваемой ниже форме она возникла из теории чисел. С этой стороны мы и попытаемся проникнуть в нее.

Чтобы не углубляться в историю еще дальше, я начну с "Disquisitiones Arithmeticae" Гаусса. Как мы уже видели в первой главе, одной из основных рассматриваемых Гауссом теоретико-числовых проблем является изучение бинарных квадратичных форм

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

и их преобразований при линейных заменах x и y

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

где

$$\alpha\delta - \beta\gamma = r \neq 0.$$

Пусть после преобразования рассматриваемая форма принимает вид

$$f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 .$$

Вопрос о величинах, которые при этом преобразовании не меняются или же меняются в обозримой форме, в первую очередь приводит к дискриминанту – "определителю", как говорил Гаусс, –

$$D' = b'^2 - a'c' = r^2 \cdot D.$$

В теории чисел, как мы видели, особый интерес представляет изучение проблемы эквивалентности двух форм в случае, когда $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ – целые числа, а $r = 1$. В этом случае равенство $D' = D$ является необходимым, но вовсе не достаточным условием эквивалентности.

Теория инвариантов в том виде, как мы ее понимаем сейчас, отходит от теории чисел и ставит перед собой следующую чисто алгебраическую задачу. Пусть даны какие-либо две формы

$$f = a_1 x^n + b_1 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \ldots + p_1$$

и

$$g = a_2 x^n + b_2 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + p_2.$$

Требуется найти многочлены, однородные по $a_1, b_1, \ldots, p_1$, а возможно и по $a_2, b_2, \ldots, p_2$, которые при линейных преобразованиях переменных сохранялись бы с точностью до множителя, равного некоторой степени определителя преобразования.

Поясним сказанное на следующем примере. Пусть даны две формы

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 \text{ и } a_2 x_1 + b_2 x_2.$$

Тогда определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

является, как говорят, их совместным *инвариантом*.

Частное [1])

$$\frac{|a \;\; b| \cdot |c \;\; d|}{|a \;\; d| \cdot |c \;\; b|}$$

является совместным инвариантом четырех таких форм, причем даже абсолютным, т.е. совсем не изменяющимся при рассматриваемых преобразованиях (геометрически это не что иное, как двойное отношение четырех точек).

Спрашивается теперь, в какой мере ответственность за это сужение области применения теории инвариантов, за ее отход от теории чисел может быть возложена на геометрию. Сама по себе геометрия могла бы и не привести к такому повороту событий. Ведь мы, например, уже видели, что

---

[1]) Здесь используется сокращенная форма записи, при которой определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ обозначается посредством $|a \;\; b|$.

гауссова теория бинарных квадратичных форм в результате геометрической трактовки через решетки, а затем и благодаря модулярным фигурам получила весьма изящную поддержку и объяснение. Таким образом, геометрия вовсе не противостоит теории чисел. Но поскольку геометрия ограничивает себя изучением кривых, поверхностей и тому подобных образов в непрерывном пространстве, она неизбежно должна была вызвать некоторое сужение теории инвариантов.

Исторически ситуация сложилась так, что только немногие исследователи были в равной мере в состоянии держать в поле зрения все аспекты этой весьма по своему характеру широкой дисциплины. К ним относился Якоби, который еще целиком удерживался в гауссовском русле идей, а после него — Эйзенштейн и Эрмит. Затем наступила специализация; последующие ученые, идя в ногу с духом времени, весьма к ней клонившим, отошли от теории чисел и полностью переключились на формально-алгебраическую проблематику и на использование ее в геометрии.

В дальнейшем, благодаря улучшившимся средствам сообщения, стали все более отчетливо проявляться новые черты начавшей свое развитие научной жизни — начали развиваться международные связи, которые со временем привели к непрекращающемуся и энергичному научному сотрудничеству. Под знаком этого сотрудничества в 1868 г. были основаны Mathematische Annalen, ставшие главным органом для публикации работ, ведшихся в этом направлении.

Из числа выдвинувшихся здесь ученых я бы хотел назвать:

а) Гессе и Аронгольда как выдающихся представителей кёнигсбергской школы; несколько позже ее представляли Клебш, Гордан и др.;

б) неразлучную английскую тройку: Кэли, Сильвестра и Сальмона;

в) и наконец, итальянцев: Бриоски (учебник по теории определителей) и геометров Кремону и Бельтрами.

Развитие, полученное теорией инвариантов в результате усилий этих исследователей, я, естественно, снова могу изложить лишь в весьма отрывочном виде. Тем охотнее я отсылаю читателя к написанным М. Нётером биографиям, помещенным в следующих томах Math. Annalen:

т. 7 (1874): Клебш (составлена несколькими его друзьями),

т. 46: Кэли,

т. 50: Сильвестр, Бриоски,

т. 55: Эрмит,

т 61: Сальмон,

т. 53: Ли,

т. 59: Кремона,

т. 74: Гордан.

Эти нётеровские биографии — последние из которых, правда, выходят за рамки рассматриваемого нами периода — служат отличным пособием для изучения как всей этой эпохи в целом, так и того своеобразного и обширного мира интереснейших фактов, который она пестовала подобно прекрасным цветам некоего сада не из-за внешней пользы, а ради них самих.

Непосредственным предшественником современной теории инвариантов является теория *определителей.* Этот математический инструмент, первоначально изобретенный Лейбницем, а затем усовершенствованный в XVIII в. Вандермондом и в XIX – Коши, был окончательно отделан Якоби и повсеместно внедрен им в научный обиход – в первую очередь в преподавание. На эту тему Якоби в Журнале Крелля (т. 22, 1841 г.) опубликованы следующие две статьи [1]:

"De formatione et proprietatibus determinantium" ("О построении определителей и о их свойствах", Werke, т. 3, стр. 355–392) и

"De determinantibus functionalibus" ("О функциональных определителях", Werke, т. 3, стр. 393–438).

В наше время определители – которые Якоби обозначал посредством $\Sigma \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$, а мы теперь короче через $|a_{ik}|$, – их простейшие преобразования и правила действия над ними (в которые надо хорошо вжиться, чтобы успешно пользоваться ими) стали само собой подразумевающейся частью научного багажа, которым владеет любой математически образованный человек. Поэтому я могу не останавливаться на этих вещах более подробно, а лишь укажу на то, что определители возникают при решении систем линейных уравнений (я уже говорил об этом в связи с системой двух уравнений с двумя неизвестными).

Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

является совместным инвариантом n линейных форм

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i.$$

Это означает, что если мы в этих формах положим

$$x_k = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{kl}y_l$$

и затем рассмотрим получающиеся в результате этого преобразования n форм

$$\sum_{i=1}^{n} a'_{1i}y_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a'_{2i}y_i, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} a'_{ni}y_i,$$

то новый определитель $D' = |a'_{ik}|$ будет связан со старым определителем $D = |a_{ik}|$ равенством $D' = r \cdot D$, где $r = |\alpha_{ik}|$ – определитель преобразова-

[1]) Немецкий перевод обеих этих работ, выполненный П. Штеккелем, издан в серии "Ostwalds Klassiker" (вып. 77 и 78).

ния. Это равенство легко выводится из основной теоремы теории определителей – теоремы об умножении определителей.

Обобщением этого подхода получаются так называемые *функциональные определители*. Здесь речь идет уже не о линейных формах и о преобразовании их коэффициентов, а об абсолютно произвольных – как имели обыкновение говорить раньше – функциях $f, g, h, \ldots$ переменных $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$. Сегодня я, конечно, должен сказать, что эти функции предполагаются дифференцируемыми. Их функциональным определителем называется определитель

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \ldots & f_n \\ g_1 & g_2 & g_3 \ldots & g_n \\ h_1 & h_2 & h_3 \ldots & h_n \\ . & . & . \;\ldots & . \end{vmatrix},$$

составленный из их частных производных $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Определитель этот оказывается инвариантным в самом общем смысле – при любом преобразовании переменных (конечно, ограниченном требованием, явно осознанным уже Якоби, что существуют все частные производные от новых переменных по старым и наоборот). Доказательство этого утверждения может быть получено на основании соотношений

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = f_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + f_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + f_3 \frac{\partial x_3}{\partial y_1} + \ldots + f_n \frac{\partial x_n}{\partial y_1},$$

. . . .

$$\frac{\partial f}{\partial y_n} = f_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_n} + f_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_n} + f_3 \frac{\partial x_3}{\partial y_n} + \ldots + f_n \frac{\partial x_n}{\partial y_n},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} = g_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + g_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + g_3 \frac{\partial x_3}{\partial y_1} + \ldots + g_n \frac{\partial x_n}{\partial y_1},$$

. . . .

$$\frac{\partial h}{\partial y_1} = h_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + h_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + h_3 \frac{\partial x_3}{\partial y_1} + \ldots + h_n \frac{\partial x_n}{\partial y_1},$$

. . . .

и теоремы об умножении определителей. Мы здесь сталкиваемся с уже несколько более общей теорией инвариантов, в основе которой лежит группа произвольных замен переменных. К ней относится и другой – существенно более сложный – пример: инвариантность кривизны (о чем уже говорилось выше).

Подход Якоби был развит Гессе – особенно в том, что касается аналитической геометрии. Как я уже отмечал, связь с теорией чисел была при этом утрачена окончательно.

Гессе родился в 1811 г. в Кёнигсберге. – Я не могу при этом не обратить внимания на тот замечательный факт, что из Кёнигсберга вышли многие знаменитые математики и что вообще немцы Восточной Пруссии выглядят наделенными особой одаренностью в отношении нашей науки. Если причислить сюда и Канта, который был философом и математиком, то получится следующий достопримечательный список: Кант (1724), Ришело (1808), Гессе (1811), Кирхгоф (1824), Карл Нейман (1832), Клебш (1833), Гильберт (1862). –

Талант Гессе неспеша развивался в разных школах. С 1840 по 1855 гг. он был доцентом в Кёнигсберге, в 1855 – 56 гг. – в Галле, с 1856 по 1868 г. – в Гейдельберге и, наконец, в 1868 – 1874 гг – в Мюнхене, в Высшей технической школе. Кёнигсбергский период Гессе был истинной вершиной его творчества. В Гейдельберге им был написан получивший широкое распространение учебник "Vorlesungen über analytische Geometrie" ("Лекции по аналитической геометрии"), благодаря которому в широкие математические круги внедрился вкус к элегантным вычислениям с помощью симметричных формул. В остальном Гейдельберг сыграл в развитии Гессе неблагоприятную роль. Он поддался очарованию этого стоящего на Неккаре города, который хотя и возбуждает ум, но гораздо меньше способствует напряженной работе. В компании поэта Виктора Шеффеля Гессе провел немало приятных часов (он, кстати, увековечен в стихотворении "Beide auf Nr 8" в "Gaudeamus" [1]), но его математическая продуктивность от этого только страдала. Жизнь Гессе получила в известной мере трагическое завершение. В Мюнхене он снова вернулся к творческой деятельности, но с частичным успехом. Уверенность, с которой правильное отличают от ложного, была им утрачена.

Из достижений Гессе я упомяну здесь только те, которые доставили его имени вечную жизнь. Это *гессиан* – определитель, составленный из вторых производных однородной функции f:

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

получивший в геометрии самые разнообразные применения. При линейном преобразовании он преобразуется по формуле $H' = r^2 H$, легко получающейся умножением определителя H на определитель преобразования r один раз по строкам и второй раз по столбцам. Таким образом, H является инвариантом, или, точнее – поскольку он и сам содержит переменные, так

[1]) Йозеф Виктор Шеффель (1826 – 1886) – известный немецкий поэт и романист. Автор ряда принесших ему в студенческой среде большую популярность застольных пе́сен, впоследствии составивших сборник "Gaudeamus" (Штутгарт, 1867). – *Примеч. пер.*

как f, вообще говоря, имеет степень выше второй, – *ковариантом* функции f.

На совсем простом примере я покажу, какую роль в геометрических рассмотрениях играет этот ковариант и какой прогресс по сравнению с Плюккером был благодаря ему достигнут в такого рода проблематике.

Речь пойдет об определении *точек перегиба плоской кривой* n-го порядка C_n, заданной уравнением $f(x, y) = 0$. Условие $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = 0$ Плюккер обычным, излагаемым во всех учебниках по дифференциальному исчислению способом выразил через частные производные функции f. Полученное им условие в обозначениях Якоби записывается в виде равенства нулю "окаймленного" определителя:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение изображает некоторую кривую $(3n - 4)$-го порядка. Поэтому могло бы показаться, что рассматриваемая нами кривая C_n имеет в точности $n(3n - 4)$ точек перегиба. Однако Плюккер показал, что заданная определителем кривая имеет с каждой из n бесконечных ветвей данной кривой C_n точку касания в бесконечности. Это дает $2n$ точек пересечения, не являющихся точками перегиба. Отбросив эти точки, он и получает истинное число точек перегиба, а именно: $3n(n - 2)$.

Здесь вступает в игру Гессе и показывает, каким образом, последовательно пользуясь однородными координатами, можно добиться существенного прояснения рассматриваемой ситуации.

Он полагает $x = \dfrac{x_1}{x_3}$, $y = \dfrac{x_2}{x_3}$ и с использованием теоремы Эйлера об однородных функциях, согласно которой

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = n \cdot f,$$

$$f_{11} x_1 + f_{12} x_2 + f_{13} x_3 = (n - 1) \cdot f_1$$

и т.д., преобразует уравнение Плюккера

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Умножив это уравнение на $n - 1$, он записывает его в виде

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{11} x_1 + f_{12} x_2 + f_{13} x_3 \\ f_{21} & f_{22} & f_{21} x_1 + f_{22} x_2 + f_{23} x_3 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Умножив, далее, первые два столбца на x_1 и на x_2 соответственно, он вычитает их из третьего. Вынеся затем наружу множитель x_3, Гессе получает уравнение

$$x_3 \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Тем же самым способом можно поступить и с последней строкой. Отбросив числовой множитель $\dfrac{1}{n-1}$, мы получим уравнение

$$x_3^2 \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = x_3^2 \cdot H = 0.$$

Множитель x_3^2, будучи приравнен нулю, дает посторонние точки, выделенные Плюккером с помощью искусственного приема; уравнение же $H = 0$, степень которого равна $3(n-2)$, в пересечении с кривой C_n дает искомые точки перегиба.

На этом примере видно, какой прогресс достигается методом Гессе, и становится ясно, что Гессе в качестве некоего идеала поставил перед собой задачу так – опираясь на однородные и симметрические манипуляции – организовывать и доводить до конца вычисления, чтобы алгебраический процесс точно следовал геометрической сути дела. Особое его внимание привлекала теория плоских кривых третьего и четвертого порядка, к чему мы еще вернемся.

Тем временем подросли английские математики, и ведущая роль в теории инвариантов и в ее приложениях к проективной геометрии постепенно стала переходить в их руки.

О Кэли и о его неустанной работе нами уже говорилось; родившись в 1821 г., он уже в 1841 г. начал публиковаться в Кембриджском Mathematical Journal, причем в новом для Англии проективно-геометрическом направлении, которое своим подчеркиванием свободы математического творчества вступило в конфликт с господствовавшей в то время в Кембридже школой математических логиков (Де Морган и др.). Уже в 1846 г. мы видим его в числе сотрудников Журнала Крелля, где он опубликовал свой "Mémoire sur les Hyperdéterminants" ("Мемуар о гипердетерминантах"; т. 33). Термин "гипердетерминант", использованный для обозначения "инварианта" со своей отчетливостью указывает на истоки этой теории, возникшей из теории определителей в качестве ее обобщения. Кэли участвует в дальнейшей разработке теории инвариантов, долгое время параллельно развивавшейся в Германии, систематизирует материал и получает собственные результаты. Знамениты его девять статей "Memoirs on Quantics"

("Мемуары о формах"), опубликованные в "Philosophical Transactions" (с 1854 по 1878 г.) Во всех его исследованиях наряду с творческой одаренностью видно неустанное трудолюбие автора и его упорная энергия.

Этой уравновешенной, постоянной натуре противостоит его старший соратник Сильвестр, одна из самых живых и переменчивых фигур среди до сих пор встречавшихся нам. Родившись в 1814 г. в Лондоне, он тоже начал работать рано, но в продолжение следующих лет очень часто менял место своего жительства и занятия. В 1841–1845 гг. Сильвестр был профессором университета в Вирджинии, в 1845–1855 гг. работал в качестве "актуария" (математика, занимающегося страховым делом) и стряпчего (адвоката – как и Кэли), затем до 1871 г. он был профессором военной академии в Вулвиче. После этого Сильвестр в течение нескольких лет пребывал без определенных занятий, пока не получил в 1876 г. профессуру в университете Джона Гопкинса в Балтиморе. Находясь на этой должности, он был первым в Америке, кто продуктивно работал над проблемами чистой математики, занимаясь чрезвычайно интенсивной преподавательской деятельностью, специализированной в области теории инвариантов. Он основал также "American Journal", один из наиболее известных в настоящее время математических журналов. В 1884 г. Сильвестр вернулся в Англию и в семидесятилетнем возрасте принял новую профессуру в Лондоне, которую сохранял до своей смерти, последовавшей в 1897 г.

В Лондоне Кэли приобщил Сильвестра к занятиям новой дисциплиной, и вскоре Сильвестр стал ее лидером. Ему принадлежат все принятые в этой теории термины: инвариант, ковариант, комитант, дискриминант и т. д. Впрочем, это только немногие из числа предложенных им; он в шутку сам называл себя новым Адамом, ибо подобно отцу человечества должен был всем вещам давать новые имена.

Сильвестр обладал исключительно живым и разносторонним умом, который с большой интенсивностью вторгался в любую проблематику и все, что встречалось ему по ходу дела, приводил во взаимосвязь. В то же время ему было менее свойственно систематически и планомерно разрабатывать однажды найденные идеи и доводить их до законченных, написанных высоким стилем трудов. Его истинным научным призванием было совершенно абстрактное, комбинаторное искусство. В этом духе он, наряду с проблемами теории инвариантов, исключительно успешно занимался самыми разнообразными разделами математики – в том числе и проблемами механики. Для его образа мышления весьма характерно суждение, которое он мне как-то высказал относительно того, ка́к должны пониматься химические формулы, которые в то время привлекали к себе внимание математиков; позднее он в "American Journal" провел интереснейшую параллель между этим вопросом и символическими операциями в теории инвариантов бинарных форм. Сильвестр в этих формулах видел лишь логическое отношение двух понятий и с усмешкой отвергал представление о конкретных, химически связанных атомах. Но наверное, это не тот фундамент, на котором естествознание добивается своих успехов.

Как личность Сильвестр был исключительно увлекательным, остроумным и искристым человеком. Он был блестящим оратором и часто увеселял общество своими меткими и искусными стихами. По блеску и живости своего ума он был истинным представителем своего народа: он происходил из чисто еврейской семьи, которая, будучи до того безымянной, лишь в его поколении приняла фамилию Сильвестр.

Из математических достижений Сильвестра я хотел бы упомянуть лишь теорию *элементарных делителей* двух квадратичных форм (по крайней мере, в ее начальных главах) и в первую очередь — теорию канонических форм, т. е. вопрос о приведении форм к простейшему виду; в геометрической формулировке проблема состоит в том, чтобы найти однородную систему координат, в которой наперед заданный алгебраический образ имеет самое простое уравнение. Для поверхностей третьего порядка Сильвестр нашел такую систему, названную по его предложению *пентаэдром.* Она состоит из пяти плоскостей

$$x = y = z = t = u = 0$$

и плоскости

$$x + y + z + t + u = 0.$$

В этом пентаэдре уравнение поверхности третьего порядка имеет вид

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 + eu^3 = 0,$$

откуда многие геометрические свойства этой поверхности получаются чрезвычайно удобным образом.

Здесь нужно отметить, что это один из тех результатов, которые стареющий Штейнер внезапно опубликовал без доказательства, утверждая, что они были установлены им самим. На самом же деле он через Шлефли имел доступ к работам Сильвестра (см. изданную Графом в 1896 г. переписку этих двух швейцарских геометров).

К Кэли и Сильвестру в качестве третьего примыкает — опять-таки явление совершенно иного порядка! — теолог Джордж Сальмон из Дублина. Сальмон на протяжении почти всей своей жизни был связан со старинным ирландско-протестантским Тринити-колледжем. Это стародавнее, почтенное высшее учебное заведение, из стен которого вышел и Гамильтон, испокон веков было очагом созерцательной ориентации ума; оно и до сих пор остается центром, где проходят обучение ирландские протестанты. Занятия богословием, классической филологией и математикой идут здесь рука об руку, и мощной традицией (епископ Беркли и др.) они раз и навсегда отлиты в твердо установленную форму. "Кембридж очень уж амбициозен", — говорили мне, когда я в 1899 г. посетил Дублин, имея в виду царившие там современные научные тенденции. Впрочем, унаследованные от старых времен достоинство и культура в полном великолепии выступили в 1892 г. на праздновании трехсотлетнего юбилея колледжа. В этом праздновании принимал участие и Гёттинген, выразивший свое почитание в адресе, который с большим воодушевлением написал латинскими двустишиями наш ныне покойный коллега Лео. На мою просьбу отвести в перечне заслуг колледжа приличествующее место и математике Лео ответил: "Пегас возьмет и это препятствие!" И действительно, в оде, когда она была закончена, мы нашли стих: "unde mathematicis lumen praeluxit Hamilto!" ("Отсюда воссияло математическое светило Гамильтон!").

Вот в какой атмосфере сформировался Сальмон. Родился он в 1819 г. в Дублине; учился в Тринити-колледже, в котором с 1840 г. стал преподавателем. Начиная примерно с 1860 г. у него на первый план выступают теологические интересы, которые приводят его к тому, что в 1866 г. он становится профессором богословия. До конца своей жизни (1904 г.) Сальмон оставался теснейшим образом связанным с колледжем и в 1888 г. стал его ректором (provost).

Сальмон был мягкой, но в административных вопросах чрезвычайно консервативной натурой. Когда я в 1899 г. посетил его, он жил в деревне на даче удобной, спокойной жизнью. В математические разговоры не вдавался и самым любезным образом развлекал меня всякими безобидными маленькими анекдотами, как это принято в любом небольшом городке.

Все трое — и Кэли, и Сильвестр, и Сальмон — прожили необычайно долгую и разнообразную жизнь, отличную от обычной жизни ученых, как мы ее себе представляем.

В качестве специфических достижений Сальмона нужно в первую очередь назвать его знаменитые учебники, которыми он содействовал широкому распространению современной аналитической трактовки проективной геометрии и представлений теории инвариантов:

1848 г.: "Conic sections" ("Конические сечения");

1852 г.: "Higher plane curves" ("Плоские кривые высших порядков");

1859 г.: "Modern higher Algebra" ("Современная высшая алгебра");

1862 г.: "Analytic geometry of three dimensions" ("Аналитическая геометрия трех измерений").

Все эти книги выдержали много изданий, переводов и обработок (имеются немецкие переводы Фидлера) и долгое время справедливо пользовались большой популярностью. Они не представляют собой систематического, строгого изложения предмета; это всего лишь спокойное повествование о многих изящных результатах алгебраико-геометрических рассмотрений, выдержанное в удобном для чтения тоне легкой беседы. В очередные издания регулярно вносились новые, полученные к тому времени результаты исследований, что из-за свободной и гибкой формы удавалось сделать, не нарушая цельности всей книги. Чтение этих книг напоминает радостную и поучительную прогулку по лесам, полям и возделанным садам, во время которой сопровождающее лицо обращает ваше внимание то на красоты ландшафта, то на редкое явление природы, не сводя, однако, всего наблюдаемого в одну безукоризненно полную систему — тенденция, которую скорее можно наблюдать у Фидлера, – а также не выкапывая отдельные полезные растения и не превращая их с помощью рациональных сельскохозяйственных рецептов в нечто высококультурное, произрастающее на заранее подготовленной почве. Все мы тоже выросли в этом цветнике, в нем собирали мы наши главные знания, и теперь мы обязаны развивать их дальше.

Охарактеризуем теперь вкратце, несколькими штрихами состояние, которого теория инвариантов достигла благодаря усилиям Кэли, Сильвестра и Сальмона.

С общей точки зрения задача в основном состоит в том, чтобы для данной формы построить так называемую полную систему *инвариантов (ковариантов)*, т. е. найти минимальное число инвариантов и ковариантов, целыми и рациональными функциями которых были бы все остальные.

Еще Эйзенштейн для случая кубической формы

$$f = ax_1^3 + 3bx_1^2x_2 + 3cx_1x_2^2 + dx_2^3$$

от двух переменных x_1 и x_2 нашел простейший ковариант

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix},$$

являющийся формой второй степени, и простейший инвариант

$$3b^2c^2 + 6abcd - 4b^3d - 4ac^3 - a^2d^2$$

– определитель квадратичной формы H. Инвариантом будет, конечно, и дискриминант формы f, который обычно обозначается буквой Δ, а ковариантом – функциональный определитель форм f и H, обозначаемый посредством Q и являющийся формой третьей степени. Кэли показал, что четыре величины f, H, Δ и Q образуют полную систему ковариантов.

Для бинарной биквадратичной формы

$$ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4$$

Кэли нашел, что к величинам $f_{(4)}$, $H_{(4)}$ и функциональному определителю $Q_{(6)}$ форм f и H добавляются еще два инварианта, которые в обозначениях, впоследствии введенных Вейерштрассом, имеют вид:

$$g_2 = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}.$$

Здесь $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$, и потому Δ уже не входит в полную систему инвариантов. Требующиеся здесь вычисления выходят за рамки возможностей традиционной теории определителей. Поэтому потребовалось ввести символические обозначения и на их базе развить некое исчисление – имеющее, впрочем, и самостоятельное значение, – чтобы справиться с проблематикой, которая для форм высоких порядков быстро делается весьма сложной и необозримой. Исследования эти, наложившие отпечаток на всю дальнейшую, чрезвычайно обширную литературу, были выполнены Кэли, Аронгольдом и Клебшем.

В заключение этого раздела, я хотел бы изложить ряд дополнительных деталей геометрически-алгебраического характера, касающихся проблем теории так называемых геометрических уравнений, обсуждавшихся упомянутыми выше лицами.

1. Задача о девяти точках перегиба плоской кривой C_3, поставленная, как уже упоминалось, Плюккером, была доведена до конца Гессе, а затем Аронгольдом. Плюккер заметил, что девять точек перегиба лежат по три на двенадцати прямых. Гессе обнаружил, что эти двенадцать прямых распадаются на четыре тройки, каждой из которых принадлежат все девять точек (рис. 14). Таким образом, семейство $f + \lambda H = 0$ определяет

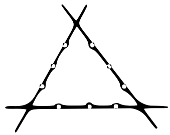


Рис. 14

четыре кривых C_3, вырождающихся в тройки прямых, и уравнение двенадцатой степени, определяющее эти двенадцать прямых, должно сводиться к некоторому уравнению четвертой степени с инвариантными коэффициентами. Это уравнение, существование которого доказал Гессе, было в явном виде указано Аронгольдом. Если корни этого уравнения известны, то все девять точек перегиба находятся арифметическими операциями.

Аналогичное исследование было необходимо и для группировки *двадцати восьми двойных касательных к плоской кривой* C_4. Работу здесь тоже начал Плюккер, но, как уже упоминалось ранее, в деталях он допустил ошибки. Полностью решить эту проблему удалось одновременно Штейнеру и Гессе (Журнал Крелля, 1853, т. 49)[1]).

2. Подобного же рода исследованию были подвергнуты и поверхности высших порядков. В 1849 г. Сальмон и Кэли обнаружили существование на поверхности F_3 двадцати семи прямых, образующих удивительную конфигурацию: каждая из этих прямых пересекается десятью другими (Cambridge and Dublin Journal, т. 4). Они все могут оказаться действительными и с исключительной наглядностью видны на найденной в 1872 г. Клебшем *диагональной поверхности*[2]). Будучи отнесена к пен-

---

[1]) См. также Klein F. Ges. Abh., т. 2, стр. 110 и далее.

[2]) Math. Annalen, 1871, т. 4, стр. 331 и далее; см. также Klein F. Ges. Abh., т. 2, стр. 29 и далее.

таэдру Сильвестра, поверхность эта имеет очень простое уравнение:

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + u^3 = 0.$$

Впрочем, поверхность F_3 и ее констелляция прямых весьма своеобразным способом связана, как это впервые обнаружил Гейзер (см. Math. Annalen, 1868, т. 1), с двадцатью восемью касательными плоской кривой C_4. Связь эта выражается в следующем: если из какой-либо ее точки O спроектировать поверхность F_3 на произвольную плоскость, то контур полученной проекции будет представлять собой плоскую кривую C_4, двадцать восемь двойных касательных которой будут получаться пересечением следующих проходящих через O плоскостей: плоскости, касательной к F_3 в точке O, и двадцати семи плоскостей, проходящих через O и через каждую из лежащих на F_3 прямых, о которых шла речь.

3. В заключение я хотел бы упомянуть о еще одной поверхности, которая была открыта Куммером в 1864 г. (Berliner Monatsberichte), хотя при этом я уже должен буду затронуть несколько более поздний период. Это поверхность четвертого порядка и того же класса — самодвойственная — с шестнадцатью двойными точками, такими, что шестнадцать групп по шесть точек лежат в одной двойной касательной плоскости к этой поверхности (т.е. в плоскости, касающейся данной поверхности по некоторому коническому сечению). Уравнение шестнадцатой степени для двойных элементов сводится, как обнаружил в 1868 г. Камилл Жордан (Журнал Крелля, т. 70), к одному уравнению шестой степени и к нескольким квадратным, и я подтвердил этот факт геометрическими рассмотрениями (Göttinger Nachrichten, 1869, Math. Annalen, т. 2 = Ges. Abh., т. 1, стр. 53) — работа, принесшая мне первое признание (продолжение моей диссертации от 1868 г.).

Пространство n измерений и общие комплексные числа

Я хочу теперь вкратце рассказать о третьей существенной черте процесса развития алгебраической геометрии — о тех обобщениях, которым за интересующий нас период подверглись являющиеся предметом нашего обсуждения понятия и геометрические идеи в связи с переходом к рассмотрению n-мерного пространства и общих — более чем двучленных — комплексных чисел.

Геометрии, рассматривавшиеся нами до сих пор (проективную, аффинную и метрическую), можно кратко охарактеризовать (см. мою "Эрлангенскую программу" 1872 года = Ges. Abh., т. 1, стр. 400), указав группы преобразований, оставляющие инвариантными основные отношения этих геометрий. Оказывается, что:

1. проективную геометрию характеризуют общие дробно-линейные преобразования, которые в неоднородной записи имеют вид

$$x' = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''},$$

$$y' = \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta'}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''},$$

$$z' = \frac{\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta''}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''};$$

2. аффинную геометрию характеризуют аналогичные преобразования, но без знаменателя:

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta,$$
$$y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta',$$
$$z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta'';$$

3. для метрической геометрии сюда присоединяется условие, что матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha''' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

этого преобразования должна быть, как говорят, ортогональной, что равносильно требованию инвариантности суммы квадратов координат:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

При этом некоторая тонкость заключается в том, будем ли мы ограничивать себя рассмотрением только тех преобразований, определители которых равны +1, или же допустим и определители, равные −1.

Вид этих формул наводит на мысль о почти само собой напрашивающемся обобщении — а именно, о том, чтобы вместо трех переменных x, y и z взять n переменных и соответственно этому заняться геометрией n измерений. Идея эта лежит настолько на поверхности, что о сколько-нибудь существенном прогрессе стало возможным говорить, начиная только с того времени, когда к этой обобщенной геометрии возник более глубокий интерес и когда были детально разработаны требующиеся здесь понятия.

Современному поколению развитие такого рода кажется настолько естественным, что представляется почти что скромностью ограничиваться при этом обобщении каким-либо конечным числом переменных. Поэтому я должен несколько более подробно рассказать о тех трудностях и о том упорном сопротивлении, которое эти идеи встречали еще долгое время после того, как они возникли впервые.

И здесь опять-таки именно философы создавали трудности на пути формирования этих понятий. Им нехватало ни понимания присущего математическим теориям имманентного смысла, ни понимания той силы, которая на первых порах отодвигает в сторону вопрос о транзиентном применении этих теорий. По-видимому, всему, что представляет собой в науке истинный прогресс, уготована горькая судьба в процессе критических дискуссий в первую очередь столкнуться с недовольством прочно обоснованной и строгой правоверности. И все же тайна поступательного движения заключается непосредственно в творчестве, которое из чистой радости, доставляемой предметом занятий, создает то, к чему толкает его дух.

Но кроме осуждения со стороны философов, утверждавших – как того и следовало ожидать, – что n-мерное пространство представляет собой некую бессмыслицу, возникла неожиданная трудность как раз противоположного свойства. Появились философические энтузиасты, которые из факта существования математической теории и из ее плодотворности сделали вывод о существовании некоего реального четырехмерного пространства, наличествующего в природе, а потому подлежащего экспериментальному обнаружению.

Ярким примером этого является лейпцигский астрофизик и философ Цёльнер. Цёльнер, родившийся в 1834 г., известен своими многочисленными и весьма ценными естественно-научными исследованиями и начинаниями – в частности, своими "научными сочинениями" 1878–1881 гг. Многие из его физических идей в области электродинамической теории материи обретают сегодня новую жизнь. Таковы, например, представление о непрерывной эмиссии мельчайших частиц, объяснение гравитации с помощью нескомпенсированных сил электрического притяжения и т.д. Экспериментальная физика также обязана ему многими достижениями. Цёльнер был первым, кто использовал радиометр для количественых измерений. Он успешно наблюдал протуберанцы при незатемненном Солнце и многое другое. Однако с этой, бесспорно значительной, естественнонаучной одаренностью Цёльнер сочетал тягу к экзальтированной мистике и к спекуляциям, что при его горячей натуре сыграло роковую роль. Всегда склонный со всей страстностью встать на сторону подавляемого, преследуемого традицией или модой свободного мнения, полный фантазии и раздражения против мнимых предрассудков, он попал в фарватер спиритизма и был здесь использован – чему удивляться не приходится – самым бессовестным образом.

Любопытно, что я сам – естественно, не понимая своей роли в этом – дал повод к окончательному повороту Цёльнера к спиритизму. Это было в середине 70-х годов, когда знаменитый американский спирит Слейд, исключительно ловкий фокусник – который, впрочем, через несколько лет был разоблачен – давал свои знаменитые сеансы, вызывавшие огромный всеобщий интерес. Незадолго перед тем я случайно, в разговоре на чисто научную тему, рассказал о результатах, полученных мною относительно заузленных замкнутых пространственных кривых (они опубликованы в девятом томе Math. Annalen; см. также Ges. Abh., т. 2, стр. 63). Речь в них шла о том, что наличие узла на замкнутой кривой может считаться **существенным** (т.е. инвариантным относительно деформации) свойством этой кривой лишь постольку, поскольку мы находимся в трехмерном пространстве; в четырехмерном же пространстве любая замкнутая кривая может быть развязана: при выходе из трехмерного пространства наличие узла перестает быть существенным топологическим свойством.

Замечание это Цёльнер воспринял с непонятным для меня энтузиазмом. Ему показалось, что он получил в руки средство для экспериментального доказательства "существования четвертого измерения", и он стал побуждать Слейда практически осуществить развязывание замкнутых шнуров. Слейд встретил это предложение своим обычным "we shall try it" ("постараемся"), и действительно, вскоре к великому удовольствию Цёльнера ему удалось осуществить этот эксперимент.

Что в этом опыте фигурировал шнур с застежкой и что застежку эту Цёльнер должен был сжимать большими пальцами обеих рук, в то время как Слейд держал свою руку поверх рук Цёльнера, об этом не стоит и упоминать. Из этого эксперимента Цёльнер заключил, что существуют "медиумы", находящиеся в тесной связи с четвертым измерением и обладающие способностью перемещать тела из нашего мира вещей в четвертое измерение и обратно, так что эти тела то исчезают, то вновь появляются для наших чувств!

С этого и началась приобретшая широкую популярность мистификация, которая в сочетании с гипнотизмом, внушением, религиозным сектанством, популярной натурфилософией и т.д. в течение долгого времени владела многими умами. Ее следы и поныне можно встретить на эстраде, в кино, во всякого рода фокусничестве и, наконец, даже в обиходном языке.

Большое возбуждение, в которое Цёльнер впал вследствие всех этих вещей и вследствие сопротивления, которое они встречали, вероятно, приблизило его конец. Им овладела лихорадочная деятельность; в последние свои годы он публиковал более печатного листа в день! В 1882 г., не достигши еще и пятидесяти лет от роду, он был оторван от своей работы апоплексическим ударом.

Вопреки всем этим недоразумениям, спорам и неразберихе, n-мерное пространство в конце концов завоевало право гражданства в царстве научных представлений, причем – что мы, математики, воспринимаем с особым удовлетворением – не только в узком математическом кругу, но и в более широкой среде теоретических физиков. В механике n-мерное пространство было воспринято как желанное вспомогательное средство, дающее, например, возможность математическими средствами отобразить жесткую систему с n степенями свободы. В кинетической теории газов приходится иметь дело с пространством $6N$ измерений, где N – число молекул в одном моле газа (каждая из молекул характеризуется шестью координатами, описывающими ее местоположение и скорость). Так как $N = 6 \cdot 10^{23}$, то, значит, мы работаем здесь с пространством, имеющим $36 \cdot 10^{23}$ измерений. Стимулирующая сила, заложенная в этом представлении, и упрощения, которым на этой основе могут быть подвергнуты разного рода проблемы, незабываемы для каждого, кто пользовался этим рабочим приемом.

Однако наиболее плодотворное использование получило представление именно о четырехмерном пространстве. Я имею в виду механику, где к трем пространственным координатам x, y и z в качестве четвертого "измерения" добавляют переменную t, – время, – фигурирующую во всех соотношениях этой науки. Значение, которое это представление, введенное впервые Лагранжем, но не получившее тогда надлежащего развития, приобрело в физике наших дней в связи с так называемым принципом относительности, известно достаточно хорошо.

С Лагранжа же начинается и историческое развитие учения о многомерном пространстве. Чисто формальные аспекты этого учения были продвинуты Коши и другими. Так, например, Кэли в 1844 г. (ему, следовательно, было тогда двадцать два года) опубликовал в 4-м томе "Cambridge Mathematical Journal" работу "Chapters on the analytical geometry of n dimensions" ("Главы из n-мерной аналитической геометрии"; Труды, т. 1, стр. 55 и далее). Однако первое связанное изложение этой теории в виде самостоятельной математической дисциплины было дано в 1844 г. в весьма своеобразном сочинении, о котором я вскоре расскажу более подробно, – в "Ausdehnungslehre" ("Учении о протяженности") преподавателя штеттинской гимназии Грассмана. Но прежде, чем рассказать о Грассмане, я должен упомянуть двух других авторов, которые по-разному пришли к тем же самым идеям и которые весьма способствовали тому, что пространство n измерений, R_n, примерно около 1870 г. стало общим достоянием рвавшегося вперед молодого поколения.

Здесь в первую очередь мы отметим Плюккера, который в своей книге "System der Geometrie des Raumes" ("Система геометрии пространства", 1846) в знаменитом § 258 (стр. 322 и след.) совершенно по-новому подошел к проблеме четырехмерного пространства. Плюккер основным элементом пространственной геометрии сделал прямую. Эта последняя задается двумя линейными уравнениями:

$$x = rz + \rho \quad \text{и} \quad y = sz + \sigma,$$

и, значит, четырьмя параметрами r, ρ, s и σ. Поэтому если прямую начать рассматривать в качестве пространственного элемента, то можно будет сказать, что наше пространство имеет четыре измерения. И это как раз и есть тот смысл, который Плюккер вкладывает в представление об n-мерном пространстве: это геометрия обычного пространства, основывающаяся на выборе некоторого конкретного базисного элемента, определяемого n параметрами. Представление об n-мерном пространстве как о пространстве каких-либо воображаемых точек он в одном разговоре на эту тему отверг как "слишком метафизическое".

Плюккер заложил основы новой дисциплины — так называемой *линейчатой геометрии* — учения об агрегатах прямых, задаваемых одним, двумя или несколькими уравнениями между r, ρ, s и σ. Агрегат, заданный уравнением $f(r, \rho, s, \sigma) = 0$, Плюккер называет *комплексом*, а пересечение двух комплексов — *конгруэнцией*. "Прямолинейные системы лучей", которые Куммер изучал в 1866 г., как раз и представляют собой конгруэнции в этом смысле. Подробности можно найти в книге Плюккера "Neue Geometrie des Raumes" ("Новая геометрия пространства", 1869/70).

Вторым я должен упомянуть Римана и его знаменитую вступительную лекцию "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" ("О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии"), читанную им в Гёттингене 10 июня 1854 г. (не следует смешивать с его диссертацией о тригонометрических рядах, которая — в другом разделе математики — тоже сыграла выдающуюся роль).

Как и во многих других областях математической науки, Риман является здесь истинным продолжателем творческих идей Гаусса. Гаусс в "Disquisitiones circa superficies curvas" (1827 г. = Werke, т. 4, стр. 217) рассмотрел так называемую "внутреннюю" геометрию поверхности. Исходя из выражения

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

для элемента дуги, он поставил вопрос о тех свойствах поверхности, которые не зависят от выбора криволинейных координат p и q. В этой связи Гаусс определил (из условия $\delta \int ds = 0$) геодезические линии, построил некий инвариант, названный им "кривизной" (см. выше. стр. 173 нашей книги), выразил его через коэффициенты E, F, G и их первые и вторые производные по p и q и т.д. и т.п.

Риман применил этот подход к пространству, или — как он говорит, чтобы избежать связанных с этим словом возражений, — к *многообразию n* измерений, в котором он элемент дуги задает произвольной положительно определенной квадратичной формой

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 .$$

Для этой формы он ставит вопрос о свойствах, не зависящих от выбора переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Здесь, конечно, особый интерес представляют многообразия, нормальная форма элемента дуги которых дается выражением

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 .$$

Основная задача состоит в том, чтобы охарактеризовать такие многообразия условиями, налагаемыми на коэффициенты a_{ik}. Большой интерес представляет также аналогичный вопрос для многообразий, линейный элемент которых может быть приведен к виду

$$ds^2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4} \sum\limits_{i=1} x_i^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i^2\right).$$

Первые представляют собой прямое обобщение евклидовой геометрии, а вторые включают в себя и неевклидовы пространства. По примеру элементарной теории поверхностей в R_3 Риман называет многообразия первой группы плоскими, а многообразия второй группы – многообразиями постоянной кривизны. В этой аналогии много соблазнительного, и тем не менее она содержит в себе некоторую фальшь, ибо свойства "быть плоским" или же "иметь постоянную кривизну" для двумерных образов означают нечто реальное лишь постольку, поскольку они находятся в трехмерном пространстве; у риманова же многообразия R_n вообще не идет речи ни о каком объемлющем его многообразии R_{n+1}.

Речь Римана произвела сенсацию, когда после его преждевременной кончины (1866 г.) она была в 1868 г. опубликована Дедекиндом в 13-м томе "Göttinger Abhandlungen". Риман в этой работе не только положил начало глубоким математическим исследованиям (здесь начинается новая математическая дисциплина – учение об общих свойствах и классификации дифференциальных форм $\Sigma\, a_{ik} dx_i dx_k$), но и коснулся вопроса о внутреннем устройстве нашего представления о пространстве, а также вопроса о применимости его идей к проблеме объяснения природы.

Странно видеть, как все это в гораздо более поздние времена положило начало новейшему естествознанию. В основе эйнштейновской теории относительности лежит линейный элемент ds^2, который после приведения его к простейшим координатам имеет вид

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2.$$

Таким образом, здесь речь идет об одном из выражений из числа тех, которые были рассмотрены Риманом, с той, правда, разницей, что форма эта не является положительно определенной.

А теперь мы обратимся к Грассману, идеи которого заслуживают более подробного изложения.

Личность Грассмана и его работы отчетливо предстают перед нами в его "Трудах", изданных в 1894–1911 гг. тремя двойными томами по поручению Лейпцигского научного общества. В третьем томе содержится подробная, написанная Энгелем биография, весьма заслуживающая того, чтобы ее прочитать. Эта статья Энгеля тем более достойна внимания, что она свободна от принятого в секте грассманианцев обычая некритически прославлять своего учителя.

Герман Грассман родился в 1809 г. в Штеттине. Он происходил из старинной протестантской пасторской семьи, в традиции которой входили и научные, и художественные интересы. Это происхождение Грассмана сыграло в его жизни важную роль. Под постоянным влиянием семейных традиций его тихая, медлительная натура развивалась по собственному пути и по собственным законам. Весьма характерно, что Грассман начал свой научный путь с изучения богословия и филологии, которыми он с 1827 по 1830 г. занимался в Берлине – отчасти под влиянием Шлейермахера, а в остальном – в порядке самообразования.

Лекций по математике Грассман не слушал никогда, но примерно в 1832 г. он начал самостоятельные занятия этой наукой. Только в 1839/40 г., уже после того, как он с 1836 г. был учителем в Штеттине (а еще раньше – в Берлине), Грассман подвергся дополнительному экзамену на звание преподавателя математики, написав работу о приливах и отливах. В 1842 г. он сделался преподавателем Штеттинской гимназии и оставался в этой должности до самой смерти, последовавшей в 1877 г.

Таким образом, несмотря на всю оригинальность и значение его трудов, Грассман никогда не преподавал в университете, равно как и вообще, вследствие своеобразного развития его научной деятельности, он как математик в разгар своей жизни не получил настоящего признания. Понятно, что Грассман часто жаловался на эту несправедливость судьбы, и тем не менее, в этом для него крылись и определенные преимущества, последствия которых можно заметить как в работах Грассмана, так и в его личности. Мы, работающие в высших учебных заведениях, вырастаем в атмосфере острой конкуренции с людьми, стремящимися к тем же целям, что и мы сами. Мы растем подобно дереву в лесу, которое чтобы иметь возможность выжить и отвоевать себе свою часть света и воздуха, должно устремляться ввысь, а не вширь. Но кто стоит одиноко, как Грассман, тот может свободно развиваться во все стороны, доводя свою сущность и свои дела до гармонического завершения и образуя из них единое целое. Правда, подобной всесторонности, воплощением которой был Грассман, с неизбежностью бывает присуща и определенная доля дилетантизма – черта, отчетливейшим образом повредившая его работам, написанным в старости.

Производит потрясающее впечатление количество и разнообразие вопросов, которыми Грассман занимался и в решение которых он внес творческий вклад. Он был не только отмеченным печатью высшей оригинальности математиком с ярко выраженными философскими интересами, но и физиком теоретического и практического склада, которому мы обязаны великолепными работами в области теории электрического тока, учения о свете, о гласных звуках. Исследования, относящиеся к последней из перечисленных областей, – они велись параллельно с исследованиями Гельмгольца и высоко им ценились – стали возможны в первую очередь благодаря тончайшему музыкальному слуху Грассмана, проявлявшего к музыке большой интерес и обладавшего исключительной музыкальной одаренностью. Наряду с этим развивались и его филологические наклонности. В частности, Грассман очень интересовался сравнительным языкознанием и сделал здесь много полезного. Эта область знания обязана ему словарем к Ригведе, сборником немецких народных песен, исследованиями о названиях растений в немецком языке и многим другим. При всем том Грассман еще находил время и для деятельнейшего участия в современной ему общественной жизни. Его живейшим образом интересовали политические и социальные вопросы, вопросы церковной жизни. На протяжении многих лет он был редактором газеты; у франкмасонов он считался своим и его возвели в звание мастера ложи; особо деятельный интерес проявлял он к миссионерству в Китае.

При виде такого сверхобилия деятельности никто не может удивиться тому, что Грассману хотя бы в чем-то одном все-таки было отказано природой – он был плохим учителем. Правда, и к этой своей профессии он относился со свойственной ему добросовестностью; однако его слишком любезное, скромное и неизменно приветливое обращение с учениками не способствовало тому, чтобы завоевать себе у них уважение. Грассман бывал доволен, если ему удавалось заинтересовать своим предметом нескольких учеников и смирялся с тем, что бестолковое большинство забавлялось, не очень оберегая его чувства, – яркий и предостерегающий пример того, что деловые качества преподавателя не всегда идут рука об руку с его научным значением и научной продуктивностью.

Обратимся теперь к научным достижениям Грассмана. Они представлены его большим трудом "Ausdehnungslehre" ("Учение о протяженности"), первое издание которого, посвященное одной лишь аффинной геометрии, было опубликовано в 1844 г.; второе издание (1861 г.) излагает ту же самую теорию, но совершенно иным способом и включает в себя также и метрическую геометрию. Обе книги написаны чрезвычайно малодоступным образом, в почти невозможной для чтения форме. В первой из них весь материал выводится из самых общих философских понятий без каких бы то ни было формул. Во второй автор оперирует уже с n координатами, вводит огромное количество новых терминов и алгорифмов. Написана она абсолютно строго и систематично, в евклидовой манере. Чтобы дать представление о ее содержании, я попытаюсь изложить суть этой книги нынешним языком.

Предметом исследования является некий континуум с n переменными (не однородными), т.е. некоторое R_n. В первом издании "Ausdehnungslehre" это R_n рассматривается с точки зрения аффинной геометрии; Грассман называет это теорией "линейной протяженности" ("lineale Ausdehnungslehre". Во втором издании сюда присоединяется величина

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

и, значит, возникает м е т р и ч е с к и й подход. Речь идет о распространении на это R_n обычной евклидовой геометрии. Интерес в первую очередь оказывается обращенным на линейные образы (точка, прямая, плоскость и т.д.), или – так как эта терминология при попытке обобщить ее на R_n служить отказывается – на некую последовательность образов $S_0, S_1, \ldots$

$\ldots, S_n$, которая с соблюдением закона двойственности может пробегаться и с другого конца.

Таким образом, до сих пор мы имели дело с основными образами Штейнера, распространенными на R_n. И вот теперь Грассман делает важный шаг вперед: он связывает с этими образами понятие о их в е л и ч и н е и начинает отличать от неограниченных образов вырезаемые из них их ограниченные куски (Stücke). Эти куски он и делает объектами геометрического рассмотрения. Он говорит об "отрезках", или "линейных элементах"("Linienteil"), о "плоских величинах", или о "плоскостных элементах" ("Ebenenteil"), о "пространственных элементах" ("Raumteil") и т.д. (см. мою "Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus", т. 2, 3-е изд., стр. 22 и далее, а также 31 и далее)[1].

Насколько в результате всего этого меняется по сравнению со Штейнером список основных образов, я хочу показать на примере обычного пространства R_3. Здесь я воспользуюсь аннотацией самого Грассмана в "Grunerts Archiv" (1845, т. 6 = Werke, т. I, ч. 1, стр. 297–312). Оказывается, что вместо четырех основных образов Штейнера – точки, прямой, плоскости, пространства – в списке Грассмана их фигурирует семь (или шесть). Составляя перечень этих образов, Грассман последовательно пользуется определителями и матрицами, хотя, конечно, он делает это и не в привычных для нас обозначениях, которыми буду пользоваться я.

Первый существенный шаг заключается у Грассмана в том, что он каждую точку наделяет некоторой "массой" m, и это представляет собой явное заимствование у Мёбиуса, с которым у Грассмана по сути было много общего. В результате получается четырехчленная – и, значит, однородная – система координат. Каждой точке он в качестве координат приписывает числа mx, my, mz и m – способ записи, при котором центр масс двух точек

$$m_1x_1,\ m_1y_1,\ m_1z_1,\ m_1$$

и

$$m_2x_2,\ m_2y_2,\ m_2z_2,\ m_2$$

получается тривиальным почленным суммированием компонент:

$$m_1x_1 + m_2x_2,\ m_1y_1 + m_2y_2,$$

$$m_1z_1 + m_2z_2,\ m_1 + m_2.$$

В случае, когда масса точки становится равной нулю – т.е. когда точка удаляется в бесконечность – система чисел

$$x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2,\ 0$$

или

$$X,\ Y,\ Z,\ 0,$$

[1] На русском книга выходила дважды: К л е й н Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2. – 1-е изд. – М.; Л.: ОНТИ, 1934; 2-е изд. – М.: Наука, 1987. По поводу терминологии Грассмана см., в частности, предисловие Д.А. Крыжановского к 1-му русск. изд. – *Примеч. пер.*

получающаяся вычитанием двух точек равной массы, изображает отрезок прямой, имеющий определенное направление, но могущий свободно перемещаться в пространстве. Из-за этого его свойства мы будем более вразумительно называть его "свободным отрезком"; он представляет собой хорошо известное из механики понятие "свободного вектора".

Теперь мы перейдем к *основным образам второй ступени*. Они получаются из матрицы, составленной из двух точек, имеющих равную массу:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix}.$$

(Так как рассмотрение точек с неравными массами по существу никакого обобщения не дает, то мы сначала рассмотрим случай масс, равных единице, а затем остановимся на случае, когда эти массы равны нулю.) Определители этой матрицы задают "линейный элемент", или "связанный отрезок" (связанный вектор), т.е. прямолинейный отрезок, способный перемещаться только вдоль одной какой-нибудь фиксированной линии – хорошо известная величина, представляющая собой силу, приложенную к твердому телу. Если мы подобным же образом скомбинируем две точки с нулевой массой, т.е. два "свободных отрезка"

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 \\ X' & Y' & Z' & 0 \end{pmatrix},$$

то получим так называемую "свободную плоскую величину" – часть фиксированной плоскости, имеющую лишь определенную величину и определенное направление обхода, а в остальном могущую свободно перемещаться в пространстве параллельно себе самой (в механике – это пара сил).

В качестве *образов третьей ступени* получаются

1. Из матрицы

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \end{pmatrix}$$

"плоскостной элемент", или "связанная плоская величина", способная перемещаться лишь по определенной плоскости.

2. Из матрицы

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 \\ X' & Y' & Z' & 0 \\ X'' & Y'' & Z'' & 0 \end{pmatrix}$$

– часть пространства с определенной величиной и определенной ориентацией.

И, наконец, если мы напишем

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{pmatrix},$$

то в качестве *образа четвертой ступени* еще раз получится часть пространства с определенной величиной и определенной ориентацией. Случай этот вычитанием одной из строк сразу же сводится к предыдущему.

Разумеется, всему этому следует предпослать основной *образ нулевой ступени* – чисто числовую величину.

Как нетрудно видеть, все эти объекты теснейшим образом связаны с механикой твердого тела. По сути дела они представляют собой то, что мы кружным путем, в виде векторного исчисления, получили из Англии, между тем, как уже давно, сами того совершенно не подозревая, имели это в Германии. Проложенный здесь путь впоследствии оказался в высшей степени полезным и для кристаллографии.

Но Грассман не только ввел в рассмотрение совершенно новые объекты. Он разработал также – как с точки зрения положенных в их основу общих идей, так и с точки зрения их реализации с помощью новых и притом весьма остроумных алгорифмов – своеобразные, открывающие возможность глубокого проникновения в них методы.

Общая идея, положенная в основу учения о протяженности и свойственная любой предрасположенной к геометрии натуре, заключается прежде всего в том, что непрерывная величина – и, значит, протяженность, пространство – для человеческого ума безусловно представляет собой понятие, столь же первоначальное, как и число, с которым оно поставлено лишь в косвенную связь – через посредство измерения; что, стало быть, неестественно – и не нужно – включать, как это делается у Евклида, "измерение" в число основных понятий и строить на нем теорию пропорций, ибо при этом континуум в результате введения иррациональных чисел жалким образом исчерпывается чем-то дискретным. Мысль о том, что этот унаследованный от Евклида путь построения геометрии является кружным и что на самом деле он даже и не ведет к цели – к пониманию континуума и к овладению им, – эта мысль имеет тенденцию постоянно возвращаться. Сегодня ей противостоит господствующая ныне тенденция к арифметизации математики (см. статью Цахариаса об элементарной геометрии в Enzykl., т. III, AB 9). Однако, например, и Гильберт в своих "Основаниях геометрии" вводит понятие предельного перехода только в конце изложения, после того, как им обосновано некое чистое исчисление отрезков, которым он, однако, не пользуется. Так же и Грассман протестует против того, чтобы считать геометрию только приложением арифметики, и претендует на то, чтобы его "теория протяженности" рассматривалась как самостоятельная научная дисциплина. От нее он отличает – опять-таки как самостоятельную дисциплину – "науку об измерениях" (Meßkunde).

Эта последняя строится на арифметике, и потому вполне последовательным выглядит, что Грассман занимается также и *основаниями арифметики*. Он был одним из первых, кто стал исследовать основные свойства обычного счета. – Как это ни странно, в Германии рядом с ним следует назвать в этой связи Мартина Ома, в течение долгого времени бывшего профессором Берлинского университета, брата физика Георга Ома, по имени которого назван "закон Ома". Не будучи глубоким математиком, Ом, тем не менее, создал вполне последовательную систему основ арифметики. –

Грассман нашел, что характеристическими для арифметических действий являются следующие их свойства: коммутативность и ассоциативность сложения:

$$a + b = b + a; \quad a + (b + c) = (a + b) + c;$$

коммутативность и ассоциативность умножения и дистрибутивность умножения по отношению к сложению:

$$a \cdot b = b \cdot a; \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Я здесь пользуюсь терминологией, взятой из французских и английских работ, так как она, будучи латинской, а значит, и международной, получила весьма широкое распространение. Грассман, само собой разумеется, создал для всех этих понятий собственные, немецкие термины.

Здесь его интерес был направлен в основном на то, чтобы выяснить, каким образом упомянутые законы арифметических действий могут быть распространены на более общие алгорифмы. Он пришел к мысли о введении *высших комплексных чисел*, умножение которых может не обладать свойством коммутативности. Из большого количества различных систем, построенных и исследованных Грассманом, – в одной статье, опубликованной в Журнале Крелля (1855, т. 49, стр. 10 и далее, стр. 123 и далее) он рассматривает не менее шестнадцати различных типов комплексного умножения! – я хотел бы упомянуть здесь лишь *комбинаторное произведение* [1]), которое в теории линейной протяженности используется им в качестве точного эквивалента более привычного нам аппарата определителей.

Допустим, что какая-либо точка пространства R_n задана выражением

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

где e_i – как-то отличающиеся друг от друга единицы. Тогда суммой двух таких точек естественно называть точку, получающуюся в результате

[1]) Теперь называемое *грассмановым произведением*. – *Примеч. ред. русского перевода.*

сложения коэффициентов, стоящих при одинаковых единицах:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i$$

– способ, который мы уже применяли при вычислении центра масс двух материальных точек в R_3. Умножение точек должно подчиняться определенным правилам. В частности, для него должно выполняться равенство

$$\Sigma\, x_i e_i \cdot \Sigma\, y_i e_i = \Sigma\,\Sigma\,(x_i y_k) e_i e_k\,,$$

где $e_i \cdot e_k = -e_k \cdot e_i$. Следовательно, e_i^2 должно равняться нулю, и в результате попарного перемножения этих единиц мы получим $\frac{n(n-1)}{2}$ новых единиц – так называемых единиц второй ступени. Аналогичным образом получаются единицы третьей, четвертой и т.д. до n-й ступени включительно. Если взять произведение, состоящее более чем из n единиц, то оно окажется равным нулю, так как по крайней мере одна из единиц встретится в нем дважды. Произведение n точек

$$\Sigma\, x_i e_i \cdot \Sigma\, y_i e_i \cdot \ldots$$

равняется определителю

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & & x_n \\ y_1 & y_2 & & y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

умноженному на единицу n-й ступени $e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots e_n$, которая с точностью до знака определена однозначно. Это умножение и в самом деле протекает параллельно процессу построения определителей. Тот факт, что произведение двух единиц дает нечто совершенно новое – единицу более высокой ступени, находит свое отражение в обстоятельствах геометрического свойства: две точки определяют отрезок и т.д.

Таково изложение всего этого материала во втором издании "Ausdehnungslehre". Мне тем более хотелось упомянуть о нем, что введение высших комплексных чисел, действия над которыми производятся по определенным правилам, составляет ныне неотъемлемую часть высшей алгорифмики, снова и снова привлекающей к себе внимание специалистов.

Наряду с такого рода алгорифмическими разработками Грассманом выполнено большое число интересных исследований по различным частным вопросам. В каждом из них кроется какое-нибудь необыкновенное достижение. Я могу лишь вкратце рассказать о немногих из них.

1. Во втором издании "Ausdehnungslehre" впервые в литературе дано исчерпывающее перечисление случаев, могущих встретиться при рассмотрении так называемой п р о б л е м ы П ф а ф ф а. Пфафф, учитель Гаусса, в 1814 г. поставил вопрос о том, как может быть упрощено выражение

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n ,$$

где X_i – функции, "произвольные" в тогдашнем смысле слова, т.е. дифференцируемые и без больших особенностей. Выражение это может охватывать очень различные случаи. Функции X_i могут быть совершенно произвольными и не зависящими друг от друга или же между ними могут иметься какие-нибудь соотношения; наиболее частный случай – это тот, когда рассматриваемое выражение представляет собой полный дифференциал; несколько более общий случай – когда оно оказывается полным дифференциалом после домножения на некоторый множитель. Одной из заслуг Грассмана является то, что он осознал и расклассифицировал эти случаи.

2. Особого упоминания заслуживают так называемые "линейные построения", т.е. продуцирование алгебраических образов посредством "планиметрических произведений" – теория, к сожалению, не получившая достаточной известности, хотя она и в высшей степени доступна для понимания. В изложении этого материала я ограничусь плоскостью, причем буду рассматривать лишь кривые второго и третьего порядка.

Хорошо известно так называемое маклореновское построение конических сечений – метод, сводящийся, естественно, к проективному построению, но придающий ему особенно прозрачное оформление.

Пусть x – точка искомого конического сечения (рис. 15). Тогда путь $xaAbBcx$, выходящий из точки x и состоящий из отрезков, последовательно строящихся с помощью трех произвольных точек a, b, c конического сечения и двух прямых A и B, возвращается обратно в точку x. Пользуясь этим и считая фиксированными точки a, b, c и прямые A, B, можно получить сколь угодно много точек конического сечения.

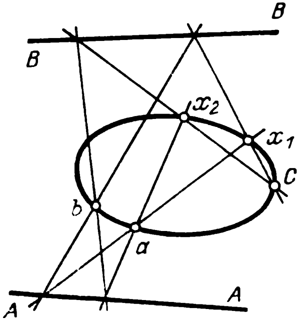


Рис. 15

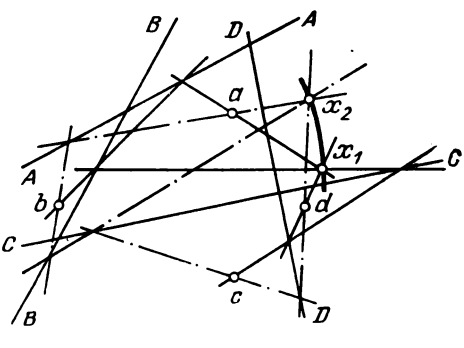


Рис. 16

Грассман символически выражает это равенством

$$xaAbBcx = 0$$

и стоящее в его левой части выражение называет *планиметрическим произведением*. Аналогичным способом можно определить — и даже механически построить — произвольную алгебраическую кривую. Кривая n-го порядка получается, когда x входит множителем в соответствующее планиметрическое произведение ровно n раз. Так, например, равенство

$$xaAbBxCcDdx = 0$$

задает кривую 3-го порядка. Построение этой кривой производится по схеме, изображенной на рис. 16. Если, исходя из этой схемы, построить соответствующий пишущий аппарат и путем проб установить его так, чтобы получилась первая точка x_0, то затем он опишет целую ветвь кривой C_3, на которой лежит x_0. Для того, чтобы получить другую (когда она существует) ветвь кривой C_3, необходимо установить прибор заново.

Наиболее существенным во всей этой теории является данное Грассманом доказательство того, что посредством соответствующим образом подобранного планиметрического произведения чисто геометрически может быть построна л ю б а я кривая n-го порядка. Этим закладывается столь простая основа теории алгебраических кривых, что едва ли может быть придумано что-нибудь более легкое.

На этом я вынужден закончить мои замечания по поводу результатов Грассмана. Однако прежде, чем окончательно распроститься с ним, я не могу не отдать должное тому своеобразному и странному влиянию, источником которого он был и следы которого чувствуются еще и в наше время. Две вещи, заключенные в характере Грассмана и в его судьбе, делают его — и чем дальше, тем больше — главой некоей школы или, лучше сказать, секты, погрязшей в обычном для таких ситуаций фанатизме. Первая из них — это его ярко выраженная склонность к своеобразным алгорифмам, к которым посвященный привыкает настолько сильно, что они приобретают для него обязательное значение и становятся характерной приметой, тесно сплачивающей адептов. При этом возникает серьезная опасность, что ортодоксальный интерес к корректности принятой манеры выражаться нанесет ущерб тому, что, собственно, и существенно с точки зрения математики — энергичному исследованию проблемы. Избежать этой опасности грассманианцам удавалось отнюдь не всегда. И, во-вторых, немаловажную роль играет то обстоятельство, что Грассман действительно не получил при жизни признания, которого заслуживал, и что его приверженцы видят в нем мученика, которого для того, чтобы восстановить его значение, надо окружить ореолом. Именно этим и объясняется, что они стремятся к необычному выбору терминов и вычислительных приемов, дабы наперед освободить себя и своего учителя, которому они задним числом хотят снискать почет и славу, от всего обыкновенного и таким образом уйти от сравнения и конкуренции. В качестве примера такого образа мыслей я сошлюсь на небезынтересную книгу Г. Грассмана-младшего "Projektive Geometrie" ("Проективная геометрия"), вышедшую в 1909 г. (первая часть второго тома вышла в 1913 г.). Для шести грассмановых основных образов здесь взяты термины: *Punkt, Strecke, Stab, Feld, Blatt, Block* (точка, отрезок, прут, поле, лист, блок). Несомненно, выражения эти поначалу несут в себе нечто подкупающее, ибо все они представляют собой немецкие – и притом короткие – слова. Однако при ближайшем рассмотрении все эти "усовершенствования" начинают принимать сомнительный оборот. Почему, например, отрезок (*Strecke*) свободно перемещается в пространстве, тогда как прут (*Stab*) можно перемещать лишь вдоль фиксированной прямой? Равным образом, необоснованной выглядит свободная подвижность поля (*Feld*) при том, что лист (*Blatt*) все время остается приклеенным к одной и той же плоскости. Кроме того, термин "поле" с давних пор применяется в механике совсем в другом смысле. Таким образом, в конечном счете у этих терминов оказывается отсутствующей та непосредственная наглядность, на которую они претендуют и наличие которой на первый взгляд представляется несомненным. Но так как в них к тому же абсолютно ничего не говорится об истории становления обозначаемых ими понятий – таков, например, термин "Linienteil" ("линейный элемент") – то по сути дела они представляют собой некий набор названий, которые должно чисто механически выучить наизусть. И пройдет долгое время, прежде чем научишься обращаться с ними с полной уверенностью.

Все эти атрибуты убежденного сектантства проявляются и у кватернионистов, учеников Гамильтона, к исследованиям которого по данной тематике мы сейчас и перейдем. Нечего и говорить, что грассманианцы и кватернионисты ведут друг с другом ожесточенную борьбу, причем обе эти школы в свою очередь распадаются на дико враждующие группировки.

Вильям Роуан Гамильтон родился в 1805 г. в Дублине. Как и Сальмон, он вышел из Тринити-колледжа, который блестяще окончил в ранней молодости. Уже в 1827 г. он получил почетную и видную должность директора обсерватории в Денсинке близ Дублина со званием королевского астронома Ирландии. Пост этот он сохранял до конца своей жизни (1865 г.).

Гамильтон обладал необычайной по блеску, многогранной одаренностью, замечательнейшим образом проявившейся уже в ранние его годы. В десятилетнем возрасте он наизусть знал Гомера, начал изучать арабский язык и санскрит; уже через несколько лет он знал тринадцать языков, которыми владел в совершенстве. При этом он имел столь же сильно развитые художественные наклонности; до самых поздних лет он был весьма плодовитым поэтом и в течение всей жизни находился в дружеских отношениях с Вордсвортом. – Тот, кто хотел бы поближе познакомиться с личностью Гамильтона и с историей его развития, с удовольствием прочтет толстую трехтомную биографию, опубликованную в 1882–1889 гг.

Р.П. Грейвзом. Однако, будучи написана нематематиком, она более посвящена Гамильтону как человеку, нежели как ученому. О конце жизненного пути Гамильтона в ней нет никаких подробностей. Как мне рассказывали в Дублине, в свои последние годы он вел себя странно, чтобы не сказать безумно; видимо, его слишком рано развившийся ум быстро перенапрягся и исчерпал себя раньше, чем об этом можно было бы подумать судя по его возрасту. Творчество Гамильтона обладает характерной чертой – всюду в его работах рассыпаны новые, остроумные наметки, которые затем теряются среди подробностей, так и не приводя ни к какому полному, завершенному результату.

Как и всё прочее, математический творческий процесс начался у Гамильтона в очень раннем возрасте. Примерно с 1824 по 1835 г. он занимался проблемами геометрической оптики и аналитической механики. Его достижения в этих областях мы рассмотрим несколько позже.

Начиная с 1833 г. он все более и более углубляется в рассмотрение сущности алгебраической алгорифмики. Его идеи в этом направлении были впервые изложены в работе "Theory of conjugate functions or Algebraic Couples; with a preliminary and elementary essay on Algebra as the Science of pure time" ("Теория сопряженных функций или алгебраических пар; с предварительным и элементарным рассуждением об алебре как науке о чистом времени"), опубликованной в 17-м томе "Transactions of Royal Irish Academy" за 1833 и 1835 гг. (см. стр. 293 и далее).

Как это и следует из названия, понятие числа рассматривается здесь как нечто такое, для чего существенным является время, а не пространство, потому что сначала речь идет об одной лишь идее следования – мысль эта идет от Канта, но Гамильтон прослеживает ее несколько дальше. Количественное, пространственное, с точки зрения Гамильтона, входит в круг наших представлений лишь с введением вычитания, благодаря которому становится возможным измерение. Затем разбирается запись $x + iy$; действия над комплексными числами – как это теперь принято повсеместно – он трактует как оперирование по некоторым, вводимым по соглашению, правилам с числовыми парами (x, y). Всед за этим идут общие аксиоматические рассмотрения, касающиеся обычных арифметических действий, похожие на более поздние конструкции Грассмана.

С этого времени Гамильтон все с бо́льшим интересом занимается вопросом о том, возможно ли – путем введения каких-либо новых комплексных чисел – перенести на случай пространства, т.е. на случай нашего обычного R_3, оказавшуюся такой полезной геометрическую интерпретацию (на плоскости) действий над числами вида $x + iy$. Его неустанные усилия в конце концов привели его в 1843 г. к открытию *кватернионов* – специально устроенных четырехчленных чисел, исследованию и распространению которых он с этого момента полностью посвятил всего себя. Теория этих чисел изложена им в следующих двух обстоятельных трудах:

1. "Lectures on Quaternions" ("Лекции о кватернионах"), Дублин, 1853 г.,

2. "Elements of Quaternions" ("Элементы теории кватернионов"), Лондон, 1866 г. (посмертное издание)[1]).

Очень скоро в математическом Дублине интерес к кватернионам стал превалировать над всем остальным; по ним был установлен специальный экзамен, и без их знания немыслимо было окончание колледжа. Сам Гамильтон сделал их чем-то вроде ортодоксальной части своего математического кредо и подгонял под них все свои геометрические и прочие интересы тем сильнее, чем больше к концу жизни становился односторонним и омрачался под действием алкоголя его ум.

Как я уже отмечал, вокруг Гамильтона сложилась школа, которая в своей жесткости и нетерпимости превзошла даже своего учителя. Она ничего не могла вызвать, кроме противодействия, и потому кватернионы — например, в Германии — встречали упорное сопротивление со стороны большинства математиков, пока они все-таки кружным путем, через физику, не проникли в виде векторного анализа, необходимого в первую очередь в динамике. И если бы нам нужно было высказать о них сегодня наше суждение, то пришлось бы сказать нечто вроде того, что кватернионы хороши и полезны на своем месте, но что все же они не имеют того значения, которое имеют обычные комплексные числа.

И если теперь я расскажу о кватернионах — как я их уяснил себе с течением времени — несколько более подробно, то я буду придерживаться при этом привычных нам идей и буду сознавать, что я не только становлюсь на точку зрения, резко противоположную позиции гамильтонианцев, учитель которых придал своему открытию совсем другой внешний облик, но что с точки зрения этой партии я и сейчас не имеют права называть кватернионами то, о чем я собираюсь говорить (и что более подробно изложено в первой тетради "Теории волчка"[2])). Однако я слишком часто убеждался в тщетности попыток добиться здесь какого-либо взаимопонимания, чтобы принимать в расчет эти возражения.

Я буду исходить из геометрической интерпретации чисел вида $x + iy$ на плоскости. Как известно, число $x + iy$ обозначает как точку с координатами x и y, так и отрезок, соединяющий эту точку с началом координат. Сложение

$$(x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b)$$

изображается сложением двух направленных отрезков, а значит, может быть интерпретировано как параллельный перенос всей плоскости на отрезок $a + ib$. Умножение же

$$(x + iy) \cdot (a + ib) = (x + iy) \cdot \rho \cdot e^{i\varphi}$$

вызывает вращение плоскости вокруг начала координат на угол φ с одновременным удлинением всех отрезков в отношении $1:\rho$, т.е. является

[1]) Имеется немецкий перевод П. Глана (Лейпциг, 1881).

[2]) Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels, Heft 1, Kap. I, § 7.

сочетанием гомотетии с вращением, или, как мы будем говорить, — растяжением с вращением (*Drehstreckung*).

Таким образом, сложение и умножение, взятые совместно, охватывают совокупность всех возможных движений плоскости и даже — с учетом растяжения — несколько больше. Отсюда и вытекает целесообразность применения в вопросах метрической геометрии алгебраических вычислений с привычными для нас комплексными числами.

А теперь возникает вопрос о том, каким образом при помощи надлежащих действий над какими-нибудь комплексными числами более высокого типа могут быть изображены соответствующие преобразования в случае пространства. Для начала можно попытаться рассмотреть какое-нибудь трехчленное выражение, обозначая посредством $ix + jy + kz$ точку с координатами x, y и z или же отрезок — а мы говорим: вектор, — соединяющий эту точку с началом координат. (Термин "вектор" впервые появляется у Гамильтона, в "Quarterly Journal", 1845, т. I, стр. 56.)

Как и в случае плоскости, сложение двух таких векторов изображает параллельный перенос пространства. Но с умножением дело обстоит иначе. Именно, вращение вокруг начала координат в пространстве определяет некоторую ось, и потому растяжение с вращением, которое в случае плоскости требовало двух констант, в пространстве может быть охарактеризовано лишь четырьмя параметрами:

два из них определяют направление оси вращения: $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$, причем $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;

один описывает угол поворота

и

один описывает растяжение r.

Гамильтон строит четырехчленный агрегат — кватернион:

$$r\cos\frac{\omega}{2} + ir\sin\frac{\omega}{2}\cos\alpha + ir\sin\frac{\omega}{2}\cos\beta +$$

$$+ kr\sin\frac{\omega}{2}\cos\gamma = t + ix + jy + kz.$$

Чисто числовую часть t этого кватерниона он называет *скалярной*, а направленную часть $ix + jy + kz$ — *векторной частью* кватерниона. Чистый вектор получается при $r\cos\frac{\omega}{2} = 0$, откуда следует, что в этой теории он может быть истолкован двумя способами: 1) как отрезок; 2) как растяжение с вращением на 180°, которое мы, чтобы быть последовательными, назовем "растяжением с перевертыванием" ("Klappstreckung").

Пункт 2) еще раз объясняет нам, почему для того, чтобы изобразить растяжение с вращением в пространстве, недостаточно чистого вектора (трехчленного выражения): такой вектор мог бы описывать поворот только на 180°; для поворота на произвольный угол требуется именно кватернион с его скалярной частью.

Весьма примечательно, что задача описания общего растяжения с вращением в случае пространства, т.е. задача композиции двух таких преобразований, была почти в то же самое время (в 1840 г.) решена Олиндом Родригесом (см. Журнал Лиувилля, т. 3), который исходил из совершенно иной точки зрения. Но еще более поражает, что, как показало рукописное наследие Гаусса, он обладал этим решением уже в 1819 г. На стр. 357 и следующих восьмого тома его "Трудов" имеются заметки об этом преобразовании, которое он называет "мутацией" пространства[1].

Однако в то время как все упомянутые авторы, складывая два растяжения с вращением, опираются на геометрические соображения, Гамильтон начинает с чисто формального умножения своих кватернионов, подчиняя его определенным правилам. Как и Грассман, он отказывается от коммутативности умножения, полагая

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$jk = i, \quad ki = j, \quad ij = k,$$

$$kj = -i, \quad ik = -j, \quad ji = -k.$$

Что же касается остального, то его умножение дистрибутивно, так что

$$(d + ia + jb + kc) \cdot (t + ix + jy + kz) =$$
$$= dt - ax - by - cz + i(at + dx + bz - cy) +$$
$$+ j(bt + dy + cx - az) + k(ct + dz + ay - bx).$$

Векторы, в частности, перемножаются следующим образом:

$$(ia + jb + kc) \cdot (ix + jy + kz) =$$
$$= -(ax + by + cz) + i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx).$$

---

[1] По этому поводу см. статью П. Штеккеля в Собрании сочинений Гаусса (т. 10, 2. Abh. IV, стр. 68), а также статью Э. Штуди в Enzykl. (т. I, A 4, стр. 173). Позже, в письме к Клейну от 28 апреля 1917 г. Штеккель по поводу формул умножения писал: "Эйлер нашел их, решая проблему Ферма о представлении любого целого числа в виде суммы четырех квадратов, и 4 мая сообщил их Гольдбаху (Corresp., стр. 452). Они содержатся в работе "Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum esse summam quator quadratorum" ("Доказательство теоремы Ферма о том, что любое число является суммой четырех квадратов"), Novi Comment. Petrop., 5 (1754/5), 1760, § 93; Opera, т. I, 2, стр. 369; см. также "Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata" ("Новые доказательства теоремы о разложении чисел в сумму квадратов"), Nova Acta Petrop., 1777, II, 1780, Opera, т. I, 3, стр. 229 (§ 9). Но особого упоминания заслуживает статья Эйлера "Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile", Novi Comment. Petrop. 15 (1770), 1771, в которой он вводит ортогональные преобразования трех, четырех и пяти переменных, выводя при этом [упомянутые выше] соотношения. Вы, конечно, догадываетесь, откуда я взял все это: речь идет о гауссовой шкале мутаций в моей главе о комплексных числах [loc. cit.], которой я сейчас занят. При этом я придаю определенное значение эйлеровым формулам, потому что все ясней становится, насколько все-таки хорошо знал Гаусс своего Эйлера". – *Примеч. ред. нем. изд.*

Абсолютная, скалярная, часть этого кватерниона по терминологии, идущей от Грассмана, называется *внутренним произведением* двух исходных векторов, а векторная часть – их *внешним произведением*. Таким образом, внутреннее произведение представляет собой скаляр, а внешнее – вектор.

Я хотел бы сразу же обратить внимание на три важных различия, имеющихся между грассмановым комбинаторным произведением и гамильтоновским подходом:

1. У Грассмана произведение двух единиц $e_i \cdot e_k$ не выражается через основные единицы. У Гамильтона же, напротив, эти произведения являются функциями – причем даже линейными – исходных единиц. Величины высших порядков у него не появляются. В результате всего этого постановка вопроса о построении системы высших комплексных чисел становится несколько иной. Вычисления с кватернионами можно мыслить себе с произвольным повторением операций сложения и умножения, что в грассмановой системе не допускается.

2. Грассман с самого начала движим интересом к n-мерному пространству, чего совершенно нет у Гамильтона.

3. У Гамильтона по сравнению с Грассманом есть, однако, одно дополнительное понятие – понятие *поля*, – делающее кватернионы важными с точки зрения физики[1].

Обе части кватерниона Гамильтон рассматривает как функции точки; он представляет себе, что к каждой точке пространства приложен кватернион, т.е. скаляр и вектор. К такому полю кватернионов

$$t(x, y, z) + iu(x, y, z) + jv(x, y, z) + kw(x, y, z)$$

он применяет определенные операции, в результате чего возникают новые поля. Операции эти Гамильтон, следуя специальной, разработанной в Кембридже методике, изображает с помощью так называемых "символических обозначений". Скажем, теорему Тейлора в кембриджской школе принято было записывать в виде

$$f(x + h) = e^{h \frac{\partial}{\partial x}} \cdot f(x),$$

где[2] выражение $e^{h \frac{\partial}{\partial x}}$ полагалось мыслить расписанным по правилу разло-

---

[1] Собственно говоря, понятие это имеется и у Грассмана (в форме "функции", или экстенсивной величины), причем даже в более общем – и как раз поэтому в менее доступном – виде. Однако Гамильтон с самого начала нацелен на метрическую, а Грассман на аффинную сторону дела.

[2] Этот символический способ записи восходит к Лагранжу. См. его работу "Sur une nouvelle espèce de calcul rélativ à la différentiation et l'integration des quantités variables" (1772, Oeuvres, т. III, стр. 441–476).

жения показательной функции в ряд, а входящие в него произведения $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} f(x)$ означали частные производные $\frac{\partial^{\nu} f(x)}{\partial x^{\nu}}$.

Применяя этот способ и здесь, Гамильтон строит из частных производных по координатам точки поля так называемые символические "операторы". Важнейшим из них является оператор, обозначенный Гамильтоном знаком ∇ и названный им, вследствие сходства с одним древнееврейским музыкальным инструментом, "наблой":

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}.$$

Формально с этой наблой обращаются так, как если бы она была вектором. Будучи применена к полю кватернионов, она немедленно приводит к ряду важнейших понятий векторного анализа. Так, например, если t – скаляр, то

$$\nabla t = i\frac{\partial t}{\partial x} + j\frac{\partial t}{\partial y} + k\frac{\partial t}{\partial z}$$

является вектором, "градиентом t", указывающим в каждой точке величину и направление наибольшего возрастания t.

Будучи применена к вектору $iu + jv + kw$, операция ∇ дает кватернион

$$\nabla (iu + jv + kw) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) +$$

$$+ i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Скалярная часть этого кватерниона называется *дивергенцией* поля, а векторная – его *вихрем*.

Попытка разъяснить здесь то исключительное значение, которое понятия эти имеют для физики, завела бы нас слишком далеко. Я укажу лишь, что двукратное применение оператора ∇ к скаляру приводит к скаляру

$$\nabla^2 t = -\Delta t = -\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right),$$

играющему фундаментальную роль в теории потенциала (см. выше стр. 34–35, 83, 85).

Легкость и изящество, с которыми получаются здесь глубочайшие по своему содержанию теоремы, действительно поразительны. Этим и объясняется восхищение кватернионистов своей системой, восхищение, которое отвергало все остальное и, как уже отмечалось, вскоре вышло за пределы разумного настолько, что стало наносить ущерб не только математике в целом, но и самой теории кватернионов. Такому развитию событий способствовал и доведенный до совершенства, с благоговейным почитанием возделанный формализм. Возникли большие надежды на дальнейшее планомерное развитие этой теории по привычным математическим образцам. К построенному на основе четырех арифметических действий исчислению кватернионов должна была примкнуть алгебра с подробно разработанной теорией уравнений вида $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где $P(x_1, \ldots, x_n)$ – многочлен, зависящий от кватернионов $x_1, \ldots, x_n$. Конечной целью явилось – и остается поныне – построение теории функций кватернионов, от которой ждали совершенно новых, необычайных по своему охвату открытий общематематического значения. Чтобы содействовать достижению этой цели, не очень определенной, но принятой с верой в нее, в 1895 г. был даже основан "Всемирный союз в поддержку кватернионов"! Независимо даже от того, что всегда более правильно скептически относиться к такого рода культивированию и насаждению какого-либо одного научного направления, теперь уже можно с определенностью утверждать, что предприятие это должно считаться потерпевшим крушение или, во всяком случае, бесплодным. Следование по набросанному выше пути – который претендовал на новизну, хотя фактически сводился к почти буквальному перенесению давно известных идей на один-единственный новый объект и, значит, вообще не содержал в себе никакой гениальной концепции – повело ко всякого рода обобщениям известных теорем, которые при такой общности теряли свою специфику и становились беспредметными. Только в отдельных случаях получились частные результаты, доставляющие известное удовлетворение. Так, например, оказалось, что в области кватернионов не имеет места основная теорема алгебры, зато каждый кватернион удовлетворяет некоторому кубическому уравнению.

Однако, упрямо следуя намеченным путем, кватернионисты упустили из виду более глубокие проблемы, представлявшие для науки действительный интерес. Так, из-за своей предвзятости они не поняли того простого факта, что, кинув на сложившуюся ситуацию взгляд сверху, они приобрели бы отчетливое представление относительно границ области, где применение их теории является плодотворным, и что вместе с этими ограничениями они получили бы и четкие указания относительно ведущего к успеху пути.

Этим более глубоким осознанием создавшегося положения вещей мы обязаны Кэли. В своей работе "A Memoir on the Theory of Matrices" ("Мемуар по теории матриц"; Philosophical Transactions, 1858) он развил некоторое матричное исчисление, имеющее дело с 4-, 9-, 16-,..., n^2-членными комплексными числами и в качестве частного случая охватывающее также и кватернионы. Действия над матрицами отталкиваются у Кэли от очень простой идеи, состоящей в том, что с матрицами, возникающими в теории линейных подстановок, следует обращаться по правилам, инспирированным этой теорией. Соответственно этому сложение двух матриц должно осуществляться сложением соответствующих их элементов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{11} \ldots a'_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a'_{n1} \ldots a'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a'_{11} \ldots a_{1n} + a'_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n + a'_{n1} \ldots a_{nn} + a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Умножение же матриц производится последовательным выполнением представляемых ими подстановок, т.е. по хорошо известному правилу умножения определителей. В случае, когда $n = 2$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix}.$$

Правило перемножения кватернионов содержится в этом правиле в качестве частного случая.

В самом деле, будем понимать под i обычный квадратный корень из -1 и положим

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d + ia & b + ic \\ -b + ic & d - ia \end{pmatrix},$$

так что определитель $\alpha\delta - \beta\gamma$ окажется равным $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Положим соответственно

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + ix & y + iz \\ -y + iz & t - ix \end{pmatrix}$$

и выполним умножение по указанному правилу, принимая во внимание, что $i^2 = -1$. Тогда получится некоторая новая матрица, имеющая вид

$$\begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D + iA & B + iC \\ -B + iC & D - iA \end{pmatrix},$$

где четыре величины A, B, C и D имеют следующие значения:

$$A = dx + at + bz - cy,$$

$$B = dy - az + bt + cx,$$

$$C = dz + ay - bx + ct,$$

$$D = dt - ax - by - cz.$$

Таким образом, мы действительно по двум кватернионам $d + ia + jb + kc$ и $t + ix + iy + kz$ построили третий, который получается из них умножением по Гамильтону.

Результат этот, поначалу кажущийся неожиданным, при ближайшем рассмотрении оказывается абсолютно понятным, если исходить из геометрического существа рассматриваемой ситуации. Поскольку действия над кватернионами тем самым представляют собой не что иное, как оперирование с бинарными линейными подстановками, мы можем заключить, что для плодотворного применения кватернионов характерным является случай, когда в рассмотрении участвуют такого рода подстановки. Это объясняет, в частности, почему кватернионы так полезны в теории растяжений с вращением. Каждое растяжение с вращением оставляет неподвижной мнимую сферическую окружность, т.е. геометрический образ, точки которого рационально выражаются через один-единственный параметр λ. Поэтому, если записать λ в однородном виде $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, то при растяжении пространства с одновременным его вращением параметры λ_1 и λ_2 подвергнутся бинарной линейной подстановке.

Сходным образом объясняется и блеск, с которым кватернионы применяются в теории относительности. Здесь инвариантной оказывается поверхность второго порядка $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$ в R_4. Эта поверхность несет два семейства прямых, каждое из которых описывается одним параметром $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ или $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$. При растяжении с вращением каждый из этих параметров подвергается бинарной линейной подстановке[1]).

[1]) По этому поводу см. Klein F. Ges. Abh., т. 1, № XXX, стр. 533 и далее.

Глава пятая

МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА В ГЕРМАНИИ И АНГЛИИ ПРИМЕРНО ДО 1880 г.

Механика

Говоря о грассмановской теории протяженности и о теории кватернионов, мы уже касались вопроса о том, как развивались основные геометрические понятия механики твердого тела. В первой части этой главы мы расскажем о дальнейшей разработке общей аналитической механики в том классическом виде (теория дифференциальных уравнений и траекторий произвольных механических систем), который был придан ей Лагранжем.

Чтобы иметь некоторые отправные точки, я кратко перечислю здесь ряд важнейших, ставших со времен Лагранжа общепринятыми, подходов, причем, конечно, ограничусь случаями умеренной общности и буду пользоваться современной терминологией.

Пусть нам дана, как говорится, система с n степенями свободы, т.е. система, положение которой в любой момент времени полностью определяется n независимыми параметрами $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Тогда движение ее будет описываться с помощью следующих двух имеющих важное значение величин: 1. Живой силы, или кинетической энергии $T = \Sigma a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$. В этом выражении $\dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$ представляют собой скорости изменения q, а a суть известные функции q.

2. Силовой функции, или потенциальной энергии U. (Замечу, что величина, принятая в качестве силовой функции в настоящее время, имеет обратный знак по сравнению с той, которая использовалась прежде, в результате чего она и стала совпадать с потенциальной энергией.)

Обе эти величины T и U в случае замкнутой, не подвергающейся воздействию внешних сил системы S явно от времени t не зависят, и движение такой системы описывается так называемыми уравнениями Лагранжа, которые, если ввести "компоненты импульса"

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

имеют вид

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}.$$

В случае, когда имеются внешние силы, которые мы можем, например, считать заданными функциями времени, к правой части этого уравнения добавляется дополнительное слагаемое P_α. Эти уравнения можно несколько преобразовать, введя так называемую "функцию Лагранжа"

$$L = T - U.$$

Так как U от $\dot{q}_\alpha$ не зависит, то получается, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_\alpha, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \dot{p}_\alpha.$$

После этого главная задача всей аналитической механики сводится к тому, чтобы, осознав всю важность этих уравнений и все богатство заключенного в них содержания, научиться применять их в конкретных частных случаях.

Интегралом уравнения

$$\dot{p}_\alpha = \frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

является закон сохранения энергии

$$T + U = h = \mathrm{const}$$

или, при наличии внешних сил,

$$T + U = h + \int P_\alpha\, dt$$

– закон, который в силу своего фундаментального значения правит всей механикой.

Все эти соотношения и их обобщения, которых я не могу коснуться здесь более подробно, часто выводятся также из так называемых *вариационных принципов*; вместо дифференциальных уравнений эти принципы исходят из соответствующих интегралов, обязанных принимать минимальные или "стационарные" значения, – условие, сводящееся к равенству нулю так называемой первой вариации этих интегралов. Я укажу здесь три таких принципа, которые будут нам нужны в дальнейшем.

1. Уравнения Лагранжа непосредственно извлекаются из вариационной задачи

$$\delta \int\limits_{q_1^0, \ldots, q_n^0;\ t^0}^{q_1^1, \ldots, q_n^1;\ t^1} L\,dt = 0$$

(с фиксированными пределами интегрирования). Удивительно, что у Лагранжа этот подход обнаруживается лишь между строк; этим и объясняется тот странный факт, что в Германии, а вследствие того и во Франции, этот принцип – главным образом под влиянием Якоби – называется *принципом Гамильтона*, тогда как в Англии это название никем не было бы понято; там это уравнение носит корректное, но мало наглядное имя *принципа стационарного действия.*

2. Получивший широкое распространение *принцип наименьшего действия* представляет собой другую, предпочитаемую Лагранжем форму, к которой он пришел в начале своих занятий (1759 г.). В XVIII столетии этот принцип вызывал живой интерес, особенно со стороны философов, поскольку ему приписывалось большое значение как аргументу в пользу телеологического миропорядка. Здесь особенно следовало бы вспомнить Мопертюи.

Эта форма принципа получается из первой его версии комбинированием равенств

$$L = T - U \quad \text{и} \quad h = T + U,$$

что дает

$$2T = L + h.$$

Таким образом,

$$\int L dt = \int 2T dt - h(t_1 - t_0),$$

что дает

$$\delta \int 2T dt = 0,$$

где, однако, теперь надо в качестве дополнительного условия принять равенство $T + U = h$. Таким образом, хотя пределы

$$q_1^0, \ldots, q_n^0 \quad \text{и} \quad q_1^1, \ldots, q_n^1$$

и остаются неизменными, для пределов t^0 и t^1 это уже оказывается не так. Интеграл $\int 2T dt$ представляет собой то, что издавна называлось "действием" ("actio"), откуда и ведет свое название этот принцип, который якобы должен был так много сказать нам о целесообразно экономной сущности природы.

3. В новейшие времена вариационный принцип получил благодаря Якоби еще одну, чрезвычайно важную формулировку, из которой время полностью исключено. Полагая

$$T = h - U = \sqrt{T(h - U)},$$

Якоби получает вариационный принцип в виде

$$\delta \int_{q_1^0, \ldots, q_n^0}^{q_1^1, \ldots, q_n^1} \sqrt{(h-U)\, \Sigma a_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, dq_\beta} = 0.$$

В этой форме принцип определяет, естественно, только траекторию, но не время, за которое она пробегается.

Если в этом *принципе Якоби* считать, следуя Риману,

$$\sqrt{\Sigma a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta} = \sqrt{ds^2} = ds$$

элементом дуги в n-мерном пространстве, то получится равенство

$$\delta \int \sqrt{h - U} ds = \delta \int v ds = 0,$$

где v означает скорость движущейся в n-мерном пространстве точки. Это дает чрезвычайно прозрачную, геометрическую интерпретацию исходной механической задачи. В этой последней форме вариационный принцип нам и будет наиболее удобен в дальнейшем.

А теперь мы возвратимся к Гамильтону и к его достижениям в области механики. Заслуживает особого внимания то обстоятельство, что успехи Гамильтона в механике являются всего лишь следствиями его работ в другой, гораздо более специальной области, а именно – в *геометрической оптике,* или, как говорит Гамильтон, в "теории лучей" ("theory of rays"). В эту теорию, трактующую проблемы распространения световых лучей в прозрачных средах без учета интенсивности, длины волны, поляризации и т.д., Гамильтон внес вклад в виде следующих четырех фундаментальных работ, опубликованных в "Transactions of Royal Irish Academy":

т. 15 – "On systems of rays" ("О системах лучей"; датирована 1824-м годом, том опубликован в 1828 г.),

т. 16 – "Supplements" I и II ("Приложения" I и II; датированы 1830-м годом, том опубликован в 1833 г.),

т. 17 – "Supplement III" ("Приложение III"; датировано 1832-м годом, том опубликован в 1837 г.).

Что касается формы этих работ, то о ней можно сказать все, что угодно, кроме того, что она безупречна; но несмотря на плохую обозримость, неудачное расположение материала, невыполненные обещания и повторы в работах этих заключено поразительное богатство мыслей.

Цель, которую преследовал Гамильтон, заключалась в изучении устройства и усовершенствовании оптических инструментов. Поэтому, когда он говорит об оптических средах, под этим надо в первую очередь понимать некоторую дискретную последовательность различающихся по своим свойствам слоистых однородных изотропных тел, быть может граничащих друг с другом по каким-либо отражающим поверхностям, и лишь во вторую очередь здесь может идти речь о какой-нибудь среде с непрерывно меняющейся плотностью, вроде атмосферы.

Чтобы понять, каким образом проблема распространения лучей в средах такого рода оказывается связанной с механикой, мы должны будем стать на точку зрения эмиссионной теории света, в которой испускаемый источником свет трактуется как поток обычных материальных частиц. Если допустить, что движение этих частиц в каждой отдельной однородной среде обладает постоянной силовой функцией U, которая в среде с большей плотностью принимает меньшее значение, то получится световой луч. В однородной среде этот луч прямолинеен, а на границе двух сред он меняет свое направление в точном соответствии с экспериментально установленным Снеллиусом законом преломления. Это в точности ньютоновская эмиссионная теория света, только изложенная в современных терминах.

Для скорости луча v (которую не следует смешивать со скоростью v из волновой теории; см. ниже стр. 22 и след.) имеет место соотношение

$$v = c \cdot n,$$

где c — скорость света в пустоте, а n — показатель преломления среды.

Именно в этом частном случае и был впервые осознан и сформулирован принцип наименьшего действия, причем — в соответствии с последней из приведенных выше форм — в виде

$$\delta \int v ds = 0.$$

Впервые он был высказан Ферма, по имени которого и называется "принципом Ферма". Само собой разумеется, что у Ферма этот принцип имел другой вид; вместо v Ферма употреблял показатель преломления, вместо интеграла писал сумму, а использование вариации было заменено требованием, чтобы эта сумма (при выполнении соответствующих дополнительных условий) принимала минимальное значение.

С этого Гамильтон и начал. Однако подробное изложение основных его результатов стоит предварить рассмотрением одного вопроса, возникшего у Гамильтона как бы попутно, в третьем "Дополнении", но тем не менее широко прославившего его.

Распространяя принцип Ферма на кристаллические среды, Гамильтон обобщил его. Он стал рассматривать v как функцию не только координат точки x, y, z и добавленного им показателя цвета χ ("chromatic index"), но еще и направляющих косинусов α, β, γ (где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) по отношению к некоторой привилегированной системе осей кристалла. Это дало ему возможность присоединиться к изучению распространения света в двухосных кристаллах, чем как раз в это самое время весьма усердно занимался Френель. В 1832 г. Гамильтон начал детальное изучение так называемой френелевской волновой поверхности в двуосных кристаллах. Он был первым, кто составил себе ясное представление о ее геометрической форме и обнаружил существование на ней четырех действительных двойных точек и четырех плоскостей, касающихся ее вдоль конических сечений, точнее — окружностей. Опираясь на это, Гамильтон предсказал явление двойной — внутренней и внешней — конической рефракции в двуосных кристаллах, которое затем действительно было экспериментально обнаружено в 1833 г. его коллегой-физиком Ллойдом на арагоните — триумф теории, подобный которому знала разве лишь астрономия.

Для сегодняшнего геометра френелевская поверхность больше не представляет собой чего-либо необычного; она является частным случаем куммеровской поверхности с шестнадцатью двойными точками и шестнадцатью двойными плоскостями; она характеризуется ее вещественными компонентами, а кроме того – некоторыми симметриями; в общих чертах об этой куммеровской поверхности мы уже говорили выше (см. стр. 189).

Но как бы важны сами по себе ни были эти открытия Гамильтона, их все же нельзя сравнить с той по-настоящему капитальной идеей, которая была им предложена в аналитической механике. Мы приблизимся к этой идее, если выразим принцип Ферма $\delta \int v\,ds = 0$ через понятия волновой теории и поразмыслим над физическим смыслом получающихся таким путем формул. Ради простоты мы ограничимся случаем изотропных сред.

В то время как в эмиссионной теории мы имели соотношение $v = c \cdot n$, где n – показатель преломления, в волновой теории скорость v' дается выражением $v' = \dfrac{c}{n}$. Таким образом, $v = \dfrac{c^2}{v'}$ и интеграл

$$\int_0^1 v\,ds = \int_0^1 c^2 \frac{ds}{v'} = \int_0^1 c^2 dt' = c^2 (t'_1 - t'_0),$$

если отвлечься от множителя c^2, означает время, потребное волне для того, чтобы от точки x_0, y_0, z_0 переместиться в направлении $0 \to 1$ к точке x_1, y_1, z_1. Тем самым принцип Ферма – принцип наименьшего действия – неожиданным по своей простоте способом превращается в "принцип наискорейшего прибытия".

Основополагающая идея Гамильтона заключается в том, чтобы интеграл действия Ферма $\int_0^1 v\,ds = W$ рассмотреть как функцию $W(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1)$ начальной и конечной точек. Иначе говоря, после того, как значение W вычислено из соотношения $\delta W = 0$ при фиксированных пределах, Гамильтон начинает рассматривать его как функцию этих пределов. Эту функцию W он называет "характеристической" – в книгах по физике величина $\dfrac{1}{c} W$, т.е. $c(t'_1 - t'_0)$, часто именуется "оптическим путем" – и выдвигает ее на первый план при рассмотрении всех оптико-геометрических задач – в частности, тех из них, которые возникают при изготовлении и использовании оптических приборов.

При таком подходе прежде всего достигается формальный прогресс. Действительно, пусть n_0 – показатель преломления среды, в которой лежит исходная точка x_0, y_0, z_0 и пусть α_0, β_0, γ_0 – направляющие косинусы луча, исходящего из x_0, y_0, z_0. Пусть, далее, n_1, x_1, y_1, z_1, α_1, β_1, γ_1 – значения соответствующих величин для конечной точки. Тогда, как показывает Гамильтон, имеют место равенства

$$n_1\alpha_1 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_1, \qquad n_0\alpha_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0,$$

$$n_1\beta_1 = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_1, \qquad n_0\beta_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0,$$

$$n_1\gamma_1 = \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_1, \qquad n_0\gamma_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0.$$

Поначалу хочется сказать, что проблема нацеливания луча тем самым и исчерпывается; в самом деле, мы знаем, какими должны быть выбраны косинусы α_0, β_0 и γ_0 для того, чтобы искомая траектория прошла через точку x_1, y_1, z_1, причем одновременно определяется направление падающего луча, т.е. величины α_1, β_1 и γ_1. Кстати, в силу соотношений

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1 \quad \text{и} \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

шесть наших равенств сводятся к четырем, и функция W должна удовлетворять следующим двум дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_1^2 = n_1^2,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0^2 = n_0^2.$$

Таким образом, можно сказать, что вычисленная с помощью принципа Ферма функция W в весьма элегантной и обозримой форме позволяет дать полное представление о ходе лучей в оптическом приборе. Действительно, у нас достаточно уравнений чтобы при заданных x_0, y_0, z_0, α_0, β_0, γ_0 определить любое количество дальнейших точек x_1, y_1, z_1 искомой траектории и вычислить соответствующие углы α_1, β_1 и γ_1.

Этот подход и представляет собой истинное достижение Гамильтона. Его автор назвал его *принципом варьирующего действия*; возможно еще более удачно было бы назвать его "принципом ф у н к ц и и действия".

Конечно, следует иметь в виду, что эта система уравнений, собственно говоря, не дает ничего нового. К примеру, она не позволяет вычислить ход лучей, который, наоборот, для нахождения функции W должен быть заранее известен. Достижение это больше всего касается лишь формальной стороны дела, удобного и элегантного представления проблемы, позволяющего избежать рассмотрения всех промежуточных стадий, а значит, и всего процесса, происходящего внутри сложно устроенного прибора. Гамильтон сам отмечает, что открытый им принцип варьирующего действия, возможно, "не будет полезен", но что он доставит некоторое "интеллектуальное удовольствие".

Однако в этой самокритике он был слишком скромен. Принцип этот в определенном отношении перерос сам себя и на основе общих свойств функции W позволил получить новые научные выводы. Так, например, из перестановочности порядка дифференцирования в производных второго порядка $\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_0} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_0 \partial x_1}$ и т.д. следует *общий закон взаимности в оптике*: увеличение оптического прибора остается неизменным, если, не меняя положения прибора, поменять местами глаз и объект наблюдения.

Уже этих немногих замечаний вполне хватило бы для того, чтобы дать представление о богатстве и красоте гамильтоновых результатов. Тем более удивительной выглядит история распространения его открытий. На континенте они совершенно не получили того признания, которое соответствовало бы их значению. В то время, как у нас и во Франции имя Гамильтона, как уже отмечалось, связывалось с принципом наименьшего действия $\delta W = 0$, имеющим значительно более раннее происхождение, настоящее его открытие – его принцип варьирующего действия – было совершенно непонято; а затем, поскольку объективный ход развития теории все-таки требовал такого поворота идей, он неоднократно переоткрывался – чаще всего в менее удачном виде. Известные строители оптических приборов – например, Аббе – его не знали и пользовались вместо него длинными собственными расчетами. Из астрономов Брунс независимо от Гамильтона подробно развил аналогичную теорию, в которой величина W получила часто и поныне употребляемое название "эйконала"[1]) и т.д.

При этом в Англии гамильтонова теория была известна всегда, а английские труды попадали в Германию. Я сошлюсь здесь на ряд сочинений Максвелла, в которых функция W вычисляется в некоторых простых случаях, и особенно на книгу Томсона и Тэта "Treatise on natural philosophy" ("Трактат по натурфилософии"), появившуюся в 1867 г. и содержащую полное изложение результатов Гамильтона во всем их значении для проблем общей механики. Книга же эта по инициативе Гельмгольца была в 1871 г. переведена на немецкий язык.

Фактически открытия Гамильтона в области механики суть всего лишь, так сказать, следствия основных его идей, относящихся к оптике. Но так как Якоби подхватил механические результаты Гамильтона и, усиленно упоминая его имя, развил их в новом – якобиевском – направлении, то у учеников и читателей Якоби сложилось впечатление, что в части, касающейся механики, Гамильтон был всего лишь предшественником Якоби. Я сам, во время моих поездок более детально ознакомившись с положени-

---

[1]) От греч. eikōn – изображение. Функция, выражающая оптическую длину пути. – *Примеч. пер.*

ем вещей, потратил много напрасных усилий на то, чтобы сделать результаты Гамильтона по оптике и механике известными в Германии. В частности, летом 1891 г. я доставил себе удовольствие изложить механику по Гамильтону, как своего рода оптику в n-мерном пространстве, включив сюда и то продолжение, которое эти идеи получили у Якоби; в том же году я докладывал об этих вещах на Съезде естествоиспытателей в Галле[1]); в течение двадцати лет обработанная запись этой лекции лежала в читальне Гёттингенского университета; в 4-м томе "Энциклопедии" (Enzykl., Art. 1) Фосс дал верное изложение истинного положения дел — и все это в конце концов оказалось тщетным. Идеи Гамильтона в их оригинальном, идущем от оптики виде были и остаются неизвестными именно в тех кругах, которые должны были бы питать к ним наибольший интерес. Один только Штуди в последнее время по-новому, правильно изложил сложившуюся ситуацию (см. "Über Hamiltons geometrische Optik und deren Beziehung zur Theorie der Berührungstansformationen", Jahresber. Deutsch. Math.-Ver., 1905, т. 14, стр. 424 и далее[2])).

Причину этой странной судьбы работ Гамильтона, быть может, следует искать в месте их опубликования. "Transactions" Королевской Ирландской академии и в Германии и во Франции являются очень редким, малодоступным журналом. На самом деле работы Гамильтона по механике, опубликованные им в "Philosophical Transactions" Лондонского королевского общества, получили гораздо большее распространение. И упоминавшаяся уже неумелая и сумбурная форма изложения этих юношеских работ Гамильтона тоже не содействовала тому, чтобы им был оказан благоприятный прием.

Среди факторов, тормозивших распространение этих идей, следует, наконец, отметить и еще один, на который я, пользуясь представившейся возможностью, хотел бы указать со всей определенностью; это дискуссия с не чересчур разумными рационалистами, которую пришлось выдержать не только Гамильтону, но и всем механикам, пользовавшимся вариационными принципами. Ввиду пристрастия, которое к этим принципам, якобы выражавшим идею цели, проявляли некогда философы, люди эти прониклись к ним антипатией, упрекая пользующееся ими естествознание в телеологии. Но в широких кругах с этим недоразумением оказался связанным и еще один — в корне ошибочный — взгляд на математическое естествознание, весьма часто высказываемый чистыми теоретиками. Это мнение, будто данная наука — и, в частности, аналитическая механика — призвана лишь "объяснять" природу. (Отсылаю читателя к статье Планка "Das Prinzip der kleinsten Wirkung" в физическом томе серии "Kultur

---

1) См. K l e i n F. Ges. Abh., т. 2, стр. 601 и след.

2) По этому поводу см. также G. P r a n g e. W.R. Hamiltons Bedeutung für die geometrische Optik // Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. — 1921 — Bd 30, стр. 69 и далее, а также работы В.Р. Гамильтона по оптике лучей и аналитической механике: Nova Acta, Abh. Leop.-Carol. Deutschen Akad. Naturforscher, Halle, 1923, Bd 107, Nr 1.

der Gegenwart".) В противовес этой точке зрения хочу подчеркнуть, что каково бы ни было значение телеологических тенденций для развития науки, задача естествознания заключается конечно, не в разыскании в природе каких-либо сверхъестественных "целей" и не в привлечении их для объяснения каких-либо явлений. Однако она отлично увязывается с целью, которая ставится себе самим человеком и в достижении которой наука ему помогает. Не объяснение природы — чего наука в конечном счете не сможет дать никогда, — а покорение ее составляет истинную задачу науки. И никогда нельзя забывать о существовании созидающей техники, которая подходы теоретической науки претворяет в дело.

Так и в рассматриваемом случае принцип варьирующего действия служит не тому, чтобы ответить на вопрос о внутренней цели, которую природа преследует в ходе протекания оптических процессов, а тому, чтобы дать ответ на вполне законный вопрос конструктора о том, как следует упорядочить эти процессы, чтобы конструируемый им прибор получился по возможности более полезным.

А теперь, прежде чем перейти к собственно работам Гамильтона по механике, я должен напомнить о еще одном направлении в математике, в связи с которым имя Гамильтона упоминается столь же часто, — причем опять-таки как имя человека, подготовившего дальнейшие достижения. Я имею в виду его работы по системам лучей, побудившие берлинского математика Куммера заняться чисто алгебраико-геометрической, не связанной ни с какими физическими соображениями трактовкой этого вопроса — Куммер изучал системы прямолинейных лучей и возникающие для них проблемы геометрического характера абсолютно вне всякой связи с оптикой. В некоторой степени отталкиваясь еще от Гамильтона, Куммер наметил (Журнал Крелля, 1860, т. 57) общую теорию систем прямолинейных лучей, а затем он с большим успехом занялся перечислением и исследованием алгебраических систем лучей первого и второго порядка (Abhandl. der Berliner Akademie, 1866). При этом он и обнаружил носящую теперь его имя поверхность четвертого порядка с шестнадцатью двойными точками и шестнадцатью двойными плоскостями, о которой мы уже не раз упоминали; поверхность эту он получил как фокальную поверхность лучевых систем второго порядка, являющихся в то же самое время системами второго класса (т.е. таких, что через каждую точку проходят и в каждой плоскости лежат два луча этой системы).

Эти чрезвычайно важные и глубокие работы Куммера, подготовившие почву для возникновения линейчатой геометрии, которую как раз в то время начал создавать Плюккер, были лишь весьма косвенно связаны с работами Гамильтона; цель Куммера и его метод, весь круг идей, в котором он вращался, так далек от Гамильтона, что каждому, кто занимался проблематикой одного из этих авторов, нужно приложить немало усилий, чтобы переключиться на проблемы другого. Таким образом, даже имевшаяся здесь преемственность и та могла разве лишь затуманить образ Гамильтона в континентальной науке.

А теперь, после всех этих отступлений я вкратце изложу работы Гамильтона по аналитической механике. При этом, переступая иногда рамки этих работ, я ограничусь лишь той степенью общности, которая не выводит за очерченные выше пределы.

Как я уже упоминал, обе относящиеся к этому кругу вопросов работы Гамильтона были опубликованы в "Philosophical Transactions" Лондонского королевского общества за 1834–1835 гг. В обеих из них развивается оригинальная идея Гамильтона рассматривать интеграл, фигурирующий в принципе наименьшего действия (после того, как он вычислен), как функцию пределов интегрирования.

В первой работе Гамильтон исходит из вариационного принципа

$$\delta W = \delta \int_{q_1^0,\ldots,q_n^0}^{q_1^1,\ldots,q_n^1} \sqrt{2(h-U)\Sigma a_{\alpha\beta}dq_\alpha dq_\beta} = 0,$$

где

$$T = \Sigma a_{\alpha\beta}\dot q_\alpha \dot q_\beta, \qquad T + U = h = \text{const}.$$

После того, как дифференциальные уравнения, вытекающие из равенства $\delta W = 0$, проинтегрированы, функция

$$W(q_1^1,\ldots,q_n^1;\quad q_1^0,\ldots,q_n^0;h)$$

начинает рассматриваться как *характеристическая функция* этой задачи. При варьировании пределов q^1 и q^0 получаются уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial q_\alpha^1} = p_\alpha^1, \quad -\frac{\partial W}{\partial q_\alpha^0} = p_\alpha^0,$$

где

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}$$

– компонента импульса, соответствующая скорости $\dot q_\alpha$. Кроме того,

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t^1 - t^0.$$

Таким образом, если, предварительно определив траектории данной механической задачи, мы построим функцию $W(q^1;\ q^0)$, то и сами траектории и время, за которое они пробегаются, будут выражены через эту функцию. Как уже было сказано, это выражение часто бывает очень полезно.

В качестве более второстепенного следствия из соотношения $T + U = h$ вытекает, что p_α, а вместе с ним и $\dfrac{\partial W}{\partial q_a}$ удовлетворяют определенным уравнениям в частных производных. Чтобы выразить $T = \Sigma a_{\alpha\beta}\dot q_\alpha \dot q_\beta$

через $p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$, нужно применить то же преобразование, которое обычно используется при дуализации уравнений геометрических образов, т.е. при переходе от точечных координат к тангенциальным. Тогда T выразится в виде отношения двух определителей, один из которых "окаймлен" величинами p_α:

$$T = \frac{-\begin{vmatrix} a_{\alpha\beta} & p_\alpha \\ p_\beta & 0 \end{vmatrix}}{| a_{\alpha\beta} |}.$$

Поскольку $p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ и $T + U = h$, отсюда следует, что верхние и нижние пределы интегрирования удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{-\begin{vmatrix} a_{\alpha\beta} & \frac{\partial W}{\partial q^1_\alpha} \\ \frac{\partial W}{\partial q^1_\beta} & 0 \end{vmatrix}}{|a_{\alpha\beta}|} + U = h$$

и

$$\frac{-\begin{vmatrix} a_{\alpha\beta} & \frac{\partial W}{\partial q^0_\alpha} \\ \frac{\partial W}{\partial q^0_\beta} & 0 \end{vmatrix}}{|a_{\alpha\beta}|} + U = h.$$

Вторая работа начинается с рассмотрения другой формы интеграла действия:

$$S = \int_{q^0_1, \ldots, q^0_n;\, t^0}^{q^1_1, \ldots, q^1_n;\, t^1} (T - U)\, dt,$$

где $T - U$ – функция Лагранжа, причем в равенстве $\delta S = 0$ пределы интегрирования снова предполагаются постоянными. Если из условия $\delta S = 0$ мы найдем величины q как функции t, то функция

$$S(q^1_1, \ldots, q^1_n;\ q^0_1, \ldots, q^0_n;\ t^1,\ t^0)$$

будет так называемой *главной функцией* – principal function – рассматриваемой механической задачи. Ее также можно использовать для выражения интеграла. При этом

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha^1} = p_\alpha^1, \qquad -\frac{\partial S}{\partial q_\alpha^0} = p_\alpha^0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t^1} = -h, \qquad \frac{\partial S}{\partial t^0} = h.$$

Совершенно аналогично "характеристической функции" W функция S тоже удовлетворяет двум системам дифференциальных уравнений по n уравнений в каждой из них.

И во всем этом более, нежели интерес к интегрированию дифференциальных уравнений механики, присутствует "интеллектуальное удовольствие", получаемое от элегантности изложения.

Наряду с последовательным применением "принципа варьирующего действия" во второй работе Гамильтона важную роль играет еще и некоторое упрощение уравнений механики. Я имею в виду то, что в других разделах математики часто называется "преобразованием Лежандра", — а именно, переход от скоростей $\dot{q}_\alpha$ к компонентам импульса p_α.

Применяя к T теорему Эйлера об однородных функциях, мы получаем тождество

$$2T = \Sigma\, p_\alpha \dot{q}_\alpha.$$

Если общую энергию $T + U$, рассматриваемую как функцию p_α и q_α, обозначить через $-H(p_\alpha, q_\alpha)$, то будет иметь место равенство

$$T - U - \Sigma\, p_\alpha \dot{q}_\alpha = -T - U = H(p_\alpha, q_\alpha),$$

а для дифференциала функции H получится выражение

$$dH = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \Sigma \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha - \Sigma \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \Sigma\, \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \Sigma\, p_\alpha d\dot{q}_\alpha =$$

$$= \Sigma \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \Sigma\, \dot{q}_\alpha dp_\alpha.$$

Так как в силу уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{dp_\alpha}{dt} = \dot{p}_\alpha,$$

то уравнения механики приобретают следующий очень простой вид:

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \dot{p}_\alpha, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = -\dot{q}_\alpha.$$

Уравнения эти называются *дифференциальными уравнениями Гамильтона* (хотя при случае их можно встретить еще у Лагранжа), или же — вслед за Якоби – *каноническими дифференциальными уравнениями.* Ставя во главу угла общую энергию и полностью выводя из нее движение, они так сказать, претворяют в жизнь идеал энергетизма.

А теперь мы обратимся к публиковавшимся начиная с 1837 г. работам Якоби, которые, как уже отмечалось, хотя во многом и исходят из работ Гамильтона, но тем не менее идут совершенно иным, самостоятельным путем. Якоби, собственно говоря, является продолжателем французской школы, ведущей свое начало от Лагранжа, Пуассона и т.д.; именно по этой причине он приобрел стойкое влияние не только в Германии, но и во Франции.

Развитие, которое механика получила благодаря трудам Якоби, в основном касается аналитической стороны дела. Помимо всего прочего Якоби рассматривает

1. Общее понятие *канонических переменных.*

Как мы уже видели, дифференциальным уравнениям динамики Гамильтон придал простой, названный Якоби каноническим, вид:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

где $H(p_\alpha, q_\alpha)$ означает общую энергию, взятую со знаком минус. Якоби был первым, кто сформулировал следующий вопрос: *каковы самые общие канонические преобразования,* т.е. преобразования

$$p_\alpha^1 = \varphi_\alpha(q_1^0, \ldots, q_n^0;\ p_1^0, \ldots, p_n^0),$$

$$q_\alpha^1 = \psi_\alpha(q_1^0, \ldots, q_n^0;\ p_1^0, \ldots, p_n^0),$$

при которых канонические дифференциальные уравнения снова переходят в канонические? Проблема эта имеет громадное значение в астрономии и в математической физике; она играет основополагающую роль в предложенной Больцманом и Пуанкаре трактовке этих дисциплин как квазигеометрий в некотором пространстве R_{2n}. С совершенно иных, чисто геометрических позиций эта проблема была рассмотрена Софусом Ли в рамках теории так называемых *преобразований соприкосновения.* Подробное изложение этих вещей можно найти в Математической энциклопедии в статье Либмана (Enzykl., III, D 7).

Вместе с постановкой задачи Якоби дал и первое ее решение, применив технику так называемых *ведущих функций* (*Leitfunktionen*): он показал, что величины p^1 и q^1 связаны с величинами p^0 и q^0 каноническим преобразованием всякий раз, когда имеют место равенства

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_\alpha^0} = -p_\alpha^0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial q_\alpha^1} = p_\alpha^1,$$

где Ω – некоторая, в принципе произвольная, дифференцируемая функция переменных q_α^0 и q_α^1.

Эти формулы откровенно напоминают гамильтоновы характеристическую и главную функции W и S. Ясно, что именно формулы Гамильтона и привели Якоби к его общим результатам, которые первоначально представляли собой лишь попытку описать сферу действия этих формул. Таким образом, переход от начальных значений $q_1^0, \ldots, q_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0$ какого-либо механического движения к его конечным значениям $q_1^1, \ldots, q_n^1$, $p_1^1, \ldots, p_n^1$ представляет собой пример канонического преобразования с ведущей функцией W или же S. Хотя функция W на первый взгляд и кажется относящейся только к данной механической задаче, но на самом деле она такова, что ее более общий характер легко обнаруживается простыми выкладками. Даже более того: так как все движение в целом происходит с соблюдением канонических дифференциальных уравнений и так как для любого сколь угодно малого изменения параметров функция W задается формулой

$$W = \int_{q_1^0, \ldots, q_n^0}^{q_1^0 + \Delta q_1^0, \ldots, q_n^0 + \Delta q_n^0} \sqrt{(h-U)\Sigma a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta},$$

причем имеют место соотношения

$$\frac{\partial W}{\partial q_\alpha^0} = -p_\alpha^0, \quad \frac{\partial W}{\partial (q_\alpha^0 + \Delta q_\alpha^0)} = p_\alpha^0 + \Delta p_\alpha^0,$$

то рассматриваемое движение представляет собой непрерывную последовательность бесконечно малых канонических преобразований.

И все же сколь бы широкой при ее представлении через совершенно произвольные функции Ω ни выглядела наша область канонических преобразований, она тем не менее не охватывает всех канонических преобразований. В самом деле, может случиться, что, пытаясь дополнить уравнения

$$q_\alpha^1 = \psi_\alpha(q_1^0, \ldots, q_n^0;\ p_1^0, \ldots, p_n^0)$$

соответствующими уравнениями для p_α^1, мы будем вынуждены удовлетворить нескольким условиям вида

$$\Omega_1(q^0, q^1) = 0, \quad \Omega_2(q^0, q^1) = 0, \ldots$$

В этом случае нужно положить

$$\frac{\partial(\Omega + \lambda\Omega_1 + \mu\Omega_2 + \ldots)}{\partial q_\alpha^0} = -p_\alpha^0,$$

$$\frac{\partial(\Omega + \lambda\Omega_1 + \mu\Omega_2 + \ldots)}{\partial q_\alpha^1} = p_\alpha^1$$

и, явно выразив q^1 и p^1 через q^0 и p^0, исключить параметры $\lambda, \mu, \ldots$

В таком обобщенном виде подход Якоби дает канонические преобразования. Однако впоследствии выяснилось, что предпочтительнее задавать величины p_α^1 и q_α^1 не в столь явном виде (часто требующем разбора отдельных случаев), а указывая лишь дифференциальные уравнения, которым они должны удовлетворять. В 1873 г. Шеринг и Ли, следуя Пуассону, одновременно выступили со своими *символическими скобками*. Если по определению положить

$$[u, v] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial p^0_\alpha} \frac{\partial v}{\partial q^0_\alpha} - \frac{\partial u}{\partial q^0_\alpha} - \frac{\partial v}{\partial p^0_\alpha} \right),$$

то утверждение, что функции p^1_α и q^1_α определяют каноническое преобразование, запишется в виде тождеств

$$[p^1_\alpha, p^1_\beta] = 0, \qquad [q^1_\alpha, p^1_\beta] = \begin{cases} 1, \text{если } \alpha = \beta, \\ 0, \text{если } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$
$$[q^1_\alpha, q^1_\beta] = 0,$$

Из этих формул легко получается так называемая теорема Лиувилля (1838 г.) о том, функциональный определитель любого канонического преобразования равен либо +1 либо −1. Действительно, достаточно этот определитель умножить[1]) на самого себя, переставив предварительно столбцы:

$$\begin{vmatrix} q^1_1 \ldots q^1_n & p^1_1 \ldots p^1_n \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ q^0_1 \ldots q^0_n & p^0_1 \ldots p^0_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p^1_1 \ldots p^1_n & q^1_1 \ldots q^1_n \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ p^0_1 \ldots p^0_n & q^0_1 \ldots q^0_n \end{vmatrix} = \Delta^2 = 1.$$

На самом деле Δ всегда равняется +1, но доказательство этого слишком длинно, чтобы приводить его здесь.

Эти формулы, и в частности, теорема Лиувилля, приобрели особое значение в современной математической физике, особенно после того, как получила распространение интерпретация их в $2n$-мерном пространстве (Больцман, начиная с 1868 г.).

В заключение я хотел бы указать на одну неожиданную трудность, которая весьма некстати серьезно осложнила взаимопонимание между математиками и физиками в этой, столь важной для обеих сторон области; в то время как мы со времен Лагранжа привыкли обозначать координаты импульса буквой p — в напоминание о силе (potentia), — а координаты состояния буквой q — в напоминание о слове "качество" (Qualität), — физики, следуя примеру Гельмгольца, употребляли как раз обратные обозначения. Можно себе представить, какую путаницу вызывал этот разнобой в обозначениях!

2. *Методы интегрирования гамильтоновых дифференциальных уравнений.* Функция

$$W(q^1, q^0; h) = \int_{q^0}^{q^1} \sqrt{(h - U) \sum a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta}$$

---

[1]) По обычным правилам — с тем лишь отличием, что элементы определителей перемножаются в смысле символических скобок. — *Примеч. ред. русского перевода.*

из которой, в соответствии с гамильтоновым подходом, по формулам

$$\frac{\partial W}{\partial q^1_\alpha} = p^1_\alpha, \frac{\partial W}{\partial q^0_\alpha} = - p^0_\alpha$$

получаются координаты импульса, удовлетворяет в силу равенства

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) + h = 0$$

следующим дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$H\left(q^0_1, \ldots, q^0_n, \frac{\partial W}{\partial q^0_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q^0_n}\right) + h = 0,$$

$$H\left(q^1_1, \ldots, q^1_n, \frac{\partial W}{\partial q^1_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q^1_n}\right) + h = 0.$$

Отсюда Якоби, выводит, что если найти какое-либо достаточно общее — так называемое "полное" — решение уравнения

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) + h = 0,$$

то есть решение

$$\bar{W}(q_1, \ldots, q_n, c_1, \ldots, c_{n-1})$$

с $n-1$ независимыми произвольными постоянными, то тогда траектории данной задачи можно будет найти в проинтегрированном виде. Для этого достаточно положить

$$p_\alpha = \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_\alpha}; \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial c_1} = d_1, \ldots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial c_{n-1}} = d_{n-1}.$$

Произвольных констант c и d, число которых равно $2n-2$, как раз достаточно для того, чтобы иметь возможность изобразить в нашем пространстве, размерность которого благодаря соотношению $H + h = 0$ равна $2n-1$, траекторию, проходящую через любую наперед заданную точку.

Эта тесная связь между дифференциальными уравнениями динамики и некоторым дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных в конечном счете представляет собой факт, место которому в общей теории дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, где он на самом деле и был еще до Якоби открыт Коши в 1819 г. Взаимосвязь этих уравнений и является истинной причиной того широкого интереса, который вызвало это открытие. Самостоятельно подметив и с воодушевлением проследив эту связь, Якоби не только получил общую теорию интегрирования дифференциальных уравнений динамики, но и сообщил мощный импульс исследованию специальных проблем аналитической механики. Предложенный им метод состоит в том, что непосредственное исследование уравнений динамики заменяется задачей об отыскании достаточно общего решения гамильтонова уравнения в частных производных, откуда интегрирование уравнений движения получается, так сказать, само собой.

Этот метод позволяет достигнуть цели на удивление часто, и, пользуясь им, уже сам Якоби решил немало важных задач механики и астрономии. Так, например, в его лекциях рассмотрены: задача двух тел (кеплерово движение) в трехмерном пространстве, задача о притяжении к двум неподвижным центрам и задача о геодезических линиях на трехосном эллипсоиде, причем последняя из них была решена здесь впервые. Подробности можно найти у него самого или же в любом учебнике по астрономии или механике.

В отдельных случаях Якоби еще дальше продвинул и усовершенствовал свою теорию интегрирования. Так, например, он занимался вопросом о том, какие преимущества при интегрировании уравнений динамики дает предварительное знание некоторых их интегралов. В ходе этого исследования Якоби нашел массу чрезвычайно примечательных и глубоких теорем. Например, он доказал, что если для какой-нибудь системы уравнений справедливы две теоремы о площадях, то для нее справедлива и третья. В сколько-нибудь подробные детали этого развития механики, ведущего свое начало от Пуассона, мне, к сожалению, войти невозможно. Кульминацией его явились работы Софуса Ли и Адольфа Мейера начала 70-х годов, существенно превзошедшие исследования Якоби. Поднятые на высокую ступень аналитического обобщения, эти результаты имеют в то же самое время решающее значение, с одной стороны, для вычисления вариаций интегралов (конечно, лишь в самых простых ситуациях), а с другой – для общей теории дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных. В этой беспрестанной связи с двумя огромными самостоятельными областями анализа и кроется математическая прелесть этого способа изложения механики.

И все же, несмотря на бесспорную красоту этой области, я хотел бы предостеречь от одностороннего увлечения ею. Если заниматься механикой только в этой абстрактной ее форме, то останется неразвитым чутье к конкретному частному случаю, а вместе с ним и способность правильно подойти к стоящей в данный момент проблеме и добиться полного ее решения. Имея именно это в виду, Поске в своей появившейся в 1915 г. книге "Didaktik des physikalischen Unterrichts" ("Дидактика преподавания физики") говорит о "тонком яде математического образования" для физика. Действительно, физик для своих задач может воспользоваться лишь очень немногим из математических теорий, а инженер – вообще ничем[1]. Эти теории представляют собой, так сказать, схему с пустыми клет-

[1] Мы оставили без изменения эти всем ходом развития последних лет опровергнутые замечания, поскольку они вносят определенный вклад в понимание того – именно Клейном отмечавшегося – явления, что иногда теории, на первый взгляд кажущиеся чисто математическими, впоследствии начинают внезапно приобретать огромнейшее значение для смежных областей науки. – *Примеч. ред. нем. изд.*

ками, в которые должен быть уложен пестрый мир явлений, чтобы придать им смысл и значение.

Сделав это предостережение, я хотел бы еще раз горячо рекомендовать лекции Якоби по динамике, обладающие особым стимулирующим действием (изданы в 1866 г. Клебшем по обработке, подготовленной Борхардтом зимой 1842/43 г.)[1]).

На этом мы окончательно оставим Якоби, этот своеобразный ум. За общей его характеристикой и оценкой я отсылаю к тому, что было сказано в третьей главе (см. стр. 125 и далее). Со следами его неслыханного по своей инициативности воздействия и в Германии и за ее пределами мы снова и снова будем встречаться в дальнейшем.

От Якоби мы теперь, естественно, перейдем к дальнейшему развитию аналитической механики, позволившему ей превзойти результаты и Гамильтона, и Якоби.

Человек, которого мы должны вспомнить здесь прежде всего, — англичанин Раус — моментально переносит нас в совершенно иную среду. Это — научная жизнь Кембриджа с его системой обучения, четко приспособленной к учебным и экзаменационным требованиям. Здесь, начиная примерно с 1860 г., Раус играл выдающуюся роль благодаря широкой, прославившей его педагогической деятельности, которой он занимался в качестве "private tutor", т. е. приватного преподавателя, готовившего к "tripos"[2]) и к другим экзаменам. В течение долгого времени первый лауреат, так называемый "senior wrangler", чаще всего выходил именно из его подготовительного курса. Много игравших значительную роль ученых получило здесь, у Рауса, солидные основания квалифицированного, ориентированного в сторону приложений математического образования. К числу тех, кто часто и с благодарностью вспоминал времена своего ученичества у Рауса, принадлежит, например, лорд Рэлей.

Отпечаток этой преподавательской деятельности Рауса несут на себе и его учебники, представляющие собой полную, насколько это только мыслимо, противоположность якобиевской методе изложения. Хотя в них присутствуют, конечно, и общие рассмотрения, но они всегда окружены большим количеством удобопонятных и весьма конкретных частных приложений. У нас, в немецком переложении, учебники эти представляют собой совершенно необычное явление. Это — не связное изложение какого-либо материала и не совокупность отдельных лекций, а система ежедневных, строго рассчитанных по времени упражнений, в которых ставятся и до конца решаются вполне определенные задачи. Такая система в точности отвечает преподавательской деятельности, благодаря которой "tutor" ежедневным многочасовым трудом достигает почти ошеломительных с нашей точки зрения успехов по части знаний и самостоятельности у своего, обыч-

---

[1]) Недавно изданы в дополнительном томе Собрания сочинений Якоби (1884). [Русск. пер.: Якоби К. Лекции по динамике. — М.; Л.: ОНТИ, 1936. — *Примеч. пер.*]

[2]) Экзамен, который надо сдать в Кембридже для получения отличия. — *Примеч. пер.*

но немногочисленного круга учеников. Это тот же самый метод, которым искусный тренер добивается у своих учеников выдающихся спортивных достижений.

Характер преподавания в университетах различных стран весьма различен, и ни одна страна не должна думать, что именно она обладает единственно правильным или же самым "академическим" методом. Каждый подход имеет свои преимущества, и любой из них обнаруживает свои недостатки, если слишком односторонне проводить его в жизнь. И нельзя организационные формы и методы преподавания из одной страны, где они пустили свои корни, без изменений переносить в другую. Эти формы и методы прочно связаны с традициями, бытующими у учителей и учеников, и обусловлены принятой в данной стране системой экзаменов и основанной на ней социальной стратификацией.

Впрочем, в этом вопросе как раз между Германией и Англией можно проследить известное сближение. В Кембридже экзамены, выродившиеся в изощренную систему виртуознейшей казуистики, с 1900 г. стали несколько более мягкими. И у нас, чем дальше, тем больше, наряду с лекциями в качестве необходимого дополнения начинают на первый план выступать упражнения.

Займемся теперь рассмотрением вопроса о том, какой вид в руках у Рауса приняли проблемы аналитической механики.

У Лагранжа роль главной функции, фигурирующей в формулах аналитической механики, играла функция

$$L = T - U.$$

У Гамильтона на ее месте оказалась функция

$$H = T - U - \Sigma\, p_\alpha q_\alpha = -(T + U).$$

Эта H должна мыслиться зависящей только от p и от q; из зависящей от q и от $\dot{q}$ функции L она получается с помощью так называемого преобразования Лежандра, выражением $\dot{q}$ через p.

Раус предпочитает средний путь, и преобразование Лежандра он производит лишь частично, выбирая $m \leqslant n$ и выражая через p и через остальные переменные $q_{m+1}, \ldots, q_n$; $\dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n$ лишь первые m из n переменных $\dot{q}$. На этом пути он получает так называемую *функцию Рауса*

$$R = L - \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha \dot{q}_\alpha ,$$

в которую явным образом входят переменные всех трех родов: $\dot{q}$, p и q.

Для большей наглядности мы вновь введенные $p_1, \ldots, p_m$ обозначим через $\pi_1, \ldots, \pi_m$, а соответствующие им q через $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$. Таким образом, у нас будут иметься следующие группы переменных:

$$q_{m+1}, \ldots, q_n, \quad \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n,$$

$$\kappa_1, \ldots, \kappa_m, \quad \pi_1, \ldots, \pi_m.$$

Дифференциальные уравнения механики примут тогда следующий вид:

$$p_\alpha = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} + P_\alpha, \quad \alpha = m + 1, \dots, n;$$

$$\frac{d\kappa_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \pi_i}, \quad \frac{d\pi_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \kappa_i} + \Pi_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

где P_α и Π_i обозначают внешние силы (когда они имеются). Мы видим, что уравнения Рауса распадаются на две группы: одну, устроенную по типу Лагранжа, и другую – по типу Гамильтона. При $m = 0$ функция Рауса, а вместе с ней и вся система уравнений превращается в функции и уравнения Лагранжа; при $m = n$ – в функции и уравнения Гамильтона.

Эта система уравнений приобретает особый интерес в связи с рядом связанных с ней общих принципиальных представлений о сущности механики. Когда в R явно входят не κ_i, а только соответствующие им π_i, мы имеем дело с тем частным случаем, который Гельмгольцем был подробно изучен под названием *циклических систем* (Журнал Крелля, т. 97, 1884); несколько раньше этот случай рассматривался Томсоном и Тэтом (под названием "циклоидальных систем").

На практике этот случай реализуется всякий раз, когда мы имеем дело с вращательным движением тел круговой симметрии – например, когда речь идет о маховиках. Здесь угол вращения всегда является "циклической" координатой κ, проявляющейся только в соответствующем ей импульсе π. Если такое вращающееся тело заключить в непрозрачную оболочку, то ничто не выдаст его "скрытого движения", кроме необычного поведения, которое тело будет демонстрировать при движении в пространстве как целое (волчок, гироскоп). В случаях, подобных этому, когда исключается возможность внешнего воздействия на вращение маховика, т.е. при $\Pi_i = 0$, мы имеем

$$\frac{d\pi_i}{dt} = 0,$$

и, значит, импульсы, соответствующие циклическим координатам, постоянны.

На основе этих соображений возникают любопытные представления о природе потенциальной энергии. Предположим, что кинетическая энергия T распадается на часть $T(\dot{q})$, зависящую только от скоростей $\dot{q}$, и на часть $T(\pi)$, обусловленную одними циклическими импульсами π (в частности, предполагается, что члены, в которых фигурируют произведения скоростей $\dot{q}$ на импульсы π, отсутствуют). Тогда, если мы вспомним, что все величины зависят от координат q, а постоянные импульсы π_i заменим величинами c_i, функция Рауса будет иметь вид

$$R = T(\dot{q}) - T(\pi) - U = T(q, \dot{q}) - T(q, c) - U(q).$$

Координаты $q_{m+1},\ldots, q_n$ определяются при этом из дифференциальных уравнений

$$p_\alpha = \frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial\,[T(\dot{q}\,) - (U + T(c))]}{\partial q_\alpha},$$

имеющих вид уравнений движения некоторой новой динамической системы с $n-m$ степенями свободы, потенциальная энергия которой увеличена на $T(c)$, т.е. на кинетическую энергию скрытых движений[1]). Обе величины U и $T(\pi)$ представляют собой функции q с постоянными коэффициентами; они выступают лишь в виде суммы, не порознь. Поэтому и возникает — раз уж мы все равно ничего не знаем о сущности потенциальной энергии — вопрос о том, не являются ли в действительности все механические величины, проявляющиеся в виде "потенциальных энергий", по существу кинетическими энергиями, обусловленными скрытыми циклическими, так называемыми "игнорированными", движениями. И как фата-моргана вдали начинает маячить возможность построения чисто кинетической теории материи.

В столь общей форме идея эта была, пожалуй, впервые изложена в 1888 г. Дж. Дж. Томсоном в его книге "Applications of Dynamics to Physics and Chemistry" ("Приложения динамики к физике и химии"; лекция в Кембридже в 1886 г., затем публикации в "Philosophical Transactions" в 1886–1887 гг.). Но на отдельных примерах ее развивал уже Вильям Томсон (= лорд Кельвин) — например, в своем докладе в Британской ассоциации в Монреале (1884 г.), который он осторожно назвал "Steps towards a kinetic theory of matter" ("Некоторые подходы к кинетической теории материи"; Math. Phys. Papers, т. 3, стр. 366). И наконец, превращенная в законченную систему, она нашла себе выражение в посмертном труде Генриха Герца "Die Prinzipien der Mechanik" ("Принцип механики", 1904 г.)[2]).

Подробности, касающиеся этого своеобразного умственного построения, можно найти в первой статье Фосса в 4-м томе "Энциклопедии". К сожалению, по его поводу я не могу войти в бóльшие подробности. Я хочу лишь указать, что сколь бы блестящим оно ни казалось на первый взгляд, как при его логической разработке[3]), так и при попытке придать ему конкретный вид возникают серьезные трудности, на что, кстати, указывал еще Больцман. И вихревая теория лорда Кельвина, включающая в качестве (единственного, правда) чуждого кинетическому кругу идей элемента

---

[1]) В связи с этим см., например, Whittaker J. Analytische Dynamik. — Berlin, 1924, § 38. [Имеется русский перевод: Уиттекер Дж. Аналитическая динамика. — М.; Л.: ОНТИ, 1937. — *Примеч. пер.*]

[2]) Имеется русский перевод: Герц Г. — Принципы механики, изложенные в новой связи. — М., 1959. — *Примеч. пер.*

[3]) Герц, например, просто перенял из обычной механики, не проводя никакого дальнейшего сведéния к кинетическим понятиям, всю громадную теорию уравнений, выражающих условия (связи), налагаемые на движения.

аксиому о несжимаемости жидкости, содержащей вихри, также не может считаться удовлетворительной — хотя бы из-за незначительности сферы ее действия.

Идея открытых циклических движений вызвала к жизни другую аналогию, которую нельзя оставить здесь без упоминания. Я имею в виду существующее по Гельмгольцу (Журнал Крелля, 1884, т. 97) сходство между статикой простейших "моноциклических" систем — циклическое движение которых мыслится, однако, как "доступное" — и основами *механической теории теплоты.*

Этому я предпошлю небольшой экскурс в механическую теорию теплоты. В этой теории играют роль в основном следующие два математических вопроса:

1. Частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нескольких переменных и изменения, которым они подвергаются при переходе к другим переменным.

2. Разнообразие смыслов, которыми может обладать выражение Пфаффа

$$X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n.$$

Как уже отмечалось в разделе, посвященном Грассману, выражение это может обладать любой мыслимой степенью общности — от случая полного дифференциала и случая, когда выражение превращается в полный дифференциал в результате умножения на соответствующий "интегрирующий множитель", до абсолютно общего случая, когда такое превращение невозможно. Особый интерес здесь представляет различие между случаями полного и неполного дифференциала, проявляющееся в их отношении к интегрированию по замкнутому контуру, или, как говорят в термодинамике, к круговому процессу.

Этот материал, хорошо известный любому математику, предстает здесь перед новичком не только переодетым в термодинамические одежды, но еще и обремененным огромным и трудным историческим балластом. Начинающему предлагается, чтобы по пути, который был с большим трудом продолжен первооткрывателями (Карно, Клаузиусом), он продирался через заросли непривычных для него математических понятий к цели, общие очертания которой между тем с самого начала открываются ясно и отчетливо, если только взглянуть на них надлежащим образом. Мне кажется, что рассказать обо всем этом понятно можно лишь в том случае, если сначала для ориентации дать суммарное изложение основ в авторитарно-догматическом виде, а уж затем изложить строгие, доходящие до деталей доказательства. В таком духе я и построю свой дальнейший рассказ об этой проблематике.

Пусть нам дана система, зависящая от $n + 1$ параметра $q_1, \ldots, q_n, \theta$, где θ называется *абсолютной температурой.* Термодинамика занимается не движениями такого рода систем, а их состояниями равновесия – даже, пожалуй, их так называемыми "бесконечно медленными" движениями, т.е. последовательностями мало отличающихся друг от друга состояний равновесия. Итак, пусть данная система находится в равновесии, причем под воздействием внешних сил $P_1, \ldots, P_n$, которые обладают тем свойством, что при малом изменении параметра q выражение

$$P_1 dq_1 + \ldots + P_n dq_n = dA$$

равняется необходимой для этого изменения производимой извне работе. Пусть, кроме того, вся система заключена в какую-нибудь непроницаемую для тепла – так называемую адиабатическую – оболочку.

Оба основных закона теории теплоты касаются изменений параметров $q_1, \ldots, q_n, \theta$ состояния равновесия, вызываемых тем, что на систему сначала воздействует бесконечно малая внешняя работа dA, а затем подводится бесконечно малое (измеренное в механических единицах) количество тепла dQ. Изменения эти касаются двух величин, представляющих для нас преимущественный интерес: знакомой нам по механике энергии E и впервые появляющейся здесь энтропии S. Выражающие их формулы таковы:

первое начало термодинамики: $dA + dQ = dE$,

второе начало термодинамики: $dQ = \theta \cdot dS$.

Понимание первого начала не вызывает никаких трудностей. Что же касается второго, то в нем чрезвычайно важную роль играет понятие полного (соответственно, неполного) дифференциала. Оно утверждает, что количество тепла dQ, не являясь само по себе полным дифференциалом какой-либо функции $q_1, \ldots, q_n, \theta$, превращается в полный дифференциал dS после домножения на множитель $\dfrac{1}{\theta}$.

Вместо того, чтобы заниматься здесь обоснованием этих начал, я предпочел бы пояснить их на одном примере, а именно – на примере идеального газа. Предположим массу газа равной 1. Тогда система будет зависеть от двух параметров – от объема v этой единичной массы и от абсолютной температуры θ. Соответствующая параметру v компонента силы P обычно обозначается через $-p$, где p измеряет внешнее давление газа. Имеются две константы: c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме и c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении. Через эти константы и через параметры v и θ функции состояния идеального газа выражаются по формулам

$$E = c_v \theta,$$

$$S = c_v \ln \theta + (c_p - c_v) \ln v.$$

При этом начала термодинамики приобретают вид

$$-pdv + dQ = dE = c_v d\theta,$$

$$dQ = \theta dS = c_v d\theta + (c_p - c_v)\theta \frac{dv}{v}.$$

Из этих двух уравнений получается закон Мариотта – Гей-Люссака, или *уравнение состояния газа*

$$p \cdot v = (c_p - c_v)\theta,$$

которое экспериментальным путем было найдено еще до создания всей этой теории и из которого, зная E, можно вычислить S.

Вплоть до этого места термодинамическую систему можно, следуя Гельмгольцу, моделировать моноциклической механической системой.

Чтобы промоделировать термодинамическую систему идеального газа, мы вообразим себе механическую систему с одним параметром q, равным v, и с одним циклическим параметром κ, имеющим импульс π. Пусть энергия этой системы дается выражением

$$E = \frac{c_v \pi^2}{v^{\frac{c_p - c_v}{c_v}}},$$

и, значит, условие равновесия имеет вид

$$p = -P = -\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{(c_p - c_v)\pi^2}{v^{\frac{c_p}{c_v}}}.$$

Тогда совпадение с приведенными выше формулами

$$E = c_v \cdot \theta, \quad p \cdot v = (c_p - c_p) \cdot \theta$$

получится, если мы положим

$$\theta = \frac{\pi^2}{v^{\frac{c_p - c_v}{c_v}}}, \qquad S = 2c_v \cdot \ln \pi.$$

Таким образом, θ выступает своего рода живой силой; как и S, ее нужно отнести за счет скрытого движения, представленного параметром π.

Итак, на этом пути в общем и целом удается построить вполне удовлетворительный механический образ термодинамических процессов. Однако, если мы попытаемся "связать" в одной адиабатической оболочке две термодинамических системы с различными температурами, то классическая механика, не знающая трения и неупругих соударений, ничем нам не поможет.

Правда, как и в механическом случае, для общей энергии E в этой ситуации будет иметь место равенство

$$E = E_1 + E_2,$$

но в установившемся новом состоянии равновесия значение температуры будет лежать между θ_1 и θ_2, а общая энтропия будет больше суммы энтропий исходных систем, взятых в отдельности:

$$S > S_1 + S_2.$$

Например, если смешивались два единичных количества одного и того же газа одинакового объема, но с различными температурами, то так как общая энергия E должна равняться $E_1 + E_2$ и теперь уже она будет относиться к массе, равной 2, то в конце процесса будет иметь место равенство $\theta = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$, и потому общая энтропия S будет равна

$$S = 2c_v \ln \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + 2(c_p - c_v) \cdot \ln v,$$

в то время как

$$S_1 = c_v \ln \theta_1 + (c_p - c_v) \ln v,$$

$$S_2 = c_v \ln \theta_2 + (c_p - c_v) \ln v.$$

Поскольку же

$$\theta_1^2 - 2\theta_1\theta_2 + \theta_2^2 = (\theta_1 - \theta_2)^2 > 0,$$

то, значит,

$$2 \ln \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \ln \frac{\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 + \theta_2^2}{4} > \ln \theta_1\theta_2 = \ln \theta_1 + \ln \theta_2.$$

Таким образом, неравенство $S > S_1 + S_2$ действительно имеет место.

Мы сталкиваемся здесь с примером так называемого *необратимого* термодинамического процесса – явления, механике не известного. При всех протекающих в природе процессах энтропия возрастает. Клаузиус говорит (Poggendorffs Annalen, 5-я серия, т. 125, стр. 390) о "количестве превращения" ("Verwandlungsinhalt"), имеющемся у данного тела, подобно тому как понятие энергии он связывает с "количеством теплоты и работы" ("Wärme- und Werkinhalt") [там же, стр. 354]. Поэтому он и предлагает для величины S название "энтропии" (от греческого слова ἡντροπὴ – превращение), чтобы подчеркнуть эту связь с понятием "энергии".

Понять подобного рода необратимые процессы – в частности, возрастание энтропии – и является главной задачей термодинамики. Наилучшее изложение этого предмета в старинной форме можно найти в статье В. Томсона в Британской энциклопедии и в книге Клаузиуса "Die mechanische Wärmetheorie" ("Механическая теория теплоты", 1-е изд., 1861). В последующих изданиях (1864 г. и далее) из-за добавлений качество изложения, к сожалению, снизилось. Современное изложение принципов этой науки дает Каратеодори (Math. Annalen, т. 67, стр. 381 и далее)[1].

Необратимые процессы не допускают никакого имитирования чисто механическими средствами (если мы, конечно, исключаем трение и тому подобные феномены). Связь между обеими этими дисциплинами – механикой и термодинамикой – восстанавливается только с более высокой точки зрения – статистической механики молекулярных систем. Здесь в качестве совершенно нового момента в игру вступает вероятность распределения компонент скорости по отдельным молекулам. Одной из самых блестящих идей Больцмана была идея положить $S = k \cdot \ln W$, где под W как раз и понимается эта вероятность. Однако сейчас я не имею возможности говорить об этом.

Математическая физика

Разбор процесса развития аналитической механики в Англии и Германии уже подвел нас ко второму разделу настоящей главы, имеющему своей целью охватить развитие математической физики в этих странах в период примерно с 1830 по 1880 гг.

Под "математической физикой" я понимаю здесь всю область "феноменологической" физики, в том виде как она была построена Францем Нейманом и др., а также англичанами. Вершины своего развития она достигла в уравнениях Максвелла. Таким образом, речь пойдет о физике, работающей с идеей непрерывных сред, – в противоположность атомистической физике, недавно снова выдвинувшейся на передний план. Однако там, где этого будет требовать историческая справедливость, я буду переступать как через эти тематические, так и через национальные границы. Среди других областей прикладной математики математическая физика претендует на особый наш интерес, поскольку она сохранила наиболее живые взаимоотношения с чистой математикой.

Мы уже обсуждали вопрос о развитии математической физики во Франции (примерно до 1830 г.), которое от атомистической точки зрения Лапласа (точечные центры сил) постепенно привело к феноменологической точке зрения Фурье и Коши (см. стр. 84, 89). Это развитие было нацелено на

---

[1]) Кроме того, недавно в Sitzungsber. Akad. Berlin (1925, стр. 39 и далее) опубликована его статья "Über die Bestimmung der Energie und der absoluten Temperatur mit Hilfe der reversiblen Prozeße" ("Об определении энергии и абсолютной температуры с помощью обратимых процессов").

описание процессов с помощью дифференциальных уравнений, относящихся к материи, мыслящейся непрерывной. Мы также рассматривали и дальнейшее развитие, которое эта наука получила в Германии в трудах Гаусса и Вебера; первого из них следует причислить к феноменологам, а второго – из-за его основного закона электричества – к атомистам (см. стр. 35–36). И, наконец, мы рассмотрели чисто математический, основанный целиком на феноменологической основе метод, связанный с именем Дирихле и по сути дела направленный лишь на то, чтобы разобраться в трудностях математического характера, а когда можно – и преодолеть их (см. стр. 115 и далее).

В первую очередь мы должны были бы обратиться теперь к Риману (1826–1866) как к человеку, продолжившему все эти начинания. Но подробную оценку выдающимся достижениям этого исключительного ума, внесшего свой вклад во все области современной ему математики, мы дадим позднее в их взаимной связи друг с другом (см. гл. 6). А сейчас мы для начала остановимся на результатах Франца Неймана и кёнигсбергской школы.

Франц Нейман родился в 1798 г. в семье старшего лесничего в Укермарке; скончался он в 1895 г., т.е. в возрасте 97 лет. Уже в этом своем долголетии он выглядит истинным представителем стойкой прусской породы, принадлежность к которой он доказывал неуклонным исполнением долга и которая главным образом и определила его широкую деятельность, увенчавшуюся выдающимися успехами.

Живое представление о личности Неймана дают посвященные ему воспоминания его дочери Луизы Нейман (опубликованы в 1904 г.). Научная деятельность Неймана освещена в монографиях Фолькмана и Вангерина (опубликованы соответственно в 1906 и 1907 гг.). Семнадцатилетним гимназистом, воодушевленный идеей освободительной войны, Нейман в 1815 г. вступил в армию Блюхера. 16-го июня, во время битвы при Линьи он получил тяжелое пулевое ранение в челюсть. Несмотря на тогдашний плохой уход за ранеными и большие личные невзгоды, его упорная натура взяла верх. Он вылечился и вернулся в Берлинскую гимназию, которую успешно окончил осенью 1817 г.

Его занятия в Йене и в Берлине сначала привели его к минералогии, которая в 20-х годах в связи с развитием кристаллографии (в конце концов выродившейся в чисто геометрическую дисциплину) переживала у нас период особого подъема. Толчок к развитию кристаллографии дал Гаюи (род. в 1784 г.), знаменитая парижская коллекция кристаллов которого, к сожалению, погибла при артобстреле 1870-го года. В Берлине кристаллография была представлена Вейсом, и в качестве его ассистента Нейман сделал свои первые, сразу же получившие большую известность открытия. Начиная с 1823 г. его занимал так называемый *закон зон* – чисто геометрическая теорема о положении граничных плоскостей кристалла. Эта теорема утверждает, что когда известно несколько ребер и граней, любая плоскость, параллельная двум ребрам кристалла, может служить его граничной плоскостью. Таким образом, зная какие-либо четыре грани и образуемый ими тетраэдр, можно последовательным построением найти все остальные.

Самое существенное в этой теореме – что́ Нейман считал очевидным и не особенно подчеркивал – заключается в том, что на практике среди получаемых при этом построении плоскостей чаще всего встречаются те, которые из четырех основных (которые сами, естественно, должны быть выбраны среди наиболее часто встречающихся) получаются первыми. Без этого указания на вероятность появления плоскостей теорема Неймана не имеет никакого практического значения, так как построение это в конечном счете дает все мыслимые плоскости с рациональными индексами. Отдельные плоскости получают предпочтение перед другими лишь в порядке очереди.

Этот "закон зон" (зоной Нейман называет совокупность параллельных плоскостей) был особенно изящно интерпретирован его автором геометрически. Если ребра кристалла заменить параллельными им прямыми, образующими пучок, выходящий из точки O, и повторить конструкцию Неймана в произвольной плоскости, пересекающей этот пучок, то из полного четырехсторонника, изображающего тетраэдр, получится как раз известная нам сеть Мёбиуса. Таким образом, здесь налицо тесная взаимосвязь с проективной геометрией, и потому Неймана (1823 г.) можно считать непосредственным предшественником Мёбиуса (имеется в виду его работа 1827 г.) и Грассмана (работа 1844 г.), которые тоже указывали на значение своих теорий для кристаллографии (см. реферат Либиша в Enzykl., V. 7).

Соприкасаясь, с одной стороны, с проективной геометрией, эта проблематика соприкасается, с другой стороны, с теорией решеток, применение которой опирается на представление о кристалле как о молекулярной системе. С точки зрения теории решеток теорема Неймана утверждает, что допустимой является любая плоскость, содержащая три узла решетки (а следовательно, и бесконечное число их), причем опять-таки плоскости, получающиеся ранее других, имеют преимущество в части вероятности их появления.

В 1826 г. Нейман обосновался в Кёнигсберге – сначала в качестве приват-доцента минералогии и физики, а с 1828 г. в качестве экстраординарного профессора. Кёнигсбергский период деятельности Неймана продолжался более пятидесяти лет. Работая сначала с Якоби (до 1843 г.), а затем с Ришело (умер в 1875 г.), он достиг исключительной продуктивности. В 1875 г. Нейман оставил службу. Экспериментальная физика после него была представлена Папе, а математическая – его последним учеником Ф. Фойгтом, унаследовавшим от своего учителя особый интерес к кристаллографии и (развитый далее им самим) способ подхода к этой проблематике.

К математической физике Нейман обратился под влиянием работ Фурье. Особенно много он с 1832 г. занимался оптикой, которой пытался овладеть, отправляясь от теории упругости, – подход, остававшийся господствующим в течение шестидесяти лет вплоть до появления электромагнитной теории света. Трудности, связанные с ним, мы уже отмечали, говоря о работах Коши. Вопросы о существовании продольных волн при светопреломлении, о плоскости, в которой происходят поперечные колебания, и о ее положении относительно плоскости поляризации были разрешены только электромагнитной теорией.

Десятью годами позже были опубликованы имеющие важное значение работы Неймана о законе индукции электрических токов, в центре внимания которых стоит "взаимный потенциал двух электрических цепей"

$$\iint \frac{ds\, ds' \cos(ds\, ds')}{r}.$$

Наряду с этими публикациями огромное стимулирующее воздействие на развитие всех направлений нашей науки оказала педагогическая деятельность Неймана, собравшая вокруг него многочисленный круг учеников, проходивших у него специализацию. В его неоднократно читавшихся и постоянно перерабатывавшихся лекциях можно всюду наблюдать тесное взаимодействие математических рассмотрений с физическими измерениями. Мы располагаем теперь длинным списком этих курсов, обработанных его учениками. Здесь следует упомянуть: "Магнетизм" (К. Нейман, 1881 г.), "Электрические токи" (фон дер Мюль, 1884 г.), "Оптика" (Дорн, 1885 г.), "Упругость" (О.Э. Мейер, 1885 г.), "Потенциал и сферические функции" (К. Нейман, 1887 г.) и "Капиллярность" (Вангерин, 1894 г.).

Собрание сочинений Неймана должно состоять из трех томов, первый из которых, однако, еще не вышел.

В преподавании, которому была посвящена вся его жизнь, Нейман проявил себя как превосходный и бескорыстный учитель, который многие из своих результатов, сам их не публикуя, отдавал своим ученикам. Он любил говорить, что учениками нужно руководить так, чтобы они этого не замечали и верили, что цель была достигнута их собственными усилиями.

Оба разрабатывавшихся им направления – и физическое, и математическое – имели среди его учеников достойных представителей. Среди физиков наиболее выдающимся был Кирхгоф, среди математиков – сын Неймана, Карл Нейман (род. в 1832 г.), Клебш (род. в 1833 г.) и Генрих Вебер (род. в 1842 г.). Здесь мы упомянем лишь отдельные работы Клебша и Вебера, и в первую очередь – диссертацию Клебша 1852-го года об эллипсоиде в жидкости [1)] и его учебник по теории упругости (1862 г.), примыкающий к работам французского инженера Сен-Венана. Работа Г. Вебера об уравнении

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

[1)] De motu ellipsoidis in fluido incompressibili viribus quibuslibet impulsis, – Regiomonti, 1854.

которая открывает "Math. Annalen" (1868, т. 1), написана уже под сильным влиянием Римана.

А теперь нам следует подробнее поговорить о Кирхгофе. Густав Роберт Кирхгоф (род. в 1824 г.) принадлежит к числу многих математиков и естествоиспытателей – уроженцев Кёнигсберга. С этим городом он был тесно связан также благодаря своей жене, дочери Ришело. В 1848 г. Кирхгоф защитил в Берлине диссертацию на право преподавания и с 1850 по 1854 г. был экстраординарным профессором в Бреславле. Здесь он повстречался с химиком Бунзеном, вслед за которым переехал в 1854 г. в Гейдельберг. До 1875 г. Кирхгоф был в этом городе ординарным профессором теоретической и экспериментальной физики. Затем он стал членом Берлинской Академии и в Берлине по большей части занимался математической физикой. Умер Кирхгоф в 1887 г.

Имя Кирхгофа приобрело широкую известность благодаря блестящим, выполненным совместно с Бунзеном работам по спектральному анализу. Работы эти были начаты примерно около 1860 г. Суть их изложена в большом трактате "Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektra der chemischen Elemente" ("Исследования по спектру Солнца и спектрам химических элементов"), изданном в 1861 г. Берлинской Академией.

Наряду с этим трактатом Кирхгоф знаменит своей широко распространенной книгой "Lehrbuch der Mechanik" ("Учебник механики"), впервые вышедшей в 1874 г. Она выделяется своей принципиальной установкой, что цель науки заключается "не в том, чтобы объяснять явления природы, а в том, чтобы полностью и простейшим образом описывать их" (см. предисловие Кирхгофа к книге). Формулировка эта и до сегодняшнего дня пользуется широким успехом, особенно у философов с позитивистской ориентацией – например, у Эрнста Маха.

Кроме этой абстрактной, самоограничивающей точки зрения на сущность науки книга обладает и еще одной характерной особенностью – это ее доведенная до крайности сжатость изложения, оперирующего с одними пространственными и числовыми величинами и совершенно исключающего какие бы то ни было "антропоморфные" представления, сколь бы привлекательными с точки зрения интуиции они ни казались. Так, например, вводя понятие "силы", Кирхгоф избегает всякого апеллирования к нашим мышечным ощущениям, масса определяется им как числовой множитель и т.д. По существу, именно от Кирхгофа ведет свое начало стиль, многие десятилетия царивший в математической физике. Его высшим законом является требование избегать преждевременных гипотез (и тем более – ошибок), а также подавление всякого личного участия, радости открытия или удивленного восхищения перед неисчерпаемо загадочным миром явлений. Мы были бы несправедливы по отношению к Кирхгофу, если бы совершенно отказали ему в эмоциях и фантазии; о них свидетельствует его гениальная и плодотворная исследовательская деятельность. Однако, по Кирхгофу, учитель не должен обнаруживать своего изумления или неуверенности, чтобы не лишать излагаемую им систему бесспорной убедительности и не создавать в ней пробелов. Этому идеалу соответствовали и лекции Кирхгофа: он наизусть читал гладко обработанную рукопись и скорее позволил бы себе заглянуть в нее во время лекции, чем дал бы повод обвинить себя хотя бы в небольшом отступлении от нее.

Можно указать ряд примеров того, к чему приводила эта категоричность его позиции. Так, изучая распространение электричества по проводам (Poggendorffs Annalen, т. 100, 1857 = Ges. Abh., стр. 131 и далее), Кирхгоф мимоходом заметил (Ges. Abh., стр. 147), что константа c в основном законе Вебера, деленная на $\sqrt{2}$, равняется скорости света! Но ни единым словом он не выдает возможности того исключительного прогресса в нашем познании, который открылся в связи с этим в работах Максвелла. Кирхгофу, всецело стремившемуся к тому, чтобы разобраться в уже имеющемся материале, новые открытия казались неудобной помехой или же чем-то, представляющим ничтожный интерес. Так, например, рассказывают, что когда Керр в 1877 г. открыл названный затем по его имени феномен вращения плоскости поляризации при отражении света от полированного конца намагниченного стержня, то Кирхгоф по этому поводу спросил "А разве вообще что-нибудь еще осталось неоткрытым?"

Не могу скрыть, что мне такая точка зрения на науку крайне антипатична, так как она убивает радость, доставляемую учебой, и парализует тягу к дальнейшим исследованиям. Младшее поколение физиков тоже не приняло ее, и именно новыми, имеющими совершенно иную ориентацию методами работы оно добилось своих выдающихся успехов. Тем не менее, мне казалось важным обрисовать здесь это направление, типичным представителем которого является Кирхгоф, чтобы иметь возможность отметить, что м а т е м а т и ч е с к а я трактовка физики ни в коем случае не несет ответственности за этот выставленный напоказ рассудочный холод, ибо математика является делом не только рассудка, но и в довольно существенной мере делом фантазии.

Но, как уже отмечалось, эта неплодотворная установка Кирхгофа не повлияла на его собственные научные достижения. Наоборот, мы чтим его как одного из тех ученых, которые добились важнейшего по своему значению прогресса в деле проникновения математики в физику.

Величайшим в этом отношении достижением следует считать то, что Кирхгоф — в связи со своими работами по спектральному анализу — первым начал математическое наступление на *законы теплового излучения*. Он сформулировал основной закон, утверждающий, что отношение излучения к поглощению должно для всех тел быть одной и той же функцией абсолютной температуры, и доказал его, опираясь на мысленные эксперименты и специфически математические умозаключения — например, на то, что из тождественного обращения в нуль интеграла Фурье вытекает равенство нулю подынтегрального выражения. То обстоятельство, что современные математики находили поводы для критики рассуждений Кирхгофа (Гильберт в Мюнстере, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver., 1912, т. 22, стр. 1 и далее), не снижает ценности полученных им результатов. Эти работы, в которых впервые встречается понятие "абсолютно черного тела", были опубликованы в "Berliner Monatsberichten" за 1859 г. (= Ges. Abh., стр. 571 и далее).

Помимо этого, фундаментального по своему характеру, достижения в работах Крихгофа можно найти блестящие решения ряда важнейших проблем теории упругости, гидродинамики, учения об электричестве и т.д.

Насколько глубоко математическая трактовка Кирхгофа охватывает имеющийся материал и насколько новую форму она придает этому материалу, можно видеть на следующем примере. В своем фундаментальном труде "Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet" ("Математическая обработка понятия гальванической цепи", 1827) Ом пользовался понятием электрического напряжения, не имевшим еще в то время определения, причем он исходил из представления о том, что покоящийся проводник равномерно заполнен электричеством постоянного напряжения, которое он считал пропорциональным некоторой "плотности". И только Кирхгоф показал (Poggendorffs Annalen, т. 78, 1849 =Ges. Abh., стр. 49), что напряжение это является электростатическим потенциалом и что в гальванических цепях покоящиеся электрические массы тоже располагаются на наружных поверхностях или соответственно на поверхностях раздела проводников.

Одним из самых красивых результатов этого рода мне всегда казалась параллель, проведенная Кирхгофом между изгибанием и закручиванием бесконечно тонкой проволоки, с одной стороны, и вращением материального тела вокруг неподвижной точки – с другой (Журнал Крелля, 1858, т. 56 =Ges. Abh., стр. 285 и далее). Это на редкость удачный пример того, как одни и те же формулы могут давать решение совершенно различных задач. Впрямую связь между этими задачами усматривается, пожалуй, только тогда, когда обе эти задачи оказываются сформулированными в виде вариационных.

А теперь мы перейдем к рассмотрению нового центра, в котором происходило развитие математики и физики, центра, сложившегося в течение 40-х годов в Берлине.

Как мы уже говорили, жизнь этих наших наук началась в Берлине не немедленно с основанием (в 1810 г.) университета. Она тормозилась господствовавшими в то время течениями неогуманизма и гегелевской философии, и только энергия Александра фон Гумбольдта в начале 20-х годов дала толчок к ее развитию. Математика нашла себе осмотрительного покровителя в лице Крелля, советника по вопросам строительства; для естествознания же – в той мере, в какой оно здесь нас интересует – исходным пунктом развития послужил переезд в Берлин в 1822 г. остфризского химика Митчерлиха. Его исключительную по своему значению деятельность университет почтил памятником, воздвигнутым в университетском саду.

Митчерлих работал в области, пограничной между химией и физикой. Из его школы вышли первые берлинские физики, которые, однако, в силу сознательной оппозиции спекулятивному направлению господствовавшей в то время философии были чистыми эмпириками. В первую очередь здесь следует назвать Магнуса и Поггендорфа. Оба они с 1834 г. были экстраординарными профессорами. Имя последнего приобрело известность благодаря издававшемуся им журналу "Annalen der Physik". Поггендорф поначалу был аптекарем и навсегда остался верен своей натуре, ориентированной на практические нужды. Педагогическая деятельность Магнуса находила себе выражение прежде всего в руководимом им "коллоквиуме", к которому в 1869/70 г. принадлежал и я; в дальнейшем коллоквиум этот стал замечательным питомником для физиков последующего поколения. Магнус заботился и о потребности своих учеников в практической деятельности, предоставив в общее пользование свою личную лабораторию (государственных физических институтов в то время еще не было).

Однако подъем естественных наук в Берлине был все-таки вызван другой причиной – влиянием рейнского физиолога Иоганнеса Мюллера, который после Бонна, где он работал в 1824–1833 гг., развил в Берлине большую активность. Это был ученый, который, осторожно ограничивая область своей собственной деятельности, умел дать мощный стимул работе многочисленных учеников. Он боролся против чисто эмпирического направления, интересовавшегося одной лишь экспериментальной стороной дела, и его деятельность оказала существенное воздействие своим требованием точного, теоретического обоснования.

И вот, испытывая все эти влияния, вырастало новое поколение естествоиспытателей, из которых шестеро молодых людей в 1845 г. объединились для тесной совместной работы в Берлинское физическое общество. Толчок к его организации исходил от физиолога Эмиля Дюбуа-Реймона; организовано оно было Г. Карстеном (род. в 1820 г.), приват-доцентом физики в Берлине, который впоследствии (после 1848 г.) продемонстрировал свои организационные способности и в Киле, где им была создана служба погоды и другие организации с практической направленностью.

Под руководством Карстена молодое Общество принялось за издание "Fortschritte der Physik" – годичных обзоров физической литературы, которые впоследствии стали совершенно незаменимы в качестве справочника (позже по их образцу были созданы "Fortschritte der Mathematik"). Затем был разработан проект всеобщей "Физической энциклопедии", которая, правда, не была доведена до конца. В нее вошли монографии, весьма различные по своей ценности, – в частности, "Handbuch der physiologischen Optik" ("Справочник по физиологической оптике") Гельмгольца.

В этот кружок вскоре вступили и другие молодые ученые, имена которых ныне занимают в физике ведушее положение. Среди них в первую очередь следует назвать Гельмгольца, который в бытность военным врачом в Потсдаме на заседании Физического общества впервые (в 1847 г.) доложил о своей теории сохранения энергии. К нему присоединился офицер инженерных войск Вернер Сименс (род. в 1816 г. в Ганновере), который в 1848 г. вместе с Гельмгольцем участвовал в войне с Данией и выдвинулся установкой электрических мин в кильской гавани. В 1849 г. Сименс совместно с Гальске основал электротехническую фирму, вскоре приобретшую мировую известность. События эти чрезвычайно интересно описаны в "Воспоминаниях" Сименса (Берлин, 1893), всячески заслуживающих того, чтобы с ними познакомиться. Не меньшее значение имел и еще один член Физического общества – Клаузиус (род. в 1822 г. в Померании), бывший в то время учителем старших классов. О великом достижении Клаузиуса – обосновании второго начала термодинамики – мы уже говорили. В своей работе "Über die bewegende Kraft der Wärme" ("О движущей силе тепла", Poggendorffs Annalen, 1850, т. 79) он отделил имеющиеся у Сади Карно правильные подходы от их неверного и несовершенного облачения – деяние, которое Мах в своей истории учения о теплоте [1]) называет "выдающимся интеллектуальным достижением". Кроме того, выполненные им работы по кинетической теории газов сделали Клаузиуса одним из основных поборников атомизма.

Кирхгоф также принадлежал к этому кружку многообещающих талантов, вступивших в добровольное объединение, основанное исключительно на началах взаимопомощи. Окружавшая их атмосфера большого города способствовала развитию этого общества, духовная жизнь которого благодаря живым и стимулирующим взаимоотношениям достигла редкостного расцвета.

Из этого содружества резко выделялась выдающаяся фигура Гельмгольца, о котором я хочу теперь сказать более подробно. Причиной исключительного положения, занимаемого им в истории науки, является необычайная разносторонность и глубина его дарования, в котором нас, естественно, в первую очередь интересует его математическая сторона.

Герман Гельмгольц родился в 1821 г. в семье старшего учителя в Потсдаме. По совету отца он решил стать врачом, чтобы как можно раньше обеспечить себе в жизни независимое положение. Он был студентом так называемой "Pepinière" – военно-медицинской школы в Берлине. В 1842 г. защитил диссертацию "De fabrica systematis nervosi evertebratorum" ("О строении нервной системы беспозвоночных") и в соответствии с принятыми на себя обязанностями стал военным врачом в Берлине. Все свои математические познания Гельмгольц приобрел путем приватных занятий. О том, какое малое понимание встречали наклонности Гельмгольца в его профессиональном окружении, свидетельствует следующий эпизод. Узнав о книге Гельмгольца "Über die Erhaltung der Kraft" (букв.: "О сохранении

---

[1]) M a c h E. Die Principien der Wärmelehre. – Leipzig, 1896. Пуанкаре в "Thermodynamique" на стр. 114 говорит, впрочем, что Клаузиус независимо переоткрыл принцип Карно.

силы"), один из его начальников воскликнул: "Наконец-то что-то практическое!" Он, конечно, полагал, что речь идет о сохранении боевой силы его солдат!

При содействии Гумбольдта Гельмгольц в 1848 г. стал ассистентом анатомического музея в Берлине, а годом позже – профессором физиологии и анатомии в Кёнигсберге; предметы эти он преподавал также в Бонне (1855 г.) и в Гейдельберге (1858 г.). Гейдельбергский период, вероятно, представляет собой кульминацию творческой деятельности Гельмгольца. Здесь он все большее и большее внимание уделяет своим интересам в области физики, которые в 1871 г. – в пятидесятилетнем возрасте – привели его как главного представителя этой науки в Берлин. В 1888 г. он оставил академическую деятельность и в качестве президента управлял основанным по инициативе Сименса Государственным физико-техническим институтом. Скончался Гельмгольц в 1894 г.

Уже это чисто внешнее описание жизненного пути Гельмгольца характеризует его выдающееся, не ограничивающееся какой-либо одной специальностью значение. До самой своей смерти он оставался перед лицом общественности истинным представителем точного естествознания, тем более, что и общественного положения ему удалось добиться единственного в своем роде. В соответствии с тем центральным местом, которое Гельмгольц занимал в науке, мы и памятник его перед Берлинским университетом видим расположенным в центре: со стороны улицы к нему примыкают памятник Вильгельму и Александру фон Гумбольдтам, а несколько позади стоят памятники Моммзену и Трейчке.

Яркую картину жизни и деятельности Гельмгольца дает его большая биография, написанная Лео Кёнигсбергером; она была выпущена издательством Vieweg в 1902–03 гг. Научное творчество Гельмгольца представлено в его трехтомном Собрании сочинений, выпущенном в 1882–1895 г., издательством Barth.

Характерной чертой научного дарования Гельмгольца является его многогранность, сочетающаяся с огромной интенсивностью во всех направлениях. Особый дар проводить количественные эксперименты, наблюдения и измерения, до виртуозности развитый им работой собственными руками, сочетался у него со способностью к математической формулировке проблемы, тоже развитой им собственноручными усилиями. Оба эти качества позволили ему добиться величайшего успеха в решении проблем, источником которых послужила его громадная эрудиция во всех областях естествознания; а присущие ему сверх того способность к философскому мышлению и всесторонняя жизненная восприимчивость содействовали созданию законченной картины мира, в которую органически вписывались результаты его исследований. В общем же абстрактное мышление брало в нем верх над интуитивным подходом и творческой фантазией. Гельмгольц не был биологом, охватывающим, подобно Дарвину, все широчайшее многообразие живых организмов и наводящим в нем порядок; он не открыл, подобно Фарадею, мира новых физических явлений; и он не был математиком ради самой математики. Любая вещь привлекала к себе его внимание лишь в рамках большого естественнонаучного целого.

В соответствии с этим его талант проявился не в бурной юношеской деятельности; он смог созреть лишь в результате богатого накопленного опыта и в процессе медленного развития, но зато потом он сохранял свежесть и живость до глубочайшей старости. Гельмгольца – хотя и в несколько ином смысле, чем Франца Неймана – мне тоже хотелось бы охарактеризовать как представителя чисто прусского типа, являющего собой отчетливую противоположность южногерманскому или нижнесаксонскому типу, представленному Гауссом, Риманом и Вейерштрассом.

Мы можем проследить здесь лишь за математическими работами Гельмгольца, да и то выбрав среди них только самое важное. В полном согласии с общей направленностью его духа достижения Гельмгольца и здесь заключаются не в создании новых математических идей, а в распространении на новые области тех из них, которые уже имелись ранее. С особой благодарностью хочется отметить, что в противовес многим тенденциям своего времени Гельмгольц неизменно подчеркивал те исключительные результаты, которые могут быть достигнуты математическим мышлением, поставленным на службу общим вопросам.

В первую очередь я назову небольшую, написанную в 1847 г. статью Гельмгольца, заложившую основу его славы: "Über die Erhaltung der Kraft" ("О сохранении силы") [1].

В современной терминологии мы должны были бы говорить о "сохранении энергии". В статье этой Гельмгольц развивает мысль, что некоторая величина – а именно, та, которую мы сейчас называем "энергией", – не должна претерпевать изменений и что потому немыслим perpetuum mobile, который производил бы работу из "ничего" в силу одного своего внутреннего устройства. Мысль эта в то время носилась в воздухе. Я не хочу излагать здесь исторические факты, рассказ о которых можно найти в целом ряде источников; скажу лишь, ограничиваясь механикой, что речь идет о теореме $T + U = h = \text{const}$, где T – кинетическая, а U – потенциальная энергия рассматриваемой механической системы. И если принять во внимание, как это полагал еще в 1758 г. Боскович, а в 1820 г. Лаплас и как это общепринято было считать в 40-х годах, что в конечном счете все природные явления основаны на взаимодействии точечных масс, притягивающихся друг к другу по прямой с силой, являющейся некоторой функцией $f(r)$ расстояния r между ними, то всеобщее значение этой теоремы, относящейся ко всем явлениям природы, не будет нуждаться в дополнительном обосновании.

Таким образом, задача Гельмгольца заключалась не столько в том, чтобы открыть эту обшую идею, сколько в том, чтобы математически проследить

---

[1] Имеется русский перевод: Гельмгольц Г. О сохранении силы. – М.: ГТТИ, 1934. – *Примеч. пер.*

ее — поскольку имелись соответствуюшие измерения — во всех доступных в то время явлениях природы. Именно эту задачу он и решил в статье 1847-го года — в частности, для тепловых явлений, для электростатики и магнитостатики, а также для электродинамики; статья заканчивается указаниями на применимость этого закона и к явлениям живой природы.

Позднее, в 1887 г., основываясь на английских работах, о которых мы еше будем говорить впоследствии, Гельмгольц придал всему этому мысленному построению значительно более общий вид. В работе "Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung" ("О физическом смысле принципа наименьшего действия") он высказал утверждение, что не только интеграл $T + U = h$, но и все вообше выводы, основанные на дифференциальных уравнениях механики, должны быть обязательными для всех явлений природы. Ясно, что такое расширение намеченного уже в 1847 г. переноса механики на физические явления не было для Гельмгольца вынужденной или хотя бы дедуцированной идеей. Как он сам уверял меня в личной беседе, — поездка на Международную выставку в Чикаго в 1893 г. свела меня с ним на время довольно долгого пути туда и обратно — в обоих случаях этот обший подход был для него совершенно само собой разумеюшимся.

Тем не менее, даже в работе "О сохранении силы" этот подход представляет собой огромное и специфическое идейное достижение. До Гельмгольца писали не

$$T + U = h$$

(хотя это делал в своей "Аналитической механике" уже Лагранж), а $T = U + h$ или же $T - U = h$. Здесь U обозначало так называемую "силовую функцию", а $2T$ (в элементарном случае mv^2) — "живую силу". Таким образом, будучи выражено словами, утверждение это гласило, что разность между половиной живой силы и силовой функцией остается постоянной. Только благодаря Гельмгольцу, ставшему вместо $-U$ писать U, оно получило свой современный, вызывающий определенные представления и потому гораздо более важный, а вместе с тем и более удобный в обращении вид, в котором обе составляюшие T и U абсолютно симметричны и внутренне равноценны. Только с этого времени и стало возможным говорить о "законе сохранения энергии".

Успех статьи Гельмгольца был отнюдь не немедленным. Физические веяния того времени, возникшие в противовес скороспелым умозаключениям натурфилософов, создавали сильнейшее противодействие дедуктивному мышлению и даже вызывали недоверие к нему. Так, Поггендорф отказался принять работу Гельмгольца в свои "Annalen" и найти для нее издателя удалось только благодаря стараниям Дюбуа-Реймона. Из берлинских академиков один Якоби немедленно оценил ее значение. Дирихле во всей этой полемике не участвовал.

Это непризнание, коренившееся в обстоятельствах того времени, не покажется странным и тому, кто прочтет статью сегодня. Уже одна ее терминология чужда нам. Термин "сила" мы привыкли применять лишь к произведению массы на ускорение. Гельмгольц же говорит о "живой силе" T и о "силе напряжения" U. Отсюда и происходит название этой работы. Далее, исследованию в собственном смысле слова предшествует некоторое априорное рассмотрение, которое строгий естествоиспытатель может читать лишь с внутренним противодействием и которое, конечно, никак нельзя признать обязательным. В нем нашло свое отражение влияние Канта, который для Гельмгольца представлял собой идеал чистой дедукции из высших принципов. И наконец, отдельные фрагменты текста написаны кое в чем на ощупь и носят печать незавершенности, обусловленной недостаточным знанием литературы из-за его потсдамской оторванности от жизни.

Таким образом, этот научный первенец Гельмгольца и в стилистическом отношении не сравним с той классической завершенностью и недоступностью, присушей Гауссу с самого начала, к которой Гельмгольц не приблизился и не стремился приблизиться даже в позднейших своих работах гейдельбергского периода. К этим последним великим творениям, особенно важным с точки зрения математики, мы сейчас и перейдем.

Поздние работы Гельмгольца в первую очередь относятся к учению об ошушениях, к работе органов зрения и слуха. Гельмгольц особенно подходил для работы в этом направлении, ибо здесь, с одной стороны, ему оказывали поддержку его собственные на редкость тонкие, с наклонностью к художественному восприятию органы чувств, а с другой – им руководил сильный теоретико-познавательный интерес. Мы рассмотрим два больших труда:

1. "Die Lehre von Tonempfindungen" ("Учение о звуковых ошушениях", 1863), являющееся "физиологической основой теории музыки";

2. "Handbuch der physiologischen Optik" ("Справочник по физиологической оптике", 1867), к которому примыкают

3. "Populäre wissenschaftliche Vorträge" ("Научно-популярные лекции"), первое издание которых (1865–1870 гг.) получило широчайшее распространение. Эти лекции, возникшие на базе докладов в "Естественно-историческом и медицинском обществе", содержат в прозрачной и понятной неспециалисту форме изложение труднейших научных проблем.

Для нас особенно важен первый из перечисленных трудов, но еще более важны работы по математике и физике, возникшие в процессе подготовки к нему. Из них мы укажем две работы по гидродинамике:

1. "Integrale der hydrodynamischer Gleichüngen, welche der Wirkelbewegungen entsprechen" ("Интегралы уравнений гидродинамики, соответствующие вихревым движениям"; Журнал Крелля, 1858, т. 55);

2. "Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden" ("Воздушные колебания в трубах с открытыми концами"; Журнал Крелля, 1860, т. 57).

В первой из этих работ содержатся знаменитые общие теоремы Гельмгольца о вихревом движении и, в частности, теория круговых вихрей [1]. Так как гидродинамика дольше других областей оставалась недоступной для математического рассмотрения из-за нелинейности ее дифференциальных уравнений, и потому долгое время приходилось довольствоваться изучением так называемых потенциальных движений, теоремы эти для гидродинамической теории идеальных жидкостей явились большим шагом вперед в направлении охвата реальных явлений. Трактовка Гельмгольца, безусловно, допускала дальнейшие улучшения и усовершенствования. В частности, позже его теоремы были значительно проще выведены В. Томсоном в его большой работе "On Vortex Motion" ("О вихревом движении", 1868–1869 гг.), где появился важный новый момент – понятие циркуляции жидкости вдоль кривой. С точки зрения строгости изложение Гельмгольца во многих отношениях тоже оставляло желать лучшего. Однако этот его недостаток, присущий многим математическим физикам, не стоит особо подчеркивать, так как он не имеет слишком уж большого значения по сравнению с позитивной силой исследований Гельмгольца.

Вторая из работ Гельмгольца содержит первые вытекающие из гриновских построений в теории потенциала теоремы об уравнении $\Delta u + k^2 u = 0$; сегодня мы сказали бы, что они посвящены изучению краевых задач для этого дифференциального уравнения. По стандартам нынешней математики исследования эти тоже не очень строги. Они буквально кишат непоясненными интуитивными соображениями и – как раз именно поэтому – являются новаторскими.

В конце 60-х годов Гельмгольц познакомился с работами Римана, которые вызвали у него настолько живой интерес, что он завел обыкновение брать их с собой во все поездки. Это именно они постепенно уводили Гельмгольца все дальше и дальше от физиологии и направляли его в сторону проблем математической физики. Об этом свидетельствуют обе публикации Гельмгольца, относящиеся к 1868 г.:

1. "Diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen" ("Разрывные движения жидкости"; Berliner Monatsberichte);

2. "Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen" ("О фактах, лежащих в основаниях геометрии", Göttinger Nachrichten).

Первая из этих работ представляет собой еще одно серьезное продвижение в деле приближения гидродинамики к действительности. В ней рассматривается свободное образование струй при потенциальном движении и с помощью конформного отображения, методом, предложенным Риманом, решаются простейшие случаи плоской задачи. Проблема эта вскоре была продвинута далее Кирхгофом.

---

[1] Те же самые теоремы о вихрях (и примерно в то же самое время) были найдены и Дирихле. Исследования Дирихле сразу после его смерти были изданы Дедекиндом (см. "Труды" Дирихле, т. 2, стр. 363 и далее).

Толчок ко второй работе – которая, вытекая из философских запросов Гельмгольца, долгое время созревала в нем – также был дан Риманом, а именно – его работой "Über die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen" ("О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии"), которая в качестве вступительной речи на получение права преподавания в университете была произнесена еще в 1854 г., но опубликована была только в 1868 г. Как уже было сказано выше, Риман мыслит элемент дуги в пространстве заданным при помощи некоторой квадратичной формы

$$ds^2 = \Sigma a_{ik}\, dx_i dx_k$$

и затем производит классификацию всевозможных квадратичных дифференциальных форм и отвечающих им геометрий. Гельмгольц отступает на один шаг назад, показывая, что такой – и даже более специальный – вид для ds^2 вытекает уже из самого факта существования свободно перемещающихся тел.

В заключение скажем несколько слов о деятельности Гельмгольца в Берлине в качестве физика. Как мы уже упоминали, Гельмгольц занимал в Берлине высокое и представительное положение. Его научные обязанности заключались в руководстве только что основанным Физическим институтом и в чтении общего курса экспериментальной физики, а также спецкурсов по различным разделам математической физики. Позднее эти лекции были изданы Кёнигом, Кригар-Менцелем, Рунге и Рихарцом. В замечательном по доступности изложении они содержат почти все разделы теоретической физики: динамику дискретных материальных точек и непрерывно распределенных масс, акустику, электродинамику и магнетизм, электромагнитную теорию света, теплоту.

Лекции эти – во всяком случае, в напечатанном виде – имели влияние, куда более, чем в устном изложении, отвечающее богатому их содержанию. Гельмгольц с пренебрежением относился к этой стороне своей педагогической деятельности (и вообще к своим лекциям). К лекциям он почти не готовился, хотя импровизировать и не умел. Причину такого его поведения следует искать в той чудовищной перегрузке, которой в Берлине он подвергался больше, чем в каком-либо другом месте. Ему постоянно приходилось выполнять огромные представительские обязанности. Он консультировал правительство по всем специальным вопросам, должен был принимать на себя официальное представительство на различных международных конгрессах и т.п., а кроме того бóльшую часть своего времени и сил он посвящал популярным докладам, которые заставляли его совершать поездки и внутри страны и за границу.

И тем не менее, в порядке частного руководства Гельмгольц подготовил в своей лаборатории целый ряд выдающихся учеников с широким кругозором и со способностью к самостоятельным экспериментам. В качестве наиболее значительной среди них фигуры следует назвать Генриха Герца.

Из числа больших конгрессов, на которых Гельмгольц играл главную роль, наиболее знаменитым был руководимый по существу им и Вильямом Томсоном Парижский "Электрический конгресс" 1881-го года, на котором под председательством министра путей сообщения Кошери были установлены международные единицы измерения: вольт, кулон, ом, ампер, фарада. Достойно всяческого сожаления, что Гельмгольц не смог здесь в достаточной мере отдать должное именам Гаусса и Вебера, с которыми фактически связано возникновение абсолютной системы мер в области электромагнетизма. Название "гаусс" для единицы напряженности магнитного поля было установлено только впоследствии по предложению англичан.

Наряду с национальными противоречиями известную тормозящую роль здесь могло сыграть и еще одно обстоятельство совсем иного рода – это неоднократно уже упоминавшийся большой спор, вызванный веберовским основным законом электродинамики, спор, в который в начале 70-х годов оказался вовлеченным и Гельмгольц. Полемика, и порой весьма жаркая, которую с противоположной стороны вел К. Нейман, привела – как теперь, пожалуй, можно сказать – к единственному, не представляющему собой ничего нового выводу, что подобного рода вопросы разрешаются не спорами, а лишь экспериментом. В тот самый миг, когда Герц с помощью проведенного им опыта показал, что для распространения электрической силы в пустоте требуется время, что она распространяется волнами, закон Вебера, предполагавший мгновенное дальнодействие, прекратил свое существование.

В свои берлинские годы Гельмгольц прошелся почти по всем разделам математической физики и, решительно вторгаясь то в один, то в другой из них, инициировал самые разнообразные исследования. В этом отношении наиболее замечательной представляется мне его "Фарадеевская лекция", прочитанная в 1882 г. в Лондоне. В этой лекции он убедительно показал, что электричеству – вследствие ряда электрохимических фактов – должна быть придана (как, кстати, этого и хотел Вебер) атомистическая структура и что, следовательно, его нельзя идентифицировать с эфиром, который мыслится нами непрерывным. Этот вывод Гельмгольца, являющийся отправной точкой современной электронной теории, тем более достоин восхищения, что сам он в своих работах всегда придерживался феноменологической точки зрения.

Я не могу расстаться с этой выдающейся личностью, не упомянув и о границах, которые были ему поставлены природой. Даже Гельмгольцу при всей его разносторонней восприимчивости кое в чем было отказано. Приведу лишь один факт: в полном соответствии со своей натурой, склонной к абстрактному и чуждой собственно техническому духу, Гельмгольц питал недоверчивую сдержанность по отношению к молодому и бурному духу изобретательства. При его исключительном положении и влиянии на руководящие, а также финансовые круги эта его позиция должна была иметь серьезные последствия. И действительно, она нанесла урон самой молодой отрасли нашей техники – авиации. В одной своей работе 1873-го года –

в отдельных результатах, разумеется, правильной – Гельмгольц, опираясь на рассмотрение механических аналогий, недооценил возможности механического полета. Искаженное невежественным общественным мнением, суждение это бесспорно задержало естественный ход развития авиации.

К сожалению, на Гельмгольце я должен распрощаться с математической физикой в Германии и Австрии, даже самым отдаленным образом не воздав должного всему ценному и интересному, что здесь имеется, и теперь обращусь к последнему разделу этой главы – к математической физике в Англии, которая хотя и соприкасалась во многих отношениях в интересующий нас период с математической физикой в Германии, но тем не менее в целом независимо шла своим великим путем.

О самоучке Грине (1793–1841; "Mathematical Papers" в одном томе, Лондон, 1871), который в 1828 г. опубликовал свою новаторскую, но поначалу мало замеченную работу "An Essay on the Application of mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism" ("Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма"), мы уже говорили. Он попал в Кембридж в сорокалетнем возрасте и опубликовал там ряд важных работ, из числа которых мы назовем лишь работу о *притяжении эллипсоида* (1835 г.); по сравнению с его выдающимися по своей важности работами по акустике и оптике исследование это обладает тем несомненным достоинством, что оно проводится сразу для n-мерного случая – задолго до того, как в Германии начался описанный выше процесс развития n-мерной геометрии.

Существует известная параллель между Грином и работавшим в Дублине (вместе с Гамильтоном и Сальмоном) Маккаллохом (1809–1847). Это был геометр, обладающий громадным талантом; однако его деятельности был уготован краткий срок – он покончил жизнь самоубийством. Его сочинения – "Collected Works" - вышли в одном томе в 1880 г. в Дублине.

Особенно замечательна одна работа Маккаллоха 1839-го года: "An Essay towards a dynamical theory of reflexion and refraction" ("Опыт динамической теории отражения и преломления", Дублин, "Transactions", т. 21; из печати том этот вышел только в 1848 г.), в которой он закладывает принципиально новый фундамент френелевской теории. Работа эта обладает особенной важностью потому, что в части, касающейся математических формул, она буквально предвосхищает электромагнитную теорию света. Этот в высшей степени своеобразный факт я хотел бы кратко пояснить, причем сделаю это тем более охотно, что он очень близок к обычным для сегодняшнего дня исследованиям по математической физике.

Пусть u, v и w – бесконечно малые перемещения некоторого континуума. Тогда особую роль играют следующие девять частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Из них можно составить шесть величин

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

которые будут определять деформацию элемента объема, и три величины

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

определяющие умноженное на −2 вращение этого элемента. Первые, говоря современным языком, дают некоторый тензор, а последние – вектор.

И вот в основу наиболее общего подхода к теории упругости – а тем самым, и к "упругой" оптике – может быть положено предположение, что потенциал упругой деформации представляет собой функцию – конкретно, квадратичную функцию – указанных шести величин, определяющих тензор. В таком виде идея эта была, в частности, реализована Грином в его знаменитой работе 1837-го года.

Маккаллох имел решимость и мужество сделать вместо этого потенциал зависящим от трех величин, определяющих в е к т о р, положив, например, для кристалла

$$V = a^2\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + b^2\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.$$

В результате оказалось, что с помощью такого подхода можно без какой бы то ни было натяжки, оперируя лишь по правилам аналитической механики, удовлетворить френелевским законам преломления и отражения света в кристаллах.

Несмотря на это Маккаллох натолкнулся на сильнейшие возражения, и на первых порах работа его не удостоилась внимания. Причиной был его феноменологический подход: полученные математические формулы прекрасно соответствовали привычным схемам механики и результатам наблюдений, но глубинный смысл этих формул был непонятен. С физической точки зрения подход Маккаллоха означал, что потенциал должен зависеть не от деформации элемента объема, а от его вращения по отношению к некоему абсолютному пространству, и это действительно казалось абсурдным. Правда, В. Томсону удалось придумать такую модель среды (в ячейки ее каркаса он поместил вращающиеся волчки с двумя степенями свободы), что физическая ее трактовка вела к формулам Маккаллоха – по крайней мере, для не слишком больших временны́х интервалов. Но и эта интерпретация была довольно вымученной, и настоящую жизнь формулы Маккаллоха получили лишь тогда, когда обнаружилась их связь с электромагнитными представлениями. И все же этот ход мысли, скорее идущий наощупь, чем ведущий к определенной цели, так своеобразен и примечателен, что мне не хотелось пройти мимо него.

Но и Грин, и Маккаллох по своему значению представляли собой лишь изолированные явления. Свое бесперебойное и блистательное восхождение математическая физика в Англии начала лишь тогда, когда в начале 40-х годов среди молодых талантов в Кембридже на первый план выдвинулись Стокс и Вильям Томсон.

Первый из них является англичанином в узком смысле слова. Родившись в 1819 г. в Скрине (Ирландия), он начал публиковаться в 1842 г. Его сочинения изданы в пяти томах "Mathematical and Physical Papers" (в 5-м томе помещен интересный некролог, написанный лордом Рэлеем). Стокс с 1837 г. и до самой смерти, последовавшей в 1903 г., т.е. в течение 66 лет, жил в Кембридже и вел в нем – сначала в качестве исследователя, а затем в качестве педагога и администратора – свою широкую, непрерывную и, благодаря личной доброте, очень благотворную деятельность.

Вильям Томсон, впоследствии лорд Кельвин (1824–1907), родился в Белфасте, в Северной Ирландии – области, куда иммигрировало так много шотландцев. Отец его был в Белфасте профессором математики, так что в данном случае мы имеем дело с интересным случаем наследственности, тем более, что и старший брат Вильяма, Джемс, тоже был весьма значительным теоретиком (он открыл феномен понижения температуры замерзания при повышении давления). Томсон-отец в 1832 г. был приглашен в университет в Глазго, и Вильям воспитывался здесь под непосредственным руководством отца. Уже в 1834 г. – в возрасте десяти лет – он поступил в университет, причем, конечно, нужно помнить, что прежний колледж в Глазго соответствовал примерно старшим классам наших гимназий. Томсон учился там до 1841 г., а затем переехал в Кембридж. Пора его ученичества закончилась в 1845 г. путешествием в Париж, оказавшим на него огромное влияние. В 1846 г. он уже сам был приглашен "профессором натурфилософии" в Глазго, где оставался и после выхода на пенсию (1899 г.) до самой своей смерти, последовавшей в 1907 г.

Пожалуй, надо быть шотландцем, чтобы понять привязанность, которую В. Томсон в течение всей своей жизни питал к родному городу. Глазго – огромный фабричный город с особо высокими дымовыми трубами для выброса отходов химического производства. Он расположен на абсолютно плоской местности в долине реки Клайд и из-за шотландского климата почти все время окутан облаком черного дыма. Небольшим притоком Клайда является ручей Кельвин, по имени которого Томсон, когда ему в 1892 г. было пожаловано дворянство, и взял себе имя лорда Кельвина.

На протяжении всей своей долгой жизни Томсон развивал неутомимую деятельность в области математической физики, ее преподавания и технических приложений. Свою работу он начал в 1840 г., в возрасте шестнадцати лет, когда с отцом отправился в первое путешествие в Германию и взял с собой для изучения "Теорию теплоты" Фурье. У Томсона, как и у Франца Неймана, влияние Фурье высекло из кремня искру.

За этим пошла обильная научная продукция, большей частью нашедшая отражение в коротких, метких статьях. К концу своего обучения в Кембридже Томсон уже был автором шестнадцати публикаций! Самые первые из них носят чисто математический характер; они касаются теории потенциала, электростатики и теплопроводности. Но в 1845 г. в Париже Томсон под сильным влиянием Реньо обратился к количественным измерениям. Вскоре затем в Глазго начался его термодинамический период. Почти одновременно с Клаузиусом Томсон столкнулся с трудностями, получающимися при попытке согласовать рассуждения Карно о коэффициенте полезного действия тепловых машин с законом сохранения энергии. Вслед за этим идет разработка математической теории электричества, магнетизма и упругих явлений на основе выработанных к этому времени новых принципов.

В конце 50-х годов начинается грандиозная и, пожалуй, единственная в своем роде практическая деятельность Томсона, поначалу вызванная потребностями кабельной телеграфии. Именно, в 1858 г. из Англии в Америку был проложен первый кабель, который, однако, вскоре отказался служить – в результате, как установил Томсон, применения слишком сильных токов – и только с третьей попытки, в 1866 г., удалось, наконец, установить надежную связь. Эти годы охватывают один из наиболее памятных периодов в истории техники, и Томсон по сути дела был здесь ведущей фигурой: с помощью надежных созданных им приборов все трудности в конце концов были преодолены. В качестве побочного результата этой деятельности Томсону удалось рекордным образом усовершенствовать почти все навигационные инструменты. Без его компенсированного компаса, его лота и т.п. сейчас невозможно представить себе рационально организованное судоходство.

Успехи эти принесли Томсону большое состояние и ни с чем не сравнимую известность. Он стал центром общественно-репрезентативных связей, напоминая этим Гельмгольца (равно как и тем дополнительным обстоятельствам, что вторым браком он был женат на очень находчивой и честолюбивой женщине). В том, насколько глубоко такие вещи вторгались в жизнь Томсона, я имел возможность лично убедиться во время одного визита к нему в 1899 г. Томсон со свойственной ему любезностью и с живейшим интересом к делу показывал мне свою лабораторию. Но вот появилась хозяйка дома, и начиная с этого момента в большом и лишенном какой-либо интимности обществе любые попытки личного общения полностью отрезались условными светскими формами.

Несмотря на чудовищную перегрузку светскими обязанностями, Томсон продолжал непрерывно работать – даже во время кратких прогулок на яхте, которые он совершал для отдыха. Он неустанно пытался дать механическое объяснение любым процессам – это было его идеалом и целью вплоть до конца жизненного пути. В этом отношении весьма интересны его "Балтиморские лекции", прочитанные в 1884 г. (опубликованы в 1904 г.), где он на самый различный манер с помощью механических моделей пытается дать истолкование противоречивым свойствам светового эфира. Электромагнитную теорию света Томсон отвергал в течение всей своей жизни.

Англия оказала Томсону самую большую почесть, какая только может выпасть на долю ее великих людей: в 1907 г. он был похоронен в Вестминстерском аббатстве. Но, пожалуй, еще более эффектным было чествование, которое в 1896 г. было устроено в связи с пятидесятилетним юбилеем его профессорской деятельности. Кульминацией этого торжества, в котором участвовали представители со всех концов земли, была поздравительная телеграмма юбиляру, отправления из его собственного кабинета вокруг земного шара. На прохождение телеграммы потребовалось тринадцать с половиной минут; ответ Томсона попал в его руки уже через восемь с половиной минут.

Работы лорда Кельвина опубликованы в следующих изданиях: один том "Reprint of papers on electronics and magnetism" ("Переиздание работ по электростатике и магнетизму", Лондон, 1884); шесть томов "Mathematical and physical papers" ("Работы по математике и физике", Кембридж, 1882); три тома "Popular lectures and addresses" (Популярные лекции и речи", Лондон, 1891). Большая биография, написанная Сильванусом Томсоном (1910 г.), заканчивается в высшей степени характерным перечнем наград, публикаций и патентов лорда Кельвина. Более короткая, но и более научная биография – написанная все-таки с чисто английских позиций – принадлежит перу Эндрю Грея (Лондон, 1908 г.).

Я могу лишь вкратце дать довольно случайную подборку отдельных результатов из работ Томсона по математике.

Известны его юношеские работы по *теории потенциала*, выполненные в 1843–1844 гг. в связи с работами Лиувилля. Томсон устанавливает в них инвариантность уравнения $\Delta v = 0$ относительно инверсии, приходит отсюда к методу так называемых "электрических изображений" и этим способом дает простые и наглядные решения электростатических задач, относящихся к шарам и к шаровым сегментам. Вслед за этим в 1847 г. в 12-м томе Журнала Лиувилля (см. "Reprint", стр. 142 и след.) публикуется работа, в которой содержится в точности то, что мы называем сейчас "*принципом Дирихле*".

Из работ термодинамического периода я хотел бы выделить относящееся примерно к 1852 г. определение абсолютной температуры, исходящее из второго начала термодинамики $dQ = \theta \cdot dS$, и измерение ее с помощью все более совершенствуемых газовых термометров. Специально следует также отметить прекрасный *обзор по термодинамике* в Британской энциклопедии.

Работы Томсона по *геофизике* и *навигации* привели его к конфликту с геологами. Исходя из основных законов теплопроводности он определил возраст Земли, резко разойдясь в этом с представителями геологии. Упругая деформация земного шара, а также явления приливов и отливов привели его затем к пожалуй общепринятой ныне точке зрения, что Земля представляет собой сплошное твердое застывшее тело, а вовсе не является тонкой оболочкой – корой – с заполняющим ее жидким ядром. Особо выдающийся вклад Томсон внес в теорию приливов и отливов, проведя великолепный гармонический анализ этого движения, возникающего в результате наложения ряда колебаний. Приливно-отливные явления, как известно, в первую очередь обусловливаются изменением положений Солнца и Луны относительно Земли, но кроме того, они в значительной мере зависят и от условий местности, т.е. от того, как океан ограничен массивами суши. Томсон исходит из встречающегося уже у Лапласа принципа, согласно которому, если ряд вида

$$\Sigma a_k \sin \lambda_k (t - t_k)$$

описывает небесные явления, обусловливающие приливы, то сами эти приливы и отливы в отдельных точках описываются рядами

$$\Sigma A_k \sin \lambda_k (t - T_k),$$

где величины A_k и T_k должны быть взяты из наблюдений, а λ_k имеют те же самые значения, что и у первого ряда. Для того, чтобы находить A_k и T_k (поскольку они вообще входят в рассмотрение), естественно, необходимы хорошо разработанные способы наблюдений и вычислительные методы. Томсон изобрел остроумные приборы для отыскания этих "гармонических компонент", а также для механического вычисления суммы конечного числа членов $A_k \sin \lambda_k (t - T_k)$. Приборы эти дают возможность удовлетворительным образом произвести в заданной точке предварительное вычисление ожидаемых явлений. Подробное изложение результатов Томсона в этой полуэмпирической теории, а также дальнейшее ее развитие можно найти в книге Джорджа Дарвина "Приливы и отливы"[1]). К сожалению, я не смогу здесь подробно рассказать о томсоновской трактовке проблемы волн на водной поверхности, и, в частности, движения жидкости, вызываемого разрезающим ее телом (кораблем). См. "Popular Lectures" Томсона, т. 3, стр. 450.

Работы эти уже граничат с точной механикой, которая тоже многим обязана Томсону как со стороны теории, так и в плане конструкций. Я уже упоминал о произведенном им упрощении и дальнейшем развитии созданной Гельмгольцем теории вихрей (Edinburgh Transactions, 1868; стр. 69). Особая радость, которую Томсону доставляло конструирование, вела его к созданию все новых и новых аппаратов для демонстрации движения волчка и связанных с ним эффектов. Модели гёттингенской коллекции: гиростат, жидкий волчок и т.д. – все основываются на его идеях.

Наряду с чистой радостью, которую Томсон испытывал от экспериментирования, в этих работах им руководил также некий интерес умозрительного характера. В глубине души он стремился к созданию вихревой теории

[1]) Перевод с 3-го английского издания выпущен издательством Тойбнер в серии "Wissenschaft und Hypothese", т. 5, 1911 (2-е изд.). (Имеется русский перевод: Дарвин Дж. Приливы и отливы. – М.; Пг., 1919. – *Примеч. пер.*)

материи. По Томсону, вселенная должна была рассматриваться как жидкость, заполненная изолированными или неразрывно сцепленными друг с другом гельмгольцевыми вихрями — атомами, связанными в молекулы. В рамках такого представления гравитация — в духе Лесажа [1]) — должна была объясняться толчками, которые гравитирующие массы испытывают со стороны огромного множества маленьких одиночных вихрей, обладающих большой скоростью. Томсон придумал для этих вихрей красивое имя "ихтиоидов". Конечно, теория эта не вышла за рамки остроумных набросков, из которых не получилось ничего реально ощутимого; но для восприимчивой фантазии она все же исполнена известного очарования.

Во всех этих, порой даже фантастических проявлениях томсоновского ума в качестве основы неизменно проглядывает рациональная механика. Как мы уже упоминали, Томсон упорно игнорировал представления электромагнитной теории света, сохраняя в этом вопросе полную последовательность; в его механической картине мира для них не находилось ни малейшего места. Опыты Герца, относящиеся к 1888 г., уже слишком опоздали, чтобы оказать на Томсона серьезное влияние.

В заключение я хотел бы еще напомнить о широко распространенном в Англии учебнике "Treatise on natural philosophy" ("Трактат по натуральной философии"), который Томсон написал вместе с шотландцем Тэтом (1831–1901), учеником Гамильтона, впоследствии профессором в Эдинбурге. Книга эта впервые вышла в 1867 г. в Оксфорде и по инициативе Гельмгольца была в 1871 г. переведена на немецкий язык Вертгеймом. Второе, значительно расширенное издание, состоящее из двух частей, вышло в 1878 – 1883 гг. в Кембридже. К сожалению, на немецкий язык оно переведено не было.

Этот знаменитый труд Томсона и Тэта — у английских студентов он кратко называется $T + T'$ — вследствие совершенного различия в свойствах и склонностях его авторов, которые даже в совместной работе впали в величайший антагонизм, представляет собой в нашей литературе чрезвычайно своеобразное явление.

Тэт был натурой доктринерской, отличался чрезвычайным национализмом и не был свободен от педантизма. Он был крайне тщателен и последователен в осуществлении своих планов. В эту картину вполне вписывается и то, что он был убежденным кватернионистом. Томсон же, хотя вообще говоря он был склонен к уступчивости, раз и навсегда отказался что-либо знать о кватернионах, и не давал им в свою книгу никакого доступа, даже в смягченной форме векторного исчисления.

Остов книги, ее построение и членение принадлежат Тэту. Но внутри отдельных ячеек этой сети, излагая все новые и новые мысли, Томсон дает полную свободу своей фантазии. И хотя эти вставки очень богаты стимулирующим содержанием, они все же представлены в отрывочном, едва понят-

---

[1]) Loi qui comprend toutes les attractions et répulsions (Journal des savants, 1764).

ном виде. Фактически они читаются как беглые выдержки из записной книжки и своей отрывочностью дают отчетливое представление о томсоновской лекционной манере. Томсон даже перед аудиторией был не в состоянии последовательно развивать заранее намеченный ход мыслей и непрестанно прерывал себя возникавшими у него в данный момент идеями.

Рассматриваемая как целое, книга Томсона – Тэта представляет собой весьма богатый мыслями труд, неизменно нацеленный на конкретное постижение реальных механических процессов и по типу совершенно противоположный механике Кирхгофа. Поэтому на самостоятельного, зрелого читателя, руководимого собственным творческим интересом, книга эта может оказать огромное стимулирующее воздействие. Я сам с большим удовольствием, хотя и с немалым трудом, в свое время проработал отдельные главы этого сочинения. Но огромная популярность и широкая распространенность этой книги среди английского студенчества едва ли соответствуют фактическому ее использованию, так как для среднего студента она слишком трудна. Я замечал, что T + T′ покупают и ставят на книжную полку, но когда хотят чему-нибудь научиться, то берут более простые и короткие руководства.

В заключение я хотел бы привести один случай, характерный для Томсона-педагога. Однажды, войдя в аудиторию, он внезапно обратился к студентам с вопросом: что такое $\dfrac{dx}{dt}$? В ответ он получил все, какие только можно было придумать, строгие логические определения. Все они были отклонены: "Вовсе нет. Оставьте вы этого Тодхантера (представитель чистой математики в Кембридже); $\dfrac{dx}{dt}$ – это скорость!" –

Читатель сам заметит, что имеется много точек сходства между Вильямом Томсоном и нашим Гельмгольцем, тем более что оба не раз встречались друг с другом и входили в соприкосновение в совместных научных действиях – например, на парижском конгрессе 1881 г. Сопоставление двух этих ученых на самом деле представляло бы собой весьма заманчивую и благодарную для историка математики задачу. –

Конец этой главы мы посвятим Клерку Максвеллу – английскому физику, оказавшему наиболее длительное воздействие на всю математическую физику вплоть до наших дней. Как и его великий коллега Томсон, Максвелл тоже был шотландцем. Но в то время как главной характерной чертой личности Томсона была неустанная активность, опиравшаяся на исключительную легкость, с которой шло все его творчество, в случае Максвелла мы имеем дело с более раздумчивой, спокойной натурой, дающей своим глубоким, вновь возникающим идеям созревать в медленном развитии.

Клерк Максвелл родился в 1831 г. в Эдинбурге, но бóльшую часть своей жизни, даже в зрелые годы, он проводил в деревне, где его семья владела имением. По тому, как внешне протекала его жизнь, как и по всей своей сущности, Максвелл представлял собой столь часто встречающийся в Англии тип ученого-аристократа, ведущего частную жизнь и лишь от случая к случаю берущего на себя исполнение каких-либо служебных функций. В 1850 – 1856 гг, он учился в Кембридже, до 1860 г. был профессором в Абердине, затем до 1865 г. – в Королевском колледже в Лондоне, после чего возвратился к частной жизни. Лишь в 1871 г. Максвелл принял руководство *Кавендишской лабораторией* – первым самостоятельным английским исследовательским и учебным физическим институтом, с которым неразрывно связано все колоссальное развитие этой науки в наши дни (кроме нее в Кембридже тогда существовали – и так это продолжается и до сих пор – лишь небольшие физические лаборатории в отдельных "колледжах"). К сожалению, уже в 1879 г., т.е. в возрасте всего лишь 48 лет, он умер от болезни внутренних органов.

Я хотел бы уже сейчас сообщить кое-какие подробности относительно Кавендишской лаборатории, сыгравшей впоследствии такую важную роль. Кавендиш (родился в 1731 г. в Ницце, скончался в 1810 г. в Лондоне), по имени которого названа эта лаборатория, был богатым частным лицом, родственником герцогов Девонширских, посвятившим себя серьезным исследованиям в области физики и химии; в постановке и трактовке проблем он часто опережал свое время. Его научные работы в части, касающейся вопросов, связанных с электричеством, были в 1879 г. изданы Максвеллом, по инициативе которого уже к тому времени на богатые частные пожертвования была создана Кавендишская лаборатория и связанная с ней кафедра. После смерти Максвелла его место занял лорд Рэлей (1879 – 1884); как и его предшественник, он в этой должности тоже стал вождем всей математической физики в Англии. Я напомню лишь о двухтомной монографии Рэлея "Theory of sound" ("Теория звука"), впервые вышедшей в 1877/78 г., и об открытии им в 1894 г. аргона. После лорда Рэлея руководство этим знаменитым институтом взял на себя Дж.Дж. Томсон, который заведует им и до сих пор[1]). Он тоже занимает одно из центральных мест в нашей науке.

Подробная биография Максвелла составлена Кемпбеллом и Гарнеттом (Лондон, 1882 г.). Однако она больше касается личной стороны его жизни. В 1890 г. в двух томах in quarto были изданы "Scientific Papers" ("Научные труды") Максвелла с чрезвычайно ценным в научном отношении введением. К этому его научному наследству следует добавить вышедший в 1873 г. в двух томах основополагающий "Treatise on Electricity and Magnetism" ("Трактат об электричестве и магнетизме")[2]).

---

[1]) Дж.Дж. Томсон заведовал Кавендишской лабораторией до 1919 г. – *Примеч. пер.*

[2]) Второе издание этого трактата было переведено. Б. Вайнштейном на немецкий язык (Берлин, 1882).

Переходя теперь к рассмотрению научных достижений Максвелла, мы не можем не поставить на первое место его знаменитое творение – электромагнитную теорию света, тем более что в отдельных деталях дело здесь зачастую принимает оборот, интересный и в математическом отношении. К сожалению, однако, мы не сможем даже бегло рассмотреть многие другие работы Максвелла, замечательные в математическом отношении; в их числе, например, имеются работы по *основам графической статики*, работы о строении, устойчивости и движении *кольца Сатурна*, а также хорошо известные в физических кругах работы по *кинетической теории газов*, которые вполне могли бы представить живейший интерес и с точки зрения, которая нас в данный момент занимает.

Максвелловская электромагнитная теория света – или, лучше сказать, его новое учение, рассматривающее свет и электричество как проявления одной и той же движущей силы, – возникла из его стремления выразить математическим языком идеи Фарадея относительно эфира как простейшего тела, заполняющего пространство, – идеи, которые сам Фарадей развивал лишь в весьма неопределенной форме. В цепи фактов и умозаключений, связывающих новую теорию с действительностью, решающим звеном оказалось установленное в 1855 г. В.Вебером и Р.Кольраушем (старшим) соотношение между электростатической и электромагнитной единицами (окончательно опубликованное в 1857 г.), которое, как мы уже не раз говорили об этом, заключается в том, что константа c в законе Вебера, имеющая размерность скорости, будучи разделена на $\sqrt{2}$, совпадает со скоростью света.

Имеются два фундаментальных пункта, в которых фарадеевский способ рассуждения отличается от веберовского:

1. Следуя повсеместно господствовавшей в то время натурфилософии ньютоновской школы, Вебер в чистом виде принимал дальнодействие электрических сил. Фарадей же, напротив, основывался на представлении о том, что силы эти распространяют свое действие через некую среду, заполняющую пространство.

2. В соответствии с этим, действие силы по Веберу происходит мгновенно, в то время как у Фарадея передача силы от точки ее приложения до точки действия требует известного времени.

Уже в 1846 г. – как показывает одно примечательное письмо к Филлипсу (Phil. Mag., I, т. 28, стр. 345) – Максвелл высказывает (правда, в абсолютно неопределенной форме, так как измерение Вебера – Кольрауша тогда еще не было выполнено) фантастическое предположение, что между электрическими и оптическими явлениями может существовать некая связь. Я еще раз с большой охотой хочу подчеркнуть уже упоминавшийся в первой главе факт, что в одном письме к Веберу, написанном в 1845 г., Гаусс высказывает идеи, целиком укладывающиеся в направление, по которому шел Фарадей [1]).

[1]) Г а у с с. "Werke", т. 5, стр. 629.

Представляет особый интерес наблюдать, как Максвелл в трех неторопливо идущих друг за другом работах пробивается к вершинам последовательной теории. Обзор развития этих событий, который мне хочется здесь дать, будет, как и все предыдущее, чрезвычайно субъективным, так как выявлению решающих, поворотных пунктов в развитии идей я буду придавать значение, большее, чем отдельным вопросам исторического характера.

1. Работа "On Faraday's lines of force". "О фарадеевых силовых линиях") 1855-го года (Cambridge Philosophical Transactions, т. 10 = Scientific Papers, т. I, стр. 155 и далее) представляет собой разъяснение того, что основанные на дальнодействии и близкодействии электро- и магнитостатические теории суть различные математические описания одних и тех же вещей. Там, где теория дальнодействия констатировала наличие силы $\frac{1}{r^2}$, Фарадей усматривал выходящие из начала координат и пронизывающие все пространство силовые линии; имея в виду сформулировать эту общую идею в абстрактном виде, мы должны сказать, что имеющая здесь место ситуация одинаково хорошо описывается как выполняющимся во всем пространстве дифференциальным уравнением в частных производных для потенциала V, в которое явно не входит распределение масс, обусловливающих этот потенциал, так и явной формулой, представляющей V в виде суммы главных решений этого уравнения, – например, в виде интеграла от потенциалов отдельных элементарных масс, распределенных на некоторой поверхности. Первая точка зрения находит наглядный эквивалент в представлении о силовых линиях, которые, повинуясь во всех точках пространства дифференциальному уравнению, задают действующую в этих точках силу, а значит, и общее поведение потенциала; вторая заставляет удовлетвориться чисто формальным выводом силы из формулы, задающей в рассматриваемой точке потенциал.

С математической и с чисто логической точки зрения оба эти представления (которые в пустом, ничем не заполненном пространстве непосредственно вытекают друг из друга) и опирающиеся на них воззрения совершенно равноправны. Но в психологическом отношении точка зрения Фарадея обладает большим преимуществом, так как она дает нам пластические образы того, что имеет место в действительности. Для каждого, кому самому приходилось сталкиваться с такого рода вещами, она совершенно незаменима. Вряд ли, например, кто-нибудь сможет живо представить себе действие динамомашины – не говоря уж о том, чтобы разумно ее сконструировать, – наглядно не вообразив себе, как располагаются магнитные силовые линии и магнитное поле, в котором движутся индукционные катушки. Однако о вытекающих отсюда физических постановках я не хочу здесь говорить ничего.

2. В 1861 – 1862 гг. в работах "On physical lines of force" ("О физических силовых линиях"; Philosophical Magazine, т. 21 = Scientific Papers, т. I, стр. 451 и далее) мы видим Максвелла занимающимся обдумыванием

механизма, соответствующего магнитостатическому дальнодействию и возникновению индукционных токов при изменении магнитного поля. Он приходит к следующей картине: имеется быть может большое, но во всяком случае конечное число силовых линий; вокруг каждой отдельной линии среда находится в состоянии вращения, в то время как сама линия остается покоящейся. Во избежание недоразумений нужно сказать, что речь здесь идет не о таких вращениях, которые до сих пор встречались нам в механике, в том числе и в случае гельмгольцевых вихрей. Там движение точки полностью описывалось тем, что вместо ее первоначальных координат x, y, z задавались заступившие их место координаты x', y', z' нового положения, а вращательный характер движения обнаруживался лишь косвенно, поскольку точки, близкие к x, y, z, двигались несколько иначе, чем сама эта точка. У молекулярных же вихрей, с которыми мы встречаемся у Максвелла, каждая точка – каждая молекула – сама является носителем системы осей, относительно которых она может поворачиваться на углы λ, μ, ν.

Максвелл представляет себе этот процесс со столь тяжеловесной реалистичностью, что сегодня она нас поражает. Он считает, что между вращающимися частями среды для того, чтобы устранить или уменьшить трение, заделаны маленькие антифрикционные катки. Эти тельца, ведущие себя как шарики в шарикоподшипнике, он и рассматривает как истинное местопребывание электричества.

Несмотря на большие приложенные усилия, Максвелл с этими конкретными представлениями далеко не продвинулся. Поэтому в дальнейшем он оставил их и перешел на чисто феноменологическую манеру изложения, в которой воспитывается сейчас каждый молодой студент. В соответствии с этой точкой зрения среда, заполняющая пространство, в каждой своей точке является носителем, с одной стороны, электрического, а с другой – магнитного вектора; их действие друг на друга и формальная их взаимосвязь известны, а о более глубоком их смысле задумываться не следует.

Большое значение Максвелл всегда придавал лишь тому, чтобы законы электромагнитного поля не исключали в о з м о ж н о с т и объяснить их механически; более того, ему хотелось, чтобы о живой силе и о потенциальной энергии этого поля можно было делать такие формальные предположения, которые по общим законам механики приводили бы к известным электромагнитным эффектам. Фактически он твердо стоял на столь охотно отвергаемой сегодня точке зрения, что механика является основной физической дисциплиной! В своей математической основе это представляет собой не что иное, как дальнейшее развитие созданного еще Лагранжем формализма, но, конечно, в этот формализм вносится понятийное содержание, которое Лагранж никогда не имел в виду. Это один из самых удивительных феноменов в развитии нашей науки, что все новые и все более далекие области физики постепенно охватываются этим формализмом, достигая вполне удовлетворительного освоения разнообразнейших наблюдаемых явлений без малейшего проникновения в их истинную суть. Последний и огромный триумф был достигнут этой методикой в физической химии американца Гиббса (см. его знаменитую серию статей 1876 – 1879 гг. "On the Equilibrium of heterogeneous substances" ("О равновесии гетерогенных систем") в "Transactions of Connecticut Academy of Arts and Sciences". Что сказал бы Лагранж, увидев своими глазами, как его параметру q придают смысл процентного содержания иода в некотором химическом соединении!

3. На этой абстрактной, чисто феноменологической основе Максвелл в 1864 г. в большой работе под названием "A dynamical theory of the electromagnetic field" ("Динамическая теория электромагнитного поля"), напечатанной в 155-м томе "Royal Soc. Trans." (опубликована в 1865 г. = Scientific Papers, т. I, стр. 526 и далее) и развил свое окончательное учение, увенчавшееся установлением электромагнитной теории света и предсказанием существования разнообразнейших новых взаимосвязей. Подробно идеи эти развиты в его большом труде "A Treatise on electricity and magnetism" ("Трактат об электричестве и магнетизме"[1])), вышедшем в свет в 1873 г. Книга эта содержит отдельные весьма содержательные главы, но в целом она читается с трудом, ибо добросовестно ведет читателя через теории всех встречающихся в ней областей и ни разу не дает систематического изложения итоговой концепции.

И чтобы хоть слегка коснуться существа рассматриваемого вопроса, я сейчас хочу показать, следуя ирландскому физику Фитцджеральду (London Phil. Transactions, 1880, т. 171), как электродинамические уравнения Максвелла для чистого эфира связаны с уравнениями, которые были в 1839 г. выведены Маккаллохом из квазимеханических представлений.

Я буду основываться на "принципе Гамильтона"

$$\delta \int (T - U)\,dt = 0$$

с постоянными пределами. Если, как это делалось выше (см. стр. 257 и след.), смещения маккаллоховского континуума обозначить через u, v и w, а компоненты вихря (ротора) через

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

то в маккаллоховском подходе (в предположении, что мы имеем дело с изотропной средой) потенциальная энергия на единицу объема будет иметь вид

$$U = \frac{a^2}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

---

[1]) См. стр. 265.

а живая сила на единицу объема – вид

$$T = \frac{\rho}{2}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2),$$

где под ρ понимается плотность. Если мы положим $\frac{a^2}{2} = c^2$, где c в дальнейшем должно будет оказаться скоростью света, и введем в рассмотрение значения величин U и T для всей среды, то для движения среды (если простоты ради положить $\frac{\rho}{2} = 1$) получится вариационное соотношение

$$\delta \int\int\int\int dxdydzdt\{(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) - c^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\} = 0$$

(при постоянных пределах). Отсюда вытекают следующие уравнения движения:

$$\frac{1}{c^2}\cdot\ddot{u} = \frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z},$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\ddot{v} = \frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x},$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\ddot{w} = \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}$$

или в развернутом виде

$$\frac{1}{c^2}\cdot\ddot{u} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\ddot{v} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\ddot{w} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

При выборе для движения подходящих начальных условий эти уравнения немедленно приводят к тождеству

$$\operatorname{div}(u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

и, значит, сводятся к следующим простым дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\ddot{u}}{c^2} = \Delta u, \qquad \frac{\ddot{v}}{c^2} = \Delta v, \qquad \frac{\ddot{w}}{c^2} = \Delta w.$$

Вывод этот принимает особенно элегантный, симметричный вид, если ввести вспомогательные величины, подобные тем, которые использовал Маккаллох (см. стр. 188 "Приложений" к его Собранию сочинений). Именно, если положить

$$u_1 = c\int \xi\, dt, \quad v_1 = c\int \eta\, dt, \quad w_1 = c\int \zeta\, dt,$$

то получится указанное выше вариационное соотношение

$$\delta \int\int\int\int dx\,dy\,dz\,dt\,\{(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) - (\dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2 + \dot{w}_1^2)\} = 0,$$

из которого вытекает две тройки уравнений

$$\frac{1}{c}(\dot{u}_1, \dot{v}_1, \dot{w}_1) = -\operatorname{curl}(u, v, w),$$

$$\frac{1}{c}(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}) = \operatorname{curl}(u_1, v_1, w_1).$$

Если одну из этих троек присоединить к указанному вариационному принципу, то можно будет вывести другую. К этим уравнениям присоединяются еще два уравнения

$$\operatorname{div}(u, v, w) = 0, \qquad \operatorname{div}(u_1, v_1, w_1) = 0.$$

Тем самым мы получаем в точности ту самую систему формул, которая ныне называется уравнениями Максвелла для свободного эфира. Я, впрочем, тут же хотел бы отметить, что у самого Максвелла они в столь явном виде не встречаются; они были выведены только Хевисайдом и Герцем [1]). Величины u, v, w и u_1, v_1, w_1 называются компонентами электрического и соответственно магнитного вектора. При этом выбор того, какие величины относятся к какому из этих явлений, находится пока в наших руках. Как только этот выбор будет сделан, одновременно – через знак, с которым в уравнения входит вихрь, – будет зафиксировано и то, какой системой координат – правой или левой – мы пользуемся.

О полной симметрии всей ситуации говорит и вид подынтегрального выражения, фигурирующего в вариационной задаче. Все это дает определенное оправдание идее, что потенциальная и кинетическая энергия на самом деле

---

[1]) Ссылки на литературу см. в статье Г.А. Лоренца в Enzykl., V 13, стр. 68, примечания 3 и 4.

не представляют собой чего-то существенно различного и что отличие их друг от друга носит условный характер.

После этого не слишком пространного рассказа я, к сожалению, вынужден расстаться с этим вопросом, чтобы оставить место для нескольких слов – которые, впрочем, я не буду подробно аргументировать – об особом характере Максвелла как математика.

Максвелл не был мастером логически безупречного, отделанного изложения; его умозаключениям часто недоставало безусловной убедительности. Высоко развитое индуктивное мышление, так сказать, оттесняло у него на задний план дедуктивное. Так, например, установив в теории сферических функций теорему о том, что всякое выражение вида

$$r^{2n+1} \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial h_1 \ldots \partial h_n}$$

определяет сферическую функцию, он затем без всяких оговорок, не говоря уж о доказательстве, пользуется обратным утверждением! Теорема о том, что для любой наперед заданной сферической функции можно одним и только одним способом указать n вещественных направлений $h_1, \ldots, h_n$, дифференцирование по которым позволяет получить из $\frac{1}{r}$ эту функцию, лишь впоследствии была доказана Сильвестром [1].

Зато Максвелла четко выделяет его мощная интуиция, поднимающаяся до высот прорицания и рука об руку идущая с сильным, исполненным фантазии наглядным представлением. В подтверждение можно привести многие примеры: его любовь к диаграммам, использование циклоидальных кривых, стереоскопических рисунков, обратных силовых планов и т.д. и т.п. И в физике Максвелл тоже является гением, творящим из непосредственной интуиции. В этом отношении он был еще сильнее В. Томсона и оказывал более долгое, чем он, влияние, превосходя его силой непостижимого прозрения.

Подводя итоги главы о механике и математической физике, следует еще раз подчеркнуть, что в ней на многочисленных и ярких примерах продемонстрировано, как математика сопровождает физическое мышление, от которого она, в свою очередь, получает сильнейшие импульсы через посредство выдвигаемых им проблем. Мы проследили этот вопрос вплоть до начала современной эпохи. В следующей главе мы вновь вернемся к чистой математике, начав с несколько перешагнувших 1850-й год исследований, рассмотренных нами в четвертой главе.

---

[1]) См., например, Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, т. 1, стр. 423 и далее. [Русский перевод: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1. – М.: Гостехиздат, 1951, стр. 436 и далее. – *Примеч. пер.*]

Глава шестая

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ У РИМАНА И ВЕЙЕРШТРАССА

Возвращаясь теперь к чистой математике, мы обратимся к общей теории функций комплексной переменной. Своим дальнейшим развитием и продвижением это ядро нашей современной чистой математики в первую очередь обязано двум немецким ученым – Риману и Вейерштрассу, основная деятельность которых пришлась на период, охватывающий примерно с 1850 по 1880 г.

Поставив в их творчестве на первое место теорию функций комплексной переменной, мы и самым отдаленным образом не исчерпаем всего, что было сделано за их жизнь этими двумя математиками. В дальнейших главах мы тоже будем неоднократно возвращаться к ним, имевшим основополагающие работы в самых разнообразных областях нашей науки. Однако будет правильно, если мы уже здесь в общих чертах обрисуем их чрезвычайно несхожие друг с другом индивидуальности и дадим общую характеристику их деятельности.

Риман был человеком блистательной интуиции. Своей всеобъемлющей гениальностью он превосходил всех своих современников. Там, где пробуждался его интерес, он начинал все заново, не давая сбить себя с толку традициям и не признавая непреложности существующих систем.

Вейерштрасс прежде всего был логиком; он действовал медленно, систематически, шаг за шагом. Всюду, где он трудился, он добивался окончательного совершенства формы.

Что касается влияния, которое они оказывали на математику своего времени, то следует отметить, что Риман – после незаметной подготовки – появился подобно яркому метеору, чтобы вскоре быстро погаснуть; его деятельность охватывала период лишь в пятнадцать лет: в 1851 г. он защитил диссертацию, в 1862 г. заболел и в 1866 г. умер.

Вейерштрасс же мог оказывать свое воздействие на торопясь. Еще в 1843 г. он начал несколькими замечаниями по поводу аналитических факториалов (гимназический сборник; Дойч-Кроне); скончался он в 1897 г. в преклонном возрасте после долгой, плодотворно прожитой жизни.

Мы начнем, хотя он и моложе, с Римана; во-первых, потому, что основная его деятельность относится к периоду, более раннему, чем деятельность Вейерштрасса, а во-вторых, потому, что здесь, в Гёттингене, он нам гораздо ближе, ибо вся его жизнь и творчество неразрывно связаны с нашим городом. Здесь начал он свою учебу, здесь получил докторскую степень и право преподавания, здесь до самой болезни был доцентом университета. Риман знаменует собой кульминационный пункт старой гёттингенской школы, остающейся основой для всех нас.

Бернгард Риман

Сначала о "Трудах" Римана. Они были посмертно изданы Г. Вебером; первое издание вышло в 1876 г., второе – в 1892 г. В качестве послесловия "Труды" содержат биографию Римана, написанную его вернейшим другом Дедекиндом[1]).

Важным добавлением к "Трудам" являются "Дополнения", изданные в 1902 г. Нётером и Виртингером. Они возникли из записей лекций, читанных Риманом; в них перед нами открывается возможность увидеть, как глубоко понимал он вещи, относительно которых считалось, что они были открыты лишь недавно, годы спустя после его смерти, но которые, как выясняется, содержались уже в его лекциях. Здесь мы еще раз видим, насколько развитие науки зависит от случайностей. Насколько быстрее двинулась бы вперед математика, пойми слушатели Римана ход его мыслей более глубоко, или же если бы записи его лекций оказались доступны нам раньше! А сколько драгоценного материала могло исчезнуть непонятым и незамеченным![2])

К этому следует добавить три тома лекционных курсов Римана, опубликованных, к сожалению, в чужой обработке:

а) "Partielle Differenzialgleichungen der Physik" ("Дифференциальные уравнения физики в частных производных", Хаттендорф, 1869),

б) "Schwere, Elektrizität, Magnetismus" ("Тяготение, электричество, магнетизм", Хаттендорф, 1875),

в) "Elliptische Funktionen" ("Эллиптические функции", Шталь, 1899).

---

[1]) См. также некролог Шеринга в "Göttinger Nachrichten" (1867 г.), перепечатанный во втором томе "Трудов" Шеринга, где можно найти и другие заметки, касающиеся жизненного пути Римана.

[2]) См. также отчет Нётера о вновь найденных материалах (Göttinger Nachrichten, 1909). [На русском языке имеется книга: Риман Б. Сочинения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948, составленная на основе "Трудов" Римана и "Дополнений" к ним. – *Примеч. пер.*]

"Дифференциальные уравнения" были впоследствии обработаны Г. Вебером; однако этот широко известный "Риман–Вебер" мало похож на настоящего Римана и, собственно, никак не отражает римановой точки зрения.

Бернгард Риман родился 17 сентября 1826 г. в Брезеленце в Ганноверском королевстве. Подобно Абелю, он был сыном сельского священника. Его судьба во многих отношениях походит на судьбу Абеля, хотя развитие его шло гораздо медленнее. Риман был слаб здоровьем, под конец жизни заболел чахоткой и стал ее преждевременной жертвой. Робкий в поведении, можно сказать – неумелый, юный доцент, на которого мы, младшие, с восхищением взираем теперь как на святого, вынужден был терпеть всяческие насмешки со стороны своих коллег. У него часто бывали мрачные настроения, доходившие до приступов меланхолии. И все-таки у Римана мы не найдем и следа настоящей психической ненормальности, как, например, у Эйзенштейна, с которым он встречался в годы учебы в Берлине и который под конец страдал маниями преследования и величия. Отгородившись от окружающего мира, Риман тихо жил своей необычайно богатой внутренней жизнью. У него видны типичные задатки гения: внешне он тих и чудаковат, внутренне – полон сил и размаха.

Интересы Римана были гораздо более обширными, чем интересы Абеля, которого вдохновляла лишь чистая математика как таковая. В круг интересов Римана входила математическая физика и даже вся философия естествознания с психологическим уклоном. Стоит только вспомнить его собственные слова, связанные по этому поводу ("Труды", стр. 507 и след.[1]):

"Сейчас меня занимает в основном следующее:

1. Способом, сходным с тем, при помощи которого мнимое уже с таким громадным успехом было введено в теорию алгебраических, показательных или круговых, эллиптических и абелевых функций, ввести его и в теорию других трансцендентных функций; самую необходимую в этой связи общую подготовительную работу я проделал в моей докторской диссертации (см. п. 20 диссертации).

2) В определенной связи с этим должны находиться новые методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных, методы, которые я уже с успехом применял к многим физическим задачам.

3. Главная моя работа касается новой трактовки известных законов природы – выражения этих законов с помощью других основных понятий, – благодаря чему экспериментальные данные о взаимодействии между теплотой, светом, магнетизмом и электричеством можно будет использовать для исследования взаимосвязи между этими явлениями. Я пришел к этому, главным образом, в результате изучения работ Ньютона и Эйлера, а с другой стороны – Гербарта. Что касается последнего, то я почти полностью мог бы присоединиться к его ранним исследованиям, результаты которых были изложены в двух его диссертациях на соискание доктор-

---

[1] Все ссылки на номера страниц даются по второму изданию.

ской степени и на получение доцентуры (22-го и 23-го октября 1802 г.). Однако в одном существенном пункте я принужден был отклониться от дальнейшего хода его рассуждений, что и обусловливает мое расхождение как с его натурфилософией, так и с теми положениями психологической науки, которые касаются ее связи с натурфилософией".

Я хотел бы обратить особое внимание на начало третьего пункта. "Главная моя работа ", — говорит здесь Риман. Таким образом, он считал свои натурфилософские рассмотрения более важными, чем его ставшие для нас уже классическими работы по теории комплексных функций $f(x + iy)$.

Внешне в жизни Римана крупных событий не происходило. В 1840—1842 гг. он учился в лицее (гимназии) в Ганновере, в 1842—1846 гг. — в гимназии св. Иоганна (Johanneum) в Люнебурге. Там, т.е. в возрасте четырнадцати с половиной лет, он уже читал математиков-классиков — в частности, Эйлера и Лежандра. На пасху в 1846 г. Риман переехал в Гёттинген и поначалу занимался изучением теологии. Вскоре, однако, он переменил факультет и целиком отдался математике. Много лекций Риман слушал у Штерна, который мне потом однажды сказал: "Риман уже тогда пел, как канарейка"[1]). — Совершенно удивительной и почти загадочной представляется нам близость Римана к научным идеям Гаусса. Риман не мог посещать много лекций семидесятилетнего уже в ту пору Гаусса, который и без того читал мало. Личных отношений с Гауссом юный, робкий студент тоже, конечно, завязать не мог: Гаусс преподавал неохотно, мало интересовался большинством своих слушателей и вообще был неприступен. И несмотря на все это мы должны назвать Римана учеником Гаусса, даже единственным настоящим его учеником, проникшим в его сокровенные идеи, которые мы теперь постепенно узнаем из его наследия: Риман, как и Гаусс, искал связь функций $f(x + iy)$ с конформными отображениями, с одной стороны, и с уравнением $\Delta u = 0$, а также различными смежными областями физики — с другой. В качестве примера внутреннего контакта между Риманом и Гауссом, контакта, который, конечно, не может быть доказан явными ссылками на литературу, можно указать работы Римана, связанные с гипергеометрической функцией, в которых используется множество не опубликованных Гауссом идей.

К концу своего пребывания в Гёттингене Риман занялся геометрией. Как раз тогда, в 1847 г., Листинг опубликовал в "Göttinger Studien" свои "Vorstudien zur Topologie"[2]). В них можно обнаружить подступы к созданию математической дисциплины, которую мы, вместе с Риманом, на-

---

[1]) Разведение канареек было широко распространено в Германии того времени. При этом особое значение придавалось красоте пения этих птиц (в Голландии высоко ценилась форма, а в Англии — цвет канареек). — *Примеч. пер.*

[2]) Русский перевод: Листинг Ф. Предварительные исследования по топологии — М.; Л.: ГТТИ, 1932. — *Примеч. пер.*

зываем Analysis situs[1]) и которой, как это видно из его рукописного наследия, много занимался также и Гаусс. Штерн читал тогда совсем другие вещи, Гаусс читал метод наименьших квадратов, и тем не менее юный Риман весьма интенсивно занялся геометрической проблематикой. Это можно объяснить только тем, что гёттингенская атмосфера была в то время насыщена геометрическими интересами и оказывала на чрезвычайно одаренного и восприимчивого Римана незаметное, но сильное давление. Духовное окружение, в которое попадает человек, гораздо важнее и оказывает на него гораздо большее влияние, чем факты и конкретные знания, которые ему сообщаются!

К пасхе 1847 г. Риман переехал в Берлин, где и оставался в течение двух лет (до 1849 г.). Так он слушал лекции Якоби по механике и получил от него импульс – правда, лишь косвенный – к тому, чтобы от занятий эллиптическими функциями перейти к "абелевым функциям", которые самому Абелю были, кстати сказать, неизвестны. Вопрос об абелевых функциях стал тогда действительно актуальным. В 1846 г. ученик Якоби Розенгайн получил за обращение гиперэллиптических интегралов при $p = 2$ Гран-при Парижской академии; работа эта, правда, была опубликована лишь в 1851 г. (в серии "Savants étrangers"). В 1847 г. в 35-м томе Журнала Крелля по этому же самому вопросу появилась важная работа Гёпеля. В 1849 г. Вейерштрасс в гимназическом сборнике в Браунсберге сообщил о полученном им обращении гиперэллиптического интеграла в общем виде и дал билинейные соотношения для периодов интегралов первого и второго рода. Мы видим, как и в этом вопросе готовилась тогда почва для Римана, как вырастали его интересы, которым через несколько лет суждено было вылиться в блистательнейшую его работу – теорию абелевых функций (1857 г.).

Кроме Якоби Риман слушал также Дирихле. Хотя Якоби и дал Риману материал, явившийся для него главным побудительным толчком, методов Якоби Риман не перенял. Якоби был для него чересчур алгорифмичен. С Дирихле же его, наоборот, связывала сильная внутренняя симпатия, основанная на сходстве их способов мышления. Дирихле любил уяснять себе теорему на наглядном материале. При этом основания предмета он подвергал строгому логическому анализу и, насколько мог, избегал длинных вычислений. Его метода нравилась Риману, он перенял ее и широко пользовался ею в работе. Во время берлинских семестров Риман встречался также с Эйзенштейном (род. в 1823 г.), который только что защитил диссертацию на право преподавания. Риман беседовал с ним и о введении комплексных величин в теорию функций. Но оба они – Эйзенштейн тоже, конечно, был в своем роде большой талант – не понравились друг другу. Эйзенштейн слишком уж был человеком формулы. Отправляясь от вычислений, он всегда находил в них корни своего знания, и потому был не в состоянии постичь общие идеи Римана касательно функций комплекс-

[1]) Анализ положения (*лат.*). – *Примеч. пер.*

ной переменной, идеи, которые Риман, как утверждает Дедекинд, подверг основательной разработке уже осенью 1847 г., т.е. в возрасте двадцати одного года.

На пасху 1849 г., в возрасте двадцати двух с половиной лет, Риман возвратился в Гёттинген, куда в то время был как раз вновь приглашен В. Вебер. В его лице Риман нашел покровителя и отечески заботливого друга. Вебер осознал гениальность Римана и приблизил этого робкого студента к себе. В 1850 г. Риман стал членом только что основанного тогда гёттингенского физико-математического семинара, быстро поднялся в нем до положения одного из руководителей и стал ассистентом Вебера по физическому практикуму. Отчетливо видно, как это сближение с Вебером становилось все более тесным, и притом не только с внешней стороны. Вебер пробудил в Римане интерес к математическому изучению природы, и его способ ставить вопросы оказал на Римана сильное влияние. К сожалению, уже упоминавшиеся выше размышления Римана по поводу натурфилософии дошли до нас только в отрывках (см. "Труды", с. 305 и далее). Но уже и по этим скудным документам можно видеть, с какой огромной духовной самостоятельностью работал молодой Риман; разойдясь в идеях с Вебером, оно построил себе собственный мир.

Риман мыслил себе пространство наполненным непрерывной материей, передающей воздействия гравитации, света и электричества. Он повсюду исходит из представления, что эти процессы распространяются во времени. Одно замечание относительно тех же самых вещей – с настоятельной просьбой держать все это в совершенном секрете – можно найти в частной переписке Гаусса с Вебером. И вот я еще раз спрашиваю: каким образом пришли эти вещи на ум Риману? Это как раз и есть то мистическое влияние общей атмосферы на восприимчивый ум, которое нельзя опровергнуть, но и ясно постичь тоже невозможно. Риман до некоторой степени предвосхитил даже рассуждения Максвелла. Так, например, мы находим у него вариационную задачу маккаллоховской оптики, которую мы обсуждали в предыдущей главе (см. "Труды", стр. 538, формула d). Невероятно, чтобы Риман был знаком с работами Маккаллоха в оригинале.

Действие силы тяжести Риман представлял себе следующим образом: материя, непрерывно заполняющая пространство, с потенциалом скорости V вливается в порождающие тяготение материальные точки и там превращается в "воображаемую массу" ("Geistesmasse") – весьма своеобразная точка зрения.

Из формулы c на стр. 538 его "Трудов" можно усмотреть, что Риман уже тогда пытался связать тяготение со светом. Происхождение этой формулы для меня остается неясным, и я не могу сказать, что́ от нее должно быть оставлено в свете новейших сегодняшних теорий.

И наконец, в конце 1851 г. – когда Риману, следовательно, было уже двадцать пять лет – появляется его диссертация "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Größe" ("Основы общей теории функций комплексной переменной"; "Труды", стр. 3 и далее), к обстоятельному изложению которой мы еще вернемся и которая – как это ни странно – поначалу прошла совершенно незамеченной.

Прошло еще почти три года, прежде чем Риман летом 1854 г. получил право преподавания, выступив с двумя несравненными по яркости работами: с диссертацией "Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe" ("О представимости функций тригонометрическими рядами"; "Труды", стр. 227 и далее) и вступительной лекцией "Über die Hypotesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" ("О гипотезах, лежащих в основании геометрии"; "Труды", стр. 272 и далее). Обе эти работы лишь в 1868 г., после смерти Римана, были опубликованы Дедекиндом в "Abhandlungen der Konigl. Gesellschaft der Wissenschaften" (Гёттинген, т. 13) и впоследствии без изменений перепечатаны в его "Трудах".

Невозможно без волнения читать о том, с какими трудностями должен был бороться молодой доцент и какими крошечными успехами бывал он доволен. В октябре 1854 г. Риман, совершенно осчастливленный, сообщает отцу, что у него много слушателей – их было восемь! – и, далее, в ноябре пишет, что у него со слушателями начинает устанавливаться контакт и что его смущение исчезает. В это время Риман, близко придерживаясь Дирихле, читает дифференциальные уравнения в частных производных, т.е. ходовой общий курс.

В 1855 г. скончался Гаусс, и на его кафедру был приглашен Дирихле, который, как мы знаем, был знаком в Риманом еще по Берлину. И вот Риман – несомненно, поддерживаемый в этом Дирихле – решается избрать темой лекций область собственных исследований. В зимнем семестре 1855/56 гг. и в летнем семестре 1856 г. он читает лекции о функциях комплексной переменной и, в частности, об эллиптических и абелевых функциях. У него нашлось три слушателя: Дедекинд, Шеринг и Бьеркнес. Затем в зимнем семестре 1856/57 гг. он читает тот же самый предмет, но на этот раз выбирает гипергеометрические ряды и близкие им трансцендентные функции.

Потом из этих лекций выросли большие публикации: "Theorie der Abelschen Funktionen" ("Теория абелевых функций", Журнал Крелля, 1857, т. 54) и "Beiträge zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ darstellbaren Funktionen" ("К теории функций, представимых гауссовым рядом $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$", Gött. Abh., 1857, т. 7). Они были приняты как откровение и вызвали нескрываемое удивление всех коллег по специальности.

Частично эти лекции были повторены в следующих семестрах, но дальнейшие достижения, излагавшиеся в них Риманом, были изданы – поскольку сам он на эту тему ничего не опубликовал – лишь в виде очень несовершенных конспектов (см. "Дополнения" к "Трудам" Римана, написанные Нётером и Виртингером); мы еще вернемся к этому вопросу.

Осенью 1857 г., в возрасте тридцати одного года, Риман – вероятно, по ходатайству Дирихле, который всегда активно выступал в его пользу, – стал экстраординарным профессором в Гёттингене. В 1859 г., после смерти Дирихле, он получил вакантное место ординарного профессора.

На 1857–1862 гг. приходится расцвет творчества Римана: чтобы убедиться в этом, достаточно беглого взгляда на перечень его работ. В 1859 г. выходит знаменитая работа "Über die Anzahl der Primzahlen unter einen gegegenen Größe" ("О количестве простых чисел, не превышающих заданной величины"), ставшая фундаментом для множества работ новейшего времени. Она была издана в ноябре 1859 г. в "Monatsberichte" Берлинской Академии, членом-корреспондентом которой Риман стал с 1859 г. В основе этой работы лежит так называемая ζ-функция. О ее нулях Риман высказал ряд гипотез, которые, несмотря на упорнейшие старания большого числа математиков, до сих пор доказаны не все.

После смерти Дирихле на Римана все более сильное влияние стал оказывать В. Вебер. В этом, а также в определенном взгляде на свои обязанности ординарного профессора и могла заключаться причина того, что и в своих лекциях и в исследовательской работе Риман снова стал все сильнее склоняться к математической физике. Об этом свидетельствуют издания Хаттендорфа, страдающие, впрочем, многими недочетами, поскольку он недостаточно сознавал гениальность Римана. О том, как протекала дальнейшая внутренняя работа Римана, говорит его статья "Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite" ("О распространении плоских воздушных волн с конечными амплитудами", 1860; см. "Труды", стр. 157), а также сочинение "Über eine Frage der Wärmeleitung" ("Об одном вопросе из области теплопроводности"), представленное в 1861 г. в Парижскую Академию. В этой работе Риманом был полностью построен аппарат квадратичных дифференциальных форм, используемый теперь в теории относительности.

Всего лишь три года смог Риман наслаждаться своей силой, своей знаменитостью. В 1862 г., вскоре после женитьбы, перенеся тяжелую простуду, он заболел. По ходатайству В. Вебера правительство трижды предоставляло ему стипендию, давшую ему возможность несколько раз побывать в Италии. Однако болезнь не оставляла его. Он начал целый ряд новых работ, но ни одну из них не смог довести до конца.

Скончался он 20 июля 1866 г. в Селаске на Лаго-Маджоре[1]. Там – могила, правда, находится не в Селаске, а на кладбище близлежащего селения Биганцола – его и похоронили.

Обрисовав таким образом в самых общих чертах внешние обстоятельства жизни Римана, я перейду теперь к несколько более подробному рассказу о его общей теории комплексных функций $f(x + iy)$ в том виде, как она была изложена и развита в его работах. К сожалению, здесь – как и вообще в этой главе – я должен сделать определенный выбор и ограничиться лишь наиболее существенным и специфическим из его результатов, не вдаваясь в подробности.

---

[1] Озеро в Италии и Швейцарии в южных отрогах Альп. – *Примеч. пер.*

Однако, прежде чем переходить к характеризации римановской теории функций, я хотел бы сделать одно предварительное замечание, которое, возможно, покажется неожиданным: работая над теорией функций, Риман сделал много такого – и даже чрезвычайно важного, – что не вкладывается в специфические рамки его теории. Я назову здесь

1. Уже упоминавшуюся выше вышедшую в 1859 г. работу о количестве простых чисел, не превышающих заданной границы. *Риманова дзета-функция* $\zeta(\sigma + it)$ задается некоторым аналитическим выражением – бесконечным произведением. Произведение это преобразуется затем в некий определенный интеграл, значение которого вычисляется сдвигом пути интегрирования. Все это целиком укладывается в рамки теории функций Коши.

Этими беглыми замечаниями относительно ζ-функции я и хотел бы здесь ограничиться, как бы интересен и важен сам по себе ни был этот предмет. Я оставлю ζ-функцию в стороне, ибо в ней не нашло своего проявления то римановское своеобразие, которое нам бы хотелось здесь подчеркнуть; кроме того, я вообще не могу стремиться в этих лекциях к сколько-нибудь полному изложению вопроса.

2. В начале второй части своих "Абелевых функций" (1857 г.) Риман внезапно вводит в круг своих рассмотрений *тета-ряды* с p переменными; впоследствии, производя разного рода выкладки, он не раз прибегает к их помощи. Это – родовое имение, полученное им в наследство от Якоби, но, конечно, Риман управляет им вполне самостоятельно. Вообще, Риману совершенно не свойственна закостенелая однобокость; он пользуется всем, что ему удается найти, и привлекает к делу самые разнообразные методы, если с их помощью можно сдвинуть решаемую задачу или что-нибудь прояснить в ней.

3. Так, например, Риман пользовался в своей теории функций и *степенны́ми рядами* $\mathfrak{P}(z - a)$, т.е. работал в том же, если так можно выразиться, направлении, что и Вейерштрасс. Тесная связь между функциями и степенны́ми рядами была известна уже давно, и начала соответствующей теории относятся к значительно более раннему периоду. Я вкратце обрисую то, что в свое время застал в математике Риман.

Лагранж в своей "Théorie des fonctions analytiques" ("Теория аналитических функций", 1797 г.) использовал ряды в качестве отправной точки рассмотрения. Аналитическими он называл функции, допускающие разложение в степенны́е ряды, причем с рядами он оперировал чисто формально и вопросами сходимости не занимался вообще. По-видимому, ряд для него был не более чем некой бесконечной схемой коэффициентов; подобным же, чисто формальным способом определялись у него и производные. Кстати сказать, эти лагранжевы построения продолжают оказывать свое влияние и до сегодняшнего дня. Термин "аналитическая функция" – я, впрочем, полагаю, что у Лангранжа он означал не более чем "функцию, применяемую в анализе", – сохранился и до сих пор, хотя содержание, вкладываемое в это понятие, стало совсем иным.

В 1812 г. Гаусс рассматривал вопрос о сходимости на примере гипергеометрического ряда.

Коши в своем "Cours d'analyse" (1821 г.) рассмотрел общий вопрос о разложении функций в ряды и обнаружил, что в области комплексных чисел всякий степенной ряд обладает некоторым кругом сходимости. Обо всем этом я уже подробно говорил в первой части моих лекций.

Огромным достижением Вейерштрасса – позвольте мне немного забежать вперед – является то, что он довел до полного завершения увязшие в разных формальностях идеи Лагранжа и внес в них одухотворенность. В основу своих рассмотрений Вейерштрасс кладет – вскоре я расскажу об этом подробно – сходящийся в некоторой области ряд $\mathfrak{P}(z - a)$ и называет его "элементом функции". Такого рода "элементы", круги сходимости которых имеют общую часть, внутри которой они совпадают, он в соответствии со своим "принципом аналитического продолжения" последовательно присоединяет друг к другу. "Функцией" у него оказывается совокупность всех продолжений какого-либо элемента. Теперь легко понять различие между римановской и вейерштрассовской манерой смотреть на вещи: то, что у Римана является случайным вспомогательным средством, у Вейерштрасса в его концепции, развиваемой на основе вычислительной методики, превращается в основополагающий принцип.

Вновь обращаясь после этого отступления к Риману, мы попытаемся в самом сжатом виде обозначить типичный для него ход мысли, с триумфом представленный в его диссертации 1851-го года и в обеих крупных работах 1857-го года (абелевы функции, теория гипергеометрического ряда).

Прежде всего – *определение* функции $f(z)$ комплексного аргумента: величина $w = u + iv$ называется функцией комплексного аргумента $x + iy$, если в подразумеваемых предположениях непрерывности и дифференцируемости выполняются также условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

из которых вытекает, что $\Delta u = 0$ и $\Delta v = 0$.

Ныне чаще всего уравнения эти называют (проявляя при этом замечательную историческую добросовестность, поскольку они встречаются еще у Коши) условиями *Коши – Римана*. Однако сами по себе уравнения эти гораздо старше; их можно, например, встретить уже в середине XVIII столетия у Даламбера, а возможно и еще раньше. Во всяком случае, открыты они не Риманом.

Дело здесь в том, что Риман, поставив эти уравнения во главу угла, нашел точки их примыкания к математической физике, с одной стороны, а с другой – к геометрии. Поясним это несколько более подробно.

Следуя Гельмгольцу, мы можем интерпретировать u как *потенциал скорости* движения в плоскости x, y некоторой несжимаемой жидкости.

Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ будут компонентами этой скорости, а v – соответствующей *функцией потока*.

Но эти u и v встречаются и во многих других разделах математической физики, имея совсем другой смысл. В теории стационарных электрических токов u будет электростатическим потенциалом (в терминологии Кирхгофа; раньше, у Ома, u называлось напряжением); в теории стационарного процесса теплопередачи u представляет собой температуру (с этим можно встретиться уже у Фурье).

С другой стороны, геометрическое истолкование исходит из того, что из условий Коши – Римана производная $\dfrac{d(u + uv)}{d(x + iy)}$ зависит только от точки $x + iy$ и не зависит от направления $dx + idy$. Геометрически это означает, что отображение плоскости x, y на плоскости u, v является *конформным*.

Всем этим Риман пользуется столь же широко, как широко пользовался до него Гаусс. Но для Римана это является также источником дальнейшего концептуального развития, поскольку он всегда пытается вникнуть в суть проблем, выдвигаемых той или иной точкой зрения.

На все это можно посмотреть и несколько иначе. Уже не раз случалось так, что, оказывая обратное воздействие, приложения оплодотворяли теорию. Великолепным тому примером служит, кстати говоря, история дифференциального исчисления. Понятия движения точки и ее скорости имелись налицо a priori; отсюда Ньютон абстрагировал понятие своей "флюксии". Равным образом непосредственно очевидным считалось существование кривой и касательной к ней в данной точке. Надо было найти лишь пути к их вычислению. Отсюда появились лейбницевы dx и dy. На этих примерах мы видим, как коренятся в интуиции первоначальные понятия, из которых выросло затем наше исчисление бесконечно малых.

Так и для Римана в силу его интуиции и опыта было совершенно ясно, что существуют потоки на поверхностях, а также конформные отображения одних поверхностей на другие. И это активно поддерживало его творчество. Возникших впоследствии сомнений по поводу того, обоснован ли логически такой способ действий, а также вопроса о том, почему он не обоснован, мы здесь касаться не можем. Риман, кстати сказать, сам впоследствии обдумывал эти сомнения. Но об этом мы поговорим несколько позже. А сейчас я хочу обрисовать лишь процесс становления общих римановских теоретико-функциональных идей, как я его себе представляю.

Аналитической Риман называет функцию, которая путем непрерывного продолжения – с учетом уже упоминавшихся выше условий Коши–Римана – получается из какой-нибудь начальной области.

В принципе это – совершенно то же самое, что и у Вейерштрасса, разве что остается бо́льшая свобода в выборе аналитических средств. Конечно, Риман в своей диссертации еще не имел вполне четкого представления о важности этой точки зрения. Хотя он и говорит (Диссертация, № 20; "Труды", стр. 39), что "взятое здесь за основу понятие функции комплексной переменной полностью совпадает с понятием зависимости, изобразимой посредством действий над величинами", но мы знаем, что это верно лишь в определенной степени. Его определение, действительно, дает в точности то же, что и определение с помощью степенны́х рядов, но другие аналитические средства могут привести к формулам совсем другого характера. Вообще, в том, что касается логической строгости, мы не должны подходить к работам Римана с теми же требованиями, что и к исследованиям Вейерштрасса. Риман воздействует скорее богатством своих идей и глубиной концепций, всегда схватывающих основное.

Теперь я могу рассказать, как из римановского определения аналитической функции и из априорного имеющегося у нас представления о пространстве развилось одно сыгравшее важную роль подсобное средство – некое вспомогательное геометрическое представление.

Так как продолжение функции по различным путям может для одного и того же аргумента $x + iy$ дать различные значения $u + iv$ и так как Риман никогда не упускал из виду конформных отображений, то у него возникла идея *римановой поверхности*, многократно настланной на плоскость или на какую-нибудь часть плоскости.

Это ликвидирует возникавшие в теории многозначных функций трудности, с которыми сталкивались другие математики. Теперь, на римановой поверхности, рассматриваемой как область, на которой задана функция, оказалось возможным без помех осуществлять те же самые действия, что и на обычной плоскости, – например, перемещать пути интегрирования. Рассмотрим в качестве примера свойство периодичности эллиптического интеграла первого рода

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}},$$

четкое понимание которого прежде доставляло математикам столько трудностей, что полностью с ними не справился даже Гаусс. Используя новые понятия, Риман приходит к поразительно простому и убедительному утверждению: "Параллелограмм периодов на плоскости переменной u является конформным образом надлежаще разрезанной римановой поверхности многозначной функции

$\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}$".

Еще и в наши дни любой начинающий заниматься римановыми поверхностями сталкивается со значительными трудностями. В самом деле, "точки обхода" (Windungspunkte), в которых сходится несколько "листов"

(Blätter), играют существенную роль, а исходящие из них кривые, по которым эти листы пересекаются, – нет. Эти кривые можно произвольным образом смещать, лишь бы концы их оставались фиксированными. И вообще, они возникают лишь постольку, поскольку мы вынуждены осуществлять наши конструкции в трехмерном пространстве. К тому же в своих "Абелевых функциях" Риман поменял терминологию: вместо "листа" (Blatt) он стал говорить о "ветви" (Zweig), вместо "точки обхода" (Windungspunkt) – о "точке ветвления" (Verzweigungspunkt), вместо "линии пересечения" (Durchsetzungskurve) – "о линии разветвления" (Verzweigungsschnitt).

Если $\zeta = f(z)$, то многозначна, вообще говоря, не только переменная ζ относительно переменной z, но и переменная z относительно переменной ζ. Поэтому куску поверхности над плоскостью z будет взаимно однозначно и, вообще говоря, конформно соответствовать кусок поверхности над плоскостью ζ. Здесь вступает в свои права новая геометрическая дисциплина *Analysis situs* (= *топология*).

Взаимно однозначное конформное отображение является частным случаем отображения, непрерывного в обе стороны, и потому возникает вопрос о том, когда две поверхности могут быть в обе стороны непрерывно отображены друг на друга. Ответ заключается в том, что поверхность характеризуется максимальным числом p возможных на ней не пересекающих друг друга замкнутых разрезов (Rückkehrschnitte), не разбивающих эту поверхность на части, и числом μ кривых, из которых состоит ее граница.

Две поверхности могут быть взаимно однозначно и непрерывно отображены друг на друга тогда и только тогда, когда числа p и μ у обеих этих поверхностей совпадают [1]).

Эта основополагающая теорема нигде у Римана явно не сформулирована, но он неоднократно ею пользуется.

В частности, замкнутые поверхности, т.е. поверхности, у которых $\mu = 0$, топологически вполне характеризуются числом p. Для того, чтобы замкнутую поверхность с данным p превратить в поверхность, граница которой проста и для которой более не существует неразбивающих ее замкнутых разрезов, требуется сделать $2p$ разрезов.

В частном случае, когда функция $\zeta = f(z)$ является *алгебраической*, т.е. когда ζ и z связаны между собой алгебраическим уравнением вида $F(\overset{n}{\zeta}, \overset{m}{z}) = 0$ (обозначения Римана), ее риманова поверхность, покрывающая всю плоскость переменной z и имеющая n листов, оказывается – при условии правильного учета бесконечно удаленной точки – замкнутой. В случае, когда уравнение $F = 0$ неприводимо в области рациональности

[1]) Здесь молчаливо предполагается совпадение "ориентаций" этих поверхностей. – *Примеч. ред. нем. изд.*

переменной z, эта поверхность состоит из одного куска, причем верно и обратное – результат, важный и сам по себе. Для такого рода замкнутых поверхностей наряду с равенством $\mu = 0$ справедливо также равенство

$$p = \frac{w}{2} - n + 1,$$

где w – число точек ветвления с учетом их кратности. Впоследствии число p было названо Клебшем *родом* (Geschlecht) рассматриваемой поверхности или соответственно уравнения $F(\zeta, z) = 0$. В качестве первого важного следствия мы немедленно получаем ответ на вопрос о взаимно однозначной преобразуемости друг в друга алгебраических уравнений вида $F(\zeta, z) = 0$. Два таких уравнения преобразуются друг в друга тогда и только тогда, когда они имеют одно и то же p.

Риман не испытывал потребности в доказательстве этого утверждения; справедливость его обеспечивалась для Римана его наглядностью.

Тем самым Риман впервые охарактеризовал совокупность всех алгебраических уравнений, получающихся друг из друга взаимно однозначными, или, выражаясь другим языком, бирациональными преобразованиями; все эти уравнения обладают одним и тем же числовым инвариантом – а именно, p. Уравнения с одним и тем же p различаются, далее, некоторыми важными дополнительными константами – так называемыми "модулями". Риман нашел, что число этих модулей равно 0 при $p = 0$, равно 1 при $p = 1$ и равно $3p - 3$ при $p > 1$. Мы не можем более подробно останавливаться здесь на этом важном вопросе и вернемся к нему в седьмой главе.

Давайте рассмотрим теперь вопрос о том влиянии, которое оказала на теоретические работы Римана – и, в частности, на его работы по алгебраическим функциям и их интегралам – математическая физика.

Чтобы войти в курс дела, лучше всего разобрать какой-нибудь пример. Я возьму его из традиционной классики – созданной Фурье теории теплопроводности.

Итак, пусть дана некоторая область с гладкой границей и пусть в точках этой границы поддерживается температура, являющаяся непрерывной функцией $u = u(s)$. Тогда с течением времени во внутренней части области установится стационарный температурный режим, описываемый уравнением

$$\Delta u = 0.$$

При этом не надо, как показывает физический опыт, исключать и случай, когда внутри рассматриваемой области имеются источники и стоки тепла – в предположении, что их общий дебит равен нулю. Таким образом, мы имеем здесь дело с первой краевой задачей, которую французы со свойственным им пренебрежением к историческим фактам называют "задачей Дирихле". Задача эта формулируется следующим образом: "найти функцию u, если заданы ее граничные значения, а также некоторые физически возможные разрывы". Утверждение состоит в том, что задача эта имеет решение и что оно единственно.

Риман использует этот подход для целей теории функций, беря u в качестве вещественной части функции $f(x + iy) = f(z) = u + iv$ и считая, что мнимая часть v определяется из дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

т.е. интегралом

$$v = \int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right).$$

Это дает *первую теорему существования*: Для любой непрерывной на границе функции u существует в области функция $f = u + iv$, вещественная часть которой имеет данные граничные значения.

Это рассуждение, которое, собственно говоря, было им заимствовано, Риман существенно обобщил: вместо области с простой границей он стал рассматривать либо кусок римановой поверхности, либо даже замкнутую риманову поверхность, а вместо граничных значений u – не формулируя, правда, этого четко – произвольные соотношения между граничными значениями функций u и v.

Проследить за этим подходом во всей его общности здесь невозможно. Я смогу сформулировать лишь те результаты из теории алгебраических функций и их интегралов, которые получаются, так сказать, с налета. По собственному свидетельству Римана, он получил их фактически в самом начале – зимой 1851/52 г. Впоследствии они были развиты мной в работе 1881/82 г., посвященной римановской теории алгебраических функций и их интегралов (см. Собрание моих сочинений, т. 3, стр. 498 и далее), а затем более подробно – в моих лекциях о римановых поверхностях (две тетради, 1891/92 г.); я постоянно следил за связью с индуктивно-физическим мышлением, которое считаю истинным источником римановых построений. Мне, пожалуй, лучше всего придерживаться изложения, принятого в этих работах. Оно хотя и несколько отличается от изложения самого Римана, зато – хочу надеяться – позволит увидеть, каким образом Риман пользуется физическими представлениями при формулировке теорем существования для функций на замкнутых римановых поверхностях со сколь угодно большим числом листов.

Итак, пусть над плоскостью z задана n-листная замкнутая риманова поверхность.

Мы будем опираться на мысленный эксперимент, в котором поверхность будет считаться изготовленной из однородного электрического проводника. Этот эксперимент несложно реализовать, оклеив поверхность станиолем и позаботившись о том, чтобы в линиях пересечения листы были изолированы друг от друга. (Этого можно добиться, вставив в разрезы, по которым листы поверхности разветвляются, специальные гребенки, сопротивление зубцов которых равняется сопротивлению станиолевых обкладок.) Подсоединим к каким-либо двум точкам A_1 и A_2 нашей поверхности полюса гальванической батареи. Тогда возникнет ток, потенциал которого u будет на всей поверхности, за исключением точек A_1 и A_2, однозначной и непрерывной функцией, удовлетворяющей уравнению $\Delta u = 0$. Точки A_1 и A_2 будут точками разрыва функции u, которая в окрестностях этих точек будет вести себя, как $\ln r_1$ и $-\ln r_2$ соответственно.

Тем самым мы получили еще одну теорему существования, которая может быть сформулирована примерно следующим образом: На всякой замкнутой римановой поверхности существует непрерывная потенциальная функция u, которая в двух наперед выбранных точках имеет особенности данного типа.

Теперь из этой функции u мы, пользуясь равенствами

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

хотим изготовить функцию $u + iv$. Сделать это будет совсем просто, если рассматриваемая риманова поверхность предварительно будет надлежащим образом разрезана. Мы сначала разрежем ее $2p$ поперечными разрезами так, чтобы никакой не разбивающий ее замкнутый разрез уже не был больше возможен. После этого мы еще одним разрезом соединим точки A_1 и A_2. На препарированной таким образом поверхности функция v будет однозначна и непрерывна, но на противоположных берегах каждого разреза значения функции

$$v = \int_{z_0}^{z} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)$$

будут отличаться друг от друга на аддитивную константу, а при приближении точки z к точке A_1 (соответственно к A_2) функция v будет вести себя, как угол между вектором $\overline{zA_1}$ и положительным направлением оси x (соответственно как взятый с обратным знаком угол между вектором $\overline{zA_2}$ и положительным направлением оси x). Таким образом, значение v на одном береге разреза $\overline{A_1A_2}$ будет на 2π больше, чем на другом.

Резюмируя, я могу теперь высказать следующее утверждение: Пусть над плоскостью z задана замкнутая риманова поверхность и пусть на этой поверхности отмечены две произвольные точки A_1 и A_2, соединенные друг с другом какой-либо кривой. Тогда на этой поверхности, разрезанной $2p$ поперечными разрезами, существует одна и только одна однозначная ветвь функции $u + iv$, обладающая следующими свойствами: а) она непрерывна всюду вне точек A_1 и A_2, где она логарифмически бесконечна; б) ее вещественная часть однозначна на всей поверхности и на ее границе;

в) ее мнимая часть в соответствующих друг другу точках обоих берегов разреза, соединяющего точки A_1 и A_2, отличается на 2π.

В соответствующих же друг другу точках берегов каждого из $2p$ поперечных разрезов эта мнимая часть отличается на некоторые подлежащие вычислению числа P_i, называемые *периодами*.

Надлежащим образом склеив бесконечное число экземпляров нашей разрезанной поверхности, мы получим новую риманову поверхность и на ней однозначную непрерывную функцию Π_{A_1, A_2}, которая – по сложившейся в теории эллиптических интегралов терминологии – называется "интегралом третьего рода".

После того, как существование такой функции установлено, наше дело в основном закончено. Теперь можно без труда построить "интегралы второго рода", т.е. интегралы, которые бесконечны лишь в одной точке и имеют в ней полюс, в котором они ведут себя как $\dfrac{1}{z-a}$, а затем и "интегралы первого рода", которые вообще нигде не обращаются в бесконечность. – Далее можно различными способами перейти к "алгебраическим функциям на данной поверхности", либо устраивая такие комбинации интегралов первого и второго родов, чтобы все периоды обратились в нуль, либо просто переходя к производным $\dfrac{d\Pi}{dz}$.

Последнее название объясняется тем, что, как можно показать, получающиеся таким образом функции ζ, однозначные на рассматриваемой n-листной римановой поверхности и обладающие лишь полюсами, связаны с z алгебраическими уравнениями вида $F(\overset{n}{\zeta}, \overset{m}{z}) = 0$.

Итак, на произвольной n-листной римановой поверхности существуют как алгебраические, так и интегральные функции, совокупность которых допускает описание, отчетливо выясняющее имеющиеся между ними взаимосвязи.

А так как, обратно, всякому алгебраическому уравнению $F(\zeta, z) = 0$ отвечает некоторая n-листная риманова поверхность над плоскостью z, то это открывает нам новый путь к общей теории алгебраических функций и их интегралов ("абелевых интегралов").

Я абсолютно лишен возможности продолжать дальнейшее изложение всего этого материала. Мне только важно, чтобы читатель понял, что Риман – в силу своеобразия его способа мыслить – подошел к алгебраическим функциям и абелевым интегралам совсем с другой стороны, чем это делалось до него. Именно в этом я и усматриваю существенную часть необыкновенного успеха, достигнутого им в этом вопросе. Наиболее важным, конечно, является тот факт, что по замыслу Римана каждой римановой поверхности отвечает один (и только один) класс ("тело") алгебраических функций (с их абелевыми интегралами). ["Классом" алгебраических функций по Риману называется совокупность всех функций $R(\zeta, z)$, рационально выражающихся через ζ и z; термин "тело" (Körper) был введен Дедекиндом позже[1].] Это утверждение вообще нельзя получить никаким другим способом. В этом пункте римановская теория и по сю пору остается непревзойденной: ее нельзя и сравнивать со всеми другими теориями, отталкивающимися от уравнений $F(\zeta, z) = 0$. Мы еще не раз будем возвращаться к этому вопросу.

И вот теперь, после того, как мы в какой-то мере насмотрелись на результаты, нам следует подумать о прочности оснований. Я рассказал, каким образом основополагающие идеи Римана могли возникнуть в его уме на базе интуитивно-физического способа мышления. Теперь я намерен разобраться в вопросе о том, как Риман, следуя примеру Дирихле, обосновывал свои рассуждения на основе некоего вариационного принципа.

Дирихле не был первым, кто для доказательства теорем существования привлекал соображения из вариационного исчисления; похожие рассуждения использовали уже Гаусс в 1840 г. и В. Томсон в 1847 г. Но сам Риман научился этому у Дирихле и поэтому, не заботясь об истории, стал говорить о *принципе Дирихле*[2].

Однако Риман не только перенял и применил известное – он внес сюда и нечто новое. Именно он распространил этот принцип на потенциалы, рассматриваемые на произвольных римановых поверхностях (а не только на однолистной плоскости) и имеющие заранее заданные разрывы и периоды на разрезах. Однако, чтобы лучше понять суть дела, мы не будем заниматься задачей в общей постановке и ограничимся рассмотрением простейшего случая – краевой задачи для однолистного круга.

Пусть на окружности заданы граничные значения $U(\psi)$ в виде функции угла ψ. Во избежание осложнений будем предполагать, что $U(\psi)$ зависит от ψ непрерывно. Тогда речь будет идти о том, чтобы доказать следующую теорему существования: Внутри рассматриваемого круга существует одна и только одна непрерывная функция u, имеющая заданные граничные значения и удовлетворяющая уравнению $\Delta u = 0$. Оказывается, что можно сформулировать задачу вариационного исчисления, решение которой в точности совпадает с этой функцией.

В самом деле, рассмотрим взятый по кругу интеграл

$$\int\int\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx dy,$$

где u – произвольная функция, имеющая данные граничные значения и, конечно, такая, что интеграл имеет смысл. Так как подынтегральная

---

[1] В русской алгебраической литературе приоритет приобрел термин "поле", а термин "тело" стал эквивалентом термина "некоммутативное поле. – *Примеч. ред. русского перевода.*

[2] См. выше стр. 115 и 261.

функция неотрицательна, то существует нижняя грань значений интеграла при всех "возможных" u, которая также неотрицательна. При этом, конечно, предполагается, что интеграл не всегда бесконечен (как впоследствии заметил Адамар, случай этот при некоторых коварных граничных значениях $U(\psi)$ действительно может иметь место). — Принцип Дирихле утверждает, что при "надлежащем" u эта нижняя грань достигается, т.е. что существует непрерывная функция u, имеющая данные граничные значения, для которой интеграл

$$\int\int\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy$$

принимает минимальное значение. Для этой функции имеет место равенство

$$\delta\int\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy=0,$$

и, значит, она удовлетворяет уравнению

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

выражающему необходимое условие равенства нулю этой первой вариации.

Таков этот способ рассуждать, рассматривавшийся прежними математиками как вполне убедительный. Как уже было сказано, Риман не только его воспринял — и дал ему имя принципа Дирихле, — но и распространил его на римановы поверхности.

Но вот с критикой принципа Дирихле выступил Вейерштрасс (опубликована впервые в "Berliner Monatshefte" [1]) в 1869 г.; см. также "Труды" Вейерштрасса, т. 2, стр. 49). Он показал, что такой способ рассуждать неверен или, во всяком случае, недостаточен. То, что на совокупности всех непрерывных и дифференцируемых функций u, имеющих данные граничные значения, интеграл обладает нижней гранью, безусловно, верно, но нельзя заранее, без дополнительного исследования утверждать, что функция u_0, на которой эта нижняя грань достигается, также лежит в области непрерывных и дифференцируемых функций u.

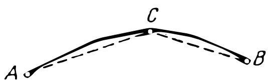


Рис. 17

Обоснованность этого возражения мы продемонстрируем на простейшем примере, приводимом ныне в элементарных курсах вариационного исчисления: среди всех кривых с непрерывной кривизной, идущих из A в B и проходящих через C (см. рис. 17), найти такую, что длина ее будет

[1]) См. Enzyklopädie, т. II, A 7 b, примеч. 157 со стр. 494.

наименьшей. "Нижней гранью" всех "возможных" сравниваемых здесь кривых будет ломаная, состоящая из двух отрезков $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$; однако в точке C непрерывность ее кривизны нарушается. Таким образом, эта нижняя грань не принадлежит к числу допустимых кривых, и, значит, нельзя утверждать, как это молчаливо подразумевалось ранее, что любая разумная вариационная задача имеет решение.

Вследствие этого возражения, выдвинутого Вейерштрассом против принципа Дирихле, очевидность, на которую ссылался Дирихле, а после него и Риман, обнаружила свою несостоятельность, и римановы теоремы существования повисли в воздухе.

Интересно проследить за тем, как математики отнеслись к вейерштрассовской критике и соответственно к римановым теоремам существования.

Математики в большинстве своем отвернулись от Римана и перестали доверять его теоремам существования, из-под которых критика Вейерштрасса выбила опору. Эти математики пытались спасти положение тем, что в своих исследованиях алгебраических функций и их интегралов они снова стали исходить из уравнения $F(\zeta, z) = 0$. Мы вскоре вернемся к этому направлению более подробно. Как очень характерное для него высказывание, я процитирую одно место из большого реферата Брилля и Нётера "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit" ("Развитие теории алгебраических функций в прошлом и в наши дни"), напечатанного в 1894 г. в годовом отчете Немецкого математического общества (Jahresber. Deutch. Math.-Ver., 1894, т. 3, стр. 265): "В такой общности понятие функции, неуловимое и ускользающее, не допускает более никаких контролируемых умозаключений". Тем самым центральная риманова теорема о существовании алгебраических функций на любых римановых поверхностях отменялась, и на ее место водворялась некая пустота.

Сам же Риман придерживался совершенно иного мнения. Хотя он и полностью признавал законность и справедливость вейерштрассовской критики, тем не менее, он – как мне об этом однажды рассказал Вейерштрасс – говорил, что "он использовал принцип Дирихле лишь как удобное подспорье, оказавшееся в тот момент полезным, – теоремы его, несмотря на все это, верны". Вейерштрасс, по-видимому, присоединялся к этому мнению, поскольку он побудил своего ученика Г.А.Шварца детально изучить римановы теоремы существования и попытаться найти для них другие доказательства, что тому вполне и удалось. Мы еще вернемся к этому вопросу.

Иную позицию заняли физики, которые отрицательно отнеслись к вейерштрассовской критике. Гельмгольц, которого я как-то случайно спросил об этом, сказал мне: "Для нас, физиков, принцип Дирихле остается доказательством". Таким образом, он откровенно провел различие между доказательствами для математиков и доказательствами для физиков; последним вообще не свойственно заботиться о математических тонкостях, они довольствуются "очевидностью". — И хотя впоследствии Вейерштрасс показал, что существуют непрерывные функции, не имеющие производных, еще и ныне один выдающийся представитель математической физики поучает: "Тот факт, что всякая функция в бесконечно малом линейна, является законом мышления!" — Поэтому я всегда старался понять и объяснить точку зрения, которой физики придерживаются в отношении математической строгости.

В моей лекции о приложениях дифференциального и интегрального исчисления к геометрии, изданной К.Мюллером в 1901 г., я заключил, что вследствие односторонних навыков математическое мышление физиков носит аппроксимационный характер — их интересует лишь определенное, точно указанное число десятичных знаков. Точка у физиков — это своего рода пятно (Klex) очень маленьких размеров, кривая — узкая полоска. — Я с тем большей охотой привел это расхождение во мнениях по поводу критики принципа Дирихле, что как раз в духе этой лекции было показать, насколько медленно пробивают себе дорогу математические идеи.

Теперь я перейду к Шварцу, который, вооружившись вейерштрассовской критикой, занялся укреплением фундамента теории функций. Однако, прежде чем излагать суть дела, я приведу кое-какие биографические подробности.

Г.А.Шварц родился в 1843 г. в Гермсдорфе (Силезия). С 1860 г. он учился в Берлине в Промышленной академии, где — факт, интересный с культурно-исторической точки зрения, — дифференциальное и интегральное исчисление читал в это время Вейерштрасс. Шварц сдал в Академии экзамен на звание учителя промышленной школы (Gewerbelehrer), экзамен, которого сегодня больше уже нет. Докторскую степень Шварц получил в Берлине в 1864 г.; там же в 1866 г. он получил право преподавания в высшей школе; в 1867 г. стал экстраординарным профессором в Галле; в 1869 г. — ординарным профессором в Государственном политехническом институте в Цюрихе. В 1875 г. Шварц переехал в Гёттинген, а с 1892 г. стал в качестве преемника Вейерштрасса преподавать в Берлине. Период его собственной продуктивности приходится на годы пребывания в Цюрихе. Там, в частности, им выполнены и те исследования, которыми мы здесь интересуемся. Они опубликованы в 1869 — 1870 гг. в "Züricher Vierteljahrschrift" и в 1870 г. в "Berliner Monatsberichte" см. также Журнал Крелля, 1872, т. 74 и Собрание сочинений Шварца, т. 2 [1]).

Ход мысли у Шварца таков: для круга краевую задачу можно решить непосредственно с помощью формулы, предложенной Пуассоном (со времен Шварца ее называют *интегралом Пуассона*). Кстати, этому интегралу Шварц дает красивую геометрическую интерпретацию (рис. 18), которая заключается в следующем: Пусть заданы непрерывные граничные значения

---

[1]) По поводу подробностей, касающихся литературы, см. Enzyklopädie, в особенности т. II, A 7b (Burkhardt-Meyer)№ 24 и далее, а также т. II, C 3 (Lichtenstein).

и пусть мы хотим вычислить значение непрерывной функции u, имеющей данные граничные значения и удовлетворяющей уравнению $\Delta u = 0$, в какой-либо внутренней точке x, y круга (подчеркнем, что разрывы внутри круга категорически запрещаются). Для этого мы меняем местами граничные значения U в точках окружности, противоположных по отношению к точке x, y, т.е. в точках, лежащих на концах хорд, проходящих через x, y, и берем среднее этого нового распределения значений.

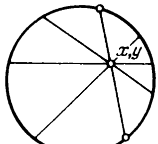


Рис. 18

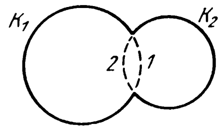


Рис. 19

Теперь с помощью одного комбинаторного приема, применявшегося еще Мерфи, задача может быть решена и для области, состоящей из двух пересекающихся кругов (рис. 19). Это делается следующим образом. Значения, заданные на дуге K_1, берутся вместе с произвольными значениями на дуге *1* и только что описанным способом вычисляются значения на дуге *2*. Затем берутся значения, заданные на дуге K_2, и значения, вычисленные перед этим на дуге *2*, и по ним вычисляются новые значения на дуге *1*. Эти последние вместе со значениями, заданными на дуге K_1, позволяют вычислить новые значения на дуге *2*. Процесс продолжается неограниченно. Можно показать, что он очень быстро сходится и приводит к единственной функции u, удовлетворяющей в рассматриваемой области уравнению $\Delta u = 0$ (этот прием называется *альтернирующим методом*).

Затем к двум кругам добавляется третий и т.д. и т.д., и таким образом часть плоскости (или многолистной римановой поверхности), для которой можно решить краевую задачу, становится все более широкой.

Параллельные исследования, ведшиеся К.Нейманом [1]), были начаты в 1870 г. и в окончательном виде изложены во втором издании его "Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale" ("Лекции по римановой теории абелевых интегралов", 1884). Таким образом, усилиями Шварца и Неймана римановы теоремы существования были спасены.

Мое отношение к этим проблемам с самого начала было совсем иным. Лично Римана я уже не знал и, будучи учеником Плюккера и Клебша, только с 1872 г., когда уже находился в Эрлангене, стал постепенно вникать в его идеи. Таким образом, по отношению к Риману я являюсь, так сказать, экстерном, а, как известно, эти последние, если уж берутся за какое-нибудь дело, то делают его с особым рвением, ибо работают единственно из внутренних побуждений. Я довольно скоро пришел к выводу, что вместо того, чтобы

---

[1]) См. гл. 5, стр. 244.

ломать себе голову над оправданием римановых теорем существования, следует заняться их энергичным использованием. Благодаря такой позиции я — в своих работах по эллиптическим модулярным функциям — сделался решительным поборником римановской точки зрения; об этом я при удобном случае впоследствии расскажу более подробно. Моя работа 1881/82 г. представляет собой лишь один из примеров моего отношения к этому делу.

Но самым красивым и самым неожиданным достижением в части приведения римановых теорем существования в порядок мы обязаны Гильберту. В 1901 г. в статье, посвященной 150-летнему юбилею Гёттингенского научного общества, им было показано, что в конце концов принцип Дирихле может быть спасен, но что для этого надо апеллировать не к общим соображениям вариационного исчисления, а к специальному виду подынтегральной функции (и, в частности, к тому, что она положительна). Гильбертов метод, впоследствии продемонстрировавший всю свою силу, в первых публикациях казался еще не имеющим достаточной степени общности; однако в дальнейшем в руках учеников Гильберта Куранта, Вейля и др. он неоднократно подвергался значительному упрощению и усовершенствованию. В целом он знаменовал собой начало новой эры в вариационном исчислении, и в результате римановы теоремы существования были доказаны во всей их общности [1]).

Вывод, который мы можем извлечь из всего этого, заключается в том, что Риман оказался прав, что его теоремы, несмотря на критику Вейерштрасса, на отрицательное отношение многих математиков и даже несмотря на то, что доказательства их в то время действительно не были безупречны, могут быть с полным правом отнесены к числу глубочайших и величайших достижений математики за все время ее существования!

Судьба принципа Дирихле, если посмотреть на нее в ретроспективе, сама по себе весьма примечательна; использовавшийся математиками старшего поколения — особенно самим Дирихле — в качестве полноценного доказательного средства, приобретший особую плодотворность в руках у Римана, опровергнутый Вейерштрассом и в течение десятилетий остававшийся скомпрометированным, он оказался спасенным Гильбертом. На этом примере мы видим, каким резким переменам бывают подвержены математические знания, сколь бы объективными они нам ни казались. Я хотел бы самым настойчивым образом подчеркнуть эту мысль, разумеется, никоим образом не имея в виду как-либо задеть математику или же поставить под серьезное сомнение надежность ее оснований и законов. —

После этого рассказа о критике и реабилитации римановых теорем существования можно перейти и к некоторым другим аспектам римановой теории комплексных функций.

---

[1]) В этой связи следует также указать на примыкающие к Гильберту работы итальянцев Г. Фубини, Э.Э. Леви, Б. Леви и др. — *Примеч, ред. нем. изд.*

Мы уже видели, что Риман обстоятельно занимался абелевыми интегралами. Интегралы эти можно рассматривать как решения простейших дифференциальных уравнений $\dfrac{dy}{dz} = \zeta$, где ζ – алгебраическая функция переменной z, или, точнее, – функция на некоторой наперед заданной римановой поверхности. Соответственно этому теорию абелевых интегралов можно рассматривать как частный случай *теории общих линейных дифференциальных уравнений n-го порядка*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y + P = 0,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n, P$ – функции на фиксированной римановой поверхности (алгебраические функции одного и того же "тела"). Как известно, этот общий случай методом вариации произвольных постоянных посредством соответствующих квадратур сводится к так называемому однородному уравнению

$$y^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0,$$

и Риман сконцентрировал свое внимание на исследовании теоретико-функциональных свойств последнего. Это – следующая по своей сложности область трансцендентных функций. К сожалению, в этих лекциях я за недостатком времени вынужден совершенно оставить в стороне "определенные интегралы", так как это потребовало бы лишней главы. Я снова смогу дать лишь самое общее представление о достижениях Римана; впрочем, за последние десятилетия по этому вопросу появилась обширная литература.

Мы и на этот раз, оставив в стороне всяческие усложнения, рассмотрим лишь простейший, типичный случай, когда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ являются рациональными функциями z. Это означает, что мы будем действовать на однолистной плоскости.

Как известно, общее решение y рассматриваемого уравнения может быть представлено в виде линейной комбинации n подходящих частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$, как бы мы их ни выбирали, в общем и целом ведут себя как аналитические функции, т.е. в окрестности произвольной точки a они разлагаются по целым положительным степеням двучлена $z - a$, если не считать особых точек, т.е. точек, в которых одна или несколько из функций $p_1, p_2, \ldots, p_n$ обращаются в бесконечность. Вообще говоря, поведение решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в этих точках отнюдь не ясно, и основная проблема заключается в том, чтобы исследовать, какой вид имеет разложение этих решений в окрестности особых точек.

Если какое-нибудь из этих частных решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ мы обведем по замкнутому пути вокруг особой точки, то его значение изменится, хотя само оно по-прежнему останется решением. А так как любое решение может быть представлено в виде линейной комбинации решений $y_1, y_2, \dots, y_n$, то получающиеся после обхода решения $y_1', y_2', \dots, y_n'$ будут выражаться формулами вида

$$\begin{aligned} y_1' &= c_{11}y_1 + \dots + c_{1n}y_n, \\ y_2' &= c_{21}y_1 + \dots + c_{2n}y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' &= c_{n1}y_1 + c_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Это означает, что при обходе особой точки решения $y_1, y_2, \dots, y_n$ подвергаются линейной подстановке, и центральным пунктом всего исследования оказывается вопрос о *группе монодромии*, т.е. о совокупности всех линейных подстановок, которым $y_1, y_2, \dots, y_n$ подвергаются при произвольных обходах особых точек. Впервые группу монодромии ввел Эрмит (Comptes Rendus, 1851 = Oeuvres, т. 1, стр. 276). Сам этот термин означает "группу подстановок, которым подвергается система решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ при обходе вдоль таких замкнутых путей, что функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ переходят друг в друга, т.е. остаются монодромными".

По всей этой тематике Риман опубликовал только одну, уже упоминавшуюся выше (см. стр. 279) работу "Beiträge zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ darstellbaren Funktionen" (1857 г.).

Гауссов ряд – это ряд

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} x^2 + \dots$$

С исторической точки зрения это название никуда не годится, ибо ряд этот знал и обнаружил его замечательнейшие свойства уже Эйлер; правда, Гаусс был первым, кто исчерпывающим образом разрешил вопросы, связанные с его сходимостью. Поэтому, по примеру математиков прежних времен, мы предпочтем называть ряд *гипергеометрическим* по той простой причине, что закон его образования лишь на одну ступень сложнее закона образования геометрического ряда. Особый интерес этого ряда объясняется тем, что его частными случаями являются многие функции, возникающие в анализе из приложений, как, например, бесселевы функции и эйлеровы интегралы. Все эти функции я буду называть "гипергеометрическими", а какая из них будет иметься в виду в каждом конкретном случае – это всякий раз будет ясно из контекста. Разумеется, никакого отношения к какой-либо гипергеометрии – т.е., например, к неевклидовой геометрии или к многомерным пространствам – эти функции не имеют. За дальнейшими подробностями я отсылаю к моей литографированной лекции 1893/94 г. "Über die hypergeometrische Funktion" ("О гипергеометрической функции")

Гаусс, занимавшийся этим рядом еще в 1812 г., рассматривал его лишь при действительных значениях переменных, но свою статью он недвусмысленно пометил "pars prior"[1]).Изучение гауссова наследия показало, что он имел намерение исследовать поведение гипергеометрического ряда и в комплексной области. Ему было хорошо известно, что ряд этот удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению второго порядка с тремя особыми точками и что частные решения этого уравнения в критических точках ведут себя сравнительно просто. Таким образом, свойства этого уравнения не выпали из его поля зрения.

Независимо от Гаусса гипергеометрический ряд был рассмотрен Куммером в его работе, опубликованной в Журнале Крелля (1836 г., т. 15) и в свое время много цитировавшейся. Куммер, в частности, был первым, кто фактически вычислил подстановки соответствующей группы монодромии.

И вот Риман показал, что при переходе к комплексной числовой плоскости для исследования гипергеометрической функции совершенно не требуется выписывать дифференциальное уравнение, от которого до тех пор обычно отталкивались, а что нужно лишь знать, как ведут себя в трех особых точках, о которых мы говорили, соответствующие функции y_1 и y_2 и что при обходах вокруг особых точек эти функции подвергаются линейным подстановкам вида

$$y_1' = c_{11}y_1 + c_{12}y_2,$$

$$y_2' = c_{21}y_1 + c_{22}y_2.$$

Здесь еще раз с такой отчетливостью проявилась основная особенность методики Римана, который всегда пытался постичь функцию не по формуле, с помощью которой она задана, а по ее глубинным свойствам.

А теперь я хочу рассказать о дальнейших судьбах этой теории. Нам нужно будет знать эти вещи, чтобы иметь возможность правильно оценивать последующие события.

Вейерштрасс и здесь оказал решающее влияние, нацелив своего ученика Фукса на работу в этом направлении. (Фукс родился в 1833 г. в Мошине Познаньской провинции; в 1884 г. он был приглашен в качестве преемника Вейерштрасса в Берлин, где и умер в 1902 г.)

Начиная с 1865 г., т. е. по времени непосредственно примыкая к Риману, Фукс занимался теорией линейных дифференциальных уравнений n-го порядка и привлек к работе в этом направлении многих своих учеников, ко-

---

[1]) "Часть первая" (*лат.*). – *Примеч. пер.*

торые в математической литературе последующих десятилетий образовали определенную группу. Здесь мы имеем дело с примером узко ограниченной "школы" в том виде, в каком она может сформироваться в результате регламентированного преподавания, приобретшего односторонний характер.

Фукс не пошел по пути, проложенному Риманом. Он снова элементарнейшим образом начал прямо с формулы, т. е. с явного задания дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0.$$

В первую очередь Фукс занялся особыми точками и ответил на вопрос о том, какой характер должны иметь коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$, чтобы частные решения этого уравнения вели себя в особых точках столь же просто, как и решения гипергеометрического уравнения. Он установил, что функция p_1 может иметь самое бóльшее простые полюса, функция p_2 — полюса самое большее второго порядка, ..., функция p_n — полюса самое большее n-го порядка. По терминологии фуксовой школы — это *фуксов класс* линейных дифференциальных уравнений. Кроме того, он вычислил группу монодромии и т. п.; короче говоря, он продолжал развивать идеи Куммера.

Можно себе представить, какое громадное изумление вызвала на этом фоне публикация в первом издании "Трудов" Римана (1876 г.) фрагмента из его рукописного наследия, датированного 20-м февраля 1857 г., "Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten" ("Две общие теоремы о линейных дифференциальных уравнениях с алгебраическими коэффициентами"; "Труды", 1-е изд., стр. 357–369; 2-е изд., стр. 379–390), который показал, что Риман, остановившийся, как все полагали, на уравнении второго порядка с тремя особыми точками, пытался рассматривать и более сложные случаи, причем и здесь Риман сохранил верность самому себе и не стал прятаться за формулами.

В гипергеометрическом случае группа монодромии вполне определялась предположением относительно особых точек коэффициетов. В более сложных случаях знания, как ведут себя частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в особых точках, для вычисления группы монодромии недостает и бывает необходима дополнительная информация. К сожалению, исследования Римана по этому вопросу не были завершены.

Риман утверждал, что "задание группы монодромии, согласованной с заранее данным поведением решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в особых точках, достаточно для полного восстановления уравнения" (или — что равносильно — всей совокупности его решений).

Так как нет ни малейших указаний на соображения, с помощью которых Риман рассчитывал доказать это утверждение, здесь предпочитают говорить о *проблеме Римана,* а не о его "теореме".

Проблема Римана принципиально — в сторону большей общности — отличается от "задачи Дирихле", в которой граничные условия, а также разрывы и периоды задаются для отдельных функций. В проблеме Римана совместно ищутся n функций или, лучше сказать, n-членное линейное семейство функций $c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$. Для доказательства существования, принципа Дирихле здесь заведомо не хватает; отказывается служить и физическая интуиция. Вместе с тем решаемый с помощью принципа Дирихле вопрос о существовании на данной n-листной римановой поверхности алгебраической функции является частным случаем проблемы Римана, относящимся к случаю, когда n ветвей $y_1, y_2, ..., y_n$ этой функции при обходе точек ветвления подвергаются линейным подстановкам простейшего типа — обыкновенным перестановкам. Все же беззаботность, проявляемая Риманом, поразительна. Как будто и в общем случае существование функций $y_1, y_2, ..., y_n$ является делом само собой разумеющимся, и речь идет лишь о том, чтобы исследовать их свойства!

Проблема Римана на протяжении почти что тридцати лет сопротивлялась усилиям математиков, пока наконец в 1905 г. Гильберт на основе развитой им к тому времени теории интегральных уравнений не дал первое исчерпывающее решение этой проблемы, которое и на сей раз полностью оправдало и подтвердило предвидения Римана.

Подробнее об этом и обо всей относящейся к этому кругу вопросов литературе см. в чрезвычайно удачно написанной статье Гильба "Lineare Differenzialgleichungen im komplexen Gebiet" ("Линейные дифференциальные уравнения в комплексной области", Enzykl., II B´5; в особенности стр. 518 и далее, п. 14 — проблема Римана).

Я вошел в эти подробности с тем, чтобы уже здесь в какой-то мере показать, насколько несравненный гений Римана опережал свое время и сколь продолжительное воздействие оказывал он на развитие науки в последующие годы. Конечно, математические доказательства, вынуждающие нас своей убедительностью принять их, замыкают теорию, как замыкает свод его последний, замко́вый камень. Конечно, отказавшись от такого характера своих доказательств, математика подписала бы себе смертный приговор. Однако то, как ищутся новые задачи, как предчувствуются новые результаты, как обнаруживаются новые факты и связи, — все это навсегда останется секретом творческой лаборатории гения. Не создавая новых концепций, не ставя новых целей, математика со всей логической строгостью ее доказательств скоро исчерпала бы себя и впала в состояние застоя, полностью израсходовав весь свой материал. — С этой точки зрения максимальное содействие развитию нашей науки оказывают математики, выделяющиеся не столько строгостью доказательств, сколько интуицией. Среди математиков последних десятилетий, вне всякого сомнения, именно Риман оказал наибольшее воздействие на развитие нашей науки.

Идеи Римана, столь фундаментально повлиявшие на развитие современной теории функций, распространялись довольно медленно и постепенно. Вопреки тому, как это может показаться теперь, выход в свет его работ вовсе не был воспринят как откровение, и не имел немедленных последствий. Это может быть объяснено хотя бы тем, что публикации самого Римана — возможно, вследствие их немногословности и наличия в них множества новых и совершенно непривычных понятий — воспринимались поначалу с очень большим трудом.

Первой широкое признание получила теория алгебраических функций и их интегралов. Но и здесь математики на первых порах занимались рассмотрением лишь простейшего случая, когда связь между римановой поверхностью и соответствующим алгебраическим уравнением абсолютно прозрачна. Это случай двулистной поверхности с уравнением

$$\zeta^2 = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n).$$

Здесь имеется n конечных точек ветвления; кроме того, при нечетном n точкой ветвления оказывается точка $z = \infty$. Поэтому число p для такой поверхности равно либо $\frac{n-2}{2}$, либо $\frac{n-1}{2}$ смотря по тому, четно n или нечетно. Если $p > 1$, т.е. если $n > 4$, то поверхность называется *гиперэллиптической*; при $n = 5$ или $n = 6$ употребляется также более ранний термин — *ультраэллиптическая поверхность*. "Всюду конечные" *гиперэллиптические интегралы* имеют вид

$$u_1 = \int \frac{dz}{\zeta}, \quad u_2 = \int \frac{z\,dz}{\zeta}, \dots, \qquad u_p = \int \frac{z^{p-1}dz}{\zeta}.$$

Раньше их часто неудачно называли абелевыми интегралами, хотя в принципе абелевы интегралы — вещь гораздо более общая.

Ультраэллиптические функции были первыми подробно изучены в духе Римана. Это с явно выраженной дидактической тенденцией было сделано близким учеником Римана Примом в его диссертации "Theoria nova functionum ultraellipticarum" ("Новая теория ультраэллиптических функций"; Берлин, 1863; 2-е изд., 1885[1]). (Прим родился в 1841 г.; с 1869 по 1915 г. преподавал в Вюрцбурге.) Римановой доктрине, давшей ему толчок к первой самостоятельной работе, Прим остался верен и в дальнейшем; недавно, в 1911 г., он вместе с Ростом выпустил относящийся к этому кругу вопросов большой труд "Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung, im Anschluß an die Schöpfungen Riemanns" ("Теория функций Прима первого порядка в связи с теорией Римана"), в котором рассматривается общий случай n-листной римановой поверхности.

[1] Впервые полностью опубликована в 1864 г. в 24-м томе "Denkschriften der Wiener Akademie".

Двумя годами позже, в 1865 г., появился подробный, получивший большое распространение учебник К. Неймана, бывшего в то время профессором в Тюбингене, "Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale" ("Лекции по римановой теории абелевых интегралов"). И здесь, как уже отмечалось, поначалу рассматривался лишь случай двулистных поверхностей, т.е. случай гиперэллиптических интегралов. Многолистные поверхности и соответствующие доказательства существования появились лишь во втором издании 1884-го года.

Одновременно с К. Нейманом, но в совершенно иной манере риманову теорию алгебраических функций разрабатывал его товарищ по учебе в Кёнигсберге Клебш. (Клебш родился в 1833 г. в Кёнигсберге, в 1854 г. получил там докторскую степень; его учителями были Ф. Нейман, Гессе, Ришело; затем он стал приват-доцентом в Берлине, в 1858 г. – профессором теоретической механики в Карлсруэ, в 1863 г. – профессором математики в Гиссене, в 1868 г. – профессором в Гёттингене; умер в 1872 г.) В седьмой главе мы подробно расскажем, как Клебш применял общие результаты Римана к теории алгебраических кривых. Тем не менее, методов Римана с их чуждым ему и тогда еще не вполне надежным фундаментом Клебш не перенял. Более того, он пытался продвинуться к общим теоремам Римана, исходя из алгебраического уравнения $F(\zeta, z) = 0$, трактуемого как уравнение кривой и записываемого по примеру проективной геометрии в однородном виде $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$. Такое изложение этого вопроса мы найдем в книге Клебша и Гордана "Theorie der Abelschen Funktionen" ("Теория абелевых функций", Лейпциг, 1866). Книги Неймана и Клебша представляют собой полную противоположность друг другу; в то время как Нейман близко придерживается Римана, Клебш, работая гораздо интенсивней и самостоятельней, идет своим собственным путем. И цели, преследуемые двумя этими учебниками, тоже совершенно различны; Нейман стремится как можно более ясно и понятно изложить ситуацию в простейшем случае; Клебш, напротив, хочет вдохновить читателя на размышления и на самостоятельную работу. Книгу Неймана упрекают в том, что она "слишком легка", что она является "до обидного ясной". И быть может именно поэтому она представляет собой отличное введение в круг римановых идей. Книга Клебша и Гордана трудна, она требует от читателя активного сотрудничества, но зато она позволяет ему гораздо глубже вникнуть в рассматриваемую проблематику и стимулирует к серьезным занятиям идеями Римана. Обе книги – каждая в своем роде – сыграли фундаментальную роль в деле освоения римановых работ, но для нас они уже отошли в прошлое.

К концу 60-х годов насчитывалось уже немало исследователей, опиравшихся в своей работе на Римана. Я могу здесь назвать только несколько самых важных из них – тех, кого должен знать каждый, кто пожелает ориентироваться в литературе.

На первое место я поставлю очень изящный учебник Казорати "Teoria delle funzioni di variabili complesse" ("Теория функций комплексной переменной"). Это широко задуманное сочинение, из которого, к сожалению, как это часто случается, в свет вышел лишь первый том (1868 г.).

В то же самое время методы Римана начинает использовать в математической физике и Гельмгольц.

С 1869 г. над возведением нового фундамента римановых теорем существования начинает работать – о чем уже упоминалось – Г.А. Шварц; о его дальнейших работах по гипергеометрическим функциям я расскажу ниже более подробно.

Для истории творчества Римана весьма важен 1876 г. В этом году вышли "Riemanns Werke" ("Труды Римана"), изданные Г. Вебером в сотрудничестве с Р. Дедекиндом. В них было опубликовано большое количество записей из рукописного наследия, но в то время еще было невозможно восстановить лекции Римана, которые распространялись в рукописях и в которых, как мы знаем, изложена существенная часть того, что было достигнуто Риманом в математике. Этот пробел был восполнен лишь в 1902 г. изданными Нётером и Виртингером "Nachträge" ("Дополнения"). Ранее я уже говорил обо всем этом, но ввиду важности этой информации я повторяю ее здесь еще раз.

Я придаю большое значение тому, чтобы вещи, затрагиваемые в моих лекциях, освещались возможно более живо. Поэтому я и здесь приведу – как я это делаю всегда – несколько замечаний личного характера, чтобы придать отношению к науке несколько более человеческий и индивидуальный оттенок.

Дедекинд, получивший всеобщую известность своими теоретико-числовыми работами, о которых мы еще будем говорить впоследствии, родился в 1831 г. в Брауншвейге, где он постоянно и жил с 1862 г. до самой смерти, последовавшей в 1916 г. В бытность приват-доцентом в Гёттингене (1854–1858 гг.) он оказался коллегой Римана и близко подружился с ним. Дедекинд слушал курс лекций Римана, и поэтому для нас он является главным носителем римановской традиции. Сильной чертой Дедекинда было умение глубоко проникать в принципы науки. Он был поистине созерцательной натурой, которой, может быть, недоставало энергии и решительности. В свойствах его характера крылось нечто такое, из-за чего Дедекинд, которому семьей Римана после его кончины было вверено все его научное наследие, издав значительную часть этого наследия и снабдив изданное проницательными комментариями, все же в одиночку не предпринял полного издания римановых "Трудов" и вступил с этой целью в 1871 г. в контакт с Клебшем, а после его смерти в 1872 г. – с Г. Вебером.

Г. Вебер родился в 1842 г. в Гейдельберге, где и приступил к своим занятиям. Слушал лекции Гельмгольца и Кирхгофа. В 1873–1883 гг. Вебер работал в Кёнигсберге; в 1892–1895 гг. был ординарным профессором в Гёттингене; затем он переехал в Страсбург, где и умер в 1913 г. Вебер был податливым и в то же время энергичным человеком, обладающим удивительной способностью легко вникать в новые, поначалу чуждые ему точки зрения. Так, например, обстояло дело с римановой теорией функций и с дедекиндовой теорией чисел. Эта способность к аккомодации позволила Веберу в последние десятилетия поработать почти во всех областях нашей науки и создать такие всеобъемлющие учебники, как Вебер–Вельштейн, Риман–Вебер и учебник по алгебре, которые все мы знаем и которыми пользуемся. О его участии в издании "Трудов" Римана мы уже упоминали; вторым их изданием (1892 г.) Вебер занимался уже один.

К Нётеру (родился в 1844 г.; с 1875 г. в Эрлангене; умер в 1922 г.) мы еще вернемся, когда будем заниматься современной теорией алгебраических образов. Он был одним из основных учеников Клебша.

В лице Виртингера мы впервые сталкиваемся с австрийским математиком. Он родился в 1865 г., так что все названные выше математики старше его. С 1903 г. Виртингер – профессор в Вене. В качестве соредактора журнала "Monatshefte für Mathematik und Physik" он теснейшим образом связан с германской математикой.

Прослеживая в самых общих чертах дальнейшее развитие и совершенствование римановой теории, мы должны будем упомянуть и мои собственные работы середины 70-х годов – сперва по теории *эллиптических модулярных функций* (название, заимствованное у Дедекинда), а затем и самых общих *автоморфных функций.*

Самым коротким образом можно сказать, что автоморфные функции – это функции, которые удовлетворяют системе функциональных уравнений вида

$$f\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = f(z),$$

где число индексов i может быть и бесконечным, и, значит, являются обобщением – в самом широком смысле этого слова – понятия периодической функции, когда прибавление периода заменяется линейной подстановкой.

Начиная с 1881 г., я – именно в области автоморфных функций – пришел в тесное соприкосновение с Пуанкаре; это был момент, когда идеи Римана проникли во Францию и нашли там себе твердую почву. Подробно я рассмотрю эти вещи в восьмой главе.

Выше уже упоминалась моя небольшая работа 1881/82 гг. "Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale" ("О римановой теории алгебраических функций и их интегралов"), в которой я попытался сделать акцент на основных физических идеях Римана.

С тех пор интерес к римановой теории функций пробуждается во все более широких кругах – в том числе и за границей. Из моих учеников, пожалуй, особенно следует назвать Гурвица в Цюрихе и Дика в Мюнхене. А если мы остановимся – чтобы не потеряться в необъятном – лишь на ближайшем окружении, то должны будем назвать ряд гёттингенских имен – Гильберта (реабилитация принципа Дирихле, 1901 г.) Кёбе, Вейля ("Идея римановой поверхности", 1913 г.) и Куранта.

Я перечислил здесь многие более или менее известные имена, тесно связанные с именем Римана. Но чем-то бóльшим, нежели мертвый список, имена эти смогут стать лишь в том случае, если мы просмотрим относящуюся к ним – или, лучше сказать, к их носителям – литературу. Нужно учиться искусству извлекать из чудовищной массы имеющегося печатного материала основные линии великих взаимосвязей нашей науки, не впадая при этом ни в расточительную трату времени на проработку частных деталей, ни в поверхностность и дилетантизм. Только так и приобретается всестороннее математическое образование, без которого я не выпустил из университета ни одного желающего работать дальше студента.

Покинем теперь Римана – правда, с тем, чтобы в следующих главах снова и снова встречаться с его именем – и перейдем к Вейерштрассу.

Карл Вейерштрасс

Так же, как это было сделано для Римана, мы и здесь начнем с обзора и упорядочения материала, касающегося внешних обстоятельств жизни.

1. "Собрание сочинений" ("Gesammelte Abhandlungen"): до настоящего времени в свет вышли тт. 1, 2, 3 (1894, 1895 и 1903 гг.); лекции – т. 4: "Абелевы функции" (1902 г.), тт. 5 и 6: "Эллиптические функции" (1915 г.).

Кроме того, ожидаются тома: "Аналитические функции" и "Вариационное исчисление"[1]).

2. Биографические источники: Лямпе – речь, посвященная памяти Вейерштрасса (Jahresber. Deutsch. Math.-Ver., 1897, т. 6, стр. 40 и далее); Киллинг – речь, произнесенная при вступлении на пост ректора Мюнстерского университета (Natur und Offenbarung, 1897, т. 43, стр. 131 и далее); Миттаг-Лефлер – доклад на Парижском математическом конгрессе в 1900 г.[2]).

Лямпе – близкий ученик Вейерштрасса. Высказывания Миттаг-Лефлера основаны на бумагах частного характера, которые он сумел добыть; они несколько нескромны, но – может быть, именно поэтому – читаются с большим интересом. Полной оценки Вейерштрасса в человеческом плане,

---

[1]) В настоящее время в печати находится т. 7 – "Вариационное исчисление".

[2]) За последнее время см. кроме того Acta mathematica, т. 39, 1923, а также более ранние т. 21, 1897 и т. 35, 1912. – *Примеч. ред. нем. изд.*

учитывающей наиболее существенные из его научных концепций, пока не существует. И это вызывает особую досаду, потому что в развитии Вейерштрасса имеется много необычного, и мы, вследствие неполноты собранного материала, во многих вопросах блуждаем в потемках. Было бы благодарной задачей восполнить эти пробелы, разыскав и собрав воедино все документы.

В большинстве своем немецкие математики, которыми мы занимались до сих пор, происходили из протестантской части населения. В лице Якоби впервые появляется математик иудейского происхождения, и в дальнейшем число их постоянно растет.

Вейерштрасс же, напротив, происходит из католических кругов. Он родился 31 октября 1815 г. в Остенфельде (Мюнстерланд), где его отец заведовал казначейством. Я нашел запись о том, что в католичество сначала перешел лишь отец Вейерштрасса. Но как бы там ни было, окружение, в котором Вейерштрасс вырос, было католическим, и это обстоятельство оказало на его развитие значительное влияние. В частности, оно привело к тому, что многие годы своей жизни и деятельности он провел в местах, которые до того в истории математики были неизвестны. Это видно из следующей конспективной подборки дат его жизни:

В 1829–1834 гг. Вейерштрасс учится в гимназии в Падерборне.

В 1839–1940 гг. он учится в Мюнстерской академии у Гудермана (который тоже был католического вероисповедания). В Мюнстере же Вейерштрасс проходит и годичный испытательный срок на звание учителя старших классов.

В 1842–1848 гг. он служит преподавателем в Дойч-Кроне (Западная Пруссия) в местной католической прогимназии.

В 1848–1854/55 гг. Вейерштрасс занимает ту же должность в Collegium Hoseanum – учебном заведении, готовящем католических священников (Браунсвейг, Восточная Пруссия).

Мы видим, что годы наибольшего расцвета творческих сил, т.е. период между тридцатью и сорока годами, Вейерштрасс провел вдали от всякой научной жизни, почти полностью изолированный от всего, что могло бы стимулировать занятия математикой, в маленьких, провинциальных городках, названия которых и то едва известны.

Но совсем на иной лад был настроен совершенно еще не разгаданный нами студенческий период жизни Вейерштрасса в Бонне (1834–1838 гг.). В Боннском университете, конфессионально весьма разношерстном, Вейерштрасс сперва изучал не математику, а юриспруденцию. Одновременно с этим он проявлял большую активность в "Corps Saxonia"[1]), и о нем рассказывают, что каждый вечер он сидел в пивной, где слыл весельчаком, и что его всегда можно было встретить в фехтовальном зале. Как это вяжется с последующими его жизненными обстоятельствами, мне совершен-

---

[1]) Студенческая корпорация. – *Примеч. пер.*

но непонятно. И если Лямпе восхваляет более позднего Вейерштрасса за "свободный характер, позволявший ему обращаться с жизнью в какой-то мере как властелину", то, вероятно, этому искусству Вейерштрасс обучился в студенческие годы в Бонне.

Ничто в Бонне не подталкивало Вейерштрасса к занятиям математикой. До 1836 г. там преподавал Мюнхов, который как представитель старой школы объединял астрономию, математику и физику. Его преемник Плюккер, все еще связывавший математику с физикой, не мог посвящать математике много времени; лекций его Вейерштрасс почти не слушал. Зато, подталкиваемый непреодолимым влечением, Вейерштрасс начинает приватные занятия математикой (уже в Падерборне он познакомился с работами Штейнера в Журнале Крелля). В то время, в 1829 г., появились "Fundamenta nova" Якоби – совершенно новый труд, привлекший к себе всеобщее внимание. Вейерштрасс с чудовищным старанием (заметим, что он не обладал никакими предварительными знаниями) проработал этот труд и решил углубленно заняться этим вопросом. Он услышал, что Гудерман ведет в Мюнстере широкие исследования по эллиптическим функциям, и прервал свои занятия в Бонне, чтобы переехать в Мюнстер. Но перед этим в 1838/39 г. он провел полгода в отчем доме, "страдая телесно и душевно", как он говорит в своей автобиографии, написанной в 1841 г. в Мюнстере по случаю сдачи экзамена на звание учителя старших классов. Подробностей, касающихся причин этого депрессивного состояния и того, как оно протекало, я узнать не смог; там, где начинаются сколько-нибудь глубокие проблемы, касающиеся психики, официальные данные нам, как правило, изменяют.

Теперь, для начала, я, пожалуй, должен рассказать, что представлял собой Гудерман, который так прославился благодаря своим ученикам. Родился он в 1798 г. в Виннебурге близ Гильдесгейма; был учителем гимназии в Клеве, а затем в Мюнстере, где в 1852 г. и умер. Его научные достижения, по крайней мере, в том плане, в каком они интересуют нас здесь, заключаются в том, что он самостоятельно и добросовестно проработал теорию эллиптических функций и интегралов. Интеграл

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\,(1 - k^2 z^2)}} \quad ,$$

так как он содержит некий модуль k, Гудерман называет модулярным и соответственно его обращение – модулярной функцией. Изложение всей его теории можно найти в Журнале Крелля, тт. 18, 19, 20, 21, 23 и 25 за 1838–1843 гг. Для Гудермана характерно активное подчеркивание роли степенных разложений; это направление, в котором пошел затем и Вейерштрасс.

Работы Гудермана скучны для чтения и детали их давно забыты. Что из них удержалось до наших дней, так это часть введенных Гудерманом обозначений, а именно – сокращения sn, cn, и dn, нередко употребляемые ныне вместо якобиевых $\sin am$, $\cos am$ и Δam.

Каким, впрочем, образом Гудерман пришел к этим сокращениям – неизвестно; сам он об этом не говорит ничего. Я предполагаю, что прибавляемая им в конце буква n введена по господствовавшей тогда моде как начальная буква последнего слога слова "amplitudinis". Моя гипотеза основывается на том, что Вейерштрасс свои "абелевы ряды" по тому же самому принципу сокращенно обозначал через Al.

Кроме обозначений как память о Гудермане сохранились составленные им таблицы гиперболических функций, играющие важную роль в астрономических и технических расчетах.

В 1839/40 гг. Вейерштрасс в единственном числе слушал лекции Гудермана и в 1841 г. представил на звание учителя старших классов работу "Über die Entwicklung der Modularfunktionen" ("О разложении модулярных функций"). Тема этой работы была выбрана им самим.

Работу эту можно найти в 1-м томе Собрания сочинений Вейерштрасса, напечатанной в самом начале; она содержит в себе зачатки многих более поздних работ, и в ней достигнут – в развитие одного намеченного Абелем подхода – важный прогресс в теории эллиптических функций.

Чтобы хоть вкратце рассказать, в чем тут дело, я должен начать несколько издалека. Якоби в результате длинных выкладок получил формулы вида

$$\operatorname{sn} u = c_1 \frac{\theta_1}{\theta}, \quad \operatorname{cn} u = c_2 \frac{\theta_2}{\theta},$$

$$\operatorname{dn} u = c_3 \frac{\theta_3}{\theta},$$

где индексы в обозначения введены мною ad hoc для большей удобочитаемости. Здесь θ – целые функции u, которые обладают только одним из двух периодов – скажем, ω_2. Коэффициенты в разложениях этих функций в ряды по степеням $e^{\frac{2\pi i u}{\omega_2}}$ трансцендентны.

Но уже у Абеля имеется сделанное им вскользь замечание, что sn, cn и dn можно представить и в виде отношений степенных рядов от u, коэффициенты которых являются рациональными функциями k^2. И если исходить из интеграла

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

то это даже более естественно. Вейерштрасс в своей работе вводит эти целые функции непосредственно, исходя из эллиптического интеграла, и тем самым систематически исследует переход от этого интеграла к тета-функциям. В честь Абеля он обозначает эти функции символом Al.

Таким образом, Вейерштрасс получает следующее представление:

$$\operatorname{sn} u = \frac{\mathrm{Al}_1}{\mathrm{Al}}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\mathrm{Al}_2}{\mathrm{Al}}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{\mathrm{Al}_3}{\mathrm{Al}}.$$

Здесь функции Al трансцендентно зависят от u и k^2, причем коэффициенты каждого члена их разложения по степеням u представляют собой целые рациональные функции k^2. Вейерштрасс вычислил их до двадцатой степени со всеми прямо-таки жуткими числовыми коэффициентами. В дальнейшем оказалось, что функции Al отличаются от соответствующих функций θ только экспоненциальными множителями вида $ce^{\lambda u^2}$.

Сто́ит попутно заметить, что впоследствии Вейерштрасс заменил функции Al еще лучшими функциями σ. Функции σ отличаются от соответствующих функций θ и Al опять-таки экспоненциальным множителем, который на этот раз выбран так, что основная функция σ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2) = \sigma(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2),$$

где α, β, γ и δ – произвольные целые числа, связанные соотношением

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1;$$

другими словами, функция σ инвариантна относительно любого "линейного преобразования" периодов. Что же касается остальных функций $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то они при этих преобразованиях переходят друг в друга. Все это полностью выявляет лежащую в основе этих вещей симметрию. Но к этому окончательному виду своей теории Вейерштрасс пришел лишь зимой 1862/63 гг., излагая данный материал в берлинском курсе лекций.

Однако и без этого гармоничного завершения работа Вейерштрасса, представленная на соискание звания учителя старших классов, была большим научным достижением, и Гудерман не поскупился на похвалы. В официальном отзыве, опубликованном Киллингом в 1897 г. на основе архивных материалов, говорится, в частности, что "этой своей работой кандидат в качестве равноправного члена вступает в шеренгу увенчанных славой творцов нового".

Теперь в жизни Вейерштрасса появилась цель: упорной работой над степенными рядами (в том числе и рядами от нескольких переменных) осилить проблему обращения гиперэллиптических интегралов произвольных порядков и даже, как это было пророчески предсказано Якоби, абелевых интегралов самого общего типа.

То, что называется теперь вейерштрассовой теорией аналитических функций, было получено на этом пути, так сказать, в качестве побочного продукта.

В долгие годы математического одиночества, во время своего пребывания в Дойч-Кроне и в Браунсберге Вейерштрасс суровым, систематическим трудом приближает решение своей задачи. Мы располагаем лишь немногими образцами его результатов за это время:

В 1843 г. в годовом отчете прогимназии в Дойч-Кроне напечатаны его "Bemerkungen über die analytischen Fakultäten" ("Замечания об аналитических факториалах"). С нашей сегодняшней точки зрения это – изложение основ вейерштрассовой теории функций (Собрание сочинений, т. 1, стр. 87 и далее).

В 1849 г. в годовом отчете гимназии в Браунсберге Вейерштрасс перенес на случай произвольных гиперэллиптических интегралов свойства периодов гиперэллиптических интегралов вида

$$\int \frac{dz}{\sqrt{f_6(z)}}, \qquad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{f_6(z)}}, \qquad \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{f_6(z)}}, \qquad \int \frac{z^3\,dz}{\sqrt{f_6(z)}},$$

а также существующие между ними (и играющие основополагающую роль во всей этой теории) *билинейные соотношения*, в эллиптическом случае соответствующие "лежандрову соотношению"

$$\omega_1 \eta_2 - \omega_2 \eta_1 = 2\pi i$$

["Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale" ("К теории абелевых интегралов"), Собрание сочинений, т. 1, стр. 111 и далее].

И наконец, в 1854 г. в 47-м томе Журнала Крелля под заглавием "Zur Theorie der Abelschen Funktionen" ("К теории абелевых функций", Собрание сочинений, т. 1, стр. 133 и далее) Вейерштрасс опубликовал сообщение о формулах, которые для любого p дают решение проблемы обращения гиперэллиптических интегралов.

Этот небольшой по объему перечень опубликованных работ Вейерштрасса мы теперь можем пополнить неопубликованными работами, вошедшими в 1-й том Собрания его сочинений. Например, мы теперь знаем, что Вейерштрасс уже в 1841 г. обладал доказательством общей теоремы о разложении функций в ряд, которую ныне обычно называют теоремой Лорана. А в 1842 г. он доводит исследование по *алгебраическим дифференциальным уравнениям с одной независимой переменной* не только до установления аналитичности решений, но и до принципа *аналитического продолжения* (по поводу которого Вейерштрасс с явным удивлением замечает, что при известных обстоятельствах оно наталкивается на "естественные границы").

Год 1854-й – год завершения его огромной работы – становится в жизни Вейерштрасса поворотным. Кёнигсбергский университет избирает его почетным доктором, и он получает отпуск для оформления результатов, опубликованных до того лишь в кратком, предварительном виде.

В 1856 г. его приглашают в Берлин. Подобно 1826-му году, году основания Журнала Крелля, 1856-й год имел для берлинской математики определяющее значение.

Еще в 1855 г. в Берлин в качестве богатого рантье переехал на жительство 32-летний Кронекер. Родился Кронекер в 1823 г. в Лигнице, умер в 1891 г. Математическая индивидуальность Кронекера, совсем иная, чем у Вейерштрасса, заслуживает наряду с индивидуальностью Вейерштрасса особой оценки. Занимавшийся по преимуществу арифметикой и алгеброй, но в более поздние годы выдвинувший интеллектуальные нормы, обязательные по его мнению для всех вообще математических работ, Кронекер является специфически еврейским талантом; правда, в особом, индивидуальном усилении, ибо в тех областях, где он работал, он правильно предчувствовал многие фундаментальные связи, не имея еще возможности выявить их с полной ясностью[1)].

В 1856 г. в Берлин в качестве преемника Дирихле был приглашен Куммер.

В том же году в Берлин был приглашен и 41-летний Вейерштрасс – возможно, по инициативе Куммера.

И наконец, с 53-го тома редактирование Журнала Крелля принимает на себя 40-летний Борхардт.

Уже по одним этим именам видно, как выкристаллизовывалась в то время новая берлинская математическая школа.

И вот Вейерштрасс попадает в этот мир, полный математической инициативы. Тем не менее, приглашение в Берлин, несмотря на многие внутренние и внешние преимущества, которые оно ему принесло, не было для Вейерштрасса безусловным благом. Сегодня его пригласили бы – как, например, Эйнштейна – в Берлин "академиком"; а тогда вместо этого его нагрузили двенадцатью лекционными часами в Промышленной академии и одновременно сделали экстраординарным профессором в университете. По сравнению с его предшествующей жизнью это означало большую перегрузку.

К этому добавилось еще, что когда в 1857 г. Вейерштрасс представил Берлинской академии первую редакцию своей работы по общим абелевым функциям, в 54-м томе Журнала Крелля на ту же самую тему появилась работа Римана, которая содержала так много новых, совершенно неожиданных соображений, что Вейерштрасс забрал свою работу назад и так впоследствии ее и не опубликовал. Это тоже должно было вызвать у Вейерштрасса сильные эмоции.

Во всяком случае, зимой 1859/60 гг. у него стали появляться признаки переутомления, за которыми в 1861 г. последовало полное нервное рас-

---

[1)] О Кронекере и обо всем берлинском кружке см. речь А. Кнезера, посвященную 100-летию со дня рождения Кронекера (Jahresber. Deutsch. Math.-Ver., 1925, стр. 210 и далее). См. также статью: H. W e b e r. Kronecker. – Math. Ann., Bd 43 и речь Г. Фробениуса, посвященную памяти Леопольда Кронекера (Abh. Berliner Akad., 1893). – *Примеч. ред. нем. изд.*

стройство. Поэтому зимой 1861/62 гг. Вейерштрасс лекций не читал, а впоследствии работал только в университете, где ему в конце концов в 1864 г. (когда ему было уже 49 лет) дали должность ординарного профессора.

Это была вершина его берлинского положения.

Для нас представляет интерес речь Вейерштрасса, произнесенная 9 июля 1857 г. при вступлении в Берлинскую академию (Собрание сочинений, т. 1, стр. 223–226). Нынешнее поколение привыкло рассматривать Вейерштрасса только как представителя чистой математики. А в этой речи, после краткого обзора целей, поставленных им себе в области теории, и путей, с помощью которых он собирается достичь их, мы находим следующее интересное место (стр. 225):

"Я однако полагаю, что взаимоотношения между математикой и естествознанием должны пониматься несколько более глубоко – не так, чтобы физик считал математику хотя и необходимой, но все-таки лишь вспомогательной дисциплиной, а математик смотрел на вопросы, которые ставит ему физик, только как на обширное поле применения его методов. И все-таки я не могу сейчас дальше развивать эту тему, которая, конечно же, глубоко волнует меня. А что касается заданного мне вопроса о том, действительно ли из абстрактных теорий, которым сегодняшние математики уделяют столько внимания, можно извлечь какую-нибудь непосредственную пользу, то я хочу на него ответить, что греческие математики чисто умозрительно исследовали свойства конических сечений задолго до того, как кто-либо мог заподозрить, что они представляют собой траектории, по которым движутся планеты; и я сейчас живу с надеждой, что еще много будет найдено функций с такими же свойствами, как и у прославившей Якоби его θ-функции, с помощью которой можно узнать, на сколько квадратов может быть разбито любое наперед заданное число, которая позволяет спрямить дугу произвольного эллипса и которая, добавлю я, оказывается в состоянии – причем именно она одна – описать истинный закон, по которому совершает свои колебания маятник".

Таким образом, мы видим, что Вейерштрасс не сторонился приложений математики и уж ни в коем случае их не отрицал. Правда, в работах своих он не имел тесных соприкосновений с прикладной математикой, но в своих лекциях он регулярно затрагивал проблемы механики и побуждал своих учеников – Брунса, С. Ковалевскую и многих других – к работе в этом направлении. И все-таки позиция его резко отличается от римановской; в то время как Риман использует свои математические способности в целях создания новых путей познания природы, с тем чтобы извлекать из этого познания стимулы для формирования новых идей, Вейерштрасс довольствуется тем, что полностью и строго решает уже сформулированные задачи прикладной математики.

В течение – круглым счетом – еще тридцати лет Вейерштрасс перед все увеличивавшейся аудиторией читал свои лекции в берлинском университете, хотя в последние годы этим лекциям не раз мешало слабое здоровье.

Вейерштрасс скончался 17 февраля 1897 г. на восемьдесят втором году жизни после мучительной болезни.

Записи лекций Вейерштрасса для нас имеют особое значение потому, что сам Вейерштрасс мало что печатал. Он питал — и это безусловно странное в нашу "гутенберговскую эпоху" явление — принципиальное отвращение к типографской краске. И литографировать свои лекции он тоже никогда не давал, а требовал, чтобы их переписывали от руки. В те времена в Берлине вошло в обычай весьма конспективно записывать важнейшие места из общих курсов, читавшихся Вейерштрассом. Записки эти получили распространение и за границей. Продолжая оказывать длительное воздействие, они существенным образом повлияли на ход развития нашей науки. И, значит, нам сто́ит познакомиться с ними несколько подробнее.

Полный перечень лекций находится в конце третьего тома Собрания сочинений. В них обычно рассматривались следующие темы: аналитические функции — эллиптические функции — приложения аналитических функций — гиперэллиптические или абелевы функции.

Наряду с этим Вейерштрасс читал и другие курсы — например, синтетическую геометрию или вариационное исчисление (курс, который неоднократно повторялся, особенно в последние годы).

По моим воспоминаниям — я прибыл в Берлин в 1869 г. и оставался там в течение 1869/70 гг. — Вейерштрасс занимал тогда положение абсолютного авторитета, высказывания которого воспринимались слушателями в качестве непререкаемой нормы, нередко без проникновения в их сокровенный смысл. Возможность сомнений исключалась; какой-либо контроль был затруднен уже тем, что Вейерштрасс мало кого цитировал. В своих лекциях он ставил перед собой цель преподнести слушателям упорядоченную систему идей в их взаимной связи. Он начинал с самых первоначальных понятий и, методически следуя своему идеалу непрерывности изложения и отсутствия в нем пробелов, строил теорию так, что ему не нужно было ссылаться ни на кого, кроме самого себя.

Сам я тогда — теперь я жалею об этом — из духа противоречия не прослушал, как и Ли, у Вейерштрасса ни одного курса, а на семинаре я всегда отстаивал только собственные идеи. Но одну лекцию Вейерштрасса об эллиптических функциях я тогда все же переписал и впоследствии часто пользовался ею, когда работал над этим предметом.

Постепенно Вейерштрасс приобрел во всем научном мире беспримерный авторитет[1]). И все же под конец он не избежал разочарований, ибо ему пришлось увидеть свои доктрины поставленными под сомнение (см. письмо к С. Ковалевской от 24 марта 1885 г., опубликованное Миттаг-Лефлером в "Acta mathematica", т. 39, стр. 194 и далее). С Кронекером, который, опираясь на философские соображения, признавал действитель-

[1]) См. об этом отчет Миттаг-Лефлера "Pariser Kongress 1900", стр. 131, где приводится следующее высказывание Эрмита: "Weierstraß – est notre maître à tous" (Вейерштрасс — учитель всех нас).

ное существование лишь за целыми — самое бо́льшее за рациональными — числами и хотел полностью изгнать из математики иррациональные, возникло новое направление в математике, считавшее вейерштрассово обоснование теории функций неудовлетворительным. Это все та же смена взглядов в науке, подобные которой мы часто и в быстрой последовательности сменяющими друг друга видим в литературе и искусстве. Чрезвычайно досадно, что Вейерштрасс — быть может, вследствие личных полемических выпадов Кронекера — так сильно страдал от этого поворота, который в последние годы его жизни сделался заметным. Эти переживания Вейерштрасса видны, в частности, из упомянутого выше письма. Теперь, пожалуй, можно было бы сказать, что ему не надо было так тяжело переживать все это; ведь раз и навсегда известно, что все земное подвержено вечному закону движения. Отживший должен мириться со своей судьбой, с тем, что у молодых на первый план выступают новые мысли. Никто из нас не должен мешать движению мира вперед, через нас. Мы можем этого движения не хотеть, но мы должны помнить, что в дни нашей молодости мы тоже боролись с господствовавшими в то время мнениями.

Сегодня мы знаем и то, что философия Кронекера — которая, впрочем, снова и снова находит себе сторонников среди серьезных математиков — не смогла до основания поколебать вейерштрассову теорию функций. Как определенному направлению в математической проблематике этой философии нельзя отказать в известном праве на существование. Но она никогда не могла приобрести широкого влияния и никогда сама по себе не была по-настоящему плодотворной. Пуанкаре однажды сказал о Кронекере ("Acta mathematica", т. 22), что тому удалось добиться столь крупных успехов в математике (в теории чисел и алгебре) лишь потому, что по временам он забывал о собственном философском учении.

Теперь настало время подробнее рассказать о *вейерштрассовой теории функций*. Естественно, что здесь — как и раньше — я могу привести только самые элементарные факты и рассказать только о самых общих направлениях этой теории.

Отправным пунктом для Вейерштрасса является степенной ряд $\mathfrak{P}(z-a)$, соответственно $\mathfrak{P}(1/z)$. Значения этого ряда внутри его круга сходимости (если таковой существует) образуют "элемент функции". С помощью "аналитических продолжений", осуществляемых опять-таки с помощью одних лишь степенны́х рядов и проводимых, вообще говоря, по различным — как бы мы теперь сказали — листам соответствующей римановой поверхности, "аналитическая функция" возникает как совокупность всевозможных продолжений некоторого "элемента функции".

Теперь возникает вопрос, куда мы должны относить "особые точки", т.е. точки, где функция обращается в бесконечность или где она ветвится (точки эти с необходимостью лежат на границах кругов сходимости отдельных степенны́х рядов). Вейерштрасс принимает решение причислять их к области определения функции в том случае, когда это либо точки ветвления, либо полюса (точки обращения в бесконечность конечного порядка). Эти точки характеризуются тем, что в них возможно разложение функции по степеням выражения $(z-z_0)^{1/n}$, содержащее лишь конечное число членов с отрицательными показателями. Для бесконечно удаленной точки вместо $z-z_0$ надо писать $1/z$.

Получающийся объект Вейерштрасс называет, – а вместе с ним и мы, – "аналитическим образом"[1].

В принципе, эти определения дают как раз то, чего хотелось и Риману. Но теории Римана и Вейерштрасса сразу же полностью расходятся. Вейерштрассовы определения, имеющие дело лишь со степенными рядами, позволяют держаться в границах полной арифметической строгости и вместе с тем допускают – чему Вейерштрасс придавал большое значение – простые и естественные обобщения на случай многих переменных.

"Вейерштрассовская строгость", ставшая в свое время ключевым словом математической дедукции (можно сказать, в противоположность прославлявшейся ранее гауссовской строгости!), заключается в том, что Вейерштрасс очень осторожно обращается с бесконечными рядами. Он выводит на передний план понятие равномерной сходимости, основывая на нем доказательства. Кроме того, Вейерштрасс был первым, кто обратился к основаниям арифметических действий; каждый цикл своих лекций он открывал точным разъяснением сущности понятия иррационального числа, и с тех пор это превратилось в обычай, который несколько приелся.

Как уже выше отмечалось, аналитическая по Вейерштрассу функция при определенных обстоятельствах может иметь "естественную границу". Эта граница в зависимости от ситуации может состоять либо из целых кривых, либо из изолированных ("существенно особых") точек. Риман в своих рассмотрениях исключал случаи, когда, существуют естественные границы. Вейерштрасса же, наоборот, сам образ его мышления неизбежно подводил к тому, чтобы со всей внимательностью вглядываться в поведение аналитических функций вблизи их естественных границ.

Простейший – с точки зрения Вейерштрасса – случай возникает, когда функция $G(z)$ задается степенным рядом, сходящимся на плоскости:

$$G(z) = \mathfrak{P}(z-a).$$

По Вейерштрассу это целая функция, и если она не является рациональной, т.е. если ряд не обрывается на конечном числе членов, то точка $z=\infty$ является для этой функции существенно особой и потому к области определения не причисляется.

Изучая свои целые функции – название это он придумал сам – в окрестности точки $z=\infty$, Вейерштрасс пришел к следующей важной теореме, которая впоследствии была дополнена *теоремой Пикара:*

---

[1] В современной литературе право первенства завоевал термин "аналитическая функция". – *Примеч. ред. русского перевода.*

Всякая целая не вырождающаяся в константу функция в окрестности точки $z = \infty$ бесконечное число раз сколь угодно близко подходит к любому наперед заданному значению. (Эту теорему, впрочем, можно найти уже у Казорати.)

Исследования Вейерштрасса по целым функциям были опубликованы в 1876 г.[1]), но, безусловно, они относятся к гораздо более раннему периоду его научной деятельности.

В работе 1876 года Вейерштрасс, в частности, с увлечением занимается представлением функции $G(z)$ через ее нули, т.е. разложением этой функции в произведение линейных множителей. Он приводит функцию к виду

$$G(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\alpha_i}\right)e^{\Gamma_i(z)},$$

где экспоненциальный множитель вводится для обеспечения сходимости. Множители $(z-\alpha_i)\,e^{\Gamma_i(z)}$ Вейерштрасс называет "простыми множителями" (Primfaktor) функции $G(z)$.

Мы описали, таким образом, два образца, демонстрирующих направленность интересов Вейерштрасса: это, во-первых, разложение целых функций в произведение "простых множителей" и, во-вторых, тенденция рассматривать естественные границы функций.

К этому я добавлю два замечания общего характера:

Первое из них состоит в том, что Вейерштрасс, несмотря на удивительную разносторонность, никогда не занимался теоретико-числовыми исследованиями. Теория чисел замечательна тем, что различные математики в зависимости от их вкусов относятся к ней по-разному. Одних она полностью берет в свой плен, и они подобно Гауссу видят в ней царицу математики; другие же проходят мимо нее без всякого интереса — например, современные французы. Причина этого столь различного отношения к теории чисел не только со стороны отдельных математиков, но и со стороны целых эпох кроется, быть может, в том, что она использует совершенно иные методы, чем все остальные ветви нашей науки, и что о д и н человек по большей части способен правильно и достаточно успешно владеть всего лишь о д н и м оружием.

Несмотря на видимое свое равнодушие к теории чисел как самостоятельной научной дисциплине, Вейерштрасс, как об этом уже говорилось, всегда держал в поле зрения теорему об однозначном с точностью до единиц разложении чисел на простые множители. Перед ним реял идеал — создать аналог этой теоремы в теории функций. Мы уже смогли увидеть, в какой мере ему удалось это для целых функций. Но и в теории многозначных алгебраических функций и их интегралов Вейерштрасс тоже поднимал аналогичные вопросы и следил за тем, как они решаются.

---

[1]) "Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen" ("К теории однозначных аналитических функций"), Berl. Abh., 1876 = Собрание сочинений, т. 2, стр. 77 и далее.

Во-вторых, я хотел бы подробнее остановиться на источниках, которые привели Вейерштрасса к его задачам. Ведь всегда интересно и поучительно заглянуть (если это удается) в творческую лабораторию великого мастера и понаблюдать за тем, как зарождаются и растут его творения.

Я вижу два таких источника. Первый из них – это историческое наследие. В подтверждение я могу сослаться на занятия Вейерштрасса проблемой абелевых функций в том виде, как она была сформулирована Якоби. Второй источник – это присущая мышлению Вейерштрасса систематичность, которая заставляла его доводить начатые исследования до определенной завершенности. При этом он умел учитывать возможности имевшихся в его распоряжении средств.

Третий источник – приложения, – игравший столь большую роль в случае Римана, у Вейерштрасса отсутствует полностью.

Четвертым источником, источником из числа тех, которые реально встречаются у продуктивно работающих математиков, мог бы быть какой-нибудь логико-философский постулат, нечто вроде требования Кронекера оперировать с одними целыми числами и допускать лишь такие рассмотрения, которые требуют конечного числа шагов. Такого источника у Вейерштрасса тоже как будто бы нет, если не считать принципа "Algebraica algebraice"[1]).

Вейерштрассова теория целых функций и их разложений на простые множители, самые элементарные основы которой я изложил, находит блистательнейшее применение в его *теории эллиптических функций* при построении основной функции $\sigma(u)$; исторически же дела обстояли, вероятно, даже так, что теория эллиптических функций была источником теории целых функций. Я не буду здесь подробно заниматься теорией эллиптических функций, тем более что в первой главе я ее уже касался, и ограничусь лишь несколькими замечаниями – в основном исторического характера.

Я уже приводил (см. стр. 42) разложение функции σ в произведение:

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2) = u\,\Pi'\left(1 - \frac{u}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}\right) e^{\frac{u}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2}}.$$

Здесь у периодов я опускаю множитель 2, используемый Вейерштрассом. Я давно уже привык вместо вейерштрассовых периодов $2\omega''$ и $2\omega'$ писать просто ω_1 и ω_2[2]). Этим я лишил число 2 исторически унаследованной им привилегии, но зато добился большей симметрии в случае, когда периоды приходится делить на 3, 4, ... (в моих работах по этому вопросу мне приходилось делать это не раз). В связи с этим я ввел обозримый и наглядный принцип классификации эллиптических функций по типу их

---

[1]) Алгебраическое – алгебраическими методами (*лат.*). – *Примеч. пер.*

[2]) Вейерштрасс кроме того пишет также $\omega_1 = \omega'$, $\omega_2 = -(\omega' + \omega'')$, $\omega_3 = \omega''$.

поведения при линейных подстановках периодов

$$\omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,$$
$$\omega'_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2,$$

где α, β, γ и δ — целые числа, такие что

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1.$$

Это так называемая *теория ступеней* (1879 г.)[1]. Функции, инвариантные относительно каждого из указанных преобразований, называются функциями *первой ступени*: функции, инвариантные относительно преобразований, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{aligned} \omega'_1 &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \equiv \omega_1, \\ \omega'_2 &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \equiv \omega_2; \end{aligned}\right\} \pmod 2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned} \omega'_1 &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \equiv \omega_1, \\ \omega'_2 &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \equiv \omega_2, \end{aligned}\right\} \pmod n,$$

называются соответственно функциями *второй*, ..., *n-й ступени.*

Сущность сказанного можно теперь резюмировать следующим образом. Вейерштрассовы функции $\sigma(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$, g_2 и g_3 суть функции первой ступени, в то время как якобиевы $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ и k^2 относятся ко второй и соответственно к четвертой ступени. При известных обстоятельствах может оказаться очень выгодным вовлечь в рассмотрение функции высших ступеней. Вейерштрасс много занимался функциями второй ступени и стремился придать их теории симметричный вид. Он достигает этого введением трех вспомогательных σ-функций $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$ и $\sigma_3(u)$, зависящих от половинных периодов. Затем с помощью равенств

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right),$$
$$e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$$

он вводит три константы e_1, e_2 и e_3, которые и оказываются функциями второй ступени. Эти функции, кстати говоря, удовлетворяют тождеству

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3).$$

Через них функции σ_i $(i = 1, 2, 3)$ выражаются по формулам

$$\sigma_i = \sigma\sqrt{\wp - e_i},$$

---

[1] См. K l e i n F. Ges Abh., т. 3, стр. 169 и далее.

где знак перед корнем определяется из требования, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{u \to 0} \left(\sigma_i u - \frac{1}{u} \right).$$

Функции $\dfrac{\sigma_i}{\sigma}$ также являются функциями второй ступени и с пользой для дела могут заменить якобиевы функции sn, cn и dn.

Этими замечаниями я и хочу закончить мое изложение вейерштрассовой теории комплексных функций. В заключение я лишь добавлю некоторые исторические детали. которые теперь можно найти собранными воедино в "Энциклопедии" (Enzyklopädie) в прекрасной статье Фрике "Эллиптические функции" (III B 3).

И если мы начнем доискиваться до того, что же именно побудило Вейерштрасса заняться вопросом о представлении целых функций в виде бесконечных произведений, то обнаружим, что главным его предшественником был Эйзенштейн, чрезвычайно одаренный, но рано умерший математик, которого я уже не раз упоминал. В 35-м томе Журнала Крелля (1847) Эйзенштейн опубликовал работу под заглавием "Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelprodukte, aus welchen die elliptischen Funktionen als Quotienten zusammengesetzt sind" ("Подробное исследование бесконечных двойных произведений, частными от деления которых являются эллиптические функции"). Хотя в этой работе Эйзенштейн и не доходит до вполне симметричной нормальной, стандартной формы главной σ-функции, потому что у него еще нет экспонент при простых множителях, но он знает, что произведение

$$u \cdot \Pi \left(1 - \frac{u}{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2} \right)$$

сходится лишь условно, т.е. что значение его зависит от порядка множителей. Эйзенштейн определяет характер этой многозначности и отсюда приходит к функциям $\wp(u)$, $\wp'(u)$, g_2 и g_3 и к существующему между ними соотношению. Таким образом, Эйзенштейну недостает лишь гарантирующего абсолютную сходимость экспоненциального множителя

$$e^{\frac{u}{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2}},$$

введенного Вейерштрассом. Вейерштрасс сам указывает, что он взял идею этого множителя у Гаусса, который в 1812 г. аналогичным образом поступил при разложении гамма-функции в произведение (гипергеометрический ряд, "Труды" Гаусса, т. 3, стр. 145).

Это указание на приоритет Эйзенштейна нисколько, однако, не умаляет величия работы Вейерштрасса. Создание теории из доставшихся в наследство разрозненных результатов всегда представляет собой огромное достижение. И это следует ценить тем более высоко, что теория Якоби, на реорганизацию которой в соответствии со своей новой установкой Вейерштрасс посягнул, в то время безраздельно владела умами математиков.

Теперь я хочу рассказать о том, как распространялась вейерштрассова теория функций и какое влияние оказала она на дальнейшее развитие математики.

Как мы уже знаем, идеи Вейерштрасса, благодаря конспектам и тетрадям с лекциями, переписанными слушателями от руки, имели довольно широкое, но конечно, все-таки ограниченное распространение. Лишь с очень большой задержкой стали появляться учебники, которые, впрочем, редко когда бывали написаны непосредственными, особенно немецкими учениками Вейерштрасса. Объясняется это тем, что лекции Вейерштрасса чересчур подавляли слушателей и были понятны лишь тому, кто уже каким-либо образом был знаком с излагаемым материалом. Все сколько-нибудь крупные работы на вейерштрассовские темы написаны иностранцами или, во всяком случае, появились за границей. С тем же самым, на первый взгляд странным и неприятным обстоятельством мы сталкиваемся и в связи с вопросом о дальнейшем развитии вейерштрассовой теории.

Итак, я перечислю сейчас учебники, возникшие под влиянием Вейерштрасса и способствовавшие распространению его результатов.

а) Основания.

По-видимому, самый первый из учебников принадлежит перу моего друга Штольца из Инсбрука: "Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neuereen Ansichten bearbeitet" ("Лекции по общей арифметике, составленные в свете новейших представлений", 1885/86). Эта книга, отличающаяся особой тщательностью изложения, совершенно в духе Вейерштрасса излагает теорию вещественных чисел.

б) Общая теория функций.

В 1887 г. вышла в свет книга австрийского математика Бирмана: "Theorie der analytischen Funktionen" ("Теория аналитических функций"). Она не может быть рекомендована из-за большого числа имеющихся в ней ошибок.

Форсайт: "Theory of function of complex variable" ("Теория функций комплексной переменной", Кембридж, 1893).

Харкнес и Морли: "A Treatise on the Theory of Functions", ("Курс теории функций", Нью-Йорк, 1893). Первый из авторов происходит из Англии, второй – из Америки. Обе эти страны с тех пор, как в них поблекли традиции их собственной математики в том виде, как их представляли Кэли (скончался в 1895 г.) и Сильвестр (скончался в 1897 г.), стали особенно восприимчивы к чистой математике. Поэтому они быстро и всеми силами подхватили идеи Вейерштрасса.

в) Эллиптические функции.

Во главе списка должна быть поставлена книга Г.А. Шварца: "Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen" ("Формулы и теоремы для пользующихся эллиптическими функциями", 1885). Учебником, собственно говоря, она не является.

Кроме этой книги приходится снова называть лишь иностранные – причем на этот раз французские – труды:

Альфан: "Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications" ("Курс эллиптических функций и их приложений", 1886–1888). В двух с половиной томах; начинается элементарными сведениями, но быстро продвигается до новейших исследований, прерванных смертью автора.

Таннери и Мольк: "Eléments de la théorie des fonctions elliptiques" ("Элементы теории эллиптических функций", 1893). В четырех томах; очень обстоятельное сочинение, представляющее собой типичный учебник.

В Париже после смерти Коши (1857 г.) тоже наметился спад активности в области теории функций, хотя Эрмит (родился в 1822 г., умер в 1901 г.) и поддерживал, начиная с конца 40-х годов, традицию Коши на достаточно высоком уровне. Однако Эрмит, каким бы отличным математиком он ни был, не обладал той высокой самостоятельностью натуры, которая необходима для создания и пестования собственной школы. Потребность в поддержке, которую он ощущал, толкала его вступать в тесные отношения сначала с Якоби, а затем с Риманом и Вейерштрассом. Вообще, Эрмит был в математике очень необычной личностью, и мы впоследствии еще не раз будем говорить о нем. Мы обязаны ему важнейшими, новаторскими открытиями; и все же в том, что он писал, имеют места, оставляющие желать большей ясности. Приведу лишь один пример. В его литографированных лекциях по теории функций[1)] встречается слово "coupure". Что оно означает? Непонятно, есть ли это перевод римановского термина "Schnitt" (разрез), означающего естественную границу, которая однозначно определяется рассматриваемой задачей, или же это "Verzweigungsschnitt" (разрез ветвления), т.е. нечто более или менее произвольное.

Благодаря своему личному обаянию, любезности, осознаному стремлению поднять математику выше партийных трений, выше одностороннего национализма, который начал расти в молодом французском поколении, а также благодаря своей оживленной переписке, Эрмит в течение десятилетий был одним из важнейших центров математики его времени. Но способностью к могучей односторонности, необходимой основателю нового математического направления, Эрмит все-таки не обладал.

Только его ученики после 1880 г. полностью приняли немецкую теорию функций и положили начало новому расцвету французской математики; в этой связи должны быть названы Пикар, Пуанкаре и многие другие. Кстати

[1)] Лекции эти получили весьма широкое распространение, как и все литографированные издания его лекций. [Имеется русский перевод с 4-го французкого издания: Эрмит Ш. Курс анализа – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – *Примеч. пер.*]

сказать, Пуанкаре принадлежит самый подробный из числа тех, которыми мы до сих пор обладаем, и действительно очень интересный очерк о значении Вейерштрасса для нашей науки (Acta mathematica, т. 22).

Возвращаясь к Вейерштрассу, мы в приведенный выше список учебников дополнительно включим

г) Абелевы функции.

Бейкер: "Abel's Theorem and the allied theory" ("Теорема Абеля и смежные вопросы", Кембридж, 1894). В общем и целом тоже примыкает к немецкой теории функций.

Поговорим теперь о дальнейшем развитии вейерштрассовой теории функций.

Сперва – общие вопросы. Здесь особенно следует отметить немецкого математика Прингсгейма (родился в 1850 г., с 1877 г. в Мюнхене[1])). Он перешел к Вейерштрассу из гейдельбергской школы Кёнигсбергера и перенял у Вейерштрасса почти единственное в своем роде умение строго оперировать с рядами, приведшее его к новым результатам.

Затем надо отметить человека, чья действенная международная агитация способствовала распространению идей и творческой манеры Вейерштрасса. Речь идет о Миттаг-Лефлере (родился в 1846 г. в Стокгольме, с 1881 г. в Стокгольмском университете[2])). Будучи учеником Вейерштрасса, он занимался разложением функций на простейшие дроби и другими близкими способами их представления. Гёста Миттаг-Лефлер – человек весьма своеобразного типа; прямое математическое творчество оказалось у него на заднем плане, уступив место активной, бьющей на внешний эффект деятельности. Он ощущал потребность путем более или менее внешних импульсов действовать на других, побуждая их к творческой работе. В этом, как и в частной жизни, он был весьма предприимчив. Но и этого мало: он еще был придворным и дипломатом. Путешествуя взад и вперед между Парижем и Берлином, он превратился в незаменимого для Эрмита и Вейерштрасса человека и использовал для распространения их идей официальные межгосударственные отношения. Миттаг-Лефлер рано понял исключительное значение Пуанкаре, крепко привязал его к себе и сумел заполучить для своего нового журнала "Acta mathematica", основанного в 1882 г.

С самого начала, искусно и эффективно используя свои связи со шведскими дипломатами, Миттаг-Лефлер обеспечил своему журналу широкий круг читателей и добился того, что он приобрел большую известность и повсюду имелся в наличии. В то же самое время более старый немецкий журнал "Mathematische Annalen", основанный в 1868 г., нередко оставался в тени.

Из непосредственных учеников Вейерштрасса эллиптическими функциями больше всего занимался, пожалуй, Киперт (родился в 1846 г., с

---

[1]) Умер в 1941 г. – *Примеч. пер.*

[2]) Умер в 1927 г. – *Примеч. пер.*

1879 г. в Ганновере[1])), а абелевыми – Шоттки (родился в 1851 г., с 1902 г. в Берлине[2])).

Я называю только два эти имени, хотя на самом деле Вейерштрасс оказал сильное влияние на всех нас, выросших на другой почве, но так или иначе пришедших в своей работе к эллиптическим или каким-нибудь другим родственным им функциям. Достаточно вспомнить М. Нётера и меня самого.

В моих работах 1886–1889 гг. по гиперэллиптическим и абелевым функциям (Mathematische Annalen, тт. 27–36[3])) я перенес идею σ-функции на высшие случаи и, в частности, довел, как мне кажется, до полного завершения вейерштрассову идею разложения алгебраических функций, определенных на данной римановой поверхности, на простейшие множители и единицы. Я бы охотно рассказал об этом более подробно, но в рамках данной лекции это представляется совершенно невозможным[4]).

Напоследок я хотел бы уделить несколько слов ученице Вейерштрасса Софье Ковалевской, имя которой часто упоминается в литературе.

Софья Ковалевская родилась в 1850 г. в Москве и училась – мы можем проследить здесь лишь ее математическую судьбу – частным образом сначала у Кёнигсбергера в Гейдельберге, а затем в Берлине у Вейерштрасса, с которым очень сблизилась. Однако официальных лекций она посещать не могла, так как присутствовать на них вольнослушательницам тогда еще не разрешалось. В 1874 г. Ковалевская по представлению Вейерштрасса получила в Гёттингене in absentia[5]) докторскую степень за свою работу по дифференциальным уравнениям в частных производных (Журнал Крелля, т. 80). В этой работе Ковалевская показала, что любое линейное дифференциальное уравнение в частных производных с аналитическими коэффициентами имеет аналитическое же решение – реализация идей, заложенных в одной юношеской работе Вейерштрасса, опубликованной теперь в первом томе его Собрания сочинений[6]). В 1883 г. при содействии Миттаг-Лефлера она стала приват-

---

[1]) Умер в 1934 г. – *Примеч. пер.*

[2]) Умер в 1935 г. – *Примеч. пер.*

[3]) Klein F. Ges. Abh., т.3, Nr. XCV–XCVII.

[4]) См. также статьи, написанные для "Энциклопедии" Крацером и Виртингером "Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen" ("Абелевы функции и общие тета-функции", Enzykl., II B 7) и Бибербахом "Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen" ("Новейшие исследования по функциям комплексной переменной", там же, II C 4).

[5]) В отсутствие; здесь – заочно (*лат.*). – *Примеч. пер.*

[6]) Это не первый случай, когда женщина получает докторскую степень в Гёттингене. За сто лет до этого семнадцатилетняя Доротея Шлёцер получила докторскую степень за работу "De re metallica" о русском финансовом хозяйстве. – В дипломе Д. Шлёцер содержится красивая формулировка – "virgo erudita" ("просвещенная дева". – *Примеч. пер.*), которая позже была, к сожалению, заменена бессмысленным "domina doctissima" ("ученейшая госпожа". – *Примеч. пер.*).

доцентом, а в 1884 г. – профессором руководимого им частного университета в Стокгольме. С тех пор Ковалевская приобрела мировую известность и в 1889 г. – тоже по ходатайству Миттаг-Лефлера – получила Гран-при Парижской академии за исследование вращения тяжелого асимметричного волчка. Умерла Ковалевская в 1891 г. в Стокгольме.

По самой ее сути Ковалевскую абсолютно невозможно исчерпывающим образом охарактеризовать лишь ее математическими работами. Помимо всего прочего она писала романы, а также переживала их; она стояла также в центре движения за эмансипацию женщин[1]). Поэтому очень нелегко составить себе четкое представление о ее научном облике. По одну сторону стоят энтузиасты, прославляющие и превозносящие ее как героиню, по другую – скептики, склонные скорее осудить ее жизнь и работы. Конечно, ничего надежного нам не дает ни та и ни другая партия, ибо все мы очень хорошо знаем, как искажает истинный образ человека реклама и чрезмерное восхваление, с одной стороны, и слишком суровое порицание – с другой. Вероятно, самым ценным из всего, что было написано о ней, является некролог, который Миттаг-Лефлер посвятил ей в 16-м томе "Acta mathematica".

Мы, естественно, можем заняться здесь лишь небольшим участком ее жизненного пути, да и то вкратце. Для нас важную роль играет вопрос о значении ее математических работ. Первое, что здесь бросается в глаза, это то, что работы ее написаны по образцу работ Вейерштрасса и совершенно в его стиле, так что не видно, насколько независимыми, принадлежащими ей лично являются содержащиеся в них идеи[2]). Высказывались также сомнения в достоверности ее более поздних результатов: см. критику Вольтерра[3]) ее работы о кристаллах с двойным лучепреломлением, где она уличена в принципиальной ошибке (работа эта была представлена в качестве диссертации на получение права преподавания в высшей школе; опубликована в "Acta mathematica", 1883, т. 6); равным образом, не все удовлетворены и ее работой о вращении волчка.

Но как бы там ни было, одно несомненно: Софья Ковалевская соединяла в себе жгучий интерес к математике с большой сообразительностью и способностью к адаптации. Достойно восхищения, что несмотря на обилие интересов совсем иного характера и на жизнь, полную перемен, она столь многого добилась в математике. И в любом случае мы должны быть благодарны ей за то, что ей удалось вывести Вейерштрасса из обычного его

[1]) О ее жизни см. в вышедшей в "Reclams Universalbibliothek" биографии, написанной А.Х. Лефлер (сестрой Миттаг-Лефлера).

[2]) Недавно Вентшером и Шлезингером в 18-м томе "Jahresber. Deutsch. Math.-Ver." (1909, стр. 89 и далее, а также 93 и далее) напечатаны письма, посланные Вейерштрассом Гёттингенскому факультету по поводу ходатайства о присуждении ей докторской степени. В них Вейерштрасс подробно высказывается о тогдашних ее математических достижениях.

[3]) Acta Mathematica, 1892-93, т. 16, стр. 153 и далее.

состояния замкнутости, и за то, что образ этого учителя как живой встает перед нами в его письмах к близкой ученице.

После этого прецедента женское математическое образование пошло у нас в Германии гораздо более прямым путем; начиная с осени 1893 г. прусское правительство разрешило вольнослушательницам – поначалу в Гёттингене – посещение лекций. Первой женщиной, ставшей (в 1895 г.) доктором математики на основе обычных экзаменов, была Грейс Чизхольм, ныне г-жа Юнг[1]).

Изложив теорию функций комплексной переменной у Римана и Вейерштрасса и дав обзор дальнейшего ее развития, мы подошли к концу. Кстати сказать, случай с Ковалевской показывает нам, что математика вовлекается во все проблемы современного культурного развития. Здесь, в Гёттингене, мы не противимся ничему современному, но мы хотим, чтобы центром тяжести наших интересов была и продолжала оставаться наша работа.

---

[1]) Родилась в 1868 г; скончалась в 1953 г. – *Примеч. пер.*

Глава седьмая

БОЛЕЕ ГЛУБОКОЕ ПРОНИКНОВЕНИЕ В ПРИРОДУ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Дальнейшее развитие алгебраической геометрии

В третьей и четвертой главах нашей книги мы говорили о том впечатляющем прогрессе, который на базе проективных представлений был достигнут в теории алгебраических кривых, поверхностей и т.д. С тем, чтобы мы пока могли иметь дело со сравнительно несложными объектами – алгебраическими кривыми, я ограничу себя лишь двумя ключевыми понятиями: точками пересечения и соприкасающимися кривыми.

Давайте вообразим себе простейший случай, к которому я обращаюсь с неизменной охотой и которого мы в свое время уже касались: случай плоской кривой третьего порядка C_3. Мы знаем, что:

а) Все кривые C_3, проходящие через восемь фиксированных точек, пересекаются и еще в одной – девятой – точке.

б) Любая плоская кривая C_3 имеет девять точек перегиба, образующих любопытную конфигурацию: они по три лежат на одной прямой – так называемой прямой перегиба; стало быть, имеется двенадцать таких прямых.

Мы имели также случай говорить о двадцати восьми двойных касательных к кривым C_4.

В 1857 г. в свет выходит большая работа Римана по *теории абелевых функций,* в которой он совсем по-иному ставит вопросы, ответы на которые геометры предшествующей эпохи искали с помощью труднейших и утомительнейших исследований. И вот, благодаря работе Римана, эти унаследованные нами результаты их труда наполнились новым и необычайно важным содержанием.

Исследуя алгебраические уравнения

$$F(\zeta, z) = 0,$$

Риман фактически занимается плоскими алгебраическими кривыми, так как ζ и z можно, например, считать прямоугольными координатами. Придавать ζ и z также и комплексные значения вошло в обычай еще до Римана, но он внес в этот вопрос следующие новшества:

1) Риман стал рассматривать связанный с данной "кривой" *абелев интеграл* $\int R(\zeta, z)\,dz$, что привело к установлению теснейшей связи между "теоремой Абеля" и теоремами о точках пересечения, а также – вследствие периодичности абелевых интегралов – к теории соприкасающихся кривых;

2) он обратился к идее *бирациональных преобразований,* в соответствии с которой кривые $F(\zeta,z)=0$ и $F_1(\zeta_1,z_1)=0$, у которых ζ и z могут быть рационально выражены через ζ_1 и z_1, а ζ_1 и z_1 – через ζ и z, объединяются в один класс. В дальнейшем мы прокомментируем все это более подробно, но еще до того я хочу сделать несколько замечаний историко-биографического характера.

Риман с самого начала прекрасно понимал значение своих теорий для алгебраической геометрии. Но в своих лекциях сколько-нибудь более детально он рассмотрел лишь один из самых простых случаев – плоские кривые C_4. К тому же даже это стало известно лишь гораздо позже, в результате публикации тетрадей с конспектами его лекций. Для того, чтобы с должным размахом привести всю эту проблематику в действие и сделать ее всеобщим достоянием, нужен был человек, умеющий производить впечатление на окружающих, и математиком, которому удалось справиться со всеми этими задачами, оказался Клебш.

Клебш родился в 1833 г. в Кёнигсберге и сформировался в тамошней математической школе. Лекций Якоби он уже не слушал, но тем теснее он примкнул к ученику Якоби Гессе. Параллельно Клебш с усердием учился у Франца Неймана, активные занятия которого математической физикой и дали Клебшу первый толчок к самостоятельной работе. Свидетельством этому является его теория упругости твердых тел, появившаяся в печати в 1862 г., в то время, когда он работал в политехнической школе в Карлсруэ (Клебш преподавал здесь с 1858-го по 1863-й год, т.е. от 25- до 30-летнего возраста). Однако вскоре интерес к чистой математике взял у Клебша верх над всем остальным. Он обращается к алгебраической геометрии и сочетает, занимаясь ею, следование традициям Якоби и Штейнера с изучением новых для того времени работ трех английских светил – Кэли, Сильвестра и Сальмона. И вот к этому присоединяется мощный импульс, идущий от Римана. Примерно так может быть охарактеризован гиссенский период (1863 – 1868 гг.) научной деятельности Клебша и короткий, последовавший за ним период пребывания в Гёттингене (1868 – 1872 гг.), где он, находясь в должности ректора Georgia Augusta[1]), внезапно, в возрасте 39 лет скончался от дифтерита.

Серия работ Клебша, относящихся к рассматриваемой нами теме, открывается привлекшей всеобщее внимание статьей "Über die Anwendung der Abelschen Funktionen in der Geometrie" ("О применении абелевых

---

[1]) Имеется в виду Гёттингенский университет, носящий имя основавшего его в 1734 г. Георга II Августа (1683 – 1760), английского короля из Ганноверской династии. Георг II Август основал также Британский музей (1754 г.). – *Примеч. пер.*

функций в геометрии"), опубликованной в 63-м томе Журнала Крелля (1863 – 1864). Прежде чем на нескольких простых примерах пояснить суть его работы, я хотел бы обратить внимание, сколько энергии сумел вложить Клебш в дело широчайшего распространения своего подхода. Подобно Якоби Клебш был милостию божьей учителем, обладавшим умением привлекать к себе молодые таланты и делать из них самостоятельных исследователей. Сделанное им может быть правильно оценено лишь в том случае, если наряду с его собственными работами мы примем во внимание и то, что вышло из "школы Клебша". Из числа его учеников я могу привести только самых значительных – его ближайшего сотрудника Гордана, о котором мы еще будем говорить особо, и, конечно, Брилля и Нётера. Наконец, и я сам в определенной степени принадлежу к этому кругу, хотя я сравнительно поздно – только здесь, в Гёттингене – испытал влияние Клебша, с тем чтобы потом более непосредственным образом обратиться к Риману. По моему мнению, важнейшей чертой, обусловливавшей действенность Клебша, была моральная сила, с которой он влиял на своих учеников и с помощью которой ему удавалось внушать нам наряду с глубоким интересом к науке веру в собственные силы. В этом отношении он действовал совершенно иначе, чем Вейерштрасс, чье интеллектуальное превосходство, как я уже не раз отмечал, скорее подавляло слушателей, чем ободряло их к собственному творчеству.

Особое значение для более молодого поколения имел основанный в 1868 г. Клебшем и К.Нейманом журнал "Mathematische Annalen", ставший органом новой школы и осуществлявший живую связь со всеми математиками того же самого направления – в частности, с зарубежными (см. статью о научных работах Клебша в "Math. Annalen", т. 7, написанную "некоторыми из его друзей"). Когда Клебш внезапно скончался (в 1872 г.), мы, избравшие его своим руководителем, были, естественно, втянуты в сильные личные распри с многими из остальных математиков. Недоверие к нам зашло настолько далеко, что "Mathematische Annalen", в которых мы обыкновенно помещали свои работы, были фактически объявлены вне закона и внутри страны удерживали позицию лишь в узком кругу тесно связанных друг с другом учеников и приверженцев Клебша. Но мы всегда старались держать нашу научную установку превыше партий и, постепенно преодолевая антагонизм, добились всеобщего признания научных начинаний Клебша. А "Annalen" в результате проявленной твердости постепенно превратились в содержательнейший математический журнал [1]).

Чтобы начать с разъяснения по существу дела, я обращусь к одному элементарному примеру, демонстрирующему всю новизну и красоту хода идей Клебша и в то же самое время достаточно удобному и понятному [2]).

---

[1]) См. изданные в 1898 и соответственно в 1921 гг. оглавления тт. 1 – 50 и 51 – 80.

[2]) У самого Клебша и в его Лекциях, начавших в 1875 г. выходить под редакцией Линдемана, имеется большое число ненужных промежуточных вычислений, устанавливающих связь с восходящим к Якоби аппаратом, основанным на использовании формул.

Начнем с плоской кривой третьего порядка C_3. Для этой кривой риманово число p ("род") равняется единице и соответствующие абелевы интегралы превращаются в эллиптические, так что мы оказываемся на хорошо знакомой почве. Простоты ради мы представим себе эту C_3 спроектированной таким образом, чтобы уравнение ее приняло вейерштрассову нормальную форму

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

(см. стр. 55) или, что более удобно, –

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Чтобы иметь возможность исследовать, как эта кривая ведет себя на бесконечности, мы приведем ее уравнение к однородному виду, положив

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Тогда ее уравнение примет вид

$$x_2^2x_3 = 4x_1^3 - g_2x_2x_3^2 - g_3x_3^3.$$

При $x_3 = 0$ получается, что $x_1^3 = 0$. Это означает, что бесконечно удаленная прямая $x_3 = 0$ является касательной перегиба, касающейся кривой C_3 в бесконечно удаленной точке оси y (прямой $x_1 = 0$). Ось x является так называемой "гармонической полярой", отвечающей этой точке перегиба. Начало координат выбрано на этой оси так, чтобы в выражении для y^2 отсутствовал член с x^2. Это все особенности расположения нашей кривой C_3, обусловленные особой формой ее уравнения (рис. 20) [1]. Соответствующим этой кривой "всюду конечным эллиптическим интегралом" называется интеграл

$$u = \int_\infty^x \frac{dx}{y} = \int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

распространенный по кривой, рассматриваемой как совокупность всех вещественных и комплексных точек, удовлетворяющих ее уравнению. В качестве нижнего предела интеграла мы берем, как это указано в формуле, бесконечно удаленную точку перегиба. Тогда значение интеграла в этой точке будет равно нулю. Если взять интеграл вдоль вещественной части нашей кривой, то получится вещественный период ω_1. Если мы к u_0 при-

[1]) См. K l e i n F. Vorlesungen über höhere Geometrie, 3-е изд., Берлин, 1926, стр. 149 и далее. [Русский перевод: К л е й н Ф. Высшая геометрия. – М.; Л.: Гостехиздат, 1939. – *Примеч. пер.*]

бавим ω_1, или же мнимый период ω_2, или вообще линейную комбинацию $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, где m_1 и m_2 – произвольные целые числа, то этим эквивалентным точкам плоскости u будет отвечать одна и та же точка кривой. И обратно, каждая точка кривой C_3 определяет бесконечное число точек $u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ плоскости u. Таким образом, вся рассматриваемая кривая оказалась отображенной на один-единственный параллелограмм периодов, в чем и находит свое отражение тот факт, что интеграл наш "всюду конечен". В самом деле, если бы это было не так, то образ кривой на плоскости u должен был бы простираться в бесконечность.

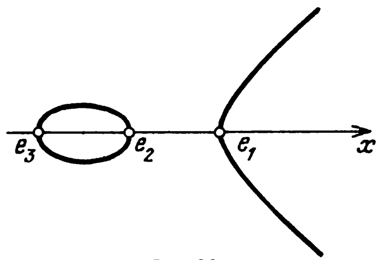


Рис. 20

Пока все это представляет собой лишь перевод привычных понятий на язык кривых. Но сейчас мы придадим делу существенно новый поворот, спросив, в каком случае три точки $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ и $u^{(3)}$ рассматриваемой кривой C_3 лежат на одной прямой

$$ax + by + c = 0,$$

т.е. при каких u выполняется равенство

$$a\wp(u) + b\wp'(u) + c = 0.$$

Утверждение *теоремы Абеля* равносильно утверждению, что это имеет место тогда и только тогда, когда

$$u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} \equiv 0 \qquad (\mathrm{modd}\, \omega_1, \omega_2).$$

Это получается следующим образом. Линейная функция $ax + by + c$, являющаяся как функция u двоякопериодической функцией с нулями $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ и $u^{(3)}$, имеет в точке $u = 0$ полюс третьего порядка; с другой стороны, согласно теореме Абеля сумма нулей произвольной двоякопериодической функции сравнима по модулю периодов с суммой полюсов этой функции [1]). –

---

[1]) Что это условие также и достаточно, вытекает из возможности представить эллиптическую функцию с заданными нулями и полюсами при помощи $\sigma(u)$. См., например, F r i c k e. Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, т. 1, раздел I, гл. 3, § 7.

Точно таким же способом доказывается, что для того, чтобы шесть точек кривой C_3 лежали на коническом сечении, необходимо, чтобы было выполнено сравнение

$$u^{(1)} + u^{(2)} + \ldots + u^{(6)} \equiv 0 \qquad (\mathrm{modd}\ \omega_1, \omega_2)$$

и т.д.

Отсюда в качестве почти тривиальных следствий получаются все результаты относительно кривых, соприкасающихся с данной кривой C_3, которые геометрически выводились с таким большим трудом. Возьмем,

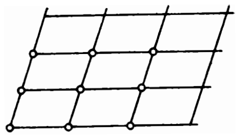


Рис. 21

к примеру, *теорию точек перегиба.* Если три точки $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ и $u^{(3)}$ сливаются в одну-единственную точку u, и, значит, проходящая через них прямая оказывается касательной перегиба, то

$$3u \equiv 0 \qquad (\mathrm{modd}\ \omega_1, \omega_2),$$

и, следовательно

$$u = \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{3},$$

где m_1 и m_2 независимо друг от друга пробегают полную систему вычетов по модулю 3. Это означает, что существует девять точек перегиба

$$u = \begin{cases} 0, & \dfrac{\omega_1}{3}, & \dfrac{2\omega_1}{3}, \\[2ex] \dfrac{\omega_2}{3}, & \dfrac{\omega_2 + \omega_1}{3}, & \dfrac{\omega_2 + 2\omega_1}{3}, \\[2ex] \dfrac{2\omega_2}{3}, & \dfrac{2\omega_2 + \omega_1}{3}, & \dfrac{2\omega_2 + 2\omega_1}{3} \end{cases}$$

(рис. 21).

При этом мы сразу можем сказать, **к а к и е** три точки перегиба лежат на одной прямой. Если на таблицу

0, 0	0, 1	0, 2
1, 0	1, 1	1, 2
2, 0	2, 1	2, 2

значений m_1 и m_2 мы будем смотреть как на определитель, то можно будет сказать, что на одной прямой лежат:

три точки каждой строки;

три точки каждого столбца;

три точки, отвечающие каждому положительному члену определителя (например, 0, 1; 1, 2; 2, 0);

три точки, отвечающие каждому отрицательному члену определителя,

ибо в этих случаях как сумма значений m_1, так и сумма значений m_2 всегда делится на 3.

Таким образом, мы находим двенадцать линий перегиба, причем они сами так группируются по три, что получается четыре трехсторонника перегиба, найденные Гессе (см. стр. 188). Кроме того, мы видим, что найденное Гессе уравнение девятой степени для отыскания точек перегиба не представляет собой ничего принципиально нового, а является не чем иным, как уравнением деления на 3 аргумента эллиптических функций.

Если рассматривать точки пересечения данной кривой C_3 не с прямой, а с коническим сечением, то можно без всяких вычислений, с помощью аналогичных рассуждений получить результаты Штейнера о соприкасающихся конических сечениях и т.д. и т.п.

На примере кривой C_3 можно разъяснить и понятие *бирационального преобразования.*

Пусть в пространстве пересекаются друг с другом две поверхности второго порядка. Тогда кривая их пересечения будет пространственной кривой четвертого порядка C_4 (так как любая плоскость пересекается с ней в четырех точках). Эту кривую C_4 мы спроектируем на плоскость двумя способами (рис. 22). Сначала в качестве центра проекции мы возьмем точку $O_{\rm I}$, лежащую на C_4; тогда в плоскости I[1]) мы получим кривую C_3. Но если мы спроектируем кривую C_4 на плоскость II из точки $O_{\rm II}$, лежащей вне C_4, то получим плоскую кривую C_4 (которая, как нетрудно показать, имеет две двойные точки). Действительно, так как точка $O_{\rm II}$ не принадлежит пространственной кривой C_4, то всякая плоскость, проходящая через $O_{\rm II}$, пересекает эту кривую в четырех точках. Следовательно, прямая, по которой эта плоскость пересекается с плоскостью II, также будет пересе-

---

[1]) На чертеже обе плоскости совпадают друг с другом.

каться с проекцией кривой C_4 в четырех точках. Если же точка O_{I} принадлежит кривой C_4, то одна из четырех точек пересечения этой кривой с произвольной плоскостью, проходящей через точку O_{I}, будет самой этой точкой. Поэтому прямая, по которой эта плоскость пересекается с плоскостью I, будет иметь с проекцией пространственной кривой только три общие точки. Обратим теперь внимание на тот факт, что кривая C_3 в плоскости I и кривая C_4 в плоскости II находятся во взаимно однозначном соответствии. В самом деле, каждой точке плоской кривой C_4 поставлена в соответствие вполне определенная точка пространственной кривой C_4, а этой последней – вполне определенная точка кривой C_3, и наоборот.

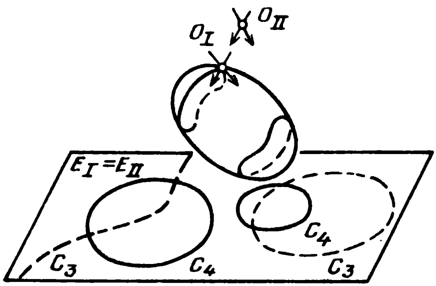


Рис. 22

Таким образом, мы видим, что порядки кривых, находящихся друг с другом в бирациональном отношении, вполне могут оказываться различными.

А теперь я хотел бы разъяснить одно естественное и, к сожалению, распространенное в литературе недоразумение. Конечно, две плоскости тоже могут находиться друг с другом в бирациональном соответствии – кстати сказать, бирациональные соответствия плоскостей называются ***кремоновыми преобразованиями*** по имени Кремоны, итальянского математика, поддерживавшего с Клебшем личные отношения, – и тогда любые две лежащие в этих плоскостях кривые eo ipso [1]) будут также поставлены в бирациональное соответствие. Обратное, однако, совершенно не обязательно; взаимно однозначное соответствие между двумя плоскими кривыми может не индуцироваться никаким взаимно однозначным соответствием между содержащими их плоскостями. Если мы зафиксируем какую-нибудь поверхность второго порядка F_2, содержащую нашу пространственную кривую, но не проходящую через точку O_{II}, то проектирования с центрами в O_{I} и O_{II} позволят нам установить соответствие и между плоскостями I и II. Каждой точке плоскости I будет соответствовать одна точка

[1]) Тем самым (*лат.*). – *Примеч. пер.*

поверхности F_2, а этой последней – одна точка плоскости II. Но в обратную сторону, каждой точке плоскости II будут отвечать две точки поверхности F_2 и, значит, две точки плоскости I. Мы, таким образом, видим, что бирациональное соответствие двух плоских кривых может порождаться многозначным соответствием между содержащими эти кривые плоскостями.

Я объясняю все это с такими подробностями потому, что, основываясь на неправильном понимании взаимоотношений между бирациональными соответствиями плоскостей и кривых, до сих пор иногда утверждают, будто весь риманов подход содержался уже в теории Кремоны. [См., например, предисловие Эрмита к книге Аппеля и Гурса "Théorie des fonctions algébriques et de leurs integrales" ("Теория алгебраических функций и их интегралов", Париж, 1895).]

По Риману и Клебшу кривые, получающиеся друг из друга с помощью бирациональных преобразований, объединяются в один класс; эти кривые имеют, в частности, о д и н и т о т ж е р о д. Таким образом, наряду с порядком n, классом k, количеством двойных точек d, точек возврата r, двойных касательных t и касательных перегиба w появляется еще одна характеристика кривой – ее род p.

Этот род связан с только что перечисленными привычными для нас геометрическими характеристиками формулой

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$$

или двойственной формулой

$$p = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - t - w.$$

При этом предполагается, как это обычно принято в формулах Плюккера, что рассматриваемая кривая C_n имеет в качестве особых точек только простые двойные точки, простые точки заострения и т.д. Для рассматривавшегося нами выше случая плоской кривой C_4 имеем $d = 2$, $r = 0$ и, значит, $p = 1$; то же самое значение p имеет и для кривой C_3 без двойных точек.

То, что выше было сделано для кривых третьего порядка, переносится на произвольные алгебраические кривые n-го порядка $f(x, y) = 0$. При этом вместо о д н о г о всюду конечного эллиптического интеграла появляется p всюду конечных абелевых интегралов $u_1, \ldots, u_p$.

К сожалению, имеющую здесь место ситуацию я могу описать лишь в самых общих чертах.

Эти p всюду конечных интегралов имеют вид

$$\int \frac{\varphi(x, y)}{\partial f/\partial y}\, dx,$$

где $\varphi(x, y)$ – многочлен $(n-3)$-й степени, имеющий двойные точки и точки возврата кривой простыми нулями, а в остальном произвольный. На первый взгляд кажется, что в точках, где знаменатель $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ обращается в нуль, интеграл имеет особенность. Но именно в этих точках при движении вдоль кривой обращается в нуль и dx (это точки с вертикальными касательными). В том, что точки эти на самом деле безвредны, проще всего убедиться, заметив, что для точек кривой выполняется равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_x dx + f_y dy = 0,$$

а значит, и равенство

$$\frac{dx}{f_y} = -\frac{dy}{f_x},$$

где f_x не равняется нулю, когда обращается в нуль f_y. В бесконечно удаленной точке кривой C_n интеграл тоже остается конечным, поскольку ввиду того, что степень числителя $\varphi(x, y)$ равна $n-3$, а степень знаменателя f_y не меньше $n-1$, на бесконечности интеграл ведет себя как $\int\dfrac{dx}{x^2}$; именно поэтому степень $\varphi(x, y)$ и должна быть не выше $n-3$. Многочлен степени n от двух переменных x и y линейно зависит от $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ коэффициентов. Подставляя сюда $n-3$ вместо n и вычитая затем число двойных точек и точек возврата, мы получим, что в нашем распоряжении имеется точно $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2} - d - r = p$ параметров. Это и дает p всюду конечных абелевых интегралов. Поэтому среди φ необходимо должны быть многочлены, степень которых в точности равна $n-3$. –

Каждый из p конечных интегралов имеет $2p$ периодов. Чтобы не слишком уж растворяться во всеобщности и по возможности сохранить наглядность, я поясню связь, существующую между теоремой Абеля и теоремами о точках пересечения, на примере плоской кривой C_4 без двойных точек, когда $p = 3$ и

$$\varphi(x, y) = ax + by + c.$$

Следовательно, в этом случае мы имеем три всюду конечных интеграла

$$u_1 = \int\frac{x\,dx}{f_y}, \qquad u_2 = \int\frac{y\,dx}{f_y}, \qquad u_3 = \int\frac{dx}{f_y}.$$

Каждая кривая C_n пересекается с нашей кривой C_4 в $4n$ точках. Снова поставим обратный вопрос: при каких условиях $4n$ точек кривой C_4 принадлежат одной кривой C_n?

Из теоремы Абеля мы получаем (надлежащим образом выбрав нижние пределы интегрирования), что для этого должны выполняться сравнения:

$$u_1^1 + \ldots + u_1^{(4n)} \equiv 0 \qquad (\mathrm{modd}\ \omega_{11}, \ldots, \omega_{16}),$$

$$u_2^{(1)} + \ldots + u_2^{(4n)} \equiv 0 \qquad (\mathrm{modd}\ \omega_{21}, \ldots, \omega_{26}),$$

$$u_3^{(1)} + \ldots + u_3^{(4n)} \equiv 0 \qquad (\mathrm{modd}\ \omega_{31}, \ldots, \omega_{36}).$$

Следующий шаг должен состоять в том, чтобы выяснить, когда три эти сравнения независимы друг от друга. Если же мы будем интересоваться соприкасающимися кривыми, то нам придется исследовать эти сравнения, подобно тому как это делалось выше в случае кривой C_3. – Все это является примерами вопросов, в то время заполнявших значительную часть математической литературы и приведших к изящнейшим теоремам об алгебраических кривых.

Продолжим теперь обсуждение работы Клебша 1863-го года. Прежде всего я должен разъяснить некоторые чисто формальные вещи, а именно – употребляемый Клебшем однородный способ записи интегралов первого рода. Я сделаю это на примере кривой C_4. С введением однородных координат интегралы

$$\int \frac{x\,dx}{f_y}, \qquad \int \frac{y\,dx}{f_y}, \qquad \int \frac{dx}{f_y}$$

приобретают симметричный вид, из которого, кстати сказать, их конечность усматривается почти непосредственно. Пусть

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}, \qquad f(x, y) = \frac{F(x_1, x_2, x_3)}{x_3^4}.$$

Тогда

$$dx = \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{x_3^2},$$

$$f_y = \frac{1}{x_3^4} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \frac{x_2}{x_3}} = \frac{1}{x_3^3} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2}.$$

Введя сокращенное обозначение

$$\frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{\dfrac{\partial F}{\partial x_2}} = d\tilde{\omega},$$

мы получим

$$u_i = \int x_i d\tilde{\omega}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

На самом деле в формальном плане это лишь первое продвижение, поскольку хотя бы с чисто внешней стороны переменной x_2 отдано в $d\tilde{\omega}$ известное предпочтение. Однако мы убедимся сейчас, что эта асимметрия легко устраняется.

На кривой C_4 выполняется соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3 = 0,$$

а по теореме Эйлера

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} = 4F = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2} : \frac{\partial F}{\partial x_3} = (x_2 dx_3 - x_3 dx_2) :$$

$$: (x_3 dx_1 - x_1 dx_3) : (x_1 dx_2 - x_2 dx_1),$$

откуда следует, что для $d\tilde{\omega}$ имеют место три равносильных выражения

$$d\tilde{\omega} = \frac{x_k dx_l - x_l dx_k}{F_{x_m}}, \qquad k, l, m = 1, 2, 3.$$

Три эти выражения Клебш (чтобы не угождать совсем уж ни одной из партий) собирает, следуя Аронгольду, в следующее одно:

$$d\tilde{\omega} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & x_1 & dx_1 \\ c_2 & x_2 & dx_2 \\ c_3 & x_3 & dx_3 \end{vmatrix}}{\sum\limits_{i=1}^{3} c_i F_{x_i}}.$$

Величины c_i входят сюда лишь формально, и потому ими можно распоряжаться по произволу.

Полагая, в частности,

$$c_1 = 1,\quad c_2 = 0,\quad c_3 = 0 \qquad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \qquad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \\ 0, \\ 1 \end{cases}$$

мы получим для $d\tilde{\omega}$ три исходных выражения.

Три наших интеграла мы теперь можем записать в виде

$$u_i = \int x_i \frac{|\, c\ x\ dx \,|}{\sum\limits_{\lambda=1}^{3} c_\lambda F_{x_\lambda}}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Тем самым нам удалось достичь всего, что было обещано по части формального совершенства. Симметрия обеспечивает конечность рассматриваемых интегралов. Действительно, в бесконечно удаленных точках кривой C_4, т.е. при $x_3 = 0$, интеграл конечен, потому что он конечен при $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$. Равенство

$$\sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda F_{x_\lambda} = 0$$

представляет собой уравнение поляры точки (c_1, c_2, c_3) относительно кривой $F = 0$, и, следовательно, оно удовлетворяется во всех точках, где проходящие через точку (c_1, c_2, c_3) касательные касаются кривой. Поэтому надлежащим выбором точки (c_1, c_2, c_3) всегда можно добиться того, чтобы не оставалось никаких сомнений по поводу конечности интегралов u_1, u_2, u_3 в любой наперед взятой точке.

Я хочу еще показать, каким образом для кривой n-го порядка $F = 0$ с d двойными точками и r точками заострения (Клебш только этим случаем и ограничивается) могут быть явно выписаны $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$ всюду конечных абелевых интегралов. Оказывается, что

$$u_1 = \int \varphi_1 \, d\tilde{\omega}, \ \ldots, \ u_p = \int \varphi_p \, d\tilde{\omega},$$

где, как и выше,

$$d\tilde{\omega} = \frac{|\, c\ x\ dx \,|}{\sum\limits_{\lambda=1}^{3} c_\lambda F_{x_\lambda}},$$

а $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ – однородные многочлены (формы) от переменных x_1, x_2 и x_3, обращающиеся в нуль в двойных точках кривой и в точках заострения. Формы φ такого рода зависят в точности от p линейно независимых констант (см. стр. 335), и потому среди них можно выбрать p линейно независимых форм $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Каждая из этих форм будет иметь с кривой C_n ровно $n(n-3)$ точек пересечения, и, значит, кроме двойных точек и точек возврата кривой, которые мы из рассмотрения исключаем, будет обращаться в нуль в

$$n(n-3) - 2d - 2r = 2p - 2$$

точках кривой.

Конечно, наши формулы справедливы и при $p = 1$, но в этом случае нетривиальных форм φ нет, и с точностью до произвольного множителя существует лишь один всюду конечный интеграл

$$u = \int d\widetilde{\omega}.$$

Независимо это можно проверить на вейерштрассовской нормальной форме.

Заметим также, что из

$$u_1 = \int \varphi_1 \, d\widetilde{\omega}, \ \ldots, \ u_p = \int \varphi_p \, d\widetilde{\omega}$$

следует, что

$$du_1 : du_2 : \ \ldots \ : du_p = \varphi_1 : \varphi_2 : \ \ldots \ : \varphi_p.$$

Употребленная здесь буква φ общепринята; она была выбрана еще Риманом. Обычный способ выражаться состоит в том, что говорят о "φ-формах, ассоциированных с данной алгебраической кривой".

Я был вынужден сделать этот небольшой экскурс в формальные преобразования, потому что без него было бы трудно ориентироваться в литературе, последовавшей за работами Клебша, – в частности, в его "Vorlesungen über die Geometrie" ("Лекциях по геометрии"), изданных в 1875/76 г. Линдеманом.

Нужно отделаться от впечатления, что однородный способ записи представляет собой нечто неопределенное или во всяком случае труднодоступное. Этот формальный аппарат давно уже стал привычным в проективной геометрии или – говоря алгебраически – в теории инвариантов тернарных форм. В частности, следует отчетливо уяснить себе, что для каждой кривой, изображенной на чертеже, интегралы u представляют собой нечто вполне конкретное, и в теоремах о соприкасающихся кривых и тому подобном, вытекающих из теории этих интегралов, можно удостовериться при помощи чертежа. Подобного рода работу я проделал в одной из статей (см. Math. Annalen, 1874, т. 7) для кривых третьего порядка, или, точнее, –

что оказалось более удобным – для кривых третьего класса, предварительно выполнив преобразование двойственности. Мнимые элементы кривой я интерпретировал при этом на "новых римановых поверхностях", о которых говорилось в начале четвертой главы[1]. Для кривых C_4 (точнее, для кривых четвертого класса) я тоже проделал эту работу на чертеже; см. Math. Annalen, 1876, т. 10; 1877, т. 11[2]. Я, однако, не могу комментировать их здесь, ибо и случая $p = 3$ я коснулся лишь крайне поверхностно. Отмечу только, что все факты, касающиеся группировки двойных касательных, оказываются столь же арифметически-элементарными, как и рассмотренные выше свойства точек перегиба кривых C_3.

Клебш не удовлетворился геометрической интерпретацией результатов Римана; напротив, он задался целью заложить на алгебраико-геометрической основе новый фундамент теории абелевых функций! Так возникла книга Клебша и Гордана "Theorie der Abelschen Funktionen" ("Теория абелевых функций"), вышедшая в 1866 г.

Чтобы отдать должное выдающимся результатам, содержащимся в этой книге, нужно принять во внимание, что вейерштрассовой теории функций, отличающейся во многом большей простотой и систематичностью, а также значительно большей строгостью, тогда еще не существовало, а основа римановой теории – доказательства существования, выведенные из принципа Дирихле, – считалась не только чуждой природе предмета, но еще и сомнительной. Особого упоминания заслуживает энтузиазм, проявленный авторами в отношении проективной геометрии и теории инвариантов линейных преобразований как преддверия теории бирациональных преобразований. Он нашел свое отражение в заключительной фразе предисловия: "Наконец и эта дисциплина (теория абелевых функций) находит свое завершение в тех ветвях новейшей алгебры, которым, безусловно, предстоит стать центром всего современного математического развития".

Я не могу входить здесь в детали этой книги и отсылаю к подробному обзору Брилля и Нётера "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit" ("Развитие теории алгебраических функций в прошлом и в наши дни"), опубликованному в третьем томе "Jahresber. Deutsch. Math.-Ver." (1894), где работы интересующего нас направления подвергнуты анализу с общей точки зрения. Я ограничусь тем, что расскажу о Гордане, который по инициативе Клебша переехал в Гиссен, чтобы помочь ему вникнуть в мир римановских идей. (Степень участия в книге каждого из ее авторов учету не поддается.) Гордан родился в 1837 г. в Бреславле. К занятиям математикой его сильно подтолкнуло изучение работ Якоби. Один год Гордан провел в Гёттингене (1862–1863 гг.). Однако Римана он видел очень мало, так как тот через несколько недель после приезда Гордана заболел и вынужден был прервать преподавание. Занимаясь самостоятельно, Гордан вместе с Томе и Шерингом пытался вник-

---

[1] См. выше стр. 159 и далее, а также Klein F. Ges. Abh., т. 2, стр. 89 и далее.
[2] Klein F. Ges. Abh., т. 2, Nr. XXXVIII–XLI.

нуть в суть римановых теорий. Однако мир идей Римана был создан не для него. По своим задаткам Гордан испытывал гораздо более сильное влечение к формальной стороне теории инвариантов (с которой он познакомился через Клебша). Вскоре Гордан достиг здесь крупных успехов и до самой своей смерти (1912 г.) оставался в этой области признанным главой. С именем Гордана прочно связана важная теорема о том, что для каждой бинарной формы $f(x, y)$ существует конечная система рациональных инвариантов и ковариантов, через которые все остальные рациональные инварианты и коварианты могут быть выражены целым рациональным образом (1868/1869, Журнал Крелля, т. 69, стр. 323 и далее; Math. Annalen, т. 2, стр. 227 и далее). Однако связями этих вопросов с теорией абелевых функций Гордан уже не занимался. Научная биография Гордана, написанная Нётером, опубликована в 75-м томе "Mathematische Annalen" (1914 г.).

Поначалу влияние книги Клебша и Гордана проявилось скорее в чисто алгебраическом плане, чем в теории абелевых функций. Вероятно, этому способствовали, поддерживая друг друга, склонность к систематике и недостаточная широта знаний в общей массе математиков. В первую очередь речь пошла о том, чтобы исчерпывающим образом разрешить весь комплекс проблем, возникших в теории алгебраических кривых в связи с выдвижением на первый план бирациональных преобразований, а заодно и создать строгую и общую, т.е. охватывающую все специальные случаи (а значит, и все типы особых точек) основу этой теории. Важнейшей работой, выполненной в этом направлении, является статья Брилля и Нётера "Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie" ("Об алгебраических функциях и их применении в геометрии", Math. Annalen, 1874, т. 7). [Сегодня мы бы сказали, что в этой статье "тело" $R(\zeta, z)$ изучается независимо от выбора в нем порождающих его "произвольных" функций ζ и z.] Примечательны сходство и различие в названиях этой работы и работы Клебша 1863-го года ("О применении абелевых функций в геометрии"). Весь материал, связанный с "теоремой Абеля", обосновывается строго выдержанной процедурой исключения; в то же время более далекие следствия, связанные с периодичностью абелевых интегралов, остаются в стороне.

Здесь мы должны обсудить одну важную теорему, которой Брилль и Нётер дают чисто алгебраическое доказательство (к сожалению, я не могу здесь его привести). Я имею в виду так называемую *теорему Римана – Роха* о числе констант, от которых зависит алгебраическая функция $F(\zeta, z)$, всюду принимающая конечные значения, за исключением m наперед заданных точек данной кривой C_n. Теорема утверждает, что самая общая такая функция имеет вид

$$F = c_1F_1 + c_2F_2 + \ldots + c_\mu F_\mu + c_{\mu+1},$$

где

$$\mu = m - p + \tau.$$

Здесь τ означает число "линейно независимых" форм φ, обращающихся в нуль в m данных точках, а p – род кривой. – Мы поясним эту теорему на примере.

Пусть дана кривая C_4 без двойных точек. В этом случае $p = 3$, а φ являются прямыми.

При m, пробегающем значения 1, 2, 3, соответственно имеем

m	1	2	3
τ	2	1	1 или 0
μ	0	0	1 или 0

Таким образом, в трех случаях (когда $\mu = 0$) не существует алгебраических функций, обращающихся в бесконечность только в данных точках кривой. При $m = 3$ такая функция существует тогда и только тогда, когда эти три точки лежат на одной прямой. В этом случае искомая функция строится легко. В самом деле, пусть данные три точки лежат на прямой $v = 0$. Прямая $v = 0$ пересекает кривую C_4 еще в одной, четвертой, точке. Проведем через эту точку какую-нибудь другую прямую $u = 0$. Тогда функция

$$F_1 = \frac{u}{v}$$

и даст нам решение нашей задачи.

Все это показывает, насколько тесная связь существует между формами φ и вопросами разыскания инвариантов произвольных бирациональных преобразований.

И вот совершается удивительный поворот сознания, поворот, начатый еще Риманом и окончательно завершенный Г. Вебером и Нётером. Заключительной фразе предисловия к книге Клебша и Гордана этот поворот придал смысл, о котором авторы, безусловно, в то время даже и не помышляли.

Представим себе пространство $p-1$ измерений и будем обозначать его однородные координаты через $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Нашу плоскую кривую C_n с уравнением $f(\zeta, z) = 0$ или – в однородных координатах – $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ мы перенесем в это пространство посредством бирационального преобразования, получающегося приравниванием координат $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ соответствующим φ-формам и тем самым сопоставляющего каждой точке нашей кривой некоторую точку $(p-1)$-мерного пространства R_{p-1}. Так как каждая форма φ имеет на нашей кривой $2p-2$ собственных нулей (см. формулу на стр. 339), то тем самым мы получим в R_{p-1} кривую C_{2p-2} порядка $2p-2$. Вместо первоначальной кривой C_n мы можем, следовательно, изучать бирационально ей эквивалентную кривую C_{2p-2}. Последняя кривая называется *нормальной кривой* [1].

[1] В современной литературе принят термин "каноническая кривая". – *Примеч. ред. русского перевода.*

Вскоре мы увидим, какие огромные преимущества достигаются переходом к нормальной кривой. Но сначала я снова приведу несколько примеров.

$p = 3$. В этом случае нормальная кривая представляет собой плоскую кривую C_4, которой мы занимались выше; в самом деле, для этой кривой, как мы знаем, выполняется соотношение

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = x_1 : x_2 : x_3.$$

$p = 4$. Нормальной кривой является кривая C_6 в пространстве R_3. Можно показать, что эта кривая является линией пересечения поверхностей второго и третьего порядков.

$p = 5$. Нормальной кривой является кривая C_8 в пространстве R_4, представляющая собой пересечение трех гиперповерхностей второго порядка.

$p = 2$. В этом случае в качестве нормальной кривой мы получаем дважды покрытую прямую с шестью точками ветвления, так что здесь мы имеем не взаимно однозначное, т.е. 1-1-значное, а 1-2-значное соответствие между исходной и нормальной кривой; оно становится 1-1-значным лишь тогда, когда мы начинаем мыслить прямую "покрытой дважды".

Клебш и Гордан нормальные кривые C_6 в R_3 и C_8 в R_4 проектировали на плоскость. Но мы этого делать не будем. Дело в том, что с точностью до линейных преобразований однородных координат $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ кривые C_{2p-2} в пространстве R_{p-1} определяются однозначно. Проще всего убедиться в этом, воспользовавшись интегралами первого рода [1], инвариантность которых относительно бирациональных преобразований очевидна.

Если мы возьмем какие-либо p линейно независимых интервалов первого рода $u_1, \ldots, u_p$, то (как можно показать, опираясь на римановский подход, единым ударом сразу охватывающий все частные случаи) любой другой интеграл первого рода будет представим в виде

$$U = c_1 u_1 + \ldots + c_p u_p + C.$$

Дифференцируя по $\tilde{\omega}$ (см. стр. 338), мы для соответствующих φ-форм получим равенства вида

$$\Phi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \ldots + c_p \varphi_p.$$

Таким образом, любые p форм $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ будут выражаться через p форм $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ по формулам

$$\Phi_1 = c_{11} \varphi_1 + \ldots + c_{1p} \varphi_p,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi_p = c_{p1} \varphi_1 + \ldots + c_{pp} \varphi_p.$$

---

[1]) Напомним, что интегралами первого рода называются всюду конечные абелевы интегралы. – *Примеч. ред. русского перевода.*

Это означает, что при переходе от форм $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ на данной кривой к формам $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ на бирационально эквивалентной кривой однородные координаты пространства R_{p-1} подвергнутся линейному преобразованию.

Тем самым мы возвращаемся к обычной теории линейных инвариантов и соответственно – к проективной геометрии $(p-1)$-мерного пространства! Другими словами, инвариантами произвольных бирациональных преобразований являются линейные инварианты кривых C_4 в пространстве R_2, кривых C_6 в пространстве R_3, кривых C_8 в пространстве R_4 и т.д. Случай $p = 2$, представляющий, как мы видели, некоторые особенности, я для простоты оставлю сейчас в стороне.

Теперь я могу объяснить одно утверждение Римана, которое во времена, когда мы начинали заниматься всем этим, было окутано таинственной пеленой. Речь идет об утверждении, что при любом бирациональном преобразовании кривой инвариантным остается не только число p, но и некоторые другие константы, названные Риманом "*модулями*" этой кривой, число которых (при $p > 1$) равно $3p-3$.

Оказывается, что эти модули являются не чем иным, как абсолютными инвариантами нормальной кривой C_{2p-2} при линейных преобразованиях однородных координат!

Наличие у кривой C_{2p-2} ровно $3p-3$ линейных инвариантов я смогу здесь продемонстрировать лишь посредством конкретных подсчетов:

$p = 3$. Кривая C_4 зависит от 14 констант (уравнение $f = 0$ имеет 15 членов). Восемь из них являются параметрами произвольного проективного преобразования. Разность, следовательно, равна

$$6 = 3p - 3.$$

$p = 4$. Нормальная кривая C_6 представляет собой пересечение поверхности второго порядка $F_2 = 0$ и поверхности третьего порядка $F_3 = 0$. Уравнение $F_2 = 0$ зависит от девяти, а уравнение $F_3 = 0$ – от девятнадцати параметров. Но вместо F_3 можно взять

$$F_3 - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)\, F_2$$

и таким образом устранить четыре члена уравнения; в результате останется 15 параметров. С другой стороны, 15 параметров должны быть отняты как параметры произвольного проективного преобразования. Следовательно, остается

$$9 + 15 - 15 = 3p - 3$$

параметров.

$p = 5$. Нормальная кривая C_8 в R_4 является линией пересечения трех поверхностей второго порядка $F_2' = 0$, $F_2'' = 0$ и $F_2''' = 0$. Сам по себе однородный многочлен от пяти переменных F_2 состоит из $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ членов и, значит, зависит от 14 параметров. Но, например, многочлен F_2' можно, не теряя общности, заменить многочленом вида

$$F' - c''F'' - c'''F''',$$

что уменьшает число параметров на 2. Таким образом, от каждого многочлена остается лишь 12 констант. Произвольное проективное преобразование пространства R_4 зависит от 24 параметров. Следовательно, остается

$$12 \cdot 3 - 24 = 3p - 3$$

параметров.

Введение в рассмотрение нормальных кривых, задаваемых φ-формами, завершило построение теории алгебраических кривых и придало ей цельность и совершенство. Снова подтвердилось, что теория линейных инвариантов отлично справляется со всеми проблемами этой области математики, если только, конечно, найти к ним правильный подход!

Рассказав о том, какой вид в результате исследований Клебша и его учеников приобрела после Римана теория алгебраических функций, я продолжу теперь общее описание исторического развития этого отдела математики.

Легко понять, что эта теория может совершенствоваться в следующих двух направлениях:

1. Исследование нормальной кривой C_{2p-2}, определяемой φ-формами в пространстве R_{p-1}. Требуется на чисто алгебраической основе развить теорию линейных инвариантов и проективную геометрию пространства R_{p-1}, доведя ее до синтетического построения тета-рядов. Первые конкретные шаги в этом направлении для $p = 2, 3$ были, кстати, сказать, сделаны мною самим в "Mathematische Annalen", тт. 27, 32 и 36 [1]).

2. Обратно, можно в качестве исходного пункта взять тета-ряды и на первых порах производить с ними лишь формальные выкладки. Постепенно спускаясь, мы в конце концов пришли бы к алгебраическим кривым. Из большого числа математиков, работавших в этом направлении, я могу назвать здесь лишь нескольких – Вебера, Нётера, Шоттки, Прима, Крайзера, Пуанкаре, Виртингера.

Рано или поздно оба эти направления должны слиться друг с другом. Однако, сколь бы ни были ясны конечные цели, из-за отсутствия рабочих рук мы все еще весьма далеки от них. За последние годы здесь произошел удивительный перелом. В годы моего студенчества – под влиянием традиции, шедшей от Якоби, – абелевы функции считались бесспорной вершиной математики, и каждый из нас считал делом чести добиться в этих вопросах какого-нибудь самостоятельного продвижения. А теперь? Молодое поколение едва знакомо с абелевыми функциями.

---

[1]) Klein F. Ges. Abh., т. 3, Nr. XCV, XCVI, XCVII.

Как же все это случилось? В математике, как и в других науках, можно снова и снова наблюдать одни и те же процессы. Время от времени, под влиянием внутренних и внешних причин появляются новые проблемы, привлекающие к себе молодых ученых и уводящие их от старых задач. Сказывается здесь и то, что старые задачи, уже неоднократно подвергавшиеся исследованию, требуют для их разрешения усиленной работы. Это нелегко, и уже по одной этой причине многие предпочитают браться за проблемы, которые разработаны меньше и потому требуют меньших предварительных знаний, — например, за формальную аксиоматику, теорию множеств или что-нибудь в этом роде.

Сейчас нам остается лишь подвести итоги этим ушедшим в прошлое задачам, написав хорошие обзоры — в ежегодниках, энциклопедиях и т.п. — или же монографии в надежде, что с них когда-нибудь начнется, если это будет угодно судьбе, новое развитие.

И все же я хочу сейчас рассказать еще о двух направлениях, в которых теория алгебраических кривых и поверхностей развивалась после Римана и Клебша. Как всегда, я смогу коснуться здесь только отдельных, наиболее выдающихся достижений.

1. *Теория пространственных алгебраических кривых.* Здесь речь идет о перечислении всех пространственных кривых данного порядка. В 1882 г. за решение этой задачи Берлинская академия назначила премию имени Штейнера, и это был один из тех немногих случаев, когда учреждение премии действительно привело к крупному успеху. На соискание этой премии были представлены две работы, которые и сегодня все еще представляют собой лучшее из того, что было достигнуто в области исследования пространственных алгебраических кривых. Это работы М. Нётера (Abhandlungen der Berliner Akademie, 1882 г. и Журнал Крелля, т. 93) и Альфана (Journal de l'École Polytechnique, 1882, т. 52 = Oeuvres, т. III, стр. 261 и далее).

То, что одним из конкурентов в решении задачи, поставленной Берлинской академией, был француз, является весьма примечательным фактом, показывающим, что молодое поколение Франции мало-помалу усвоило немецкие достижения. Плеяду французских математиков, освоивших немецкую алгебраическую геометрию, примерно в 1870 г. открывает Альфан, и уже вскоре, около 1880 г., среди них можно видеть Пикара и Пуанкаре. Эти ученые соединяют в себе традиции двух математических школ — Шаля и Эрмита. О Шале как о геометре мы уже говорили. Будучи в Сорбонне представителем géometrie supérieure [1]), Шаль начиная с 1850 г. стал излагать теорию алгебраических кривых таким образом, что, позаимствовав из анализа некоторые исходные понятия (определение кривой, теорему Безу и т.п.), он в дальнейшем, оставив формулы в стороне, оперировал уже только с самими кривыми. Таким образом, хотя в своей основе его рассуждения носили аналитический характер, но развивал он их в гео-

[1]) Высшей геометрии (*франц.*). — *Примеч. пер.*

метрической форме. В этом и заключался так называемый "méthode mixte"[1], который нашел многочисленных последователей – в том числе и за границей. Здесь в первую очередь следует назвать Цейтена (Копенгаген) и Кремону (Рим). Эрмит же, о работах которого по алгебре, теории чисел и теории функций мы уже говорили, в своей педагогической деятельности (как и Шаль, он преподавал в Сорбонне) особое внимание уделял тета-функциям. Геометрическая интерпретация абелевых функций Эрмиту была совершенно чужда. Из числа учеников Эрмита я упомяну здесь лишь Камилла Жордана, о котором, впрочем, мы будем говорить более подробно.

2. Распространение этих исследований на *алгебраические поверхности* $F(x, y, z) = 0$ (т.е. на двумерные или, точнее четырехмерные – ввиду того, что для координат допускаются и комплексные значения, – многообразия).

Началом здесь послужил один результат из области трансцендентного анализа, сообщенный в 1868 г. Клебшем в коротенькой заметке в 67-м томе "Comptes Rendus". В этой заметке Клебш утверждал, что на любой алгебраической поверхности с простыми особенностями существует линейное семейство всюду конечных двойных интегралов вида

$$\iint \frac{\varphi_{n-4}}{\partial F/\partial z}\, dx\, dy,$$

причем число p фигурирующих здесь многочленов φ инвариантно относительно бирациональных преобразований поверхности. (Это p называется "родом" поверхности.)

Сам Клебш впоследствии ограничился изучением лишь простейших примеров бирациональных преобразований поверхностей, демонстрируя, какую пользу можно извлечь из этого для "геометрии на поверхности". В частности, им был рассмотрен случай, когда поверхность может быть бирационально отображена на плоскость; в этом случае все вопросы, относящиеся к кривым на поверхности, можно изучать на плоскости. В дальнейшем мы еще познакомимся с одним из простейших примеров такого рода.

Общий вопрос о бирациональных преобразованиях поверхностей был как алгебраическая проблема передан Клебшем Нётеру уже в 1869 г. Клебш-педагог проявился в этом как нельзя лучше; сам он, по собственному признанию, не смог бы как следует сосредоточиться на этом предмете. Нётер опубликовал – главным образом в "Mathematische Annalen" – большое число работ по этой – ныне уже широко разросшейся – дисциплине, и его следует считать истинным ее создателем. В дальнейшем наиболее интенсивно разработкой общей проблемы бирациональных преобра-

[1] Смешанный метод (*франц.*). – *Примеч. пер.*

зований поверхностей занималась молодая итальянская школа, к которой относятся Сегре, Веронезе, Энриквес, Кастельнуово и Севери. Вначале к исследованию этой проблемы они привлекали лишь алгебраико-геометрические средства, но позже, под влиянием парижанина Пикара, они стали применять и трансцендентные методы.

Появление на арене итальянцев имело под собой общую причину, которую выше в свое время я уже обсуждал и которая заключается в том, что время от времени наука совершает перемещения от одной нации к другой. Когда какая-нибудь нация, интенсивно занимаясь определенной научной деятельностью, устает от этих занятий, вместо нее в бой немедленно вступает другая. Конкретно же активное участие итальянцев в нашей проблематике было вызвано деятельностью Кремоны (род. в 1830 г.), являвшегося, как я уже выше отмечал, учеником Шаля. Кремона как ученый и педагог пользовался в Италии огромным влиянием. Он входил в знаменитое созвездие Бетти, Бриоски, Кремона, которое примерно с 1860 г. начало во вновь образовавшемся итальянском королевстве интенсивно заниматься современной математикой и установило контакты с устремлявшимися к той же, что и они, цели математиками Германии, Англии и Франции. Это знаменовало вступление Италии в международное математическое сотрудничество. Я подчеркиваю деятельность этих трех математиков, потому что именно они проявляли особую организаторскую активность. В противном случае я непременно должен был бы упомянуть и Бельтрами, который, однако, занимался исключительно научными исследованиями. Напротив, Бриоски, бывший директором Миланской политехнической школы, Кремона, занимавший аналогичный пост в Риме, где политехническая школа объединена с естественнонаучным факультетом университета, и Бетти, бывший директором Пизанской Scuola Normale Superiore (учебное заведение педагогического профиля), занимались кроме того и активной практической деятельностью. Бетти в течение некоторого времени занимал пост заместителя статс-секретаря в министерстве образования, а Кремона – правда, на очень короткое время – стал даже министром образования. (Я привожу эти факты тем более охотно, что в Германии и поныне назначение математика на столь влиятельный пост является чем-то невообразимым; у нас на такие посты назначают только юристов. "В Германии, – сказал как-то Прингсгейм, – богиня правосудия имеет досадную привычку класть министерские портфели в колыбели исключительно своих отпрысков".)

Кстати сказать, именно Кремона предоставил в университетском курсе математики для начинающих почетное место проективной геометрии, сопровождаемой упражнениями по начертательной геометрии. На этой почве геометрические исследования в Италии расцвели настолько, что в течение последних десятилетий Италия стала играть в этой области ведущую роль.

В своих исследованиях итальянцы применяли "смешанный метод". Алгебраические многообразия в многомерных пространствах они изучали, используя в качестве подсобного средства метод "проектирований и сечений". Все их результаты довольно наглядны и по своему характеру весьма убедительны, но в отношении формы они по большей части не слишком строги. Цейтен в предисловии к своему учебнику по вычислительным методам в геометрии пишет: "Впрочем, научиться правильному пользованию этими методами можно лишь применяя их на разного рода примерах".

Я абсолютно лишен возможности войти в детали результатов, накопившихся в результате этой деятельности в теории бирациональных преобразований алгебраических поверхностей, и ограничусь поэтому ссылкой на обзор Кастельнуово и Энриквеса в 3-м томе "Энциклопедии" (Enzykl., III C 6 b).

Вместо этого я в заключение рассмотрю простейшее бирациональное соответствие между двумя поверхностями, а именно – стереографическую проекцию поверхности второго порядка F_2 на плоскость. Я выбрал этот пример из-за его наглядности. При этом, чтобы геометрические интерпретации алгебраических конструкций были вещественными, мы будем проектировать не на сферу, как это делалось еще в древности, а на однополостный гиперболоид.

Через произвольную точку O гиперболоида проходят две прямолинейные образующие, которые пересекают плоскость проекции в точках O_1 и O_2, как это схематически изображено на рис. 23. Прямая $\overline{O_1 O_2}$, соединяющая эти точки, представляет собой линию пересечения плоскости проекции с плоскостью, касающейся гиперболоида в точке O.

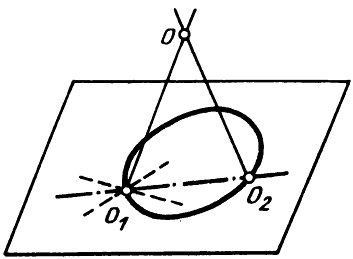


Рис. 23

Мы спроектируем наш гиперболоид из точки O на рассматриваемую плоскость. Вообще говоря, это устанавливает между гиперболоидом и плоскостью взаимно однозначное соответствие. Записав это соответствие формулами – см. ниже, – мы немедленно обнаружим, что оно бирационально. Имеются, однако, две точки на плоскости и одна на гиперболоиде (так называемые "фундаментальные точки"), которым на другой поверхности соответствуют целые прямые. На гиперболоиде это точка O, которой на плоскости соответствует прямая $\overline{O_1 O_2}$, а на плоскости – точки O_1

и O_2, которым на гиперболоиде соответствуют проходящие через O прямолинейные образующие.

На этом примере мы видим, что в двумерном случае бирациональные преобразования ведут себя совершенно по-другому, чем в одномерном. В двумерном случае рациональные функции при определенных значениях аргументов обращаются в $\frac{0}{0}$, и этот $\frac{0}{0}$ в зависимости от пути, по которому мы приближаемся к точке, может принимать бесконечно много значений. Это отчетливо видно на примере точки O_1, которой отвечает целая образующая $\overline{OO_1}$. Проведем на плоскости через точку O_1 произвольную прямую g. Если точка, двигаясь по g, будет приближаться к O_1, то отвечающая ей точка гиперболоида будет стремиться к определенной точке образующей OO_1 и точка эта будет зависеть от выбора прямой g. То же самое, естественно, справедливо и в отношении точки O_2.

На языке формул эта бесконечнозначность проявляется следующим образом. Уравнение гиперболоида в однородных координатах может быть записано в виде

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0.$$

Выберем в качестве O точку $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, а в качестве плоскости проекции – плоскость $x_3 = 0$. Тогда, как нетрудно убедиться, формулы, описывающие стереографическую проекцию, будут иметь вид

$$\rho x_1 = \xi\zeta,$$
$$\rho x_2 = \eta\zeta,$$
$$\rho x_3 = \xi\eta,$$
$$\rho x_4 = \zeta^2,$$

где $\xi : \eta : \zeta = x_1 : x_2 : x_4$ (рис. 24). Видно, что x_1, x_2, x_3, x_4 действительно удовлетворяют уравнению гиперболоида. В неоднородной форме равенства эти приобретают вид

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{\xi}{\zeta}, \qquad \frac{x_2}{x_4} = \frac{\eta}{\zeta}, \qquad \frac{x_3}{x_4} = \frac{\xi\eta}{\zeta^2}.$$

При $\xi = 0$, $\zeta = 0$ и при $\eta = 0$, $\zeta = 0$ эти равенства обращаются в $\frac{0}{0}$. Точно так же, когда x_1, x_2 и x_4 одновременно равны нулю, в $\frac{0}{0}$ обращаются $\frac{\xi}{\zeta}$ и $\frac{\eta}{\zeta}$.

Рассмотрим теперь на гиперболоиде произвольную кривую C_n, не проходящую через точку O. Так как при стереографической проекции порядок кривой не меняется, то эта кривая переходит в плоскую кривую C_n. Легко видеть, что последняя кривая пересекается с прямой $\overline{O_1 O_2}$ только в фундаментальных точках. Действительно, предположим, что существует какая-нибудь другая точка пересечения. Тогда на гиперболоиде ей будет отвечать точка O, и, значит, вопреки предположению, наша пространственная кривая C_n проходит через точку O.

Будем считать, что плоская кривая C_n проходит α_1 раз через точку O_1 и α_2 раз через точку O_2. Тогда $\alpha_1 + \alpha_2 = n$, поскольку кривая пересекается с прямой $O_1 O_2$ точно в n точках.

Теперь мы можем найти все пространственные кривые данного порядка n, лежащие на нашем гиперболоиде.

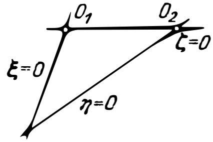


Рис. 24

$n = 1$. В этом случае $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, и, значит, либо $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 0$, либо $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 1$. Поэтому плоская кривая C_1 может быть лишь прямой, проходящей через одну из точек O_1 или O_2. Пучкам прямых, проходящих через O_1 или O_2, соответствуют два семейства прямолинейных образующих гиперболоида. Прямые, проходящие через O_1, дают образующие одного семейства, а прямые, проходящие через O_2, – образующие второго семейства.

$n = 2$. Здесь возможны три случая:

$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 0;$

$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2;$

$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1.$

Оба первых случая дают распадающееся коническое сечение (две прямые, пересекающиеся в O_1 или в O_2) и, таким образом, не приводят ни к чему новому. В третьем случае в качестве плоской кривой C_2 мы получаем коническое сечение, проходящее через O_1 и через O_2. Это означает, что единственными кривыми второго порядка C_2, лежащими на гиперболоиде, являются его плоские сечения. (Попробуйте доказать это аналитически с помощью формул, задающих отображение.)

$n = 3$. Интерес представляют лишь два случая:

$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 1$ и $\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2,$

которые приводят к двум различным семействам пространственных кривых третьего порядка, лежащим на гиперболоиде. Соответствующие плоские кривые имеют в O_1 или в O_2 двойную точку. Но если, например, плоская кривая C_3 дважды проходит через точку O_2, то каждая прямая, проходящая через точку O_2, еще только раз пересекает кривую, в то время как каждая прямая, проходящая через точку O_1, пересекает кривую еще в двух точках (рис. 25). Поэтому соответствующие пространственные кривые C_3 один раз пересекаются с прямолинейными образующими одного семейства и дважды с прямолинейными образующими второго:

$$3 \cdot 1 - 2 = 1, \quad 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

(см. рис. 28). Две лежащие на гиперболоиде кривые C_3 одного и того же семейства пересекаются в $9 - 4 - 1 = 4$ точках, а различных семейств – в $9 - 2 - 2 = 5$ точках. Род p всех этих кривых равен нулю.

$n = 4$. В этом случае получаются не только отдельные семейства, но и отдельные "виды" кривых.

а) Первый вид характеризуется равенствами $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 2$ (рис. 26), т.е. тем, что обе точки O_1 и O_2 являются для плоской кривой C_4 двойными. Поэтому $p = 1$. Соответствующая кривая C_4 на гиперболоиде представляет собой пространственную кривую, рассмотренную нами выше на стр. 332. Снова предлагаю проверить этот факт с помощью формул. Эта пространственная кривая высекается на гиперболоиде некоторой другой поверхностью второго порядка.

б) Второй вид состоит из двух семейств $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$ и соответственно $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$ (рис. 27). В этом случае плоские кривые C_4 имеют тройную точку либо в O_1, либо в O_2. Так как тройная точка засчитывается за три двойные (кривую с такой точкой можно рассматривать как предельный случай кривой с тремя двойными точками; см. рис. 27), то род этих кривых равен нулю:

$$p = \frac{(4-1) \cdot (4-2)}{2} - 3 = 0.$$

Они пересекаются с прямолинейными образующими одного семейства один раз и с прямолинейными образующими второго семейства три раза.

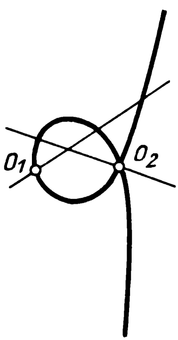


Рис. 25

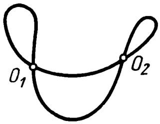


Рис. 26

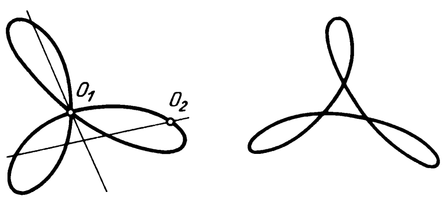


Рис. 27

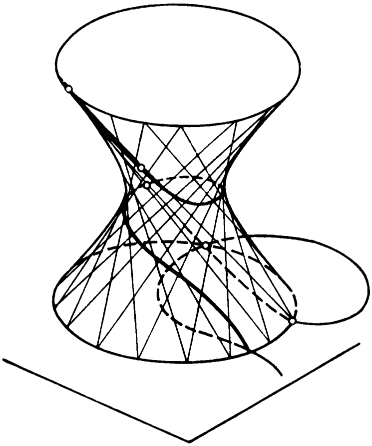


Рис. 28

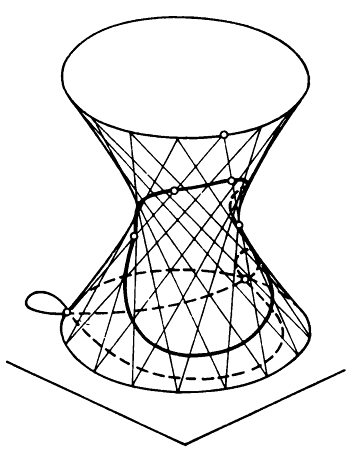


Рис. 29

Рис. 28. Кривая третьего порядка

Рис. 29. Кривая четвертого порядка первого вида

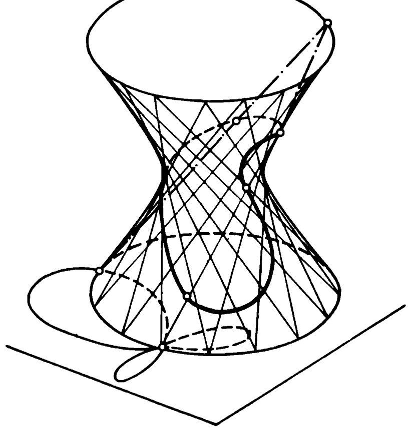


Рис. 30

Рис. 30. Кривая четвертого порядка второго вида

Кривые из одного и того же семейства пересекаются друг с другом в $16-9-1 = 6$ точках, а кривые из различных семейств в $16-3-3 = 10$ точках.

Теперь дело за тем, чтобы перевести эти утверждения на язык живых, пространственных изображений, и этому должны помочь рис. 28–30. Вопрос о пространственных кривых на гиперболоиде изучался, естественно, с давних пор; на эту тему уже в середине прошлого века писали Плюккер и Шаль. Что же касается более новых вещей, то, к сожалению, здесь мало подходящее для них место.

Теория целых алгебраических чисел
и их взаимодействие
с алгебраическими функциями

Под *целым алгебраическим числом* мы понимаем корень x уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

с целочисленными коэффициентами, старший коэффициент которого равен единице. Если младший коэффициент этого уравнения равен ± 1, то $\frac{1}{x}$ тоже представляет собой целое число. В этом случае число x называется *единицей.* "Корни из единицы" ζ (для которых выполняется равенство $\zeta^n = 1$) представляют собой лишь весьма частный случай этого понятия.

Представляется целесообразным объединить в одно целое алгебраические числа, которые рационально с целочисленными коэффициентами могут быть выражены друг через друга. Такие числа образуют некий организм, за которым устоялся дедекиндов термин "тело" [1] (Körper; он напоминает нам о слове "Körperschaft" – корпорация, объединение). Целые числа, содержащиеся в данном теле, образуют в нем "область целостности".

Целые числа в смысле нашего определения могут внешне выглядеть как дроби. Например, числа

$$\xi_1 = \frac{1 + \sqrt{-5}}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{1 - \sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

являются целыми, так как они удовлетворяют уравнению

$$(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) = \xi^2 - \sqrt{2} \cdot \xi + 3 = 0,$$

а значит, и уравнению четвертой степени с целочисленными коэффициентами

$$(\xi^2 + 3)^2 - 2\xi^2 = \xi^4 + 4\xi^2 + 9 = 0.$$

А теперь я буду придерживаться хода исторического развития.

Фундамент теории целых алгебраических чисел был заложен Гауссом в его знаменитом сочинении "Theoria residorum biquadraticorum, Commentatio II"("Теория биквадратичных вычетов"), появившемся в 1832 г. В этой работе Гаусс рассматривает числа вида $a + bi$, где $i = \sqrt{-1}$ (см. его "Труды", т. 2, стр. 93 и далее).

---

[1] В современной алгебраической терминологии на русском языке права первенства получил, как уже отмечалось (см. примеч. ред. русского перевода на стр. 290), термин "поле". В дальнейшем мы будем в переводе придерживаться этой терминологии. – *Примеч. ред. русского перевода.*

В этом числовом поле имеются четыре единицы

$$i^{\lambda}, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3,$$

являющиеся степенями одной из них.

Гаусс немедленно занялся вопросом, который во все последующие времена играл фундаментальную роль: справедлива ли в этой расширенной области теорема об однозначности разложения чисел на простые множители? Факт этот, действительно, оказывается верным, если не считать того, что каждый простой сомножитель можно умножать на любую единицу, лишь бы все произведение в целом оставалось без изменений. Так, например, если $A = A' \cdot A''$, то также и

$$A = (iA') \cdot (-iA'').$$

При этом Гаусс не пренебрегает и геометрической интерпретацией таких чисел с помощью квадратной числовой решетки, перебрасывая тем самым мост к теории двоякопериодических функций. Об этой решетке — о ее обобщении на случай чисел вида $a + b\sqrt{-D}$ — я уже говорил в первой главе (см. стр. 35 и далее). Следуя Гауссу, я показал там, что числа вида $a + b\sqrt{-D}$ могут интерпретироваться как узлы некоторой решетки параллелограммов и что это их представление тесно связано с так называемым комплексным умножением эллиптических функций. К сожалению, я не могу здесь снова вернуться к этому вопросу, так как для этого мне опять пришлось бы вводить целый ряд вспомогательных понятий. Я лучше отошлю читателя к моим литографированным лекциям по теории чисел (1895/96 г.), где все это изложено достаточно подробно. Столь же наглядным образом можно трактовать и более сложные случаи. В этой связи читателю будет полезно познакомиться с моими замечаниями в докладе на съезде естествоиспытателей в Любеке в 1895 г. (Jahresber. Deutsch. Math.-Ver., т. 4 [1])). По поводу кубических иррациональностей я отсылаю к диссертации Фуртвенглера, где рассматриваются решетки в трехмерном пространстве и все доказательства проводятся на этих решетках [2]).

Подобного рода геометрические рассмотрения проливают свет на причины, обусловливающие связь между высшими числовыми полями и теорией многократнопериодических функций.

Вернемся к рассказу об истории этого вопроса.

Когда Куммер занялся *теоремой Ферма* о неразрешимости (при $n > 2$) в целых числах уравнения

$$z^n = x^n + y^n$$

---

[1]) См. также Klein F. Ges. Abh., т. 3, Nr. XCIV.

[2]) См. также Klein F. Ges. Abh., т. 3, стр. 8, а кроме того статью Фуртвенглера "Punktgitter und Idealtheorie" ("Решетки чисел и теория идеалов") в "Math. Annalen", 1920, т. 82.

— теорему эту можно также записать в виде

$$z^n \neq (x+y)(x+\epsilon y)\ \dots\ (x+\epsilon^{n-1} y), \quad \epsilon = e^{2\pi i/n},$$

— он был естественным образом подведен к тому, чтобы заняться разложением на множители чисел, выражающихся через корни n-й степени из единицы.

Куммер пришел (Журнал Крелля, 1847, т. 35) к следующему результату, составившему основу его славы: Для чисел поля $K(\epsilon)$ теорема об однозначности разложения на простые сомножители перестает быть верной; однако справедливость ее восстанавливается, если ввести в рассмотрение подходящие алгебраические числа, которые не принадлежат к $K(\epsilon)$ и которые Куммер называет поэтому *идеальными числами.*

Уже сам Куммер заметил, что аналогичное утверждение справедливо и для квадратичного поля $K(\sqrt{-D})$.

Простейший пример, иллюстрирующий эту ситуацию, дает поле $K(\sqrt{-5})$, элементами которого являются числа вида $a + b\sqrt{-5}$. В его области целых чисел числа 2 и 3 на множители не разлагаются. В самом деле, предположим, например, что число 2 вопреки утверждению может быть разложено на множители, т.е. что

$$2 = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}).$$

Тогда

$$4 = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$$

и, значит,

$$2 = a^2 + 5b^2,$$

откуда следует, что 2 — квадратичный вычет по модулю 5, что неверно. Следовательно, 2 (и аналогично 3) — "простое число". Тем не менее, произведение этих чисел — число 6 — разлагается на множители и другим способом:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5}).$$

Оказывается, что, произведя надлежащее присоединение идеальных чисел, парадокс этот можно устранить. А так как разложение на множители допускает модификацию с помощью единиц, то это можно сделать различными способами.

В моей основанной на решетках теории присоединяется число $\sqrt{2}$. Как мы уже видели (стр. 354), число

$$\frac{1 \pm \sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

является целым алгебраическим числом. При этом

$$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}, \quad 3 = \frac{1 + \sqrt{-5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

и потому – что теперь уже совсем не удивительно –

$$2 \cdot 3 = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{-5}}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{-5}}{\sqrt{2}}\right).$$

В гильбертовской теории так называемых *полей классов* (Klassenkörper) вместо $\sqrt{2}$ присоединяется i. При этом

$$2 = (1 + i) \cdot (1 - i), \quad 3 = \frac{1 + \sqrt{-5}}{1 + i} \cdot \frac{1 - \sqrt{-5}}{1 - i},$$

что снова объясняет, почему произведение этих двух целых чисел допускает различные разложения на простые множители.

Причина, в силу которой оказываются возможными различные присоединения, заключается в том, что число $\sqrt{2}$, будучи умножено на подходящую единицу – а именно, на

$$\omega = \frac{1 + i}{\sqrt{2}},$$

– дает некоторое число из поля $K(i)$. Заметим, кстати, что ω является алгебраическим корнем из единицы: $\omega^8 = 1$.

Я столь подробно остановился на всем этом потому, что понятие "идеального числа" часто считается в чём-то мистическим. В этом повинен и сам Куммер (хотя уж он-то хорошо знал положение вещей!), потому что в ряде мест он говорит почти так, как если бы речь шла о множителях, которых in concreto не существует и которые нужно мыслить лишь символически. При этом он прибегает к неудачному сравнению из области химии, апеллируя к примеру с фтором, который химики называют газом, несмотря на то, что его никогда не удавалось выделить в чистом виде. – Здесь мы воочию видим, что такое диалектическая логика. Уж давно на свет божий появился Муассан и выделил фтор в сосудах из плавикового шпата с платиновыми электродами!

Теория разложения алгебраических чисел на единицы и – реальные или идеальные – простые множители была распространена Кронекером и Дедекиндом на произвольные алгебраические тела.

Сейчас трудно дать исторически достоверное изложение того, как все это произошло, так как Кронекер начиная с 1858 г. распространял свои идеи, а также сведения об имеющихся у него результатах в устной форме, а свою работу на эту тему "Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen" ("Основы арифметической теории алгебраических величин") опубликовал лишь в 1881/82 г. в 92-м томе Журнала Крелля в юбилейной статье, посвященной Куммеру в связи с 50-летием со дня присуждения ему докторской степени, уже после того, как Дедекинд изложил свою теорию в одном из "Приложений" ко второму изданию "Лекций по теории чисел" Дирихле, вышедших в 1871 г. под его редакцией.

Дедекинд делает при этом крен в сторону абстрактного, что в принципе серьезно упрощает дело, и эта его направленность впоследствии не раз служила примером, на котором более молодое поколение училось и мыслить, и излагать свои результаты. В то же самое время такие исследователи старшего поколения, как, например, Кронекер, свыкнуться с этим его подходом так и не смогли (см. Журнал Крелля, т. 99, стр. 336).

Вместо того, чтобы говорить о множителе (реальном или идеальном), Дедекинд говорит о с о в о к у п н о с т и целых чисел данного поля, делящихся на этот множитель.

В случае натурального ряда он вместо множителя 2 рассматривает совокупность всех чисел вида $2m$, а в случае поля $K(\sqrt{-5})$ вместо множителя $\sqrt{2}$ или $1+i$ — совокупность всех чисел вида $2\mu + (1+\sqrt{-5})\nu$, где μ и ν — произвольные целые числа поля $K(\sqrt{-5})$.

Преимущество этого способа заключается в том, что он позволяет избавиться от введения в рассмотрение единиц; его недостаток в том, что он требует привычки представлять умножение двух чисел через некое отношение между совокупностями, соответствующими множителям и произведению.

Так, например, равенство $2 \cdot 3 = 6$ означает, по Дедекинду, что совокупность чисел, делящихся на 6, есть общая часть совокупности чисел, делящихся на 2, и совокупности чисел, делящихся на 3.

Мне всегда была неприятна терминология Дедекинда, лишенная какой бы то ни было наглядности. Он называет рассматриваемые им совокупности *идеалами*, а если их элементы имеют общий "настоящий" множитель, то — *главными идеалами*! (Например, совокупность чисел вида $2\mu + 2\nu\sqrt{-5}$ представляет собой главный идеал, так как у любого ее члена имеется "настоящий" множитель 2.) Ему следовало бы говорить о "реалах", так как речь здесь идет о числовых агрегатах, действительно имеющихся в данной области целостности.

Я не имею возможности подробнее остановиться на этих чисто теоретико-числовых исследованиях. Сжатое, но вместе с тем чрезвычайно далеко продвинутое и существенно упрощенное изложение этих вопросов можно найти в "Zahlbericht" Гильберта в 4-м томе "Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.", 1897: "Die Theorie der algebraischen Zahlkörper" ("Теория алгебраических числовых полей"). К точке зрения, которой Гильберт руководствуется в этом сочинении, мы ниже еще вернемся. Эта теория воспроизведена также во втором томе "Алгебры" Вебера (2-е изд., 1899).

Но вот здесь наступает новый поворот, подготовленный и доведенный до совершенной прозрачности Дедекиндом и Вебером [Журнал Крелля, т. 92, 1882 и "Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen" ("Теория алгебраических функций одной переменной")]. Обнаруживается, что существует далеко идущая аналогия между целыми числами произвольного числового поля и алгебраическими функциями на произвольной римановой поверхности, простирающейся над плоскостью переменной z.

Подробно с этой аналогией и с ее использованием можно познакомиться по книге Дедекинда и Вебера. Мы же ограничимся следующим кратким списком пунктов, в которых эта аналогия проявляется.

Теория чисел	**Теория функций**
Отправной пункт: неприводимое уравнение $f(x) = 0$ с целыми рациональными коэффициентами.	Отправной пункт: неприводимое уравнение $f(\zeta, z) = 0$, содержащее z рационально. (Таким образом, после умножения на общий знаменатель коэффициенты этого уравнения будут целыми рациональными функциями (многочленами) z; коэффициенты этих многочленов нас здесь не интересуют.)
Поле, состоящее из всех чисел вида $R(x)$	Поле, состоящее из всех функций вида $R(\zeta, z)$, т.е. из всех алгебраических функций, однозначных на данной римановой поверхности
Совокупность всех целых алгебраических чисел из данного поля	Совокупность всех целых алгебраических функций из данного поля, т.е. функций $G(\zeta, z)$, обращающихся в бесконечность только в точке $z = \infty$.
Разложение целых чисел на реальные и идеальные простые множители и единицы	Разложение функций $G(\zeta, z)$ на идеальные (не принадлежащие, вообще говоря, данному полю) множители, каждый из которых либо обращается в нуль только в одной точке римановой поверхности, либо не обращается в нуль нигде

Особенно отчетливо эта аналогия проступает при рассмотрении дискриминантов. В теоретико-функциональном случае дискриминант распадается на два множителя: "существенный делитель" (wesentlicher Teiler), соответствующий точкам ветвления римановой поверхности, и "несущественный делитель" (außerwesentlicher Teiler), соответствующий двойным точкам кривой $f(\zeta, z) = 0$ (где две точки ветвления взаимно уничтожаются). Делители этого второго типа называются несущественными потому, что они зависят от выбора функции ζ в поле.

Точно так же обстоит дело и в теоретико-числовом случае. При этом точкам ветвления кривой $f(\zeta, z) = 0$ отвечают простые множители существенного делителя дискриминанта уравнения $f(x) = 0$.

В параллель с рассмотренным выше арифметическим примером я рассмотрю теперь пример идеального разложения функции вида $G(\zeta, z)$, не требующий никаких предварительных знаний.

Мы будем исходить из уравнения

$$\zeta^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$$

и рассмотрим определяемую им алгебраическую целую функцию ζ — безусловно, самый простой пример. Существенный делитель дискриминанта (несущественных делителей в данном случае нет) имеет вид

$$(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

В полном соответствии с общей теорией точки $z = e_1, e_2, e_3$ представляют собой точки ветвления римановой поверхности (в этих точках и только в них касательные параллельны оси ординат; см. рис. 31). Каждая из точек e_1, e_2, e_3 является простым нулем целой алгебраической функции ζ. Но в поле $R(\zeta, z)$ не существует целой алгебраической функции, которая имела

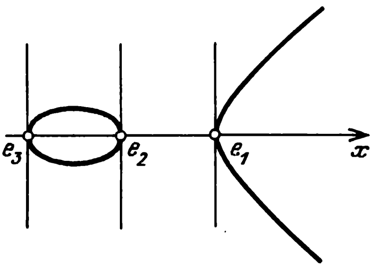


Рис. 31

бы простым нулем только точку e_1, или соответственно e_2, или e_3; функции $z - e_1$, $z - e_2$ и $z - e_3$ имеют эти точки нулями кратности два (при приравнивании их нулю получаются касательные к рассматриваемой кривой). Но, разумеется, такого рода идеальный множитель можно реализовать, выйдя за пределы поля $R(\zeta, z)$; достаточно взять на данной римановой поверхности двузначные "функции-корни" $\sqrt{z - e_1}$, $\sqrt{z - e_2}$ и $\sqrt{z - e_3}$. Это даст следующее разложение ζ на идеальные множители:

$$\zeta = 2\sqrt{z - e_1}\ \sqrt{z - e_2}\ \sqrt{z - e_3}.$$

Идя еще дальше и выходя за пределы аналогии с теорией чисел, мы можем присоединить соответствующий интеграл первого рода u и построенную с его помощью функцию $\sigma(u - u_0)$, которая на рассматриваемой римановой поверхности хотя и бесконечнозначна, но обращается в нуль только в одной точке — той, которой соответствуют значения параметра, равные $u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. Поэтому тремя простыми множителями, отвечающими в том же самом смысле точкам e_1, e_2 и e_3, будут функции $\sigma\left(u - \frac{\omega_i}{2}\right)$, $i = 1, 2, 3$. Но так как эти функции нигде не обращаются в бесконечность, то каждую из них надо еще снабдить знаменателем $\sigma(u)$, для которого точка $z = \infty$ является простым нулем. Таким путем и получается, что

$$\wp'(u) = E \cdot \frac{\sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u - \frac{\omega_2}{2}\right)\sigma\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right)}{\sigma^3(u)},$$

где E — функция, нигде не обращающаяся в нуль, т.е. некая "единица". Оказывается, что единица эта имеет вид Ce^{cu}. Подходящим образом распределив этот множитель по всем трем делителям числителя, мы получим обычную формулу

$$\wp'(u) = 2 \cdot \frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}.$$

В такой трансцендентной форме Вейерштрасс и представлял себе перенос основных теоретико-числовых понятий в теорию функций.

К сожалению, я не могу рассказать здесь о том, какой вид приобретает все это в более сложных случаях. Рекомендую посмотреть мою работу в "Mathematische Annalen", 1899, т. 36, где этот же вопрос максимально просто рассмотрен для поверхностей большего рода[1]. Здесь роль функции $\sigma(u)$ играет моя "простая форма" (Primform). (Это та самая работа, которая уже упоминалась мною на стр. 345.)

Заканчивая рассказ об алгебраических числовых полях, я хочу еще раз специально обсудить аналогию, существующую между числовыми и функциональными полями, с тем чтобы стало понятным то взаимное положение, которое занимают друг по отношению к другу два огромных массива современной математической науки; в частности, мне хотелось бы пробудить интерес к принципам, лежащим в основе книги Г. Вебера "Lehrbuch der Algebra" ("Учебник алгебры", 2-е изд., в трех томах — 1898, 1899 и 1908 гг.).

Прежде всего я еще раз должен вернуться к основополагающей работе Дедекинда и Вебера из 92-го тома Журнала Крелля.

Эти авторы и здесь заменяют "идеальный множитель", имеющий простой нуль в данной точке римановой поверхности, соответствующим идеалом,

---

[1] См. K l e i n F. Ges. Abh., т. 3, стр. 388 и далее.

т.е. совокупностью целых алгебраических функций данного поля, обращающихся в нуль в этой точке.

Конечно, введение этого понятия представляет собой лишь формальную игру ума. Гораздо более важен достигнутый Дедекиндом и Вебером прогресс, заключающийся в том, что доказательства различных теорем, относящихся к полю алгебраических функций, начинают проводиться ими с помощью методов, разработанных в арифметике. В отличие от работ Клебша и его учеников здесь речь уже идет не о кривых и каких-либо других геометрических понятиях и не о римановых поверхностях (или хотя бы о плоскости комплексной переменной). Нет, авторы чисто арифметически оперируют с многочленом $f(\zeta, z)$, расположенным по степеням переменных ζ и z. Посредством рассуждений, по своему характеру арифметических, им довольно быстро удается дойти, например, до теоремы Римана – Роха.

Прогресс, достигнутый Дедекиндом и Вебером, заключается в том, что арифметический способ рассмотрения, не оставляющий никакого простора для фантазии, надлежащим образом учитывает все особенности, которые могут иметься у уравнения $f(\zeta, z) = 0$. В принципе, так же дело обстоит и у Римана, а что касается, например, Нётера, то он подготовил все, что было необходимо для достижения тех же самых результатов алгебраико-геометрическим путем; но все же у этих авторов кое-что приходится читать между строк.

В дальнейшем в умах произошел раскол. Одни – из числа упоминавшихся выше, в особенности итальянцы – продолжали крепко держаться за образ алгебраической кривой, или поверхности, или того, что вообще получается в зависимости от числа параметров, и по "смешанному методу" упражняли свое геометрическое мышление, оперируя с произвольным числом измерений. Другие, как Гензель и Ландсберг – а для двумерных областей Юнг, – предпочитали придерживаться арифметической методы. А потом дела пошли, как при возведении Вавилонской башни – говорящие на разных языках перестали понимать друг друга. Поскольку же приобретение новых привычек создает определенные неудобства, то часто стало исчезать и само желание понимать. Во всяком случае, в "Энциклопедии математических наук" нам пришлось рядом друг с другом поместить две статьи на эту тему. "Геометрическая" статья Кастельнуово – Энриквеса опубликована в третьем томе (С 6 b). (Мне лишь с большим трудом удалось добиться, чтобы в оглавлении было сделано замечание относительно Юнга.) "Арифметическая" же статья написана Гензелем[1]); хорошим введением в этот вопрос служит также статья Ландсберга в первом томе Энциклопедии (I B 1 c).

Эта тенденция не только делить науку на все увеличивающееся число отдельных частей, но и устраивать различия между отдельными школами по способу трактовки материала может – при неограниченном ее разви-

---

[1]) Т. II, С. 5; вышла в свет в 1921 г.

тии – привести науку к гибели. Наше поколение всегда стремилось к противоположной цели, постоянно поддерживая более или менее тесный контакт между 1) теорией инвариантов, 2) теорией уравнений, 3) теорией функций, 4) геометрией и 5) теорией чисел, и это составляло предмет особенной нашей гордости.

Генрих Вебер, проведший лучшие свои годы (с 1875-го по 1883-й) в Кёнигсберге, является, пожалуй, самым разносторонним среди представителей современной тенденции. И счастливейшим образом примерно в 1885 г. снова почти на целое десятилетие, и опять- таки снова в Кёнигсберге, собрался триумвират молодых ученых, который на новый лад преобразовал эту тенденцию и своей деятельностью создал именно ту концепцию, отталкиваясь от которой, наши современники, если они окажутся в состоянии, смогут продвигаться вперед. Я имею в виду Гурвица, Гильберта и Минковского.

Гурвиц родился в 1859 г.; учился сначала у меня, в Мюнхене и Лейпциге, затем в Берлине; докторскую степень получил в Гёттингене. С 1884-го по 1892-й год он был экстраординарным профессором в Кёнигсберге, а затем ординарным профессором Цюрихского политехникума[1]).

Гильберт родился в 1862 г. в Кёнигсберге и с небольшими перерывами прошел там все существенные стадии своей карьеры – студент, доцент, экстраординарный профессор – прежде чем в 1895 г. стал ординарным профессором в Гёттингене[2]).

Минковский родился в 1864 г., учился тоже в Кёнигсберге и состоял там с 1888 по 1896 г. приват-доцентом и экстраординарным профессором. Затем он был в Цюрихе, а с 1902 по 1909 гг. (до своей преждевременной кончины) в Гёттингене.

В своем обзоре я буду отталкиваться от исследований Гильберта, которым я отдаю предпочтение не только потому, что они к нам ближе всего, но и потому, что они наиболее радикальны по своему характеру. Но поскольку в конечном счете работы этой тройки находятся в тесной взаимосвязи, я прямо сейчас скажу несколько слов о Гурвице и Минковском, чтобы охарактеризовать манеру их работы.

Гурвиц был в математике мастером афоризма. В совершенстве владея рассматривавшимися им вопросами, он то тут, то там выискивал важные проблемы и существенно продвигал их вперед. Каждая из его работ стоит особняком и представляет собой законченное целое.

Интересующие нас здесь работы Минковского основываются главным образом на соединении прозрачнейшей геометрической наглядности с теоретико-числовой проблематикой. Взаимосвязь этих областей устанавливается на основе теории числовых решеток. Последняя теории была продвинута Минковским в целом ряде направлений. Здесь у него обнаруживается много внутреннего родства с манерой мышления Дирихле. Интересны его

---

1) Умер в 1919 г.

2) Ушел в отставку в 1930 г., умер в 1943 г. – *Примеч. пер.*

доклады "Diophantische Approximationen"("Диофантовы приближения", 1908 г.), имеющие, правда, скорее педагогический характер. Эти вопросы отражены и в моих собственных лекциях по теории чисел; см. также (гл. I, стр. 48) материал относительно решеток на плоскости. В свое время я с помощью геометрических методов навел ясность в ряде уже известных фундаментальных фактов теории чисел, но Минковский нашел в этой теории нечто новое. Его исследования еще раз доказывают, что геометрия и теория чисел никоим образом не будут исключать друг друга, если мы только наберемся решимости рассматривать в геометрии дискретные объекты.

Неутомимый ум Гильберта на протяжении долгих лет проявлял свою активность в самых разнообразных областях математики, переходя от одной из них к другой. Работы, которыми мы интересуемся в настоящий момент и которые можно было бы назвать первыми его поэмами, сделаны в период с 1883 г. по примерно 1898 г. С тех пор как Гильберт стал работать в Гёттингене, он постоянно притягивал к себе многочисленных учеников (в Кёнинсберге у него для этого еще не было возможности, тем более что в те годы посещаемость лекций по математике упала в наших университетах до минимума). Однако ученики эти обычно овладевали только одной областью — той, которой они научились у Гильберта, — и, пожалуй, по большей части даже и не знали о тех взаимосвязях, которые представляют здесь для нас основной интерес.

Мы охарактеризуем здесь лишь две работы Гильберта. В работе по *теории алгебраических форм* (Math. Annalen, 1890, т. 36) он, используя дедекиндову манеру, доводит до полного завершения некоторые намеченные Кронекером подходы и блистательно применяет полученные результаты к теории инвариантов.

Прежде всего мы должны упомянуть теорему о том, что любое алгебраическое многообразие в пространстве с произвольным конечным числом однородных координат $x_1, \ldots, x_n$ может быть задано такой конечной системой однородных уравнений

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0, \ldots, F_\mu = 0,$$

что уравнение $F = 0$ любой содержащей это многообразие гиперповерхности может быть записано в виде

$$M_1 F_1 + \ldots + M_\mu F_\mu = 0,$$

где M_i — некоторые однородные и целые рациональные формы, степени которых должны быть выбраны так, чтобы левая часть этого уравнения была однородной.

Употребляя принятый в теории чисел и восходящий к Гауссу способ выражаться, можно сказать, что содержащая наше многообразие форма должна быть сравнима с нулем по модулям $F_1, \ldots, F_\mu$. Гильберт настолько, впрочем, придерживается дедекиндовой манеры мыслить, что он саму совокупность всех таких форм называем *модулем*! В этой терминологии теорема Гильберта утверждает, что любое алгебраическое многообразие пространства R_n характеризуется обращением в нуль форм некоторого "конечного модуля"[1]),[2]).

В качестве примера я рассмотрю пространственную кривую третьего порядка C_3. Всякая такая кривая может быть получена в результате пересечения двух поверхностей второго порядка F_2. В этом можно убедиться

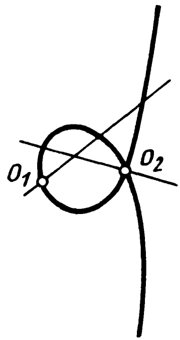


Рис. 32

следующим образом. Представив себе, что данная кривая C_3 лежит на однополостном гиперболоиде (см. выше стр. 350 и рис. 28 на стр. 353), спроектируем ее на плоскость. Пусть получающаяся плоская кривая третьего порядка C_3' имеет двойную точку в точке O_2 (рис. 32). Тогда произвольная прямая, проходящая через фундаментальную точку O_1 , вместе с кривой C_3' будет составлять кривую C_4 первого вида. В пространстве последней кривой соответствует полная кривая пересечения нашего гиперболоида с некоторой поверхностью F_2 . Это доказывает, что поверхность F_2 , пересекающая гиперболоид по кривой C_3, имеет с ним еще и общую образующую. Через обе эти кривые проходит, естественно, целый пучок поверхностей второго порядка $\lambda F_2 + \mu H = 0$, где $H = 0$ – уравнение гиперболоида. Пучку прямых, проходящих через точку O_1, соответствует поэтому бесконечное семейство пучков поверхностей $\lambda F_2 + \mu H = 0$, пересекающих гиперболоид по данной кривой C_3 и по одной из образующих. Это дает нам ∞^2 поверхностей второго порядка $\lambda F_2 + \lambda' F_2' + \mu H = 0$, проходящих через кривую C_3. Возникает вопрос, сколько поверхностей $F_1, \ldots, F_\mu$ нуж-

---

[1]) В последние годы рассматриваемые в тексте совокупности стали называть, следуя Дедекинду, *идеалами*, а термин "модуль" стал употребляться в применении к более общим совокупностям. – *Примеч. ред. нем. изд.*

[2]) Остатки гильбертовой терминологии сохранились до нашего времени в выражении "по модулю идеала". Впрочем, это можно считать и возвращением к словоупотреблению Гаусса. – *Примеч. ред. русского перевода.*

но провести через кривую C_3, чтобы всякая другая поверхность F, проходящая через C_3, имела вид

$$F = M_1 F_1 + M_2 F_2 + \ldots + M_\mu F_\mu = 0 .$$

Оказывается, что для этого достаточно взять три поверхности второго порядка F_2, F'_2 и H.

Соответствующий трехчленный модуль проще всего получается приравниванием нулю трех миноров матрицы

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix},$$

состоящей из $2 \cdot 3$ линейных форм. По определению это означает, что уравнения

$$F_\kappa = q_\lambda r_\mu - r_\lambda q_\mu = 0, \quad \kappa, \lambda, \mu = 1,2,3,$$

задают поверхности второго порядка, пересекающиеся только по кривой C_3, и что формы F_κ порождают соответствующий модуль.

У Гильберта доказательство этой теоремы, как и доказательства других его теорем, по своему характеру чрезвычайно абстрактны, но сами по себе они просты и потому логически убедительны. Это и послужило причиной того, что рассматриваемая работа Гильберта открыла в алгебраической геометрии новую эру.

Той же простотой отмечено и применение этих результатов к проблематике теории инвариантов. Но к сожалению, на этом я могу здесь остановиться и того менее. Отмечу лишь, что проблему конечности числа инвариантов, которую в свое время Гордану удалось решить для случая бинарных форм (см. стр. 341) лишь с помощью сложнейших вычислений, методы Гильберта позволили единым ударом решить для форм с произвольным числом переменных.

Прием, который поначалу встретила эта работа, был — соответственно ее своеобразию — различным. Меня она в то время подвигнула на решение при первом же удобном случае пригласить Гильберта в Гёттинген. Гордан поначалу был настроен отрицательно. "Это же не математика, это теология", — говорил он. Правда, впоследствии он сказал: "Я убедился, что и теология имеет свои преимущества". Более того, в дальнейшем он и сам сильно упростил доказательство основной теоремы Гильберта (Мюнхенский съезд естествоиспытателей, 1899 г.).

Обратимся теперь к другой работе Гильберта — к уже упоминавшейся выше (см. стр. 358) "Zahlbericht" ("Отсчет по теории чисел") 1897-го года. Внешне эта работа выглядит как обзор имеющейся литературы; однако в ней Гильберт не только сводит к более простым основаниям все реферируемые им работы, но и глубоко проникает в новые поставленные там проблемы.

В этой работе Гильберт руководствовался уже известной нам аналогией между числовыми и функциональными полями. Я тем более охотно подчеркиваю здесь эту ситуацию, что сам Гильберт высказался по этому поводу только впоследствии и лишь мимоходом – я имею в виду его доклад "Mathematische Probleme" ("Математические проблемы") на Парижском Международном конгрессе математиков в 1900 г. ("Отчет", стр. 58 и далее; Göttinger Nachrichten, 1900 г., см. № 12).

Чтобы в дальнейшем было понятно, о чем идет речь, я должен буду сделать здесь небольшое отступление о теории Галуа (см. гл. II, стр. 89 и далее).

В основе теории Галуа, как я уже отмечал, лежит понятие *области рациональности.* Сначала в качестве рациональных рассматривают либо только числа вида $\frac{m}{n}$, где m и n – обычные целые числа, либо рациональные функции $r(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ переменных $z_1, \ldots, z_n$ с произвольными вообще говоря коэффициентами. Затем область рациональности расширяется посредством присоединения каких-нибудь фиксированных иррациональностей (например, в числовом случае некоторых корней из единицы), а также всего, что через эти иррациональности выражается рационально. Например, за область рациональности можно принять совокупность всех алгебраических функций, однозначных на некоторой римановой поверхности, простирающейся над плоскостью z.

Второе основное понятие – это понятие *неприводимости* уравнения. Пусть задано уравнение

$$f(x) = 0,$$

коэффициенты которого суть либо рациональные числа, либо рациональные функции каких-либо переменных, либо – в самом общем случае – присоединенные нами иррациональности. Это уравнение называется "приводимым", если оно в данной области рациональности может быть разложено в произведение некоторых множителей. Например, уравнение

$$x^2 + 5 = 0$$

"неприводимо" в привычной всем нам области рациональности, состоящей из чисел вида $\frac{m}{n}$. Если же мы присоединим к этой области число $\sqrt{-5}$, то уравнение окажется приводимым:

$$x^2 + 5 = (x + \sqrt{-5}) \cdot (x - \sqrt{-5}).$$

Таким образом, "неприводимость" уравнения оказывается понятием относительным; оно всякий раз подразумевает некоторую наперед заданную область рациональности.

Пусть уравнение $f(x) = 0$ неприводимо в заданной области рациональности и пусть $x_1, \ldots, x_n$ – его корни. Существует группа перестановок этих корней, называемая *группой Галуа* этого уравнения и обладающая следующими свойствами:

а) Если функция $R(x_1,\ldots, x_n)$ корней сохраняет одно и то же значение при всех перестановках этой группы, то это значение рационально.

И обратно:

б) Всякая рациональная функция $R(x_1,\ldots, x_n)$ корней, имеющая рациональное значение, не меняет этого значения при всех перестановках группы.

От структуры группы Галуа (числа ее подгрупп и т.д.) зависит разрешимость этого уравнения, характер его резольвент и т.д. и т.п.

Для нас здесь существенно, что теория Галуа применима как к числовым уравнениям $f(x) = 0$, зависящим от какого-либо параметра, так и к функциональным полям.

Рассмотрим сначала последний из этих случаев. Область рациональности мы считаем здесь состоящей из рациональных функций переменной z, полностью игнорируя числовую природу фигурирующих в этих функциях коэффициентов. В этом случае понятия "неприводимости" и "группы Галуа" могут быть сделаны абсолютно наглядными.

Мы строим над плоскостью риманову поверхность данной алгебраической функции ζ. Если эта поверхность состоит из одного куска, то уравнение, которому удовлетворяет эта функция, неприводимо, и обратно!

Отметим теперь на плоскости z точки ветвления $a, b, \ldots, k$ уравнения $f(\zeta,z) = 0$ и соединим их произвольной кривой без двойных точек. Если мы вдоль этой кривой одновременно разрежем все листы римановой поверхности, то она распадется на n отдельных листов, которые мы обозначим через $\zeta_1,\ldots, \zeta_n$. Конечно, над некоторыми точками ветвления отдельные листы римановой поверхности могут и не разветвляться. Для каждой линии разреза, заключенной между двумя точками ветвления, мы запишем, как по ней соединены листы поверхности, т.е. составим таблицу связей, имеющихся между листами. При каждом переходе через линию разреза происходит некоторая перестановка листов, и перестановку эту можно найти с помощью составленной нами таблицы.

Заставляя z пробегать всевозможные замкнутые пути, мы получим группу перестановок, которую прежде мы называли *группой монодромии* данного уравнения. (Мы уже употребляли этот термин в общем случае линейных дифференциальных уравнений; см. стр. 297.)

Теперь ясно, что при указанной выше области рациональности группа монодромии является не чем иным, как группой Галуа данного уравнения. Действительно,

1. Всякая функция $R(\zeta,z)$, сохраняющая свои значения при перестановках этой группы, является – именно в силу самой этой причины – рациональной функцией от z (алгебраическая функция z, являющаяся однозначной, рациональна).

2. Всякая рациональная функция $r(z)$, будучи однозначной при обходе z по замкнутому контуру, сохраняет свое значение неизменным.

Отсюда видна связь, существующая между понятием римановой поверхности и идеями Галуа, а также становится понятно, каким образом этим последним — опять-таки с помощью римановых поверхностей — может быть придан наглядный вид. Вместо задания римановой поверхности я могу задать точку ветвления $a, b, \ldots, k$ и указать, какие группы перестановок получаются при обходах этих точек. Тем самым, мы, так сказать, возвращаемся от Римана к Пюизё, который составлял такие группы уже в 1851 г.[1]).

Но во всем этом кроется замечательная возможность перенести на числовые поля если не само понятие римановой поверхности, то хотя бы связанные с ним теоремы или, в крайнем случае, постановки задач. Ведь точкам ветвления $a, b, \ldots, k$ отвечают, как мы уже знаем, простые множители "существенного" делителя дискриминанта, а группе Галуа функционального тела отвечает группа Галуа тела числового.

Для теории чисел плодотворность этой аналогии определяется тем, что для римановых поверхностей известны теоремы, которые нельзя получить чисто алгебраическими средствами, и вот теперь открывается возможность искать их аналоги для числовых полей.

Это в первую очередь относится к римановой теореме существования, которую мы сформулируем теперь следующим образом: Любой наперед заданной алгебраической римановой поверхности над плоскотью z отвечает некоторое поле $R(\zeta, z)$.

Затем можно задаться вопросом о том, что́ в числовом поле соответствует абелевым интегралам, теореме Абеля и т.п.

Все это дает нам ключ к новой проблематике гильбертовой "Zahlbericht", а также к относящимся к этому кругу вопросов более поздним работам самого Гильберта и к работам его друзей и учеников. Гильберт хотел довести свои теоретико-числовые исследования до такой стадии, чтобы числовое поле можно было восстановить по его дискриминанту и группе Галуа; ему хотелось также получить здесь все теоремы, известные в теории функций! (См. 12-ю проблему Гильберта.) Впрочем, сам он достиг этой цели только при очень сильных ограничениях — например, в случае так называемых *полей классов,* областями рациональности которых служат поля вида $K(\sqrt{-D})$. В этом случае группа Галуа оказывается абелевой, т.е. состоящей лишь из коммутирующих друг с другом операций, а дискриминант (относительно поля $K(\sqrt{-D})$) равен единице. Полные доказательства этих утверждений были даны только Фуртвенглером. Я не имею возможности входить здесь в бо́льшие подробности. И все же мне думается, что мы кое-чего достигли, раз уж нам удалось познакомиться хотя бы с руководящими идеями этих исследований.

---

1) См. Enzykl., IB 3c, d (стр. 487).

Но вот наступила пора заканчивать нашу седьмую главу. В заключение я, следуя юбилейной статье Кронекера, опубликованной в 1881 г. в 92-м томе Журнала Крелля, еще раз охарактеризую ту наиболее общую проблему, которая имеется в этом круге вопросов. Стоящая здесь задача заключается не только в том, чтобы изучить числовые поля, или поля, зависящие от одного параметра z, или же аналоги таких полей; в конечном счете речь идет о том, чтобы для образов, одновременно являющихся и арифметическими и теоретико-функциональными, т.е. для образов, алгебраически зависящих от заданных алгебраических чисел и алгебраических функций, сделать то же самое, что более или менее полно удалось проделать в простейших случаях.

Нашим глазам предстает удивительная картина: мы видим перед собой область чисто теоретических исследований, которая благодаря царящим в ней всеобщим закономерностям привлекает нас своей огромнейшей эстетической прелестью. Однако в данный момент — как мы не можем этого не отметить — она весьма далека от каких бы то ни было приложений. Разумеется, мы тем самым вовсе не утверждаем, что она должна остаться такой и на будущее.

Глава восьмая

ТЕОРИЯ ГРУПП И ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ; АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Теория групп

Теория групп как самостоятельная научная дисциплина проходит сегодня через всю математику. В качестве начала, несущего с собой порядок и ясность, она вторгается в самые различные разделы нашей науки, и поэтому мы уже не раз встречались с ней – не только в связи с теорией уравнений, но и, например, тогда, когда мы касались вопроса об эллиптических функциях (теория ступеней). Кроме того, теория групп помогла нам провести различие между проективной, аффинной и метрической геометриями. Мы сталкивались с ней также, говоря о геометрических инвариантах. Я, однако, предпочел не посвяшать ей большого самостоятельного раздела, а лишь от случая к случаю выставлять ее в выгодном свете внутри тех или иных частей книги. Хотя мы будем так поступать и в этой главе при рассмотрении роли, которую теория групп играет в современной теории функций, но тем не менее, представляется целесообразным сказать сейчас несколько слов и о самой этой теории.

Нашим первым вопросом будет вопрос о том, что же такое группа. При ответе на него мы сталкиваемся с удивительным, но тем не менее типичным явлением: оказывается, что поворот от наглядного, активного понимания к абстрактным формулировкам произошел в последние десятилетия даже в подобного рода вопросах. Всеобшее внимание к теории групп как к незаменимому инструменту исследований в теории уравнений было привлечено лишь в 1870 г., когда был опубликован "Traité des substitutions et des équations algébriques" ("Трактат по теории подстановок и алгебраических уравнений") Камилла Жордана (подстановкой у него называется перестановка букв). Когда затем Ли и мною была предпринята попытка выяснить роль, которую теория групп играет в самых разнообразных областях математики, то "группой" у нас называлась совокупность однозначных о п е р а ц и й $A, B, C, \ldots$, обладаюшая тем свойством, что композиция любых двух операций A и B снова дает операцию, принадлежашую этой совокупности:

$$A \cdot B = C.$$

В своих дальнейших исследованиях по бесконечным группам Ли должен был кроме того четко потребовать, чтобы наряду с операцией A в группе имелась и обратная операция A^{-1}.

У современных математиков появилось более стертое, но зато более точное определение. В нем говорится уже не о системе операций, а о системе некоторых вешей, или элементов $A, B, C, \ldots$ При этом постулируется, что

1. "Произведение", или композиция любых двух элементов системы $A \cdot B = C$ принадлежит системе (условие замкнутости).

2. Выполнен ассоциативный закон, т.е.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

3. Существует единица E, для которой

$$A \cdot E = A$$

и

$$E \cdot A = A.$$

4. Существуют обратные элементы, т.е. уравнение

$$A \cdot x = E$$

всегда разрешимо.

Таким образом, какая-либо апелляция к воображению здесь отсутствует в принципе. Взамен этого тщательно препарируется логический скелет — тенденция, которую мы еше не раз будем наблюдать на протяжении этой лекции. Подобного рода абстрактные формулировки превосходны для шлифовки доказательств, но они совершенно не годятся для того, чтобы с их помошью отыскивать новые идеи и методы. Более того, как правило, они являются завершением определенного этапа предшествующего развития. Поэтому внешне они облегчают преподавание, поскольку на их основе можно просто и без каких-либо пробелов доказывать известные уже предложения. Однако они внутренне чрезвычайно затрудняют учашегося, так как он оказывается поставленным перед чем-то совершенно законченным, ничего не зная о том, как автор пришел к этим определениям; к тому же он не может себе абсолютно ничего представить. Этот метод не поощряет к тому, чтобы пользующийся им мыслил; требуется лишь внимательно следить, чтобы не погрешить против данных нам четырех заповедей.

Давайте начнем с исторического обзора. Понятие группы первоначально сложилось в теории алгебраических уравнений. Операциями группы в этом случае являются $n!$ перестановок из n корней $x_1, \ldots, x_n$ рассматриваемого уравнения. (К перестановкам причисляется и "тождественная перестановка", при которой всякий x остается на своем месте.)

По-видимому, Лагранж был первым, кто (в 1770 г.) осознал, что факт разрешимости в радикалах общих уравнений второй, третьей и четвертой степени по-настояшему становиться понятным лишь тогда, когда мы вникнем в структуру групп перестановок двух, трех и четырех букв.

Из числа математиков, занимавшихся после Лагранжа группой перестановок из n букв, нужно прежде всего упомянуть Коши, который нашел немало удивительных теорем об этой группе. Кроме группы всех перестановок важную роль играет группа, состояшая из $\frac{1}{2}n!$ так называемых "четных" перестановок (она называется "знакопеременной").

Однако центральное место в теории алгебраических уравнений теория групп заняла лишь благодаря открытию Галуа (1831 г.), который предложил и сам термин "группа". Лангранж и другие математики простодушно оперировали с областью рациональности произвольных переменных, являюшихся коэффициентами уравнений (сейчас мы говорим в этом случае об "обших" уравнениях). Галуа же вместо этого – как мы уже разъясняли раньше и, в частности, в предыдушей главе – начал предполагать заданной произвольную область рациональности и стал утверждать, что по отношению к этой области каждое конкретное уравнение характеризуется – в указанном выше смысле – определенной группой перестановок его корней, которая вовсе не обязана, как это было у Коши, содержать все перестановки (см. стр. 367 и след.).

Тем самым на повестку дня был настоятельно поставлен вопрос об исследовании всех групп, которые можно составить из перестановок из n букв. До этого рассматривались, собственно говоря, лишь отдельные примеры групп – в частности, группы, состоящие только из коммутирующих операций, – так называемые *абелевы группы.*

Задача изучения всех резольвент данного уравнения приводит к проблеме перечисления всех подгрупп группы этого уравнения. Основное относяшееся к этому кругу вопросов понятие также было введено Галуа. Давайте все операции, получаюшиеся из какой-либо подстановки T по формуле $S^{-1}TS$, называть *сопряженными с T.* Такого рода сопряженные подстановки умножаются подобно исходным, поскольку в силу ассоциативного закона имеет место равенство

$$S^{-1}TSS^{-1}US=S^{-1}TUS.$$

Если T пробегает некоторую подгруппу, то все перестановки вида $S^{-1}TS$ также пробегают – возможно другую – подгруппу, которая называется *сопряженной* с данной. Подгруппа называется *нормальной,* или *инвариантной,* если она сопряжена сама с собой, т.е. если для любой перестановки S данной группы и для любой перестановки T рассматриваемой подгруппы перестановка $S^{-1}TS$ также принадлежит подгруппе.

По Галуа группа называется *составной* или *простой* в зависимости от того, обладает она или нет инвариантными подгруппами, отличными от нее самой и от единичной подгруппы. В первом из этих случаев можно, не расширяя области рациональности коэффициентов уравнения, свести его решение к решению более простых вспомогательных уравнений. Во втором случае такое сведение невозможно; данное уравнение представляет собой проблему, нерасчленимую в рассматриваемой области рациональности. Все это хорошо видно на примере уравнений третьей и четвертой степени. Пусть a, b, c и d – четыре корня какого-либо уравнения четвертой степени. Корни эти допускают 24 перестановки. В состояшей из этих перестановок группе G_{24} содержится одна особо замечательная инвариантная подгруппа G_4, образованная следуюшими четырьмя перестановками:

T_1: $a\ b\ c\ d$,
T_2: $b\ a\ d\ c$,
T_3: $c\ d\ a\ b$,
T_4: $d\ c\ b\ a$

(вторая, третья и четвертая перестановки, получаются из первой попарной транспозицией корней a, b, c и d). Лагранж заметил, что существуют функции аргументов a, b, c, d, принимаюшие при всевозможных перестановках из группы G_{24} три различных значения. Примером может служить функция

$$z_1 = ab + cd,$$

из которой перестановкой букв a, b, c, d можно получить только две различные функции

$$z_2 = ac + bd$$

и

$$z_3 = ad + cb.$$

Все три функции z_1, z_2, z_3 инвариантны относительно перестановок из группы G_4. Поэтому при 24 перестановках корней a, b, c, d они подвергаются только $\dfrac{24}{4} = 6$ перестановкам. Поэтому эти функции являются корнями некоторого уравнения третьей степени с группой G_6, которое называется "кубической резольвентой" данного уравнения четвертой степени. Если бы этой инвариантной подгруппы G_4 у группы G_{24} не оказалось, то все это сведéние было бы невозможным.

То же самое можно сказать и относительно резольвенты второй степени кубического уравнения.

Особым достижением Галуа является то, что он в обшем виде отчетливо осознал понятие инвариантной подгруппы и исследования, выполненные Лагранжем для уравнений третьей и четвертой степени, расширил до фундаментальной обшей концепции относительно решения уравнений произвольной степени.

Я не имею возможности обсудить конкретные теоремы, получаюшиеся в этом круге идей (в них главным образом трактуется вопрос о том, при каких условиях данное уравнение решается в радикалах). Но я, надеюсь, дал почувствовать, что здесь налицо в высшей степени интересная и притом совершенно абстрактная область математики, с помошью которой под задачу решения алгебраических уравнений, ставшую традиционной с XVI в., подведен некий новый фундамент.

В книге Камилла Жордана наряду с глубоким проникновением в суть рассматриваемой проблемы впервые было дано — и это ее основная заслуга — систематическое изложение материала. В вышедшей несколько ранее книге Ж.А. Серре "Cours d'algèbre superieure" ("Курс высшей алгебры") этот вопрос проработан еше не до конца. Кстати сказать, разыскивая интересные группы перестановок, Жордан обследовал в своей книге всю алгебраическую геометрию, теорию чисел и теорию функций. Изложение при этом у него удивительно нефранцузское, неуклюжее, почти немецкое.

Впоследствии теория групп перестановок (вне зависимости от каких бы то ни было приложений к теории уравнений) развилась в самостоятельную научную дисциплину. Мы встречаемся здесь с такими именами, как Кэли, Силов, Дик, Гёльдер, Фробениус, Бернсайд, а в последнее время и с большим числом американцев. Для многих особая прелесть этой науки заключается в том, что здесь можно трудиться, не слишком много зная об остальной математике и не будучи, следовательно, вынужденным сочетать друг с другом идеи, относяшиеся к различным сферам.

А теперь мы обратимся к рассмотрению *конечных групп линейных подстановок*. Под подстановкой мы здесь будем понимать не перестановку букв, как это было у Жордана, а операцию

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

т.е. некоторое линейное преобразование. Впрочем, если угодно, перестановку букв можно рассматривать как частный случай линейной подстановки. Достаточно положить, например,

$$a' = b, \quad b' = a\ ^{1)}.$$

Простейшей конечной группой линейных подстановок является совокупность подстановок вида

$$(*) \quad z' = \epsilon^r \cdot z, \qquad r = 0, 1, \dots, n-1,$$

где

$$\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

Это так называемая "циклическая группа". Ее можно легко расширить до группы, состоящей из $2n$ подстановок

$$(**) \qquad \begin{aligned} &z' = \epsilon^r \cdot z, \\ &z' = \frac{\epsilon^r}{z}, \qquad r = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

---

[1]) По-видимому, имеется в виду, что эти равенства будут иметь место для подходящей подстановки. Например, они выполняются для подстановки $x' = -x + a + b$. — *Примеч. пер.*

где

$$\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Другие примеры конечных групп могут быть почерпнуты из рассмотрения *правильных многогранников.*

Каждому правильному многограннику отвечает группа, состоящая из вращений, в результате которых многогранник совмещается сам с собой. Такие вращения переводят в себя и двойственный многогранник, вершинами которого являются центры граней данного многогранника. Поэтому двойственные многогранники имеют одни и те же группы.

Ясно, что

тетраэдр двойствен *тетраэдру,*

октаэдр двойствен *кубу,*

икосаэдр двойствен *додекаэдру.*

То, что вращения, самосовмещающие данный правильный многогранник, образуют группу, очевидно, ибо любые два таких вращения, будучи последовательно выполнены друг за другом, снова дают такое же вращение, причем, конечно, выполнен ассоциативный закон.

В случае тетраэдра мы получаем группу, состоящую из

$$4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 12$$

вращений, а именно – из $8 = 4 \cdot 2$ вращений на угол $\frac{2\pi}{3}$ $\left(\text{или } \frac{4\pi}{3}\right)$ вокруг осей, соединяющих вершины тетраэдра с противолежащими вершинами двойственного тетраэдра, $3 = 3 \cdot 1$ вращения на угол $\frac{2\pi}{2}$ вокруг осей, соединяющих середины двух противолежащих ребер, и одно "тождественное" вращение.

Аналогичным образом, в случае октаэдра мы получаем

$$3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 1 = 24$$

вращения, а в случае икосаэдра

$$6 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 1 + 1 = 60$$

вращений. Таким образом,

в случае тетраэдра мы имеем группу G_{12};

в случае октаэдра и куба – группу G_{24};

в случае икосаэдра и додекаэдра – группу G_{60}.

В ходе этих исследований я открыл еще один – шестой – правильный многогранник: *диэдр.* Если часть плоскости, ограниченную сторонами правильного n-угольника, представить себе двойной, то такую конфигурацию можно будет рассматривать как правильный многогранник, который самосовмещается при n вращениях вокруг своей главной оси и при стольких же вращениях вокруг прямых, лежащих в его экваториальной плоскости. [Обычное определение правильного многогранника здесь применимо; только объем диэдра оказывается равным нулю. Группой диэдра является указанная выше группа (**).]

Удобно ввести в рассмотрение сферу, проходящую через вершины данного правильного многогранника. Ребра и грани многогранника мы из центра спроектируем на сферу. Если теперь эту сферу рассматривать как носительницу комплексной переменной $x + iy$, то каждому вращению будет отвечать некоторая линейная подстановка переменной $z = x + iy$, а группе вращений – группа подстановок.

В свое время мне удалось показать, что за исключением перечисленных нет никаких других конечных групп линейных преобразований одной переменной (Math. Annalen, 1875, т. 9; Erlanger Berichte, 1874[1])).

Подстановки групп тетраэдра и октаэдра в неявном виде часто встречались в старой литературе. Что же касается подстановок группы икосаэдра, то эти подстановки оказались новыми. При надлежащем выборе координат они изображаются формулами

$$z' = \epsilon^{\mu} \cdot z,$$

$$z' = -\frac{\epsilon^{4\mu}}{z},$$

$$z' = \epsilon^{\nu} \cdot \frac{-(\epsilon - \epsilon^4)\,\epsilon^{\mu} z + (\epsilon^2 - \epsilon^3)}{(\epsilon^2 - \epsilon^3)\,\epsilon^{\mu} z + (\epsilon - \epsilon^4)},$$

$$z' = -\epsilon^{4\nu} \cdot \frac{(\epsilon^2 - \epsilon^3)\,\epsilon^{\mu} z + (\epsilon - \epsilon^4)}{-(\epsilon - \epsilon^4)\,\epsilon^{\mu} z + (\epsilon^2 - \epsilon^3)},$$

где $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$,

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4.$

Группа тетраэдра G_{12} и группа октаэдра G_{24} являются составными, группа же икосаэдра G_{60} – простой.

А теперь эти группы можно подвергнуть дальнейшему расширению, а именно – удвоить их путем добавления "диаметрального" отображения, заменяющего каждую точку сферы диаметрально ей противоположной. В расширенных таким образом группах содержатся, в частности, все зеркальные отражения относительно плоскостей симметрии соответствующих многогранников, т.е. относительно шести плоскостей тетраэдра, девяти плоскостей октаэдра и пятнадцати плоскостей икосаэдра. Таким образом, в качестве "расширенных" групп мы получаем

для тетраэдра группу $\overline{G}_{24}$,
для октаэдра группу $\overline{G}_{48}$,
для икосаэдра группу $\overline{G}_{120}$.

---

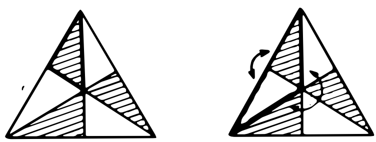
[1]) См. K l e i n F. Ges. Abh., т. 2, Nr. LI.

Я сделаю теперь два замечания, которые будут нужны нам и в дальнейшем.

1. Плоскостями симметрии каждая грань правильного многогранника делится на шесть конгруэнтных или симметричных треугольников. В случае икосаэдра это дает, например, разбиение сферы на 120 треугольников. Мы через один заштрихуем эти треугольники. При каждом из вращений соответствующие заштрихованные треугольники переходят в заштрихованные, и, наоборот, незаштрихованные – в незаштрихованные. Чтобы перевести заштрихованный треугольник в незаштрихованный нужны зеркальные отражения (или, более общо, произвольные преобразования группы $\overline{G}_{120}$, отличные от вращений).

Каждой точке сферы в каждом из этих треугольников отвечает одна и только одна точка, в которую данная точка может быть переведена преобразованием из группы $\overline{G}_{120}$. Таким образом, чтобы для данной точки найти точку, эквивалентную ей в силу группы, необходимо перейти как минимум в соседний треугольник. Обладающие этим свойством области, т.е. такие, что любая точка сферы эквивалентна одной и только одной точке области, называются *фундаментальными областями* данной группы. Это понятие принадлежит Фрике, которые назвал их "областями разрывности" (Diskontinuitätsbereich). (Чтобы фундаментальные области можно было построить, необходимо, чтобы группа была "разрывной", т.е. чтобы эквивалентные в силу этой группы точки лежали раздельно.)

Любые два прилегающих треугольника совместно образуют фундаментальную область группы G_{60}. При этом, однако, необходимо правильно учитывать граничные точки. На правой части рис. 33 к фундаментальной области следует причислять только одну сторону треугольника и только одну половину его основания!



Фундаментальная область группы G_{120} группы G_{60}

Рис. 33

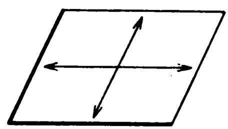


Рис. 34

Заметим, что понятие фундаментальной области уже известно нам из теории двоякопериодических функций. Параллелограмм периодов как раз и представляет собой фундаментальную область бесконечной группы линейных подстановок

$$u' = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

причем стороны параллелограмма попарно соответствуют друг другу, и из двух таких сторон к фундаментальной области должна причисляться только одна (см. рис. 34).

2. Существует замечательная связь между группой икосаэдра G_{60} и шестьюдесятью "четными" перестановками из пяти элементов. Если середины тридцати сторон икосаэдра взять в качестве вершин пяти октаэдров, то при любом из шестидесяти вращений икосаэдра октаэдры эти будут переставляться друг с другом. Таким образом, группа вращений икосаэдра G_{60} изоморфна[1]) группе четных перестановок из пяти элементов.

Что же касается расширенной группы икосаэдра $\overline{G}_{120}$, то она, наоборот, не изоморфна группе G_{120} всех перестановок из пяти элементов. "Диаметральное" отражение (с помощью которого группа $\overline{G}_{120}$ получается из группы G_{60}) оставляет каждый из этих октаэдров на месте и, значит, не имеет ничего общего с перестановками этих октаэдров. У "расширенной" группы $\overline{G}_{120}$ имеются следующие инвариантные подгруппы:

а) группа вращений G_{60};

б) группа G_2, состоящая из тождественного преобразования и диаметрального отражения.

Группа же G_{120} перестановок из пяти элементов хотя и обладает инвариантной подгруппой G_{60} (являющейся не чем иным, как знакопеременной группой), но никакой инвариантной подгруппы G_2 не имеет. Таким образом, ее структура совершенно иная.

Замечание 1 (стр. 378) подводит нас к рассмотрению других разрывных (не конечных) групп линейных подстановок одной переменной, откуда в конечном счете ведет свое начало общая теория однозначных автоморфных функций, о которой мы будем говорить ниже. Замечание же 2 приводит к обнаружению замечательной связи, существующей между икосаэдром и теорией уравнений пятой степени, о чем мы тоже должны будем еще поговорить.

Но прежде всего несколько слов о дальнейшем развитии этих исследований. Оно протекало в двух направлениях, часто переплетавшихся друг с другом:

1. Конечные группы линейных подстановок нескольких переменных. Первым здесь тоже был К. Жордан. Затем мне и Валентинеру удалось найти простейшие (нетривиальные) примеры, исследованные впоследствии Блихфельдтом. Общая теория для случая n переменных была намечена Фробениусом и И. Шуром. Как икосаэдр способствует разработке теории уравнений пятой степени, так и здесь мы приходим к некоей общей теории уравнений шестой и седьмой степени!

2. Бесконечные группы линейных подстановок одной переменной (в частности те, которые вслед за Пуанкаре называются "собственно разрывными", т.е. группы, имеющие в плоскости $x + iy$ — или соответственно на сфере $x + iy$ — фундаментальные области конечного протяжения). Простейший пример этого рода дает теория двоякопериодических функций, параллелограмм периодов которых представляет собой фундаментальную

---

[1]) То есть, абстрактно говоря, совпадает с ней.

область бесконечной группы линейных подстановок

$$u' = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 .$$

Функции, инвариантные относительно таких конечных или бесконечных групп, я называю *автоморфными функциями.* В дальнейшем мы еще поговорим о них более подробно.

Однако до этого я хотел бы еще рассказать, каким образом теоретико-групповые и геометрические соображения, аналогичные тем, с которыми мы познакомились в случае конечных линейных подстановок, находят себе применение в *кристаллографии;* в частности, в том ее разделе, который называется сейчас структурной теорией.

Как я в свое время уже отмечал, кристаллография самыми разными способами связана с математикой. Вспомните хотя бы о "законе зон" Фр. Неймана (1823 г., см. стр. 242 и далее).

В дальнейшем мы будем исходить из непрерывной группы всех движений в пространстве, состоящей из ∞^6 преобразований. В случае надобности мы будем считать эту группу расширенной добавлением ∞^6 движений второго рода (зеркальных отражений, перевертываний). В результате мы снова получим группу из ∞^6 преобразований.

Поставим задачу разыскать все собственно разрывные подгруппы G (или соответственно $\overline{G}$) этой группы и построить их фундаментальные области, т.е. разложить пространство на конгруэнтные или соответственно конгруэнтные и симметричные многогранники, которые переводятся друг в друга преобразованиями подгруппы. В пространстве эта задача чрезвычайно сложна. Поэтому мы поясним ее на примере плоскости. Затем полученные результаты можно будет по аналогии перенести и на пространство. Таким образом, вместо решетки параллелепипедов в пространстве мы будем рассматривать обычную решетку параллелограммов на плоскости. Мы возьмем даже решетку квадратов. Соответствующая группа движений, фундаментальной областью которой служит квадрат решетки, состоит из одних параллельных переносов (рис. 35; стрелки указывают соответствие между ребрами). Однако можно устроить подразделение рассматриваемой сетки, и тогда в качестве новых операций добавятся вращения, а может быть, и зеркальные отражения. Соответствующее подразделение

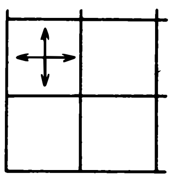


Рис. 35

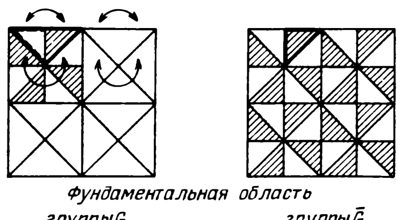


Рис. 36

плоскости будет тогда состоять из конгруэнтных или соответственно конгруэнтных и симметричных треугольников (в последнем случае мы через один подвергнем треугольники штриховке; рис. 36). При вращениях, т.е. при операциях группы G, заштрихованные треугольники переходят в заштрихованные, незаштрихованные – в незаштрихованные. Операциями же расширенной группы $\overline{G}$ друг в друга могут быть переведены любые два треугольника. Каждый из треугольников является фундаментальной областью группы, состоящей из вращений и перевертываний плоскости. При этом к фундаментальной области группы $\overline{G}$ относится вся ее граница, тогда как к соответствующей области группы G нужно относить лишь одну из сторон и половину основания соответствующего треугольника.

Теперь легко сообразить, что аналогичные возможности имеются и в пространстве, но исчерпывающее их перечисление, естественно, является делом более трудным. Разбиениям плоскости будут здесь соответствовать решетки параллелепипедов и, в частности, системы кубов, отдельные элементы которых определенным образом подразделены на части, и т.д. и т.п.

Связь между разбиениями пространства и кристаллографией заключается в том, что каждое такое разбиение определяет кристалл или, точнее, кристаллическую среду. Для этого в одну из фундаментальных областей мы мысленно помещаем какой-нибудь совершенно произвольный агрегат молекул, а затем такие же агрегаты вносим в соответствующие места всех других областей.

К такой постановке задачи структурной теории и к ее исчерпывающему решению кристаллографы, испытывая серьезные колебания, подбирались в течение десятилетий. См. об этом Обзор 7, написанный Либишем, Шёнфлисом и Мюгге для 5-го тома "Энциклопедии".

Здесь следует назвать имена Браве, Зонке и др. Однако первым, кто нашел полное решение задачи, был русский ученый Федоров (1885 г.). В 1891 г. основы этой теории были заново построены Шёнфлисом и изложены в его учебнике "Kristallsysteme und Kristallstruktur" ("Кристаллические системы и структура кристаллов", Лейпциг, 1891[1])). Результат состоит в том, что имеется 65 групп G и 165 групп $\overline{G}$ – и, значит, всего 230 групп.

Я не могу не отметить, как медленно эта теория прокладывала себе путь у кристаллографов и физиков. Еще примерно в 1890 г. среди специалистов было принято рассматривать кристалл – или, лучше сказать, кристаллическую среду – как некий заполняющий пространство континуум, который во всех его точках обладает одними и теми же свойствами! С этой точки зрения требуется лишь выяснить, какие группы вращений (или же движений второго рода), совместимые с известным кристаллографическим законом рациональных индексов, могут иметься в заданной ф и к с и р о-

---

[1]) Недавно в новой обработке этот учебник вышел под названием "Theorie der Kristallstruktur", Берлин, 1923. См. также N i g g l i P. Geometrische Kristallographie des Diskontinuums. – Leipzig, 1919.

в а н н о й точке. Это дает 32 известные "кристаллические системы". Однако дальнейший путь здесь закрыт. Закон рациональных индексов, являющийся следствием представлений структурной теории, возникает в этой теории как deus ex machina[1]).

Такая отрицательная позиция не помешала мне отметить и подчеркнуть в приветственной речи, с которой я обратился к Международному конгрессу в Чикаго (1893 г.), достижения этой теории, ибо – подобно Шёнфлису – я был убежден в необходимости совместных и согласованных действий умозрительного мышления и приложений.

И вот в 1912 г. последовало сделанное Лауэ открытие дифракции рентгеновских лучей на кристаллических средах! Теперь мы н а б л ю д а е м дискретность структуры кристаллов, т.е. пространственную упорядоченность их молекул, и как необходимым теоретическим субстратом пользуемся как раз тем, что было создано Федоровым и Шёнфлисом.

Автоморфные функции

Обратимся теперь к теории *автоморфных функций*. Здесь я затрагиваю основную сферу моей собственной деятельности. Мне представляется весьма важным, чтобы мое изложение этого круга вопросов было освещено личными воспоминаниями и чтобы оно было доведено до момента, когда болезнь помешала мне продолжить эту работу, т.е. до 1882/83 г. Я с самого начала перечислю здесь три книги по этому вопросу, которые впоследствии были написаны либо мною, либо по моей инициативе, так как мне часто придется на них ссылаться:

1. К л е й н "Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade" ("Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени", 1884).

2. К л е й н и Ф р и к е "Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen" ("Лекции по теории эллиптических модулярных функций"; т. 1, 1890; т. 2, 1892).

3. Ф р и к е и К л е й н "Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen" ("Лекции по теории автоморфных функций"; т. 1, 1897; т. 2, 1901, 1911, 1912).

Первая из этих книг задумана в основном как учебник, вторая и третья носят характер монографий. Во второй рассматривается группа подстановок

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

---

[1]) Бог из машины (*лат.*). Выражение, приписываемое Платону. В данном контексте оно означает ни на чем не основанный вывод. – *Примеч. пер.*

где α, β, γ и δ – целые числа такие, что $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$. Рассмотрение носит ярко выраженную теоретико-групповую направленность. Ищутся подгруппы простейших типов, имеющиеся у этой группы, определяются их фундаментальные области, а затем по всем правилам римановской теории функций делаются выводы о существовании и о характере соответствующих однозначных автоморфных (= модулярных) функций. Наше прежнее обсуждение эллиптических функций уже не раз касалось этих вопросов. В третьей из перечисленных книг на основе геометрических построений находятся наиболее общие собственно разрывные группы линейных подстановок одной переменной и исследуются соответствующие однозначные автоморфные функции. Это та самая область, где я в 1881 – 1882 гг. вступил в отношения с Пуанкаре и стал конкурировать с ним. Наиболее общие из числа сформулированных там мною теорем только недавно были доказаны Кёбе [1]).

Дополнительно укажу еще большой реферат Фрике об "автоморфных функциях, включая модулярные" ("Энциклопедия", т. II, B 4) – весьма полезную сводку, доведенную из 1913 г.[2]).

Я позволю себе выбрать подход к этим вопросам, не совсем соответствующий провозглашенной мною систематической точке зрения, но зато находящийся в большем согласии с историческим развитием.

Уже для того, чтобы вникнуть в теорию двоякопериодических функций

$$\wp\,(u \mid \omega_1, \omega_2) \quad \text{и} \quad \wp'(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

можно избрать два различных пути. С одной стороны, можно начать с разбиения плоскости u на параллелограммы и отсюда придти прямо к построению функций $\wp(u)$ и $\wp'(u)$ и установлению существующего между ними соотношения

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

С другой стороны, можно (как это исторически и происходило), отталкиваясь от эллиптического интеграла

$$u = \int \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}},$$

убедиться, что риманова поверхность, отвечающая уравнению

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

будучи надлежащим образом разрезана, однолистно отображается функ-

---

[1]) См. стр. 420. – *Примеч. пер.*

[2]) В дальнейшем нужно всюду учитывать дополнения, замечания и пояснения к соответствующим работам Клейна, сделанные в процессе подготовки к печати его "Собрания сочинений" ("Gesammelte mathematische Abhandlungen", в трех томах, Берлин, 1921 – 1923). – *Примеч. ред. нем. изд.*

цией u на параллелограмм, который по мере того, как путь интегрирования пересекает разрезы поверхности, снова и снова репродуцируется, порождая решетку параллелограммов.

Вполне аналогично обстоит дело и в теории автоморфных функций. Либо мы исходим из плоскости (соответственно сферы) переменной ζ и ее разбиения на эквивалентные фундаментальные области и ищем однозначные функции ζ, инвариантные относительно соответствующей группы линейных подстановок, либо же отталкиваемся – в соответствии с ходом исторического развития – от некоторого *линейного дифференциального уравнения второго порядка*

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} + p_1\frac{d\eta}{dz} + p_2\eta = 0,$$

где p_1 и p_2 – рациональные или же алгебраические функции z, принадлежащие некоторой римановой поверхности над плоскостью z. Последнее возвращает нас к тому, что было сказано в главе шестой о линейных дифференциальных уравнениях.

Итак, мы снова возвращаемся к Риману, точнее – к его знаменитой лекции о гипергеометрическом ряде, прочитанной зимой 1858/59 г. Лекция эта была застенографирована фон Бецольдом, ставшим впоследствии физиком, и долгое время оставалась неизвестной, пока в 1897 г. она не была прислана мне и не была в 1902 г. в существенной своей части издана Нётером и Виртингером в их "Дополнениях" к "Трудам" Римана. Обстоятельства сложились так, что многое из того, что содержалось в этой лекции, было за это время переоткрыто и опубликовано другими. Можно указать, в частности, работу Шварца "Über diejeningen Fälle, in welchen die Gauß-ische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt" ("О случаях, когда гауссов гипергеометрический ряд представляет алгебраическую функцию своего четвертого аргумента"; Журнал Крелля, 1872/73, т. 75 = "Собрание сочинений" Шварца, т. 2, стр. 211 и далее; предварительное сообщение о результатах было опубликовано в 1871 г. в Цюрихе = "Собрание сочинений", т. 2, стр. 172 и далее), а также кое-какие фрагменты моей собственной работы "Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades" ("О преобразовании эллиптических функций и решении уравнений пятой степени", Math. Annalen, 1878, т.14[1])). Следует отметить, что Гаусс, как это явствует из его наследия (см. т. 8 "Трудов" Гаусса), многое предвосхитил и здесь.

Для того, чтобы обзор мой не был чересчур уж расплывчатым, я включу в него – разумеется, без доказательств – некоторые подробности.

Гипергеометрический ряд

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2 + \dots,$$

[1]) См. Klein F. Ges. Abh., т. 3, стр. 13 и далее.

сходящийся при $|z| < 1$ (а иногда и при $|z| = 1$), представляет собой частный интеграл линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}\,\frac{d\eta}{dz} + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}\eta = 0$$

с тремя особыми точками $z = 0, 1, \infty$.

Все решения этого уравнения могут быть представлены гипергеометрическими рядами от одного из следующих шести аргументов:

$$z,\ 1-z,\ \frac{1}{z},\ \frac{1}{1-z},\ \frac{z}{1-z},\ \frac{z-1}{z}$$

и сходящимися соответственно либо в единичном круге E_0 с центром в точке $z = 0$, либо в единичном круге E_1 с центром в точке $z = 1$, либо во внешности круга E_0, либо во внешности круга E_1, либо в полуплоскости, лежащей слева от прямой, соединяющей точки пересечения граничных окружностей кругов E_0 и E_1, либо, наконец, в полуплоскости, лежащей справа от этой прямой (рис. 37). Нахождение этих решений и изучение имеющихся между ними взаимосвязей представляет собой задачу, не столь трудную, как кропотливую, и мы здесь на ней останавливаться не будем.

Это в элементарном изложении как раз то, что Риман, исходя из некоторой общей точки зрения, почти без вычислений получил в своей работе 1857-го года "Beiträge zur Theorie der durch die Gaußische Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma;\,z)$ darstellbaren Funktionen" ("К теории функций, представимых гауссовым рядом $F(\alpha,\beta,\gamma;\,z$")). См. выше стр. 279 и 297.

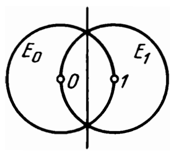


Рис. 37

А теперь пойдет новое — то, что было изложено Риманом в его лекции 1858/59 г., а затем позже найдено Шварцем.

Пусть η_1 и η_2 — два частных решения указанного выше уравнения и пусть

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \zeta.$$

Тогда все решения этого уравнения могут быть представлены в виде

$$\eta = m\eta_1 + n\eta_2.$$

Поэтому когда z совершает полные обходы вокруг точек 0, 1 и ∞, решения η_1 и η_2 переходят в некоторые их линейные комбинации

$$\eta_1' = \alpha\eta_1 + \beta\eta_2,$$
$$\eta_2' = \gamma\eta_1 + \delta\eta_2.$$

Таким образом, выполняя всевозможные обходы, мы получим целую группу линейных подстановок; эту группу мы раньше называли "группой монодромии" данного линейного дифференциального уравнения[1]).

Частное $\zeta = \dfrac{\eta_1}{\eta_2}$ подвергается при этих обходах дробно-линейным подстановкам

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}.$$

Записывая уравнение второго порядка, которому удовлетворяет η, в виде

$$\eta'' + p_1\eta' + p_2\eta = 0,$$

мы получим для ζ дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2 = 2p_2 - \frac{1}{2}p_1^2 - p_1'.$$

По предложению Кэли выражение, стоящее в левой части этого уравнения, называется *дифференциальным параметром Шварца.* Подставив в его правую часть значения коэффициентов p_1 и p_2, мы получим уравнение

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2 = \frac{1-\lambda^2}{2z^2} + \frac{1-\mu^2}{2(1-z)^2} - \frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{2z(1-z)},$$

где

$$\lambda^2 = 1-\gamma^2, \quad \mu^2 = (\gamma-\alpha-\beta)^2,$$
$$\nu^2 = (\alpha-\beta)^2,$$

причем числа λ, μ и ν — в предположении, что параметры α, β и γ вещественны, — считаются положительными. Построенную выше группу подстановок

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$$

мы будем также называть группой монодромии уравнения для ζ.

Вот мы и приобщились к группам линейных подстановок одной переменной!

Отправляясь отсюда, Риман и Шварц показывают, что любое частное решение ζ нашего уравнения третьего порядка дает в случае, когда λ, μ и ν

[1]) Естественно, величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, фигурирующие в этих подстановках, не имеют ничего общего с параметрами ряда $F(\alpha, \beta, \gamma;\ z)$.

вещественные, чрезвычайно простое конформное отображение верхней z-полуплоскости, а именно — отображение на криволинейный треугольник, образованный дугами окружностей, пересекающихся под углами $\lambda\pi$, $\mu\pi$ и $\nu\pi$ (рис. 38). Расположение этого треугольника зависит от выбора частного решения ζ, и при другом выборе решения треугольник подвергается преобразованию из группы монодромии. При этом нужно следить за направлением обхода. Если вещественной оси приписать направление от $-\infty$ к $+\infty$, то треугольник будет обходиться против часовой стрелки.

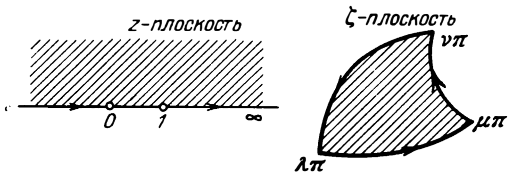


Рис. 38

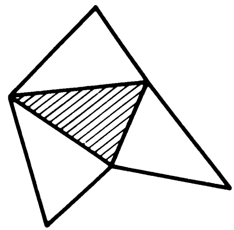


Рис. 39

Сам по себе это один из красивейших примеров конформного отображения двух односвязных областей. Но кроме того, в этом случае имеет место то замечательное обстоятельство, что, отправляясь от одного треугольника, мы можем чисто геометрически восстановить весь дальнейший ход функции. Иначе говоря, аналитическое продолжение мы можем осуществить здесь и не прибегая к громоздкому вспомогательному аппарату бесконечных степенных рядов! Достаточно воспользоваться так называемым *принципом симметрии* (*отражения*), согласно которому, отразив треугольник относительно одной из его сторон по закону обратных радиусов, мы получим образ нижней полуплоскости, после следующего отражения — снова образ верхней полуплоскости и т.д.

Особенно простая и типичная картина — если мы пожелаем остаться на плоскости — получается в случае прямолинейного треугольника, когда $\lambda + \mu + \nu = 1$ (рис. 39). Другие случаи лучше рассматривать на сфере. Стереографическая проекция на ζ-сферу переводит треугольник, ограниченный тремя дугами окружностей, в треугольник на сфере, ограниченный тремя плоскими сечениями сферы. При этом зеркальному отражению от стороны треугольника отвечает "отражение" в высекающей эту сторону плоскости, т.е. операция, заменяющая каждую точку сферы точкой, которая лежит с данной точкой и с полюсом плоскости относительно сферы на одной прямой (рис. 40). В частности, если плоскость проходит через центр сферы, то полюс P уходит в бесконечность и наше "отражение" совпадает с обычным зеркальным отражением.

Теперь уже нетрудно понять, как возникают здесь правильные многогранники. Каждый правильный многогранник — например, икосаэдр — оп-

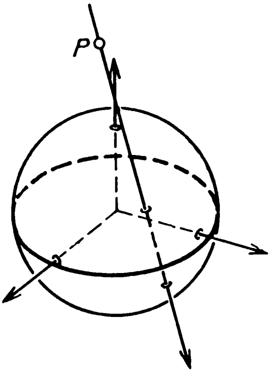


Рис. 40

ределяет, как мы знаем, некоторое разбиение описанной вокруг него сферы на треугольники (высекаемые на сфере плоскостями симметрии этого многогранника; в случае икосаэдра этих треугольников 120, мы условились штриховать их через один). Раньше эти треугольники мы интерпретировали как фундаментальные области соответствующих расширенных групп вращений. А теперь мы видим, что те же самые разбиения возникают в теории некоторых специального вида гипергеометрических функций. Именно, каждый из треугольников разбиения является конформным образом верхней или нижней z-полуплоскости при функции, получающейся полным аналитическим продолжением указанной выше функции ζ.

Сам Шварц обозначал функцию ζ буквой s, а более развернуто – символом $s(\lambda, \mu, \nu;\ z)$ по первой букве слова Sphära, так как задаваемое этой функцией конформное отображение становится особенно наглядным, когда оно осуществляется на сфере. Ныне за этой функцией закрепилось название "функция треугольника" ["Dreiecksfunktion"; см. мои литографированные лекции 1893–1894 гг. "Über die hypergeometrishe Funktion" ("О гипергеометрической функции")].

Займемся теперь специально икосаэдром. Сначала я еще раз напомню, что к разбиению сферы на треугольники плоскостями симметрии правильных многогранников мы подошли двумя различными путями: один раз – от теории групп линейных подстановок, а другой – от теории гипергеометрических функций. Фундаментальная область соответствующей группы, возникающая при первом подходе, при втором представляет собой конформный образ z-плоскости при отображении посредством гипергеометрической функции ζ [или, в других обозначениях, – посредством функции $s(\lambda; \mu, \nu;\ z)$] и носит название *фундаментальной области* функции ζ.

Функция ζ для случая икосаэдра осуществляет отображение верхней z-полуплоскости на сферический треугольник с углами $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{5}$. Поэтому, следуя Шварцу, мы будем обозначать ее символом

$$s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5};\, z\right).$$

Эта функция связана с самыми разнообразными вещами, и мы поэтому займемся ею более детально.

Функция $s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5};\, z\right)$ – равно как и другие аналогичные ей функции, возникающие в связи с другими правильными многогранниками, – характеризуется следующими свойствами:

1. Треугольники, являющиеся образами z-плоскости или соответственно верхней и нижней полуплоскостей, покрывают ζ-сферу *в один слой* и *без пробелов*.

2. Число треугольников этого покрытия конечно (для икосаэдра их 60 или соответственно 120) — в отличие от случая прямолинейного треугольника с углами $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$, с которым мы имели дело в случае кристаллической структуры (см. стр. 381, рис. 36); тогда у нас имелось однократное покрытие z-плоскости бесконечным числом треугольников (причем точка $\zeta = \infty$ была их предельной точкой).

Поэтому в случае икосаэдра мы можем сказать, что функция $\zeta(z)$ является 60-значной, поскольку каждому значению z в каждом из 60 заштрихованных или незаштрихованных сферических треугольников отвечает одна вполне определенная точка. Что же касается функции $z(\zeta)$, то она однозначна. На сфере, в вершинах треугольников, сходятся по 3 по 2 или по 5 пар треугольников. Поэтому рассматриваемое разбиение сферы определяет некоторую 60-листную риманову поверхность над z-плоскостью, листы которой соединены в точках $z = 0, 1, \infty$ по 3, по 2 и по 5 соответственно. Так как функция $z(\zeta)$ однозначна, а функция $\zeta(z)$ 60-значна, то z — рациональная функция ζ степени 60:

$$z = R_{60}(\zeta).$$

Строение этой функции можно уточнить.

Точки $z = 0, 1, \infty$ должны быть соответственно 3-, 2- и 5-кратными корнями функции ζ. Поскольку z является рациональной функцией ζ 60-й степени, это означает, что имеет место пропорция

$$z : z - 1 : 1 = \varphi_{20}^3 : \psi_{30}^2 : \chi_{12}^5,$$

где φ, ψ и χ — многочлены от ζ степеней 20, 30 и 12 соответственно.

Шварц был первым, кто вычислил эти многочлены. Для этого он сначала нашел их нули на ζ-сфере, а затем перемножил соответствующие линейные множители. Мне удалось заметить, что достаточно вычислить лишь χ_{12}, после чего φ_{20} и ψ_{30} получаются с помощью несложных и уже известных процедур теории инвариантов.

Чтобы вычислить χ_{12}, мы сориентируем икосаэдр так, чтобы две из его вершин совпали с точками $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$, а две другие попали на меридиан вещественных чисел. Пусть точка $\zeta = 1$ лежит на экваторе сферы (рис. 41). Это однозначно фиксирует на сфере систему координат. Две вершины икосаэдра, лежащие на меридиане вещественных чисел и отличные от 0 и ∞, имеют координаты

$$\epsilon + \epsilon^4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad \epsilon^2 + \epsilon^3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Эти значения координат получаются из формул

$$-\zeta' = \frac{-(\epsilon-\epsilon^4)\epsilon^\mu\zeta_0 + (\epsilon^2-\epsilon^3)}{(\epsilon^2-\epsilon^3)\epsilon^\mu\zeta_0 + (\epsilon-\epsilon^4)},$$

$$-\zeta'' = \frac{(\epsilon^2-\epsilon^3)\epsilon^\mu\zeta_0 + (\epsilon-\epsilon^4)}{-(\epsilon-\epsilon^4)\,\epsilon^\mu\zeta_0 + (\epsilon^2-\epsilon^3)}$$

при приравнивании ζ_0 нулю.

Координаты ζ остальных вершин получаются умножением на ϵ^ν ($\nu = 0, 1, 2, 3, 4$). Тем самым мы получаем следующие координаты всех 12 вершин икосаэдра:

$$\begin{array}{ll} \zeta = 0, & \zeta = \epsilon^\nu(\epsilon+\epsilon^4), \\ \zeta = \infty, & \zeta = \epsilon^\nu(\epsilon^2+\epsilon^3) \end{array} \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Теперь, чтобы уравнять в правах точку $\zeta = \infty$, удобно сделать ζ однородным, т.е. расщепить его в $\zeta_1 : \zeta_2$. Тогда будет иметь место равенство

$$\chi_{12} = \zeta_1\zeta_2\,[\zeta_1^5 - (\epsilon+\epsilon^4)^5\zeta_2^5]\cdot[\zeta_1^5 - (\epsilon^2+\epsilon^3)^5\zeta_2^5],$$

или, после раскрытия скобок, — равенство

$$\chi_{12} = \zeta_1\zeta_2(\zeta_1^{10} + 11\zeta_1^5\zeta_2^5 - \zeta_2^{10}).$$

Эта форма будет лежать в основе всех наших дальнейших вычислений, и мы будем обозначать ее просто буквой f. (Собственно говоря, нужно было

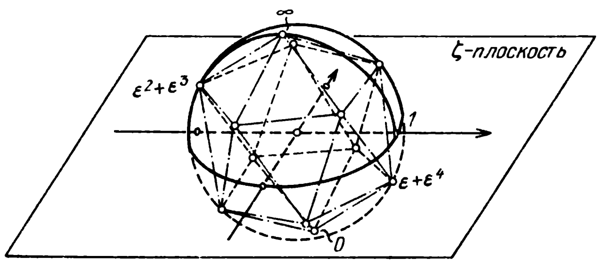


Рис. 41

бы взять некоторое кратное формы f, но здесь нам удобнее опустить все ненужные для наших теперешних целей числовые множители.) Приравнивание f нулю дает все 12 вершин икосаэдра.

А теперь с помощью обычных для теории инвариантов рассуждений мы найдем φ_{20} и ψ_{30}.

Надлежащим образом распорядившись числовыми множителями, мы по правилам формальной теории инвариантов получим в качестве простейших ковариантов формы f сначала гессиан

$$H = \frac{1}{121}\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix},$$

а затем функциональный определитель форм f и H:

$$T = \frac{1}{20}\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix}.$$

Так как каждый член гессиана имеет степень 10, то его степень равна 20. Поэтому производные H_1 и H_2 являются формами степени 19. Поскольку же степень производных f_1 и f_2 равна 11, то степень формы T равна 30.

Теперь можно показать, что форма φ_{20} совпадает с гессианом H, а форма ψ_{30} — с функциональным определителем T.

Факт этот доказывается очень просто. Формы H и T, будучи ковариантами формы f, остаются, подобно f, инвариантными при всех 60 вращениях икосаэдра (имеется в виду, что линейные подстановки над ζ мы заменяем линейными подстановками над ζ_1 и ζ_2 с определителем, равным единице). Следовательно, приравнивая H нулю, мы получаем 20 точек сферы, переходящих друг в друга при преобразованиях из группы икосаэдра G_{60}. Уравнение $T = 0$ дает 30 точек, обладающих тем же свойством. Но при вращениях из группы G_{60} каждая точка сферы переходит, вообще говоря, в 60 эквивалентных точек за исключением 12 вершин икосаэдра, 20 вершин додекаэдра и 30 середин ребер. Поэтому любой агрегат точек, переходящих друг в друга при вращениях группы G_{60}, должен быть объединением таких групп точек. Поэтому число точек, входящих в его состав, может быть записано в виде $60\alpha + 12\beta + 20\gamma + 30\delta$, где α, β, γ и δ — целые числа. Поскольку уравнения

$$60\,\alpha + 12\beta + 20\gamma + 30\delta = 20$$

и

$$60\,\alpha + 12\beta + 20\gamma + 30\delta = 30$$

имеют только по одному неотрицательному целочисленному решению, а именно

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 1, \qquad \delta = 0$$

и соответственно

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = 1,$$

отсюда следует, что уравнение $H = 0$ дает 20 вершин додекаэдра и, значит, совпадает с уравнением $\varphi_{20} = 0$, а уравнение $T = 0$ дает 30 середин ребер икосаэдра и, значит, совпадает с уравнением $\psi_{30} = 0$.

А теперь мы вычислим H и T (опуская не интересующие нас числовые множители) и получим, что

$$H = -(\zeta_1^{20} + \zeta_2^{20}) + 228(\zeta_1^{15}\,\zeta_2^{5} - \zeta_2^{15}\,\zeta_1^{5}) - 494\,\zeta_1^{10}\,\zeta_2^{10},$$

$$T = -(\zeta_1^{30} + \zeta_2^{30}) + 522(\zeta_1^{25}\,\zeta_2^{5} - \zeta_2^{25}\,\zeta_1^{5}) - 10005(\zeta_1^{20}\,\zeta_2^{10} + \zeta_2^{20}\,\zeta_1^{10}).$$

Следовательно, "уравнение икосаэдра" имеет вид

$$z:\ z-1:1 = H^3 : -T^2 : 1728 f^5,$$

т.е. вид

$$T^2 = -H^3 + 1728 f^5.$$

(В свое время, проверяя это тождество, я для большей верности проделал все вычисления!)

В лице z мы сталкиваемся с однозначной, автоморфной – по принятой нами терминологии – функцией ζ, которая, естественно, гораздо более элементарна, чем те примеры, с которыми нам придется познакомиться в дальнейшем.

А теперь мы сделаем небольшое отступление и рассмотрим полученную нами формулу – которую мы назвали *уравнением икосаэдра* – как алгебраические уравнение 60-й степени относительно ζ, интересуясь при этом роль, которую она играет в общей теории алгебраических уравнений. Тем самым мы в определенном отношении еще раз вернемся к материалу предыдущей главы.

Рассмотренное нами разбиение сферы дает те 60 областей, в которых мы при заданном z должны искать 60 отвечающих ему значений ζ. То, что называется "отделением корней" и что при численном решении уравнений делается в первую очередь, здесь у нас имеется с самого начала. (Заметим, что вещественному z отвечает четыре и только четыре вещественных ζ!)

Если мы найдем один из корней ζ_0 и присоединим корень ϵ (для которого $\epsilon^5 = 1$), то все остальные корни будут выражаться посредством 60 подстановок группы икосаэдра, т.е. будут иметь вид

$$\epsilon^\mu \zeta_0,\ -\epsilon^\nu \frac{(\epsilon^2-\epsilon^3)\epsilon^\mu\zeta_0 + (\epsilon-\epsilon^4)}{-(\epsilon-\epsilon^4)\epsilon^\mu\zeta_0 + (\epsilon^2-\epsilon^3)},$$

$$\epsilon^\mu \zeta_0^{-1},\quad \epsilon^\nu \frac{-(\epsilon-\epsilon^4)\epsilon^\mu\zeta_0 + (\epsilon^2+\epsilon^3)}{(\epsilon^2-\epsilon^3)\epsilon^\mu\zeta_0 + (\epsilon-\epsilon^4)}.$$

Уравнения, все корни которых в заданной области рациональности выражаются через о д и н из них, называются *уравнениями Галуа* (так как Галуа показал, как к ним сводятся все прочие уравнения). Группа Галуа каждого такого уравнения изоморфна группе подстановок, записывающихся рациональными функциями. Таким образом, мы можем сказать, что в области рациональности с присоединенным ϵ уравнение икосаэдра является уравнением Галуа и что его группа Галуа изоморфна группе G_{60} вращений икосаэдра.

Поэтому подгруппам группы вращений икосаэдра отвечают резольвенты уравнения икосаэдра с меньшими степенями. В частности, согласно сказанному выше (см. стр. 379), это уравнение обладает р е з о л ь в е н т о й п я т о й с т е п е н и.

Прелесть этого подхода заключается в том, что все здесь может быть вычислено в явном виде, причем заранее известно, как это сделать наипростейшим способом.

Простейшими точками, оказывающимися при вращениях икосаэдра в пяти различных положениях, являются вершины пяти октаэдров, отвечающих тридцати серединам ребер икосаэдра. (Каждый из этих октаэдров остается инвариантным при двенадцати вращениях содержащейся в группе икосаэдра группы тетраэдра.) Вершины каждого октаэдра являются серединами ребер, соединяющих восемь вершин икосаэдра, обладающих тем свойством, что они являются вершинами двух правильных тетраэдров. Поэтому на первый взгляд проще взять не октаэдр, а эти два тетраэдра. Но оказывается, что в этом случае инвариантной относительно подстановок группы тетраэдра — в их однородной записи — является не некоторая форма четвертого порядка, как это следовало бы ожидать, а только ее третья степень!

Вершины одного из октаэдров являются корнями формы

$$t_0 = \zeta_1^6 + 2\zeta_1^5\zeta_2 - 5\zeta_1^4\zeta_2^2 - 5\zeta_1^2\zeta_2^4 - 2\zeta_1\zeta_2^5 + \zeta_2^6,$$

а вершины остальных октаэдров — корнями форм t_ν, получающихся из формы t_0 подстановками

$$\zeta_1' = \epsilon^\nu\zeta_1,$$
$$\zeta_2' = \epsilon^{-\nu}\zeta_2, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, 4.$$

Формы t_ν являются корнями резольвенты

$$t^5 - 10f\cdot t^3 + 45f^2\cdot t - T = 0,$$

откуда для функции $r = \dfrac{t^2}{f}$ получается резольвента

$$z : (z-1) : 1 = (r-3)^3(r^2 - 11r + 64) : r(r^2 - 10r + 45)^2 : -1728.$$

Первая резольвента принадлежит теории форм, а вторая — теории функций.

Но какие бы резольвенты мы ни брали, уравнение икосаэдра все равно не разрешимо в радикалах, так как группа G_{60} является "простой" (см. стр. 373); элементарное доказательство этого факта, не предполагающее никакого предварительного знакомства с теорией Галуа, см. в "Mathematische Annalen",1905, т. 61 [1]).

Замечу здесь, кстати, что в данном случае задача алгебры заключается собственно в том, чтобы решение любого наперед заданного уравнения свести к решению ряда более простых — двучленных — уравнений; решение же этих последних, т.е. извлечение корней, является, вообще говоря, делом "трансцендентным", приводящим к выражению корней в виде

[1]) См. Klein F. Ges. Abh., т. 2, стр. 481 и далее.

степенных рядов. При этом в каждом конкретном случае приходится искать свое разложение.

Теперь, после работ Римана и Шварца, корни уравнений икосаэдра можно вычислять с помощью разложений, по простоте ближайших к биномиальным, а именно – с помощью гипергеометрических рядов. Например, при $|z| \geqslant 1$ в окрестности точки $\zeta = 0$ имеется пять корней вида

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt[5]{1728}} \cdot \frac{F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}; \frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{-1}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{5}; \frac{1}{z}\right)}$$

(числовой множитель легко проверяется с помощью уравнения икосаэдра). Ряды эти, правда, сходятся довольно плохо (что, впрочем, можно сказать и про биномиальный ряд).

После всего этого становится ясно, что мы вправе смотреть на уравнение икосаэдра как на некое *нормальное* уравнение, решение которого по простоте занимает место, следующее после двучленных уравнений вида $\zeta^n = z$.

Мы уже познакомились с простейшим уравнением пятой степени, которое может быть решено с помошью уравнения икосаэдра. Однако, используя уравнение икосаэдра, можно решить и любое уравнение пятой степени. Хочу привести некоторые относящиеся к этому исторические данные.

Проблема решения уравнений пятой степени к настоящему времени насчитывает почти четырехвековую историю. Она естественным образом возникла после того, как в 1515 – 1540 гг. удалось найти решение в радикалах для уравнений третьей и четвертой степени. В 1515 г. Сципион дель Ферро нашел решение общего уравнения третьей степени, которое ошибочно приписывается Кардано[1]); примерно в 1540 г. Людовико Феррари нашел решение общего уравнения четвертой степени. Затем последовали многочисленные попытки решить ту же задачу для уравнений пятой степени[2]). С одной из таких попыток начал, как я уже рассказывал об этом в третьей главе, и Абель. Ошибочному доказательству разрешимости этой задачи он оказался обязан стипендией, которая дала ему возможность учиться! Однако в 1824 г. он обнаружил, что уравнения пятой степени в общем виде в радикалах не разрешимы. И тем не менее, попытки найти это решение не прекращались; умерший в 1851 г. Мейер-Гирш, известный берлинский приватный педагог, сошел на этом с ума. Попытки эти не прекращаются и в наши дни, ибо в общем и целом мир неисправим – даже в том, что касает-

[1]) Подробности см. в книге T r o p f k e "Geschichte der Elementarmathematik" ("История элементарной математики"), 2-е изд., Берлин, 1921 – 1924, т. 3, стр. 71 и далее.

[2]) См. там же стр. 90 и далее.

ся математики. Научный прогресс пользуется успехом лишь среди меньшинства.

Важный шаг затем сделал опять-таки Галуа, доказавший в 1831 г. теорему о том, что преобразования пятого порядка, производимые над эллиптическими функциями, приводят к уравнениям пятой степени с группой G_{60}, так что во всяком случае существуют уравнения пятой степени, разрешимые в модулярных функциях. Группой общего уравнения пятой степени является группа $G_{5!}$, т.е. G_{120}, но если к области рациональности присоединить квадратный корень из дискриминанта уравнения, то группа редуцируется к группе G_{60} (а именно – к группе четных перестановок пяти корней уравнения).

Но вот наступил знаменательный 1858-й год, когда, во-первых, Риман начал чтение своих лекций по гипергеометрическим рядам, а во-вторых, Эрмит, а затем и подтолкнутый им Кронекер показали, как с помощью элементарных средств можно преобразовать общее уравнение пятой степени к виду, разрешимому в эллиптических модулярных функциях (Comptes Rendus, т. 46, стр. 508 и далее = "Труды" Эрмита, т. 2, стр. 5 и далее). Затем в 1861 г. Кронекер (Berliner Monatshefte, 1861, и Журнал Крелля, т. 59) продвинулся во всем этом существенно дальше, но он так и не дошел до икосаэдра (к которому, впрочем, приблизился вплотную). На самом деле суть решения уравнения пятой степени кроется в уравнении икосаэдра; эллиптические же функции привлекаются тут лишь с той же целью, что и логарифмы при извлечении корней. Впрочем, эффект, произведенный вступлением в бой эллиптических функций, в дальнейшем мы рассмотрим более подробно.

Связь с уравнением икосаэдра (теоретико-функциональное значение которого обнаружилось уже в лекции Римана, т.е. в 1858–59 гг.) заключается, попросту говоря, в следующем. Давайте представим себе, что уравнение пятой степени приведено к виду

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0,$$

который я называю *главным уравнением пятой степени* (этого можно добиться элементарными средствами с помощью так называемых преобразований Чирнгаузена). Тогда для пяти его корней $y_0, y_1, \ldots, y_4$ будут иметь место равенства

$$\sum_{\rho=0}^{4} y_\rho = \sum_{\rho=0}^{4} y_\rho^2 = 0.$$

Если ввести теперь резольвенты Лагранжа

$$p_\nu = y_0 + \epsilon^{\nu} y_1 + \epsilon^{2\nu} y_2 + \epsilon^{3\nu} y_3 + \epsilon^{4\nu} y_4, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, 4,$$

то, с одной стороны, будет иметь место равенство

$$p_0 = 0,$$

а с другой – равенство

$$p_1p_4 + p_2p_3 = 0.$$

Это последнее мы можем рассматривать как уравнение некоторой поверхности второго порядка, которая переходит сама в себя при всех 120 перестановках пяти наших корней и, значит, при 120 соответствующих линейных преобразованиях величин p_1, p_2, p_3, p_4, т.е. при некоторых 120 коллинеациях пространства.

Отсюда мы заключаем, что при 60 четных перестановках корней y прямолинейные образующие этой поверхности переходят в себя. (Рассуждение такого рода с тех пор часто использовалось в самых разнообразных отделах математики.) Теперь уже остается только заметить, что параметры ζ и ζ' обеих образующих

$$-\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_3}{p_4} \quad \text{и} \quad -\frac{p_2}{p_4} = \frac{p_1}{p_3}$$

при 60 четных перестановках корней y подвергаются как раз 60 подстановкам икосаэдра и, следовательно, являются корнями уравнения икосаэдра, для которого z является рациональной функцией коэффициентов α, β, γ и квадратного корня из дискриминанта данного уравнения (см. "Лекции об икосаэдре", гл. 3).

О том, какое явное выражение имеется для этого z и как, обратно, после вычисления ζ или ζ' найти корни y данного уравнения пятой степени, – обо всем этом можно справиться в моих "Лекциях".

В заключение здесь будет, пожалуй, уместно произнести похвальное слово правильным многогранникам. Эти фигуры проходят через всю историю математики. Пифагорейцам они представлялись символами некоего мистического совершенства. Греческие натурфилософы сравнивали их с пятью стихиями. Греческим геометрам удалось показать, что кроме пяти известных никаких других правильных многогранников не существует и что по радиусу описанного шара их можно строить с помощью циркуля и линейки. Тринадцать книг евклидовых "Начал" являются лишь введением к построению правильных многогранников.

На протяжении всех средних веков правильные многогранники оставались предметом мистического почитания и символом твердости характера. Герб моей родины, Берга[1]), украшен правильным тетраэдром с девизом

"Viereckiger Stein, wie er auch fällt,

stets mit der Spitze nach oben sich stellt".

("Четырехугольный камень, как бы он ни упал, всегда обращается острием вверх".) Кеплеровской фантазии правильные многогранники потребовались для установления связи между размерами планетных орбит. И те-

---

[1]) Бывшее великое герцогство с главным городом Дюссельдорфом, где в 1849 г. родился Клейн. – *Примеч. пер.*

перь, в наши дни, они снова вступают в поле зрения математической науки, где удивительнейшим образом связуют воедино геометрию, теорию групп, алгебру и теорию функций, указуя путь к дальнейшим исследованиям.

Случай икосаэдра, который мы до сих пор рассматривали, замечателен тем, что для соответствуюшей функции

$$\zeta = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}; z\right)$$

фундаментальными областями служат треугольники, в конечном числе покрывающие сферу. Теперь мы рассмотрим случаи, когда число треугольников бесконечно.

Очевидно, что при

$$\lambda = \frac{1}{l}, \quad \mu = \frac{1}{m}, \quad \nu = \frac{1}{n},$$

где l, m и n – целые числа, бо́льшие двух, мы будем получать треугольники, без налеганий заполняющие плоскость (или ее часть).

При этом мы должны различать три существенно различных случая: когда $\lambda + \mu + \nu$ больше, равно и меньше единицы.

Если $\lambda + \mu + \nu > 1$, то, как показывает несложный теоретико-числовой анализ, возможны четыре варианта, отвечающие триангуляциям правильных многогранников:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{n} \qquad \text{диэдр,}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \qquad \text{тетраэдр,}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \qquad \text{октаэдр,}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \qquad \text{икосаэдр.}$$

(В связи со сказанным см. рисунки в книге Клейна и Фрике "Модулярные функции", т. 1, стр. 75, 76, 104–106.)

Если $\lambda + \mu + \nu = 1$, то треугольники можно взять прямолинейными, что приводит к триангуляциям сети параллелограммов. Возможны три случая (см. там же, стр. 107):

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3},$$

второй из которых мы уже не раз рассматривали в примерах. Здесь треугольниками покрывается вся плоскость (сфера), за исключением бесконечно удаленной точки, которая является граничной.

Для нас сейчас наиболее интересен третий случай,

$$\lambda + \mu + \nu < 1,$$

когда имеется бесконечно много троек λ, μ, ν.

У трех сторон любого такого треугольника имеется общая *ортогональная окружность,* которая переходит в себя при всех наших зеркальных отражениях. Эта окружность ортогональна каждому отраженному треугольнику и является *естественной границей* их бесконечного семейства (см., например, случай $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}$ в "Модулярных функциях", т. 1, рис. 33, стр. 109).

Вдумываясь в получающиеся фигуры, которые встречаются уже у Гаусса (см. гл. 1, стр. 60; "Труды" Гаусса, т. 8, стр. 104), нужно не забывать, что здесь мы имеем дело с геометрией инверсий. Нужно также отчетливо представлять себе, что получится, если в качестве общей ортогональной окружности взять (что часто бывает чрезвычайно удобно) какую-нибудь прямую – например, вещественную ось.

Среди треугольников с $\lambda + \mu + \nu < 1$ имеются, в частности, треугольники с углами

$$0, \quad 0, \quad 0$$

и

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad 0,$$

которые мы уже встречали в теории эллиптических модулярных функций. Сосредоточим на них свое внимание.

Для треугольника с углами 0, 0, 0 ортогональной окружностью будет описанная окружность. Отражая этот треугольник в одной из его сторон,

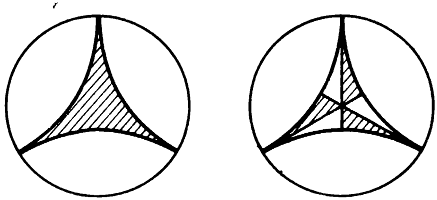


Рис. 42

мы снова получим треугольник, вершины которого лежат на той же окружности. Неограниченно продолжая этот процесс, мы получим сплошное однократное покрытие внутренности окружности треугольниками все уменьшающихся размеров с вершинами на окружности. Из треугольника с нулевыми углами легко получить и треугольник с углами $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0$. Если простоты ради треугольник с углами 0, 0, 0 мы возьмем (что совершенно не ограничивает общности) равносторонним, то достаточно провести его высоты (рис. 42), чтобы этот треугольник разбить на шесть треугольников с углами $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$, 0. Каждый из этих меньших треугольников дает отражением остальные пять, поскольку любые два смежных симметричны друг другу относительно их общей стороны. Неограниченно применяя теперь к этим треугольникам операцию отражения, мы очевидным образом получим ту же самую фигуру, что и в первом случае, но только каждый треугольник будет подразделен высотами на шесть частей (см. рисунки на стр. 111 и 112 упоминавшейся выше книги Клейна и Фрике).

Если предельную окружность перевести в вещественную ось, то получатся фигуры, приведенные в 1-м томе "Модулярных функций" на стр. 273 (первый случай) и стр. 113 (второй случай). В качестве исходных треугольников можно, в частности, взять треугольники на рис. 43.

Давайте теперь заменим переменную ζ привычной для теории эллиптических модулярных функций буквой ω. Зеркальные отражения (которые аналитически получаются заменой ω на $-\bar{\omega}$, где $\bar{\omega}$ означает величину, комплексно сопряженную с ω) мы в расчет принимать не будем. Тогда в случае треугольника с углами $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 0 наша группа будет состоять из преобразований

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – такие целые числа, что $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; что же касается треугольника с нулевыми углами, то его группой будет подгруппа этой группы, состоящая из подстановок, для которых выполняется сравнение

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2$$

(см. выше стр. 62 или же стр. 318). Эту подгруппу я буду называть *главной конгруэнц-группой второй ступени.*

В каком же виде выступают эти группы и фигуры в элементарной теории эллиптических функций, в частности – в теории эллиптических модулярных функций?

Я уже говорил об этом в первой главе, посвященной Гауссу, и возвращался к этому вопросу в разделе, посвященном Вейерштрассу. Поэтому здесь достаточно лишь вкратце подвести итоги. Более подробные сведения читатель найдет в учебнике Фрике по эллиптическим функциям[1]).

---

[1]) F r i c k e F. Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen ("Эллиптические функции и их применения", Лейпциг, т. 1, 1916; т. 2, 1922).

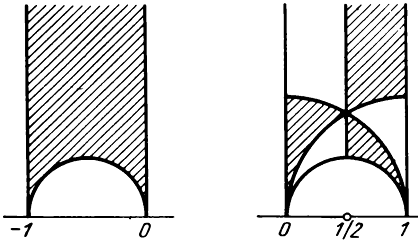


Рис. 43

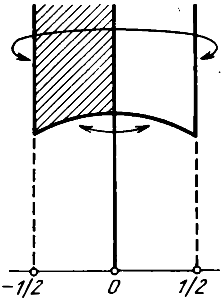


Рис. 44

Рациональными инвариантами эллиптического интеграла первого рода относительно линейных преобразований примитивных периодов ω_1 и ω_2 являются коэффициенты g_2, g_3 и дискриминант

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2.$$

Поэтому отношение $J = \dfrac{g_2^3}{\Delta}$ является абсолютным инвариантом. При этом для числа $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ будет иметь место равенство

$$\omega(J) = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0; J\right),$$

правая часть которого выражается через гипергеометрические ряды. В частности, для точек двух изображенных на рис. 44 исходных треугольников нашей нормальной фигуры

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \left\{\ln 1728\, J + \frac{\partial}{\partial \rho} \ln F\left(\rho + \frac{1}{12}, \rho + \frac{5}{12}, 2\rho + 1; \frac{1}{J}\right)\right\}_{\rho = 0} =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \ln 1728 J - \frac{31\, i}{144\pi} \cdot \frac{1}{J} - \frac{13157\, i}{165888\pi} \cdot \frac{1}{J^2} - \dots$$

(Эта формула отличается от соответствующей функции для случая икосаэдра, потому что параметр γ гипергеометрического ряда является здесь целым числом.)

Стрелки на рис. 44 соединяют соответствующие стороны наших треугольников. Соответствие между этими сторонами устанавливается подстановками $\omega' = \omega + 1$ и $\omega' = -\dfrac{1}{\omega}$. Эти подстановки "порождают" всю группу линейных подстановок, для которых

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1.$$

Иррациональным инвариантом является двойное отношение λ четырех точек ветвления римановой поверхности квадратного корня, стоящего в знаменателе интеграла первого рода. С рациональным инвариантом J двойное отношение λ связано пропорцией

$$J : J - 1 : 1 = 4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 : (2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2 : 27\lambda^2(1 - \lambda)^2$$

(ср. стр. 63).

У Лежандра и Якоби это двойное отношение обозначалось соответственно через c^2 и k^2; у Вейерштрасса – через

$$\frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3}.$$

Указанная выше пропорция означает, что J представляет собой рациональную функцию λ шестой степени. Следовательно, λ является шестизначной алгебраической функцией J. Этому соответствует разбиение λ-плоскости на 12 областей, попеременно являющихся образами верхней и нижней полуплоскостей и в соответствии с этим заштрихованных (рис. 45).

Это немедленно доказывает, что

$$\lambda = k^2 = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; J\right),$$

так что мы имеем дело со случаем диэдра. Шестилистная риманова поверхность функции k^2 над J-плоскостью разветвляется над точками

$$y = \infty, \quad y = 1, \quad y = 0$$

и λ принимает в этих точках значения

$$\lambda = 0, \quad 1, \quad \infty;$$

$$\lambda = -1, \quad \frac{1}{2}, \quad 2;$$

$$\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

При этом, как непосредственно видно из рисунка, при $J = 0$ шесть листов в двух точках ветвления циклически связаны по три, а при $J = 1$ и $J = \infty$ они в трех точках ветвления связаны по два.

Разрезав теперь λ-плоскость вдоль положительной вещественной оси от 0 до ∞, мы получим на λ-плоскости фундаментальную область функции $\omega = s(0, 0, 0; \lambda)$, а – после разбиения на треугольники – на J-плоскости

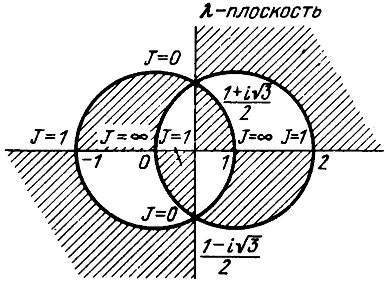


Рис. 45

фундаментальную область функции $\omega = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0; J\right)$ После соответствующего преобразования эти области имеют вид, изображенный на рис. 46; см. также "Модулярные функции", т. 1, стр. 294–295.

Подстановки

$$\omega' = \omega + 2$$

и

$$\omega' = \frac{\omega}{2\omega + 1}$$

осуществляют соответствие границ и порождают (в соответствии с определением) подстановки $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *главной конгруэнц-группы второй ступени.*

Каждый треугольник $\omega(J)$-плоскости представляет собой конформный образ либо верхней либо нижней J-полуплоскости. Поэтому каждому ω отвечает вполне определенное значение J. Аналогично, каждому ω отвечает одно и только одно значение k^2.

Функция $k^2(J)$ представляет собой первый встретившийся нам пример алгебраической функции от J, *униформизующейся* с помощью ω. По опре-

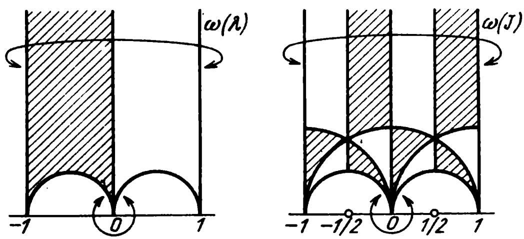


Рис. 46

делению это означает, что обе функции J и k^2 являются однозначными функциями ω. О соответствующем алгебраическом уравнении шестой степени раньше говорили, что оно "решается" с помощью ω. – Я не стану приводить здесь явные формулы для $\omega(k^2)$.

К изложенному мне хочется добавить несколько замечаний исторического характера.

О Гауссе я уже говорил. Первым, кто с успехом продолжил его исследования, был Риман (я имею в виду его уже не раз упоминавшуюся лекцию 1858/59 г.). – Прежде всего он заметил колоссальную униформизующую силу, кроющуюся в функции $\omega(k^2)$. Сегодня мы сказали бы, что все функции от J, ветвящиеся только в точках $J = 0, 1, \infty$, причем так, что при $J = 0$ листы соединяются по три, при $J = 1$ – по два, а при $J = \infty$ – любым способом, являются однозначными функциями ω. Что же касается функций от k^2, то все те из них, которые ветвятся только в точках 0, 1 и ∞, вне зависимости от характера ветвления являются однозначными функциями ω.

Примеры:

Все функции $s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0; J\right)$ являются однозначными функциями ω (тем самым отмеченная выше однозначность функции $k^2(J)$ оказывается специальным случаем общего утверждения). В частности, однозначной функцией ω является функция икосаэдра $\zeta(J)$, т.е., как мы говорили раньше, уравнение икосаэдра допускает решение в модулярных функциях. Как это выглядит в явном виде, мы увидим ниже.

Корни $\sqrt[n]{k^2}$, $\sqrt[n]{1-k^2}$, $\sqrt[n]{k^2(1-k^2)}$, логарифмы $\ln k^2$, $\ln(1-k^2)$, $\ln k^2(1-k^2)$, любая s-функция $s(\lambda, \mu, \nu; k^2)$ и вообще любой гипергеометрический ряд $F(\alpha, \beta, \gamma; k^2)$ униформизуются с помощью ω. (Последнее замечание я в 1878 г. сделал в 14-м томе "Mathematische Annalen" [1]) и был этим чрезвычайно горд. Когда потом, в 1897 г. я получил в руки тетрадь Бецольда с записью лекции Римана, то обнаружил, что она заканчивается именно этой теоремой, которую Бецольд – возможно потому, что собирался уезжать на каникулы, – переписал не до конца. См. стр. 93 "Дополнений" Нётера – Виртингера.).

После Римана сведения о модулярной фигуре стали мало-помалу распространяться. Здесь я прежде всего должен упомянуть работу Дедекинда (Журнал Крелля, 1877, т. 83), оказавшую мне существенную поддержку в моих незадолго перед тем начатых занятиях, относящихся к этому кругу вопросов. От этой работы ведет свое начало и сам термин "эллиптические модулярные функции".

К этому времени модулярная фигура уже приобрела довольно широкую известность. В 1879 г., пользуясь ею, Пикар в 88-м томе "Comptes Rendus"

[1]) См. Klein F. Ges. Abh., т. 3, стр. 27 и 63.

доказал, хотя еще и довольно неуклюже, важную, названную позже его именем теорему, согласно которой однозначная аналитическая функция в окрестности изолированной существенно особой точки принимает все значения, за исключением разве лишь двух. За этой работой в дальнейшем последовали работы Шоттки, Ландау, Каратеодори и др.

Другая линия, тоже представленная уже у Гаусса, но в дальнейшем развивавшаяся независимо, отталкивается от использования общих эллиптических функций – в частности, тета-функций.

В этой связи наряду с Абелем и Якоби в первую очередь следует назвать Эрмита, который в 1858 г. в 46-м томе "Comptes Rendus" (= его "Труды", т. II, стр. 5 и далее, а также 22 и далее) исследовал вопрос о том, как ведут себя по отношению к линейным преобразованиям функции $\sqrt[8]{k^2}$ и $\sqrt[8]{1-k^2}$, которые он обозначил через $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$. Позже он рассмотрел функцию $\sqrt[8]{k^2(1-k^2)}$, обозначавшуюся им символом $\chi(\omega)$.

Однако полной теоретико-функциональной ясности Эрмит в этом вопросе в то время еще не достиг, так как его удивляет[1]), что функция $\chi(\omega)$ "est une fonction également bien déterminée" ("равным образом вполне определена"), в то время как всякий корень $\sqrt[n]{k^2(1-k^2)}$ является однозначной функцией ω. Тем искуснее Эрмит оперирует полученными им с использованием тета-функций аналитическими формулами для эллиптических модулярных функций. Это так называемые q-формулы[2]), где q – введенное Якоби обозначение для $e^{i\pi\omega}$. Я приведу здесь в качестве примера лишь формулы, относящиеся к g_2 и g_3:

$$g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1-q^{2n}}\right),$$

$$g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^{2n}}{1-q^{2n}}\right).$$

Рядом с ними я хочу поставить ряды Эйзенштейна, которые мы уже приводили (см. стр. 54) и которые, как впоследствии выразился Пуанка-

---

[1]) "Труды", т. II, стр. 28.

[2]) В связи со сказанным см. фигуру на стр. 300 первого тома книги Фрике "Elliptische Funktionen" ("Эллиптические функции"). Фигура эта получается отображением составленной из треугольников параллельной полосы ω-плоскости на внутренность единичного круга q^2-плоскости. При этом точка $+i\infty$ переходит в точку $q = 0$, а треугольник становится очень маленьким.

ре, "больше удовлетворяют ум":

$$g_2 = 60\Sigma' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4},$$

$$g_3 = 140\Sigma' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}.$$

Обычно и те, и другие формулы получают на основе теории двоякопериодических функций. Гурвиц в своей диссертации, опубликованной в 1881 г. в 18-м томе "Mathematische Annalen", осуществил весьма изящный прямой переход от вторых из этих рядов к первым.

На теоретико-групповые соображения опирается замечательная, чисто алгебраическая *теория преобразований* эллиптических, а также эллиптических модулярных функций (см. выше стр. 57 и далее).

Пусть $n = ad - bc$ — определитель, составленный из целых чисел a, b, c, d. Исследуем соотношения, имеющиеся между

$$J\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right) = J'(\omega) \quad \text{и} \quad J(\omega),$$

или же между

$$k^2\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right) \quad \text{и} \quad k^2(\omega).$$

Переход от J к J' называется "преобразованием n-го порядка". Функции J и J' связаны алгебраическим уравнением, которое называется *модулярным уравнением*. В случае, когда число n просто, степень этого уравнения равна $n + 1$.

Лежандр, Якоби и их ученики находили истинное удовольствие в том, чтобы для простейших случаев в различных видах фактически строить модулярные уравнения. Они получали при этом целочисленные коэффициенты!

С приходом Галуа в науке был совершен огромный шаг вперед. Для случая простого n Галуа нашел группу модулярного уравнения! После присоединения величины

$$\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n}$$

эта группа оказывается группой

$$G_{\frac{n(n^2-1)}{2}},$$

допускающей весьма простое теоретико-числовое описание. При $n > 3$ эта группа п р о с т а, так что модулярное уравнение в этом случае в радикалах решено быть не может; любая "резольвента" модулярного уравнения будет иметь ту же самую группу, что и само это уравнение. Однако степени этих резольвент могут быть *меньше* степени $n + 1$ модулярного уравнения. Например, при $n = 5, 7, 11$ существуют резольвенты степени n, т.е. соответственно резольвенты

при $n = 5$ пятой степени с группой G_{60},

при $n = 7$ седьмой степени с группой G_{168},

при $n = 11$ одиннадцатой степени с группой G_{660}.

При бо́льших простых n такое "понижение" невозможно [1]).

Затем Эрмит в 1859 г. ("Comptes Rendus", тт. 48 и 49 = "Труды", т. II, стр. 38–82, см. в особенности пп. XIV–XVI) поставил задачу фактического разыскания этих резольвент. Он нашел уравнение пятой степени, которое решается в эллиптических модулярных функциях (см. выше); для уравнения седьмой степени им был тоже получен некий простой результат; что же касается случая $n = 11$, то здесь пробиться до конца ему не удалось.

В 14-м и 15-м томах "Mathematische Annalen" (1878, 1879 гг.) я поставил перед собой задачу – используя методы геометрической теории функций, внести во всю эту проблематику окончательную ясность. В частности, я добился полного успеха при $n = 5, 7$ и 11, что привело к новой, теоретико-групповой и вместе с тем геометрической программе построения теории эллиптических модулярных функций [2]).

Об этой программе нужно сказать хотя бы несколько слов, так как она представляет собой естественный переход к общей теории автоморфных функций. Для нее характерна тенденция устроить "сплав из Галуа и Римана". Я двумя способами сформулирую возникающую здесь общую задачу. При этом в качестве простейшего примера следует представлять себе главную конгруэнц-группу второй ступени.

1. Требуется перечислить все подгруппы всех ω-подстановок

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

и для каждой подгруппы выяснить, сколько двойных треугольников ω-плоскости нужно уложить друг рядом с другом, чтобы получить ее фундаментальную область. Так как между сторонами фундаментальной об-

---

[1]) Эта теорема была сформулирована Галуа. Первое ее доказательство дал в 1853 г. Бетти (Ann. Sci. mat. fis., т. 4 = Opere mat., т. 1, стр. 81 и далее); крупная заслуга Бетти заключается в том, что он был первым, кто своими глубокими исследованиями сделал теорию Галуа доступной всему математическому сообществу. – Полное рассмотрение группы модулярного уравнения провел впоследствии Гирстер (Math. Annalen, 1884, т. 18, стр. 319 и далее).

[2]) См. K l e i n F. Ges. Abh., т. 3, стр. 169 и далее: "Zur Systematik der Theorie der elliptischen Modulfunktionen" ("К вопросу о систематике теории эллиптических модулярных функций").

ласти "образующие" подстановки подгруппы устанавливают попарное взаимное соответствие, то абстрактно эта область представляет собой замкнутую поверхность. Ее требуется рассмотреть как риманову поверхность, интересуясь вопросом о том, каковы простейшие алгебраические функции, которые согласно исходным римановым принципам должны на ней существовать. Так теоретико-групповая фундаментальная область превращается в теоретико-функциональную фундаментальную область, или, как я говорил первоначально, в "фундаментальный многоугольник".

Если же все это звучит слишком абстрактно, то я могу придать сказанному и другую – обратную – редакцию.

2. Над J-плоскостью мы рассматриваем риманову поверхность, ветвящуюся над точками $J = 0, 1, \infty$ по схеме $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0$ (см. стр. 403), и задаемся вопросом о простейших существующих на ней функциях (или соответственно об уравнениях, которыми они связаны). Затем мы переносим все это на ω-плоскость, где эти функции становятся однозначными, а надлежащим образом разрезанная риманова поверхность отображается на состоящую из ω-треугольников фундаментальную область, стороны которой попарно связаны ω-подстановками; наконец, мы интересуемся подгруппой ω-подстановок, порождаемой этими подстановками.

Таким образом, мы имеем здесь полную смычку теории групп и теории функций. В моих прежних работах, чтобы не выходить за пределы а л г е б р ы, я ограничивался фундаментальными многоугольниками, состоящими из конечного числа треугольников. Однако ничто не мешает рассматривать многоугольники, состоящие и из бесконечного числа треугольников, – это вполне соответствовало бы нынешним взглядам. Примеры таких многоугольников дают уже функции $s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}; J\right)$, $\ln k^2$ и $s(\lambda, \mu, \nu; k^2)$.

Вторую постановку общей проблемы эллиптических модулярных функций мы уже выше разобрали (см. стр. 401 и далее) на примере уравнения шестой степени, связывающего двойное отношение λ с абсолютным инвариантом J, причем обнаружили, что в этой ситуации мы приходим к главной конгруэнц-группе второй ступени!

Теперь те же самые рассуждения мы применим к *уравнению икосаэдра*. Вместо двойного отношения λ у нас здесь появится функция $\zeta = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}; J\right)$, риманова поверхность которой имеет над J-плоскостью 60 листов. Мы разрежем сферу с икосаэдральной сеткой, как апельсин, на десять равных долек линиями, идущими от ∞ к 0, и отобразим эти дольки на десять прилегающих друг к другу вертикальных полос ω-плоскости ширины $\frac{1}{2}$ (см. "Модулярные функции", т. 1, стр. 355, рис. 83).

Рассматривая икосаэдр, легко уяснить себе, как смыкаются треугольники ω-плоскости. Соответствующие ω-подстановки оказываются конгруэнтными по модулю 5 с тождественной подстановкой и порождают в точности главную конгруэнц-группу пятой ступени. Так как существует 60 подстановок, не конгруэнтных по модулю 5, то фундаментальную область главной конгруэнц-группы пятой ступени (состоящей из всех подстановок, сравнимых по модулю 5 с тождественной подстановкой) можно замостить точно шестьюдесятью двойными треугольниками. Сфера с ее икосаэдрической сеткой является однозначным образом этой фундаментальной области. На ней очевидным образом не существует функции, более простой, чем наша функция икосаэдра ζ. Таким образом, эта функция оказывается не только примером функции из главного конгруэнц-модуля пятой ступени, но и вообще простейшей модулярной функцией, отвечающей этой конгруэнц-группе!

Сказанное проливает свет не только на тот факт, что уравнение икосаэдра разрешимо в эллиптических модулярных функциях, но и на то, что в системе эллиптических функций уравнение икосаэдра – если говорить о принципиальной стороне дела – по отношению к пятой ступени занимает в точности то же самое место, какое по отношению к второй ступени занимает уравнение двойного отношения.

На этом основывается все, что мы знаем относительно решения уравнений пятой степени в эллиптических модулярных функциях; решение это существует, потому что уравнения пятой степени сводятся к уравнению икосаэдра, и т.д. и т.п.

Формулы, выражающие ζ через тета-функции ("q-формулы"), которые впоследствии были даны мной [1]), мы здесь рассматривать не будем. В них в одно целое соединяются Риман, Галуа и Якоби. С помощью этих формул можно и обратно, исходя из тета-функций, без труда построить всю теорию пятой (и седьмой) ступени. Конечно, для этого нужно заранее знать, что требуется строить. Формулы хоть и могучи, но все-таки слепы!

Я хочу теперь рассмотреть ближайший частный случай $n = 7$, который также был намечен Галуа.

Существует $7 \cdot \dfrac{49-1}{2} = 168$ подстановок

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

не конгруэнтных по модулю 7. Поэтому над J-плоскостью мы в этом случае будем иметь 168-листную риманову поверхность, листы которой в точках 0, 1 и ∞ соединяются по 3, по 2 и по 7. Согласно сказанному

[1]) Math. Annalen, 1880/81, т. 17 = Klein F. Ges. Abh., т. 3, стр. 186 и далее; см. также "Модулярные функции", т.2, 5-й раздел.

на стр. 286, род p этой поверхности равен

$$p = \frac{w}{2} - n + 1 = \frac{56 \cdot 2 + 84 \cdot 1 + 24 \cdot 6}{2} - 167 = 3.$$

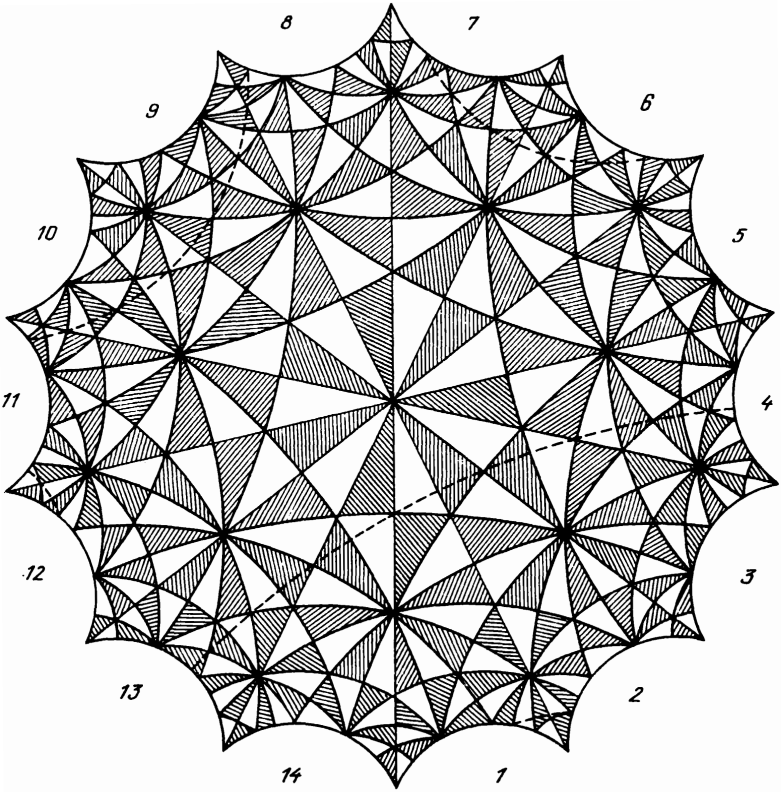
Таким образом, здесь мы имеем дело со случаем $p = 3$. Но, как мы уже знаем (см. стр. 335 и далее), теория римановых поверхностей рода 3 равносильна теории плоских кривых четвертого порядка.

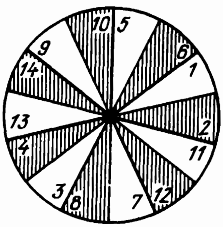
Однако, прежде чем глубже развивать эту идею, давайте подумаем, как представить себе взаимную связь $2 \cdot 168$ полуплоскостей, из которых склеена наша риманова поверхность, с той же отчетливостью, с какой мы сумели это сделать в случае $n = 5$ при помощи сети икосаэдрических треугольников.

Сделать это можно с помощью функции $s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}; J\right)$, которая хотя и бесконечнозначна, но обладает тем свойством, что в сети ее треугольников существует многоугольник, представляющий нашу риманову поверхность. Именно, в плоскости переменной s мы должны рассмотреть правильный 14-угольник, каждый из 14 секторов которого состоит из 24 чередующихся друг с другом заштрихованных и незаштрихованных треугольников, являющихся образами верхней и, соответственно, нижней полуплоскости переменной J (рис. 47). Если соответствующие друг другу стороны этого многоугольника представить себе сшитыми, то к его вершинам будут поочередно примыкать семь двойных треугольников. При этом стороны нашего 14-угольника будут соответствовать берегам тех $7 = 2 \cdot 3 + 1$ разрезов, которые на римановой поверхности рода 3 (она может быть представлена как кольцо с тремя дырками) соединяют точки O и O', лежащие над точкой $J = \infty$. Так как сумма углов с вершинами в точках O и O' равна 2π, то эта развертка нашей замкнутой римановой поверхности на s-плоскость происходит без искажения углов.

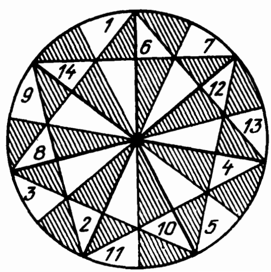
Умение оперировать с такими "абстрактно замкнутыми" фундаментальными областями столь же уверенно, как и с настоящей замкнутой 168-листной поверхностью, испытывая даже при этом еще большее удобство, является делом чистой привычки. Так, например, мы можем изобразить на многоугольнике любой путь; и тогда линия в многоугольнике, помеченная на нашем рисунке пунктиром, на поверхности будет замкнутой. Чтобы убедиться в этом, достаточно принять во внимание соответствие между сторонами многоугольника, на которых кончается эта линия.

Интересно, что в рассматриваемом случае не только J является однозначной функцией от s, но что и s на этой 168-листной поверхности над плоскостью переменной J тоже не "разветвляется"! Так мы приходим к важнейшему понятию функции, неразветвленной на данной римановой поверхности. Эта функция при всех обходах подвергается дробно-линейному преобразованию и потому оказывается бесконечнозначной, но зато





Вершины одного типа



Вершины другого типа

Рис. 47. Соответствие между сторонами: 1 и 6; 3 и 8; 5 и 10; 7 и 12; 9 и 14; 11 и 2; 13 и 4;

окрестность каждой точки римановой поверхности она *однолистно* отображает на окрестность некоторой точки s-сферы.

Чтобы перенести теперь нашу риманову поверхность в ω-плоскость, надо из центра разрезать 14-угольник на 14 секторов и каждый из них отобразить на вертикальную полосу ω-плоскости ширины $\frac{1}{2}$ (см. рис.48, где воспроизведена одна из таких полос с 12 заштрихованными и 12 незаштрихованными треугольниками: $14 \cdot 12 = 168$). Подстановки, задающие соответствие границ, будут тогда порождать в точности главную конгруэнц-группу седьмой ступени.

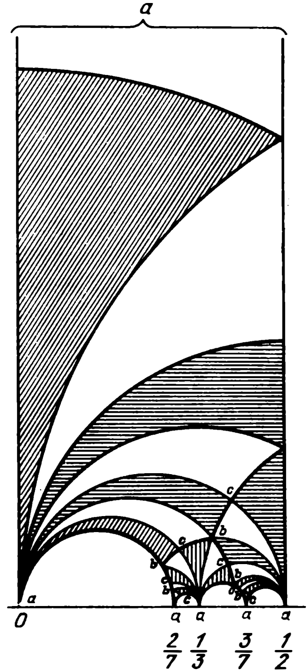


Рис. 48

Однако сейчас мы покинем ω-плоскость и обратимся к алгебраическим функциям на рассматриваемой римановой поверхности.

Так как $p = 3$, то простейшие из этих функций мы можем получить следующим образом. Существует три всюду конечных интеграла u_1, u_2, u_3, дифференциалы которых мы положим пропорциональными $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$du_1 : du_2 : du_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 .$$

Эти φ, или, точнее, их отношения, и являются алгебраическими функциями на данной поверхности (все это было подробно объяснено в гл. 7). Эти функции связаны друг с другом некоторым уравнением $F_4(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0$ четвертой степени, определяющим плоскую кривую четвертого порядка. Нам надо: 1) найти в явном виде уравнение этой кривой; 2) представить на ней J в виде рациональной функции φ. Последняя функция должна принимать каждое значение в 168 точках кривой. Эти точки при $J = 0$ сливаются по 3, при $J = 1$ – по 2, при $J = \infty$ – по 7, а при любом другом значении J они различны.

Мне удалось решить эту задачу в 1878 г. Воспользовавшись описанным выше разбиением римановой поверхности на s-треугольники, я показал, что наша кривая C_4 должна точно так же самосовмещаться при 168 взаимно однозначных преобразованиях, как при 60 вращениях самосовмещался икосаэдр, и что кроме того эти взаимно однозначные преобразования (как об этом уже говорилось в гл. 7 на стр. 343) должны в координатах φ выражаться линейными функциями.

Отсюда вытекает, что существует группа G_{168} коллинеаций φ-плоскости (что по тем временам было новым и неожиданным). Кроме того, с помощью несложных рассуждений нетрудно показать, что уравнение кривой C_4 может быть приведено к виду

$$\varphi_1^3\varphi_2 + \varphi_2^3\varphi_3 + \varphi_3^3\varphi_1 = 0.$$

Наконец, используя методы теории инвариантов, можно в явном виде указать выражение инварианта J в виде рациональной функции φ. Степень этой функции равна 42, и она задается пропорцией вида

$$J:J-1:1 = \Phi_{14}^3:\Psi_{21}^2:X_6^7.$$

Все это изложено в 14-м томе "Mathematische Annalen" (1878 г.) [1]), и если бы мы пожелали более подробно заняться плоскими кривыми четвертого порядка, то у нас имелся бы исключительно красивый пример.

Геометры в общем сразу же приняли эти результаты. Алгебраисты же нашли здесь четко выраженную связь с модулярным уравнением, отвечающим преобразованию седьмого порядка аналитических функций, и с соответствующими резольвентами седьмой степени, а аналитики извлекли отсюда представление через тета-функции функций φ_1, φ_2 и φ_3, а значит, и всех функций, рационально зависящих от них (Math. Annalen, 1881, т. 17[2])).

Подводя итоги, мы видим, что проблемы, связанные с преобразованием седьмого порядка эллиптических функций, могут быть решены столь же исчерпывающим образом, как с помощью теории икосаэдра были решены проблемы, связанные с преобразованием пятого порядка.

А между тем вложимость нашей поверхности в s-плоскость, или, иными словами, униформизируемость нашей кривой C_4 с помощью функции $s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}; J\right)$, послужила образцом и в другом отношении (обстоятельство, тем более замечательное, что до сих пор эта функция была нужна лишь для того, чтобы придать всей ситуации более наглядный характер).

Давайте сначала присмотримся к этому факту самому по себе, отвлекаясь от того, что в нашем специальном случае многоугольник s-плоскости разбит на $2 \cdot 168$ треугольников.

Мы тогда скажем, что данную кривую C_4 с помощью имеющейся на ней нигде не разветвляющейся функции можно так отобразить на многоугольник s-плоскости, что попарно соответствующие друг другу стороны будут связаны линейными подстановками переменной s, переводящими в себя некоторый фиксированный круг. Дальнейшие воспроизведения этого многоугольника с помощью данных подстановок будут все более

---

[1]) См. Klein F. Ges. Abh., т. 3, стр. 90 и далее.

[2]) См. Klein F. Ges. Abh., т. 3, стр. 186 и далее.

и более покрывать внутренность круга, причем покрытие это будет всюду однократным. Следовательно, наша кривая C_4 простейшим образом униформизуется функцией s, и задаваемое этой функцией отображение всюду конформно. И обратно, s-плоскость (или, точнее, внутренность некоторого круга этой плоскости) будет при этом представляться как риманова поверхность над C_4, которая бесконечное число раз *накрывает* C_4, не имея никаких точек ветвления!

Невольно возникает вопрос: справедливо ли что-нибудь аналогичное для произвольной кривой C_4? В такого рода неопределенных очертаниях встает перед нами *центральная теорема об автоморфных функциях*, опубликованная мной в соревновании с появившимися в 1881 г. публикациями Пуанкаре в работе от 27 марта 1882 г., помещенной в 20-м томе "Mathematische Annalen" [1]).

Давайте только сначала убедимся, что подсчет числа параметров подтверждает эту теорему.

Пусть на s-плоскости дана произвольная окружность. Существует ∞^3 линейных подстановок (зависящих от трех вещественных параметров), переводящих эту окружность в себя. Вписав в окружность 14-угольник, выберем подстановки, попарно сопоставляющие его стороны. Тогда этот многоугольник будет фундаментальной областью некоторой кривой C_4, или, точнее, – некоторой римановой поверхности с $p = 3$. Чтобы функция s на этой поверхности не разветвлялась, сумма углов при обеих идеальных вершинах O и O' (см. стр. 409), конечно же, должна равняться 2π.

Тот факт, что семь пар сторон связаны линейными подстановками, дает семь условий. Требование на сумму углов при вершинах O и O' дает еще семь условий. Следовательно, мы можем выбрать многоугольник с произволом, зависящим от $2 \cdot 14 - 7 - 2 = 19$ вещественных параметров. Однако существенны только 16 параметров, так как кривая не изменится, если мы подвергнем многоугольник любой из ∞^3 подстановок, переводящих окружность в себя.

Но то же самое число мы получим, рассмотрев общую кривую четвертого порядка. Действительно, всякая такая кривая зависит, как мы уже знаем (см. стр. 344), от $3p - 3 = 6$ римановых "модулей", то есть от шести абсолютных инвариантов. Это – комплексные числа, и, значит, здесь имеется 12 вещественных параметров. Кроме того, в нашем распоряжении имеются еще две точки O и O' на кривой C_4, которые, будучи соединены семью разрезами, дадут – после отображения на s-плоскость – наш 14-угольник. Так как каждая из этих точек зависит от двух вещественных параметров, то, следовательно, мы снова получаем $16 = 12 + 2 \cdot 2$ параметров.

Самое существенное во всем этом заключается в том, что модулярные функции или, более общо, функции треугольника непосредственно подво-

---

[1]) Впоследствии она была названа "*теоремой о предельном круге*". См. Klein F. Ges. Abh., т. 3, стр. 627 и далее.

дят нас к общим автоморфным функциям, однозначным внутри некоторого круга, являющегося для них предельным!

Это не единственные однозначные автоморфные функции; кроме них имеется бесконечно много других типов таких функций. Достаточно вспомнить функции, ставшие известными из риманова наследия (1876 г.) и затем независимо открытые Шоттки (диссертация, Берлин, 1876; Журнал Крелля, 1877, т. 83): в этом случае фундаментальная область ограничена n отдельно лежащими окружностями, а соответствующие линейные подстановки являются отражениями относительно каждой из этих окружностей. Подвергая эту фундаментальную область всевозможным подстановкам группы, мы получим покрытие плоскости, из которой удалено несчетное множество предельных точек. (Многочисленные примеры такого рода фигур можно найти, например, в книге Клейна и Фрике "Автоморфные функции", т. 1, стр. 418, 432, 439 и 435.)

Но вот настало время рассказать о появлении А. Пуанкаре и о тех личных взаимоотношениях, которые установились между нами и составили основу дальнейшего развития всей этой теории [1]).

Однако сначала я сделаю несколько предварительных замечаний по поводу терминологии. Пуанкаре, в начале своей деятельности очень плохо знавший обстановку в Германии, называл группы с предельными окружностями "фуксовыми" ("groupes fuchsiens"), хотя Фукс никаких заслуг в этой области не имел. Когда я обратил его внимание на общие функции этого рода, он стал называть их "клейновскими" ("fonctions kleinéennes"). Таким образом, по части истории здесь царит невероятная путаница. В Германии мало-помалу получило всеобщую поддержку мое предложение отказаться от всяких терминов персонального характера и называть эти функции "автоморфными". Так что мы говорим теперь об автоморфных функциях с предельной окружностью, с бесконечным множеством предельных точек и т.п.

Ввиду выдающегося значения, которое Анри Пуанкаре в дальнейшем приобрел во всей нашей науке, я чувствую себя обязанным привести некоторые касающиеся его биографические сведения.

Анри Пуанкаре, как и Эрмит, родился в Нанси (в 1854 г.). Известный президент Французской республики [2]) является его двоюродным братом. Уже в школьные и студенческие годы Пуанкаре выделялся своими выдающимися успехами, что, как это ни странно, отличает его от многих других талантливых первооткрывателей. В 1873 г., сдав первым известные по своей строгости вступительные экзамены, Пуанкаре поступает в Политех-

---

[1]) Чтобы лучше понять дальнейшее, полезно ознакомиться с дополнениями, сделанными Клейном в его "Собрании сочинений" (т. 3, стр. 587 и далее); см. также переписку между Клейном и Пуанкаре (там же, стр. 587 и далее). – *Примеч. ред. нем. изд.*

[2]) Раймон Пуанкаре (1860 – 1934) – президент Франции с 1913 по январь 1920 г.– *Примеч. пер.*

ническую школу, а затем, в 1875 г., – в Горный институт (École des Mines), куда принимались наиболее выдающиеся выпускники Политехнической школы и откуда им открывался путь к видным государственным должностям. Однако практическая деятельность, к которой он обнаруживал мало склонностей, не привлекала Пуанкаре, и в 1879 г. он приступил к преподаванию в высших учебных заведениях – поначалу в качестве доцента (Chargé des cours) на Факультете наук в Кане. (Такое начало обычно для провинциального университета.) Затем, начиная с 1881 г., Пуанкаре жил в Париже, где занимал различные должности: сначала преподавал анализ, затем с 1885 г. математическую физику, а с 1896 г. – астрономию. Уже по этим датам видно, как с течением времени в сферу его интересов включались все новые и новые разделы математики. В 1887 г. Пуанкаре стал членом Института (т.е. Академии наук) и, обрастая все новыми и новыми почетными постами, вскоре сделался признанным главой французской математики, широко известным и вызывающим восхищение ученым, гордостью своего отечества. В 1912 г. он внезапно скончался после хирургической операции.

Биографических материалов о Пуанкаре много; я укажу лишь статью Э. Лебона в книге "Savants du jour" [1]) и книгу Тулуза, в которой проводится психологический анализ духовного своеобразия личности Пуанкаре [2]).

Попытаюсь теперь охарактеризовать Пуанкаре как математика.

Пуанкаре отличался совершенно исключительной продуктивностью и многосторонностью, напоминая в этом Коши. Даже в последние годы жизни он с удивительной легкостью входил в курс любых проблем, возникающих в точных науках, и творчески развивал их, всюду пролагая новые пути.

Вне всякого сомнения, известную роль в этой его многогранности сыграла основательная подготовка, которую дает французская система обучения с ее четкой структурой. Система эта позволяет в молодые годы всесторонне овладеть традиционными разделами всей математики – совсем не так, как у нас, в Германии, где подрастающий математик по личному выбору примыкает к кому-либо одному из учителей; это благоприятствует быстрому созреванию ad hoc, но затем мешает дальнейшему развитию. В личном общении Пуанкаре был прост и любезен, но более вбирал в себя, нежели отдавал.

Пуанкаре представлял собой тип подлинного гения, который всюду с первого взгляда схватывает самое существенное. Он в равной мере владел

---

[1]) Paris: Gauthier-Villar, 1909.

[2]) H. Toulouse. H. Poincare. – Paris, 1910. – Подборку некрологов и др. материалов можно найти в "Rendiconti del Circolo matematico di Palermo", 1913, т. 36, в "Приложении", стр. 13–32; см. также некролог Дарбу, помещенный в качестве введения во 2-м томе "Трудов" Пуанкаре. И, наконец, Пуанкаре посвящены тт. 38 (1921) и 39 (1922) журнала "Acta Mathematica". [На русском языке имеется книга: Тяпкин А.А, Шибанов А.С. Пуанкаре. – М.: Молодая гвардия, 1979. – *Примеч. пер.*]

геометрией и анализом, дар открытия и умение доказывать находились у него в полном равновесии. Разве лишь область непосредственных приложений математики оставалась у него в стороне – в отличие от таких мастеров, как Архимед, Ньютон, Гаусс, которые наряду с теоретическими исследованиями занимались также экспериментами и измерениями и которых я по этой причине ставлю еще выше. Конечно, у него не обошлось и без теневых сторон. Подобно Коши, Пуанкаре публиковал свои работы очень быстро и потому не всегда тщательно отделывал их. В его бурных ранних публикациях не только много предварительного, но даже немало ошибок или преувеличений. Однако впоследствии у него развился блестящий и ясный стиль, который в сочетании с неисчерпаемым запасом замечательных по своей глубине идей принес огромный успех его получившим всеобщую известность трудам по философии математики.

Во всем этом он был полной противоположностью своему учителю Эрмиту, у которого добросовестная проработка деталей настолько выступала на передний план, что иногда он из-за этого мог оставить в стороне суть рассматриваемой проблемы и подолгу блуждать по окольным путям. (В особенности я имею здесь в виду его объемистую работу 1886 г. по уравнениям пятой степени, в которой он без всякой надобности связал эту теорию с теорией инвариантов бинарных форм пятой степени.)

Полностью осветить все значение результатов Пуанкаре мы сможем лишь в дальнейших разделах этих лекций[1]). Здесь же я расскажу – в связи с моими собственными работами – лишь о ранней поре теории автоморфных функций (1881 – 1882 гг.). Работы в этой области, если не считать предшествующей им диссертации 1878 – 1879 гг. о дифференциальных уравнениях в частных производных, по существу представляют собой первые публикации Пуанкаре. Еще в 1880 г. он представил в Академию на соискание премии работу, которая относилась к автоморфным функциям. Затем последовала бурная серия публикаций в "Comptes Rendus" за 1881 г. в тт. 92 и 93. За год Пуанкаре опубликовал не менее тринадцати работ, которые затем были подытожены в "Mathematische Annalen" (т. 19, стр. 553–564) в статье "Sur les fonctions uniformes, qui se reproduisent par des substitutions linéaires" ("Об однозначных функциях, восстанавливающихся при линейных подстановках")[2]).

Речь здесь в основном идет о функциях с предельной окружностью. Новое у Пуанкаре заключается, во-первых, в том, что он отважно, в самом общем виде, строит фундаментальную область, подобно тому, как я выше делал это с 14-угольником при $p = 3$. Естественно, и я думал об этом общем случае, но я слишком крепко держался за идею порождения по принципу симметрии. Новы, во-вторых, и формулы для построения автоморфных функций – так называемые *ряды Пуанкаре* (которые сам он назвал θ-ряда-

[1]) Клейн планировал написать о Пуанкаре (так же, как и о Ли) отдельную главу. – *Примеч. ред. нем. изд.*

[2]) Пуанкаре А. Труды, т. II, стр. 12 и далее.

ми). Пусть нам дана группа, состоящая из подстановок

$$\zeta' = \frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}, \quad \alpha_i \delta_i - \gamma_i \beta_i = 1$$

(вместо прежнего s мы здесь пишем ζ). Если предельной окружностью мы считаем вещественную ось, то числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ должны быть вещественными. Пусть группа собственно разрывна, т.е. пусть ее фундаментальная область конечна. Пуанкаре – предполагая, что предельная окружность целиком располагается в конечной части плоскости, – рассматривает суммы

$$\sum_i \frac{1}{(\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}},$$

аналогичные эйзенштейновским суммам из теории модулярных функций (подробное сопоставление этих рядов Пуанкаре и Эйзенштейна проделано Раузенбергером; Math. Annalen, 1882, т. 20). Пуанкаре показывает, что при $m \geqslant 2$ эти ряды абсолютно сходятся. Записав их в однородном виде

$$\sum \frac{1}{(\gamma_i \zeta_1 + \delta_i \zeta_2)^{2m}},$$

мы немедленно убедимся, что имеем здесь дело с автоморфными формами, и стало быть, беря их отношения, мы получим автоморфные функции. Таким образом, здесь налицо полная аналогия с формулой $J = \dfrac{g_2^3}{\Delta}$ для абсолютного инварианта J в случае эллиптических модулярных функций.

Пуанкаре глубоко осознал также униформизующую силу функций этого нового класса. В частности, для плоскости он установил *теорему о предельном круге,* названную мной *первой основной теоремой.*

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – произвольные точки z-плоскости, а $l_1, \ldots, l_n$ – произвольные целые числа (или символы ∞). Тогда существует одна (и по существу только одна) функция

$$\zeta\left(\frac{1}{l_1}, \ldots, \frac{1}{l_n}; z\right),$$

для которой обратная функция однозначна и которая имеет точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ точками ветвления порядков $l_1, \ldots, l_n$ (в предельном случае $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = \infty$ получается функция $\zeta(0, 0, 0; z)$). Обратная функция определена в некотором "предельном круге" ζ-плоскости; любой угол на z-плоскости с вершиной α_l уменьшается при отображении, осуществляемом функцией ζ, в l_l раз.

Функция ζ униформизует функции, имеющие в данных точках предписанное ветвление. В предельном случае, когда все l_i бесконечны, получается даже униформизация всех функций переменной z, имеющих ветвление лишь в точках $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Характер ветвления может быть при этом произвольным!

Таким образом, функция ζ является обобщением нашей прежней функции

$$s\left(\frac{1}{l_1}, \frac{1}{l_2}, \frac{1}{l_3}; z\right)$$

(при α_1, α_2, α_3, равных соответственно 0, 1 и ∞). Однако при $n = 3$ эта функция, как мы знаем, удовлетворяет вполне определенному дифференциальному уравнению, зависящему только от α_i и l_i, тогда как при $n > 3$, чтобы получить это уравнение, нужно еще найти $n - 3$ дополнительных параметров. Эти параметры однозначно определяются из условия, что рассматриваемая функция обладает в круге однозначной обратной функцией (с другой стороны, случай $n = 3$ является простейшим случаем, когда порядки ветвления l_i могут быть выбраны произвольно).

Уже на итоговую статью Пуанкаре в 19-м томе "Mathematische Annalen", определенное влияние оказала переписка, в которую я вступил с ним, начиная с июня 1881 г. Пуанкаре, начиная свои публикации в "Comptes Rendus", не имел четкого представления ни о римановой теории (в том числе и о "роде поверхности", не говоря уж о новейшем обосновании этой теории, данном Шварцем), ни о наших работах в "Mathematische Annalen", которые он, впрочем, усвоил с удивительной быстротой. Я первым также обратил его внимание на то, что наряду с функциями с предельным кругом имеется бесчисленное множество других типов автоморфных функций[1].

Я хочу теперь – частично в дополнение к сказанному ранее – рассказать о своих собственных работах, примыкающих к этому кругу вопросов. В то время, в 1881 г., я был занят тем, чтобы придать основным идеям римановой "Теории алгебраических функций и их интегралов" вид, который они получили в моей статье, написанной осенью 1881 г. и разосланной к Рождеству того же года, хотя она и помечена 1882-м годом. Помимо прочего работа эта содержит новое существенное достижение: в ней показано, что римановы поверхности, имеющие один и тот же род, образуют связное многообразие (факт, который Шварц еще долгое время подвергал сомнению, так как он привык классифицировать алгебраические образы по нормальным формам, ведущим свое начало от Вейерштрасса). Это открыло передо мной возможность распространить основную теорему, которая была доказана Пуанкаре для случая плоскости, на римановы поверхности произвольного рода, а заодно и на автоморфные функции, не имеющие предельного круга.

---

[1] Об одной ошибке в работе Пуанкаре см. Klein F. Ges. Abh., т. 3, стр. 714 и далее.

В моей первой заметке, которую я на эту тему опубликовал к Новому 1882-му году в 19-м томе "Mathematische Annalen"[1]), я скомбинировал оба эти подхода. Я не буду останавливаться здесь на этом более подробно и сразу же перейду ко второй заметке от 27 марта 1882 г. (Math. Annalen, т. 20[2])), в которой была опубликована основная теорема о предельном круге, которую я выше, ввиду особой ее простоты, назвал *центральной теоремой*. Эта теорема утверждает, что любая не имеющая точек ветвления функция на римановой поверхности рода $p \geqslant 2$ может быть одним и по существу только одним способом униформизована автоморфными функциями с предельным кругом.

Теорема эта, равно как и несколько более позднее итоговое изложение всей моей теории, опубликованное осенью 1882 г. в 21-м томе "Mathematische Annalen"[3]), появилась на свет при тягчайших обстоятельствах, о чем мне хочется рассказать, так как было бы жаль, если бы память обо всем этом ушла вместе со мной; – к тому же с тех пор прошло столько времени, что я могу быть объективным во всех деталях.

С осени 1880 г. я находился в Лейпциге и наряду с научной работой оказался там сильно загруженным массой организационных и педагогических проблем. Осень 1881 г. я, чтобы отдохнуть, проводил на Северном море (в Боркуме), где написал статью о Римане и доказал основную теорему из статьи, вышедшей в 19-м томе "Mathematische Annalen"; однако я записал ее лишь во время Рождественских каникул. По совету врачей я на пасху 1882 г. решил снова отправиться на Северное море, в Нордерней. Я хотел написать там в спокойной обстановке вторую часть статьи о Римане и дать в ней новое доказательство существования для алгебраических функций на заданных римановых поверхностях. Однако я смог там выдержать только восемь дней, так как существование мое становилось слишком горестным: из-за жестоких штормов невозможно было выйти на улицу, и у меня началась сильная астма. Я решил немедленно уехать к себе на родину, в Дюссельдорф. В последнюю ночь с 22 на 23 марта, которую я из-за астмы провел сидя на софе, передо мной внезапно в половине третьего ночи предстала центральная теорема в том виде, как она уже была подготовлена 14-угольником из 14-го тома "Mathematische Annalen"[4]). В первой половине следующего дня в почтовой карете, которая ходила тогда от Нордена до Эмдена, я еще раз вплоть до деталей продумал найденное мною. Теперь я знал, что обладаю великой теоремой. По прибытии в Дюссельдорф я тотчас же записал ее, датировав 27-м марта, послал ее Тойбнеру и просил отправить оттиски корректур Пуанкаре и Шварцу, а также, например, Гурвицу. Шварц из-за ошибки в подсчете параметров сначала придерживал-

---

[1]) См. Klein F. Ges. Abh., т. 3, стр. 622 и далее.

[2]) См. Klein F. Ges. Abh., т. 3, стр. 627 и далее.

[3]) См. Klein F. Ges. Abh., т. 3, стр. 630 и далее.

[4]) См. Klein F. Ges. Abh., т. 3, стр. 126.

ся мнения, что теорема должна быть неверной, однако впоследствии он сам предложил ряд существенных идей, позволивших разработать новые методы ее доказательства.

С доказательством на самом деле возникали большие трудности. Я пользовался так называемым *рассуждением по непрерывности*, опирающимся на сопоставление многообразия римановых поверхностей данного рода p с многообразием соответствующих автоморфных групп с предельным кругом. Я никогда не сомневался в правильности этого подхода, но постоянно наталкивался либо на недостаточность своих знаний в области теории функций, либо на разные недоделки в этой теории; возможность преодоления этих трудностей я мог пока лишь постулировать, а фактически они полностью были преодолены Кёбе лишь тридцать лет спустя, в 1912 г.

Это не помешало мне летом 1882 г. установить ряд еще более общих теорем, охватывающих все мои результаты из 19-го и 20-го томов "Mathematische Annalen", и подготовить – на первых порах в виде докладов на семинаре, которые были записаны Штуди, – отделанное изложение всей этой концепции. По большинству своих работ я сначала читал лекции, а затем в каникулярное время редактировал их для публикации. Потом в осенние каникулы 1882 г. в Табарце (Тюрингия) мною была сделана работа, опубликованная в 21-м томе "Mathematische Annalen". Она была завершена 6 октября 1882 г. Несмотря на то, что многое в этой работе несовершенно и не вполне закончено, общая структура концепции в целом сохранилась и не была изменена последующими публикациями Пуанкаре в тт. 1, 3, 4 и 5 только что основанного тогда журнала "Acta Mathematica"[1].

Фактически мне снова удалось чуть-чуть опередить Пуанкаре, поскольку мои оттиски были разосланы в конце ноября 1882 г., тогда как первый номер "Acta", содержавший первую работу Пуанкаре, появился в начале декабря 1882 г. К тому же этот номер содержит лишь первую часть теории – построение фундаментальной области в случае, когда задана главная окружность.

Но цена, которую мне пришлось заплатить за мой успех, была из ряда вон велика – здоровье мое совершенно расшаталось. В последующие годы мне не раз приходилось удлинять свои отпуска; пришлось отказаться и от какой бы то ни было творческой деятельности. Только к осени 1884 г. дело снова пошло к лучшему, но прежней степени продуктивности я уже никогда больше не достиг. Я оказался вынужденным заниматься в основном разработкой своих прежних идей, а позже, когда я уже был в Гёттингене, я расширил область своей деятельности и занялся общими задачами организации нашей науки. Так что автоморфными функциями я занимался с тех пор уже только случайно. Моя по-настоящему продуктивная работа в области теоретической математики с 1882 г. прекратилась. Все последую-

---

[1] Пуанкаре. Труды, т. II, стр. 108 и далее.

щее, в той мере, в какой оно не является отделкой прежнего, касается лишь деталей.

Таким образом Пуанкаре получил свободу действий, и до 1884 г. он опубликовал в "Acta Mathematica" пять больших работ по этим новым функциям. В т. 1 наряду с порождением наиболее общей из рассмотренных им фундаментальных областей мы находим теорию соответствующих рядов. В отношении основной теоремы Пуанкаре рассмотрел лишь случай предельного круга, и сделал он это лишь годом позже, в 4-м томе "Acta". Здесь он существенно усовершенствовал свое доказательство, но до полного конца его еще не довел (см. сообщение Фрике на Гейдельбергском международном конгрессе 1905-го года, стр. 246 и далее). Пуанкаре тоже пользовался рассуждениями по непрерывности, и по существу его доказательство состоит из тех же самых частей, что и мое. Но при рассмотрении других случаев Пуанкаре столкнулся с непреодолимыми пока что трудностями, поскольку, как он обнаружил, в них идет речь об открытых многообразиях (которым невозможно приписать какой-либо определенный край).

В связи со всем этим мне особенно важно, чтобы читатель правильно понимал, какое место Пуанкаре занимает по отношению к Риману. Существование автоморфных функций Пуанкаре выводит не из римановских принципов, а из представления этих функций с помощью введенных им тета-рядов. Но доказывая непрерываность этих функций, он все-таки вынужден опираться на теорему о том, что совокупность всех алгебраических кривых данного рода образует некий континуум, – факт, который и до сих пор доказывается лишь на основе римановских результатов. Таким образом, в этом решающем пункте Пуанкаре все же зависит от Римана.

Поэтому название, которое я дал своей работе в 21-м томе "Mathematische Annalen", – "Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie" ("Новые результаты в теории функций Римана") – является, пожалуй, адекватным выражением исторического процесса. Несмотря на блестящие обрисованные нами достижения теории функций, связанные с именами Вейерштрасса, Клебша, Брилля – Нётера, Дедекинда – Вебера, Кронекера и Гильберта, вдохновленный Риманом подход и по сю пору является ни с чем не сравнимым движущим ферментом на всей территории, подведомственной теории функций.

ДОПОЛНЕНИЕ

Феликс Клейн
и его место в современной математике*)

Многоуважаемые дамы и господа!

В эти торжественные дни Феликс Клейн вспоминается особенно живо всем нам, кому посчастливилось пройти вместе с ним здесь, в Гёттингене, часть жизненного пути. Кажется, будто стоит он у порога и вот-вот войдет, улыбаясь своей немного чопорной, но необычайно доброй улыбкой, той самой улыбкой, которой он поощрял партнера к равноправному сотрудничеству, благодарил за самостоятельность в решении поставленных им задач. Войдет и заговорит, сопровождая речь характерным движением рук, как бы натягивая поводья. Мы вспоминаем его, ибо сегодня Гёттинген и математика празднуют триумф дела всей его жизни, триумф того, что было задумано и начато им, над претворением чего он трудился неустанно. И не о нем бы вести сегодня речь; это ему следовало бы выступить перед нами с одним из своих блестящих докладов, в которых проявился его могучий гений и полный воли и творческой энергии характер! Выступить, подводя итоги и указывая прошедшие и грядущие связи идей и сил, взрастивших его творчество. Он не довел до конца своих замыслов, ибо и по его ниве прошла неумолимая, всеразрушающая война. Его с нами нет, и нам остается лишь с благоговением хранить о нем благодарную память.

Мне хотелось бы нарисовать вам не образ могучего, творчески одаренного организатора, каким он, несомненно, был, направляя свою деятельность на то, чтобы вывести математику из культурной изоляции, содействуя установлению ее связей с физикой и техникой, оживлению и обновлению математических и естественно-научных исследований в средней

*) Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart // Naturwissenschaften – 1930. – Bd. 18, S. 4–11. Речь Г. Вейля, прочитанная 3 декабря 1929 г. на заседании Гёттингенского математического общества по случаю торжественного открытия Математического института. Перевод З.А. Кузичевой. Примечания А.Н. Паршина.

и высшей школе, не образ талантливейшего педагога высшей школы, подобного которому не было в математике и вряд ли когда-нибудь будет, нет, мне хотелось бы посвятить свою речь тому, чтобы показать, какое место занимают в современной математике достижения Феликса Клейна и какую роль играют в ней его идеи и методы. Кроме того, позвольте мне ограничиться чистой математикой. Я вполне сознаю, насколько тем самым отступлю от идеала, которым руководствовался сам Клейн, погрешу против его стремления устанавливать и всячески стимулировать постоянное взаимодействие математики и ее приложений. Назвав в своих лекциях Гаусса первым из математиков [1]), Клейн отметил, что в творчестве Гаусса непостижимая разносторонность сочеталась с первоклассными достижениями во всех областях, за которые он брался; что в нем уравновешивались "творческая сила, строгость изложения и практическое чутье по части приложений вплоть до тщательно произведенных наблюдений и измерений". Однако если говорить совершенно откровенно, Клейн существенно меньше, чем Гаусс, обращался к приложениям. Именно это хотя бы отчасти может служить оправданием моего намерения ограничиться чистой математикой. В приложениях он выступал лишь от случая к случаю и скорее как систематизатор, чем создатель. Его книга по теории волчка [2]) представляется мне чем-то вроде образцового воплощения программы, которую он сам и разработал, и уже поэтому она не может соперничать со всем тем, что он создал в чистой математике и что в значительно более высокой степени отмечено печатью свободы и необходимости. Когда Клейн в 1882 г. сказал о своем небольшом сочинении по римановой теории алгебраических функций [3]), что он написал его "прямо-таки как физик", то он тем самым превосходно охарактеризовал методы и дух своего эпохального произведения. Но Клейн не был физиком – он не был им и тогда, когда выводил свои фундаментальные теоремы существования на римановой поверхности, представив эту поверхность как однородный проводник, в котором распределение электрических токов однозначно задается источниками. Правда, в начале своего научного пути под влиянием своего учителя Плюккера – геометра и физика-экспериментатора – он именно физику считал целью своих научных исследований. Однако уже в студенческие годы в Бонне он составил себе план, осуществление которого предполагало основательное изучение различных отраслей математики. Ознакомившись с ним, физик едва ли удержался бы от улыбки. Этот рейд по всем областям математики превратился затем в большую экспедицию, и надо признать,

[1]) В оригинале "die Krone unter den Mathematikern". В тексте Клейна этого нет. По-видимому, Вейль имеет в виду упоминание о медали, отчеканенной в честь Гаусса с надписью "Mathematicorum princeps", см. стр. 74.

[2]) K l e i n F. Über die Theorie des Kreisels. – Leipzig: Teubner, 1898 – 1910. Bd. 1–4.

[3]) K l e i n F. Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. – Leipzig: Teubner, 1882.

Физические аналогии до сих пор используются при изложении теории римановых поверхностей.

что он мастерски провел ее, только при этом он, разумеется, застрял в математике. По самой сути своей творческой индивидуальности Клейн был чистым математиком и всегда им оставался.

Все, что воплощено в какой-либо форме, существует в постоянном напряжении: с одной стороны, оно заключает в себе нечто идеальное, объективное, отвечающее некоторой потребности, а потому необходимое, как если бы нечто трансцендентное, желающее воплотиться в определенной форме, господствовало над человеком, превращая его в рупор откровения; с другой стороны, все воплощенное в форме несет на себе отпечаток истории духа, оно неотделимо от момента создания, от исторического процесса, не дает законсервировать себя как застывший результат. Наука как учение об истинном – высокая объективная ценность, которой смиренно служит человек, и одновременно она – ветвь человеческой деятельности, ради которой нельзя приносить в жертву самое жизнь. Бог как вечно законченное и вечно становящееся[1]). В математике особенно велика опасность переоценить первую, объективную сторону: математик склонен к абсолютизации. Клейн был свободен от такого ослепления. Лекции по истории математики XIX столетия, прочитанные им во время войны, обнаруживают его огромное историческое чутье. Он все видел в исторической перспективе. Этим и обусловлена его сдержанность по отношению к основаниям. Он охотно подчеркивал, что знание начинается, так сказать, в середине и теряется в неизвестности не только вверху, но и внизу. Наша задача – рассеивать тьму в обоих этих направлениях, а абсолютный фундамент, этот огромный слон, несущий на своей богатырской спине крепость истины, – это скорее всего лишь сказка[2]).

---

[1]) В оригинале "Gott als ewig Vollendeter und Werdender". Это высказывание, избранное Вейлем для иллюстрации своей мысли, близко представлениям патристической философии о соотношении времени и вечности; см., например, у Николая Кузанского: "... в вечности твоего замысла всякая временная последовательность совпадает с одним и тем же теперь вечности". Сочинения. В 2-х томах. – М.: Мысль, 1980, т. 2, стр. 55. Похожие образы встречаются у позднего Гёте: "... и мнится нам покоем в боге вся мировая толчея", см. раздел "Бог и мир" в кн.: Собрание сочинений. М., 1975, т. 1, стр. 463. Взгляды обоих мыслителей весьма интересовали Вейля. Представление о мире как созданном и одновременно непрерывно создаваемом очень характерно для многих философских и мифологических систем.

[2]) Неоднократно использованный Вейлем пример платоновского определения понятий с помощью дихотомического процесса (см. Weyl H. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft // Handbuch der Philosophie. – München, 1926, конец раздела 20 и Комментарии к речи Римана "О гипотезах, лежащих в основании геометрии". – В кн.: Риман Б. Сочинения. – М., 1948, стр. 510–526; и кн.: Об основаниях геометрии. – М., 1956, приложение А) подсказывает следующую возможную интерпретацию этого места. Знание, скажем математическое, можно рассматривать как совокупность понятий и утверждений, занимающих определенные "места" в сети логических дедукций, бесконечно продолжаемых в обе стороны. Лишь аксиомы являются тем фундаментом, теми исходными точками, с которых начинается дедукция. Как показал К. Гёдель, "абсолютный фундамент" окончательной аксиоматики действительно "скорее всего лишь сказка".

Более пристрастным Клейн представляется мне в другом отношении. Он отличался непредвзятостью и содействовал многосторонним связям с приложениями в эмпирико-научной и технической сферах. Но надо иметь в виду, что наряду с этим математика играет центральную роль в построении духовного мира. Занятие математикой, подобно мифотворчеству, языку и музыке, – одно из первоначальных видов творческой деятельности людей, в которых проявляется их собственно человеческая натура, духовная организующая воля и которые приводят их к выражению мировой гармонии. Клейна огорчало, что немецкому обществу, по-видимому, вообще отказано в "создании единого культурного настроения, которое элемент точного научного знания включало бы в себя в качестве характерной и само собой разумеющейся составной части". Если сегодня в этом направлении и намечаются какие-то перемены, то они, видимо, обусловлены прежде всего необычайно возросшим интересом к технике, формирующим точное мышление широких масс, хотя, наблюдая за подрастающим поколением, порой испытываешь в этом сомнение: я не раз замечал, что особенно пренебрежительное отношение к теоретическим познаниям, например в механике, проявляют именно те юноши, которые страстно отдаются мотоспорту. Во всяком случае, мне кажется несомненным, что в нас снова оживает тяга к духовному, или, если позволите, я предпочел бы давно изгнанное слово – к метафизическому[1]). В этом сказывается в первую очередь преобразующее влияние искусства – характерными здесь являются, например, спорная, но блестяще написанная книга Шпенглера или значительно более основательная "Философия символических форм" Кассирера[2]). Мощную поддержку им оказывает теория относительности. В этом же плане показательно то большое значение, которое придается теперь стремлению понять математику античности ("Платон и так называемые пифагорейцы" Эриха Франка, "Классические произведения математики" Шпейзера[3])). Характерны и такие личности, как рано умерший Грезер, которому мы обязаны реконструкцией "Искусства фуги" Баха[4]). Клейн по своей природе был менее открыт этой стороне человеческой деятельности; он тяготел к приложениям. Его философские высказывания, отражающие общий духовный уровень человека столь редкой многогранности и творческой продуктивности, безусловно, представляют большой интерес, хотя смысла фундаментальных философских проблем он фактически не

---

[1]) Термин "метафизическое" здесь и в других местах Вейль использует как синоним "философского". Достаточно вспомнить "Метафизику" Аристотеля.

[2]) Spengler O. Untergang des Abendlandes. – München, 1920–1922, Bd. 1–2 (Шпенглер О. Закат Европы. – М.; Пг., 1923, т. 1); Cassirer E. Philosophie der symbolischen Formen. – B.,1922–1923, Bd. 1–3.

[3]) Frank E. Plato und die sogennante Pythagoräer. – Halle (Saale), 1923; Speiser A. Klassische Stücke der Mathematik. – Zürich, 1925.

[4]) Graeser W. Bachs Kunst der Fuge. Bach-Jahrbuch, 1928. Здесь имеется в виду не восстановление текста, а выяснение внутренней структуры произведения, см.: Швейцер А. Иоганн Себастьян Бах. – М.: Музыка, 1965.

понимал и в этой области остался прочно привязанным к догмам своего времени – эмпиризму и психологизму, ярким представителем которых был Мах, чьи безапелляционные эмпиристские воззрения вызывают сегодня наибольшие возражения.

Наиболее замечательной чертой личности Клейна–ученого является его страстное стремление добиться соединения, слияния, взаимопроникновения разнороднейших дисциплин. Это проявилось не только в области отношения математики к приложениям: более плодотворными были его результаты по объединению разных способов исследования и рассуждений в самой математике. И здесь в постижении глубоко скрытых внутренних взаимосвязей и взаимозависимостей он был просто гениален. В этом отношении было характерно уже его сочинение, с которым он 24-летним юношей вступил на профессорскую кафедру в Эрлангене. В XIX столетии геометрия развивалась в нескольких направлениях, на первый взгляд, далеких друг от друга. "Эрлангенская программа" в понятии группы преобразований обнаруживает общую связь, которая охватывает все разновидности геометрии и одновременно выявляет своеобразие каждой из них, принципиально ставит вопрос "Что такое геометрия?" и отвечает на него. Не менее характерен и способ, которым Клейн пришел к тому важному открытию, под знаком которого производились геометрические исследования последующих пятидесяти лет. Испытывая настоятельную потребность в разностороннем общении, он никогда не замыкался в мире своих собственных идей. Не только в Германии, но и во Франции, Англии, Италии и Америке он установил многочисленные связи, которые, как правило, приводили к оживленной переписке и обмену мнениями. Он работал в постоянном общении с друзьями и учениками, всегда готовый воспринять чужие идеи, но прежде всего одаривающий своими сокровищами других. В предшествующие Эрлангену годы академических странствий он изучал в Бонне и Гёттингене у Плюккера и Клебша немецкую и вскоре после этого в Париже, главным образом у Гастона Дарбу, французскую геометрию. Единую точку зрения на эти внешне противоположные научные направления он отыскивал вместе с норвежским математиком Софусом Ли, с которым подружился незадолго до того. Еще в 1832 г. в Париже в своем бессмертном письме, написанном накануне гибели (утром он пал на дуэли), двадцатилетний буйный Галуа сообщил своему другу Шевалье, что обнаружил в конечных группах "подлинную метафизику" алгебраических уравнений. Его краткие заметки остались, однако, тайной за семью печатями. В 1870 г., как раз тогда, когда Клейн и Ли находились в Париже, Камил Жордан в своем обширном "Трактате о подстановках"[1]) сорвал эту печать таинственности и систематически обосновал теорию конечных групп преобразований. С этих пор идея группы становится центральной в математическом творчестве Клейна; понятие группы красной нитью проходит через все его

[1]) Jordan C. Traité des substitutions et des équations algébriques. – Paris, 1870.

произведения. Его лекции об икосаэдре[1]) – чудная симфония, в которой геометрия, алгебра, теория функций и теория групп сливаются в изумительную полифоническую мелодию. Оглядываясь назад, он говорил о времени, когда проводил эти и родственные им исследования преобразований эллиптических модулярных функций 5-го, 7-го и 11-го порядков, как о счастливейшей поре своей математической активности. Это был период ''Mathesis quercupolitana'' (дубградской математики[2])), как шутливо говорил Гордан, с которым в то время деятельно сотрудничал Клейн; они часто встречались в Эйхштадте, лежащем на полпути от Эрлангена до Мюнхена. ''Соединить Галуа и Римана'' звучало паролем. Клейн, несомненно, оказал глубокое влияние на математиков последующих поколений, стремясь раскрывать шлюзы, почти наглухо перекрывающие каналы математического мышления в разных областях математики. Правда, и сейчас то и дело приходится слышать жалобы на возрастающую специализацию в науке. Мне все же кажется, что в последние десятилетия положение в целом все-таки улучшилось. Ученый часто становится трагической жертвой неумолимого рока: противоречия между постоянно растущим числом научных дисциплин и неизменностью интеллектуальной силы отдельной личности. Однако хочется думать, что и среди ученых нашего поколения не так уж мало всесторонне развитых личностей. Этим мы обязаны прежде всего примеру таких ученых, как Клейн. И если сегодня ученый нередко оказывается натурой более основательной и разносторонней, чем, скажем, художник, то это обстоятельство обусловлено, помимо всего прочего, тем, что в последние десятилетия, отмеченные кризисом, были поставлены под сомнение значение науки и значимость ученого, в то время как личности художника нанесен значительный ущерб доходящим до абсурда превознесением и чуть ли не обожествлением искусства как прибежища последних мировых тайн.

Главным инструментом математической методики Клейна было интуитивное понимание (Verstehen), позволяющее постигать глубоко скрытые взаимосвязи. В своем блестящем докладе, посвященном Риману, он выразился так: ''Чистая математика развивается благодаря приложению новых методов к старым проблемам: перед нами сами собой встают новые проблемы по мере того, как мы все лучше постигаем старые''. Только родственный по духу исследователь мог подметить те особенности, которые Клейн считает главными в личности Римана–ученого, и эту характеристику мы можем использовать для понимания личности самого Клейна: ''Конечно, математические доказательства, вынуждающие нас своей убедительностью принять их, замыкают теорию, как замыкает свод его последний, замко́вый камень. Конечно, отказавшись от такого характера

---

[1]) Klein F. Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Grades. – Leipzig, 1884. Готовится русский перевод. – Наука, 1989.

[2]) Eichstadt в переводе с немецкого означает Дубград; Quercupolitana – перевод немецкого названия на латынь.

своих доказательств, математика подписала бы себе смертный приговор. Однако то, как ищутся новые задачи, как предчувствуются новые факты и связи, – все это навсегда остается секретом творческой лаборатории гения. Не создавая новых концепций, не ставя новых целей, математика со всей логической строгостью ее доказательств скоро исчерпала бы себя и впала в состояние застоя, полностью израсходовав весь свой материал.

С этой точки зрения максимальное содействие развитию нашей науки оказывают математики, выделяющиеся не столько строгостью доказательств, сколько интуицией. Клейн довел до совершенства врожденную интуитивную способность до мельчайших деталей прояснять обнаруживаемые им взаимосвязи. Это свое мастерство он внес и в работы, составившие лекции об икосаэдре, где оно проявилось во всем, включая тончайшие числовые выкладки. Но там, где оставалось усилием логики придать единую форму всем деталям, он не выдерживал до конца. К нему нельзя отнести девиз Гаусса: "Nil actum reputans, si quid superesset agendum" ("Что не сделано до конца, вообще не сделано"). Так, он с несравненной силой предвидения обнаружил и установил теорему униформизации, а в ее реализации его опередил Пуанкаре. Правда, ее окончательное и полное обоснование заставило себя ждать еще 25 лет. Заметим, кстати, что теория аналитических функций стала ареной особенно острых состязаний, где решения, подобно экспедициям, штурмующим южный полюс, следуют друг за другом чуть ли не ежедневно: Абель и Якоби оспаривают друг у друга титул основателя эллиптических, Клейн и Пуанкаре – автоморфных функций. По меткой характеристике Харди, изобретательность и сила интуиции не уравновешивались у Клейна "исполнительской мощью" (executive power.). Своеобразие Клейна нельзя, пожалуй показать яснее, чем в контрасте с эти крупным математиком наших дней. На это противоположение указал сам Харди в своей краткой содержательной речи в Лондонском математическом обществе, сопоставив жесткую, четко очерченную [hard, sharp, narrow] теорию функций Бора, Ландау, Литлвуда и рыхлую, расплывчатую [soft, large, vague] теорию Биркгофа и Кёбе. Математическое остроумие само по себе, ловкие трюки доказательсв, насилующие результаты, еще не созревшие для того, чтобы их можно было осознать до самых истоков, – эти приемы пионеров, осваивающих математические пустыни, были совершенно чужды Клейну.

В чем секрет того мастерства, которым столь искусно владел Клейн? Если я не ошибаюсь, в главных чертах, хотя, возможно, и недостаточно полно, его можно охарактеризовать так: этот секрет состоит в умении находить и наиболее естественным образом отделять друг от друга различные свойства, присущие предмету, каждое из них в отдельности подчинять своей собственной, относительно небольшой и легко обозримой группе условий, после чего путем синтеза составлять сложное целое. Аналитическая часть здесь, если ее мыслить теоритически завершенной, ведет прямо к аксиоматическому методу. Ярким примером тому может служить Эрлангенская программа Клейна — осмысление геометрических связей, начиная с самой широкой группы преобразований и последующего сведения к узким специальным группам; и по меньшей мере однажды, когда необходимо было защитить неевклидову геометрию наиболее ясным изложением, он вынужден был довести дело до горького конца, до аксиоматизации. В целом же он не был расположен к такой логической отточенности. Мы сталкиваемся здесь с противоречием другого рода, присущим человеческому творчеству: с противоречием между текущей, всеохватывающей и цепко держащей в своих объятиях материальной жизнью и процессом создания чистой формы, достигаемой в результате изолирования. Он инстинктивно противился такому изолированию. Даже упорядочивая и анализируя, он бежал определенности. Он не хотел оказаться односторонним. Эта предрасположенность, эта konziliante Natur [1]), как говорил о себе Гёте, единственно благоприятна для практической деятельности. Люди противоположного склада, которые будучи охвачены судорогой деловитости, предпочитают идти до самого конца по каждому проложенному пути, могут достичь подобной свободы лишь при условии, что они на следующем этапе отрекутся от результатов предшествующего своего творчества и в течение развития сами будут корректировать свою точку зрения.

Однако, с другой стороны, способ мышления Клейна мешал ему полностью оценить аксиоматический метод как инструмент конкретных математических исследований. Из его поздних высказываний до нас дошли следующие: "Математика наших дней походит на крупный оружейный магазин мирного времени. Его витрина заполнена роскошными вещами, которые своим остроумным, искусным, пленяющим глаз исполнением восхищают знатока, а подлинные истоки и назначение этих вещей, их способность поражать врага отходят в сознании на задний план вплоть до полного забвения" [2]). В этом, пожалуй, есть доля истины, тем не менее в целом такая оценка представляется несправедливой. Напряжение, о котором здесь уже говорилось, воплощается в основаниях математики в полной противоположности континуума и целого числа. Непрерывное интуитивно первично. Но установление единицы, выделение из непрерывного течения четко очерченной части — оставшееся неотделенным тем временем с нетерпением ожидает повторения этого процесса — есть начало всех начал сознательного творчества, начало всех начал самой математики. А очевидная первоначальность континуума, "континуальная основа", была своеобразным источником интуитивных представлений Клейна, придавая специфическую окраску всем его основным произведениям. В континууме берет начало охотно подчеркиваемая Клейном противоположность приближенной и точной математики. Если проследить за этой противоположностью

---

[1]) Склонность прислушиваться к другим мнениям.

[2]) См. выше стр. 86.

до ее самых последних оснований, то придем к точке зрения интуитивной конструкции в том виде, как ее принял Брауэр, и исходя из которой он так отчетливо выявил трудности в основаниях анализа. Следует все же сказать, что эти апории (затруднения) уже со времен античности сдерживали мысль о бесконечном; ими было навеяно, например, представление Лейбница о том, что телам присуще лишь явление, а не субстанциальное бытие, поскольку континуум может быть понят лишь как категория возможного, как возможный субстрат в процессе становления все точнее и точнее определяемых частей. Но Клейн и здесь предпочел не слишком вдаваться в такие тонкости, а довольствовался контрастом между теорией и практикой, который, с его точки зрения, следовало преодолевать средствами прикладной математики.

До сих пор я пытался обрисовать своеобразие Клейна так, как описывают какое-нибудь тело, обозначая его границы, а не сущность. Теперь вы должны дополнить это описание, представив себе, что пространство внутри этих границ заполнено исключительно плотно. Его научную карьеру мне хотелось бы сравнить с полетом праздничной ракеты. Сверкая, она круто взмывает вверх, там внезапно взрывается огненными вихрями и поворачивает к земле, разливая вокруг сияющее изобилие: 1869–1882 годы – стремительный подъем, отмеченный интенсивнейшими, исключительно продуктивными исследованиями, сменяется периодом осмысления и изложения богатейших результатов, поистине грандиозной становится и его организационно-практическая деятельность. Поворотным пунктом стала катастрофа, разразившаяся, когда ему было 33 года; внешне она выразилась в тяжелом недуге, обострившемся на Пасху 1882 года. Нам живо рисуется, как он, уже готовый к возвращению домой с острова Нордерней, весь укутанный сидит на софе, измученный за ночь приступом астмы и видениями теоремы о предельном круге[1]). "Открытие этой теоремы, – говорил он, – видимо, было связано с напряжением всех сил, почти полностью исчерпавшим работоспособность и оставившим крайнее истощение". И он не побоялся добавить: "Тогда был разрушен сокровеннейший центр моего продуктивного мышления". Нельзя без изумления и благоговения созерцать плоды поистине титанической деятельности, которыми одарил мир в последующие десятилетия этот в глубине души сломленный человек.

Понятие группы, как я уже отмечал, является организующим и цементирующим началом всех математических произведений Клейна, определяя своеобразие его методики и мастерства. Группы, скрытые феноменом симметрии, появились вначале не в науке, а в искусстве, прежде всего в искусстве орнамента, достигшего высокого совершенства в древнем Египте. Проблема правильных тел являлась существенным стимулом греческой

---

[1]) Grenzkreistheorem – речь идет о существовании униформизации компактной римановой поверхности с помощью дискретной группы в единичном круге. См. наст. изд., стр. 419.

геометрии. Кеплер воспользовался симметрией – этим древнейшим символом совершенства – для проникновения в скрытую гармонию небесных сфер. Законы симметрии господствуют в царстве кристаллов. Симметрия выражается в группе преобразований, переводящих заданную фигуру в себя как целое. В данном пространстве допустимы не все преобразования фигур – плоских орнаментов, правильных тел, кристаллов, а лишь те, которые оставляют неизменными все связи, присущие самому пространству. За этими дискретными следуют непрерывные группы изоморфных преобразований пространства в себя, устанавливающие точный смысл понятия однородности пространства. Пространство и время как формы материального содержания мира именно однородностью противопоставляются явлениям; благодаря своей однородности они делают возможной индивидуализацию, допуская существование разных индивидов с одинаковыми свойствами. Проблему уточнения характера однородности пространственно-временного мира мы обозначаем сегодня термином "теория относительности". В своей Эрлангенской программе Клейн установил ту группу изоморфных преобразований, которая в области формализованной математики может считаться подлинным принципом классификации различных геометрий.

Понятие группы господствует и в алгебре. Проблему разрешимости уравнений n-й степени можно сформулировать так: пусть n чисел или точек комплексной числовой плоскости заданы без учета их порядка; требуется выделить из этого набора отдельную точку. Объектом релятивистской проблемы является здесь не непрерывная область, состоящая из бесконечного количества точек, а этот набор из n чисел: возможно ли отличить какое-нибудь одно из этих чисел от остальных, руководствуясь объективными алгебраическими признаками? Разумеется, теперь, в противоположность ситуации, имеющей место в однородном пространстве, числовая область характеризуется тем, что каждый ее член является индивидуумом, отличающимся от всех остальных своими объективными свойствами; именно на этом основывается употребление в континууме чисел в качестве координат, т.е. символов для различения. Но в алгебре имеют силу лишь свойства и отношения, зависящие от алгебраических операций + или ×, а отношения "больше", "меньше" для величин из рассмотрения исключаются. При аксиоматическом основании имеется не одно царство чисел, а бесконечно много числовых образований, каждое из которых является самостоятельным миром; в таком случае мы нуждаемся в насильственном отказе от указанных отношений, поскольку "числа" этих абстрактных систем вовсе не связаны подобными отношениями. Показывается, однако, что в чистой алгебре имеются числа, которые утрачивают значительную часть своей индивидуальности, и теория Галуа есть не что иное, как теория относительности числовых полей, или, например, рассмотренных выше наборов из n чисел. В основаниях проективной геометрии исключительно красивой оказывается относительность, выявляющая единство алгебры и геометрии. Простейшие аксиомы инцидентности без какого бы то ни было требования непрерывности дают абстрактно-алгебраические числовые системы, определяемые данным проективным пространством. В проективных пространствах относительность проявляется в двух аспектах: в выборе системы проективных координат – любых пяти точек, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости, и в группе изоморфных преобразований числового поля в себя, которые индуцируют своеобразные преобразования пространства, оставляющие систему координат на месте. Если это поле является континуумом всех вещественных или комплексных чисел, то согласно так называемой основной теореме проективной геометрии оба эти аспекта совпадают[1)].

Введением понятия автоморфной функции Клейн подчинил теорию функций диктату группы. Если область существования аналитической функции односвязна, то, как показал Риман, ее можно считать внутренностью круга. Дробно-линейное преобразование – единственное конформное, т.е. сохраняющее аналитичность отображения, переводящее внутренность круга в себя. Поэтому автоморфные функции – это функции, инвариантные относительно группы дробно-линейных преобразований. Под это понятие подпадают важнейшие функции: показательные, эллиптические, модулярные – оно подчеркивает одну из существеннейших их особенностей. Каждая фигура со специальными свойствами симметрии порождает определенный класс автоморфных функций, является, так сказать, почвой, на которой произрастают эти функции. А теорема униформизации Клейна раскрывает всю значимость понятия автоморфной функции. Корень этой значимости – в той роли, которую играет понятие группы в топологии – дисциплине, изучающей свойства непрерывного, сохраняющиеся при всех возможных деформациях.

Если какой-нибудь процесс распространяется в континууме так, что его переход из некоторой точки в ее окрестность одозначно определяется обстановкой в этой точке, например, в случаях интегрирования, или растворения неоднородных красок, или образования поверхности жидкости, то он, невзирая на однозначность в малом, вовсе не обязательно приведет к состоянию, однозначно определенному в целом. Возьмем в качестве примера замкнутую кривую C. После однократного обхода этой кривой процесс может оказаться в некотором другом состоянии, на каком-то другом уровне над исходной точкой. Чтобы в этой ситуации восстановить однозначность, надо кривую C мыслить в виде спирали с бесконечным числом витков, вытянутой над кривой. Продвигая каждую точку спирали, скажем, на один или два полных витка, мы получим отображение спирали на себя, тождественное относительно проектирования на C, т.е. такое, что ни одна точка кривой C не сдвигается с места. В этом смысле можно сказать, что кривая, на которой развивается такого рода процесс, обладает *скрытой топологической симметрией;* группа, выражающая эту сим-

[1)] Здесь Вейль не вполне точен. Основная теорема проективной геометрии справедлива только для геометрии над полем вещественных чисел.

метрию, заключается в "преобразованиях скольжения" спирали, накрывающих тождественное преобразование кривой C. Распространение этой идеи на случай поверхности, по своему характеру способной быть носителем аналитических функций, и приводит к кругу идей, связанных с теоремой униформизации.

Последняя область, в которой теории групп следует сказать свое веское слово, открылась в последние годы в квантовой теории. Все электроны торжественны между собой; этого загадочного обстоятельства, пожалуй, самого глубокого высказывания, которое мы в настоящее время способны сделать о природе, мы не можем вывести в качестве необходимого следствия из нашей теоретической картины мира. Но отсюда следует, что законы, которым подчиняется отдельный атом или молекула, инвариантны относительно перестановок электронов. Поэтому в атомной физике, наряду с изотропностью пространства, решаюшую роль играет группа этих перестановок.

У Клейна понятие группы выступает во всех перечисленных выше аспектах, разумеется, за исключением последнего, связанного с квантовой механикой, и образует основу ткани всех его произведений. Я добавлю еше несколько замечаний относительно отдельных нитей, вплетенных в эту ткань.

Эрлангенская программа, насколько я представляю, достигает своего полного проявления именно в теории групп линейных преобразований и их инвариантов. Более ранним примером является попытка Кэли свести каждую группу линейных преобразований к полной линейной группе, используя "абсолюты". К этому приему часто прибегал и Клейн. Например, проективное пространство получается из аффинного присоединением бесконечно удаленной плоскости. Аналогично теория инвариантов ортогональных групп вкладывается в теорию инвариантов полных линейных групп, если за абсолют принять некоторую фиксированную квадратичную форму (ортогональная группа и состоит из линейных преобразований, не изменяюших эту форму). В том же аналитическом одеянии Эйнштейн представил свою теорию относительности. Но этот метод не является ни обшеупотребительным, ни по-настояшему целесообразным, подобно принципу проективного порождения Штейнера, согласно которому любой многочлен может быть представлен определителем, составленным из многочленов низших степеней[1]). Лишь теперь мы начинаем признавать суверенное положение каждой группы. Это не замедлило сказаться на обшей теории относительности и на инфинитезимальной геометрии. Вспомним для примера четырехмерный мир с его "метрическим полем", вызываюшим, по мнению Эйнштейна, явление гравитации! Произвольными здесь являются четыре координаты – непрерывные функции, значения которых позволяют отличать друг от друга отдельные

[1]) Согласно этому принципу, например, квадратичная форма от трех переменных представляется как определитель симметрической матрицы второго порядка, коэффициенты которой суть линейные формы.

точки этого мира. Его законы поэтому должны быть инвариантны относительно группы всех непрерывных преобразований координат. Метрика в некоторой точке P выражается в том, что из реперов, заданных в точке P и состоящих из четырех векторов, выделяется класс декартовых. Переход из одного декартова репера к другому осуществляется с помощью группы ортогональных преобразований. Именно эта группа определяет природу нашего многообразия, поэтому при формальном задании вместо описания многообразия можно просто указать конкретную группу. В качестве локального репера мы должны неким актом произвола выбрать один из равноправных декартовых реперов – точно так же, как в основу аналитического представления мы должны были положить одну из возможных равноправных систем координат. Поэтому объективные законы инвариантны также относительно произвольных "вращений" локальных реперов, осуществляемых в разных точках совершенно независимо друг от друга. Такая аналитическая формулировка теории относительности, при которой метрика характеризуется локальными реперами, выявляется с необходимостью, когда кроме электромагнетизма рассматриваются еще материальные волны Шрёдингера – Дирака[1]. Одновременно здесь обнаруживаются границы приложимости эрлангенской программы в инфинитезимальной геометрии. Кроме ортогональной группы, которая описывает устойчивую "природу" многообразия, мы имеем "ориентацию" – в нашем примере ориентацию локального репера в каждой точке относительно системы координат, или того, что является инвариантным в упомянутом выше смысле. Обычно проблему ориентации преподносят в форме "теории перенесений"[2], развитой главным образом Картаном и Схоутеном, но это совершенно не обязательно. Я думаю, что Клейн был бы последним, кто стал бы отрицать эти границы своей теоретико-групповой программы. Ибо он сам предпринял энергичное наступление на проблемы, выводящие в теории алгебраических уравнений за пределы групп Галуа.

Для того чтобы получить "сплав из Галуа и Римана", достигший своей вершины в теореме униформизации, Клейн должен был не только проникнуть в тогда еще трудно доступный мир идей Римана, но и свободно владеть его фундаментальным понятием – понятием римановой поверхности; надо было не только владеть этим понятием как средством наглядного представления многозначных функций, но и сделать действительно отправным пунктом своей теории. Риманова теория алгебраических функций и их интегралов глубоко укоренена в континууме; Риман извлек функции и их закономерности из непрерывного точечного многообразия римановой поверхности и конформных свойств, которыми она обладает как риманова поверхность. На этом пути Клейн достиг самой высокой вершины, которая, наконец, открыла весь горизонт, – униформизации.

---

[1] См. В е й л ь Г. Электрон и гравитация // В е й л ь Г. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1984, с. 198–218.

[2] В оригинале "Übertragungslehre". Имеется в виду теория связностей.

Для метода Римана не является существенным то, что исходным пунктом является алгебраическое уравнение и определяемая им алгебраическая функция; теория имеет силу для любой аналитической функции. Не обязательно также мыслить риманову поверхность в форме, соответствующей алгебраическому уравнению, т.е. как многолистную поверхность, простирающуюся над плоскостью независимой переменной. Пожалуй, даже важнее проводить построение формально, когда оно основано на нормальной форме неевклидова двумерного кристалла, которая получается униформизацией; впрочем, эта задача до сих пор еще решена не полностью. Группу перестановок корней алгебраического уравнения можно заменить произвольной группой монодромии, составленной из линейных преобразований; в своей работе о гипергеометрических рядах Риман уже вступил на путь этих обобщений. Для того чтобы понять ситуацию, ему пришлось проникнуть в существо более общих и легче обозримых связей. Так континуум и прежде всего топология становятся важнейшим инструментом математического познания. Вследствие интуитивной первоначальности континуума этот метод также пригоден как для открытий, так и для обобщений.

Тем труднее строгое обоснование. Ибо континуум столь близок очевидности, что представляется не подвластным приемам логики. Потому-то Вейерштрасс и некоторые другие предпочли путь непосредственного алгебраического построения, который они воспринимали как более утомительный, зато более надежный. В одном из писем Шварцу Вейерштрасс писал: "Чем больше я размышляю над принципами теории функций, а делаю я это непрестанно, тем тверже становится мое убеждение, что ее следует воздвигать на фундаменте алгебраических истин и что поэтому неверен способ, при котором, наоборот, для обоснования более простых и фундаментальных алгебраических положений принимается, говоря кратко "трансцендентное", какими бы подкупающими ни представлялись на первый взгляд, например, рассуждения, руководствуясь которыми Риман открыл столько важнейших свойств алгебраических функций". Мы должны сегодня сказать, что Вейерштрасс остановился на полпути, ибо хотя он и строит функции алгебраически, тем не менее в качестве коэффициентов он принимает не анализируемый алгебраически континуум обычных комплексных чисел. А вместо этого континуума при последовательном алгебраическом подходе мы принимаем произвольное числовое поле в смысле абстрактной алгебры. Вместе с теорией алгебраических чисел все здание перемещается на общий аксиоматический фундамент. К новой точке зрения на теорию числовых полей Гильберт и в самом деле пришел, отправляясь от аналогии с ситуацией, обнаруженной Риманом в области алгебраических функций. Правда, аналогия совершенно бесполезна для доказательства[1]. В избранном Вейерштрассом

---

[1]) Теперь с этим вряд ли можно согласиться. Такие результаты, как общий закон взаимности И.Р. Шафаревича или недавнее доказательство гипотезы Морделла (см. Комментарии к работе: В е й л ь Г. О геометрии чисел // В е й л ь Г. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1984, стр. 308–327), существенно используют аналогию с функциональной ситуацией.

направлении господствующей становится теория абстрактных числовых полей и их алгебраических расширений, с точки зрения которой надо осмысливать предложенный им частный случай – алгебраические функции с произвольными комплексными коэффициентами. Общность предпосылок и аксиоматизация и здесь позволяют отказаться от вычислений, проводимых вслепую (blinde Rechnung), и разлагать сложные сущности на простые части, доступные несложным заключениям. Программа абстрактной аксиоматической алгебры начала развертываться в глубоких работах Дедекинда и Кронекера, однако вся значимость этого метода как средства постижения математических взаимосвязей осознана лишь в наши дни благодаря усилиям Диксона и Веддеборна в Америке, Штейница в Германии, Эмми Нётер и ее кружка, а также Артина. Правда, покоренной Клейном с помощью его "топологического метода" (как я позволю себе называть его для краткости) вершины униформизации, возвышающейся над областью абелевых (коммутативных) групп, в абстрактной алгебре достичь все еще не удалось. Здесь будущему еще предстоит ответить на многие вопросы[1].

Эти оба способа понимания – топология и абстрактная алгебра – кроются в глубинной сущности математической природы и ни одному из них не следует отдавать предпочтение; здесь Вейерштрасс был неправ. Однако эти подходы плохо уживаются друг с другом. Что легко доступно одному, для другого – тайна. С каждой из этих точек зрения такие классические теории, как теория алгебраических функций, выглядят совершенно по-разному. Невозможность служить двум этим господам сразу я испытал на себе, занимаясь приложением теории групп к квантовой физике. Прекрасный пример тому дают также исследования ван дер Варденом принципов исчислительной геометрии, которую он представил в свете абстрактной алгебры и которая совсем недавно истолковывалась в духе чисто топологических теорем о точках пересечения. Всюду, где могут быть использованы топологические методы, они и сегодня оказываются могущественными[2].

Если бы я должен был в заключение перечислить то, что мне представляется наиболее действенным и значительным из достигнутого Клейном в чистой математике, то я назвал бы следующее:

Он заменил установленное проективной школой понимание геометрии в узком смысле на более широкое и свободное представление о сущности геометрии. Ему предшествовал здесь лишь Мёбиус, сделавший первые робкие шаги в этом направлении. Теперь теория конформных отображений и

---

[1]) По-видимому, здесь имеется в виду отсутствие неабелева обобщения теории полей классов. Несмотря на ряд интересных результатов и идей последнего времени (описание l-расширений, программа Р. Ленглендса) эта вершина в алгебре остается неприступной.

[2]) Этим двум способам понимания в математике Вейль посвятил отдельную работу: W e y l H. Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnisses. – // Unterrichtsbl. Math. und Naturwiss., 1932, Bd. 38, S. 177–188. Подобные взгляды высказывали и другие математики, см. предисловие А. Вейля к его книге: Основы теории чисел. – М.: Мир, 1972.

топология, как подобает, входят в сферу влияния геометрии; именно в этих областях сегодня наиболее энергично пульсирует геометрическая жизнь. Представление Клейна о геометрии есть не что иное, как теория относительности в ее всеобщем, математически формализованном понимании. Он понял и применил группу как великий организующий и упрощающий принцип в алгебре, геометрии и анализе.

Взаимодействие этих ветвей математики с теорией групп он с исчерпывающей полнотой проанализировал на в высшей степени интересном конкретном примере.

Он творчески переработал основные идеи римановой теории функций, выводя их из наглядных физических соображений.

Теорией автоморфных функций и их применением к униформизации он достиг подлинной вершины римановой теории функций и тем самым поставил, исходя из топологического подхода, целый круг новых проблем, которые с точки зрения теории функций далеко не исчерпаны и сегодня, а к их осмыслению с точки зрения абстрактной алгебры вряд ли даже приступили.

Таким образом, Клейн, печатью гения которого отмечена целая эпоха, продолжает оказывать мощное воздействие на современную математику, развивающуюся под знаком теории групп, топологии и абстрактной алгебры. Пламя, зажженное им, — не елейный светильник педантичной традиции, оно согревает горшки всех математических кухонь и горит в горнах всех математических кузниц, делая как великую, так и малую повседневную работу. Его труды продолжают воздействовать на нас, его имя не будет забыто.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ[1])

[1]) В настоящем издании – в отличие от оригинала – предпринята попытка составить полный Именной указатель. Номера страниц, содержащих наиболее важные сведения об упоминаемых в Указателе лицах, мы выделяем полужирным шрифтом. – *Примеч. пер.*

УКАЗАТЕЛЬ СОДЕРЖАНИЯ

Глава вторая

ФРАНЦИЯ И ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА В ПЕРВЫЕ ДЕСЯТИЛЕТИЯ XIX СТОЛЕТИЯ

Глава третья

ОСНОВАНИЕ ЖУРНАЛА КРЕЛЛЯ И РАСЦВЕТ ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ В ГЕРМАНИИ

Геометры креллевского журнала

Глава четвертая

РАЗВИТИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОСЛЕ МЁБИУСА, ПЛЮККЕРА И ШТЕЙНЕРА

Создание чисто проективной геометрии

Параллельное развитие алгебры; теория инвариантов

Пространство *n* измерений и общие комплексные числа

Глава пятая

МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА В ГЕРМАНИИ И АНГЛИИ ПРИМЕРНО ДО 1880 г.

Механика

Математическая физика

Глава шестая

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ У РИМАНА И ВЕЙЕРШТРАССА

Глава седьмая

БОЛЕЕ ГЛУБОКОЕ ПРОНИКНОВЕНИЕ В ПРИРОДУ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Дальнейшее развитие алгебраической геометрии

Теория целых алгебраических чисел и их взаимодействие с алгебраическими функциями

Глава восьмая

ТЕОРИЯ ГРУПП И ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ; АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Теория групп

Автоморфные функции

Клейн Феликс

ЛЕКЦИИ О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ
В XIX СТОЛЕТИИ
ТОМ I

Редактор *В.В. Донченко*
Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*
Технические редакторы *С.В. Геворкян, С.Н. Баронина*
Корректоры *Т.В. Обод, Т.А. Печко, Н.П. Круглова*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 32773

Сдано в набор 25.04.88. Подписано к печати 12.07.88
Формат 60 х 88/16. Бумага книжно-журнальная
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл. печ.л. 28,05. Усл. кр.-отт. 27,99. Уч.-изд.л. 31,19
Тираж 23000 экз. Тип.зак.1071. Цена 2 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Типография им. Котлякова
издательства "Финансы и статистика"
Государственного комитета СССР
по делам издательств , полиграфии и книжной торговли
195273 Ленинград, ул. Руставели 13