TENSOREN UND DYADEN

IM DREIDIMENSIONALEN RAUM

EIN LEHRBUCH

VON

E. BUDDE

MIT 10 TEXTFIGUREN

BRAUNSCHWEIG
Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

TENSOREN UND DYADEN

IM DREIDIMENSIONALEN RAUM

TENSOREN UND DYADEN

IM DREIDIMENSIONALEN RAUM

EIN LEHRBUCH

VON

E. BUDDE

MIT 10 TEXTFIGUREN

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

ISBN 978-3-663-06416-9 ISBN 978-3-663-07329-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-07329-1

ISBN 978-3-663-06416-9 ISBN 978-3-663-07329-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-07329-1

Originally published by Friedr. Vieweg & Sohn in 1914
Braunschweig, Germany.

VORREDE.

Dieses Buch verfolgt den Zweck, dem Leser, der mit den Elementen der Mechanik und der Vektorenlehre bekannt ist, die Theorie der Tensoren und der mit ihnen nächstverwandten Größen in leicht verständlicher Weise zugänglich zu machen, so daß er in den Stand gesetzt wird, die vorhandene Literatur mit Verständnis und mit der zuweilen erforderlichen Kritik zu lesen. Um von einer festen und eindeutigen Definition ausgehen zu können, wurden zunächst die Tensoren als symbolische Faktoren definiert. Bei der Durcharbeitung derselben stellte sich bald heraus, daß die Behandlung der von R. H. Weber eingeführten asymmetrischen Tensoren auf Resultate führte, die vollständig mit denjenigen übereinstimmen, welche von Gibbs mit Hilfe von Dyadentripeln erlangt wurden. Die nähere Untersuchung zeigte, daß die Gibbsschen Dyadentripel mit den asymmetrischen Tensoren sachlich identisch sind. Es schien also zweckmäßig, für beide eine gemeinschaftliche Bezeichnung zu haben, und da habe ich das Wort „Diatensoren“ vorgeschlagen, welches an die beiden ursprünglichen Namen anklingt. Herr R. H. Weber, dem ich den Vorschlag vorlegte, erklärte sich damit einverstanden; Herr W. Voigt legte hauptsächlich Wert darauf, daß der Name Tensor für die in seinen grundlegenden Arbeiten behandelten symmetrischen Gebilde erhalten bliebe; das ist geschehen. Auch zu der Mehrzahl der übrigen neu eingeführten Bezeichnungen habe ich die Zustimmung des Herrn R. H. Weber eingeholt — die tiefergehenden allgemeinen Untersuchungen von W. Voigt kommen in diesem Buche nicht zur Verwendung.

Die Diatensoren erweisen sich von selbst als das natürliche Mittel zur analytischen Behandlung deformativer Bewegungen. Sie werden also im ersten Teil im Zusammenhang mit der affin-projektivischen Raumtransformation behandelt, in der Art, wie dies bereits von Gibbs-Wilson geschehen ist. Dabei mußten naturgemäß manche Sätze, die Gibbs unter Benutzung der dyadischen Form aufgestellt hat, in der tensoriellen Form reproduziert werden. Es versteht sich von selbst, daß ich, soweit dies geschehen ist, die Priorität von Gibbs anerkenne. Auf die komplizierteren Bildungen, wie die „double dot multiplication“ von Gibbs, bin ich nicht eingegangen; sie liegen außerhalb des vorgesteckten Rahmens, und die mit ihnen erzielten Ergebnisse lassen sich, soweit sie in den Bereich des Buches fallen, mit den einfacheren Mitteln der Diatensorenrechnung schneller erzielen.

Eine gewisse Breite der Darstellung schien mir mit Rücksicht auf das Maß der vorausgesetzten Vorkenntnisse erforderlich; ich hoffe, in dieser Beziehung annähernd das Richtige getroffen zu haben.

Eingehende Anwendungen der Theorie vorzuzeigen wäre sehr erwünscht gewesen, verbot sich aber durch die Rücksicht auf den Umfang des Buches und den Wunsch, das Erscheinen zu beschleunigen.

Herr R. H. Weber hat die Güte gehabt, eine Korrektur zu lesen, und ich habe ihm für mancherlei wertvolle kritische Winke zu danken.

Feldafing, im September 1913.

E. Budde.

Benutzte Literatur.

W. Voigt: Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Kristalle. Leipzig 1898.

Physikerkongreß, Paris 1900, S. 277.

Über die Parameter der Kristallphysik und über gerichtete Größen höherer Ordnung. Ann. d. Phys. **5**, S. 241 (1901).

R. H. Weber in H. Weber und J. Wellstein: Encyclopädie der Elementarmathematik, Bd. III. Leipzig und Berlin 1910.

Über symmetrische und asymmetrische Tensoren. Göttinger Nachrichten, 1909, S. 371.

J. W. Gibbs-E. B. Wilson: Vector Analysis. New York und London 1909.

M. Abraham in der Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften IV_2, Heft 1.

R. Gans: Einführung in die Vektoranalysis. Leipzig und Berlin 1909.

G. Jaumann: Die Grundlagen der Bewegungslehre. Leipzig 1905.

W. Thomson und **P. G. Tait:** Handbuch der theoretischen Physik. Deutsch von H. Helmholtz und G. Wertheim. Braunschweig 1871.

A. Sommerfeld: Zur Relativitätstheorie I und II. Ann. d. Phys., Vierte Folge, **32**, S. 749 und **33**, S. 649 (1910).

M. Laue: Das Relativitätsprinzip. Braunschweig 1911.

A. Einstein und **M. Grossmann:** Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie. Leipzig und Berlin 1913.

Inhaltsverzeichnis.

Zweiter Teil.

Additivdiatensoren, derivative Beziehungen, Entwickelung des Tensorbegriffes aus Zerlegungs- und Transformationseigenschaften, selbständige Tensoren und Diatensoren.

Erster Abschnitt.

Fortsetzung der Untersuchungen über den als symbolischen Faktor gedachten Diatensor.

Erstes Kapitel: Additive Diatensoren.

Zweites Kapitel: Derivative Operationen.

Drittes Kapitel: Vektorfelder und Diatensoren.

Viertes Kapitel: Orthogonale krummlinige Koordinaten.

Zweiter Abschnitt.

Die Voigtsche Ableitung des Tensorbegriffes und die selbständigen Tensoren.

Erstes Kapitel: Die Voigtsche Ableitung des Tensorbegriffes.

Druckfehler.

Seite 24, Gleichung (2): statt *tens* $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ lies *tens* $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, ebenso in der folgenden Zeile.

„ 31, Gleichung (6), in der neunten Gleichung: statt γ_3 lies $\bar{\gamma}_3$.

„ 34, Zeile 12 von unten: statt „Vorbemerkung **d)**“ lies „Vorbemerkung **f)**“.

„ 38, „ 14 „ oben: statt t_ξ lies „$t_{\xi\xi}$ in t_ξ abkürzt und t_ξ“.

„ 43, „ 14 „ unten: statt $(\tau), \mathfrak{A}$ lies $(\tau)\mathfrak{A}$.

„ 72, Gleichung (7): statt $h^2(r_y s + r_z s_y)$ lies $h^2(r_y s_y + r_z s_z)$.

„ 84, Anmerkung, Zeile 4: statt $(\Psi\Phi)_c$ lies $(\Phi\Psi)_c$.

„ 105, Zeile 18 von unten: statt „Gleichung (14)“ lies „Gleichung (15)“.

„ 115, „ 11 „ oben: statt $d\mathfrak{r}_0$ lies $d\mathfrak{r}_0 +$.

„ 123 u. 124, in der Seitenüberschrift: statt „Dyadenprodukten“ lies „Dyadoprodukten“.

„ 143, Gleichung (5): statt Φ_{21} lies S_{21}.

„ 177, Zeile 3 von oben: statt s_2 lies s_{21}.

„ 177, Gleichungen (1) und (2): Diese Gleichungen sind mit symmetrischen Φ und Ψ gerechnet. Es fehlt der Hinweis darauf, daß die leicht vorzunehmende Rechnung mit asymmetrischen Φ und Ψ auf dieselbe Gleichung (3) führt, welche im Text gegeben ist.

Erster Teil.

Skalare Tensoren und Diatensoren, speziell als Mittel zur analytischen Behandlung der affin-projektivischen Bewegung.

Vorbemerkungen.

Bekanntschaft mit den Elementen der Vektorenrechnung wird im folgenden vorausgesetzt. Doch sind einige Bemerkungen voranzuschicken, von denen die ersten sich auf die benutzte Schreibweise beziehen, während die anderen einige Sätze behandeln, die in den deutschen Lehrbüchern der Vektorenrechnung meist nicht oder nur unvollständig erwähnt sind, die aber in der Diatensorenrechnung gebraucht werden.

I. Schreibart.

Punkte werden durch arabische Ziffern bezeichnet; ein Koordinatenanfang heißt in der Regel 0.

Eine Linie, die von Punkt 1 zu Punkt 2 hingeht, kann geschrieben werden $1 \longrightarrow 2$ (wo keine Verwechslung möglich ist, 1 2) oder (2 — 1).

Das Wort Richtung wird immer einsinnig gebraucht, vom Punkt 1 zum Punkt 2 hin. Die doppelsinnige Bestimmung, wie sie durch die Gleichung einer unendlichen geraden Linie in kartesischen Koordinaten gegeben wird, heißt Doppelrichtung.

Absolutwerte, vorzeichenlose, stets positiv genommene Quantitäten werden geschrieben, indem man den sie bezeichnenden Wert zwischen zwei vertikale Striche setzt: $|-x| = |x|$.

Ein Skalar ist eine Größe, die durch Angabe eines Quantums und eines Vorzeichens bestimmt ist, und deren Vorzeichen sich nicht ändert, wenn man die Achsen des Koordinatensystems, in welchem er etwa auftritt, umkehrt.

Pseudoskalare sind Größen, die gleichfalls durch eine Quantität und durch ein Vorzeichen bestimmt sind, deren Vorzeichen sich aber umkehrt, wenn man die Koordinatenachsen umkehrt.

Ein Vektor ist jede Größe, die durch eine gerichtete Länge dargestellt werden kann.

Winkel und Winkelkosinus werden, dem allgemeinen Gebrauch entsprechend, in der Regel durch kleine, nach Bedürfnis markierte, griechische Buchstaben bezeichnet. Winkel in der Regel durch φ, ψ, ω, Kosinus durch α, β, λ, μ usw.

Mit dieser Ausnahme gilt durchweg die Regel, daß alle Vektoren mit deutschen, alle Skalare und Pseudoskalare mit lateinischen Buchstaben geschrieben werden, und zwar so, daß der Betrag eines Vektors $\mathfrak{v}$ ohne weiteres durch den entsprechenden lateinischen Buchstaben v dargestellt wird. Ist ein Vektor mit einem Buchstaben markiert, so genügt es, wenn der Hauptbuchstabe deutsch geschrieben wird, um ihn als Vektor zu charakterisieren.

Zwischen Komponenten und Komponentenbeträgen wird entsprechend unterschieden. Die mit Richtung gedachten Komponenten von $\mathfrak{a}$ im System der x, y, z sind $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$, die skalaren Beträge derselben sind a_x, a_y, a_z. Der Unterschied dokumentiert sich in den beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_z,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

von denen die erste vektoriell, die zweite algebraisch ist.

Jeder mit einer Koordinatenrichtung markierte Skalar, z. B. v_y, kann, ohne daß es erst besonders bemerkt wird, als Betrag der y-Komponente eines Vektors $\mathfrak{v}$ aufgefaßt werden.

Die skalare Division mit einem Vektor wird bekanntlich eindeutig durch die Konvention, daß $\frac{1}{\mathfrak{a}}$ die Richtung von $\mathfrak{a}$ haben soll. Diese Konvention wird akzeptiert.

Ein Einheitsvektor von der Richtung $\mathfrak{a}$ und der Länge 1 kann auf dreierlei Weise geschrieben werden: $\frac{\mathfrak{a}}{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und $1_{\mathfrak{a}}$. In dieser Schrift wird die letztere Bezeichnung geführt.

Die Buchstaben $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bleiben reserviert für die Grundvektoren, d. h. Einheitsvektoren, welche in die Richtung der positiven Koordinatenachsen fallen. Wo ein Koordinatensystem angenommen wird, denke man sich die Grundvektoren gleich mitgegeben und umgekehrt. „System der $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$“ ist gleichbedeutend mit „System der x, y, z“.

Eine Ebene, welche durch zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmt ist, wird „Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$“ geschrieben. Für Koordinatenebenen, die danach „Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$“ usw. heißen müßten, wird dem allgemeinen Gebrauch zuliebe eine Ausnahme gemacht; wir schreiben sie, wie üblich, „xy-Ebene“ usw.

Vektoren, die einer und derselben Ebene parallel sind, heißen komplanar, solche, die einer und derselben Doppelrichtung parallel sind, heißen kollinear.

Das skalare Produkt aus zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ schreiben wir $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ oder, wo kein Mißverständnis möglich ist, einfach $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Ein Komma oder Punkt wird nur dann zwischengesetzt, wenn es sich darum handelt, die beiden Faktoren deutlich voneinander zu trennen, z. B. $(\mathfrak{a}, \mathfrak{m} + \mathfrak{n})$ ist das Produkt aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$.

Das vektorielle Produkt aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wird geschrieben $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$; auch hier wird ein Komma nur zwischengesetzt, wo es der Abgrenzung wegen erforderlich ist. Nach der obigen Konvention ist für das aufgelöste Produkt $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ zu schreiben:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

und es sind in der Determinante außer den $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ keine deutschen Buchstaben zu verwenden.

II. Reziprokale Vektorensysteme nach Gibbs.

a) Tripelprodukt $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei nichtkomplanare Vektoren, so ist bekanntlich

$$\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = \mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{a}] = \mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}], \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

und jeder von diesen drei Ausdrücken ist der pseudoskalare Inhalt des Parallelepipeds mit den Seiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Da keine Verwechslung möglich ist, bezeichnen wir diesen Inhalt kurz mit

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}).$$

Der Inhalt dieser Klammer ist kommutativ unter der Bedingung, daß die zyklische Anordnung nicht gestört wird. Anderenfalls ist

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = -(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}), \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$(\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}) = -(\mathfrak{i}\mathfrak{k}\mathfrak{j}) = 1. \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Sind die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ komplanar, so ist $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = 0$.

b) Determinantenformel für $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$. Die Tripelprodukte der obigen Art aus drei Grundvektoren verschwinden sämtlich mit Ausnahme von $(\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k})$ und $(\mathfrak{i}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{j})$, weil $(\mathfrak{i}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{j})$ usw. komplanare Vektoren enthalten. Schreibt man also:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{a} &= a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k},\\ \mathfrak{b} &= b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k},\\ \mathfrak{c} &= c_x\mathfrak{i} + c_y\mathfrak{j} + c_z\mathfrak{k}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und führt damit die Berechnung von $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$ aus, so findet man:

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

c) Darstellung eines beliebigen Vektors durch drei andere nichtkomplanare Vektoren. Gegeben seien drei nichtkomplanare Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; ein vierter Vektor $\mathfrak{v}$ soll durch sie ausgedrückt werden. Der Ausdruck wird die Form haben:

$$\mathfrak{v} = l\mathfrak{a} + m\mathfrak{b} + n\mathfrak{c}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo l, m, n Skalare sind, die bestimmt werden müssen. Multipliziert man mit $[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]$, so ergibt sich:

$$\mathfrak{v}[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}] = l\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}] + m\mathfrak{b}[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}] + n\mathfrak{c}[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die beiden letzten Produkte auf der rechten Seite sind Null, weil sie komplanare Vektoren enthalten, also bleibt:

$$\mathfrak{v}[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}] = l(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

folglich mit zyklischer Fortsetzung:

$$l = \frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}, \quad m = \frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a})}{(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a})}, \quad n = \frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})}{(\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})}, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

oder

$$\mathfrak{v} = \frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}\,\mathfrak{a} + \frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a})}{(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a})}\,\mathfrak{b} + \frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})}{(\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})}\,\mathfrak{c}. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Die Nenner sind sämtlich gleich.

d) Reziprokale Systeme. Die Schlußgleichung des vorigen Paragraphen kann, da $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$ pseudoskalar ist, geschrieben werden:

$$\mathfrak{v} = \left(\mathfrak{v}\frac{[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}\right)\mathfrak{a} + \left(\mathfrak{v}\frac{[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}\right)\mathfrak{b} + \left(\mathfrak{v}\frac{[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}\right)\mathfrak{c}. \quad \ldots \quad (1)$$

Die drei Größen $\frac{[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}$ usw. sind Vektoren, welche der Reihe nach auf den Ebenen $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ senkrecht stehen. Man bezeichnet sie mit $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$. Die vorstehende Gleichung lautet dann:

$$\mathfrak{v} = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{a}')\,\mathfrak{a} + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{b}')\,\mathfrak{b} + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{c}')\,\mathfrak{c}. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ heißen „das zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ reziprokale System“. Daß $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nichtkomplanar seien, ist wesentlich, dann sind auch $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ nichtkomplanar, weil sie auf den Ebenen $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ usw. senkrecht stehen.

Die Definitionen von $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, der Deutlichkeit wegen herausgehoben, lauten:

$$\mathfrak{a}' = \frac{[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}, \quad \mathfrak{b}' = \frac{[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}, \quad \mathfrak{c}' = \frac{[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}. \quad \ldots \quad (3)$$

Es gelten für sie die folgenden Sätze.

e) Die Reziprokalität ist gegenseitig.

Beweis: Da $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ nichtkomplanar sind, kann man setzen:

$$\mathfrak{v} = l'\mathfrak{a}' + m'\mathfrak{b}' + n'\mathfrak{c}'. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Da nun nach **d)** $\mathfrak{a}' = \dfrac{[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}$ usw. ist, kann diese Gleichung ersetzt werden durch:

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\mathfrak{v} = l'[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}] + m'[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}] + n'[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Multipliziert man sie der Reihe nach skalar mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) &= l'(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}), & l' &= \mathfrak{v}\,\mathfrak{a}, \\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\,\mathfrak{v}) &= m'(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}), & m' &= \mathfrak{v}\,\mathfrak{b}, \\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})(\mathfrak{c}\,\mathfrak{v}) &= n'(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}), & n' &= \mathfrak{v}\,\mathfrak{c}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

also:

$$\mathfrak{v} = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}' + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{b}' + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}', \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

die zu **d)** (2) symmetrische Gleichung, welche den Satz beweist.

f) Aus der Definition ergibt sich unmittelbar:

$$(\mathfrak{a}'\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}'\mathfrak{b}) = (\mathfrak{c}'\mathfrak{c}) = 1, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}'\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}'\mathfrak{c}) = (\mathfrak{c}'\mathfrak{b}) = (\mathfrak{c}'\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}'\mathfrak{c}) = 0. \quad . \quad (2)$$

Umgekehrt: Sind $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zwei Systeme, welche den Bedingungen genügen:

$$(\mathfrak{u}\,\mathfrak{a}) = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{w}\,\mathfrak{c}) = 1 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und

$$(\mathfrak{u}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) = (\mathfrak{u}\,\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}) = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{c}) = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{w}) = 0, \quad . \quad (4)$$

so sind $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ reziprokal zueinander.

Beweis: Drückt man $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ nach **e)**, Gleichung (4), in $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ aus, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u} &= (\mathfrak{u}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}' + (\mathfrak{u}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{b}' + (\mathfrak{u}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}', \\ \mathfrak{v} &= (\mathfrak{v}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}' + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{b}' + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}', \\ \mathfrak{w} &= (\mathfrak{w}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}' + (\mathfrak{w}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{b}' + (\mathfrak{w}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

und wendet man hierauf die vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen an, so ergibt sich ohne weiteres:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{a}', \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{b}', \qquad \mathfrak{w} = \mathfrak{c}'. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

g) Aus der Gegenseitigkeit der Beziehungen folgt ohne weiteres:

$$\mathfrak{a} = \frac{[\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']}{(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}')}, \qquad \mathfrak{b} = \frac{[\mathfrak{c}'\mathfrak{a}']}{(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}')}, \qquad \mathfrak{c} = \frac{[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}']}{(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}')}.$$

h) Sind $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ reziprokale Systeme, so ist

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}') = 1. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Beweis: Definitionsgemäß ist (die Glieder des skalaren Produktes sind, wie die des vektoriellen, durch ein Komma abgegrenzt)

$$(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}') = \left(\left[\frac{[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}, \frac{[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}\right], \frac{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}\right)$$

$$= \frac{1}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})^3}\Big(\big[[\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\mathfrak{c}\mathfrak{a}]\big], [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\Big). \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Für das Produkt $\big[[\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\mathfrak{c}\mathfrak{a}]\big]$ liefert die Vektorentheorie den Satz:

$$\big[[\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\mathfrak{c}\mathfrak{a}]\big] = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})\mathfrak{c}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

also:

$$\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' = \frac{1}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})^3}\cdot(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}).(\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]) = \frac{1}{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}. \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

i) Reduktion eines Produktes $(\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w})(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$. Mittels des vorstehenden Satzes kann die Aufgabe gelöst werden, das Produkt aus zwei Tripelprodukten der hier behandelten Art durch neun rein skalare Produkte auszudrücken. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ seien drei nichtkomplanare Vektoren und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ drei weitere. Setzt man:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u} &= l_1\mathfrak{a}' + l_2\mathfrak{b}' + l_3\mathfrak{c}', \\ \mathfrak{v} &= m_1\mathfrak{a}' + m_2\mathfrak{b}' + m_3\mathfrak{c}', \\ \mathfrak{w} &= n_1\mathfrak{a}' + n_2\mathfrak{b}' + n_3\mathfrak{c}', \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

zerlegt beiderseits nach den Achsen und berechnet damit $(\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w})$ als $u_x(v_y w_z - v_z w_y) +$ usw., so ergibt die umständliche, aber unschwierige Ausrechnung:

$$(\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}) = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} (\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Nach **f)**, Gleichung (5), ist nun $l_1 = (\mathfrak{u}\,\mathfrak{a})$, $l_2 = (\mathfrak{u}\,\mathfrak{b})$ usw., und da außerdem $(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}') = \frac{1}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}$ ist, so folgt:

$$(\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{u}\mathfrak{a} & \mathfrak{u}\mathfrak{b} & \mathfrak{u}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{v}\mathfrak{a} & \mathfrak{v}\mathfrak{b} & \mathfrak{v}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{w}\mathfrak{a} & \mathfrak{w}\mathfrak{b} & \mathfrak{w}\mathfrak{c} \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

k) Drei rechtwinklig zueinanderstehende Einheitsvektoren sind ihre eigenen Reziprokalen; sie sind das einzige Vektorensystem, welches diese Eigenschaft hat.

Leicht aus der Definition und **f)** zu beweisen.

Erster Abschnitt.

Diatensoren in tensorieller Form.

Erstes Kapitel: **Tensoren.**

1. Homogene lineare Vektorfunktion; Diatensor.

Die verwendeten Koordinatensysteme sind, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt ist, ein für allemal rechtwinklig und rechtshändig gedacht.

Es seien

$$t_{xx},\ t_{yy},\ t_{zz},\ t_{yz},\ t_{zy},\ t_{zx},\ t_{xz},\ t_{xy},\ t_{yx}$$

neun reelle Skalare. Es sei $\mathfrak{A}$ ein gegebener Vektor und die Beträge seiner Achsenkomponenten in einem System der x, y, z werden mit A_x, A_y, A_z bezeichnet. Aus $\mathfrak{A}$ werde ein neuer Vektor $\mathfrak{B}$ gebildet durch die Operation

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} = {} & (t_{xx}A_x + t_{xy}A_y + t_{xz}A_z)\,\mathfrak{i} \\ & + (t_{yx}A_x + t_{yy}A_y + t_{yz}A_z)\,\mathfrak{j} \\ & + (t_{zx}A_x + t_{zy}A_y + t_{zz}A_z)\,\mathfrak{k}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

dann heißt $\mathfrak{B}$ eine homogene lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{A}$. Die Gleichung (1) heißt in dieser ganzen Schrift Grundgleichung.

Wir setzen voraus, die Operation, welche durch die Gleichung (1) ausgedrückt ist, werde in einem bestimmten Koordinatensystem der x, y, z ausgeführt, und die Werte der neun Koeffizienten t_{xx}, t_{yy} usw. seien für eben dieses Koordinatensystem bekannt gegeben.

Dann fassen wir die ganze Operation, welche durch die Gleichung (1) dargestellt wird, zusammen in die symbolische Gleichung

$$\mathfrak{B} = (\tau)\mathfrak{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und nennen (τ) einen Diatensor, und zwar einen skalaren Diatensor, weil und solange die Voraussetzung beibehalten wird, daß seine Glieder Skalare sind.

Die Klammer, in welche τ gesetzt wird, hat den Zweck, seine Bedeutung als Diatensor hervorzuheben; sie kann fortgelassen werden, wo kein Mißverständnis möglich ist. Die rechte Seite von (2) liest man als Produkt: Diatensorvektorprodukt τ mal $\mathfrak{A}$; das Diatensorvektorprodukt ist identisch mit einer linearen Vektorfunktion von $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ heißt das Argument.

Ein Diatensor ist hiernach definiert als symbolischer Faktor, welcher einen Vektor eindeutig in eine seiner linearen homogenen Vektorfunktionen überführt.

Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß die Gleichung (1) linear ist.

Die symbolische Multiplikation mit (τ) ersetzt die neun Einzelmultiplikationen der Gleichung (1).

Der Diatensor (τ) ist bestimmt durch seine neun Glieder. Man nennt diese Glieder auch seine Komponenten. Jedes einzelne Glied kann sowohl positiv wie negativ gedacht sein, sein Vorzeichen ist in beiden Fällen unabhängig von einer etwaigen Umkehrung der Koordinatenrichtungen.

Anmerkung 1. Statt des Wortes Diatensor findet sich in der Literatur die Bezeichnung „asymmetrischer Tensor“ und „Tensortripel“; Näheres hierüber weiter unten.

Anmerkung 2. Statt des Ausdruckes Diatensorvektorprodukt findet sich in der Literatur zunächst das Wort Tensorvektorprodukt, dann auch der abgekürzte Ausdruck Tensorprodukt. Das Wort Produkt wird aber im folgenden noch so vielfach und in so mancherlei Beziehungen gebraucht, daß es der Deutlichkeit wegen zweckmäßig ist, die vollständige Bezeichnung beizubehalten.

2. Tensor.

Für viele Zwecke der theoretischen Physik kommt man mit Diatensoren aus, bei denen $t_{zy} = t_{yz}$, $t_{xz} = t_{zx}$, $t_{yx} = t_{xy}$ ist; sie heißen symmetrische oder orthogonale Tensoren, oder nach W. Voigt Tensoren schlechthin. Wir benutzen die letztere Bezeichnung. Vollständig würde sie lauten „skalarer Tensor“, doch wird der Zusatz „skalar“ im folgenden in der Regel als selbstverständlich vorausgesetzt. Die Grundgleichung nimmt demnach für den Tensor die Gestalt der nachfolgenden Gleichung (1) an, und ein Tensor (τ) ist definiert durch die Festsetzung:

Wenn

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{B} = {} & (t_{xx}A_x + t_{xy}A_y + t_{zx}A_z)\,\mathfrak{i} \\ & + (t_{xy}A_x + t_{yy}A_y + t_{yz}A_z)\,\mathfrak{j} \\ & + (t_{zx}A_x + t_{yz}A_y + t_{zz}A_z)\,\mathfrak{k},\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

so ist

$$\mathfrak{B} = (\tau)\mathfrak{A}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

$(\tau)\mathfrak{A}$ heißt ein Tensorvektorprodukt, und der Tensor (τ) hat die sechs Glieder t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{yz}, t_{zx}, t_{xy}. Soll der sechsgliedrige Tensor (τ) durch Angabe seiner Glieder charakterisiert werden, so schreiben wir ihn:

$$(\tau) = \tau\,(t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{yz}, t_{zx}, t_{xy}) \quad \ldots \ldots (3)$$

oder

$$(\tau) = \begin{cases} t_{xx} & t_{xy} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{yz} & t_{zz}. \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

Die Glieder werden stets in der hier gegebenen Anordnung aufgezählt.

Die Glieder eines Tensors werden als Skalare mit lateinischen Buchstaben geschrieben, der Tensor selbst mit einem griechischen Buchstaben.

Es wird sich im Laufe der Untersuchungen von selbst herausstellen, daß die Schreibart der Gleichung (4) die rationelle und allgemein durchführbare ist. Im Anschluß an dieselbe bezeichnen wir die drei Glieder t_{xx}, t_{yy}, t_{zz} als Diagonalglieder des Tensors; die übrigen heißen Seitenglieder. In der Literatur heißen t_{xx}, t_{yy}, t_{zz} meist Komponenten erster Art, die anderen solche zweiter Art.

Das erste Kapitel beschäftigt sich ausschließlich mit den hier definierten Tensoren.

3. Tensorellipsoid.

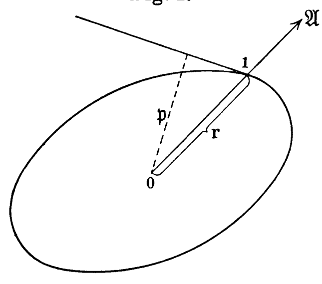
Da eine Mittelpunktsfläche zweiten Grades durch sechs Konstanten bestimmt ist, kann eine solche immer dazu dienen, ein sechsgliedriges Gebilde geometrisch darzustellen. Wir stellen daher unseren Tensor, dessen Glieder t_{xx} usw. sind, dar durch die Fläche

$$2\Phi = t_{xx}x^2 + t_{yy}y^2 + t_{zz}z^2 + 2\,t_{yz}yz + 2\,t_{zx}zx + 2\,t_{xy}xy - 1 = 0. \quad (1)$$

Das konstante Glied dieser Gleichung ist willkürlich. Als einfachsten Wert desselben wählen wir die Einheit, und zwar soll, um die Gleichung homogen zu machen, das Zeichen 1 das Quadrat der Längeneinheit bedeuten, wenn die Skalare t_{xx} usw. reine Zahlen sind, was in vielen Fällen der Anwendung zutrifft; haben sie eine von Null verschiedene Dimension, die dann natürlich für alle t_{uv} dieselbe sein muß, so wäre die Dimension der Eins entsprechend zu ändern, was aber so einfach ist, daß es hier nicht weiter berücksichtigt wird. Sollte die ganze Fläche mit den gegebenen Werten der t_{xx} usw. imaginär werden, so schreibt man $+1$ statt -1; auch dies wird im folgenden nicht besonders hervorgehoben.

Die durch (1) dargestellte Fläche nennt man gewöhnlich das Tensorellipsoid, ohne damit sagen zu wollen, daß sie nicht auch ein anderes Gebilde zweiter Ordnung, z. B. ein Hyperboloid, ein Zylinder oder ein Degenerationsprodukt dieser Flächen sein kann. Ihr Mittelpunkt ist der Koordinatenanfang 0.

Fig. 1.



Wir fragen zunächst, wie sich die Abhängigkeit des Vektors $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ vermittelst dieses Ellipsoids ausdrückt. Zu dem Ende denke man sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ an 0 angeheftet.

Der von 0 aus gezogene Vektor $\mathfrak{A}$ schneidet das Ellipsoid in einem Punkt 1 (Fig. 1), dessen Koordinaten sind x, y, z. Legt man in diesem Punkt eine Tangentialebene an das Ellipsoid und nennt ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten dieser Ebene, so hat sie die Gleichung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x-\xi)+\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y-\eta)+\frac{\partial \Phi}{\partial z}(z-\zeta)=0. \quad . \quad . \quad (2)$$

Nun ist nach (1)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}x+\frac{\partial \Phi}{d y}y+\frac{\partial \Phi}{\partial z}z=1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

also nach (2) auch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\xi+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\eta+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\zeta=1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Macht das von 0 auf die Tangentialebene gefällte Lot mit den Achsen die Winkel λ, μ, ν, so ist bekanntlich

$$\cos\lambda=\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}} \quad \text{usw.}$$

oder, wenn man die Wurzel mit $\frac{1}{p}$ bezeichnet,

$$\cos\lambda=p\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \cos\mu=p\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \cos\nu=p\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad . \quad . \quad (5)$$

Nun ist, wie sich durch Differentiation von (1) ergibt,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = t_{xx} x + t_{xy} y + t_{zx} z. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Nennt man $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor 0 1, also den Teil von $\mathfrak{A}$, der zwischen 0 und der Fläche 2Φ liegt, und ist ε das Verhältnis $\frac{r}{A}$, so ist

$$x = \varepsilon A_x, \quad y = \varepsilon A_y, \quad z = \varepsilon A_z. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Also ist nach (6)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon (t_{xx} A_x + t_{xy} A_y + t_{xz} A_z) = \varepsilon B_x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und entsprechend in y und z. Also folgt aus (5)

$$\cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu = B_x : B_y : B_z. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Das heißt: $\mathfrak{B}$ fällt in die Richtung des Lotes auf die Tangentialebene, welche im Durchschnittspunkt von $\mathfrak{A}$ an das Ellipsoid gelegt wird. Die Länge dieses Lotes ist bekanntlich

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

also dieselbe Größe, welche oben mit p bezeichnet wurde. Es ist nach (8)

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon B &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}, \\ B &= \frac{1}{\varepsilon p} = \frac{1}{p} \cdot \frac{A}{r}. \end{aligned}\right. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

B verhält sich zu A, wie $\frac{1}{p}$ zu r. Somit ist durch (9) und (10) Richtung und Betrag von $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmt.

Das Ellipsoid kann in speziellen Fällen zum Rotationsellipsoid oder auch zur Kugel degenerieren; im letzteren Fall ist $t_{xy} = t_{yz} = t_{zx} = 0$, p wird identisch mit r und $t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = \frac{1}{r^2}$. Die durch die Grundgleichung dargestellte Operation entartet also zur einfachen Multiplikation mit dem Skalar $\frac{1}{r^2}$.

Sind zwei von den drei Achsen des Ellipsoids einander gleich, die dritte aber von beiden verschieden, so sind bekanntlich alle Durchmesser des Ellipsoids, die auf der dritten Achse senkrecht stehen, gleichwertig. Demgemäß kann man die beiden gleichen Durchmesser des Ellipsoids unter der Bedingung, daß ihre Rechtwinkligkeit beibehalten bleibt, beliebig in ihrer Ebene drehen, ohne daß der Tensor, dem das Ellipsoid entspricht, dadurch geändert wird.

4. Änderungen des Koordinatensystems.

Beziehen sich die Werte von t_{xx} usw. auf ein bestimmtes im Raum festgelegtes Koordinatensystem, so hat das Ellipsoid $2\Phi = 0$ eine feste Lage im Raum; 1 ist ein eindeutig bestimmter Punkt, die Tangentialebene in 1 ist eindeutig gegeben, ebenso p; also ist die Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eindeutig, wie es die Definition verlangt.

Diese Eindeutigkeit besteht aber nur, solange das Tensorellipsoid im Raum festliegt. Denn denken wir uns ein zweites Ellipsoid, welches mit dem ersten gleiche Dimensionen, aber andere Lage hätte, während $\mathfrak{A}$ seine anschaulich vorgezeigte Lage im Raum beibehält, so würde in diesem zweiten Ellipsoid $\mathfrak{p}$ im allgemeinen einen anderen Betrag und eine andere Lage haben als im ersten. Die Gleichungen (9) und (10) des vorigen Paragraphen würden also im allgemeinen einen anderen Vektor $\mathfrak{B}$ bestimmen als den dort behandelten. Es ergibt sich hieraus, daß die feste Lage des Tensorellipsoids im Raum eine notwendige Eigenschaft des zugehörigen Tensors (τ) ist, und daß, wenn man von dem zu Anfang gegebenen Koordinatensystem der x, y, z zu einem anderen System der ξ, η, ζ übergeht, die sechs Glieder des Tensors (τ) eine der Änderung des Koordinatensystems entsprechende Transformation erfahren müssen. Die Art dieser Transformation ergibt sich einfach aus der Darstellung durch das Tensorellipsoid. Will man an Stelle der x, y, z ein anderes Koordinatensystem der ξ, η, ζ einführen, so hat man die Gleichung $2\Phi = 0$ nach bekannten Regeln auf die ξ, η, ζ zu transformieren; die Koeffizienten von ξ^2, η^2, ζ^2, $2\eta\zeta$, $2\zeta\xi$, $2\xi\eta$ in dieser transformierten Gleichung sind die Glieder oder Komponenten des Tensors (τ) in dem neuen Koordinatensystem.

Sind die Kosinus der Winkel, welche die Achsen beider Koordinatensysteme miteinander machen, durch das Schema gegeben ($\cos x, \xi = \alpha_1$ usw.):

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3,

so lauten die Transformationsgleichungen, wie bekannt,

$$x = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta \quad \text{usw.},$$

und wenn man dies in die Gleichung (1) des § 3 einführt, ergibt die Ausrechnung:

$$\left.\begin{aligned}
t_{\xi\xi} &= t_{xx}\alpha_1^2 + t_{yy}\alpha_2^2 + t_{zz}\alpha_3^2 + t_{yz}\alpha_2\alpha_3 + t_{zx}\alpha_3\alpha_1 + t_{xy}\alpha_1\alpha_2,\\
t_{\eta\eta} &= t_{xx}\beta_1^2 + t_{yy}\beta_2^2 + t_{zz}\beta_3^2 + t_{yz}\beta_2\beta_3 + t_{zx}\beta_3\beta_1 + t_{xy}\beta_1\beta_2,\\
t_{\zeta\zeta} &= t_{xx}\gamma_1^2 + t_{yy}\gamma_2^2 + t_{zz}\gamma_3^2 + t_{yz}\gamma_2\gamma_3 + t_{zx}\gamma_3\gamma_1 + t_{xy}\gamma_1\gamma_3,\\
t_{\eta\zeta} &= t_{xx}\beta_1\gamma_1 + t_{yy}\beta_2\gamma_2 + t_{zz}\beta_3\gamma_3 + t_{yz}\cdot\tfrac{1}{2}(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2)\\
&\quad + t_{zx}\cdot\tfrac{1}{2}(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) + t_{xy}\cdot\tfrac{1}{2}(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1),\\
t_{\zeta\xi} &= t_{xx}\gamma_1\alpha_1 + t_{yy}\gamma_2\alpha_2 + t_{zz}\gamma_3\alpha_3 + t_{yz}\cdot\tfrac{1}{2}(\gamma_2\alpha_3 + \gamma_3\alpha_2)\\
&\quad + t_{zx}\cdot\tfrac{1}{2}(\gamma_3\alpha_1 + \gamma_1\alpha_3) + t_{xy}\cdot\tfrac{1}{2}(\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1),\\
t_{\xi\eta} &= t_{xx}\alpha_1\beta_1 + t_{yy}\alpha_2\beta_2 + t_{zz}\alpha_3\beta_3 + t_{yz}\cdot\tfrac{1}{2}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2)\\
&\quad + t_{zx}\cdot\tfrac{1}{2}(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + t_{xy}\cdot\tfrac{1}{2}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Kosinus treten in den Gleichungen sämtlich in zweiter Dimension auf; dies verweist darauf, daß sie nicht Richtungen, sondern Doppelrichtungen festlegen. In der Tat, von den beiden Hälften je einer Hauptachse des Ellipsoids ist die eine räumlich vor der anderen nicht ausgezeichnet, und für die Bestimmung der Stellung des Ellipsoids im Raum ist es gleichgültig, ob man die Richtung seiner Hauptachsen umkehrt.

5. Hauptachsen, Konstituenten.

Die Tatsache, daß das Ellipsoid des Tensors (τ) im Raum eine bestimmte Stellung hat, weist darauf hin, daß dem Tensor als solchem drei bestimmte Doppelrichtungen im Raum zugeordnet sind. Es liegt nahe, die drei Hauptachsen des Ellipsoids als maßgebend für diese Doppelrichtungen anzusehen; wir nennen sie demgemäß die Hauptachsen des Tensors.

Wir bezeichnen nun die Doppelrichtungen der Hauptachsen durch a, b, c, ihre Beträge durch t_a, t_b, t_c, und markieren überhaupt die auf a, b, c bezogenen Größen entsprechend. Legt man drei Koordinatenachsen der ξ, η, ζ in die drei Doppelrichtungen a, b, c, so verschwinden bekanntlich die Produkte von je zwei Koordinaten aus der Gleichung des Ellipsoids, und sie nimmt die Form an:

$$t_a\xi^2 + t_b\eta^2 + t_c\zeta^2 = 1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die drei Größen t_a, t_b, t_c heißen die Konstituenten des Tensors (τ). Im System der ξ, η, ζ drückt τ sich aus durch

$$\tau = \begin{cases} t_a & 0 & 0 \\ 0 & t_b & 0 \\ 0 & 0 & t_c. \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In einem beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystem sind zur Bestimmung der Doppelrichtungen a, b, c drei Angaben erforderlich; a wird durch zwei Winkel, die es etwa mit den Achsen der x und y macht, festgelegt; dann ist b durch einen weiteren Winkel bestimmt, und c ist durch die Rechtwinkligkeit des Systems mit bestimmt. Im ganzen bilden also die drei Angaben über a, b, c nebst den drei Konstituenten wieder sechs Bestimmungsstücke, die den Tensor in einem beliebigen Koordinatensystem charakterisieren.

Nennt man die Beträge der Halbachsen des „Ellipsoids" von (τ) r_a, r_b, r_c, so zeigt Gleichung (1) ohne weiteres, wie die Konstituenten durch diese Halbachsen ausgedrückt werden; es ist

$$t_a = \frac{1}{r_a^2}, \qquad t_b = \frac{1}{r_b^2}, \qquad t_c = \frac{1}{r_c^2}. \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

Ferner reduziert sich die Grundgleichung auf

$$\mathfrak{B}_a = t_a \mathfrak{A}_a, \qquad \mathfrak{B}_b = t_b \mathfrak{A}_b, \qquad \mathfrak{B}_c = t_c \mathfrak{A}_c. \quad . \ . \ . \quad (4)$$

Die Hauptachsen des Tensors sind notwendig invariant, da ja die Transformation von einem Koordinatensystem auf das andere von vornherein auf ihre Invarianz gegründet wurde.

6. Transformation von den Hauptachsen auf irgend ein Koordinatensystem und umgekehrt.

Ist ein Tensor durch seine Konstituenten gegeben, so bietet sich die Aufgabe dar, seine Glieder für ein beliebiges Koordinatensystem der x, y, z auszudrücken. Lautet das Schema für die Winkelkosinus der Achsen

	a	b	c
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3,

so ergibt sich die Lösung unmittelbar aus § 4. Man braucht in den dortigen Gleichungen nur $t_{xx} = t_a$, $t_{yy} = t_b$, $t_{zz} = t_c$, $t_{yz} = t_{yx} = t_{xy} = 0$ zu setzen und auf der linken Seite statt der griechischen Buchstaben lateinische zu schreiben, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
t_{xx} &= t_a \alpha_1^2 + t_b \alpha_2^2 + t_c \alpha_3^2, \\
t_{yy} &= t_a \beta_1^2 + t_b \beta_2^2 + t_c \beta_3^2, \\
t_{zz} &= t_a \gamma_1^2 + t_b \gamma_2^2 + t_c \gamma_3^2, \\
t_{yz} &= t_a \beta_1 \gamma_1 + t_b \beta_2 \gamma_2 + t_c \beta_3 \gamma_3, \\
t_{zx} &= t_a \gamma_1 \alpha_1 + t_b \gamma_2 \alpha_2 + t_c \gamma_3 \alpha_3, \\
t_{xy} &= t_a \alpha_1 \beta_1 + t_b \alpha_2 \beta_2 + t_c \alpha_3 \beta_3.
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Die Achsenkomponenten von B in A_a, A_b, A_c ausgedrückt, sind

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \alpha_1 t_a A_a + \alpha_2 t_b A_b + \alpha_3 t_c A_c, \\ B_y &= \beta_1 t_a A_a + \beta_2 t_b A_b + \beta_3 t_c A_c, \\ B_z &= \gamma_1 t_a A_a + \gamma_2 t_b A_b + \gamma_3 t_c A_c. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

In A_x, A_y, A_z erhält man die Komponenten von B, indem man die Werte von t_{xx}, t_{yy} usw. aus Gleichung (1) in die Grundgleichung einsetzt.

Die umgekehrte Aufgabe, a, b, c zu bestimmen, wenn t_{xx}, t_{yy}, t_{zz} usw. gegeben sind, ist identisch mit der bekannten Aufgabe der analytischen Geometrie, die Hauptachsen eines Ellipsoids zu ermitteln, wenn das Ellipsoid durch seine Mittelpunktsgleichung in einem beliebigen Koordinatensystem der x, y, z gegeben ist. Sie wird später (§ **19**) eingehend behandelt, hier sei nur der Satz vorweggenommen, daß sich für jeden Tensor drei reelle Hauptachsen finden, so daß auf imaginäre Werte keine Rücksicht zu nehmen ist.

Bei Betrachtung der Gleichung (1) sieht man, daß ihre rechten Seiten drei Kolonnen bilden, derart, daß in der ersten Kolonne nur t_a vorkommt, in der zweiten und dritten nur t_b bzw. t_c. Das läßt sich offenbar dahin auffassen, daß jeder der Konstituenten für sich transformiert wird. Wäre z. B. nur t_a gegeben, t_b und t_c aber bedeutungslos, so würden die Formeln lauten:

$$\left.\begin{aligned} t_{xx} &= t_a \alpha_1^2, & t_{yy} &= t_a \beta_1^2, & t_{zz} &= t_a \gamma_1^2, \\ t_{yz} &= t_a \beta_1 \gamma_1, & t_{zx} &= t_a \gamma_1 \alpha_1, & t_{xy} &= t_a \alpha_1 \beta_1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Man kann also t_a für sich als eine Größe ansehen, die sich selbständig transformiert, ebenso t_b und t_c. Diese Auffassung wird später bei Betrachtung der Wirkungen eines Tensors bestätigt, da sich herausstellen wird, daß jeder der drei Konstituenten eine besondere Dehnung herbeiführt. Von ihr ausgehend hat W. Voigt ursprünglich jede einzelne der drei Größen t_a, t_b, t_c als einen Tensor, und ihre Gesamtheit als ein Tensortripel bezeichnet. Das ist völlig berechtigt; es ist indessen allgemein gebräuchlich geworden, den Namen Tensor auf die Gesamtheit der drei Konstituenten einschließlich ihrer Doppelrichtungen, also auf unser (τ) anzuwenden.

Mit einer allerdings sehr erheblichen Ausdehnung des Summenbegriffes kann man den Tensor auch als die Summe seiner sämtlichen Glieder auffassen. Auf Grund der im Eingang gegebenen Definition des Tensors liegt für diese Ausdehnung des Summenbegriffes keine Motivierung vor; eine solche ergibt sich aber, wenn der Tensorbegriff auf andere Aggregate von ähnlichem Charakter ausgedehnt wird, die nicht bloß als symbolische Faktoren gedacht sind, sondern als physikalische Vektorensysteme oder Eigenschaften selbständige Existenz haben. Vorläufig wollen wir von der Ausdehnung nur an dieser Stelle Gebrauch machen; dann ist der Einzeltensor der Gleichung (3), da die Seitenglieder in ihm sämtlich doppelt vorkommen, zu schreiben:

$$(\tau) = t_{xx} + t_{yy} + t_{zz} + 2\,t_{yz} + 2\,t_{zx} + 2\,t_{xy},$$
$$= t_a\alpha_1^2 + t_a\beta_1^2 + t_a\gamma_1^2 + 2\,t_a\beta_1\gamma_1 + 2\,t_a\gamma_1\alpha_1 + 2\,t_a\alpha_1\beta_1. \quad . \quad . \quad (4)$$

Dies stimmt genau überein mit der Formel für die Transformation eines Vektorquadrates. Soll der Vektor $\mathfrak{v}$, der in die Doppelrichtung a fällt, vom Koordinatensystem der a, b, c auf diejenige der x, y, z transformiert werden, so ist bekanntlich

$$\pm\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\alpha_1 + \mathfrak{v}\beta_1 + \mathfrak{v}\gamma_1,$$

also

$$\mathfrak{v}^2 = v^2 = v^2\alpha_1^2 + v^2\beta_1^2 + v^2\gamma_1^2 + 2\,v^2\beta_1\gamma_1 + 2\,v^2\gamma_1\alpha_1 + 2\,v^2\alpha_1\beta_1.$$

Zerlegt man also $\mathfrak{v}^2$ in die sechs hier auftretenden Summanden, so haben die einzelnen Summanden genau dieselben Koeffizienten, wie diejenigen in Gleichung (4). Man spricht dies aus in dem Satz: Tensoren transformieren sich wie die Quadrate von Vektoren.

7. Invarianten.

Addiert man in Gleichung (1) des vorigen Paragraphen die drei Diagonalglieder, so erhält man:

$$t_{xx} + t_{yy} + t_{zz} = t_a + t_b + t_c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

d. h. die Summe der Diagonalglieder ist für einen gegebenen Tensor invariant gegen Drehungen des Koordinatensystems. Dieser Satz hängt offenbar mit dem geometrischen Satz zusammen, nach welchem die Summe der reziproken Quadrate eines Tripels von rechtwinklig zueinanderstehenden Semidiametern für ein gegebenes Ellipsoid konstant ist. Die vorstehende Gleichung folgt übrigens auch unmittelbar aus § **4**, Gleichung (1), wenn man die bekannten Beziehungen $\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0$ usw. benutzt. Durch direkte Ausrechnung mit Hilfe der Gleichung (1) des § **6** beweist man ferner die Invarianz der beiden folgenden Ausdrücke zweiten und dritten Grades:

$$t_{yy}t_{zz} + t_{zz}t_{xx} + t_{xx}t_{yy} - (t_{yz}^2 + t_{zx}^2 + t_{xy}^2) = t_bt_c + t_ct_a + t_at_b, \quad (2)$$
$$t_{xx}t_{yy}t_{zz} + 2\,t_{yz}t_{zx}t_{xy} - (t_{xx}t_{yz}^2 + t_{yy}t_{zx}^2 + t_{zz}t_{xy}^2) = t_at_bt_c. \quad . \quad . \quad (3)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite von Gleichung (3) ist identisch mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{yz} & t_{zz} \end{vmatrix}.$$

Wir nennen diese die Determinante des Tensors.

8. Wählbarkeit von Tensorgliedern; Gleichheit von Tensoren.

Die sechs Glieder t_{xx}, t_{yy} usw. eines Tensors sind durch die Definition keiner Beschränkung unterworfen; auch mögen ihre Werte sein, welche sie wollen, man kann immer die in einem gegebenen Koordinatensystem zu ihnen gehörige Mittelpunktsfläche bilden. Man kann also jederzeit sechs Zahlenwerte von beliebiger Größe als Glieder eines Tensors auffassen oder vorschreiben, vorausgesetzt, daß man sie auf ein bestimmtes Koordinatensystem bezieht und daß man ihnen die Eigenschaft zuschreiben darf, sich bei Änderungen des Koordinatensystems gemäß § 4 zu transformieren. Das gilt auch, wenn es sich nicht um reine Zahlen, sondern um skalare physikalische Größen anderer Art handelt, dann aber selbstverständlich unter der Voraussetzung, daß die sechs in Frage kommenden Größen gleiche physikalische Dimension haben.

Zwei Tensoren sind offenbar gleich, wenn ihre Glieder, in der vorgeschriebenen Reihenfolge angeordnet, in ein und demselben Koordinatensystem einander einzeln gleich sind.

Als Spezialfall folgt hieraus: Zwei Tensoren sind gleich, wenn sie Hauptachsen von gleicher Doppelrichtung haben und wenn ihre den gleichgerichteten Achsen entsprechenden Konstituenten gleich sind.

Da die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ keinen bestimmten Ort im Raum haben, ist auch für einen Tensor, welcher $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ überführt, kein solcher vorgeschrieben, und eine Verschiebung im Raum kommt für die Gleichheit zweier Tensoren nicht in Betracht. Tensoren sind begrifflich in demselben Sinne frei wie Vektoren. Im konkreten physikalischen Problem können die Tensoren ebenso wie die Vektoren an bestimmte Orte geknüpft sein.

An das Vorstehende knüpft sich die Frage, ob und wie sich die Gleichheit zweier Tensoren durch ihre vorgeschriebene Wirkung auf gegebene Vektoren bestimmen läßt. Soll der Tensor (τ) einen gegebenen Vektor $\mathfrak{A}$ in einen zweiten gegebenen Vektor $\mathfrak{B}$ überführen, so müssen seine Glieder die drei skalaren Gleichungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} B_x &= t_{xx}A_x + t_{xy}A_y + t_{zx}A_z, \\ B_y &= t_{xy}A_x + t_{yy}A_y + t_{yz}A_z, \\ B_z &= t_{zx}A_x + t_{yz}A_y + t_{zz}A_z. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

Da aber der Tensor sechs Komponenten hat, enthalten diese Gleichungen sechs Unbekannte, zu deren Bestimmung die drei Gleichungen offenbar nicht ausreichen. Dazu sind vielmehr weitere drei Gleichungen derselben Art erforderlich. Also ergibt sich unmittelbar: Zwei Tensoren sind im allgemeinen einander gleich, wenn beide zwei nichtkollineare Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ in die gleichen Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ überführen.

Die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ dürfen nicht kollinear sein, weil sie sonst nicht sechs voneinander unabhängige Gleichungen (1) liefern würden.

9. Vorläufige Betrachtung der Wirkung eines Tensors; Dehnungsellipsoid.

Die Wirkung eines Tensors auf einen Vektor, mit dem er multipliziert wird, wurde in § 3, unter Bezugnahme auf das Tensorellipsoid, erläutert. Ist der Tensor durch seine Konstituenten gegeben, so reduziert sich die Hauptgleichung, wie schon in § 5 gezeigt wurde, auf

$$\mathfrak{B}_a = t_a \mathfrak{A}_a, \quad \mathfrak{B}_b = t_b \mathfrak{A}_b, \quad \mathfrak{B}_c = t_c A_c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bei der symbolischen Multiplikation mit (τ) werden also die drei in die Hauptachsen des Tensors fallenden Komponenten von $\mathfrak{A}$ mit drei im allgemeinen verschiedenen Skalaren multipliziert. Die tensorielle Multiplikation steht zur gewöhnlichen in einem analogen Verhältnis wie Affinität zu Ähnlichkeit. Vektoren, welche in eine der Doppelrichtungen a, b, c fallen, werden einfach gedehnt, alle übrigen werden gleichzeitig gedreht.

Legt man alle denkbaren Vektoren vom Betrage 1 mit ihren Anfangspunkten in den Anfangspunkt 0 eines Koordinatensystems, so bilden ihre Endpunkte eine Kugel vom Radius Eins. Legt man die Koordinatenachsen in die Richtungen a, b, c, so hat der einzelne Einheitsvektor drei Komponenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, deren Beträge der Kugelgleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

genügen. Multipliziert man die sämtlichen Einheitsvektoren tensoriell mit (τ) und bezeichnet ihre Komponenten nunmehr mit $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, so ist

$$\mathfrak{a}' = t_a \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{b}' = t_b \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{c}' = t_c \mathfrak{c}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ genügen also nunmehr der Gleichung

$$\frac{a'^2}{t_a^2} + \frac{b'^2}{t_b^2} + \frac{c'^2}{t_c^2} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus der Kugel ist also ein Ellipsoid geworden; jedem Radius der Kugel entspricht ein Radiusvektor des Ellipsoids. Wir nennen dasselbe das Dehnungsellipsoid des Tensors. Es ist, wie aus Gleichung (4) unmittelbar hervorgeht, stets ein wirkliches Ellipsoid. Es gibt eine erste Vorstellung davon, wie ein räumliches Gebilde, die Kugel der Gleichung (2), durch die Multiplikation mit dem Tensor verändert wird. Diese Änderung heißt reine Deformation. Sie wird später noch näher betrachtet.

Selbstverständlich kann die Dehnung auch Kompression sein. Es ist sehr gebräuchlich, eine Kompression als „negative" Dehnung zu bezeichnen; das ist aber nur dann genau, wenn die Dehnung additiv gedacht ist. Erfolgt die Dehnung durch Multiplikation, so ist die Kompression als „reziproke" Dehnung zu bezeichnen. Ist die Dehnung nach irgend einer Achsenrichtung reziprok, so ist der entsprechende Konstituent < 1, und nicht etwa < 0. Hierauf ist zu achten, da in der Literatur tatsächlich Verwechslungen vorkommen; negative Konstituenten bedeuten, wie sich später zeigen wird, nicht Kompressionen, sondern Spiegelungen.

Anmerkung betreffend additive Tensoren. Man kann einen Tensor leicht so umgestalten, daß die durch ihn hervorgerufenen Hauptdehnungen als Differenzen erscheinen. Man braucht zu dem Ende nur zu schreiben

$$t_a = 1 + a_{11}, \quad t_b = 1 + a_{22}, \quad t_c = 1 + a_{33}; \quad \ldots \quad (5)$$

dann hat der auf seine Hauptachsen bezogene Tensor die Gestalt

$$\begin{cases} 1 + a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + a_{33}, \end{cases} \quad \ldots \quad (6)$$

und es liegt auf der Hand, daß die hier auftretenden Größen a die Verlängerungen nach den Richtungen der Hauptachsen additiv angeben.

Da die Zahl 1 invariant ist, müssen sich die a ganz ebenso transformieren wie die t. Dies ist leicht zu verifizieren, wenn man auf (6) die Transformationsformeln des § **6** anwendet und nachträglich, wie es ja sein muß, $t_{xx} = 1 + a'_{11}$, $t_{yy} = 1 + a'_{22}$, $t_{zz} = 1 + a'_{33}$ setzt. Der transformierte Tensor hat dann die Gestalt

$$\begin{cases} 1 + a'_{11} & a'_{12} & a'_{31} \\ a'_{12} & 1 + a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{23} & 1 + a'_{33}. \end{cases}$$

Da die $a_{\mu\nu}$ demselben Transformationsgesetz unterliegen wie die $t_{\mu\nu}$, kann man nun auch soweit gehen, daß man die a als Glieder eines besonderen Tensors (a) auffaßt und schreibt:

$$(a) = \begin{cases} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33}. \end{cases}$$

(a) ist als „Additivtensor" zu bezeichnen. Soll mittels desselben ein Vektor $\mathfrak{v}$ in die lineare Vektorfunktion $\mathfrak{w}$ übergeführt werden, so hat man natürlich zu setzen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{w} &= \left((1+a_{11})v_x + a_{12}v_y + a_{31}v_z\right)\mathfrak{i} \\ &+ \left(a_{12}v_x + (1+a_{22})v_y + a_{23}v_z\right)\mathfrak{j} \\ &+ \left(a_{31}v_x + a_{23}v_y + (1+a_{33})\right)\mathfrak{k} = \tau(\mathfrak{v}).\end{aligned}$$

Der Tensor (α) hat also hier keine besondere Bedeutung, da man ihn für die zunächst vorliegende Verwendung doch immer erst auf die Form (τ) bringen muß. Für ihn ist aber der Satz richtig, daß Kompression durch negative Werte der den Konstituenten von τ entsprechenden Diagonalglieder angezeigt wird. Später wird auch (α) wichtig.

Nach Gleichung (4) sind die Semidiameter des Dehnungsellipsoids der Reihe nach t_a, t_b, t_c. Die Semidiameter des Tensorellipsoids sind dagegen $\frac{1}{\sqrt{t_a}}$, $\frac{1}{\sqrt{t_b}}$, $\frac{1}{\sqrt{t_c}}$, die Quadrate der letzteren sind also die reziproken Werte zu den Semidiametern des Dehnungsellipsoids.

10. Der inverse Tensor.

Ist $\mathfrak{B} = (\tau)\mathfrak{A}$, so ist nach bekannten Sätzen der Algebra auch $\mathfrak{A}$ eine lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{B}$, und bildet man für $\mathfrak{A}$ die Grundgleichung in der Form

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= (s_{xx}B_x + s_{xy}B_y + s_{xz}B_z)\mathfrak{i} \\ &+ (s_{yx}B_x + \text{usw.}\end{aligned}$$

so ist auch hier wieder $s_{yx} = s_{xy}$ usw., also läßt sich auch $\mathfrak{A}$ durch symbolische Multiplikation von $\mathfrak{B}$ mit einem Tensor ausdrücken. Diesen Tensor nennen wir den i n v e r s e n T e n s o r von (τ) und schreiben ihn (τ^{-1}). Die Definition des inversen Tensors liegt also in dem Satz:

Wenn

$$\mathfrak{B} = (\tau)\mathfrak{A}, \quad \text{so ist} \quad \mathfrak{A} = (\tau^{-1})\mathfrak{B}. \quad \ldots\ldots (1)$$

Die Konstituenten von (τ^{-1}) ergeben sich sofort aus Gleichung (4) des § 5; da

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{B}_a &= t_a\mathfrak{A}_a, \\ \mathfrak{B}_b &= t_b\mathfrak{A}_b, \\ \mathfrak{B}_c &= t_c\mathfrak{A}_c,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

so ist

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}_a &= \frac{1}{t_a}\mathfrak{B}_a, \\ \mathfrak{A}_b &= \frac{1}{t_b}\mathfrak{B}_b, \\ \mathfrak{A}_c &= \frac{1}{t_c}\mathfrak{B}_c.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Also: Die Konstituenten des inversen Tensors sind die reziproken Werte der Konstituenten des Tensors selbst. Die Hauptachsenrichtungen beider sind identisch.

Die Gleichung des auf seine Hauptachsen bezogenen inversen Ellipsoids (Koordinatensystem der ξ, η, ζ) wird

$$2\Psi = \frac{\xi^2}{t_a} + \frac{\eta^2}{t_b} + \frac{\zeta^2}{t_c} - 1 = 0. \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Seine Halbachsen haben also die Längen $\sqrt{t_a}$, $\sqrt{t_b}$, $\sqrt{t_c}$. Es ist

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\xi}{t_a}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{\eta}{t_b}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = \frac{\zeta}{t_c}. \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Wird das Lot von 0 auf die Tangentialebene, welche man im Punkte ξ, η, ζ an das inverse Ellipsoid legt, mit $\mathfrak{p}'$ bezeichnet, so ist

$$\frac{1}{p'} = \sqrt{\left(\frac{\xi}{t_a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{t_b}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{t_c}\right)^2}. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

R. H. Weber hat das Ellipsoid des inversen Tensors als „zweites Ellipsoid des Tensors τ“ bezeichnet.

Die sechs Glieder des inversen Tensors in einem beliebigen Koordinatensystem der x, y, z bestimmen sich aus den Gleichungen (1) des § **6**, wenn man in dieselben statt t_a, t_b und t_c deren reziproke Werte einsetzt.

11. Additive Eigenschaften.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Vektoren, so ist

$$\tau(\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B}) = (\tau)\mathfrak{A} \pm (\tau)\mathfrak{B}. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Dies folgt unmittelbar aus der Linearität der Grundgleichung, wenn man in dieselbe die bekannten Beziehungen $(A + B)_x = A_x + B_x$ usw. einführt. Der Satz läßt sich unmittelbar auf beliebig viele Vektoren ausdehnen.

Die Bedeutung der Addition von Tensoren ist, wie die Definition des Tensors selbst, durch Zurückgreifen auf das Tensorvektorprodukt zu definieren. Sind τ und τ' zwei Tensoren, so soll die Summe $(\tau + \tau')$ definiert sein durch die Festsetzung

$$(\tau + \tau')\mathfrak{A} = (\tau)\mathfrak{A} + (\tau')\mathfrak{A}. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Aus der Linearität der Grundgleichung folgt dann ohne weiteres: man addiert zwei in demselben Koordinatensystem gegebene Tensoren, indem man ihre entsprechenden Glieder einzeln addiert. Die Ausdehnung des Satzes auf drei und mehr Tensoren, sowie auf die Subtraktion, liegt auf der Hand. Auch folgt unmittelbar $\tau + \tau' = \tau' + \tau$ usw.

Sind m unter sich gleiche Tensoren τ, τ', τ'' usw. zu addieren, so wird deren Summe im Anschluß an die elementare Definition eines Produktes als $m\tau$ zu bezeichnen sein. Wir dehnen diese Bezeichnung definitorisch auf beliebige skalare Werte von m aus, setzen also fest, daß allgemein

$$m\tau = \begin{cases} mt_{xx} & mt_{xy} & mt_{zx} \\ mt_{xy} & mt_{yy} & mt_{yz} \\ mt_{zx} & mt_{yz} & mt_{zz} \end{cases} \qquad (3)$$

ist. „Man multipliziert einen Tensor mit m, indem man seine sämtlichen Glieder einzeln mit m multipliziert.“ Aus der Grundgleichung folgt dann sofort

$$(m\tau)\mathfrak{A} = m(\tau\mathfrak{A}) = m\tau\mathfrak{A}. \qquad (4)$$

Man beachte, was Gleichung (2) ausdrückt. Die Operation $(\tau + \tau')$ bedeutet: Die Operationen τ und τ' sollen einzeln an dem ursprünglich gegebenen Vektor $\mathfrak{A}$ vorgenommen und ihre Ergebnisse sollen nachträglich geometrisch addiert werden!

Da jeder Tensor den Symmetriebeziehungen $t_{yz} = t_{zy}$ usw. genügt, so tut das auch die Summe beliebig vieler Tensoren. Also durch Addition von beliebig vielen Tensoren erhält man immer wieder einen Tensor, d. h.:

Werden beliebig viele reine Deformationen an einem Vektor oder einem durch Vektoren bestimmten räumlichen Gebilde (Beispiel die Kugel in § 9) additiv zusammengesetzt, so ist das Ergebnis stets wieder eine reine Deformation.

12. Produktenskalar zweier Tensoren.

Wir setzen definitorisch fest: Sind τ und τ' zwei Tensoren, so nennen wir die Größe

$$t_{xx}t'_{xx} + t_{yy}t'_{yy} + t_{zz}t'_{zz} + 2t_{yz}t'_{yz} + 2t_{zx}t'_{zx} + 2t_{xy}t'_{xy} \qquad (1)$$

den Produktenskalar derselben und schreiben dafür $\big((\tau)(\tau')\big)$ oder (τ, τ'). Die Bezeichnung rührt daher, daß Größen dieser Art in den skalaren Produkten von zwei Vektoren auftreten, wenn einer von diesen ein Tensorvektorprodukt ist.

13. tens $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, tens $\mathfrak{A}^2$.

Es sei $\mathfrak{B} = (\tau)\mathfrak{A}$; es sei $\mathfrak{C}$ ein dritter Vektor und es soll das skalare Produkt aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gebildet werden. Dann ist

$$\begin{aligned}(\mathfrak{C},(\tau)\mathfrak{A}) &= C_x B_x + C_y B_y + C_z B_z \\ &= (t_{xx} A_x + t_{xy} A_y + t_{zx} A_z) C_x \\ &+ (t_{xy} A_x + t_{yy} A_y + t_{yz} A_z) C_y \\ &+ (t_{zx} A_x + t_{yz} A_y + t_{zz} A_z) C_z.\end{aligned}$$

Übersichtlich geordnet gibt dies:

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{C},(\tau)\mathfrak{A}) &= t_{xx} A_x C_x + t_{yy} A_y C_y + t_{zz} A_z C_z \\ &+ 2 t_{yz}\cdot\tfrac{1}{2}(A_y C_z + A_z C_y) + 2 t_{zx}\cdot\tfrac{1}{2}(A_z C_x + A_x C_z) \\ &+ 2 t_{xy}\cdot\tfrac{1}{2}(A_x C_y + A_y C_x).\end{aligned}\right\}\cdot \quad (1)$$

Nach dem vorigen Paragraphen kann der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung aufgefaßt werden als der Produktenskalar zweier Tensoren, von denen der erste der Tensor (τ) ist, der zweite aber die sechs Glieder

$$A_x C_x, \quad A_y C_y, \quad A_z C_z, \quad \tfrac{1}{2}(A_y C_z + A_z C_y), \quad \tfrac{1}{2}(A_z C_x + A_x C_z), \quad \tfrac{1}{2}(A_x C_y + A_y C_x)$$

besitzt. Diesen Tensor nennt man den „Tensor von $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$" und schreibt ihn

tens $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$.

Seine Definition liegt also in dem Satz:

tens $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ hat die sechs Glieder $A_x C_x$, $A_y C_y$, $A_z C_z$, $\tfrac{1}{2}(A_y C_z + A_z C_y)$, $\tfrac{1}{2}(A_z C_x + A_x C_z)$, $\tfrac{1}{2}(A_x C_y + A_y C_x)$,

und nachdem diese Definition einmal festgestellt ist, läßt sich die Gleichung (1) zusammenfassen in den Satz

$$(\mathfrak{C},(\tau)\mathfrak{A}) = ((\tau), \text{tens}\,\mathfrak{A},\mathfrak{C}). \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Es ist die Frage zu erörtern, wie die Hauptachsen von tens $\mathfrak{A},\mathfrak{C}$ liegen. Dies erledigt sich einfach wie folgt: Ist eine der Koordinatenachsen, z. B. die Achse der z, senkrecht zur Ebene $\mathfrak{A},\mathfrak{C}$ gelegt, so verschwinden die z-Komponenten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, also werden die Glieder $\tfrac{1}{2}(A_y C_z + A_z C_y)$ und $\tfrac{1}{2}(A_z C_x + A_x C_z)$ zu Null; $A_x C_y + A_y C_x$ aber wird, wie man leicht findet, zu Null, wenn die Achse der x den Winkel $\mathfrak{A},\mathfrak{C}$ halbiert. Also die drei Seitenglieder verschwinden, d. h. die Koordinatenachsen fallen in die Hauptachsenrichtungen von tens $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, wenn die eine senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ steht, und wenn die beiden anderen die supplementaren Winkel $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}, \mathfrak{A}$ halbieren. (Die Frage der Rechtshändigkeit ist nicht aufzuwerfen, weil nur die Doppelrichtungen in Betracht kommen.)

Bezieht man den *tens* $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ auf seine Hauptachsenrichtungen und bezeichnet diese mit ξ, η, ζ, so sind seine Konstituenten

$$A_\xi C_\xi, \qquad A_\eta C_\eta, \qquad 0.$$

Sein „Ellipsoid" hat auf diese Hauptachsen bezogen die Gleichung

$$A_\xi C_\xi \xi^2 + A_\eta C_\eta \eta^2 = 1; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

d. h. es ist ein Zylinder, dessen Erzeugungslinien senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ stehen. (Ob der Zylinder elliptisch oder hyperbolisch ist, hängt natürlich vom Vorzeichen der beiden Produkte $A_\xi C_\xi$ und $A_\eta C_\eta$ ab.)

Zugleich ergibt sich hieraus: Die Hauptachsenrichtungen von *tens* $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und damit auch die Werte $A_\xi C_\xi$ und $A_\eta C_\eta$ sind von der Lage des Koordinatensystems unabhängig, also *tens* $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ist invariant gegen Drehungen des Koordinatensystems.

Ist $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A}$ identisch, so wird aus unserem Tensor ein Tensor mit den sechs Gliedern

$$A_x^2, \quad A_y^2, \quad A_z^2, \quad A_y A_z, \quad A_z A_x, \quad A_x A_y.$$

Diesen bezeichnet man konsequenterweise als *tens* $\mathfrak{A}^2$. Offenbar fällt für ihn die eine Winkelhalbierungslinie mit $\mathfrak{A}$ selbst zusammen; die beiden anderen Hauptachsen liegen in einer Ebene, welche senkrecht auf $\mathfrak{A}$ steht, werden aber in dieser Ebene unbestimmt und können beliebig gedreht werden. Das Tensorellipsoid entartet zu einem Ebenenpaar, dessen Gleichung, da $A_\xi = A$, lautet

$$A^2 \xi^2 = 1.$$

Die beiden Ebenen liegen also im Abstande $\pm \frac{1}{A}$ vom Nullpunkt.

Daß *tens* $\mathfrak{A}^2$ von der Lage des Koordinatensystems unabhängig ist, versteht sich nach dem Obigen von selbst.

Gemäß Gleichung (1) kommt man auch auf den *tens* $\mathfrak{A}^2$, wenn man mit der Grundgleichung (1) des § 2 das skalare Produkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ bildet. Die einfache Ausrechnung ergibt

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = t_{xx} A_x^2 + t_{yy} \mathfrak{A}_y^2 + t_{zz} \mathfrak{A}_z^2 + 2 t_{yz} A_y A_z + 2 t_{zx} A_z A_x \\ + 2 t_{xy} A_x A_y,\end{aligned}\right\} . \quad (4)$$

also

$$\big(\mathfrak{A}, (\tau)\, \mathfrak{A}\big) = \big((\tau), tens\, \mathfrak{A}^2\big). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Man kann dieser Gleichung noch eine andere, nicht unwichtige Form geben. Sind l, m, n die drei Cosinus der Winkel, welche $\mathfrak{A}$ mit den Achsen macht, so ist $A_x = lA$ usw. Damit wird die vorstehende Gleichung

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{A},(\tau)\mathfrak{A}) = A^2(t_{xx}l^2 + t_{yy}m^2 + t_{zz}n^2 + 2t_{yz}mn + 2t_{zx}nl \\ + 2t_{xy}lm).\end{aligned}\right\} \quad . \quad (6)$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck bestimmt wieder den Produktenskalar zweier Tensoren. Der erste von diesen ist (τ), der zweite hat die sechs Glieder

$$l^2, \quad m^2, \quad n^2, \quad mn, \quad nl, \quad lm.$$

Es sind nun l, m, n die drei Komponentenbeträge eines Einheitsvektors, der die Richtung von $\mathfrak{A}$ hat, also entsprechen die sechs Glieder einem Tensor, der zu schreiben ist $tens\, 1_{\mathfrak{A}}^2$.

Damit lautet die Gleichung (6)

$$(\mathfrak{A},(\tau)\mathfrak{A}) = A^2\left((\tau), tens\, 1_{\mathfrak{A}}^2\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Auf die Hauptachsen bezogen hat irgend ein Tensorellipsoid nach dem Früheren die Gleichung

$$t_a\xi^2 + t_b\eta^2 + t_c\zeta^2 = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Macht ein Radiusvektor r, der von 0 nach dem Punkte ξ, η, ζ des Ellipsoids geht, mit den Achsen die Winkelcosinus l, m, n, so ist $\xi = rl$, $\eta = rm$, $\zeta = rn$, also liefert die vorstehende Gleichung unmittelbar

$$r^2(t_a l^2 + t_b m^2 + t_c n^2) = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\frac{1}{r^2} = \left((\tau), tens\, 1_{\mathfrak{r}}^2\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

14. Impuls- und Trägheitsmomente.

Gegeben sei ein starres Gebilde G, welches sich um den festen Koordinatenanfang 0 drehen kann. Ein Elementarteil des Gebildes habe die Masse μ, durch 0 sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem der x, y, z gelegt; ferner eine Gerade 01, deren Richtungscosinus l, m, n sind. Man bilde die aus der Mechanik bekannten Summen, welche in der Theorie der Trägheitsmomente auftreten und setze abkürzend, wenn μ die Koordinaten x, y, z hat,

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\mu(y^2+z^2) &= k_{xx}, & -\Sigma\mu yz &= k_{yz}, \\ \Sigma\mu(z^2+x^2) &= k_{yy}, & -\Sigma\mu zx &= k_{zx}, \\ \Sigma\mu(x^2+y^2) &= k_{zz}, & -\Sigma\mu xy &= k_{xy}.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bekanntlich ist dann die Größe $K_{\mathfrak{w}}$, welche in der Mechanik das „Trägheitsmoment in bezug auf die Achse 01" heißt, bestimmt durch die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathfrak{w}} = k_{xx} l^2 + k_{yy} m^2 + k_{zz} n^2 + 2 k_{yz} m n + 2 k_{zx} n l \\ + 2 k_{xy} l m. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Wenn also ein Einheitsvektor der Richtung 01 mit $1_{\mathfrak{w}}$ bezeichnet wird, und wenn man die sechs Größen k_{xx}, k_{yy} usw. zu einem Tensor $(\varkappa)$ zusammenfaßt, so ist

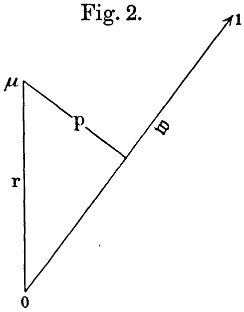
$$K_{\mathfrak{w}} = \left((\varkappa), tens\, 1_{\mathfrak{w}}^2\right). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Trägheitsmomente sind also die Produktenskalare von zwei Tensoren; der Tensor

$$(\varkappa) = \varkappa(k_{xx}, \quad k_{yy}, \quad k_{zz}, \quad k_{yz}, \quad k_{zx}, \quad k_{xy}) \quad . \; . \; . \quad (4)$$

ist nicht identisch mit dem Begriff Trägheitsmoment; er kann als Trägheitstensor bezeichnet werden. Dagegen ist das Ellipsoid des Tensors $(\varkappa)$ identisch mit dem Poinsotschen Trägheitsellipsoid, wenn man die willkürliche Konstante in der Gleichung des letzteren $= 1$ setzt. (Die Dimension dieser 1 ist Masse mal vierte Potenz der Längeneinheit.)

Fig. 2.



Wir nehmen nun an, das Gebilde G rotiere um 01 mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$, die als Vektor auf der Achse 01 dargestellt ist. Eines der Elemente μ hat dann eine Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$; der Radiusvektor von 0 nach μ sei $\mathfrak{r}$ und das Lot von μ auf 01 sei p. Dann ist (vgl. Fig. 2) $v = wp = |\mathfrak{w}| . |\mathfrak{r}| \sin \mathfrak{w}, \mathfrak{r}$, das ist, vorbehaltlich der Richtigkeit der Anordnung,

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Ist $\mathfrak{w}$ positiv, so würde $\mathfrak{v}$ aus der Ebene der Zeichnung nach oben (vorn) herausweisen. Also folgen $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{v}$ in dieser Ordnung rechtshändig aufeinander, d. h. die Anordnung der Gleichung (5) ist richtig.

Die Bewegungsmenge oder der Impuls des Teilchens μ ist

$$\mu\,\mathfrak{v} = \mu\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Das Impulsmoment von μ in bezug auf 0 1 ist also

$$\left[\mu\,\mathfrak{r}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]\right].$$

Die lebendige Kraft von μ ist

$$\tfrac{1}{2}\mu\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]^2.$$

Hiermit bilden wir für das ganze Gebilde G zwei Summen:

1. die vektorielle Summe $\Sigma\Big[\mu\,\mathfrak{r}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]\Big]$ = Impulsmoment J,
2. „ skalare „ $\tfrac{1}{2}\Sigma\mu[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]^2$ = lebendige Kraft T.

Es ist nun

$$\Big[\mathfrak{r}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]\Big] = \mathfrak{w}\,\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{w}). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Sind x, y, z, wie oben, die Koordinaten des einzelnen μ, so ist

$$\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}^2 = (w_x\mathfrak{i} + w_y\mathfrak{j} + w_z\mathfrak{k})(x^2 + y^2 + z^2) \quad \ldots \quad (8)$$

und

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{w}) = &-(x^2 w_x + xy\,w_y + xz\,w_z)\,\mathfrak{i} \\ &-(yx\,w_x + y^2 w_y + yz\,w_z)\,\mathfrak{j} \\ &-(zx\,w_x + zy\,w_y + z^2 w_z)\,\mathfrak{k}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

also

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{w}\,\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{w}) = &\Big((y^2 + z^2)\,w_x - xy\,w_y - zx\,w_z\Big)\,\mathfrak{i} \\ &+ \Big(-xy\,w_x + (z^2 + x^2)\,w_y - yz\,w_z\Big)\,\mathfrak{j} \\ &+ \Big(-zx\,w_x - yz\,w_y + (x^2 + y^2)\Big)\,\mathfrak{k}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

Multipliziert man mit μ und summiert über alle μ unter Beachtung des Umstandes, daß w für die Summation konstant ist, so kommt

$$\left.\begin{aligned} J = &(k_{xx}\,w_x + k_{xy}\,w_y + k_{zx}\,w_z)\,\mathfrak{i} \\ &+ (k_{xy}\,w_x + k_{yy}\,w_y + k_{yz}\,w_z)\,\mathfrak{j} \\ &+ (k_{zx}\,w_x + k_{yz}\,w_y + k_{zz}\,w_z)\,\mathfrak{k}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Also ist J eine lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{w}$, und zwar

$$J = (\varkappa)\,\mathfrak{w}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Das Impulsmoment ist also das Tensorvektorprodukt aus dem Trägheitstensor und der Winkelgeschwindigkeit.

Was die lebendige Kraft angeht, so ist zu bedenken, daß bei der Quadrierung von $[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]$ nur die Faktoren von $\mathfrak{i}^2, \mathfrak{j}^2, \mathfrak{k}^2$ in Betracht kommen, weil $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j} = 0$ usw. Also ist

$$[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]^2 = (w_y z - w_z y)^2 + (w_z x - w_x z)^2 + (w_x y - w_y x)^2 \quad \ldots \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} &= w_x^2(y^2 + z^2) + w_y^2(z^2 + x^2) + w_z^2(x^2 + y^2) \\ &- 2\,w_y w_z\,yz - 2\,w_z w_x\,zx - 2\,w_x w_y\,xy. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Nach Multiplikation mit μ und Summierung ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}2T &= k_{xx}w_x^2 + k_{yy}w_y^2 + k_{zz}w_z^2 \\ &+ 2k_{yz}w_y w_z + 2k_{zx}w_z w_x + 2k_{xy}w_x w_y.\end{aligned}\right\} \quad \ldots (15)$$

Also

$$T = \tfrac{1}{2}\big((\varkappa)\, tens\, \mathfrak{w}^2\big) \cdot \quad \ldots \ldots \ldots (16)$$

Setzt man $w_x = wl$ usw., so ergibt sich [vgl. (3)]:

$$T = \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}^2\big((\varkappa)\, tens\, 1_{\mathfrak{w}}^2\big) = \tfrac{1}{2}Kw^2 \cdot \quad \ldots \ldots (17)$$

In dieser letzteren Form tritt die lebendige Kraft in der gewöhnlichen Mechanik auf.

Die Gleichung (10) des vorigen Paragraphen führt dann auf die in der Mechanik übliche Konstruktion des Poinsotschen Trägheitsellipsoids, nach welcher die Radienvektoren des Ellipsoids dem Betrage des Trägheitsmomentes für die entsprechende Richtung umgekehrt proportional genommen werden.

Zweites Kapitel: **Der einzelne Diatensor.**

15. Der Diatensor.

Der Tensor hat drei aufeinander senkrecht stehende Konstituenten. Wir betrachten nun ein von R. H. Weber eingeführtes allgemeineres Gebilde, welches drei Konstituenten t_ξ, t_η, t_ζ hat, und ordnen diesen drei Konstituenten drei entsprechende Achsen[1]) zu, die aber beliebige Winkel miteinander machen können; dieses Gebilde nennen wir, vorerst ohne Rücksicht auf die in § **1** gegebene Definition, einen Diatensor. Die Doppelrichtungen der Achsen bezeichnen wir als Doppelrichtungen der ξ, η, ζ. Einen gegebenen Vektor $\mathfrak{A}$ kann man erstens rechtwinklig, zweitens durch Parallelprojektion auf die Achsen der ξ, η, ζ projizieren. Hier werden ausschließlich die Parallelprojektionen gebraucht. Wir bezeichnen diese daher mit $\mathfrak{A}_\xi$, $\mathfrak{A}_\eta$, $\mathfrak{A}_\zeta$ und nennen sie die

[1]) In der Literatur heißen sie vielfach Hauptachsen; wir vermeiden dieses Wort und sagen „Achsen“, weil das letztere genügt und weil das Wort „Hauptachsen“ bei dem später auftretenden Ellipsoid und Tensor dann seine gewöhnliche Bedeutung beibehalten kann.

Koordinaten[1]) des Vektors $\mathfrak{A}$ im System der ξ, η, ζ. Da die drei Koordinaten die Kanten eines Parallelepipeds bilden, dessen Diagonale $\mathfrak{A}$ ist, so ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{A}_\eta + \mathfrak{A}_\zeta. \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

Den Diatensor mit den Konstituenten t_ξ, t_η, t_ζ bezeichnen wir mit (τ) oder (T) und definieren ihn, wie oben ohne Rücksicht auf die in § **1** bereits gegebene Definition, durch den Satz

$$(\tau)\mathfrak{A} = t_\xi \mathfrak{A}_\xi + t_\eta \mathfrak{A}_\eta + t_\zeta \mathfrak{A}_\zeta. \quad \ldots \ldots (2)$$

Derselbe ist also charakterisiert dadurch, daß er die drei Koordinaten des Vektors $\mathfrak{A}$ im System der ξ, η, ζ mit drei im allgemeinen verschiedenen Skalaren multipliziert, ohne ihre Richtung zu ändern, ähnlich wie das der Tensor mit den Komponenten von $\mathfrak{A}$ in einem rechtwinkligen, durch seine Hauptachsen gelegten System tut.

$(\tau)\mathfrak{A}$ heißt das „Diatensorvektorprodukt τ mal $\mathfrak{A}$“.

16. Transformation von den Achsen des Diatensors auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

Das System der ξ, η, ζ sei in einem rechtwinkligen Koordinatensystem der x, y, z gegeben, und das Schema der Kosinus für die Winkel zwischen den Achsen sei

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3.

Dann bestehen die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

[1]) Das Wort Komponenten wird vermieden, weil man unter der ξ-Komponente von $\mathfrak{A}$ in der Regel die rechtwinklige Projektion von $\mathfrak{A}$ auf ξ versteht.

und
$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= \cos \xi, \eta, \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= \cos \eta, \zeta, \\ \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= \cos \zeta, \xi, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
aber keine anderen.

Sind A_x, A_y, A_z die Beträge der Komponenten von $\mathfrak{A}$ in x, y, z, so ist
$$\left.\begin{aligned} A_x &= \alpha_1 A_\xi + \beta_1 A_\eta + \gamma_1 A_\zeta, \\ A_y &= \alpha_2 A_\xi + \beta_2 A_\eta + \gamma_2 A_\zeta, \\ A_z &= \alpha_3 A_\xi + \beta_3 A_\eta + \gamma_3 A_\zeta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$
Löst man diese Gleichungen nach A_ξ, A_η, A_ζ auf, so erhält man
$$\left.\begin{aligned} A_\xi &= \bar{\alpha}_1 A_x + \bar{\alpha}_2 A_y + \bar{\alpha}_3 A_z, \\ A_\eta &= \bar{\beta}_1 A_x + \bar{\beta}_2 A_y + \bar{\beta}_3 A_z, \\ A_\zeta &= \bar{\gamma}_1 A_x + \bar{\gamma}_2 A_y + \bar{\gamma}_3 A_z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$
Hierin sind folgende Abkürzungen vorgenommen: Es ist gesetzt
$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = D \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$
und
$$\left.\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= \frac{\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2}{D}, & \bar{\alpha}_2 &= \frac{\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3}{D}, & \bar{\alpha}_3 &= \frac{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}{D}, \\ \bar{\beta}_1 &= \frac{\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2}{D}, & \bar{\beta}_2 &= \frac{\gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3}{D}, & \bar{\beta}_3 &= \frac{\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1}{D}, \\ \bar{\gamma}_1 &= \frac{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2}{D}, & \bar{\gamma}_2 &= \frac{\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3}{D}, & \gamma_3 &= \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{D}. \end{aligned}\right\} (6)$$

Es ist nun analog Gleichung (3), wenn $(\tau)\,\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ gesetzt wird,
$$\left.\begin{aligned} B_x &= \alpha_1 B_\xi + \beta_1 B_\eta + \gamma_1 B_\zeta, \\ B_y &= \alpha_2 B_\xi + \beta_2 B_\eta + \gamma_2 B_\zeta, \\ B_z &= \alpha_3 B_\xi + \beta_3 B_\eta + \gamma_3 B_\zeta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$
also, da $B_\xi = t_\xi A_\xi$, $B_\eta = t_\eta B_\eta$ usw., so ist mit Gleichung (4)
$$\left.\begin{aligned} B_x = {} & \alpha_1 t_\xi (\bar{\alpha}_1 A_x + \bar{\alpha}_2 A_y + \alpha_3 A_z), \\ & + \beta_1 t_\eta (\bar{\beta}_1 A_x + \bar{\beta}_2 A_y + \bar{\beta}_3 A_z), \\ & + \gamma_1 t_\zeta (\bar{\gamma}_1 A_x + \gamma_2 A_y + \bar{\gamma}_3 A_z). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Entsprechende Ausdrücke finden sich für B_y und B_z. Setzt man also:

$$\left.\begin{aligned}
t_{xx} &= \alpha_1\bar{\alpha}_1 t_\xi + \beta_1\bar{\beta}_1 t_\eta + \gamma_1\bar{\gamma}_1 t_\zeta,\\
t_{xy} &= \alpha_1\bar{\alpha}_2 t_\xi + \beta_1\bar{\beta}_2 t_\eta + \gamma_1\bar{\gamma}_2 t_\zeta,\\
t_{xz} &= \alpha_1\bar{\alpha}_3 t_\xi + \beta_1\bar{\beta}_3 t_\eta + \gamma_1\bar{\gamma}_3 t_\zeta,\\
t_{yx} &= \alpha_2\bar{\alpha}_1 t_\xi + \beta_2\bar{\beta}_1 t_\eta + \gamma_2\bar{\gamma}_1 t_\zeta,\\
t_{yy} &= \alpha_2\bar{\alpha}_2 t_\xi + \beta_2\bar{\beta}_2 t_\eta + \gamma_2\bar{\gamma}_2 t_\zeta,\\
t_{yz} &= \alpha_2\bar{\alpha}_3 t_\xi + \beta_2\bar{\beta}_3 t_\eta + \gamma_2\bar{\gamma}_3 t_\zeta,\\
t_{zx} &= \alpha_3\bar{\alpha}_1 t_\xi + \beta_3\bar{\beta}_1 t_\eta + \gamma_3\bar{\gamma}_1 t_\zeta,\\
t_{zy} &= \alpha_3\bar{\alpha}_2 t_\xi + \beta_3\bar{\beta}_2 t_\eta + \gamma_3\bar{\gamma}_2 t_\zeta,\\
t_{zz} &= \alpha_3\bar{\alpha}_3 t_\xi + \beta_3\bar{\beta}_3 t_\eta + \gamma_3\bar{\gamma}_3 t_\zeta,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= (t_{xx}A_x + t_{xy}A_y + t_{xz}A_z)\,\mathfrak{i}\\
&+ (t_{yx}A_x + t_{yy}A_y + t_{yz}A_z)\,\mathfrak{j}\\
&+ (t_{zx}A_x + t_{zy}A_y + t_{zz}A_z)\,\mathfrak{k}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Dies ist die Grundgleichung des § **1**. Es ergibt sich also: Die Definition des § **15** ist gleichbedeutend mit derjenigen des § **1**; der durch § **15**, Gleichung (2) definierte Diatensor führt, wenn er mit dem Vektor $\mathfrak{A}$ multipliziert wird, diesen in eine seiner homogenen linearen Vektorfunktionen über. Die Gleichungen (9) sind die Gleichungen für die Transformation des Diatensors vom System der ξ, η, ζ auf dasjenige der x, y, z. Sie liefern, der Grundgleichung entsprechend, neun Glieder des Diatensors. Diese führen wir auf in der Form

$$\tau = \begin{cases} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz}\\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz}\\ t_{zx} & t_{zx} & t_{zz}, \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

die schon in § **2** angegeben wurde, und diese Anordnung wird von jetzt ab festgehalten. Im allgemeinen ist $t_{yx} \neq t_{xy}$ usw.

Ist der Diatensor auf seine Achsen bezogen, so schreiben wir ihn entsprechend

$$\tau = \begin{cases} t_\xi & 0 & 0\\ 0 & t_\eta & 0\\ 0 & 0 & t_\zeta, \end{cases}$$

wobei zu beachten, daß die hier auftretende Benutzung schiefer Koordinaten ein Ausnahmefall ist, der besonders erwähnt werden muß.

Daß die durch den Diatensor dargestellte Operation gegen Drehungen des Systems der x, y, z invariant ist, ist selbstverständlich, da er ja unabhängig von diesem System definiert wurde.

17. Beziehungen zwischen den Koeffizienten α_ν, $\bar{\alpha}_\nu$.

Substituiert man A_ξ, A_η usw. aus den Gleichungen (4) des vorigen Paragraphen in die Gleichungen (3) oder umgekehrt A_x, A_y usw. aus den Gleichungen (3) in die Gleichungen (4), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \alpha_1(\bar{\alpha}_1 A_x + \bar{\alpha}_2 A_y + \bar{\alpha}_3 A_z) \\ &+ \beta_1(\bar{\beta}_1 A_x + \bar{\beta}_2 A_y + \bar{\beta}_3 A_z) \\ &+ \gamma_1(\bar{\gamma}_1 A_x + \bar{\gamma}_2 A_y + \bar{\gamma}_3 A_z) \end{aligned}\right\} \quad \text{usw.} \tag{1}$$

und

$$\left.\begin{aligned} A_\xi &= \bar{\alpha}_1(\alpha_1 A_\xi + \beta_1 A_\eta + \gamma_1 A_\zeta) \\ &+ \bar{\alpha}_2(\alpha_2 A_\xi + \beta_2 A_\eta + \gamma_2 A_\zeta) \\ &+ \bar{\alpha}_3(\alpha_3 A_\xi + \beta_3 A_\eta + \gamma_3 A_\zeta) \end{aligned}\right\} \quad \text{usw.} \tag{2}$$

Hieraus ergeben sich einschließlich der zyklischen Fortsetzungen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \beta_1\bar{\beta}_1 + \gamma_1\bar{\gamma}_1 &= 1, \\ \alpha_2\bar{\alpha}_2 + \beta_2\bar{\beta}_2 + \gamma_2\bar{\gamma}_2 &= 1, \\ \alpha_3\bar{\alpha}_3 + \beta_3\bar{\beta}_3 + \gamma_3\bar{\gamma}_3 &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2 + \alpha_3\bar{\alpha}_3 &= 1, \\ \beta_1\bar{\beta}_1 + \beta_2\bar{\beta}_2 + \beta_3\bar{\beta}_3 &= 1, \\ \gamma_1\bar{\gamma}_1 + \gamma_2\bar{\gamma}_2 + \gamma_3\bar{\gamma}_3 &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

sowie

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\bar{\alpha}_2 + \beta_1\bar{\beta}_2 + \gamma_1\bar{\gamma}_2 &= \bar{\alpha}_1\alpha_2 + \bar{\beta}_1\beta_2 + \bar{\gamma}_1\gamma_2 = 0, \\ \alpha_2\bar{\alpha}_3 + \beta_2\bar{\beta}_3 + \gamma_2\bar{\gamma}_3 &= \bar{\alpha}_2\alpha_3 + \bar{\beta}_2\beta_3 + \bar{\gamma}_2\gamma_3 = 0, \\ \alpha_3\bar{\alpha}_1 + \beta_3\bar{\beta}_1 + \gamma_3\bar{\gamma}_1 &= \text{usw.} \qquad\qquad\qquad\; = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \alpha_3\bar{\beta}_3 &= 0, \\ \beta_1\bar{\gamma}_1 + \beta_2\bar{\gamma}_2 + \beta_3\bar{\gamma}_3 &= 0, \\ \gamma_1\bar{\alpha}_1 + \gamma_2\bar{\alpha}_2 + \gamma_3\bar{\alpha}_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{usw.} \tag{6}$$

Löst man die Gleichung (4) des vorigen Paragraphen nach A_x, A_y, A_z auf, so muß man die Gleichung (3) wieder erhalten. Bezeichnet man also die Wiederholung der Operation, durch welche $\bar{\alpha}_\nu$ aus α_ν gebildet wird, indem man $\bar{\alpha}_\nu$ noch einmal überstreicht, so erhält man die einfachen Beziehungen

$$\bar{\bar{\alpha}}_\nu = \alpha_\nu, \quad \bar{\bar{\beta}}_\nu = \beta_\nu, \quad \bar{\bar{\gamma}}_\nu = \gamma_\nu, \tag{7}$$

wo $\nu = 1$, 2 oder 3 ist.

Bildet man nach Analogie der Gleichung (5) des vorigen Paragraphen eine Determinante aus den überstrichenen Kosinus und bezeichnet sie mit $\bar{D}$, so folgt:

$$\alpha_1 = \bar{\bar{\alpha}}_1 = \frac{\bar{\beta}_2\bar{\gamma}_3 - \bar{\beta}_3\bar{\gamma}_2}{\bar{D}}, \tag{8}$$

und die Ausrechnung mit den Gleichungen (6) des vorigen Paragraphen ergibt:

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1 D}{D^2 \bar{D}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

Es ist also

$$D\bar{D} = 1. \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

Eine geometrische Vorstellung von den Beziehungen der gestrichenen zu den ungestrichenen Kosinus erhält man wie folgt: Man denke sich auf den Achsen der ξ, η, ζ drei Einheitsvektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ abgeschnitten. Man denke sich ferner ein zweites Koordinatensystem der $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ errichtet, dessen Winkelkosinus gegen die x, y, z seien $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, $\bar{\beta}_1$ usw., so daß die Schemata für die Kosinus lauten:

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3,

	x	y	z
$\bar{\xi}$	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\alpha}_3$
$\bar{\eta}$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$	$\bar{\beta}_3$
$\bar{\zeta}$	$\bar{\gamma}_1$	$\bar{\gamma}_2$	$\bar{\gamma}_3$.

Die Komponentenbeträge der $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\bar{\mathfrak{p}}$ usw. in x, y, z sind

$$\begin{array}{llll} p_x = \alpha_1, & q_x = \beta_1, & \bar{p}_x = \bar{\alpha}_1, & \\ p_y = \alpha_2, & q_y = \beta_2 & \bar{p}_y = \bar{\alpha}_2 & \text{usw.} \\ \text{usw.} & & \text{usw.} & \end{array} \quad \dots\dots \quad (11)$$

Bildet man also die skalaren Produkte $(\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}})$, $(\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{q}})$ usw., so ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}) = \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2 + \alpha_3\bar{\alpha}_3 = 1, & (\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{q}}) = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \alpha_3\bar{\beta}_3 = 0, \\ (\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}) = \beta_1\bar{\beta}_1 + \beta_2\bar{\beta}_2 + \beta_3\bar{\beta}_3 = 1, & (\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{r}}) = \beta_1\bar{\gamma}_1 + \beta_2\bar{\gamma}_2 + \beta_3\bar{\gamma}_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (12)$$

usw.

Alle skalaren Produkte mit gleichlautenden Buchstaben haben den Wert Eins, alle mit ungleichen den Wert Null.

Das ist aber die Bedingung dafür [vgl. Vorbemerkung **d)**], daß $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$, $\bar{\mathfrak{q}}$, $\bar{\mathfrak{r}}$ reziprokale Vektorentripel sind. Demnach stehen die Achsen der $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ auf denen der ξ, η, ζ senkrecht, und zwar $\bar{\xi}$ auf η, ζ usw.

18. Transformation von einem rechtwinkligen System auf ein anderes.

Der Diatensor $(\mathfrak{r})$ sei im System der x, y, z durch seine neun Glieder t_{xx} usw. gegeben. Derselbe soll auf ein zweites rechtwinkliges System x', y', z' transformiert werden, wenn das Schema der Winkelkosinus lautet:

	x	y	z
x'	λ_1	λ_2	λ_3
y'	μ_1	μ_2	μ_3
z'	ν_1	ν_2	ν_3.

Die Rechnung verläuft der im folgenden Paragraphen, Gleichung (1) bis (5) durchgeführten so ähnlich, daß hier nur die Resultate angegeben werden:

$$\left.\begin{aligned} t_{x'x'} = {} & \lambda_1(\lambda_1 t_{xx} + \lambda_2 t_{xy} + \lambda_3 t_{xz}) + \lambda_2(\lambda_1 t_{yx} + \lambda_2 t_{yy} + \lambda_3 t_{yz}) \\ & + \lambda_3(\lambda_1 t_{zx} + \lambda_2 t_{zy} + \lambda_3 t_{zz}), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} t_{x'y'} = {} & \lambda_1(\mu_1 t_{xx} + \mu_2 t_{xy} + \mu_3 t_{xz}) + \lambda_2(\mu_1 t_{yx} + \mu_2 t_{yy} + \mu_3 t_{yz}) \\ & + \lambda_3(\mu_1 t_{zx} + \mu_2 t_{zy} + \mu_3 t_{zz}), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} t_{x'z'} = {} & \lambda_1(\nu_1 t_{xx} + \nu_2 t_{xy} + \nu_3 t_{xz}) + \lambda_2(\nu_1 t_{yx} + \nu_2 t_{yy} + \nu_3 t_{yz}) \\ & + \lambda_3(\nu_1 t_{zx} + \nu_2 t_{zy} + \nu_3 t_{zz}), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} t_{y'x'} = {} & \mu_1(\lambda_1 t_{xx} + \lambda_2 t_{xy} + \lambda_3 t_{xz}) + \mu_2(\lambda_1 t_{yx} + \lambda_2 t_{yy} + \lambda_3 t_{yz}) \\ & + \mu_3(\lambda_1 t_{zx} + \lambda_2 t_{zy} + \lambda_3 t_{zz}) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

usw.

Bei der Fortsetzung treten der Reihe nach μ_1, μ_2, μ_3 und ν_1, ν_2, ν_3 vor dieselben Klammern, welche in den drei ersten Gleichungen auftreten. Der transformierte Tensor τ' läßt sich auf Grund der vorstehenden Gleichungen in weit kürzerer Form darstellen. Dieselbe kann aber erst aufgestellt werden, wenn die Multiplikation von Diatensoren behandelt ist. Es sei deswegen auf die Anmerkung zu § **44** verwiesen.

19. Aufsuchung der Achsen.

Der Diatensor (τ) sei im System der x, y, z durch seine neun Glieder t_{xx}, t_{xy} usw. gegeben; seine Achsen sollen aufgesucht werden. Die unbekannten Richtungen der letzteren nennen wir ξ, η, ζ und die Kosinus der Winkel, welche sie mit den x, y, z machen, benennen wir nach dem Schema:

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3.

Sie erfüllen die Gleichungen (1) und (2) des § **16** sowie, wenn die Bezeichnungen aus § **16** und § **17** beibehalten werden, die sämtlichen Gleichungen des § **17**.

Setzen wir $(\tau)\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, so haben wir demgemäß:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \alpha_1 A_\xi + \beta_1 A_\eta + \gamma_1 A_\zeta, \\ A_y &= \alpha_2 A_\xi + \beta_2 A_\eta + \gamma_2 A_\zeta, \\ A_z &= \alpha_3 A_\xi + \beta_3 A_\eta + \gamma_3 A_\zeta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} B_\xi &= \bar{\alpha}_1 B_x + \bar{\alpha}_2 B_y + \bar{\alpha}_3 B_z, \\ B_\eta &= \bar{\beta}_1 B_x + \bar{\beta}_2 B_y + \bar{\beta}_3 B_z, \\ B_\zeta &= \bar{\gamma}_1 B_x + \bar{\gamma}_2 B_y + \bar{\gamma}_3 B_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

und endlich nach der Voraussetzung:

$$\left.\begin{aligned} B_x &= t_{xx} A_x + t_{xy} A_y + t_{xz} A_z, \\ B_y &= t_{yx} A_x + t_{yy} A_y + t_{yz} A_z, \\ B_z &= t_{zx} A_x + t_{zy} A_y + t_{zz} A_z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Hiernach ergibt sich für eine der Koordinaten von $\mathfrak{B}$, z. B. für die erste, durch Ausrechnung:

$$\left.\begin{aligned} B_\xi = {} & \bar{\alpha}_1 (t_{xx}\alpha_1 A_\xi + t_{xx}\beta_1 A_\eta + t_{xx}\gamma_1 A_\zeta + t_{xy}\alpha_2 A_\xi + t_{xy}\beta_2 A_\eta \\ & \qquad + t_{xy}\gamma_2 A_\zeta + t_{xz}\alpha_3 A_\xi + t_{xz}\beta_3 A_\eta + t_{xz}\gamma_3 A_\zeta) \\ & + \bar{\alpha}_2 (t_{yx}\alpha_1 A_\xi + t_{yx}\beta_1 A_\eta + t_{yx}\gamma_1 A_\zeta + t_{yy}\alpha_2 A_\xi + t_{yy}\beta_2 A_\eta \\ & \qquad + t_{yy}\gamma_2 A_\zeta + t_{yz}\alpha_3 A_\xi + t_{yz}\beta_3 A_\eta + t_{yz}\gamma_3 A_\zeta) \\ & + \bar{\alpha}_3 (t_{zx}\alpha_1 A_\xi + t_{zx}\beta_1 A_\eta + t_{zx}\gamma_1 A_\zeta + t_{zy}\alpha_2 A_\xi + t_{zy}\beta_2 A_\eta \\ & \qquad + t_{zy}\gamma_2 A_\zeta + t_{zz}\alpha_3 A_\xi + t_{zz}\beta_3 A_\eta + t_{zz}\gamma_3 A_\zeta). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für B_η und B_ζ erhält man, wenn man die $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$ vor den Klammern durch $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3$ und $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$ ersetzt. Sammelt man nun in jeder der Koordinaten B_ξ usw. die Faktoren von A_ξ usw., so hat man die Ausdrücke für $t_{\xi\xi}, t_{\eta\eta}$ usw. Wir setzen abkürzend:

$$\left.\begin{aligned} t_{xx}\alpha_1 + t_{xy}\alpha_2 + t_{xz}\alpha_3 &= P_1, \\ t_{yx}\alpha_1 + t_{yy}\alpha_2 + t_{yz}\alpha_3 &= P_2, \\ t_{zx}\alpha_1 + t_{zy}\alpha_2 + t_{zz}\alpha_3 &= P_3, \\ t_{xx}\beta_1 + t_{xy}\beta_2 + t_{xz}\beta_3 &= Q_1, \\ t_{yx}\beta_1 + t_{yy}\beta_2 + t_{yz}\beta_3 &= Q_2, \\ t_{zx}\beta_1 + t_{zy}\beta_2 + t_{zz}\beta_3 &= Q_3, \\ t_{xx}\gamma_1 + t_{xy}\gamma_2 + t_{xz}\gamma_3 &= R_1, \\ t_{yx}\gamma_1 + t_{yy}\gamma_2 + t_{yz}\gamma_3 &= R_2, \\ t_{zx}\gamma_1 + t_{zy}\gamma_2 + t_{zz}\gamma_3 &= R_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Dann findet sich mit dem Vorstehenden leicht:

$$\left.\begin{aligned}
t_{\xi\xi} &= \bar{\alpha}_1 P_1 + \bar{\alpha}_2 P_2 + \bar{\alpha}_3 P_3,\\
t_{\xi\eta} &= \bar{\alpha}_1 Q_1 + \bar{\alpha}_2 Q_2 + \bar{\alpha}_3 Q_3,\\
t_{\xi\zeta} &= \bar{\alpha}_1 R_1 + \bar{\alpha}_2 R_2 + \bar{\alpha}_3 R_3,\\
t_{\eta\xi} &= \bar{\beta}_1 P_1 + \bar{\beta}_2 P_2 + \bar{\beta}_3 P_3,\\
t_{\eta\eta} &= \bar{\beta}_1 Q_1 + \bar{\beta}_2 Q_2 + \bar{\beta}_3 Q_3,\\
t_{\eta\zeta} &= \bar{\beta}_1 R_1 + \bar{\beta}_2 R_2 + \bar{\beta}_3 R_3,\\
t_{\zeta\xi} &= \bar{\gamma}_1 P_1 + \bar{\gamma}_2 P_2 + \bar{\gamma}_3 P_3,\\
t_{\zeta\eta} &= \bar{\gamma}_1 Q_1 + \bar{\gamma}_2 Q_2 + \bar{\gamma}_3 Q_3,\\
t_{\zeta\zeta} &= \bar{\gamma}_1 R_1 + \bar{\gamma}_2 R_2 + \bar{\gamma}_3 R_3.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die Kosinus α_1, β_1 usw. so zu bestimmen, daß in den Gleichungen (6) alle $t_{\xi\eta}$ usw. mit ungleichen Marken zu Null werden. Zu dem Zweck nehmen wir zunächst die Gleichungen, welche P enthalten, die erste, vierte und siebente, heraus, multiplizieren die erste mit α_1, die vierte mit β_1, die siebente mit γ_1 und addieren. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 t_{\xi\xi} + \beta_1 t_{\eta\xi} + \gamma_1 t_{\zeta\xi}\\
&= (\alpha_1 \bar{\alpha}_1 + \beta_1 \bar{\beta}_1 + \gamma_1 \bar{\gamma}_1) P_1 + (\alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \beta_1 \bar{\beta}_2 + \gamma_1 \bar{\gamma}_2) P_2\\
&+ (\alpha_1 \bar{\alpha}_3 + \beta_1 \bar{\beta}_3 + \gamma_1 \bar{\gamma}_3) P_3.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Nach § **17**, Gleichung (3) und (5) bedeutet dies

$$\alpha_1 t_{\xi\xi} + \beta_1 t_{\eta\xi} + \gamma_1 t_{\zeta\xi} = P_1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit α_2, die vierte mit β_2, die siebente mit γ_2, dann mit α_3, β_3 usw., so ergibt sich auf dem gleichen Wege:

$$\alpha_2 t_{\xi\xi} + \beta_2 t_{\eta\xi} + \gamma_2 t_{\zeta\xi} = P_2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\alpha_3 t_{\xi\xi} + \beta_3 t_{\eta\xi} + \gamma_3 t_{\zeta\xi} = P_3. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Sollen nun die $t_{\eta\xi}$ usw. verschwinden, so bleiben

$$\alpha_1 t_{\xi\xi} = P_1, \qquad \alpha_2 t_{\xi\xi} = P_2, \qquad \alpha_3 t_{\xi\xi} = P_3 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

oder

$$\frac{P_1}{\alpha_1} = \frac{P_2}{\alpha_2} = \frac{P_3}{\alpha_3}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Setzt man hierin für die P ihre Werte, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{t_{xx}\alpha_1 + t_{xy}\alpha_2 + t_{xz}\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{t_{yx}\alpha_1 + t_{yy}\alpha_2 + t_{yz}\alpha_3}{\alpha_2}\\
&\qquad = \frac{t_{zx}\alpha_1 + t_{zy}\alpha_2 + t_{zz}\alpha_3}{\alpha_3}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

Man sieht schon hier, daß diese beiden Gleichungen in Verbindung mit der Relation $\alpha_1^2 + a_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ im allgemeinen genügen, um die Werte der drei α zu finden. Wendet man dasselbe Verfahren auf die zweite, fünfte und achte, sowie auf die dritte, sechste und neunte Gleichung von (6) an, so finden sich für die β und γ Gleichungen, die den vorstehenden nicht bloß analog, sondern völlig gleich sind, nur mit dem Unterschiede, daß überall β oder γ statt α steht. Die Gleichungen, welche zur Aufsuchung von β_1, γ_1 usw. dienen, sind also bis auf die Benennung der Unbekannten mit Gleichung (13) identisch. Es folgt, daß die Ausrechnung der α für die β und γ mit ausreicht, wobei natürlich, wenn kein innerer Widerspruch auftreten soll, die α dreideutig werden müssen.

Nach Gleichung (11) kann man schreiben, indem man t_ξ als vierte Unbekannte in die Rechnung aufnimmt,

$$\left.\begin{aligned} t_{xx}\alpha_1 + t_{xy}\alpha_2 + t_{xz}\alpha_3 &= \alpha_1 t_\xi, \\ t_{yx}\alpha_1 + t_{yy}\alpha_2 + t_{yz}\alpha_3 &= \alpha_2 t_\xi, \\ t_{zx}\alpha_1 + t_{zy}\alpha_2 + t_{zz}\alpha_3 &= \alpha_3 t_\xi, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} (t_{xx} - t_\xi)\alpha_1 + t_{xy}\alpha_2 + t_{xz}\alpha_3 &= 0, \\ t_{yx}\alpha_1 + (t_{yy} - t_\xi)\alpha_2 + t_{yz}\alpha_3 &= 0, \\ t_{zx}\alpha_1 + t_{zy}\alpha_2 + (t_{zz} - t_\xi)\alpha_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Eliminiert man hieraus die α, so ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} t_{xx} - t_\xi & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} - t_\xi & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} - t_\xi \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Wir nennen diese Gleichung nach ihrem Urheber die Hamiltonsche. Sie ist eine kubische Gleichung, liefert also drei Werte von t_ξ. Wie bekannt, sind diese drei Werte entweder alle drei reell oder zwei von ihnen sind konjugiert komplex. Für irgend einen reellen Wert von t_ξ berechnen sich aus (15) die Verhältnisse $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und $\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$ und mit diesen aus $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ die Werte der einzelnen α, letztere in Form von Quadraten, weil es sich nicht um Richtungen, sondern um Doppelrichtungen handelt. Sind drei reelle Wurzeln vorhanden, so entsprechen den drei Werten von t_ξ drei Systeme der α, von denen eins willkürlich als $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ein zweites als $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, das dritte als $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ zu benennen ist;

den drei Gruppen entsprechen dann die drei Werte von t_ξ, die als t_ξ, t_η und t_ζ zu benennen sind. Ist nur ein reelles t_ξ vorhanden, so erhält man für dieses drei Werte α_1, α_2, α_3, die, wie sich später zeigen wird, für die Diskussion genügen.

Stellt man Gleichung (16) in der Form einer gewöhnlichen Gleichung dritten Grades

$$t_\xi^3 - S_1 t_\xi^2 + S_{21} t_\xi - S_3 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

dar, so ergibt die Ausrechnung der Determinante für die Koeffizienten S_1, S_{21}, S_3 Ausdrücke von bemerkenswerter Symmetrie:

$$S_1 = t_{xx} + t_{yy} + t_{zz}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

$$S_{21} = \begin{vmatrix} t_{yy} & t_{zy} \\ t_{yz} & t_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{zz} & t_{xz} \\ t_{zx} & t_{xx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{xx} & t_{yx} \\ t_{xy} & t_{yy} \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad (19)$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{vmatrix} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Die Bezeichnungen S_1, S_{21}, und S_3 für die vorstehenden Ausdrücke werden ein für allemal beibehalten; der Grund dafür, daß der Koeffizient der ersten Potenz in Gleichung (17) durch besondere Markierung ausgezeichnet ist, wird später einleuchten. Die Hamiltonsche Gleichung ist von grundlegender Wichtigkeit für die affine Transformation des Raumes und wird im Zusammenhang mit dieser noch näher diskutiert.

S_1 ist, wie man sieht, die Summe der Diagonalglieder des Diatensors, S_3 wird, wie beim Tensor, als Determinante des Diatensors bezeichnet. S_1 heißt auch der erste, S_{21} der zweite Skalar, S_3 der dritte Skalar von τ.

In besonderen Fällen kann die Gleichung (17) zu einer Gleichung zweiten oder ersten Grades degenerieren. Solange nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, nehmen wir an, daß das nicht der Fall oder daß die etwaige Degeneration für die gerade vorliegende Frage belanglos sei.

20. Diatensor mit zwei oder drei gleichen Konstituenten; Versagen der Gleichung (15).

Falls zwei Konstituenten eines Diatensors gleich sind, ändert sich der Diatensor nicht, wenn man die Achsenrichtung dieser beiden Konstituenten in ihrer Ebene beliebig variiert.

Es sei etwa $t_\eta = t_\zeta$. Führt man dies in die Gleichung (9) des § **16** ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} t_{xx} &= \alpha_1\bar{\alpha}_1 t_\xi + (\beta_1\bar{\beta}_1 + \gamma_1\bar{\gamma}_1)t_\eta, \\ t_{xy} &= \alpha_1\bar{\alpha}_2 t_\xi + (\beta_1\bar{\beta}_2 + \gamma_1\bar{\gamma}_2)t_\eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

usw.

Nach § **17**, Gleichung (3) und (5) bedeutet dies:

$$\left.\begin{aligned} t_{xx} &= \alpha_1\bar{\alpha}_1 t_\xi + (1 - \alpha_1\bar{\alpha}_1)t_\eta, \\ t_{xy} &= \alpha_1\bar{\alpha}_2(t_\xi - t_\eta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

usw.

Es hängen also sämtliche Komponenten des Diatensors nur von den α ab; er ist daher invariant gegen alle Änderungen, welche sowohl α_1 wie $\bar{\alpha}_1$ usw. unverändert lassen. Wenn nun die Achsen der η und ζ sich drehen, so bleibt α_1 unverändert. Für $\bar{\alpha}_1$ aber haben wir nach § **16**, (5) und (6) in extenso:

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2}{\alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \alpha_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)} \cdot (3)$$

Dieser Ausdruck ändert sich offenbar nicht, solange die Verhältnisse

$$\frac{\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2}{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1} \quad \text{und} \quad \frac{\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3}{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}$$

unverändert bleiben.

Die allgemeine Gleichung einer durch den Nullpunkt gehenden Ebene,

$$Ax + By + Cz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

bestimmt sich nun für den Fall, daß diese Ebene die Achsen η und ζ enthalten soll, durch die Bedingungen

$$\frac{A}{C} = \frac{\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2}{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}, \quad \frac{B}{C} = \frac{\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3}{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Solange also die Achsen der η und ζ sich in dieser Ebene bewegen, ist die Gleichheit der beiden obigen Verhältnisse verbürgt, und damit die Unveränderlichkeit von $\bar{\alpha}_1$. Das gleiche gilt für $\bar{\alpha}_2$ und $\bar{\alpha}_3$, und damit ist der Satz bewiesen.

Sind alle drei Konstituenten eines Diatensors gleich, so folgt unmittelbar, daß man seine Achsen in beliebige Richtungen legen kann.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, daß die Winkel α_1, α_2, α_3 in Gleichung (15) des vorigen Paragraphen im Falle zweier reellen Achsen von gleicher Größe unbestimmt werden. Wie das zugeht, zeigt die folgende Erwägung: Man lege die Achse der x in die ungleiche Achse des Diatensors. In der Ebene der beiden gleichen Achsen gibt es jedenfalls eine Gerade, die senkrecht auf x steht. In die Doppelrichtung derselben lege man die Achse der y. Dann muß der Diatensor jede x- und y-Komponente ohne Richtungsänderung dehnen; das ist nur möglich, wenn er die Form hat:

$$(\tau) = \begin{cases} t_{xx} & 0 & t_{xz} \\ 0 & t_{yy} & t_{yz} \\ 0 & 0 & t_{zz}. \end{cases} \qquad (6)$$

Damit wird

$$S_1 = t_{xx} + t_{yy} + t_{zz}, \quad S_{21} = t_{yy}t_{zz} + t_{zz}t_{xx} + t_{xx}t_{yy},$$
$$S_3 = t_{xx}t_{yy}t_{zz},$$

also die Hamiltonsche Gleichung:

$$t_\xi^3 - (t_{xx} + t_{yy} + t_{zz})t_\xi^2 + (t_{yy}t_{zz} + t_{zz}t_{xx} + t_{xx}t_{yy})t_\xi - t_{xx}t_{yy}t_{zz} = 0. \quad (7)$$

Das ist aber die typische Form einer Gleichung, deren Wurzeln sind t_{xx}, t_{yy} und t_{zz}, und da die beiden Achsen in y und z gleich sein sollen, so hat der Diatensor die Form:

$$(\tau) = \begin{cases} t_{xx} & 0 & t_{xz} \\ 0 & t_{yy} & t_{yz} \\ 0 & 0 & t_{yy} \end{cases} \qquad (8)$$

und die Achsenwerte t_{xx}, t_{yy} und t_{yy}. Bildet man nun mit $t_\xi = t_{yy}$ die Gleichung (15), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} (t_{xx} - t_{yy})\alpha_1 + t_{xz}\alpha_3 &= 0, \\ (t_{yy} - t_{yy})\alpha_2 + t_{yz}\alpha_3 &= 0, \\ (t_{yy} - t_{yy})\alpha_3 &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

also erscheint α_3 in der Form $\frac{0}{0}$, und damit sind die betreffenden Achsenrichtungen unbestimmt.

Sind alle drei Achsen gleich, so werden offenbar alle neun Kosinus in der gleichen Art unbestimmt.

21. Invarianten.

Addiert man die Ausdrücke für die Diagonalglieder in Gleichung (9) des § **16**, so findet sich:

$$t_{xx} + t_{yy} + t_{zz} = t_\xi + t_\eta + t_\zeta \qquad (1)$$

und damit ist bewiesen, daß der Ausdruck S_1 des § **19** invariant ist.

Die neungliederigen Ausdrücke für einen Diatensor wurden bisher stets durch Transformation auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem gewonnen. Die Invarianz ist also nur für den Übergang von einem rechtwinkligen System auf ein anderes bewiesen und der kurze Ausdruck „Invarianz“ ist demgemäß hier und, solange nicht ausdrücklich das Gegenteil bewiesen wird, auch im folgenden aufzufassen als **Invarianz gegen Drehungen des rechtwinkligen Koordinatensystems, auf welches der Diatensor bezogen wird.**

Der Ausdruck S_{21} des § **19** ist gleichfalls invariant. Rechnet man den in Gleichung (19) des § **19** gegebenen Ausdruck für S_{21} mit Gleichung (9) des § **16** um und sucht die Koeffizienten einerseits von t_ξ^2, andererseits von $t_\eta t_\zeta$ zusammen, so findet sich für t_ξ^2 der Wert Null, für $t_\eta t_\zeta$ der Koeffizient

$$\begin{aligned}&(\bar\beta_2\bar\gamma_3-\bar\beta_3\bar\gamma_2)(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)\\+&(\bar\beta_3\bar\gamma_1-\bar\beta_1\bar\gamma_3)(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)\\+&(\bar\beta_1\bar\gamma_2-\bar\beta_2\bar\gamma_1)(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1).\end{aligned}$$

Nun ist nach § **16**, Gleichung (6) und § **17**, Gleichung (8)

$$\begin{aligned}\bar\beta_2\bar\gamma_3-\bar\beta_3\bar\gamma_2&=\bar D\alpha_1,\\ \beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2&=D\bar\alpha_1\end{aligned}$$

usw., also, da $D\bar D=1$, wird der Koeffizient von $t_\eta t_\zeta$

$$\alpha_1\bar\alpha_1+\alpha_2\bar\alpha_2+\alpha_3\bar\alpha_3=1,$$

also mit zyklischer Fortsetzung

$$S_{21}=t_\eta t_\zeta+t_\zeta t_\xi+t_\xi t_\eta, \qquad (2)$$

womit die Invarianz von S_{21} erwiesen ist.

Die Determinante S_3 ist gleichfalls invariant.

Beweis: Multipliziert man die aus § **16**, Gleichung (5) bekannte Determinante D mit $t_\xi t_\eta t_\zeta$, so erhält man:

$$t_\xi t_\eta t_\zeta D=\begin{vmatrix}\alpha_1 t_\xi & \beta_1 t_\eta & \gamma_1 t_\zeta\\ \alpha_2 t_\xi & \beta_2 t_\eta & \gamma_2 t_\zeta\\ \alpha_3 t_\xi & \beta_3 t_\eta & \gamma_3 t_\zeta\end{vmatrix} \qquad (3)$$

Multipliziert man diese Determinante nach den Regeln der Determinantentheorie mit der aus den überstrichenen Kosinus des § **19** gebildeten Determinante $\bar D$, so ergibt sich, da $D\bar D=1$,

$$t_\xi t_\eta t_\zeta=$$

$$\begin{vmatrix}\alpha_1\bar\alpha_1 t_\xi+\beta_1\bar\beta_1 t_\eta+\gamma_1\bar\gamma_1 t_\zeta, & \alpha_2\bar\alpha_1 t_\xi+\beta_2\bar\beta_1 t_\eta+\gamma_2\bar\gamma_1 t_\zeta, & \alpha_3\bar\alpha_1 t_\xi+\beta_3\bar\beta_1 t_\eta+\gamma_3\bar\gamma_1 t_\zeta\\ \alpha_1\bar\alpha_2 t_\xi+\beta_1\bar\beta_2 t_\eta+\gamma_1\bar\gamma_2 t_\zeta, & \alpha_2\bar\alpha_2 t_\xi+\beta_2\bar\beta_2 t_\eta+\gamma_2\bar\gamma_2 t_\zeta, & \alpha_3\bar\alpha_2 t_\xi+\beta_3\bar\beta_2 t_\eta+\gamma_3\bar\gamma_2 t_\zeta\\ \alpha_1\bar\alpha_3 t_\xi+\beta_1\bar\beta_3 t_\eta+\gamma_1\bar\gamma_3 t_\zeta, & \alpha_2\bar\alpha_3 t_\xi+\beta_2\bar\beta_3 t_\eta+\gamma_2\gamma_3 t_\zeta, & \alpha_3\bar\alpha_3 t_\xi+\beta_3\bar\beta_3 t_\eta+\gamma_3\bar\gamma_3 t_\zeta\end{vmatrix}$$

Die einzelnen Posten dieser Determinante sind identisch mit den in § **16**, Gleichung (9) gegebenen für t_{xx}, t_{xy} usw., also ist die vorstehende Determinante nichts anderes als S_3; es folgt:

$$S_3=t_\xi t_\eta t_\zeta. \qquad (4)$$

Das Bisherige läßt sich zusammenfassen in den Satz: Die Koeffizienten der Hamiltonschen Gleichung sind sämtlich invariant.

Die Größen S_1 und S_3 sind unmittelbar aus den Gliedern des gegebenen Diatensors gebildet; bei S_{21} ist das, wie sich zeigen wird, nicht der Fall. Die Invariante zweiten Grades, welche direkt aus den Diatensorgliedern gebildet werden kann, lautet:

$$J_2 = t_{xx}^2 + t_{yy}^2 + t_{zz}^2 + 2\,(t_{yz}\,t_{zy} + t_{zx}\,t_{xz} + t_{xy}\,t_{yx}) \quad . \quad . \quad (5)$$

Um ihre Eigenschaft zu beweisen, bestimme man aus denselben Gleichungen, § **16** (9), den Koeffizienten etwa von t_ξ^2 in dem vorstehenden Ausdruck. Man findet

$$(\alpha_1\bar{\alpha}_1)^2 + (\alpha_2\bar{\alpha}_2)^2 + (\alpha_3\bar{\alpha}_3)^2 + 2\,(\alpha_2\alpha_3\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_3 + \alpha_3\,\alpha_1\,\bar{\alpha}_3\,\bar{\alpha}_1 + \alpha_1\,\alpha_2\,\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2).$$

Dies ist $(\alpha_1\bar{\alpha}_1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2 + \alpha_3\bar{\alpha}_3)^2$, also 1. Zyklisch folgt, daß auch die Faktoren von t_η^2 und t_ζ^2 gleich 1 sind. Auf demselben Wege ergibt sich, daß die Faktoren von $t_\xi t_\eta$ usw. in J_2 sämtlich zu Null werden, also erhält man:

$$J_2 = t_\xi^2 + t_\eta^2 + t_\zeta^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Man beweist leicht die Gleichung $J_2 = S_1^2 - 2\,S_{21}$, welche den Zusammenhang zwischen J_2 und S_{21} herstellt.

22. Wählbarkeit; Gleichheit von Diatensoren.

Die Definition des § **15** legt den t_ξ, t_η, t_ζ keine Beschränkung auf, und die Transformation des § **16** ergibt in allen Fällen, daß $(\tau), \mathfrak{A}$ sich in Gestalt einer homogenen linearen Vektorfunktion darstellen läßt. Also: Konstituenten von beliebiger Doppelrichtung und Größe können irgend einem Diatensor zugehören.

Dasselbe gilt für die neun Komponenten, da die Darstellung des Diatensorvektorproduktes durch diese das Produkt ohne weiteres in der Form einer homogenen linearen Vektorfunktion liefert. Dabei ist indessen vorauszusetzen, daß die neun Komponenten für ein bestimmtes Koordinatensystem angegeben sind und daß man ihnen die Eigenschaft zuschreiben darf, sich nach § **18** zu transformieren.

Zwei Diatensoren sind definitionsgemäß gleich, wenn sie gleichgerichtete Achsen und auf den entsprechenden Achsen gleiche Konstituenten haben. Zwei Diatensoren sind offenbar auch dann gleich, wenn der eine aus dem anderen durch Transformation hervorgegangen ist. Es folgt, daß zwei durch ihre Komponenten gegebene Diatensoren gleich sind, wenn ihre neun Glieder in der vorgeschriebenen Anordnung und in demselben Koordinatensystem einander einzeln gleich sind. Da der Diatensor neun Glieder hat, sind zu seiner Bestimmung neun Daten erforderlich; also sind zwei Diatensoren gleich, wenn sie drei nichtkomplanare Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ in die gleichen Vektoren $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ überführen. Denn jede von diesen Bedingungen liefert drei Gleichungen, also liefern sie zusammen die neun zur Bestimmung der $t_{\mu\nu}$ erforderlichen Gleichungen.

Die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ dürfen aber nicht komplanar sein; denn wenn das der Fall wäre, könnte man einen derselben, etwa $\mathfrak{A}''$, in der Form $\mathfrak{A}'' = m\mathfrak{A} + n\mathfrak{A}'$ durch die beiden anderen ausdrücken, es wären also in Wirklichkeit nur zwei Systeme von je drei Gleichungen vorgeschrieben.

23. Konjugation, Symmetrie, Antimetrie.

Wenn Größen so beschaffen sind, daß sie sich in n Zeilen zu n Kolonnen schreiben lassen, so nennen wir zwei von ihnen konjugiert, falls die Zeilen der einen mit den Kolonnen der anderen übereinstimmen. Demgemäß heißen zwei Diatensoren τ und τ_c konjugiert, wenn

$$\tau = \begin{cases} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{cases} \quad \text{und} \quad \tau_c = \begin{cases} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz}. \end{cases} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Die Größe, welche zu einer gegebenen Größe G konjugiert ist, wird ein für allemal mit G_c bezeichnet.

Auf der Hand liegt der

Satz I: Die Konjugation ist gegenseitig:

$$(\tau_c)_c = \tau. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Sind τ und σ zwei konjugierte Diatensoren mit den Elementen t_{xx}, s_{xx} usw., so ist

$$t_{xx} = s_{xx}, \quad t_{yy} = s_{yy}, \quad t_{xy} = s_{yx} \text{ usw.} \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Transformiert man beide nach § 18 und bezeichnet die transformierten Größen durch Striche, so sieht man ohne weiteres, daß $s'_{xx} = t'_{xx}$, $s'_{yy} = t'_{yy}$ usw. Ferner ist

$$\begin{aligned} t'_{xy} &= \lambda_1(\mu_1 t_{xx} + \mu_2 t_{xy} + \mu_3 t_{xz}) + \lambda_2(\mu_1 t_{yx} + \mu_2 t_{yy} + \mu_3 t_{yz}) \\ &\quad + \lambda_3(\mu_1 t_{zx} + \mu_2 t_{zy} + \mu_3 t_{zz}), \\ s'_{yx} &= \mu_1(\lambda_1 s_{xx} + \lambda_2 s_{xy} + \lambda_3 s_{xz}) + \mu_2(\lambda_1 s_{yx} + \lambda_2 s_{yy} + \lambda_3 s_{yz}) \\ &\quad + \mu_3(\lambda_1 s_{zx} + \lambda_2 s_{zy} + \lambda_3 s_{zz}). \end{aligned}$$

Mit Gleichung (3) sind die rechten Seiten dieser Gleichungen einander gleich, also ist $s'_{yx} = t'_{xy}$ und daraus folgt zyklisch, daß auch $s'_{zx} = t'_{xz}$ usw., also ist $\sigma' = \tau'_c$, d. h.:

Bei der Transformation konjugierter Diatensoren bleibt die Konjugation erhalten; kurz ausgedrückt:

Satz II: Konjugation ist invariant.

Satz III: Konjugierte Tensoren haben die gleiche Determinante S_3; denn konjugierte Determinanten sind bekanntlich gleich. Sie haben auch gleiches S_1, weil sie die gleichen Diagonalglieder haben.

Ein Diatensor, der seinem Konjugierten gleich ist, heißt selbstkonjugiert oder symmetrisch. Die Begriffe „Tensor“ und „symmetrischer Diatensor“ sind identisch.

Aus dem obigen Satz II folgt ohne weiteres

Satz IV: Symmetrie ist invariant. Ein Tensor bleibt bei allen Transformationen symmetrisch.

Dies ergibt sich auch einfach aus den Gleichungen (9) des § **16**. Stehen die drei Achsen ξ, η, ζ senkrecht aufeinander, so ist in diesen Gleichungen $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1$ usw., und damit wird $t_{yx} = t_{xy}$ usw. Im ersten Kapitel wurde gezeigt, daß der Tensor drei rechtwinklige Achsen hat; hier ergibt sich, daß die Rechtwinkligkeit der Achsen die Symmetrie bedingt.

Auf der Hand liegt

Satz V: Konjugierte Tensoren sind einander gleich.

Ein Diatensor heißt antimetrisch, wenn er seinem Konjugierten entgegengesetzt gleich ist. Da die Diagonalglieder von τ und τ_c dieselben sind, können sie einander nur dann entgegengesetzt gleich sein, wenn sie Null sind; also muß jeder antimetrische Tensor die Form haben:

$$\left\{\begin{array}{ccc} 0 & t_1 & -t_2 \\ -t_1 & 0 & t_3 \\ t_2 & -t_3 & 0. \end{array}\right.$$

Setzt man in den Gleichungen des § **18** $t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = 0$, $t_{yx} = -t_{xy}$ usw., so findet sich $t_{x'x'} = 0$, $t_{y'x'} = -t_{x'y'}$ usw., also

Satz VI: Antimetrie ist invariant.

Aus der Gleichung (1) ergibt sich sofort

Satz VII: Die Summe zweier konjugierten Diatensoren ist stets symmetrisch, ihre Differenz ist stets antimetrisch.

Wir wenden die hier eingeführten Benennungen auch auf Diatensorvektorprodukte an: Ein solches Produkt heißt symmetrisch oder antimetrisch, wenn der in ihm enthaltene Diatensor symmetrisch oder antimetrisch ist. Zwei Diatensorvektorprodukte heißen konjugiert, wenn ihre Diatensoren konjugiert sind. Die Sätze I bis VII gelten offenbar auch für die Diatensorvektorprodukte.

24. Hamiltonsche Gleichung des Tensors.

Daß drei reelle, aufeinander senkrecht stehende Hauptachsen stets zu einem symmetrischen Ausdruck für den Diatensor führen, wurde oben gezeigt. Es gilt auch der umgekehrte Satz: Die Hamiltonsche Gleichung eines symmetrischen Tensors hat stets drei reelle Lösungen. Denn sie lautet

$$\begin{vmatrix} (t_{xx}-t_\xi) & t_{xy} & t_{zx} \\ t_{xy} & (t_{yy}-t_\xi) & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{yz} & (t_{zz}-t_\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

Eine Gleichung von dieser Gestalt hat aber stets drei reelle Wurzeln.

Der Beweis für diese Behauptung findet sich in der analytischen Geometrie bei Gelegenheit der Aufsuchung der Hauptachsen eines Ellipsoids. Er lautet kurz zusammengefaßt: Man multipliziere die drei Zeilen der Determinante der Reihe nach mit t_{yz}, t_{zx} und t_{xy}, subtrahiere hierauf von der ersten Zeile die zweite, von der zweiten die dritte und lasse die dritte unverändert, so kommt

$$\begin{vmatrix} (t_{xx}-t_\xi)\,t_{yz}-t_{xy}t_{zx} & t_{xy}t_{yz}-(t_{yy}-t_\xi)\,t_{zx} & 0 \\ 0 & (t_{yy}-t_\xi)\,t_{zx}-t_{yz}t_{xy} & t_{yz}t_{zx}-(t_{zz}-t_\xi)\,t_{xy} \\ t_{zx}t_{xy} & t_{yz}t_{xy} & (t_{zz}-t_\xi)\,t_{xy} \end{vmatrix} = 0.$$

Nun dividiere man die erste Kolonne mit t_{yz}, die zweite mit t_{zx}, die dritte mit t_{xy}, so findet sich:

$$\begin{vmatrix} t_{xx}-t_\xi-\dfrac{t_{xy}t_{zx}}{t_{yz}} & \dfrac{t_{xy}t_{yz}}{t_{zx}}-(t_{yy}-t_\xi) & 0 \\ 0 & t_{yy}-t_\xi-\dfrac{t_{yz}t_{xy}}{t_{zx}} & \dfrac{t_{yz}t_{zx}}{t_{xy}}-(t_{zz}-t_\xi) \\ \dfrac{t_{xy}t_{zx}}{t_{yz}} & \dfrac{t_{yz}t_{xy}}{t_{zx}} & t_{zz}-t_\xi \end{vmatrix} = 0.$$

Man setze abkürzend:

$$\frac{t_{xy}\,t_{zx}}{t_{yz}} = a, \qquad \frac{t_{xy}\,t_{yz}}{t_{zx}} = b, \qquad \frac{t_{yz}\,t_{zx}}{t_{xy}} = c,$$

$$t_{xx} - a = L, \qquad t_{yy} - b = M, \qquad t_{zz} - c = N;$$

dann findet sich:

$$\begin{vmatrix} L - t_\xi & t_\xi - M & 0 \\ 0 & M - t_\xi & t_\xi - N \\ a & b & N + c - t_\xi \end{vmatrix} = 0.$$

Führt man diese Determinante aus, so ergibt sich leicht die Form:

$$\frac{a}{L - t_\xi} + \frac{b}{M - t_\xi} + \frac{c}{N - t_\xi} + 1 = 0,$$

und hierin haben die drei Größen a, b, c entweder alle drei das positive oder alle drei das negative Vorzeichen. Damit findet sich leicht, daß das Polynom der Gleichung dreimal im Reellen durch Null geht, wenn man dem t_ξ der Reihe nach die Werte $-\infty$, L, M, N, ∞ gibt, und damit ist der Beweis erbracht.

25. Imaginäre Achsen des antimetrischen Diatensors.

Jeder antimetrische Diatensor hat zwei imaginäre Achsen.

Beweis: Für den Diatensor

$$\left\{ \begin{matrix} 0 & t_1 & -t_2 \\ -t_1 & 0 & t_3 \\ t_2 & -t_3 & 0 \end{matrix} \right.$$

findet sich mit den Gleichungen (18), (19) und (20) des § **19** sofort

$$S_1 = 0, \quad S_3 = 0, \quad S_{21} = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2;$$

die Hamiltonsche Gleichung degeneriert also für ihn zu

$$t_\xi^2 + (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) = 0,$$

und damit ist offenbar der Satz bewiesen.

26. Identität eines vektoriellen Produktes mit einem antimetrischen Diatensorvektorprodukt.

Bekanntlich ist

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathfrak{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathfrak{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathfrak{k}. \quad (1)$$

Das Produkt auf der rechten Seite dieser Gleichung ist offenbar identisch mit dem Diatensorvektorprodukt $(\tau)\mathfrak{B}$, wenn

$$\tau = \left\{ \begin{matrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{matrix} \right. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

gesetzt wird; also jedes vektorielle Produkt kann als antimetrisches Diatensorvektorprodukt ausgedrückt werden und umgekehrt kann jedes antimetrische Diatensorvektorprodukt in Form eines vektoriellen Produktes geschrieben werden.

Dieser Satz läßt sich auch schreiben in der Form:

$$[\mathfrak{A} = \begin{cases} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0, \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wenn wir durch die vor $\mathfrak{A}$ gesetzte eckige Klammer konventionell andeuten, daß der Vektor $\mathfrak{A}$ vektoriell mit einem nachfolgenden Vektor multipliziert werden soll. Das Zeichen $\mathfrak{A}]$ würde entsprechend anzeigen, daß der Vektor $\mathfrak{A}$ mit einem vorangehenden Vektor vektoriell multipliziert werden soll. Nach dem Satze, daß der antimetrische Diatensor seinem Konjugierten entgegengesetzt gleich ist, ordnen sich dann die vektoriellen Produkte dem Konjugationsbegriff unter. Es ist $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_c$.

Ist der Diatensor in der Form

$$\begin{cases} 0 & t_{xy} & -t_{zx} \\ -t_{xy} & 0 & t_{yz} \\ t_{zx} & -t_{yz} & 0 \end{cases}$$

gegeben, so zeigt der Vergleich mit Gleichung (3), daß der entsprechende Vektor $\mathfrak{A}$ die Gestalt hat:

$$\mathfrak{A} = -t_{yz}\mathfrak{i} - t_{zx}\mathfrak{j} - t_{xy}\mathfrak{k}.$$

Daraus, daß der antimetrische Diatensor durch einen Vektor vertreten werden kann, folgt, daß die allgemeinen Transformationsformeln sich für ihn entsprechend vereinfachen müssen. In der Tat, setzt man in den Gleichungen des § 18

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = 0 \quad \text{und} \quad t_{yx} = -t_{xy},\ t_{xz} = -t_{zx},\ t_{zy} = -t_{yz},$$

so erhält man außer dem selbstverständlichen Ergebnis $t_{x'x'} = t_{y'y'} = t_{z'z'} = 0$:

$$\begin{aligned} t_{x'y'} &= t_{yz}(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) + t_{zx}(\lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3) + t_{xy}(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) \\ &= \nu_1 t_{yz} + \nu_2 t_{zx} + \nu_3 t_{xy}. \end{aligned}$$

Ebenso findet sich:

$$\begin{aligned} t_{z'x'} &= \mu_1 t_{yz} + \mu_2 t_{zx} + \mu_3 t_{xy}, \\ t_{y'z'} &= \lambda_1 t_{yz} + \lambda_2 t_{zx} + \lambda_3 t_{xy}. \end{aligned}$$

Die Größen t_{yz}, t_{zx}, t_{xy} transformieren sich also wie Vektoren nach dem Schema:

	t_{yz}	t_{zx}	t_{xy}
$t_{y'z'}$	λ_1	λ_2	λ_3
$t_{z'x'}$	μ_1	μ_2	μ_3
$t_{x'y'}$	ν_1	ν_2	ν_3 ,

wenn λ_1, μ_1 usw. die Kosinus der Winkel sind, welche zwei rechtwinklige Koordinatensysteme miteinander machen.

27. Ellipsoide.

Man kann zu einem durch seine neun Glieder gegebenen Diatensor ein „Ellipsoid" konstruieren, welches dem Tensorellipsoid in § **3** entspricht. Dasselbe würde die Gleichung haben:

$$\left.\begin{aligned}2\Phi = t_{xx}x^2 + t_{yy}y^2 + t_{zz}z^2 + (t_{yz} + t_{zy})yz + (t_{zx} + t_{xz})zx\\ + (t_{xy} + t_{yx})xy \pm 1 = 0.\end{aligned}\right\} . \quad (1)$$

Es hat aber keine praktische Bedeutung, da sich eine Konstruktion, welche der im § **3** für einen Tensor gegebenen analog wäre, für den Diatensor nicht geben läßt.

Man kann ferner für den Diatensor auch ein Deformationsellipsoid konstruieren. Denkt man sich alle möglichen Vektoren $\mathfrak{v}$ vom Betrage 1 an den Anfangspunkt 0 angeheftet, so bilden ihre Endpunkte eine Kugel um 0, die im System der x, y, z die Gleichung hat:

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1. \quad (2)$$

Transformiert man diese nach § **16** auf das dortige System der ξ, η, ζ, so nimmt sie die Form an:

$$v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\zeta^2 + 2v_\eta v_\zeta \cos\zeta,\eta + 2v_\zeta v_\xi \cos\xi,\zeta + 2v_\xi v_\eta \cos\eta,\xi = 1. \quad (3)$$

Multipliziert man nun irgend ein $\mathfrak{v}$ mit dem Diatensor τ, dessen Konstituenten t_ξ, t_η, t_ζ sind, und nennt man das Diatensorvektorprodukt $\mathfrak{w}$, so ist

$$\mathfrak{w}_\xi = t_\xi \mathfrak{v}_\xi, \qquad \mathfrak{w}_\eta = t_\eta \mathfrak{v}_\eta, \qquad \mathfrak{w}_\zeta = t_\zeta \mathfrak{v}_\zeta. \quad (4)$$

Damit erhält man aus (3):

$$\left.\begin{aligned}\frac{w_\xi^2}{t_\xi^2} + \frac{w_\eta^2}{t_\eta^2} + \frac{w_\zeta^2}{t_\zeta^2} + 2\frac{w_\eta w_\zeta}{t_\eta t_\zeta}\cos\eta,\zeta + 2\frac{w_\zeta w_\xi}{t_\zeta t_\xi}\cos\zeta,\xi\\ + 2\frac{w_\xi w_\eta}{t_\xi t_\eta}\cos\xi,\eta = 1.\end{aligned}\right\} . \quad (5)$$

Das ist die Gleichung eines Ellipsoids; aus der Kugel ist also ein Ellipsoid, das „Deformationsellipsoid“, geworden. Auch dieses Ellipsoid hat vorerst nur die Bedeutung, daß es eine Vorstellung gibt, da die Beziehung zwischen ihm und dem Diatensor keine gegenseitig eindeutige ist. Man sieht sofort, daß es zugleich das Dehnungsellipsoid desjenigen Tensors ist, dessen Konstituenten in seine Hauptachsen fallen und Werte haben, die gleich den Längen seiner halben Hauptachsen sind. Man braucht auch nur drei beliebige nichtkomplanare Durchmesser des Ellipsoids zu ziehen und willkürlich festzusetzen, daß etwa ihre positiven Hälften die drei Konstituenten eines Diatensors darstellen sollen; dann gehört das Ellipsoid zu diesem Diatensor als Deformationsellipsoid. Insofern dasselbe Ellipsoid zu zwei verschiedenen Diatensoren gehört, entspricht der gleiche Durchmesser desselben im allgemeinen zwei verschiedenen Durchmessern der Einheitskugel.

28. Hilfsgrößen I; charakteristische Vektoren des Diatensors.

Ist der Diatensor

$$\left\{\begin{matrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{matrix}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gegeben, so bilden wir zwei Vektorentripel:

Erstens

$$\left.\begin{aligned} t_{xx}\mathfrak{i} + t_{xy}\mathfrak{j} + t_{xz}\mathfrak{k} &= \mathfrak{a}, \\ t_{yx}\mathfrak{i} + t_{yy}\mathfrak{j} + t_{yz}\mathfrak{k} &= \mathfrak{b}, \\ t_{zx}\mathfrak{i} + t_{zy}\mathfrak{j} + t_{zz}\mathfrak{k} &= \mathfrak{c}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Zweitens

$$\left.\begin{aligned} t_{xx}\mathfrak{i} + t_{yx}\mathfrak{j} + t_{zx}\mathfrak{k} &= \mathfrak{a}_c, \\ t_{xy}\mathfrak{i} + t_{yy}\mathfrak{j} + t_{zy}\mathfrak{k} &= \mathfrak{b}_c, \\ t_{xz}\mathfrak{i} + t_{yz}\mathfrak{j} + t_{zz}\mathfrak{k} &= \mathfrak{c}_c. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Wir nennen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Zeilenvektoren, $\mathfrak{a}_c$, $\mathfrak{b}_c$, $\mathfrak{c}_c$ die Kolonnenvektoren des Diatensors (τ). Diese Vektoren knüpfen nicht bloß den Diatensor an eine geometrische Vorstellung an; sie haben auch mancherlei wertvolle Eigenschaften und finden infolgedessen öfters Verwendung. Zunächst geben sie Veranlassung zu einer vereinfachten Schreibweise des Diatensors, die vielfach bequem ist. Setzt man die Gleichungen (2) und (3) voraus, so ist offenbar $t_{xx} = a_x$, $t_{xy} = a_y$ usw.; der Tensor τ kann also geschrieben werden:

$$\tau = \begin{cases} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z. \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Da sonach der Diatensor durch die drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ vollständig bestimmt ist, können wir ihn auch schreiben:

$$(\tau) = \tau\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Für den konjugierten Diatensor folgt dann sofort

$$(\tau)_c = \tau\{\mathfrak{a}_c, \mathfrak{b}_c, \mathfrak{c}_c\}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Es ergeben sich ferner folgende Sätze: Das Parallelepiped aus den drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ hat bekanntlich [vgl. Vorbemerkung $\mathfrak{b}$)] den Inhalt:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Dies ist aber die Determinante S_3 unseres Diatensors τ, also

Satz I:

$$S_3 = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

„Die Determinante S_3 gibt den Inhalt des aus den Zeilenvektoren gebildeten Parallelepipeds an."

Da konjugierte Determinanten einander gleich sind, gibt S_3 auch den Inhalt des Parallelepipeds aus den Kolonnenvektoren an. In Gleichung (7) liegt zugleich der Beweis, daß die beiden Parallelepipede $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{a}_c\,\mathfrak{b}_c\,\mathfrak{c}_c)$ inhaltlich invariant sind.

Die beiden Parallelepipede sind identisch, wenn der Diatensor symmetrisch ist; anderenfalls haben sie zwar gleichen Inhalt, aber verschiedene Lage.

Ferner: Ist $\mathfrak{v}$ irgend ein Vektor, so ist, wenn der Diatensor (τ) in der Form (4) geschrieben wird:

$$\left.\begin{aligned} \tau\mathfrak{v} = {} & (a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z)\,\mathfrak{i} \\ & + (b_x v_x + b_y v_y + b_z v_z)\,\mathfrak{j} \\ & + (c_x v_x + c_y v_y + c_z v_z)\,\mathfrak{k}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

das heißt

Satz II:

$$\tau\mathfrak{v} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{i} + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{j} + (\mathfrak{c}\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{k}. \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

„Das Diatensorvektorprodukt $\tau\mathfrak{v}$ läßt sich darstellen als Summe von drei Komponenten, deren Beträge die skalaren Produkte aus den Zeilenvektoren und dem Argument $\mathfrak{v}$ sind."

29. Bemerkung über die Tripelprodukte erster Art.

Ist ein Tripelprodukt von der Gestalt $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ gegeben, so bietet die Vektoralgebra kein Mittel, den einen der beiden in der Klammer stehenden Faktoren, etwa $\mathfrak{C}$, herauszusetzen. Die letzte Gleichung des vorigen Paragraphen enthält auf der rechten Seite drei derartige Tripelprodukte, und auf der linken Seite ist $\mathfrak{v}$ herausgesetzt. Besagte Gleichung deutet also an, daß man mit Hilfe von Diatensoren die Aufgabe lösen kann, aus einem Tripelprodukt $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ den einen in der Klammer stehenden Faktor, etwa $\mathfrak{C}$, herauszusetzen; das geschieht in der Tat auf folgende einfache Weise: Zerlegt man das skalare Produkt in seine drei Summanden, und den Vektor $\mathfrak{A}$ in seine drei Achsenkomponenten, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}&(A_x\mathfrak{i}+A_y\mathfrak{j}+A_z\mathfrak{k})(B_xC_x+B_yC_y+B_zC_z)\\ &=(A_xB_xC_x+A_xB_yC_y+A_xB_zC_z)\,\mathfrak{i}\\ &+(A_yB_xC_x+A_yB_yC_y+A_yB_zC_z)\,\mathfrak{j}\\ &+(A_zB_xC_x+A_zB_yC_y+A_zB_zC_z)\,\mathfrak{k}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Setzt man also:

$$\tau=\begin{cases}A_xB_x & A_xB_y & A_xB_z\\ A_yB_x & A_yB_y & A_yB_z\\ A_zB_x & A_zB_y & A_zB_z,\end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so ist

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})=(\tau)\,\mathfrak{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und damit die Aufgabe gelöst. Man sieht, daß der zur Lösung dienende Diatensor im allgemeinen asymmetrisch ist.

30. Hilfsgrößen II; der Kodiatensor.

In der Determinante des Diatensors,

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix},$$

gehört bekanntlich zu jedem Glied eine Adjunkte, welche gebildet wird, indem man die Zeile und Kolonne des fraglichen Gliedes ausschließt und die übrig bleibenden Elemente in der gegebenen Stellung zu einer Subdeterminante zusammenfügt. Wir nehmen diese Adjunkten, versehen aber diejenigen, welche zu den Größen a_y, b_x, b_z und c_y gehören, mit negativem Vorzeichen[1]) und be-

[1]) Das Kriterium für die Vorzeichen spricht sich am einfachsten aus, wenn man die obige Determinante markiert wie folgt:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Es werden dann die Adjunkten derjenigen Glieder negativ genommen, deren Marken eine ungerade Summe haben.

zeichnen dann die zu a_x gehörige Größe mit $\bar{a}_x$, die zu b_x gehörige mit $\bar{b}_x$ usw. In extenso sind also

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= \begin{vmatrix} b_y b_z \\ c_y c_z \end{vmatrix}, & \bar{a}_y &= -\begin{vmatrix} b_x b_z \\ c_x c_z \end{vmatrix}, & \bar{a}_z &= \begin{vmatrix} b_x b_y \\ c_x c_y \end{vmatrix}, \\
\bar{b}_x &= -\begin{vmatrix} a_y a_z \\ c_y c_z \end{vmatrix}, & \bar{b}_y &= \begin{vmatrix} a_x a_z \\ c_x c_z \end{vmatrix}, & \bar{b}_z &= -\begin{vmatrix} a_x a_y \\ c_x c_y \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad (1) \\
\bar{c}_x &= \begin{vmatrix} a_y a_z \\ b_y b_z \end{vmatrix}, & \bar{c}_y &= -\begin{vmatrix} a_x a_z \\ b_x b_z \end{vmatrix}, & \bar{c}_z &= \begin{vmatrix} a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Da die Größen $\bar{a}_x$, $\bar{a}_y$ usw. sich zum Teil von den Adjunkten durch das abgeänderte Vorzeichen unterscheiden, kann man sie nicht wohl als Adjunkten bezeichnen. Wir nennen sie nach einem Vorschlag von Gibbs die Kofaktoren, so daß also $\bar{a}_x$ der Kofaktor von a_x, $\bar{b}_x$ der Kofaktor von b_x heißt, usw.

Aus den Kofaktoren bilden wir nun einen Diatensor, der, wenn der ursprüngliche Diatensor τ heißt, mit τ_2 bezeichnet wird. Es soll also sein

$$\tau_2 = \begin{cases} \bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ \bar{b}_x & \bar{b}_y & \bar{b}_z \\ \bar{c}_x & \bar{c}_y & \bar{c}_z . \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dieser Diatensor heißt im Anschluß an das Wort „Kofaktoren" der Kodiatensor von τ. Er hat eine Reihe von wichtigen Eigenschaften.

Satz I:

Ein Blick auf die Gleichung (19) des § **19** zeigt: Der Koeffizient S_{21} der Hamiltonschen Gleichung ist die Summe der Diagonalglieder (erster Skalar) des Kodiatensors.

Daher stammt die Markierung dieses Gliedes.

Die Determinante des Kodiatensors ist mit S_{23} zu bezeichnen. Schreibt man sie in extenso hin, so lautet sie:

$$\left.\begin{aligned}
&(b_y c_z - b_z c_y)\{(c_z a_x - c_x a_z)(a_x b_y - a_y b_x) - (a_z b_x - a_x b_z)(c_x a_y - c_y a_x)\} \\
+&(b_z c_x - b_x c_z)\{(c_x a_y - c_y a_x)(a_y b_z - a_z b_y) - (a_x b_y - a_y b_x)(c_y a_z - c_z a_y)\} \\
+&(b_x c_y - b_y c_x)\{(c_y a_z - c_z a_y)(a_z b_x - a_x b_z) - (a_y b_z - a_z b_y)(c_z a_x - c_x a_z)\}.
\end{aligned}\right\} (3)$$

Entnimmt man daraus die Faktoren von a_x^2 und $a_x a_y$, so findet sich:

$$a_x^2 (b_y c_z - b_z c_y)^2 + 2\, a_x a_y (b_y c_z - b_z c_y)(b_z c_x - b_x c_z).$$

Daraus ergeben sich zyklisch die weiteren Posten

$$a_y^2(b_z c_x - b_x c_z)^2 + 2\,a_y a_z(b_z c_x - b_x c_z)(b_x c_y - b_y c_x),$$
$$a_z^2(b_x c_y - b_y c_x)^2 + 2\,a_z a_x(b_x c_y - b_y c_x)(b_y c_z - b_z c_y).$$

Die vorstehenden sechs Posten ergeben, wenn man sie addiert, das genaue Quadrat von

$$a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x),$$

und dies ist die Determinante S_3 des ursprünglichen Diatensors τ, also folgt

Satz II:

$$S_{2\,3} = S_3^2. \quad \ldots \quad (4)$$

Eine interessante Vereinfachung für die Schreibweise des Kodiatensors ergibt sich aus folgendem: Schreibt man ihn hin, indem man die Kofaktoren ausrechnet, so lautet er:

$$\tau_2 = \begin{cases} b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \\ c_y a_z - c_z a_y & c_z a_x - c_x a_z & c_x a_y - c_y a_x \\ a_y b_z - a_z b_y & a_z b_x - a_x b_z & a_x b_y - a_y b_x. \end{cases} \quad \ldots \quad (5)$$

In der ersten Zeile dieses Ausdruckes stehen die drei Komponentenbeträge von $[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]$, in der zweiten diejenigen von $[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]$, in der dritten diejenigen von $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$. Also läßt sich der Kodiatensor schreiben:

$$\tau_2 = \tau\{[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}],\ [\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}],\ [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\}. \quad \ldots \quad (6)$$

Versteht man nun [vgl. Vorbemerkung **d**)] unter $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die zu $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ reziprokalen Vektoren, so ist, wie bekannt, $[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}] = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{a}'$ usw. Also ist

$$\tau_2 = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,\tau\{\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}'\}. \quad \ldots \quad (7)$$

Weitere Beziehungen des Kodiatensors ergeben sich im Anschluß hieran später. Seine wichtigste Eigenschaft aber geht aus folgender Betrachtung hervor. Es seien $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ irgend zwei Vektoren, dann ist, wie in § 28 gezeigt wurde,

$$\tau\,\mathfrak{u} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{u})\,\mathfrak{i} + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{u})\,\mathfrak{j} + (\mathfrak{c}\,\mathfrak{u})\,\mathfrak{k}, \quad \ldots \quad (8)$$
$$\tau\,\mathfrak{v} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{i} + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{j} + (\mathfrak{c}\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{k}, \quad \ldots \quad (9)$$

und damit

$$[\tau\,\mathfrak{u},\ \tau\,\mathfrak{v}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{u}) & (\mathfrak{b}\,\mathfrak{u}) & (\mathfrak{c}\,\mathfrak{u}) \\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) & (\mathfrak{b}\,\mathfrak{v}) & (\mathfrak{c}\,\mathfrak{v}) \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (10)$$

Die x-Komponente dieses Ausdruckes ist

$$\left.\begin{aligned}[\tau\mathfrak{u},\ \tau\mathfrak{v}]_x = \mathfrak{i}\{&(b_x u_x + b_y u_y + b_z u_z)(c_x v_x + c_y v_y + c_z v_z) \\ &- (b_x v_x + b_y v_y + b_z v_z)(c_x u_x + c_y u_y + c_z u_z)\}.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Andererseits ist

$$\tau_2[\mathfrak{u}\mathfrak{v}] = ([\mathfrak{b}\mathfrak{c}],[\mathfrak{u}\mathfrak{v}])\mathfrak{i} + ([\mathfrak{c}\mathfrak{a}],[\mathfrak{u}\mathfrak{v}])\mathfrak{j} + ([\mathfrak{a}\mathfrak{b}],[\mathfrak{u}\mathfrak{v}])\mathfrak{k}; \quad (12)$$

die x-Komponente dieses Ausdruckes ist

$$\left.\begin{aligned}\tau_{2x}[\mathfrak{u}\mathfrak{v}] &= \mathfrak{i}([\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\mathfrak{u}\mathfrak{v}]) \\ &= \mathfrak{i}\{(b_y c_z - b_z c_y)(u_y v_z - u_z v_y) \\ &\quad + (b_z c_x - b_x c_z)(u_z v_x - u_x v_z) \\ &\quad + (b_x c_y - b_y c_x)(u_x v_y - u_y v_x)\}.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Man überzeugt sich nun leicht, daß die rechte Seite dieser Gleichung mit derjenigen von Gleichung (11) genau übereinstimmt. Da das gleiche zyklisch in y und z gilt, folgt

$$\tau_2[\mathfrak{u}\mathfrak{v}] = [\tau\mathfrak{u},\ \tau\mathfrak{v}]. \quad (14)$$

Nun ist $[\mathfrak{u}\mathfrak{v}]$ das (vektorielle) Parallelogramm mit den Seiten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$. $[\tau\mathfrak{u},\ \tau\mathfrak{v}]$ ist das entsprechende Parallelogramm aus den transformierten Vektoren $\tau\mathfrak{u}$ und $\tau\mathfrak{v}$; also, da $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ ganz beliebig sind, besagt Gleichung (14):

Satz III: „Multipliziert man irgend zwei Vektoren mit dem Diatensor τ, so multipliziert man gleichzeitig das aus den beiden Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ gebildete Parallelogramm mit τ_2, und zwar, da Gleichung (14) vektoriell ist, nicht bloß bezüglich des Flächeninhaltes, sondern auch bezüglich der Stellung des Vektors, welcher diesen Flächeninhalt darstellt."

Es ist bemerkenswert, daß hiernach ein und dieselbe gerichtete Länge eventuell verschieden transformiert wird, je nachdem sie einen polaren oder axialen Vektor (Verschiebung oder Fläche) darstellt. Multiplizieren sich die polaren Vektoren mit τ, so werden die aus ihnen gebildeten axialen mit τ_2 multipliziert.

Sind zwei Diatensoren konjugiert, so ist das b_x des ersten gleich dem a_y des zweiten usw. Geht man damit in Gleichung (5) ein, so findet sich leicht der

Satz IV: Konjugierte Diatensoren haben konjugierte Kodiatensoren. Und daraus folgt weiter

Satz V: Der Kodiatensor eines Tensors ist ein Tensor.

31. Der Diatensor als Prä- und Postfaktor.

In § **26** wurde darauf hingewiesen, daß $[\mathfrak{v}\mathfrak{A}]$ als $[\mathfrak{A}\mathfrak{v}]_c$ aufgefaßt werden kann. Diese Ausdehnung des Konjugationsbegriffes hat eine weitgehende Folge. Da nämlich $[\mathfrak{A}$ ersetzt werden kann durch einen antimetrischen Diatensor τ, so folgt: Schreibt man $[\mathfrak{v}\mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{v}]_c$, so hat man folgerichtigerweise auch zu schreiben $\mathfrak{v}\tau = (\tau\mathfrak{v})_c$, und daraus folgt $\mathfrak{v}\tau = -\tau\mathfrak{v}$, d. h. das Diatensorvektorprodukt ist im vorliegenden Fall nicht kommutativ. Wir nehmen diese Folgerung nicht nur an, sondern dehnen sie auf alle Diatensoren aus, indem wir festsetzen: Es soll allgemein sein

$$\mathfrak{v}\tau = (\tau\mathfrak{v})_c.$$

Gibbs hat eine für diesen Fall recht brauchbare Terminologie eingeführt. Von den beiden Faktoren, aus denen ein Produkt besteht, nennt er den zuerst geschriebenen den Präfaktor, den nachfolgenden den Postfaktor. Die vorstehende Festsetzung lautet dann in Worten: Ein als Postfaktor stehender Diatensor hat dieselbe Bedeutung wie sein als Präfaktor stehender Konjugierter. Den mit dieser neuen Eigenschaft ausgerüsteten Diatensor bezeichnen wir von jetzt ab in der Regel mit dem Buchstaben Φ und reservieren die Buchstaben T und τ für die bald auftretenden Teile desselben. Die soeben getroffene Festsetzung ist dann zu schreiben:

$$\mathfrak{v}\Phi = (\Phi\mathfrak{v})_c \quad \text{und} \quad \Phi\mathfrak{v} = (\mathfrak{v}\Phi)_c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bisher wurden die Diatensoren stillschweigend aber mit Absicht ausschließlich als Präfaktoren geschrieben. Sie werden auch später für die wichtigsten Anwendungen so geführt werden, aber die aus Gleichung (1) gegebenen Beziehungen erweisen sich, namentlich für zwischenliegende Sätze und Beweise, als vielfach brauchbar.

Zunächst entsteht die Frage, ob die bisher bewiesenen Sätze auch dann noch gültig sind, wenn der Diatensor als Postfaktor steht. Soweit sie sich auf den allein hingeschriebenen Diatensor beziehen, ist das offenbar der Fall, aber ein Teil unserer Sätze wurde durch Rekurs auf das Diatensorvektorprodukt gewonnen, vor allem die Transformationsgleichungen. Es ist daher zu fragen, ob diese gültig bleiben.

Es sei Φ ein als Präfaktor gebrauchter Diatensor und Φ' derselbe auf ein anderes Koordinatensystem transformiert. Für jedes Argument ist dann $\Phi'\mathfrak{v}$ sachlich identisch mit $\Phi\mathfrak{v}$.

Ist nun $\mathfrak{v}\Phi$ zu transformieren, so schreiben wir statt dessen $(\Phi\mathfrak{v})_c$. $\Phi\mathfrak{v}$ transformiert sich nach § 18 und wird zu $\Phi'\mathfrak{v}$. Setzt man in $\Phi'\mathfrak{v}$ nun $t_{y'x'}$

an die Stelle von $t_{x'y'}$ usw., so erhält man $(\Phi'\mathfrak{v})_c$ und nach Gleichung (1) ist dies $\mathfrak{v}\Phi'$, das heißt: $\mathfrak{v}\Phi'$ erhält man aus $\mathfrak{v}\Phi$ durch dieselbe Transformation, durch welche man aus $\Phi\mathfrak{v}$ erhält $\Phi'\mathfrak{v}$; mit anderen Worten: der Postfaktor Φ transformiert sich ebenso wie der Präfaktor Φ. Damit bleiben offenbar auch die Sätze der § **19**, **20**, **23** für den als Postfaktor gebrauchten Diatensor erhalten.

Ist Φ ein Tensor T, so leuchtet ohne weiteres ein, daß

$$\mathfrak{v}T = T\mathfrak{v}.$$

Ist τ ein antimetrischer Diatensor, so ist entsprechend $\mathfrak{v}\tau = -\tau\mathfrak{v}$.

32. Produkt $\mathfrak{u}\Phi\mathfrak{v}$.

Da sowohl $\Phi\mathfrak{v}$ wie $\mathfrak{u}\Phi$ Vektoren sind, kann man beide weiter mit einem Vektor multiplizieren, und zwar sowohl skalar wie vektoriell. Für die skalare Multiplikation ergibt sich eine einfache Beziehung. Es ist nämlich, wenn $\Phi = \Phi\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$,

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{u}, \Phi\mathfrak{v}) = {} & (a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z) u_x \\ & + (b_x v_x + b_y v_y + b_z v_z) u_y \\ & + (c_x v_x + c_y v_y + c_z v_z) u_z\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{u}\Phi, \mathfrak{v}) = {} & (a_x u_x + b_x u_y + c_x u_z) v_x \\ & + (a_y u_x + b_y u_y + c_y u_z) v_y \\ & + (a_z u_x + b_z u_y + c_z u_z) v_z.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Der Vergleich zeigt, daß bei vollständiger Ausrechnung die Kolonnen von Gleichung (2) mit den Zeilen von (1) übereinstimmen. Also ist

$$(\mathfrak{u}, \Phi\mathfrak{v}) = (\mathfrak{u}\Phi, \mathfrak{v}), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und man kann für beide das einfache gemeinschaftliche Zeichen

$$\mathfrak{u}\Phi\mathfrak{v}$$

einführen.

Ferner ist, wie leicht zu beweisen,

$$\mathfrak{u}\Phi\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\Phi_c\mathfrak{u}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

33. Vollständige und unvollständige Diatensoren.

Wir kommen nun auf die am Schluß von § **19** gemachte Bemerkung zurück. Ein Diatensor, dessen Hamiltonsche Gleichung nicht zu einer Gleichung von geringerem als dem dritten Grade degeneriert, heißt vollständig, ein solcher, bei dem Degeneration eintritt, heißt unvollständig. Die Degeneration kann offenbar zwei Grade haben: Ist $S_3 = 0$ und $S_{21} \neq 0$, so wird die Hamiltonsche Gleichung zu einer Gleichung zweiten Grades; der Diatensor heißt dann planar. Ist gleichzeitig $S_3 = 0$ und $S_{21} = 0$, so wird die Hamiltonsche Gleichung linear, der Diatensor heißt dann linear.

Da die Invarianz der Größen S_3 und S_{21} bewiesen wurde, folgt, daß Vollständigkeit, Planarität und Linearität invariante Eigenschaften des Diatensors sind.

I. Vollständiger Diatensor. Soll ein Diatensorvektorprodukt $\Phi\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}\mathfrak{v} = \mathfrak{w}$ sein, so müssen die skalaren Gleichungen erfüllt sein:

$$\left.\begin{aligned} a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z &= w_x, \\ b_x v_x + b_y v_y + b_z v_z &= w_y, \\ c_x v_x + c_y v_y + c_z v_z &= w_z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es folgt zunächst: Sind $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ vorgeschrieben, so sind die neun Größen a_x, a_y usw. die Unbekannten. Da man zur Bestimmung derselben nur drei Gleichungen hat, sind ∞^6 Lösungen möglich; man kann also jederzeit nicht nur einen Diatensor finden, der ein vorgeschriebenes $\mathfrak{v}$ in ein vorgeschriebenes $\mathfrak{w}$ überführt, sondern man kann auch für diesen Diatensor noch sechs weitere Bedingungen willkürlich vorschreiben, kann z. B. zwei Zeilen oder zwei Kolonnen von vornherein festsetzen usw.

Ist aber $\mathfrak{w}$ und Φ vorgeschrieben, so sind v_x, v_y, v_z die Unbekannten. Man hat also für die drei Unbekannten drei Gleichungen, und diese ergeben bekanntlich drei Lösungen, solange nicht die Determinante aus den Koeffizienten der v_x, v_y, v_z verschwindet. Diese Determinante ist aber S_3, also: Zu jedem vorgeschriebenen Diatensor Φ läßt sich ein Argument $\mathfrak{v}$ dann und nur dann so bestimmen, daß das Produkt $\Phi\mathfrak{v}$ einen beliebig vorgeschriebenen Vektor $\mathfrak{w}$ ergibt, wenn der Diatensor vollständig ist.

II. Planare Diatensoren. Ist $S_3 = 0$, während $S_{21} \neq 0$, so hat die Hamiltonsche Gleichung zwei von Null verschiedene Lösungen, und man kann ihr die dritte Lösung $t_3 = 0$ zuschreiben. Von den drei durch die Gleichung bestimmten Konstituenten wird also einer zu Null, während die beiden anderen endlich sind. Da $S_3 = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$, ist das Parallelepiped aus den Zeilenvektoren Null, d. h. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ müssen komplanar oder kollinear sein. Das letztere ist ausgeschlossen, solange $S_{21} \neq 0$; denn, wie unten gezeigt wird, reduzieren sich für den Fall, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ kollinear sind, alle Diatensorvektorprodukte auf Vektoren der gleichen Doppelrichtung. Dem widerspricht aber die Tatsache, daß der planare Vektor zwei von Null verschiedene Konstituenten hat, daß also wenigstens die in die beiden Achsen fallenden Diatensorvektorprodukte verschiedene Richtung besitzen. Wir haben also damit zu rechnen, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ komplanar sind ohne kollinear zu sein. Dann ist, wenn l, m, n drei passend gewählte Skalare sind,

$$l\mathfrak{a} + m\mathfrak{b} + n\mathfrak{c} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und damit wird

$$\Phi\mathfrak{v} = (\mathfrak{a}\mathfrak{v})\left(\mathfrak{i} - \frac{l}{n}\mathfrak{k}\right) + (\mathfrak{b}\mathfrak{v})\left(\mathfrak{j} - \frac{m}{n}\mathfrak{k}\right). \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Da $(\mathfrak{a}\mathfrak{v})$ und $(\mathfrak{b}\mathfrak{v})$ skalar sind, heißt das: alle Diatensorvektorprodukte sind in unserem Fall komplanar mit einer Ebene, welche durch die beiden Vektoren $\mathfrak{i} - \frac{l}{n}\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{j} - \frac{m}{n}\mathfrak{k}$ bestimmt ist. Diese Ebene nennen wir schlechthin die Ebene des Diatensors. Sie ist invariant; denn wenn sie mit dem gewählten Koordinatensystem variierte, so würden sich unendlich viele Vektoren $\mathfrak{v}$ finden lassen, derart, daß das Diatensorvektorprodukt $\Phi\mathfrak{v}$ je nach der Wahl des Koordinatensystems in verschiedene Ebenen fiele, d. h. die Bestimmung der homogenen linearen Vektorfunktion durch Φ wäre nicht eindeutig.

Der Ursprung der Bezeichnung „planarer Diatensor“ ist hiermit deutlich.

Hat der Diatensor Φ zwei reelle, von Null verschiedene Konstituenten, so wissen wir, daß ein Vektor $\mathfrak{v}$, der in eine der Achsen fällt, nach der Multiplikation mit Φ noch immer in derselben Achse liegt, also ist die Ebene des Diatensors komplanar mit der Ebene dieser beiden Konstistuenten.

Das Lot auf der Ebene wird der Richtung nach bestimmt durch das vektorielle Produkt $[n\mathfrak{i} - l\mathfrak{k}][n\mathfrak{j} - m\mathfrak{k}]$, d. i. nach Fortlassung des skalaren, also für die Richtung bedeutungslosen, Faktors n

$$l\mathfrak{i} + m\mathfrak{j} + n\mathfrak{k}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Der planare Diatensor vernichtet jede Komponente von $\mathfrak{v}$, die auf seiner Ebene senkrecht steht, vernichtet also das ganze $\mathfrak{v}$, wenn dieses auf seiner Ebene senkrecht steht. Innerhalb seiner Ebene kann das Produkt $\Phi\mathfrak{v}$ offenbar jeden beliebigen Wert annehmen, da $\mathfrak{v}$ sich immer so wählen läßt, daß die Faktoren $(\mathfrak{a}\mathfrak{v})$ und $(\mathfrak{b}\mathfrak{v})$ beliebige Größe haben.

Spezialfälle. Ist Φ symmetrisch und auf seine Hauptachsen bezogen, so muß der planare Diatensor nach dem Obigen eine der folgenden Formen haben:

$$\begin{cases} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & t_{zz}, \end{cases} \qquad \begin{cases} t_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{zz}, \end{cases} \qquad \begin{cases} t_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & t_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0. \end{cases}$$

Seine Ebene ist diejenige Ebene, in welcher die beiden endlichen Konstituenten liegen, und er vernichtet jede dazu senkrechte Komponente.

Ist Φ antimetrisch, so ist es nach § 25 planar. Schreibt man:

$$\varphi = \begin{cases} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0, \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

so ist nach Gleichung (2)

$$-l a_z \mathfrak{j} + l a_y \mathfrak{k} + m a_z \mathfrak{i} - m a_x \mathfrak{k} - n a_y \mathfrak{i} + n a_x \mathfrak{j} = 0, \quad \ldots \quad (6)$$

also

$$\frac{m}{n} = \frac{a_y}{a_z}, \quad \frac{n}{l} = \frac{a_y}{a_x}, \quad \frac{l}{m} = \frac{a_x}{a_z}. \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Darin, daß die dritte dieser Gleichungen durch die beiden ersten erfüllt wird, liegt die Verifikation der Planarität. Man kann dafür mit Weglassung eines bedeutungslosen skalaren Faktors schreiben:

$$l = a_x, \quad m = a_y, \quad n = a_z. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Nach (4) ist also der Vektor, welcher auf der Ebene des Diatensors senkrecht steht,

$$a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j} + a_z \mathfrak{k}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Dies ist aber nach § 26 der vektorielle Faktor $[\mathfrak{A}$, welcher den Diatensor vertritt, also ergibt sich: Der Vektor $\mathfrak{A}$ steht senkrecht auf der Ebene des mit ihm äquivalenten antimetrischen Diatensors.

III. Lineare Diatensoren. Ist gleichzeitig S_3 und $S_{21} = 0$, so bleibt nur eine, stets reelle, Lösung der Hamiltonschen Gleichung übrig, die von Null verschieden ist, solange nicht $S_1 = 0$ ist und damit der ganze Diatensor verschwindet. Von den Konstituenten ist also nur einer endlich. Die Zeilenvektoren sind kollinear; zwischen ihnen bestehen zwei lineare

Gleichungen und vermittelst derselben läßt sich $\mathfrak{c}$ als $m\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ als $n\mathfrak{a}$ ausdrücken. Das Diatensorvektorprodukt wird also

$$\begin{aligned}\Phi\mathfrak{v} &= (\mathfrak{a}\mathfrak{v})\mathfrak{i} + (m\mathfrak{a}\mathfrak{v})\mathfrak{j} + (n\mathfrak{a}\mathfrak{v})\mathfrak{k} \quad \ldots\ldots\ldots (10)\\ &= (\mathfrak{a}\mathfrak{v})(\mathfrak{i} + m\mathfrak{j} + n\mathfrak{k}),\end{aligned}$$

d. h. alle Diatensorvektorprodukte sind kollinear mit dem Vektor

$$\mathfrak{i} + m\mathfrak{j} + n\mathfrak{k}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

dieser heißt die Gerade des Diatensors. Sie ist offenbar invariant und fällt zusammen mit der Doppelrichtung des von Null verschiedenen Konstituenten. Auf dieser Geraden kann $\Phi\mathfrak{v}$ bei passender Wahl von $\mathfrak{v}$ offenbar jeden beliebigen Wert annehmen, und der lineare Diatensor vernichtet jede Vektorkomponente, die senkrecht auf seiner Geraden steht.

Ist er symmetrisch, so hat er, auf seine Hauptachsen bezogen, eine der Formen:

$$\left\{\begin{matrix} t_{xx} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0,\end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & t_{yy} & 0\\ 0 & 0 & 0,\end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t_{zz}.\end{matrix}\right.$$

Antimetrische Diatensoren kommen hier nicht in Betracht, sie sind nach § 25 entweder Null oder planar.

Drittes Kapitel: Additive Eigenschaften, additive Zerlegung des Diatensors und die auf dieselbe gegründete Transformation des Raumes.

34. Additive Eigenschaften.

Die einfachen Erwägungen des § **11** gelten, weil sie auf der Linearität der Grundgleichung beruhen, auch für Diatensoren. Die folgenden Sätze leuchten daher unmittelbar ein: Es ist

$$\Phi(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) = \Phi\mathfrak{u} + \Phi\mathfrak{v}. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Wir definieren ferner

$$(\Phi + \Phi')\mathfrak{v} = \Phi\mathfrak{v} + \Phi'\mathfrak{v}. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Es folgt dann ohne weiteres: Man addiert zwei Diatensoren, indem man ihre entsprechenden Glieder einzeln addiert. Die Ausdehnung des Satzes auf drei und mehr Diatensoren sowie auf Subtraktion liegt auf der Hand, ebenso, daß die Summen distributiv sind.

Ebenso der Satz: Man multipliziert einen Diatensor mit einem Skalar m, indem man seine sämtlichen Glieder einzeln mit m multipliziert, nebst der Gleichung

$$(m\Phi)\mathfrak{v} = m(\Phi\mathfrak{v}) = m\Phi\mathfrak{v}. \quad (3)$$

Wir haben hier nur nachzutragen, wie sich die Gleichungen (2) und (3) schreiben, wenn man den Diatensor Φ durch seine Zeilenvektoren ausdrückt. Es ergeben sich unmittelbar die Sätze:

$$\Phi\{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\} \pm \Phi\{\mathfrak{e},\mathfrak{f},\mathfrak{g}\} = \Phi\{\mathfrak{a}\pm\mathfrak{e},\ \mathfrak{b}\pm\mathfrak{f},\ \mathfrak{c}\pm\mathfrak{g}\}, \quad (4)$$

$$m\Phi\{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\} = \Phi\{m\mathfrak{a}, m\mathfrak{b}, m\mathfrak{c}\}, \quad (5)$$

die bewiesen sind, sobald man die Φ in extenso hinschreibt.

35. Die erste fundamentale Zerlegung des Diatensors.

Satz: Jeder Diatensor läßt sich additiv auf eine und nur eine Weise in einen symmetrischen und einen antimetrischen Teil zerlegen.

Beweis: Es ist

$$\Phi = \frac{\Phi + \Phi_c}{2} + \frac{\Phi - \Phi_c}{2}, \quad (1)$$

und damit ist der Beweis, daß die Zerlegung möglich, durch tatsächliche Herstellung geführt. Es ist noch zu zeigen, daß keine andere Zerlegung der verlangten Eigenschaft möglich ist. Sollte eine andere Zerlegung möglich sein, so müßte es einen Diatensor Ω geben, der die Eigenschaft hätte, daß von den beiden Größen

$$\frac{\Phi + \Phi_c}{2} + \Omega \quad \text{und} \quad \frac{\Phi - \Phi_c}{2} - \Omega \quad (2)$$

die eine symmetrisch, die andere antimetrisch wäre. Das wäre auf zweierlei Weise denkbar.

Erster Fall. $\frac{\Phi + \Phi_c}{2} + \Omega$ soll symmetrisch, $\frac{\Phi - \Phi_c}{2} - \Omega$ soll antimetrisch sein; dann folgt

$$\frac{\Phi + \Phi_c}{2} + \Omega = \frac{\Phi_c + \Phi}{2} + \Omega_c,$$

$$\frac{\Phi - \Phi_c}{2} - \Omega = -\frac{\Phi_c - \Phi}{2} + \Omega_c,$$

und damit findet sich leicht

$$\Omega = \Omega_c = -\Omega,$$

was nur möglich ist, wenn $\Omega = 0$.

Zweiter Fall. $\frac{\Phi - \Phi_c}{2} - \Omega$ soll symmetrisch, $\frac{\Phi + \Phi_c}{2} + \Omega$ soll antimetrisch sein; dann folgt:

$$\frac{\Phi + \Phi_c}{2} + \Omega = -\frac{\Phi_c + \Phi}{2} - \Omega_c,$$

$$\frac{\Phi - \Phi_c}{2} - \Omega = \frac{\Phi_c - \Phi}{2} - \Omega_c,$$

und daraus ergibt sich leicht:

$$\Omega = -\Phi_c.$$

Führt man dies in den Ausdruck (2) ein, so erhält man:

$$\frac{\Phi - \Phi_c}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\Phi + \Phi_c}{2},$$

wird also wieder auf die Ausdrücke in (1) geführt. Folglich sind diese die einzigen, welche den Bedingungen genügen.

Die Gegenüberstellung der beiden Bestandteile, welche in Gleichung (1) gegeben ist, legt es nahe, die weitläufige Benennung „antimetrischer Diatensor“ abzukürzen in „Antitensor“. Wir führen diese Benennung ein, und dann lautet Gleichung (1) in Worten: Jeder Diatensor zerfällt additiv eindeutig in Tensor und Antitensor.

Ist Φ von vornherein symmetrisch oder antimetrisch, so verschwindet im ersten Fall der Antitensor, im zweiten der Tensor.

Wir bezeichnen für die nächsten Zwecke den Tensor $\frac{\Phi + \Phi_c}{2}$ mit T, den Antitensor $\frac{\Phi - \Phi_c}{2}$ mit τ. Schreibt man Φ in extenso

$$\Phi = \begin{cases} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz}, \end{cases}$$

so ist also

$$\Phi = T + \tau, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

wenn

$$T = \begin{cases} t_{xx} & \frac{t_{xy} + t_{yx}}{2} & \frac{t_{zx} + t_{xz}}{2} \\ \frac{t_{xy} + t_{yx}}{2} & t_{yy} & \frac{t_{yz} + t_{zy}}{2} \\ \frac{t_{zx} + t_{xz}}{2} & \frac{t_{yz} + t_{zy}}{2} & t_{zz}, \end{cases} \quad \ldots \quad (4)$$

$$\tau = \begin{cases} 0 & \frac{t_{xy} - t_{yx}}{2} & \frac{t_{xz} - t_{zx}}{2} \\ \frac{t_{yx} - t_{xy}}{2} & 0 & \frac{t_{yz} - t_{zy}}{2} \\ \frac{t_{zx} - t_{xz}}{2} & \frac{t_{zy} - t_{yz}}{2} & 0. \end{cases} \quad \ldots\ldots (5)$$

Bekanntlich läßt sich nun der Antitensor τ ersetzen durch einen vektoriellen Faktor, welchen letzteren wir nunmehr mit $[\mathfrak{h}$ bezeichnen, und zwar ist nach § **26**

$$\mathfrak{h} = \frac{t_{zy} - t_{yz}}{2}\mathfrak{i} + \frac{t_{xz} - t_{zx}}{2}\mathfrak{j} + \frac{t_{yx} - t_{xy}}{2}\mathfrak{k}. \quad \ldots (6)$$

Es ist also

$$\Phi\mathfrak{v} = T\mathfrak{v} + \tau\mathfrak{v} = T\mathfrak{v} + [\mathfrak{h}\mathfrak{v}]. \quad \ldots\ldots (7)$$

Da bereits bewiesen wurde, daß $T_c = T$ und $\mathfrak{h}] = [\mathfrak{h}_c$ ist, ist die Zerlegung auf $\mathfrak{v}\Phi$ ohne weiteres anwendbar und

$$\mathfrak{v}\Phi = \mathfrak{v}T + \mathfrak{v}\tau = T\mathfrak{v} + [\mathfrak{v}\mathfrak{h}]. \quad \ldots\ldots (8)$$

Bezeichnen wir nunmehr die Zeilenvektoren von T mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, diejenigen von τ mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so ist nach dem vorigen Paragraphen

$$\Phi\mathfrak{v} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}, \mathfrak{v})\mathfrak{i} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{b}, \mathfrak{v})\mathfrak{j} + (\mathfrak{C} + \mathfrak{c}, \mathfrak{v})\mathfrak{k} \quad \ldots (9)$$

und gleichzeitig ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a} &= -h_z\mathfrak{j} + h_y\mathfrak{k}, \\ \mathfrak{b} &= -h_x\mathfrak{k} + h_z\mathfrak{i}, \\ \mathfrak{c} &= -h_y\mathfrak{i} + h_x\mathfrak{j}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

Konjugierte Diatensoren haben offenbar denselben Tensor und entgegengesetzt gleiche Antitensoren.

Bezieht man den ganzen Diatensor auf die Hauptachsen von T als Koordinatenachsen der x, y, z, so nimmt er die Form an

$$\Phi = \begin{cases} L & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & N \end{cases} + [\mathfrak{h}, \quad \ldots\ldots (11)$$

in welcher er für eine Übersicht über seine Wirkungen besonders bequem ist. L, M, N sind drei Skalare, deren Werte, wenn nicht von vornherein bekannt, sich aus der Transformation auf die Hauptachsen ergeben.

Gleichung (11) läßt sich aussprechen in der Form: Der Diatensor hat im allgemeinen drei orthogonale Konstituenten und einen vektoriellen „Zusatzfaktor“.

Es folgt schon hieraus, daß die Teilung in Tensor und Antitensor für einen gegebenen Diatensor invariant ist. Dies ergibt sich auch einfach aus folgendem: Es sei ein Diatensor im Koordinatensystem der x, y, z gegeben, und es gelten dort die Bezeichnungen Φ, T, τ; transformiert man dann Φ, T und τ auf ein Koordinatensystem der x', y', z' und bezeichnet die dortigen Werte mit Φ', T', τ', so ist erstens $\Phi' = T' + \tau'$, und zweitens ist T' ein Tensor, τ' ein Antitensor, weil Symmetrie und Antimetrie invariant sind. Da nun Φ' nur auf eine Weise in Tensor und Antitensor zerlegt werden kann, sind T' und τ' schlechthin der Tensor und Antitensor von Φ'. Nun hat T' dieselben Konstituenten wie T und τ' die gleiche Achse mit τ, also ist die Teilung von Φ' geometrisch gleichbedeutend mit derjenigen von Φ.

36. Die Wirkung des Diatensors auf ein einzelnes Argument.

Dieselbe liegt in der Gleichung

$$\Phi \mathfrak{v} = T\mathfrak{v} + \tau\mathfrak{v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$T\mathfrak{v}$ ist nach § 3 zu konstruieren; die Multiplikation mit T verlängert die drei Komponenten $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ im Verhältnis[1] $L:1$, $M:1$, $N:1$.

$\tau\mathfrak{v} = [\mathfrak{h}\mathfrak{v}]$ ist ein Vektor, der der Zusatzvektor heißen möge. Er steht senkrecht auf $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{v}$ in dem Sinne, daß $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{v}$ und $[\mathfrak{h}\mathfrak{v}]$ ein rechtshändiges System bilden. Sein Betrag ist gleich dem Inhalt des aus $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{v}$ gebildeten Parallelogrammes.

$\Phi\mathfrak{v}$ erhält man, indem man die beiden Vektoren $T\mathfrak{v}$ und $[\mathfrak{h}\mathfrak{v}]$ geometrisch addiert.

$$\mathfrak{v}\Phi = T\mathfrak{v} - [\mathfrak{h}\mathfrak{v}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Zwei konjugierte Diatensorvektorprodukte desselben Arguments haben gleiche $T\mathfrak{v}$ und entgegengesetzt gleiche Zusatzvektoren. Damit ist die geometrische Bedeutung der Konjugation dargetan.

Alles dies ist nach dem Vorangegangenen selbstverständlich; es ist nur ein Blick auf gewisse Spezialfälle zu werfen.

I. Negative Konstituenten von T. Sind die Konstituenten L, M, N alle drei positiv, so bleibt bei der durch T dargestellten einfachen Deformation (vgl. § 9) die Richtung jeder einzelnen Komponente $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$ oder $\mathfrak{v}_z$ unverändert. Ist aber ein

[1]) Um jedes Mißverständnis auszuschließen, sei bemerkt, daß man in Deutschland eine $n$malige Vergrößerung meist ausdrückt durch die Bezeichnung „Vergrößerung im Verhältnis von $1:n$". Wenn man sich aber an die allgemeine Regel hält, daß beim Niederschreiben eines Verhältnisses der Dividendus vorangesetzt wird, ist die Schreibweise „Vergrößerung im Verhältnis $n:1$" sicherlich zulässig und wohl vorzuziehen.

Konstituent, etwa N, negativ, so kehrt sich die Richtung der entsprechenden Komponente $\mathfrak{v}_z$ durch die Multiplikation um: $L\mathfrak{v}_x + M\mathfrak{v}_y - N\mathfrak{v}_z$ ist das Spiegelbild von $L\mathfrak{v}_x + M\mathfrak{v}_y + N\mathfrak{v}_z$, gespiegelt an der xy-Ebene. Ein negativer Konstituent bewirkt also Inversion mit der Ebene der beiden anderen Konstituenten als Spiegel; zwei negative Konstituenten bewirken entsprechend zweimalige Inversion (Interversion); drei bewirken völlige Umkehrung (Reversion).

II. Einheitstensor. Es kann $L = M = N = 1$ werden; dann ist $T\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$. Der Einheitstensor

$$\begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases}$$

wirkt multiplikativ wie die algebraische Einheit.

Tensoren wie

$$\begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1, \end{cases} \quad \begin{cases} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{cases}$$

liefern die Inversion, Interversion und Reversion ohne Größenänderung, der dritte ist multiplikativ gleichbedeutend mit -1.

III. Unendlich kleine Antitensoren. Bezüglich des Antitensors sind analoge Spezialfälle nicht anzugeben. Der Vektor $\mathfrak{h}$ ist durch Φ nach Größe und Richtung gegeben, und der einzige Spezialfall, der eine Besonderheit hat, besteht darin, daß $\mathfrak{h}$ unendlich klein wird, für welchen Fall wir $d\mathfrak{h}$ schreiben wollen. Es ist dann $[d\mathfrak{h}, \mathfrak{v}]$ ein unendlich kleiner Vektor, der in die Ebene von τ fällt. Fügt man zu $[d\mathfrak{h}$ noch einen Einheitstensor, so repräsentiert das Diatensorvektorprodukt

$$\left(\begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases} + [d\mathfrak{h} \right) \mathfrak{v}$$

die Summe aus dem ursprünglichen Vektor und einem unendlich kleinen senkrecht zu $\mathfrak{v}$ stehenden Vektor, d. h. es stellt den Vektor $\mathfrak{v}$ dar, nachdem derselbe um einen unendlich kleinen Winkel $\dfrac{\text{Betrag von } [d\mathfrak{h}, \mathfrak{v}]}{v}$ gedreht ist. Also: Die Summe aus Einheitstensor und unendlich kleinem Zusatzfaktor stellt einen Faktor dar, der eine unendlich kleine Drehung des Arguments bewirkt. Die Achse dieser Drehung denke man sich in den Anfangspunkt von $\mathfrak{v}$ verlegt und senkrecht zu v und $\mathfrak{h}$.

$[d\mathfrak{h}, \mathfrak{v}]$ selbst ist die Dislokation, welche der Endpunkt von $\mathfrak{v}$ durch die beschriebene Drehung erfährt.

37. Die affine Raumtransformation.

Gegeben sei ein (begrenzter oder unbegrenzter) Raum I. Wir wählen in demselben einen festen Punkt 0 aus und betrachten ihn als Koordinatenanfang. Irgend ein Punkt 1 des Raumes ist dann bestimmt durch den Fahrstrahl 0 1, welcher von 0 nach 1 hinführt. Wir legen zugleich durch 0 ein rechtwinkliges Koordinatensystem der x, y, z und denken uns die vorkommenden Tensoren in diesem System bestimmt. Werden nun sämtliche Fahrstrahlen $\mathfrak{r}$ in I mit einem Diatensor Φ multipliziert, so wird dadurch der Raum I in einen zweiten Raum II umgewandelt, er wird „auf den Raum II transformiert“ oder, was dasselbe sagt, er wird so „bewegt“, daß er in die Lage II übergeht. Die Multiplikation sämtlicher Fahrstrahlen $\mathfrak{r}$ mit Φ hat ohne weiteres die Folge, daß auch jeder beliebige andere Vektor 1 2 des Raumes mit dem gleichen Diatensor multipliziert wird; denn 1 2 ist ja $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$. Dadurch, daß die sämtlichen Vektoren direkt oder indirekt auf 0 bezogen sind, wird die ganze Transformation an den Punkt 0 geknüpft, und 0 heißt deshalb auch der Mittelpunkt der Transformation.

Die geometrische Grundeigenschaft dieser Transformation ergibt sich aus folgender einfachen Erwägung. Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei Vektoren in I und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ dieselben nach der Transformation. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} a'_x &= t_{xx} a_x + \text{usw.}, \\ b'_x &= t_{xx} b_x + \text{usw.}, \\ c'_x &= t_{xx} c_x + \text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Sind nun die ursprünglichen Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ komplanar, so kann man setzen $\mathfrak{c} = m\mathfrak{a} + n\mathfrak{b}$. Dann wird

$$t_{xx} c_x = m t_{xx} a_x + n t_{xx} b_x,$$

und da die entsprechenden Gleichungen offenbar für alle Einzelprodukte $t_{\mu\nu} c_k$ gelten, so wird

$$\mathfrak{c}' = m\,\mathfrak{a}' + n\,\mathfrak{b}', \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

d. h. die transformierten Vektoren sind gleichfalls komplanar. Hieraus folgt sofort: Kollineare Vektoren bleiben kollinear, Ebenen in I bleiben Ebenen in II, gerade Linien bleiben gerade Linien. Parallelogramme und Parallelepipede bleiben solche, ähnliche und ähnlich gelegene Figuren bleiben ähnlich und ähnlich gelegen, obgleich im allgemeinen die Richtungen sich ändern.

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ parallel, so ist $\mathfrak{b} = m\,\mathfrak{a}$ und demgemäß $\mathfrak{b}' = m\,\mathfrak{a}'$. Also das Längenverhältnis paralleler Strecken bleibt unverändert; eine ebene Figur verwandelt sich durch die Transformation in eine ihrer (im allgemeinen vergrößerten oder verkleinerten) orthographischen Projektionen. Das Verhältnis, in welchem die Vektoren irgend einer durch die drei Kosinus α_1, β_1, γ_1 bestimmten Richtung verlängert werden, nennen wir das der Richtung $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ zugeordnete Elongationsverhältnis ε. Bei Verkürzungen ist es natürlich < 1.

Daß aus einer Kugel ein Ellipsoid wird, ist bereits bekannt. Die in § 27 angestellte Überlegung zeigt auch ohne weiteres, daß ein Ellipsoid sich wieder in ein Ellipsoid verwandelt (daß dabei im Spezialfall zwei oder alle drei Achsen gleich werden können, ist natürlich nicht ausgeschlossen).

Sind a, b, c konjugierte Semidiameter eines Ellipsoids im Raum I und sind ihre Elongationsverhältnisse ε_a, ε_b, ε_c, so haben die entsprechenden Vektoren in II die Beträge $a' = \varepsilon_a a$ usw., also wenn im Raum I die Gleichung galt $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$, so gilt im Raum II $\frac{\varepsilon_a^2 \xi^2}{a'^2} + \frac{\varepsilon_b^2 \eta^2}{b'^2} + \frac{\varepsilon_c^2 \zeta^2}{c'^2} = 1$, d. h. drei Semidiameter des transformierten Ellipsoids sind konjugiert, wenn sie drei konjugierten Semidiametern des ursprünglichen Ellipsoids entsprechen.

Eine Transformation von dieser Art heißt eine affin projektivische, abgekürzt eine affine oder nach Thomson und Tait eine homogene Transformation. Das Ergebnis lautet also:

Die Multiplikation sämtlicher Vektoren eines Raumes mit einem Diatensor bewirkt eine affine Transformation des Raumes. Diese ist noch näher zu untersuchen.

38. Die Rolle von Φ, Φ_2 und S_3 bei der affinen Transformation.

Multipliziert man den Vektor $l\mathfrak{i}$ mit dem Diatensor

$$\Phi = \begin{cases} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z, \end{cases}$$

so erhält man

$$l\Phi\mathfrak{i} = l\mathfrak{a}_c,$$

und ebenso ergibt sich

$$m\Phi\mathfrak{j} = m\mathfrak{b}_c, \qquad n\Phi\mathfrak{k} = n\mathfrak{c}_c.$$

Ein Parallelepiped, welches im Raum I die orthogonalen Seiten $l\mathfrak{i}$, $m\mathfrak{j}$ und $n\mathfrak{k}$ hatte, wird im Raum II zu einem Parallelepiped mit den Seiten $l\mathfrak{a}_c$, $m\mathfrak{b}_c$, $n\mathfrak{c}_c$. Sein Volumen verändert sich also im Verhältnis $\frac{(\mathfrak{a}_c\mathfrak{b}_c\mathfrak{c}_c)}{1}$ oder $\frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})}{1}$, und da dies für alle parallelepipedischen Elemente gilt, in die man den Raum I einteilen kann, so folgt: Durch die Transformation mit Φ werden alle Volumina im Verhältnis $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}):1$ oder $S_3:1$ vergrößert. Nimmt man dazu den Satz III von § **30**, Gleichung (14), so folgt:

Multipliziert man alle Verschiebungsvektoren eines Raumes mit dem Diatensor Φ, so multipliziert man gleichzeitig alle ebenen Flächenräume desselben mit Φ_2 und alle Volumina mit S_3.

Daß die Transformation der Volumina vermittelst eines Skalars erfolgt, während Vektoren und ebene Gebilde mit Tensoren multipliziert werden, liegt an der Tatsache, daß allgemein Gebilde von n Dimensionen in einem n-achsigen Raum Skalare oder Pseudoskalare sind, während Gebilde von weniger als n Dimensionen sich in demselben Raum als Vektoren darstellen lassen.

39. Die endliche reine Deformation.

Die Transformation des Raumes, welche durch einen Tensor hervorgebracht wird, heißt (§ **9**) reine Deformation. Es können dabei dieselben Spiegelungen eintreten, die bereits in § **36** erwähnt wurden. Die Berücksichtigung derselben ist ganz einfach, sie werden daher im folgenden nicht weiter erwähnt. Daß und wie eine Kugel des Raumes I sich im allgemeinen in ein Ellipsoid des Raumes II verwandelt, wurde früher schon besprochen. Wir wollen hier noch die Frage behandeln: Was wird bei der Transformation aus einem rechtwinkligen Parallelepiped mit den drei

Kanten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$? Wir nehmen an, daß die drei Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ mit ihren Anfangspunkten im Koordinatenanfang zusammentreffen und daß $\mathfrak{p}$ in die Richtung der x, $\mathfrak{q}$ in die Richtung der y, $\mathfrak{r}$ in die Richtung der z falle; dabei soll der Tensor gegen das Koordinatensystem beliebig orientiert, also durch seine sechs Glieder t_{xx} usw. ausgedrückt sein. Zur Abkürzung setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} t_{xx}^2 + t_{xy}^2 + t_{zx}^2 &= e_1^2, \\ t_{xy}^2 + t_{yy}^2 + t_{yz}^2 &= e_2^2, \\ t_{zx}^2 + t_{yz}^2 + t_{zz}^2 &= e_3^2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} t_{xy} t_{zx} + t_{yy} t_{yz} + t_{yz} t_{zz} &= f_{23}, \\ t_{zx} t_{xx} + t_{zy} t_{xy} + t_{zz} t_{zx} &= f_{31}, \\ t_{xx} t_{xy} + t_{xy} t_{yy} + t_{zx} t_{yz} &= f_{12}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Voraussetzungsgemäß ist

$$p_x = p,\ p_y = p_z = 0;\ q_x = q_z = 0,\ q_y = q;\ r_x = r_y = 0,\ r_z = z.$$

Die Werte nach der Transformation seien durch Striche bezeichnet. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} p'_x &= t_{xx} p, & p'_y &= t_{xy} p, & p'_z &= t_{zx} p, \\ q'_x &= t_{xy} q, & q'_y &= t_{yy} q, & q'_z &= t_{yz} q, \\ r'_x &= t_{zx} r, & r'_y &= t_{yz} r, & r'_z &= t_{zz} r. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Es folgt

$$p'^2 = e_1^2 p^2, \qquad q'^2 = e_2^2 q^2, \qquad r'^2 = e_3^2 r^2. \quad \ldots \quad (4)$$

Danach sind e_1, e_2, e_3 die Werte des Elongationsverhältnisses ε für die drei Kanten des Parallelepipeds. Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} \cos \mathfrak{p}', \mathfrak{x} &= \frac{t_{xx}}{e_1}, & \cos \mathfrak{q}', \mathfrak{x} &= \frac{t_{xy}}{e_2}, & \cos \mathfrak{r}', \mathfrak{x} &= \frac{t_{zx}}{e_3}, \\ \cos \mathfrak{p}', \mathfrak{y} &= \frac{t_{xy}}{e_1}, & \cos \mathfrak{q}', \mathfrak{y} &= \frac{t_{yy}}{e_2}, & \cos \mathfrak{r}', \mathfrak{y} &= \frac{t_{yz}}{e_3}, \\ \cos \mathfrak{p}', \mathfrak{z} &= \frac{t_{zx}}{e_1}, & \cos \mathfrak{q}', \mathfrak{z} &= \frac{t_{yz}}{e_2}, & \cos \mathfrak{r}', \mathfrak{z} &= \frac{t_{zz}}{e_3}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

und daraus folgt:

$$\cos \mathfrak{q}', \mathfrak{r}' = f_{23} \frac{q r}{q' r'}, \quad \cos \mathfrak{r}', \mathfrak{p}' = f_{31} \frac{r p}{r' p'}, \quad \cos \mathfrak{p}', \mathfrak{q}' = f_{12} \frac{p q}{p' q'}. \quad (6)$$

Die Größen f_{23}, f_{31} und f_{12} wirken demnach mit bei der Bestimmung der Änderung, welche die Kantenwinkel des Parallelepipeds erleiden.

Denkt man sich $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ als die drei Komponenten eines Vektors (Diagonale des Parallelepipeds), der vor der Transformation $\mathfrak{v}$, nach derselben $\mathfrak{v}'$ heißt, so ist

$$v^2 = p^2 + q^2 + r^2. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

$\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$ sind nicht mehr rechtwinklige Komponenten, die entsprechende Formel lautet hier:

$$\left.\begin{aligned} v'^2 &= (t_{xx}p + t_{xy}q + t_{zx}r)^2 + (t_{xy}p + t_{yy}q + t_{yz}r)^2 \\ &\qquad + (t_{zx}p + t_{yz}q + t_{zz}r)^2 \\ &= e_1^2p^2 + e_2^2q^2 + e_3^2r^2 + 2f_{23}qr + 2f_{31}rp + 2f_{12}pq. \end{aligned}\right\} \cdot \quad (8)$$

Das Elongationsverhältnis ε für einen durch seine drei Komponenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ gegebenen Vektor $\mathfrak{v}$ ist als $\frac{v'}{v}$ durch (7) und (8) auszudrücken.

Die Kosinus der Winkel zwischen $\mathfrak{v}$ und den Achsen sind $\frac{p}{v}$, $\frac{q}{v}$, $\frac{r}{v}$; diejenigen von $\mathfrak{v}'$ sind

$$\frac{t_{xx}p + t_{xy}q + t_{zx}r}{v'} \text{ usw.};$$

also ist

$$\cos \mathfrak{v}, \mathfrak{v}' = \frac{t_{xx}p^2 + t_{yy}q^2 + t_{zz}r^2 + 2\,t_{yz}qr + 2\,t_{zx}rp + 2\,t_{xy}pq}{v\,v'}. \quad (9)$$

Sind zwei verschiedene Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ gegeben, so ist der Kosinus des Winkels, den sie ursprünglich miteinander machen, $\frac{(\mathfrak{u}\mathfrak{v})}{u\,v}$; der entsprechende nach der Transformation berechnet sich nach Analogie des Vorstehenden zu

$$\left.\begin{aligned} u'v' \cos \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' &= e_1^2 u_x v_x + e_2^2 u_y v_y + e_3^2 u_z v_z + f_{23}(u_y v_z + u_z v_y) \\ &\quad + f_{31}(u_z v_x + u_x v_z) + f_{12}(u_x v_y + u_y v_x). \end{aligned}\right\} \cdot \quad (10)$$

Es ist bereits bekannt, daß

$$(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{r}') = S_3(\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Gleichungen (8) und (10) lassen sich erheblich vereinfachen, wenn man die Größen e_1^2, e_2^2, e_3^2, f_{23}, f_{31}, f_{12} als Glieder eines Tensors (ψ) auffaßt (vgl. §§ **12** u. **13**); dann steht nämlich auf der rechten Seite von (8) der Produktenskalar zweier Tensoren, von denen (ψ) der erste und $tens\,\mathfrak{v}^2$ der zweite ist. Man erhält also:

$$v'^2 = \left((\psi)\, tens\, v^2\right) = \left(\mathfrak{v}, \psi\, \mathfrak{v}\right) \quad \ldots\ldots (12)$$

und ganz analog aus Gleichung (10):

$$\left(\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'\right) = \left((\psi)\, tens\, \mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\right) = \left(\mathfrak{v}, \psi\, \mathfrak{u}\right). \quad \ldots\ldots (13)$$

Es wird sich später herausstellen, daß ψ in der Tat ein eng mit T zusammenhängender Tensor und nichts anderes ist, als das Quadrat des Tensors T.

Im vorstehenden wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß T vollständig sei. Wird einer der drei Konstituenten von T zu Null, so reduziert sich das Dehnungsellipsoid auf seinen Schnitt mit der Ebene der beiden anderen Konstituenten, also auf eine Ellipsenfläche. Werden zwei zu Null, so bleibt von dem Dehnungsellipsoid nichts übrig als eine Gerade, welche in die von Null verschiedene Hauptachse fällt. Die Einzelheiten bieten kein besonderes Interesse und sind gegebenenfalls leicht zu errechnen.

40. Der Zusatzfaktor für sich.

Wir untersuchen jetzt die Transformation, welche der Raum I erleidet, wenn man seine Vektoren mit $[\mathfrak{h}$ allein multipliziert. Wie bekannt, ist $\mathfrak{h}$ durch die Glieder des ursprünglichen Diatensors Φ eindeutig gegeben als

$$\mathfrak{h} = \frac{t_{zy} - t_{yz}}{2}\,\mathfrak{i} + \frac{t_{xz} - t_{zx}}{2}\,\mathfrak{j} + \frac{t_{yx} - t_{xy}}{2}\,\mathfrak{k}, \quad \ldots\ldots (1)$$

und die Aufgabe lautet dahin, festzustellen, wie sich der Raum I transformiert, wenn man zu seinen sämtlichen von 0 aus gezogenen Fahrstrahlen $\mathfrak{r}$ den Vektor $[\mathfrak{h}\,\mathfrak{r}]$ addiert. $[\mathfrak{h}\,\mathfrak{r}]$ ist Null für jeden Vektor, der in die Richtung von $\mathfrak{h}$ fällt, und für jeden anderen Vektor proportional dem Sinus des Winkels, den dieser mit $\mathfrak{h}$ macht. Daraus ersieht man ohne weiteres, daß die Richtung von $\mathfrak{h}$ für die Transformation, welche uns hier beschäftigt, die Rolle einer Zentralachse spielt. Wir erleichtern uns daher die Übersicht, indem wir die Achse der x des benutzten Koordinatensystems in die Richtung von $\mathfrak{h}$ gelegt denken. Dann ist

$$h_x = h, \qquad h_y = h_z = 0. \quad \ldots\ldots (2)$$

Die Transformationsformeln werden

$$r'_x = r_x, \qquad r'_y = r_y - h\,r_z, \qquad r'_z = r_z + h\,r_y. \quad \ldots (3)$$

Die Quadrierung derselben ergibt

$$r'^2 = r^2 + h^2(r_y^2 + r_z^2) \quad \text{. . . . .} \quad (4)$$

und die Auflösung nach r_x usw.

$$r_x = r'_x, \quad r_y = \frac{r'_y + h r'_z}{1 + h^2}, \quad r_z = \frac{r'_z - h r'_y}{1 + h^2} \quad \text{. . . .} \quad (5)$$

Aus Gleichung (4) folgt, daß ein Fahrstrahl seine Länge nur dann unverändert beibehält, wenn $r_y = r_z = 0$, also wenn er in der x-Achse liegt. Aus Gleichung (3) folgt ferner, daß jeder Vektor, der nicht in der x-Achse verläuft, gedreht wird, und zwar ergibt die einfache Ausrechnung für den Kosinus des Drehungswinkels φ:

$$\cos \varphi = \frac{r}{r'} \quad \text{. . . . .} \quad (6)$$

Dies folgt auch anschaulich unmittelbar daraus, daß der Zusatzvektor auf $\mathfrak{r}$ senkrecht steht. Für zwei Fahrstrahlen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$, deren Winkelkosinus vor der Transformation $\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{s})}{r s}$ war, ist nach der Transformation

$$(\mathfrak{r}'\mathfrak{s}') = (\mathfrak{r}\mathfrak{s}) + h^2(r_y s \ + r_z s_y), \quad \text{. . . . . .} \quad (7)$$

$$\cos \mathfrak{r}', \mathfrak{s}' = \frac{(\mathfrak{r}'\mathfrak{s}')}{r' s'} \quad \text{. . . . .} \quad (8)$$

Daß jede Ebene des Raumes I auch nach der Transformation wieder eine Ebene sein muß, ist bereits bekannt; ergibt sich auch aus der einfachen Tatsache, daß $\mathfrak{r}'$ nach Gleichung (3) eine homogene lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{r}$ ist. Jede Ebene des Raumes I, welche durch die Zentralachse geht, muß auch nach der Transformation durch dieselbe gehen, denn die Zentralachse gehört ja in ihrem unveränderten Zustand auch der transformierten Ebene an. Eine durch die x-Achse gehende Ebene hat die Gleichung $r_z = m r_y$; mit Gleichung (5) wird daraus

$$r'_z = \frac{m + h}{1 - m h} r'_y \quad \text{. . . . .} \quad (9)$$

Der Winkel, den die ursprüngliche Ebene mit der xy-Ebene machte, war $arc\,tg\, m$; der Winkel, den die transformierte Ebene mit der xy-Ebene macht, ist nach Gleichung (9) $arc\,tg \frac{m + h}{1 - m h}$; d. h. der Winkel, um den die Ebene gedreht wurde, hat die Größe

$$\varphi = arc\,tg\, h \quad \text{. . . . .} \quad (10)$$

Es werden also alle durch die x-Achse gehenden Ebenen um denselben Winkel φ gedreht.

Man findet ferner sehr leicht mit den Gleichungen (5), daß eine Gerade, welche im Abstand l von der x-Achse parallel mit dieser verläuft, nach der Transformation den Abstand $l\sqrt{1+h^2}$ oder $\frac{l}{\cos\varphi}$ von der x-Achse hat. Ferner, daß eine Kugel sich durch die Transformation in ein Rotationsellipsoid verwandelt; die Durchmesser in der Ebene der yz vergrößern sich im Verhältnis $\sqrt{1+h^2}:1$.

Die gesamte Wirkung des Zusatzfaktors auf den Raum I besteht hiernach in einer Drehung um den Winkel $\varphi = arc\,tg\,h$, deren Achse der Vektor $\mathfrak{h}$ ist, und in einer gleichzeitigen Dehnung aller Geraden, welche den Vektor $\mathfrak{h}$ senkrecht schneiden, im Verhältnis von $\sqrt{1+h^2}:1$.

41. Versoren.

Auch der Tensor hat in einem Falle eine Zentralachse, nämlich dann, wenn zwei seiner Konstituenten gleich sind. Der dritte Konstituent ist dann offenbar die Zentralachse der durch ihn hervorgerufenen Transformation. Ein Tensor dieser Art, dessen Zentralachse mit der Achse der x zusammenfallen soll, hat die Komponenten

$$\begin{matrix} t_a & 0 & 0 \\ 0 & t_b & 0 \\ 0 & 0 & t_b. \end{matrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wir können nun dem Tensorvektorprodukt dieses Tensors mit $\mathfrak{r}$ einen additiven Vektor $[\mathfrak{h}\,\mathfrak{r}]$ hinzufügen, dessen Zentralachse gleichfalls in die x-Achse fällt, für den also

$$h_x = h, \qquad h_y = h_z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ist, und können dann Tensor und Zusatzfaktor zu einem Diatensor zusammenfügen, dessen symmetrischer Teil durch (1) und dessen Zusatzfaktor durch (2) bestimmt ist. Die Komponenten dieses Diatensors müssen offenbar den Bedingungen genügen:

$$\left.\frac{t_{zy}+t_{yz}}{2} = 0, \quad \frac{t_{zy}-t_{yz}}{2} = h.\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

während t_{xy}, t_{yx}, t_{zx} und t_{xz} Null sind. Aus (3) folgt $t_{yz} = -h$, $t_{zy} = h$. Der Diatensor, welcher die beiden durch (1) und (2) angedeuteten Operationen zusammenfaßt, hat also die Gestalt

$$\Phi = \begin{cases} t_a & 0 & 0 \\ 0 & t_b & -h \\ 0 & h & t_b \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

und hat die Achse der x zur Zentralachse. Es wird

$$r'_x = t_a r_x, \quad r'_y = t_b r_y - h r_z, \quad r'_z = h r_y + t_b r_z. \quad \ldots \quad (5)$$

Es liegt nun nahe, die Frage aufzuwerfen, ob man die Glieder des Diatensors (4) so bestimmen kann, daß die durch den symmetrischen Teil hervorgebrachte reine Deformation gerade ausreicht, um die durch den Zusatzfaktor hervorgerufenen Elongationen aufzuheben. Zu dem Ende braucht man nur die Bedingung $r'^2 = r^2$ einzuführen. Diese liefert mit (5)

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = t_a^2 r_x^2 + (t_b^2 + h^2)(r_y^2 + r_z^2), \quad \ldots \quad (6)$$

und diese Gleichung ist offenbar für alle $\mathfrak{r}$ erfüllt, wenn man setzt:

$$t_a = 1, \qquad t_b = \sqrt{1 - h^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Der Diatensor

$$\begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-h^2} & -h \\ 0 & h & \sqrt{1-h^2} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

bewirkt also eine reine Drehung des ganzen Raumes. Die Achse dieser Drehung ist die Achse der x. In Gemäßheit des Sinnes von $[\mathfrak{h}\,\mathfrak{r}]$ ist der Sinn der Drehung derart, daß sie von der y-Achse auf kürzestem Wege zur z-Achse hindreht. Für ein Auge, welches von 0 aus nach der positiven Richtung der x hinschaut, erfolgt sie im Sinne des Uhrzeigers. Für ihren Betrag gilt die entsprechende Formel des vorigen Paragraphen nicht mehr, weil die Mitwirkung des Tensors in Betracht zu ziehen ist. Um denselben zu berechnen, betrachten wir einen Vektor, der in der yz-Ebene liegt. Derselbe hat vor der Transformation die Richtungskosinus $\frac{r_y}{r}$ und $\frac{r_z}{r}$, nachher sind sie

$$\frac{\sqrt{1-h^2}\, r_y - h r_z}{r} \quad \text{und} \quad \frac{h r_y + \sqrt{1-h^2}\, r_z}{r}, \quad \ldots \quad (9)$$

also, wenn der Drehungswinkel mit φ bezeichnet wird,

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{1-h^2}\,(r_y^2 + r_z^2)}{r^2} = \sqrt{1-h^2}. \quad \ldots \quad (10)$$

Es folgt

$$\sin\varphi = h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Wir bezeichnen nunmehr den Diatensor (8) durch das Zeichen Φ_φ^x und können ihn dann auf Grund der Gleichungen (10) und (11) einfach schreiben:

$$\Phi_\varphi^x = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi. \end{matrix}\right. \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Durch diese Umformung erledigt sich auch die Frage nach der zulässigen Größe von h. Nach den Gleichungen (10) und (11) würde φ unmögliche Werte annehmen, wenn $h > 1$. Gleichung (12) aber zeigt, daß für die Drehung um einen beliebigen Winkel φ tatsächlich nur Werte von h in Anspruch genommen werden, die zwischen -1 und $+1$ liegen.

Φ_φ^x heißt wegen seiner rein drehenden Wirkung ein Versor. Das Vorstehende faßt sich also zusammen in den Satz: Der Versor der Gleichung (12) dreht den ganzen Raum um den Winkel φ; Achse der Drehung ist die Achse der x, der Sinn geht von y nach z hin.

Anmerkung. Jeder Versor muß eine Eigenschaft haben, welche der Moivreschen Binomialformel entspricht: Dreht man den Raum I um den Winkel φ, und dreht den so entstandenen Raum II nochmals um den Winkelbetrag ψ, unter Beibehaltung der Achse, so ist das Ergebnis eine Drehung um den Winkelbetrag $\varphi + \psi$. Daß die Gleichung (12) diesem Erfordernis entspricht, kann hier noch nicht verifiziert werden, ergibt sich aber später aus der Theorie der Multiplikation von Tensoren, und dann so einfach, daß die Verifikation dem Leser überlassen bleibt.

Es erübrigt nun noch, den speziell für die x-Achse gegebenen Versor auf ein beliebiges Koordinatensystem zu beziehen, in welchem seine Zentralachse die Richtungskosinus α, β, γ besitzt.

Der symmetrische Anteil des Versors (12)

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi \end{matrix}\right.$$

transformiert sich nach den vereinfachten Formeln des § 20 mit $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $\alpha_3 = \gamma$, wobei, da die in Betracht kommenden Koordinatensysteme beide rechtwinklig sind, $\bar{\alpha}_\nu = \alpha_\nu$ zu setzen ist. Man erhält:

$$\left\{\begin{matrix} \alpha^2 + (1-\alpha^2)\cos\varphi & \alpha\beta(1-\cos\varphi) & \gamma\alpha(1-\cos\varphi) \\ \alpha\beta(1-\cos\varphi) & \beta^2 + (1-\beta^2)\cos\varphi & \beta\gamma(1-\cos\varphi) \\ \gamma\alpha(1-\cos\varphi) & \beta\gamma(1-\cos\varphi) & \gamma^2 + (1-\gamma^2)\cos\varphi. \end{matrix}\right. \quad (13)$$

Der Vektor $[\mathfrak{h} = sin\,\varphi$ hat die Komponenten $\alpha\, sin\,\varphi$, $\beta\, sin\,\varphi$, $\gamma\, sin\,\varphi$; er ist demnach äquivalent mit dem Antitensor

$$\left\{\begin{array}{ccc} 0 & -\gamma\, sin\,\varphi & \beta\, sin\,\varphi \\ \gamma\, sin\,\varphi & 0 & -\alpha\, sin\,\varphi \\ -\beta\, sin\,\varphi & \alpha\, sin\,\varphi & 0. \end{array}\right. \quad \cdots\cdots (14)$$

Die Addition von (13) und (14) ergibt für den allgemeinen Versor:

$$\Phi_\varphi =$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha^2 + (1-\alpha^2)\cos\varphi, & \alpha\beta(1-\cos\varphi) - \gamma \sin\varphi, & \gamma\alpha(1-\cos\varphi) + \beta\sin\varphi \\ \alpha\beta(1-\cos\varphi) + \gamma\sin\varphi, & \beta^2 + (1-\beta^2)\cos\varphi, & \beta\gamma(1-\cos\varphi) - \alpha\sin\varphi \\ \gamma\alpha(1-\cos\varphi) - \beta\sin\varphi, & \beta\gamma(1-\cos\varphi) + \alpha\sin\varphi, & \gamma^2 + (1-\gamma^2)\cos\varphi. \end{array}\right. \quad (15)$$

Derselbe dreht den ganzen Raum um den Winkelbetrag φ, und seine Achse macht mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ. Die Drehung ist für positives φ eine Rechtsdrehung.

Spezialfälle.

I. Quadrantaler Versor $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $sin\,\varphi = 1$, $cos\,\varphi = 0$:

$$\Phi_{\frac{\pi}{2}} = \left\{\begin{array}{ccc} \alpha^2 & \alpha\beta - \gamma & \gamma\alpha + \beta \\ \alpha\beta + \gamma & \beta^2 & \beta\gamma - \alpha \\ \gamma\alpha - \beta & \beta\gamma + \alpha & \gamma^2. \end{array}\right.$$

II. Biquadrantaler Versor $\varphi = \pi$, $sin\,\varphi = 0$, $cos\,\varphi = -1$:

$$\Phi_\pi = \left\{\begin{array}{ccc} 2\alpha^2 - 1 & 2\alpha\beta & 2\gamma\alpha \\ 2\alpha\beta & 2\beta^2 - 1 & 2\beta\gamma \\ 2\gamma\alpha & 2\beta\gamma & 2\gamma^2 - 1. \end{array}\right.$$

Wie man sieht, ist der biquadrantale Versor symmetrisch; das muß auch sein, weil eine Drehung um 180^0 sich durch Spiegelung ersetzen läßt.

Legt man die Achse des biquadrantalen Versors in die Achse der x, so wird er

$$\Phi_\pi^x = \left\{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1. \end{array}\right.$$

Aus dieser Form ergibt sich unmittelbar, daß er die doppelte Spiegelung vertritt.

42. Der Diatensor der einfachen Schiebung

sei hier vorläufig erwähnt. Die „einfache Schiebung“ besteht darin, daß eine Ebene des Raumes I, die Nullebene, unverändert bleibt und daß alle mit ihr parallelen Ebenen ihr parallel bleiben, aber in sich verschoben werden um Beträge, die ihrem Abstande von der Nullebene proportional sind, wobei die Verschiebungsrichtung für alle Ebenen die gleiche ist. Wir wollen annehmen, die Nullebene sei die Ebene $z = 0$, und die Verschiebung soll in der Richtung der x erfolgen. Dann genügt den Bedingungen der Aufgabe der Diatensor

$$\Phi = \begin{cases} 1 & 0 & t_{xz} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1; \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

denn wenn man ihn mit einem beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$ multipliziert, erhält man:

$$\Phi\mathfrak{v} = (v_x + t_{xz}v\,)\mathfrak{i} + v_y\mathfrak{j} + v_z\mathfrak{k} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Von den drei Koordinaten des Endpunktes von $\mathfrak{v}$ bleiben also v_y und v_z unverändert, und v_x wächst proportional mit v_z, d. h. jede mit der xy-Ebene parallele Ebene verschiebt sich in der Richtung der x um eine mit ihrem Abstand von der xy-Ebene proportionale Größe. Die Verschiebung ist Null für $v_z = 0$, also für alle Punkte der xy-Ebene selbst. Man bemerke, daß der Diatensor (1) asymmetrisch ist, daß also die einfache Schiebung im Sinne unserer Definitionen nicht als reine Deformation gelten kann. Gibt man dem t_{yz} in Gleichung (1) einen endlichen Wert, so erhält man statt (2) die Gleichung:

$$\Phi\mathfrak{v} = (v_x + t_{xz}v_z)\mathfrak{i} + (v_y + t_{yz}v_z)\mathfrak{j} + v_z\mathfrak{k} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Es behalten also nach wie vor alle mit der xy-Ebene parallelen Ebenen des Raumes I ihren Abstand von der xy-Ebene und werden in sich selbst verschoben um Beträge, die mit v_z proportional sind. Die Richtung der Verschiebung ist aber nicht mehr die Achse der x, sie liegt vielmehr in der xy-Ebene und macht mit der x-Achse einen Winkel, dessen Tangente $\frac{t_{yz}}{t_{xz}}$ ist. Weiteres hierzu im fünften Kapitel.

Viertes Kapitel: **Die Multiplikation der Diatensoren.**

43. Operative Multiplikation.

Nimmt man an irgend einer Größe $\square$ eine Operation Ω vor und schreibt das Ergebnis in Form eines Produktes $\Omega\square$, vollzieht man dann an diesem Produkt eine weitere Operation Ω', so ist das Ergebnis zu bezeichnen durch

$$\Omega'(\Omega\square), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und zwar schreibt man dabei die zuerst vollzogene Operation der Größe $\square$ zunächst. Indem man dem Gebilde (1) die assoziative Eigenschaft beilegt, kann es

$$\Omega'\Omega\square \quad \text{oder} \quad (\Omega'\Omega)\square \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

geschrieben werden, und die Operation $\Omega'\Omega$ kann man als Produkt der beiden Operationen Ω' und Ω bezeichnen. Ein solches Produkt ist z. B. *log cos*; die Bildung des Kosinus ist die zeitlich erste, die Logarithmierung die zweite Operation. Man ersieht aber schon aus diesem Beispiel, daß es unter Umständen zweckmäßig sein wird, die Multiplikation von Operationen durch ein besonderes Beiwort zu charakterisieren; wir nennen sie, wo es der Deutlichkeit wegen erforderlich ist, operative Multiplikation. Man sieht von vornherein, daß sie im allgemeinen nicht kommutativ sein wird; sie hat diese Eigenschaft, wenn sie zur algebraischen Multiplikation degeneriert.

Wenn man einen der beiden Faktoren in (2) den ersten, den anderen den zweiten nennt, so ist man unter Umständen gegen Zweideutigkeit nicht gesichert, da der Faktor, welcher zeitlich zuerst auf das Argument $\square$ angewendet wird, im geschriebenen Text hintenansteht, solange $\square$ als Postfaktor geführt wird. Wir treffen daher folgende Konvention: Von zwei Faktoren Ω' und Ω soll derjenige, welcher dem Argument zunächst steht, der proximale, der andere der distale heißen; wo aber vom ersten und zweiten Faktor die Rede ist, soll der „erste" immer derjenige sein, der in der Schrift vorangeht.

Haben zwei Operationen gleicher Art, etwa Φ und Ψ, die Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{v}\Phi = (\Phi\mathfrak{v})_c \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}\Psi = (\Psi\mathfrak{v})_c, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

so läßt sich das Produkt $\mathfrak{v}\Phi\Psi$ leicht so umformen, daß das Argument zum Postfaktor wird, und umgekehrt. Es ist nämlich

$$\mathfrak{v}\Phi\Psi = (\mathfrak{v}\Phi)\Psi = (\Phi\mathfrak{v})_c\Psi = \Psi_c\Phi_c\mathfrak{v}. \quad \ldots \quad (4)$$

Dasselbe Verfahren läßt sich auch anwenden, wenn eine größere Anzahl von Operationen miteinander multipliziert ist und wenn das Argument an einem Ende der Reihe steht. Es ist z. B.

$$\mathfrak{v}\Phi\Psi X = (\Phi\mathfrak{v})_c\Psi X = X_c\Psi_c\Phi_c\mathfrak{v}, \quad \ldots \quad (5)$$

weil hier von der Voraussetzung ausgegangen wird, die Faktoren seien in derselben Reihenfolge geschrieben, in welcher sie auf ihr Argument angewendet werden. Steht dagegen das Argument zwischen den verschiedenen Faktoren, so hat ein Ausdruck wie

$$\Phi\mathfrak{v}\Psi \quad \ldots \quad (6)$$

ohne weiteres keinen bestimmten Sinn. Er erhält erst einen solchen, wenn ausdrücklich angegeben wird, in welcher Reihenfolge die einzelnen Operationen vorgenommen werden sollen. Bezeichnen wir z. B. die Reihenfolge in dem vorstehenden Beispiel durch untergesetzte Ziffern, so wird

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{\Phi}\mathfrak{v}\underset{2}{\Psi} &= \Psi_c\Phi\mathfrak{v}, \\ \underset{2}{\Phi}\mathfrak{v}\underset{1}{\Psi} &= \mathfrak{v}\Psi\Phi_c = \Phi]\Psi_c\mathfrak{v}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

44. Operative Multiplikation zweier Diatensoren.

Es sei, bezogen auf ein System der x, y, z,

$$\Sigma = \begin{cases} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{cases} \quad \text{und} \quad T = \begin{cases} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz}, \end{cases} \quad . \; . \quad (1)$$

und das Produkt ΣT heiße Φ. Die Glieder von Φ seien bezeichnet durch

$$\Phi = \begin{cases} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz}. \end{cases} \quad \ldots \quad (2)$$

Dann erwächst die Aufgabe, die $p_{\mu\nu}$ durch die $s_{\mu\nu}$ und $t_{\mu\nu}$ auszudrücken.

Nehmen wir die Diatensoren zunächst sämtlich als Präfaktoren, und ist $\mathfrak{v}$ irgend ein Vektor, so ist

$$T\mathfrak{v} = \begin{cases} (t_{xx}v_x + t_{xy}v_y + t_{xz}\,v_z)\,\mathfrak{i} \\ + (t_{yx}v_x + \cdots\cdots\cdots\cdots)\,\mathfrak{j} \\ + (t_{zx}\,v_x + \cdots\cdots\cdots\cdots)\,\mathfrak{k}, \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

also

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, T\, \mathfrak{v} = \; & \mathfrak{i}\,\{s_{xx}(t_{xx}v_x + t_{xy}v_y + t_{xz}v_z) + s_{xy}(t_{yx}v_x + t_{yy}v_y + t_{yz}v_z) \\ & \qquad + s_{xz}\,(t_{zx}v_x + t_{zy}v_y + t_{zz}v_z)\} \\ + \; & \mathfrak{j}\,\{s_{yx}(t_{xx}v_x + t_{xy}v_y + t_{xz}v_z) + s_{yy}(t_{yx}v_x + t_{yy}v_y + t_{yz}v_z) \\ & \qquad + s_{yz}\,(t_{zx}v_x + t_{zy}v_y + t_{zz}v_z)\} \\ + \; & \mathfrak{k}\,\{s_{zx}(t_{xx}v_x + t_{xy}v_y + t_{xz}v_z) + s_{zy}(t_{yx}v_x + t_{yy}v_y + t_{yz}v_z) \\ & \qquad + s_{zz}\,(t_{zx}v_x + t_{zy}v_y + t_{zz}v_z)\}. \end{aligned}\right\} (4)$$

Führt man die Multiplikation durch, so findet sich:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= s_{xx}t_{xx} + s_{xy}t_{yx} + s_{xz}t_{zx}, \\ p_{xy} &= s_{xx}t_{xy} + s_{xy}t_{yy} + s_{xz}t_{zy}, \\ p_{xz} &= s_{xx}t_{xz} + s_{xy}t_{yz} + s_{xz}t_{zz}, \\ p_{yx} &= s_{yx}t_{xx} + s_{yy}t_{yx} + s_{yz}t_{zx} \\ & \text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Das allgemeine Schema, nach dem diese Glieder fortschreiten, lautet:

$$p_{\mu\nu} = s_{\mu x}t_{x\nu} + s_{\mu y}t_{y\nu} + s_{\mu z}t_{z\nu}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Dies ist aber dasselbe Schema, nach welchem zwei Determinanten multiplikativ kombiniert werden. Diese Kombination kann bekanntlich auf viererlei Weise erfolgen: Zeile mit Zeile, Zeile mit Kolonne, Kolonne mit Kolonne und Kolonne mit Zeile. Hier liegt, wie Gleichungen (5) und (6) zeigen, die Kombination vor: Zeile von Σ mit Kolonne von T. Wir erhalten also:

Satz I: Zwei Diatensoren, die in demselben Koordinatensystem gegeben sind, werden nach dem Schema der Multiplikation von Determinanten multipliziert, und zwar sind dabei zu kombinieren die Zeilen des ersten mit den Kolonnen des zweiten Diatensors.

Steht das Argument $\mathfrak{v}$ als Präfaktor, so haben wir

$$\mathfrak{v}\,\Sigma\, T = (\Sigma_c \mathfrak{v})\, T = T_c \Sigma_c \mathfrak{v}.$$

Es sind also zu kombinieren die Zeilen von T_c mit den Kolonnen von Σ_c. Die Zeilen von T_c sind aber die Kolonnen von T, und die Kolonnen von Σ_c sind die Zeilen von Σ, also sind zu kombinieren die Zeilen von Σ mit den Kolonnen von T, und dies heißt wieder, die Zeilen des ersten mit den Kolonnen des zweiten Diatensors. Satz I gilt also in der vorstehenden Form auch für den Fall, daß das operative Produkt der beiden Diatensoren als Postfaktor steht.

Aber Notabene die Anordnung des Produktes wird doch für $\mathfrak{v}\Sigma T$ eine andere als für $\Sigma T\mathfrak{v}$, weil im ersten Falle T_c, im zweiten Falle Σ vorangeht. Dies hat, wie sich leicht verifizieren läßt, den Erfolg, daß die Kolonnen von $\mathfrak{v}\Sigma T$ mit den Zeilen von $\Sigma T\mathfrak{v}$ übereinstimmen, d. h. daß $\mathfrak{v}\Sigma T = (\Sigma T\mathfrak{v})_c$ wird, wie es ja sein muß.

Aus dem Satz I folgt sofort der weitere

S a t z II: Die Determinante des operativen Produktes von zwei Diatensoren ist gleich dem Produkt aus den Determinanten der einzelnen Diatensoren, eben weil die Diatensoren in der Form des Produktes ihrer Determinanten kombiniert sind.

Die Voraussetzung, daß die beiden Faktoren Σ und T in demselben Koordinatensystem bestimmt seien, gilt, wie aus der ganzen Rechnung hervorgeht, für alle Anwendungen der Gleichung (4). Hat man zwei Diatensoren zu multiplizieren, die in verschiedenen Koordinatensystemen gegeben sind, so ist einer von ihnen auf das System des anderen zu transformieren, ehe man die Gleichung anwenden kann. Da aber die Determinanten invariant sind, gilt Satz II auch für Diatensoren, die in verschiedenen Koordinatensystemen ausgedrückt sind.

A n m e r k u n g: Die Form der hier behandelten Produkte zeigt, daß man die Schreibweise der in § **18** gegebenen Transformation bedeutend verkürzen kann. Wird der Tensor Φ nach dem dortigen Winkelschema transformiert und heißt er nach der Transformation Φ', so ist

$$\Phi' = \Psi\Omega,$$

wenn man setzt

$$\Psi = \begin{cases} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3, \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} \lambda_1 t_{xx} + \lambda_2 t_{xy} + \lambda_3 t_{xz}, & \mu_1 t_{xx} + \mu_2 t_{xy} + \mu_3 t_{xz}, & \nu_1 t_{xx} + \nu_2 t_{xy} + \nu_3 t_{xz} \\ \lambda_1 t_{yx} + \lambda_2 t_{yy} + \lambda_3 t_{yz}, & \mu_1 t_{yx} + \mu_2 t_{yy} + \mu_3 t_{yz}, & \nu_1 t_{yx} + \nu_2 t_{yy} + \nu_3 t_{yz} \\ \lambda_1 t_{zx} + \lambda_2 t_{zy} + \lambda_3 t_{zz}, & \mu_1 t_{zx} + \mu_2 t_{zy} + \mu_3 t_{zz}, & \nu_1 t_{zx} + \nu_2 t_{zy} + \nu_3 t_{zz}. \end{cases}$$

45. Die charakteristischen Vektoren bei der Multiplikation.

Es seien zwei Diatensoren als $\Phi\{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\}$ und $\Psi\{\mathfrak{e},\mathfrak{f},\mathfrak{g}\}$ gegeben. Führt man das Produkt $\Phi\Psi\mathfrak{v}$ vollständig aus, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\Phi\Psi\mathfrak{v} = {} & \{(a_x e_x + a_y f_x + a_z g_x) v_x + (a_x e_y + a_y f_y + a_z g_y) v_y \\ & \qquad + (a_x e_z + a_y f_z + a_z g_z) v_z\}\,\mathfrak{i} \\ + {} & \{(b_x e_x + b_y f_x + b_z g_x) v_x + (b_x e_y + b_y f_y + b_z g_y) v_y \\ & \qquad + (b_x e_z + b_y f_z + b_z g_z) v_z\}\,\mathfrak{j} \\ + {} & \{(c_x e_x + c_y f_x + c_z g_x) v_x + (c_x e_y + c_y f_y + c_z g_y) v_y \\ & \qquad + (c_x e_z + c_y f_z + c_z g_z) v_z\}\,\mathfrak{k}.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dies läßt sich wie folgt gruppieren:

$$\left.\begin{aligned}\Phi\Psi\mathfrak{v} = {} & (a_x\mathfrak{i} + b_x\mathfrak{j} + c_x\mathfrak{k})(e_x v_x + e_y v_y + e_z v_z) \\ + {} & (a_y\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + c_y\mathfrak{k})(f_x v_x + f_y v_y + f_z v_z) \\ + {} & (a_z\mathfrak{i} + b_z\mathfrak{j} + c_z\mathfrak{k})(g_x v_x + g_y v_y + g_z v_z).\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Es ist nun

$$\left.\begin{aligned} a_x\mathfrak{i} + b_x\mathfrak{j} + c_x\mathfrak{k} &= \mathfrak{a}_c, \\ a_y\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + c_y\mathfrak{k} &= \mathfrak{b}_c, \\ a_z\mathfrak{i} + b_z\mathfrak{j} + c_z\mathfrak{k} &= \mathfrak{c}_c, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und in den rechts stehenden Klammern der Gleichung (2) stehen die skalaren Produkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{v})$ usw., also reduziert sich Gleichung (2) auf

Satz I:

$$\Phi\Psi\mathfrak{v} = \mathfrak{a}_c(\mathfrak{e}\mathfrak{v}) + \mathfrak{b}_c(\mathfrak{f}\mathfrak{v}) + \mathfrak{c}_c(\mathfrak{g}\mathfrak{v}). \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Das Diatensorvektorprodukt $\Phi\Psi\mathfrak{v}$ läßt sich auf drei Vektoren reduzieren. Jeder von diesen ist das Produkt aus einem Kolonnenvektor des ersten Diatensors und aus dem skalaren Produkt des entsprechenden Zeilenvektors des zweiten Diatensors in das Argument.

Ist $\mathfrak{v}$ Präfaktor, so haben wir

$$\mathfrak{v}\Phi\Psi = \Psi_c\Phi_c\mathfrak{v}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und auf dieses Produkt kann Gleichung (4) angewendet werden. Die Kolonnenvektoren von Ψ_c sind $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, die Zeilenvektoren von Φ_c sind $\mathfrak{a}_c$, $\mathfrak{b}_c$, $\mathfrak{c}_c$, also

$$\mathfrak{v}\Phi\Psi = \mathfrak{e}(\mathfrak{a}_c\mathfrak{v}) + \mathfrak{f}(\mathfrak{b}_c\mathfrak{v}) + \mathfrak{g}(\mathfrak{c}_c\mathfrak{v}). \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Satz II: Ist $\mathfrak{v}$ Präfaktor, so vertauschen die in Gleichung (4) auftretenden charakteristischen Vektoren ihre Plätze.

Satz III: Aus den Gleichungen (2) und (6) folgt: Das Produkt zweier Diatensoren bleibt unverändert, wenn man jede

Kolonne des ersten mit einem beliebigen Skalar multipliziert, und die entsprechende Zeile des zweiten mit demselben Skalar dividiert; in extenso, wenn l, m, n drei beliebige Skalare sind,

$$\begin{Bmatrix} \frac{a_x}{l} & \frac{a_y}{m} & \frac{a_z}{n} \cdot \\ \frac{b_x}{l} & \frac{b_y}{m} & \frac{b_z}{n} \cdot \\ \frac{c_x}{l} & \frac{c_y}{m} & \frac{c_z}{n} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l e_x & l e_y & l e_z \\ m f_x & m f_y & m f_z \\ n g_x & n g_y & n g_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \cdot \\ c_x & c_y & c_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x & e_y & e_z \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \cdot \end{Bmatrix} \quad . \quad (7)$$

46. Potenzen.

Das Produkt zweier gleichen Diatensoren $\Phi\Phi$ schreiben wir Φ^2, die Potenzierung kann beliebig weit fortgesetzt werden. Es ist der Mühe wert, das Quadrat von $\Phi\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ in extenso hinzuschreiben:

$$\Phi^2 = \begin{cases} a_x^2 + a_y b_x + a_z c_x, & a_x a_y + a_y b_y + a_z c_y, & a_x a_z + a_y b_z + a_z c_z \\ b_x a_x + b_y b_x + b_z c_x, & b_x a_y + b_y^2 + b_z c_y, & b_x a_z + b_y b_z + b_z c_z \\ c_x a_x + c_y b_x + c_z c_x, & c_x a_y + c_y b_y + c_z c_y, & c_x a_z + c_y b_z + c_z^2. \end{cases} \quad (1)$$

Ist Φ ein Tensor T, so folgt, da $b_x = a_y$ usw.:

$$T^2 = \begin{cases} a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, & a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, & a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z \\ a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, & b_x^2 + b_y^2 + b_z^2, & b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z \\ a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z, & b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z, & c_x^2 + c_y^2 + c_z^2, \end{cases} \quad (2)$$

oder kürzer

$$T^2 = \begin{cases} \mathfrak{a}^2 & \mathfrak{a}\mathfrak{b} & \mathfrak{a}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{b}\mathfrak{a} & \mathfrak{b}^2 & \mathfrak{b}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{c}\mathfrak{a} & \mathfrak{c}\mathfrak{b} & \mathfrak{c}^2. \end{cases} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Es folgt: 1. das Quadrat eines Tensors ist wieder ein Tensor; 2. der Vergleich von Gleichung (2) mit den Gleichungen (1) und (2) des § **39** ergibt, daß der dort benutzte Tensor mit den Gliedern e_1^2, e_2^2, e_3^2, f_{23}, f_{31} und f_{12} in der Tat das Quadrat des dortigen Tensors T ist.

47. Konjugationsverhältnisse.

Satz I: Das Produkt zweier konjugierten Diatensoren ist ein Tensor.

Beweis: Nach Formel (6) des § **44** ist

$$\left. \begin{aligned} p_{\mu\nu} &= s_{\mu x} t_{x\nu} + s_{\mu y} t_{y\nu} + s_{\mu z} t_{z\nu}, \\ p_{\nu\mu} &= s_{\nu x} t_{x\mu} + s_{\nu y} t_{y\mu} + s_{\nu z} t_{z\mu}. \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Sind nun T und Σ konjugierte Diatensoren, so ist $t_{x\nu} = s_{\nu x}$ usw. und damit findet man sehr leicht, daß

$$p_{\mu\nu} = p_{\nu\mu}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

womit der Satz bewiesen ist.

Satz II: Der Konjugierte zu einem Produkt zweier Diatensoren ist gleich dem Produkt aus dem Konjugierten der Faktoren, letztere in umgekehrter Reihenfolge genommen.

$$(\Phi\Psi)_c = \Psi_c\Phi_c. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Es ist dies nichts anderes als die bereits in § **43** gegebene Gleichung (4).

Ist einer der Faktoren ein Tensor, so kann das entsprechende c fortgelassen werden. Sind sie beide symmetrisch, so reduziert sich Gleichung (3) auf

$$(\Phi\Psi)_c = \Psi\Phi. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Schließlich ist nachzuweisen, daß unsere Konvention über Prä- und Postmultiplikation sich ohne inneren Widerspruch der Gleichung (3) anschließt. Das geschieht durch die einfache Überlegung, daß die Konvention sich wie folgt aus Gleichung (3) ergibt: Wie bei Satz I des § **44** gesagt wurde, ist $\mathfrak{v}\Sigma T = T_c\Sigma_c\mathfrak{v}$. Nach Gleichung (3) ist aber $T_c\Sigma_c = (\Sigma T)_c$, also:

$$\mathfrak{v}\Sigma T = (\Sigma T)_c\mathfrak{v} = (\Sigma T\mathfrak{v})_c, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

was die Konvention von § **31** ist.

Anmerkung: Es ist darauf aufmerksam zu machen, daß eine einfache Konjugationsbeziehung zwischen $\Phi\Psi$ und $\Psi\Phi$ im allgemeinen nicht existiert. Im allgemeinen sind die Konjugationsbeziehungen durch die Gleichungen $\mathfrak{v}\Phi\Psi = (\Phi\Psi\mathfrak{v})_c$ und $(\Psi\Phi)_c = \Psi_c\Phi_c$ erschöpft. Es gibt nur zwei Ausnahmen, die eine bildet Gleichung (4) für den Fall, daß beide Faktoren Tensoren sind, die andere ist in § **50** besprochen.

48. Hebung von Diatensoren.

Satz: Sind Φ, Ψ und Ω drei Diatensoren und ist

$$\Phi\Omega = \Psi\Omega, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

so ist auch

$$\Phi = \Psi. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Beweis: Denkt man sich Φ als $\Phi\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$, Ψ als $\Psi\{\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\}$ und Ω als $\Omega\{\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}\}$, so repräsentiert Gleichung (1) neun lineare skalare Gleichungen von der Form

$$a_x l_x + a_y m_x + a_z n_x = e_x l_x + e_y m_x + e_z n_x \text{ usw.} \quad \ldots \quad (3)$$

und da in all diesen Gleichungen a_x und e_x, a_y und e_y usw. dieselben Koeffizienten haben, können sie nur miteinander bestehen, wenn $a_x = e_x$, $a_y = e_y$ usw.

Genau so ergibt sich, daß Gleichung (2) auch dann folgt, wenn $\Omega\Phi = \Omega\Psi$. Beide Sätze lassen sich zusammen aussprechen in der Form: Zwei Diatensoren lassen sich gegeneinander heben wie gewöhnliche Faktoren, wenn sie in der gleichen Anordnung auf beiden Seiten einer Gleichung auftreten.

Man könnte danach auch eine Division mit Diatensoren einführen, die aber im allgemeinen wenig Zweck hat, weil eine Gleichung wie $\Phi = \frac{\Omega}{\Psi}$ nur dann einen bestimmten Sinn besitzt, wenn angegeben wird, ob das Ψ als Präfaktor oder als Postfaktor von Φ stehen soll. Ein Spezialfall, in welchem dieser Umstand fortfällt, wird im zweitnächsten Paragraphen behandelt.

49. Kodiatensor eines Produktes.

Satz: Der Kodiatensor eines Produktes aus zwei Diatensoren ist gleich dem Produkt aus den Kodiatensoren der beiden Faktoren.

Beweis: Es sei $\Phi = \Phi\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ und $\Psi = \Psi\{\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\}$. Bezeichnen wir die Glieder von $(\Phi\Psi)_2$ mit t_{xx}, t_{xy} usw., so ist t_{xx} direkt aus § 45, Gleichung (1) zu entnehmen. Es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} t_{xx} = {} & (b_x e_y + b_y f_y + b_z g_y)(c_x e_z + c_y f_z + c_z g_z) \\ & - (c_x e_y + c_y f_y + c_z g_y)(b_x e_z + b_y f_z + b_z g_z). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (1)$$

Andererseits ist nach § 30, Gleichung (5):

$$\Phi_2 = \begin{cases} b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \\ c_y a_z - c_z a_y & c_z a_x - c_x a_z & c_x a_y - c_y a_x \\ a_y b_z - a_z b_y & a_z b_x - a_x b_z & a_x b_y - a_y b_x, \end{cases}$$

$$\Psi_2 = \begin{cases} f_y g_z - f_z g_y & f_z g_x - f_x g_z & f_x g_y - f_y g_x \\ g_y e_z - g_z e_y & g_z e_x - g_x e_z & g_x e_y - g_y e_x \\ e_y f_z - e_z f_y & e_z f_x - e_x f_z & e_x f_y - e_y f_x; \end{cases}$$

also ist das erste Glied von $\Phi_2\Psi_2$:

$$\begin{aligned} (b_y c_z - b_z c_y)(f_y g_z - f_z g_y) + (b_z c_x - b_x c_z)(g_y e_z - g_z e_y) \\ + (b_x c_y - b_y c_x)(e_y f_z - e_z f_y). \end{aligned}$$

Der Vergleich mit Gleichung (1) zeigt, daß das erste Glied von $(\Phi\Psi)_2$ mit demjenigen von $\Phi_2\Psi_2$ übereinstimmt. Zyklisch gilt das gleiche für die Glieder t_{yy} und t_{zz}.

Das Glied t_{xy} in $(\Phi\Psi)_2$ ist nach § 45, Gleichung (1):

$$\left.\begin{aligned} t_{xy} &= (b_x e_z + b_y f_z + b_z g_z)(c_x e_x + c_y f_x + c_z g_x) \\ &\quad - (b_x e_x + b_y f_x + b_z g_x)(c_x e_z + c_y f_z + c_z g_z) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

und das entsprechende Glied von $\Phi_2\Psi_2$ ist:

$$(b_y c_z - b_z c_y)(f_z g_x - f_x g_z) + (b_z c_x - b_x c_z)(g_z e_x - g_x e_z) \\ + (b_x c_y - b_y c_x)(e_z f_x - e_x f_z).$$

Auch diese stimmen überein, und daraus folgt zyklisch, daß alle Glieder von $(\Phi\Psi)_2$ mit den entsprechenden Gliedern des Produktes $\Phi_2\Psi_2$ übereinstimmen. Damit ist der Satz bewiesen, daß

$$(\Phi\Psi)_2 = \Phi_2\Psi_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Es folgt unmittelbar:

$$(\Phi^n)_2 = \Phi_2^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

50. Einheitstensor oder Idemfaktor.

Wir bezeichnen mit I (sprich Jota) den bereits bekannten Einheitstensor:

$$I = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix}\right. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Zu seiner schon bekannten Eigenschaft, daß $I\mathfrak{v} = \mathfrak{v}I = \mathfrak{v}$, tritt die weitere:

$$I\Phi = \Phi I = \Phi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Dieselbe ist leicht durch direkte Ausrechnung zu verifizieren. Ebenso leicht sieht man, daß

$$I^2 = I, \quad I^3 = I^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

und damit auch, wenn n eine ganze positive Zahl,

$$I^n = I \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

ist. Der Einheitstensor verhält sich also in allen diesen Beziehungen wie die Zahl Eins. (Negative Potenzen werden im nächsten Paragraphen untersucht.) Es stellt sich aber ein sehr beachtenswerter Unterschied heraus, wenn man auf gebrochene Potenzen eingeht. Es genügt, die Quadratwurzel zu betrachten. Ist Ω irgend eine Operation, so wird man unter $\sqrt{\Omega}$ eine Operation verstehen, die zweimal nacheinander angewendet die Operation Ω ergibt, so daß also $\sqrt{\Omega}\sqrt{\Omega} = \Omega$ die Definitionsgleichung der operativen Quadratwurzel ist. Unter $\sqrt{I}$ ist also jede Operation zu verstehen, die, wenn sie zweimal nacheinander auf einen Vektor geübt wird, diesen Vektor in seiner ursprünglichen Lage und Größe wieder herstellt. Es gibt aber offenbar zwei Operationsarten, welche diesen Erfolg haben, nämlich:

1. Man spiegelt den Vektor $2m$ oder $2m+1$ mal an einer beliebigen Ebene, wo m eine ganze Zahl; wiederholt man diese Operation, so wird der Vektor $4m$ oder $4m+2$ mal gespiegelt und wird dadurch offenbar in seiner ursprünglichen Lage und Größe wieder hergestellt.

2. Man dreht den Vektor um irgend eine Achse um den Winkel $2m\pi$ oder $(2m+1)\pi$; wiederholt man diese Operation, so wird er um $4m\pi$ oder $(2m+1)2\pi$ gedreht, d. h. er nimmt seine ursprüngliche Lage wieder ein.

Im ersten Fall ist die Ebene, an welcher man spiegelt, im zweiten die Achse, um welche man dreht, vollkommen willkürlich; in beiden Fällen ist außerdem m eine beliebige ganze Zahl. $\sqrt{I}$ ist also unendlich vieldeutig. Dadurch unterscheidet sich der Einheitstensor von der Zahl Eins, deren Quadratwurzel bekanntlich nur zwei Werte ± 1 hat. Er ist eben keine Zahl, sondern ein Tensor. Es ist daher zweckmäßig, den Einheitstensor von der algebraischen Einheit durch ein besonderes Zeichen zu unterscheiden. Wir wählen dafür das obige I.

Gibbs hat zwar den Einheitstensor in der obigen Form nicht gekannt, hat aber auf dem Gebiet der Dyadenrechnung eine mit unserem I vollkommen gleichwertige Größe behandelt und hat sie den Idemfaktor genannt. Die Bezeichnungen „Einheitstensor“ und „Idemfaktor“ können also als gleichbedeutend gebraucht werden.

Satz: Sind $\boldsymbol{\Phi}$ und $\boldsymbol{\Psi}$ zwei vollständige Diatensoren, und ist $\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi} = I$, so ist auch $\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Phi} = I$.

Beweis: Soll $\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}$ ein Einheitstensor sein und ist $\mathfrak{v}$ ein ganz beliebiger Vektor, so ist

$$\mathfrak{v}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi} = \mathfrak{v}, \qquad (5)$$

also

$$\mathfrak{v}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Phi} = \mathfrak{v}\boldsymbol{\Phi},$$

und dies kann man lesen

$$(\mathfrak{v}\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Phi}) = \mathfrak{v}\boldsymbol{\Phi}. \qquad (6)$$

Also

$$\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Phi} = I. \qquad (7)$$

Man kann danach die Gleichung (7) auch schreiben:

$$\Phi = \frac{I}{\Psi} \quad \text{und} \quad \Psi = \frac{I}{\Phi}, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

weil hier die Anordnung von Φ und Ψ belanglos ist.

51. Inverse oder reziproke Diatensoren.

Ist $\Phi \Psi = I$, so heißt Ψ der inverse oder der reziproke Diatensor zu Φ und wird $\frac{I}{\Phi}$ oder Φ^{-1} geschrieben. Die Definitionsgleichung von Φ^{-1} lautet also:

$$\Phi \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \Phi = I. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

NB. I hat die Determinante 1, ist also ein vollständiger Diatensor. Demnach müssen auch Φ und Ψ vollständige Diatensoren sein, wenn sie die Gleichung (1) erfüllen sollen; hätte einer von ihnen die Determinante Null, so hätte der zweite die Determinante ∞. Der Fall scheidet also als unbestimmt aus. Von Reziprozität kann also nur bei vollständigen Diatensoren die Rede sein; unvollständige verhalten sich in dem Ausdruck $\frac{I}{\Phi}$ wie eine Null.

Da $I^{-1} = I$, ist offenbar $I^{-n} = (I^{-1})^n$ und damit gilt der Satz:

$$I^n = I,$$

auch wenn n eine negative ganze Zahl ist.

Es handelt sich nun zunächst darum, Φ^{-1} durch die Glieder von Φ auszudrücken. Ist $\Phi = \Phi\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ und $\Phi^{-1} = \Phi\{\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'\}$, so denke man sich die Multiplikation ausgeführt. Dann lauten etwa die drei Gleichungen der ersten Kolonne:

$$\begin{cases} a_x a'_x + a_y b'_x + a_z c'_x = 1, \\ b_x a'_x + b_y b'_x + b_z c'_x = 0, \\ c_x a'_x + c_y b'_x + c_z c'_x = 0. \end{cases} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Determinante des Systems ist das zu Φ gehörige S_3, also ergeben sich für a'_x, b'_x und c'_x die Lösungen:

$$S_3 a'_x = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad S_3 b'_x = \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}, \quad S_3 c'_x = \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}. \quad . \; . \quad (3)$$

Die Determinanten, welche hier auf der rechten Seite stehen, sind aber genau die Kofaktoren, welche die erste Zeile des Kodiatensors Φ_2 bilden, also ergibt sich mit zyklischer Fortsetzung

Satz I:

$$\Phi_c^{-1} = \frac{\Phi_2}{S_3}, \quad \Phi^{-1} = \frac{\Phi_{2c}}{S_3}, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

eine neue wichtige Beziehung des Kodiatensors.

Dividiert man sämtliche Glieder des Kodiatensors durch S_3, so dividiert man seine Determinante durch $S_3{}^3$, also ist die Determinante von Φ^{-1} der reziproke Wert von S_3 oder in leicht verständlicher Bezeichnung (vgl. § **30**, Satz II)

Satz II:

$$S_{\Phi^{-1}3} = S_{\Phi 3}^{-1}, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

wie es nach § **44**, Satz II, der Fall sein muß.

Aus Gleichung (4) ergeben sich nun folgende Sätze:

Satz III:

$$\Phi^{-1}\Psi^{-1} = \frac{\Phi_2 \Psi_2}{S_{\Phi 3} S_{\Psi 3}} = \frac{(\Phi \Psi)_2}{S_{\Phi \Psi 3}} = (\Phi \Psi)^{-1}. \quad \ldots \quad (6)$$

Setzt man $\Phi = \Psi$, so ergibt sich $(\Phi^{-1})^2 = (\Phi^2)^{-1}$ und durch Fortsetzung

Satz IV:

$$(\Phi^{-1})^n = (\Phi^n)^{-1}. \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Da $(\Phi_2)_c = (\Phi_c)_2$ ist (§ **30**, Satz IV) und da außerdem konjugierte Diatensoren gleiche Determinanten haben, so folgt

Satz V:

$$(\Phi^{-1})_c = (\Phi_c)^{-1}; \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

es kann also für die beiden Seiten dieser Gleichung das einfache Zeichen Φ_c^{-1} eingeführt werden.

Multipliziert man die erste Gleichung (4) mit Φ_c, so erhält man

Satz VI:

$$\Phi_2 \Phi_c = S_3 I. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Wendet man die Gleichung (4)

$$\Phi_c^{-1} = \frac{\Phi_2}{S_3} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

auf Φ^{-1} an, so lautet sie, da die Determinante von $\Phi^{-1} = \frac{1}{S_3}$ ist,

$$\Phi_c = (\Phi^{-1})_2 \,.\, S_3. \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Multipliziert man (10) und (11) miteinander, so ergibt sich

$$I = \Phi_2 (\Phi^{-1})_2, \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

also

Satz VII:

$$(\Phi^{-1})_2 = (\Phi_2)^{-1} = \Phi_2^{-1}. \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Endlich wurde in § **30**, Gleichung (7), für den Kodiatensor von $\Phi\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ der einfache Ausdruck gegeben:

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,\Phi\{\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'\},$$

wo $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ die zu $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ reziprokalen Vektoren sind.

Mit Gleichung (4) liefert dies für Φ^{-1} den einfachen Ausdruck

Satz VIII:

$$\Phi^{-1}\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\} = \Phi_c\{\mathfrak{a}', \mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'\} \cdot \quad \cdots \cdots \quad (14)$$

Der reziproke Diatensor ist konjugiert mit dem Diatensor aus den Komponentenbeträgen der reziprokalen Zeilenvektoren.

52. Vollständigkeit und Unvollständigkeit bei Produkten.

Erster Hauptfall: Es sei zunächst Φ ein vollständiger Diatensor und Ψ ein solcher, der vollständig, planar oder linear sein kann. Ist Ψ vollständig, so folgt ohne weiteres, daß $\Phi\Psi$ sowohl wie $\Psi\Phi$ vollständig ist, weil das Produkt zweier endlichen Determinanten wieder eine endliche Determinante ergibt.

Ist Ψ planar, so sieht man ohne weiteres, daß das Produkt der beiden planar sein muß, wenn Ψ der distale Faktor ist; denn die Multiplikation von $\mathfrak{v}$ mit dem proximalen Faktor liefert einen beliebigen Vektor, der durch die Multiplikation mit Ψ ein planares Produkt erzeugt. Ist aber Ψ der proximale Faktor, so liefert Ψ mit einem beliebigen Vektor ein planares Produkt, und dann folgt aus § **37**, daß auch das Produkt von $\Psi\mathfrak{v}$ mit Φ planar sein muß.

Ist Ψ linear, so ergibt dieselbe Erwägung, daß das Produkt aus Φ und Ψ linear ist. Die Unterfälle des ersten Hauptfalles lassen sich also zusammenfassen in den Satz: Das Produkt aus einem vollständigen und einem beliebigen Diatensor hat den Unvollständigkeitsgrad des letzteren.

Zweiter Hauptfall: Φ sei planar, Ψ zunächst gleichfalls planar. Dann liefert die Multiplikation eines beliebigen Vektors mit dem proximalen Faktor lauter Vektoren, die in einer Ebene liegen; die Multiplikation mit dem distalen Faktor vernichtet alle Komponenten, welche senkrecht zur Ebene des distalen Faktors stehen. Im allgemeinen also liefern zwei planare Diatensoren ein planares Produkt. Eine Ausnahme findet jedoch statt, wenn die Ebenen der beiden Diatensoren aufeinander senkrecht stehen. Werden in diesem Fall die sämtlichen Komponenten senkrecht zu der einen Ebene vernichtet, so bleiben nur Komponenten übrig, welche in die Durchschnittslinie der beiden Ebenen fallen. Also ergibt sich: Das Produkt zweier planaren Diatensoren ist im allgemeinen planar, wird aber linear, wenn die Ebenen der beiden Faktoren senkrecht aufeinander stehen.

Dieselbe Erwägung zeigt: Das Produkt aus einem planaren und aus einem linearen Diatensor ist im allgemeinen linear, wird aber Null, wenn die Gerade des linearen Diatensors senkrecht auf der Ebene des planaren steht.

Dritter Hauptfall: Φ und Ψ sind linear: Ihr Produkt ist gleichfalls linear, wird aber Null, wenn die Geraden der beiden Faktoren aufeinander senkrecht stehen.

Fünftes Kapitel: **Die Faktorenzerlegung und die auf dieselbe gegründete Behandlung der Transformation des Raumes.**

53. Faktorenzerlegung.

Zerlegt man einen Diatensor, wie das im dritten Kapitel geschah, in zwei Summanden T und τ, und multipliziert diese mit einem beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$, so bedeutet dies, wie dort hervorgehoben wurde, daß die beiden Operationen T und τ einzeln an dem Argument $\mathfrak{v}$ vorgenommen und daß ihre Resultate geometrisch addiert werden sollen. Zerlegt man aber einen Diatensor in zwei Faktoren und multipliziert ihn in dieser Form mit $\mathfrak{v}$, so bedeutet das, daß zunächst die proximale Operation an $\mathfrak{v}$ vorgenommen, und daß dann die distale an dem Ergebnis der ersten vorgenommen wird. Dieser letztere Vorgang ist im allgemeinen erheblich anschaulicher als der erstere, und darum ist die Faktorenzerlegung von besonderer Wichtigkeit.

Es sei nun ein vollständiger Diatensor

$$\Phi = \begin{cases} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

gegeben. Wir bilden zwei neue Diatensoren:

$$T = \begin{cases} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

und

$$\tau = \begin{cases} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z . \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

Wir bilden das Produkt $T\tau$ und stellen die Bedingung, daß $T\tau = \Phi$ sein soll. Dann sind die Gleichungen zu erfüllen

$$\left.\begin{aligned} A_x a_x + A_y b_x + A_z c_x &= t_{11}, \\ A_x a_y + A_y b_y + A_z c_y &= t_{12}, \\ A_x a_z + A_y b_z + A_z c_z &= t_{13}, \\ B_x a_x + B_y b_x + B_z c_x &= t_{21}, \\ &\text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (4)$$

Das sind neun bilineare Gleichungen für 18 Unbekannte; man kann also der Lösung noch neun Bedingungen willkürlich vorschreiben.

In der nächstliegenden Form geschieht das, indem man den einen der beiden Faktoren willkürlich wählt; dann sind für den anderen neun lineare Gleichungen zu erfüllen, seine Glieder sind also eindeutig bestimmt. Es ergibt sich danach als erstes Resultat:

Man kann jeden Diatensor Φ in zwei Faktoren $T\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$ und $\tau\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ zerlegen, so daß die Bedingung erfüllt wird (vgl. § **45**, Satz I), wenn $\mathfrak{v}$ ein beliebiger Vektor,

$$\mathfrak{A}_c(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{B}_c(\mathfrak{b}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{C}_c(\mathfrak{c}\,\mathfrak{v}) = \Phi\mathfrak{v}, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

und man kann dabei für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ drei nicht komplanare Vektoren willkürlich auswählen, wo dann die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ eindeutig bestimmt sind; oder man kann auch die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ beliebig, aber nicht komplanar auswählen, und dann sind die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ eindeutig bestimmt.

Kehrt man die Reihenfolge von T und τ um, so modifiziert sich Gleichung (5) zu

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{A}_c\mathfrak{v}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{B}_c\mathfrak{v}) + \mathfrak{c}(\mathfrak{C}_c\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}\Phi. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

In der beliebigen Wählbarkeit liegt schon der Satz, daß man den einen der beiden Faktoren mit einem beliebigen Skalar multiplizieren kann, wenn man den anderen mit demselben Skalar dividiert. Auch bleibt der Satz III des § **45** selbstverständlich erhalten.

Weitere Zerlegungen ergeben sich in den späteren Paragraphen.

54. Versoren in der Normalform.

Wir nehmen zwei Koordinatensysteme der x, y, z und ξ, η, ζ an, deren Kosinus seien $\cos \xi, x = \alpha_1$, $\cos \xi, y = \alpha_2$ usw.

Im System der x, y, z bilden wir einen Diatensor, der speziell mit X bezeichnet werden möge:

$$X = \begin{cases} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3. \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die drei Skalare desselben sind auf Grund der bekannten Eigenschaften der Kosinus

$$S_1 = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3, \quad S_{21} = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3, \quad S_3 = 1, \quad . \quad . \quad (2)$$

und es ist, wie die einfache Ausrechnung zeigt, der Kodiatensor

$$X_2 = X. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Es seien nun $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Grundvektoren in x, y, z und $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ diejenigen in ξ, η, ζ; dann ist

$$\mathfrak{i}' = \alpha_1 \mathfrak{i} + \alpha_2 \mathfrak{j} + \alpha_3 \mathfrak{k}.$$

Bildet man das Produkt $X\mathfrak{i}'$, so erhält man

$$\begin{aligned} X\mathfrak{i}' = {} & (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\,\mathfrak{i} \\ & + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)\,\mathfrak{j} \\ & + (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3)\,\mathfrak{k} = \mathfrak{i} \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und mit zyklischer Fortsetzung

$$X\mathfrak{i}' = \mathfrak{i}, \quad X\mathfrak{j}' = \mathfrak{j}, \quad X\mathfrak{k}' = \mathfrak{k}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Der Diatensor X führt also die Vektoren $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$, ohne ihren Betrag zu ändern, in die Lage $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ über, d. h. er ist ein Versor, der das Koordinatensystem der ξ, η, ζ in die Lage x, y, z dreht. Es leuchtet auch ein, daß man jede reine Drehung durch einen Diatensor der Form (1) darstellen kann; denn man kann offenbar jede beliebige Drehung dadurch charakterisieren, daß sie irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem der ξ, η, ζ in ein zweites der x, y, z überführt. Die in Gleichung (1) gegebene Gestalt möge die Normalform des Versors heißen.

Da die Determinante von X gleich 1, und da $X_2 = X$ ist, folgt

$$X^{-1} = X_c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

„Konjugierte Versoren bewirken entgegengesetzte Drehungen von gleicher absoluter Größe um die gleiche Achse.“ Dies ist leicht zu verifizieren, wenn man entsprechend der Gleichung (4) die Gleichungen für $X_c\mathfrak{i}$ usw. herstellt.

Es liegt nun zunächst die Aufgabe vor, die Achsen und den Winkelbetrag der durch X bewirkten Drehung zu ermitteln. Zu dem Ende identifizieren wir unseren Versor X mit dem Versor $\boldsymbol{\Phi}_\varphi$ von Gleichung (15) des § **41**, nachdem in dem letzteren die Richtungskosinus der Achse mit λ, μ, ν, statt mit α, β, γ bezeichnet sind.

Es findet sich

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \lambda^2 (1 - \cos\varphi) + \cos\varphi, \\
\alpha_2 &= \lambda\mu (1 - \cos\varphi) - \nu \sin\varphi, \\
\alpha_3 &= \nu\lambda (1 - \cos\varphi) + \mu \sin\varphi, \\
\beta_1 &= \lambda\mu (1 - \cos\varphi) + \nu \sin\varphi, \\
\beta_2 &= \mu^2 (1 - \cos\varphi) + \cos\varphi, \\
\beta_3 &= \mu\nu (1 - \cos\varphi) - \lambda \sin\varphi, \\
\gamma_1 &= \nu\lambda (1 - \cos\varphi) - \mu \sin\varphi, \\
\gamma_2 &= \mu\nu (1 - \cos\varphi) + \lambda \sin\varphi, \\
\gamma_3 &= \nu^2 (1 - \cos\varphi) + \cos\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Man findet aus der ersten, fünften und neunten dieser Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda^2 &= \frac{\alpha_1 - \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}, \\
\mu^2 &= \frac{\beta_2 - \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}, \\
\nu^2 &= \frac{\gamma_3 - \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Zugleich ergibt sich durch Addition derselben Gleichungen

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 - 1}{2} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

und damit

$$\left.\begin{aligned}
\lambda^2 &= \frac{1 + \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3}{3 - \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3}, \\
\mu^2 &= \frac{1 - \alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3}{3 - \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3}, \\
\nu^2 &= \frac{1 - \alpha_1 - \beta_2 + \gamma_3}{3 - \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Beständen diese Gleichungen für sich allein, so würden sie zusammen eine achtdeutige Lösung darstellen. Da aber λ, μ, ν den sämtlichen Gleichungen (7) genügen müssen, sieht man leicht, daß sie nur sämtlich positiv oder sämtlich negativ sein können. Das System der Gleichungen (10) ist also in Wirklichkeit nur zweideutig. Es liefert die Doppelrichtung der Achse für die beiden konjugierten Systeme X und X_c.

Für $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$ erhalten λ, μ, ν die Form $\frac{0}{0}$, aber in diesem Fall ist die Tatsache, daß die Drehung Null ist, von vornherein gegeben.

Spezialfälle.

I. Achsen der Drehung seien der Reihe nach die Achsen der x, der y und der z. Man findet leicht, daß der Versor für diese Fälle die Gestalt annimmt:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix}\right. \text{ und } \left\{\begin{matrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{matrix}\right. \text{ und } \left\{\begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix}\right. \quad (11)$$

II. Drehung um $2n\pi$, wo n eine beliebige ganze Zahl, auch Null, sein kann. Offenbar wird $X = I$.

III. Quadrantaler Versor, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\cos\varphi = 0$. Die Glieder des Versors bestimmen sich durch

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda^2, & \alpha_2 &= \lambda\mu - \nu, & \alpha_3 &= \lambda\nu + \mu, \\ \beta_2 &= \mu^2, & \beta_1 &= \mu\lambda + \nu, & \beta_3 &= \mu\nu - \lambda, \\ \gamma_3 &= \nu^2, & \gamma_1 &= \nu\lambda - \mu, & \gamma_2 &= \mu\nu + \lambda. \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (12)$$

Durch Elimination von λ, μ, ν ergeben sich hieraus die Kriterien dafür, daß ein gegebenes X ein quadrantaler Versor ist.

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 &= 1; \\ \alpha_2 &= -\sqrt{\gamma_3} + \sqrt{\alpha_1}\sqrt{\beta_2}, \\ \alpha_3 &= \sqrt{\beta_2} + \sqrt{\gamma_3}\sqrt{\alpha_1}, \\ \beta_1 &= \sqrt{\gamma_3} + \sqrt{\alpha_1}\sqrt{\beta_2}, \\ \beta_3 &= -\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\beta_2}\sqrt{\gamma_3}, \\ \gamma_1 &= -\sqrt{\beta_2} + \sqrt{\gamma_3}\sqrt{\alpha_1}, \\ \gamma_2 &= \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\beta_2}\sqrt{\gamma_3}. \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (13)$$

Nimmt man sämtliche Wurzeln in diesen Gleichungen mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, so erhält man X_c. (Deshalb sind die Produkte mit getrennten Wurzelzeichen geschrieben.) Die Bedingungen $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ usw. sind von selbst erfüllt. Die vorstehenden Gleichungen zeigen, daß der quadrantale Versor bis auf das Vorzeichen vollständig gegeben ist, wenn man zwei seiner Diagonalglieder kennt; die Positionswinkel der Drehungsachse sind leicht aus (12) zu entnehmen.

IV. Biquadrantaler Versor, $\varphi = \pi$, $\cos\varphi = -1$.

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\lambda^2 - 1, & \beta_3 &= \gamma_2 = 2\mu\nu, \\ \beta_2 &= 2\mu^2 - 1, & \gamma_1 &= \alpha_3 = 2\nu\lambda, \\ \gamma_3 &= 2\nu^2 - 1, & \alpha_2 &= \beta_1 = 2\lambda\mu. \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (14)$$

Die Symmetrie des biquadrantalen Versors tritt hervor. Seine Kriterien sind:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 &= -1; \\
\alpha_2 = \beta_1 &= \sqrt{\alpha(_1 + 1)(\beta_2 + 1)}, \\
\beta_3 = \gamma_2 &= \sqrt{(\beta_2 + 1)(\gamma_3 + 1)}, \\
\gamma_1 = \alpha_3 &= \sqrt{(\gamma_3 + 1)(\alpha_1 + 1)}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Legt man die Achse eines biquadrantalen Versors in die Achse der x, so nimmt er die Gestalt an

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1. \end{matrix}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Nimmt man einen zweiten biquadrantalen Versor, dessen Achse in der xy-Ebene liegt und mit der Achse der x den Winkel ψ macht, so ist für ihn $\lambda = \cos\psi$, $\mu = \sin\psi$, $\nu = 0$. Er hat also die Gestalt:

$$\left\{\begin{matrix} 2\cos^2\psi - 1 & 2\cos\psi\sin\psi & 0 \\ 2\sin\psi\cos\psi & 2\sin^2\psi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1. \end{matrix}\right. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Multipliziert man (16) als Präfaktor mit (17), so erhält man

$$\left\{\begin{matrix} 2\cos^2\psi - 1 & 2\cos\psi\sin\psi & 0 \\ -2\sin\psi\cos\psi & 1 - 2\sin^2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix}\right. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Das ist:

$$\left\{\begin{matrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi & 0 \\ -\sin 2\psi & \cos 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1, \end{matrix}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

und dies ist der Versor, welcher eine Drehung vom Betrage -2ψ um die Achse der z hervorbringt. Nimmt man dagegen bei der Multiplikation (16) als Postfaktor, so erhält man

$$\left\{\begin{matrix} \cos 2\psi & -\sin 2\psi & 0 \\ \sin 2\psi & \cos 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1, \end{matrix}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

also eine Drehung vom Betrage $+2\psi$. Es folgt: Zwei nacheinander ausgeführte biquadrantale Drehungen des Raumes um zwei Achsen, welche miteinander den Winkel ψ machen, ergeben insgesamt eine Drehung vom Betrage 2ψ um eine Achse, welche auf den beiden Achsen der biquadrantalen Drehungen senkrecht steht. Die resultierende Drehung wechselt ihr Vorzeichen, wenn man die Reihenfolge der biquadrantalen Drehungen umkehrt.

Anmerkung: Der in § **11** aufgestellte Satz, daß aus der additiven Zusammensetzung reiner Deformationen immer wieder eine reine Deformation hervorgeht, gilt nicht für den Fall, daß die Deformationen multiplikativ kombiniert, also nacheinander ausgeführt werden; der vorstehende Satz ist ein Beispiel dafür.

Man findet sehr leicht, daß das Produkt zweier Tensoren dann, und nur dann, ein Tensor ist, wenn deren Hauptachsen zusammenfallen.

Die Zeilenvektoren von X sind offenbar $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$; die Kolonnenvektoren sind die Reziprokalen dazu, also gleichfalls $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$, da ja diese ihre eigenen Reziprokalen sind.

Man bemerkt, daß in den Gleichungen (6) und (7), welche Betrag und Achse der durch X dargestellten Drehung festlegen, nur die drei Diagonalglieder α_1, β_2, γ_3 von X auftreten. Die durch sie bestimmten Winkel sind auch unmittelbar vorstellbar, da sie die Winkel zwischen den gleichnamigen Achsen der beiden in Betracht kommenden Koordinatensysteme darstellen. Ist die Drehung durch φ und λ, μ, ν gegeben, so liefern die Gleichungen (9) und (10) nur die Diagonalglieder von X. Es bleibt also die Aufgabe, die Seitenglieder von X festzustellen, wenn die Diagonalglieder gegeben sind. Es stehen dafür die bekannten Bedingungsgleichungen zur Verfügung, welche, wenn die bekannten Größen auf die rechte Seite gebracht werden, lauten:

$$\left.\begin{aligned} \beta_3\gamma_2 &= \beta_2\gamma_3 - \alpha_1, \\ \gamma_1\alpha_3 &= \gamma_3\alpha_1 - \beta_2, \\ \alpha_2\beta_1 &= \alpha_1\beta_2 - \gamma_3, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1 - \alpha_1^2, & \beta_3^2 + \beta_1^2 &= 1 - \beta_2^2, & \gamma_1^2 + \gamma_2^2 &= 1 - \gamma_3^2, \\ \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 - \alpha_1^2, & \gamma_2^2 + \alpha_2^2 &= 1 - \beta_2^2, & \alpha_3^2 + \beta_3^2 &= 1 - \gamma_3^2. \end{aligned}\right\} (22)$$

Aus (22) bildet sich leicht

$$\beta_3^2 + \gamma_2^2 = 1 + \alpha_1^2 - \beta_2^2 - \gamma_3^2,$$

dazu aus (21)

$$2\beta_3\gamma_2 = 2\beta_2\gamma_3 - 2\alpha_1;$$

$$\begin{aligned} (\beta_3 + \gamma_2)^2 &= (1 - \alpha_1)^2 - (\beta_2 - \gamma_3)^2, \\ (\beta_3 - \gamma_2)^2 &= (1 + \alpha_1)^2 - (\beta_2 + \gamma_3)^2. \end{aligned}$$

Daraus mit Fortsetzung

$$\left\{\begin{aligned} 2\beta_3 &= \sqrt{(1-\alpha_1)^2 - (\beta_2-\gamma_3)^2} + \sqrt{(1+\alpha_1)^2 - (\beta_2+\gamma_3)^2}, \\ 2\gamma_2 &= \sqrt{(1-\alpha_1)^2 - (\beta_2-\gamma_3)^2} - \sqrt{(1+\alpha_1)^2 - (\beta_2+\gamma_3)^2}, \end{aligned}\right. \quad (23)$$

$$\left\{\begin{aligned} 2\gamma_1 &= \sqrt{(1-\beta_2)^2 - (\gamma_3-\alpha_1)^2} + \sqrt{(1+\beta_2)^2 - (\gamma_3+\alpha_1)^2}, \\ 2\alpha_3 &= \sqrt{(1-\beta_2)^2 - (\gamma_3-\alpha_1)^2} - \sqrt{(1+\beta_2)^2 - (\gamma_3+\alpha_1)^2}, \end{aligned}\right. \quad (24)$$

$$\left\{\begin{aligned} 2\alpha_2 &= \sqrt{(1-\gamma_3)^2 - (\alpha_1-\beta_2)^2} + \sqrt{(1+\gamma_3)^2 - (\alpha_1+\beta_2)^2}, \\ 2\beta_1 &= \sqrt{(1-\gamma_3)^2 - (\alpha_1-\beta_2)^2} - \sqrt{(1+\gamma_3)^2 - (\alpha_1+\beta_2)^2}. \end{aligned}\right. \quad (25)$$

In jedem dieser Gleichungspaare könnte nach der Herleitung auf der linken Seite noch das Zeichen $\pm$ stehen. Dies würde dann auch den in den Gleichungen (21) und (22) ausgesprochenen Bedingungen genügen. Sie müssen aber auch die Bedingungen $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\gamma_3=0$ usw. erfüllen. Und das ist nur der Fall, wenn man die Vorzeichen so wählt, wie sie hier geschrieben sind, oder wenn man β_3 mit γ_2, α_3 mit γ_1 und α_2 mit β_1 bezüglich der Vorzeichnung vertauscht. Die drei Gleichungspaare liefern also, wie es sein muß, die Seitenglieder für die beiden konjugierten Versoren X und X_c.

55. Unendlich kleine Versoren.

Wir nennen einen Versor unendlich klein, wenn sein Drehungswinkel φ unendlich klein ist. In diesem Fall kann man bekanntlich $\sin\varphi$ durch φ und $\cos\varphi$ durch $1-\frac{\varphi^2}{2}$ ersetzen. Damit wird aus Gleichung (9) des vorigen Paragraphen

$$1-\frac{\varphi^2}{2}=\frac{\alpha_1+\beta_2+\gamma_3-1}{2}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\varphi^2=3-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

und damit vereinfachen sich die Gleichungen (7) des vorigen Paragraphen zu

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2\varphi^2 &= 1+\alpha_1-\beta_2-\gamma_3, \\ \mu^2\varphi^2 &= 1-\alpha_1+\beta_2-\gamma_3, \\ \nu^2\varphi^2 &= 1-\alpha_1-\beta_2+\gamma_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Da jede der Größen α_1, β_2 und γ_3 nicht >1 sein kann, folgt aus (2), daß sie sich in der Form

$$\alpha_1=1-\varepsilon_1, \quad \beta_2=1-\varepsilon_2, \quad \gamma_3=1-\varepsilon_3 \quad \ldots \quad (4)$$

darstellen lassen, wo ε_1, ε_2, ε_3 unendlich kleine Größen sind. Setzt man diese in die Gleichungen (23), (24) und (25) des vorigen Paragraphen, so findet sich der Ausdruck für X in ε_1, ε_2, ε_3, wenn die unendlich kleinen Größen höherer Ordnung fortgelassen werden:

$$X=\left\{\begin{matrix} 1-\varepsilon_1 & \sqrt{\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3} & -\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3} \\ -\sqrt{\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3} & 1-\varepsilon_2 & \sqrt{-\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} \\ \sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3} & -\sqrt{-\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} & 1-\varepsilon_3. \end{matrix}\right. \quad (5)$$

Zugleich wird aus (3):

$$\left.\begin{aligned}\lambda^2\varphi^2 &= -\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\\ \mu^2\varphi^2 &= \varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3,\\ \nu^2\varphi^2 &= \varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3,\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

und damit läßt (5) sich schreiben:

$$X=\left\{\begin{matrix}1-\varepsilon_1 & \nu\varphi & -\mu\varphi\\ -\nu\varphi & 1-\varepsilon_2 & \lambda\varphi\\ \mu\varphi & -\lambda\varphi & 1-\varepsilon_3.\end{matrix}\right. \quad \cdots\cdots \quad (7)$$

Wir nehmen nun einen zweiten unendlich kleinen Versor an:

$$X'=\left\{\begin{matrix}1-\varepsilon_1' & \nu'\varphi' & -\mu'\varphi'\\ -\nu'\varphi' & 1-\varepsilon_2' & \lambda'\varphi'\\ \mu'\varphi' & -\lambda'\varphi' & 1-\varepsilon_3',\end{matrix}\right. \quad \cdots\cdots \quad (8)$$

multiplizieren X mit X', bezeichnen das Produkt als X'' und markieren alle Glieder von X'' entsprechend. Dann sind die Diagonalglieder von X'', wenn die unendlich kleinen Größen von höherer Ordnung in den einzelnen Posten fortgelassen werden,

$$\left.\begin{aligned}1-\varepsilon_1'' &= 1-\varepsilon_1-\varepsilon_1'-\nu\varphi\,\nu'\varphi'-\mu\varphi\,\mu'\varphi',\\ 1-\varepsilon_2'' &= 1-\varepsilon_2-\varepsilon_2'-\lambda\varphi\,\lambda'\varphi'-\nu\varphi\,\nu'\varphi',\\ 1-\varepsilon_3'' &= 1-\varepsilon_3-\varepsilon_3'-\mu\varphi\,\mu'\varphi'-\lambda\varphi\,\lambda'\varphi'.\end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (9)$$

Es folgt:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1'' &= \varepsilon_1+\varepsilon_1'+\nu\varphi\,\nu'\varphi'+\mu\varphi\,\mu'\varphi',\\ \varepsilon_2'' &= \varepsilon_2+\varepsilon_2'+\lambda\varphi\,\lambda'\varphi'+\nu\varphi\,\nu'\varphi',\\ \varepsilon_3'' &= \varepsilon_3+\varepsilon_3'+\mu\varphi\,\mu'\varphi'+\lambda\varphi\,\lambda'\varphi'.\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (10)$$

Also ist nach (6):

$$\left.\begin{aligned}\lambda''^2\varphi''^2 &= \varepsilon_2''+\varepsilon_3''-\varepsilon_1'' = (\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1)+(\varepsilon_2'+\varepsilon_3'-\varepsilon_1')+2\lambda\varphi\,\lambda'\varphi'\\ &= \lambda^2\varphi^2+\lambda'^2\varphi'^2+2\lambda\varphi\,\lambda'\varphi'.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Rechts steht ein genaues Quadrat, also durch Wurzelausziehen und mit zyklischer Fortsetzung

$$\left.\begin{aligned}\lambda''\varphi'' &= \lambda\varphi+\lambda'\varphi',\\ \mu''\varphi'' &= \mu\varphi+\mu'\varphi',\\ \nu''\varphi'' &= \nu\varphi+\nu'\varphi'.\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

d. h. 1. wegen der Symmetrie der Wurzeln: Führt man zwei unendlich kleine Drehungen nacheinander aus, so ist die Reihenfolge, in der sie genommen werden, für das Ergebnis gleichgültig.

2. Stellt man jede der Drehungen dadurch dar, daß man ihren Betrag auf ihrer Achse abschneidet, so setzen sie sich wie Vektoren zusammen.

Löst man Gleichung (6) nach den ε auf und setzt das Ergebnis in Gleichung (7), so erhält man die vollständige Darstellung von X durch den Drehungswinkel φ und die Richtungskosinus der Achse:

$$X = \begin{cases} 1 - \frac{\mu^2 + \nu^2}{2}\varphi^2 & \nu\varphi & -\mu\varphi \\ -\nu\varphi & 1 - \frac{\nu^2 + \lambda^2}{2}\varphi^2 & \lambda\varphi \\ \mu\varphi & -\lambda\varphi & 1 - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}\varphi^2. \end{cases}$$

56. Allgemeine Zerlegung und Normalform des Diatensors.

Es ist bekannt, daß eine Einheitskugel durch Multiplikation mit einem beliebigen Diatensor in ein Ellipsoid übergeführt wird. Durch die einfache Betrachtung dieser Tatsache könnte man zu dem Schluß gelangen: Die Multiplikation mit einem beliebigen Diatensor läßt sich stets durch eine Drehung und eine nachfolgende reine Deformation oder durch dieselben Operationen in umgekehrter Reihenfolge ersetzen. Denn man braucht nur drei aufeinander senkrechte Radien der Kugel so zu drehen, daß sie in die Richtungen der Hauptachsen des Ellipsoides übergehen; fügt man dann eine reine Deformation nach diesen Hauptachsen zu, so ist das Deformationsellipsoid hergestellt. Der Schluß wäre aber falsch; denn es fehlt der Nachweis, daß die drei ausgewählten aufeinander senkrechten Radien der Kugel den Hauptachsen des Ellipsoids entsprechen, ja, daß sich überhaupt in der Kugel ein Tripel von drei aufeinander senkrechten Radien findet, welches den drei Hauptachsen des Ellipsoids entspricht. Dieser muß erst mittels einer näheren Betrachtung geführt werden. Wir nehmen an, die Radien der Einheitskugel seien mit einem Diatensor Φ multipliziert, nehmen die Hauptachsen des Deformationsellipsoids zu Doppelrichtungen eines Koordinatensystems der x, y, z und denken uns den Diatensor in diesem System ausgedrückt. Er kann dort in der allgemeinen Form geschrieben werden:

$$\Phi = \begin{cases} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz}. \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Die Grundvektoren im System der x, y, z seien $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$. Sind dann α_1, α_2 usw. in der üblichen Reihenfolge die Winkel, welche irgend ein System der ξ, η, ζ mit x, y, z macht, so sind

$$\mathfrak{i}' = \alpha_1 \mathfrak{i} + \alpha_2 \mathfrak{j} + \alpha_3 \mathfrak{k} \quad \text{und} \quad \mathfrak{j}' = \beta_1 \mathfrak{i} + \beta_2 \mathfrak{j} + \beta_3 \mathfrak{k}$$
$$\text{und} \quad \mathfrak{k}' = \gamma_1 \mathfrak{i} + \gamma_2 \mathfrak{j} + \gamma_3 \mathfrak{k}$$

drei aufeinander senkrechte Einheitsvektoren, die, solange die α, β, γ unbestimmt sind, jede mit der Rechtwinkligkeit verträgliche Lage im System der x, y, z annehmen können. Wir werfen die Frage auf, ob die drei Vektoren $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$ sich so bestimmen lassen, daß sie durch die Multiplikation mit Φ in die drei Halbachsen des Ellipsoids übergeführt werden.

Sind p, q, r drei Skalare von passender Größe, so sind $p\mathfrak{i}$, $q\mathfrak{j}$ und $r\mathfrak{k}$ diese Halbachsen. Die Multiplikation von $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$ mit Φ ergibt der Reihe nach:

$$\left.\begin{array}{ll}
(t_{xx}\alpha_1 + t_{xy}\alpha_2 + t_{xz}\alpha_3)\mathfrak{i} & (t_{xx}\beta_1 + t_{xy}\beta_2 + t_{xz}\beta_3)\mathfrak{i} \\
+ (t_{yx}\alpha_1 + t_{yy}\alpha_2 + t_{yz}\alpha_3)\mathfrak{j} & + (t_{yx}\beta_1 + t_{yy}\beta_2 + t_{yz}\beta_3)\mathfrak{j} \\
+ (t_{zx}\alpha_1 + t_{zy}\alpha_2 + t_{zz}\alpha_3)\mathfrak{k}, & + (t_{zx}\beta_1 + t_{zy}\beta_2 + t_{zz}\beta_3)\mathfrak{k}, \\
\multicolumn{2}{c}{(t_{xx}\gamma_1 + t_{xy}\gamma_2 + t_{xz}\gamma_3)\mathfrak{i}} \\
\multicolumn{2}{c}{+ (t_{yx}\gamma_1 + t_{yy}\gamma_2 + t_{yz}\gamma_3)\mathfrak{j}} \\
\multicolumn{2}{c}{+ (t_{zx}\gamma_1 + t_{zy}\gamma_2 + t_{zz}\gamma_3)\mathfrak{k}.}
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Die gestellte Bedingung ist also erfüllt, wenn man die α, β, γ durch die Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{array}{ll}
t_{xx}\alpha_1 + t_{xy}\alpha_2 + t_{xz}\alpha_3 = p, & t_{xx}\beta_1 + t_{xy}\beta_2 + t_{xz}\beta_3 = 0, \\
t_{yx}\alpha_1 + t_{yy}\alpha_2 + t_{yz}\alpha_3 = 0, & t_{yx}\beta_1 + t_{yy}\beta_2 + t_{yz}\beta_3 = q, \\
t_{zx}\alpha_1 + t_{zy}\alpha_2 + t_{zz}\alpha_3 = 0, & t_{zx}\beta_1 + t_{zy}\beta_2 + t_{zz}\beta_3 = 0, \\
\multicolumn{2}{c}{t_{xx}\gamma_1 + t_{xy}\gamma_2 + t_{xz}\gamma_3 = 0,} \\
\multicolumn{2}{c}{t_{yx}\gamma_1 + t_{yy}\gamma_2 + t_{yz}\gamma_3 = 0,} \\
\multicolumn{2}{c}{t_{zx}\gamma_1 + t_{zy}\gamma_2 + t_{zz}\gamma_3 = r.}
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit α_1, die vierte mit β_1, die siebente mit γ_1 und addiert, so erhält man $t_{xx} = p\alpha_1$, und durch die auf der Hand liegende Fortsetzung des Verfahrens findet man

$$\left.\begin{array}{lll}
t_{xx} = p\alpha_1, & t_{xy} = p\alpha_2, & t_{xz} = p\alpha_3, \\
t_{yx} = q\beta_1, & t_{yy} = q\beta_2, & t_{yz} = q\beta_3, \\
t_{zx} = r\gamma_1, & t_{zy} = r\gamma_2, & t_{zz} = r\gamma_3.
\end{array}\right\} \quad \cdots \quad (4)$$

Damit wird

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= t_{xx}^2 + t_{xy}^2 + t_{xz}^2, \\ q^2 &= t_{yx}^2 + t_{yy}^2 + t_{yz}^2, \\ r^2 &= t_{zx}^2 + t_{zy}^2 + t_{zz}^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{t_{xx}}{p}, & \alpha_2 &= \frac{t_{xy}}{p}, & \alpha_3 &= \frac{t_{xz}}{p}, \\ \beta_1 &= \frac{t_{yx}}{q}, & \beta_2 &= \frac{t_{yy}}{q}, & \beta_3 &= \frac{t_{yz}}{q}, \\ \gamma_1 &= \frac{t_{zx}}{r}, & \gamma_2 &= \frac{t_{zy}}{r}, & \gamma_3 &= \frac{t_{zz}}{r}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Es müssen nun die α, β, γ den bekannten Bedingungsgleichungen der Orthogonalität genügen, und zwar, wenn die Ableitung allgemein gültig sein soll, ohne daß dadurch Beziehungen zwischen den t vorgeschrieben werden, die nicht von selbst erfüllt sind. Aus den Gleichungen (5) und (6) ergibt sich ohne weiteres, daß die Bedingungen vom Typus $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ identisch erfüllt sind. Außerdem aber müssen auch diejenigen Bedingungen erfüllt sein, in denen die mit verschiedenen Buchstaben benannten Kosinus auftreten, also die Bedingungen vom Typus $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ oder $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0$. Welchen Typus man wählt, ist gleichgültig, da bekanntlich der eine aus dem anderen folgt. Es muß also, wenn die letztere Form gewählt wird,

$$\left.\begin{aligned} t_{xx} t_{yx} + t_{xy} t_{yy} + t_{xz} t_{yz} &= 0, \\ t_{yx} t_{zx} + t_{yy} t_{zy} + t_{yz} t_{zz} &= 0, \\ t_{zx} t_{xx} + t_{zy} t_{xy} + t_{zz} t_{xz} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

sein, und hierdurch werden anscheinend den t besondere Bedingungen auferlegt.

Das ist aber nur dem Anschein nach der Fall; denn der Tensor Φ ist an sich schon spezialisiert, und zwar durch die Voraussetzung, daß er auf die Hauptachsen seines Deformationsellipsoids bezogen sei. Diese Voraussetzung involviert das Folgende:

Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall, in welchem von den drei Größen p, q, r keine der anderen gleich ist. Mit der Voraussetzung, daß der Diatensor auf diese drei Achsen bezogen sei, besteht dann die Tatsache, daß die drei Semidiameter des Deformationsellipsoids, welche in seine Hauptachsen fallen, Grenzwerte, Maxima oder Minima sind. Ist nun $\mathfrak{v}$ ein beliebiger

Radius der Einheitskugel, und ist $\mathfrak{w}$ der mit Φ multiplizierte Vektor $\mathfrak{v}$, so ist

$$\left.\begin{aligned} w_x &= t_{xx}v_x + t_{xy}v_y + t_{xz}v_z, \\ w_y &= t_{yx}v_x + t_{yy}v_y + t_{yz}v_z, \\ w_z &= t_{zx}v_x + t_{zy}v_y + t_{zz}v_z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Hat der beliebig gewählte Einheitsvektor $\mathfrak{v}$ gegen $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ die Richtungskosinus l, m, n, so ist

$$\mathfrak{v} = l\mathfrak{i}' + m\mathfrak{j}' + n\mathfrak{k}', \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

und da $\mathfrak{i}' = \alpha_1\mathfrak{i} + \alpha_2\mathfrak{j} + \alpha_3\mathfrak{k}$ usw., folgt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v} = (l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1)\mathfrak{i} + (l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2)\mathfrak{j} \\ + (l\alpha_3 + m\beta_3 + n\gamma_3)\mathfrak{k}. \end{aligned}\right\} \quad .\,. \quad (10)$$

Setzt man $n = 0$, so fällt $\mathfrak{v}$ in die Ebene der $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'$ und $\mathfrak{w}$ in die xy-Ebene. Man erhält also

$$\left.\begin{aligned} w_{xy} = &\{t_{xx}(l\alpha_1 + m\beta_1) + t_{xy}(l\alpha_2 + m\beta_2) + t_{xz}(l\alpha_3 + m\beta_3)\}\,\mathfrak{i} \\ + &\{t_{yx}(l\alpha_1 + m\beta_1) + t_{yy}(l\alpha_2 + m\beta_2) + t_{yz}(l\alpha_3 + m\beta_3)\}\,\mathfrak{j} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (11)$$

Läßt man nun auch m verschwinden, so reduziert sich $\mathfrak{w}$ auf $p\mathfrak{i}$, also wird der Faktor von $\mathfrak{j}$ zu Null, und zugleich wird

$$w_x = t_{xx}(l\alpha_1 + m\beta_1) + t_{xy}(l\alpha_2 + m\beta_2) + t_{xz}(l\alpha_3 + m\beta_3) \quad . \quad (12)$$

ein Grenzwert für $m = 0$. Wenn man also dem m statt des Wertes Null einen unendlich kleinen Wert dm erteilt, muß das entsprechende Wachstum von w_x verschwinden. Da nun l und m unter allen Umständen der Gleichung $l^2 + m^2 = 1$ genügen müssen, so unterscheidet sich l, wenn man $m = dm$ setzt, von der Zahl Eins nur um eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung. l ist also für das Einsetzen von dm als konstant anzusehen. Infolgedessen läßt sich die Grenzfallbedingung ohne explizite Differentiation aus Gleichung (12) ohne weiteres ablesen. Es muß sein

$$\frac{1}{dm}(t_{xx}\,.\,dm\,\beta_1 + t_{xy}\,dm\,\beta_2 + t_{xz}\,dm\,\beta_3) = 0.$$

Mit zyklischer Fortsetzung erhält man also

$$\left.\begin{aligned} t_{xx}\beta_1 + t_{yx}\beta_2 + t_{zx}\beta_3 &= 0, \\ t_{yx}\gamma_1 + t_{yy}\gamma_2 + t_{yz}\gamma_3 &= 0, \\ t_{zx}\alpha_1 + t_{zy}\alpha_2 + t_{zz}\alpha_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Diese Gleichungen sind aber identisch mit den Gleichungen (7), also folgen diese daraus, daß der Tensor Φ auf die Hauptachsen seines Deformationsellipsoids bezogen ist; sie sind durch die Voraussetzung identisch erfüllt.

Der Beweis bleibt gültig, wenn zwei Hauptachsen des Deformationsellipsoids, etwa q und r, einander gleich sind, denn die Endpunkte von $q\mathfrak{j}$ und $r\mathfrak{k}$ haben immer noch die Eigenschaft, Grenzwerte in y und in z zu sein. Degeneriert das Deformationsellipsoid zur Kugel, so wird das Resultat der Untersuchung selbstverständlich.

Somit ergibt sich: Es lassen sich stets drei aufeinander senkrechte Radien der Einheitskugel angeben, welche durch die Multiplikation mit Φ in die aufeinander senkrecht stehenden halben Hauptachsen des Deformationsellipsoids übergeführt werden.

Das heißt aber geometrisch: Man kann die ganze durch Φ herbeigeführte Transformation dadurch ersetzen, daß man drei bestimmte aufeinander senkrechte Radien der Einheitskugel in die entsprechenden Achsenrichtungen des Deformationsellipsoids dreht und daß man die Kugel dann einer reinen Deformation mit den drei Konstituenten p, q, r unterwirft. Kürzer ausgedrückt: Jede affine Bewegung läßt sich durch eine Drehung und eine reine Deformation ersetzen. Aus den Gleichungen (4) ergibt sich unmittelbar die Form des Diatensors, welche diese Eigenschaft ausdrückt:

$$\Phi = \begin{cases} p\alpha_1 & p\alpha_2 & p\alpha_3 \\ q\beta_1 & q\beta_2 & q\beta_3 \\ r\gamma_1 & r\gamma_2 & r\gamma_3 . \end{cases} \qquad (14)$$

Diese nennen wir seine Normalform. Sie läßt sich offenbar als Produkt schreiben:

$$\Phi = \begin{cases} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{cases} \cdot \begin{cases} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 . \end{cases} \qquad (15)$$

Der erste von diesen Faktoren ist der Tensor, der zweite der Versor der Operation. Der Versor ist proximal.

Man sieht ohne weiteres geometrisch, daß die Reihenfolge der Operationen sich auch umkehren läßt. Es ist nicht ohne Interesse, dies auch analytisch nachzuweisen. Wir nehmen drei Konstituenten p', q', r' an, deren Beträge gleich p, q, r sind, die aber in die Richtungen der ξ, η, ζ fallen. Um den aus ihnen gebildeten Tensor mit dem Versor der Gleichung (14) multiplizieren zu können, transformieren wir ihn auf das System der x, y, z. Man beachte, daß das Schema des § **18** quer zu lesen ist. Es ergibt sich dann, wenn der vorliegende Tensor nach der Transformation mit T' bezeichnet wird:

$$T' = \left\{\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{matrix}\right. \cdot \left\{\begin{matrix} \alpha_1 p' & \alpha_2 p' & \alpha_3 p' \\ \beta_1 q' & \beta_2 q' & \beta_3 q' \\ \gamma_1 r' & \gamma_2 r' & \gamma_3 r' \end{matrix}\right.$$

oder ausgerechnet, in einer für die Multiplikation bequemen Anordnung:

$$\begin{aligned} t'_{xx} &= \alpha_1^2 p' + \beta_1^2 q' + \gamma_1^2 r', \\ t'_{yx} &= \alpha_1 \alpha_2 p' + \beta_1 \beta_2 q' + \gamma_1 \gamma_2 r', \\ t'_{zx} &= \alpha_1 \alpha_3 p' + \beta_1 \beta_3 q' + \gamma_1 \gamma_3 r', \\[1em] t'_{xy} &= t'_{yx}, \\ t'_{yy} &= \alpha_2^2 p' + \beta_2^2 q' + \gamma_2^2 r', \\ t'_{zy} &= \alpha_2 \alpha_3 p' + \beta_2 \beta_3 q' + \gamma_2 \gamma_3 r', \\[1em] t'_{xz} &= t'_{zx}, \\ t'_{yz} &= t'_{zy}, \\ t'_{zz} &= \alpha_3^2 p' + \beta_3^2 q' + \gamma_3^2 r'. \end{aligned}$$

Der aus diesen Gliedern gebildete Tensor ist nunmehr als Postfaktor mit dem Versor der Gleichung (14) zu multiplizieren. Die Ausführung der Multiplikation ergibt:

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix}\right. \cdot T' = \left\{\begin{matrix} p'\alpha_1 & p'\alpha_2 & p'\alpha_3 \\ q'\beta_1 & q'\beta_2 & q'\beta_3 \\ r'\gamma_1 & r'\gamma_2 & r'\gamma_3 . \end{matrix}\right. \quad \cdots\cdots \quad (16)$$

Also ist die zweite Zerlegung sachlich identisch mit derjenigen von (14), da ja die Beträge p', q', r' gleich p, q, r sind.

Die doppelte Zerlegung ergibt den geometrischen Satz: Jede affine Bewegung läßt sich (operativ!) in eine Drehung und in eine reine Deformation zerlegen. Die Reihenfolge der Operationen ist gleichgültig, die Drehung ist in beiden Fällen dieselbe, die reine Deformation hat in beiden Fällen gleiche Parameter, aber wenn die Drehung zeitlich vorangeht, findet die Deformation in der Endlage, wenn die Drehung zeitlich nachfolgt, findet die Deformation in der Anfangslage statt.

Das letztere ist selbstverständlich; es kommt aber hier auf den Nachweis an, daß die Analyse fähig ist, die geometrische Beziehung in voller Genauigkeit wiederzugeben.

Man bemerke: Der Diatensor hat in der Normalform (14) die Eigenschaft, daß seine drei Zeilenvektoren aufeinander senkrecht stehen. Die Beträge der Zeilenvektoren sind p, q, r, sind also identisch mit den Konstituenten seines Tensors.

Der Tensor selbst läßt sich in drei Faktoren zerlegen:

$$\begin{cases} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q \end{cases} = \begin{cases} p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases} \cdot \begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases} \cdot \begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r. \end{cases} \quad \cdot \cdot (17)$$

„Die reine Deformation läßt sich ersetzen durch drei konsekutive Dehnungen nach drei aufeinander senkrechten Richtungen."

Die Reihenfolge der Faktoren ist offenbar gleichgültig.

57. Andere Zerlegung; Kriterien; Schieber.

Jeder Diatensor hat wenigstens eine Achse, in die man willkürlich die x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems legen kann. (In dem seiner Einfachheit wegen nicht mehr besonders hervorgehobenen Fall dreier gleichen reellen Achsen kann man diese Achse beliebig wählen; sind zwei gleiche reelle Achsen vorhanden, so wähle man die ungleiche Achse.) Geschieht das, so muß der Tensor einen in die x-Achse fallenden Vektor ohne Richtungsänderung dehnen, und man sieht leicht, daß das nur möglich ist, wenn er die Form hat

$$\Phi = \begin{cases} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ 0 & t_{yy} & t_{yz} \\ 0 & t_{zy} & t_{zz}. \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hier bleibt die Richtung der y- und der z-Achse noch unbestimmt. Hat der Diatensor bei beliebig angenommenen Achsen der y und z die Gestalt (1), so kann man noch die Achsen der y und der z um einen beliebigen Winkel drehen, dessen Kosinus μ sei. Er ist dann auf die neue Lage mittels der Gleichungen des § **18** zu transformieren, und man kann mittels dieser Transformation noch eine zusätzliche Bedingung erfüllen. Werden die transformierten Glieder, wie in § **18**, durch Strichelung bezeichnet und führt man die Umformung für t'_{yy} und t'_{zz} durch, so ergibt sich

$$t'_{yy} = \mu^2 t_{yy} + \mu\sqrt{1-\mu^2}\,(t_{yz} + t_{zy}) + (1-\mu^2)\,t_{zz},$$
$$t'_{zz} = (1-\mu^2)\,t_{yy} - \mu\sqrt{1-\mu^2}\,(t_{yz} + t_{zy}) + \mu^2 t_{zz},$$

also

$$t'_{yy} - t'_{zz} = (1-2\mu^2)\,(t_{zz} - t_{yy}) + 2\mu\sqrt{1-\mu^2}\,(t_{yz} + t_{zy}).$$

Wir wollen die willkürlich wählbare Bedingung dahin formulieren, daß $t'_{yy} = t'_{zz}$ werden soll, also

$$(2\mu^2 - 1)(t_{zz} - t_{yy}) = 2\mu\sqrt{1-\mu^2}(t_{yz} + t_{zy}).$$

Dies gibt

$$\mu^4 - \mu^2 = -\frac{1}{4}\frac{(t_{zz}-t_{yy})^2}{(t_{zz}-t_{yy})^2 + (t_{yz}+t_{zy})^2},$$

also für μ eine zweideutige, jederzeit reelle Lösung; der Diatensor läßt sich also immer auf die Form bringen

$$\Phi = \begin{cases} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ 0 & t_{yy} & t_{yz} \\ 0 & t_{zy} & t_{yy}. \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

In dieser Gestalt[1] hat er die Eigenschaft, daß die Beträge seiner Konstituenten sich ohne weiteres angeben lassen. Seine drei Skalare sind nämlich

$$\left.\begin{aligned} S_1 = t_{xx} + 2t_{yy}, \quad S_{21} = t_{yy}^2 + 2t_{xx}t_{yy} - t_{yz}t_{zy}, \\ S_3 = t_{xx}(t_{yy}^2 - t_{yz}t_{zy}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

Nehmen wir nun versuchsweise einen Diatensor Φ' an, dessen Konstituenten seien

$$t_{xx}, \qquad t_{yy} + h, \qquad t_{yy} - h,$$

so verlangt die Hamiltonsche Gleichung, daß für diesen

$$\left.\begin{aligned} S'_1 = t_{xx} + 2t_{yy}, \quad S'_{21} = t_{yy}^2 + 2t_{xx}t_{yy} - h^2, \\ S'_3 = t_{xx}(t_{yy}^2 - h^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

sei. Offenbar werden die S' und Φ' mit den S und Φ identisch, wenn man setzt

$$h^2 = t_{yz}t_{zy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

also sind die drei Konstituenten von Φ

$$t_{xx}, \qquad t_{yy} + \sqrt{t_{yz}t_{zy}}, \qquad t_{yy} - \sqrt{t_{yz}t_{zy}} \quad \ldots\ldots (6)$$

Hiernach hängt der Charakter des Diatensors Φ von t_{yz} und t_{zy} ab:

Haben t_{yz} und t_{zy} gleiches Vorzeichen, so hat der Diatensor drei reelle Achsen.

Haben t_{yz} und t_{zy} ungleiches Vorzeichen, so hat er nur eine reelle Achse.

Im Grenzfall $t_{yz}t_{zy} = 0$ hat der Diatensor drei reelle Achsen, von denen zwei einander gleich sind.

[1]) Auch in der Form (1), aber die Kriterien werden dann weniger einfach.

I. Wir betrachten zunächst den Grenzfall $t_{yz} t_{zy} = 0$. Man sieht leicht, daß es für die Diskussion gleichgültig ist, ob man t_{yz} oder t_{zy} gleich Null nimmt; in dem einen Fall wird die charakteristische Eigenschaft des Diatensors in die y-Richtung, im anderen Fall in die z-Richtung verlegt. Wir setzen also willkürlich $t_{yz} = 0$.

Der Diatensor

$$\Phi = \left\{\begin{matrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ 0 & t_{yy} & 0 \\ 0 & t_{zy} & t_{yy} \end{matrix}\right. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

zerlegt sich dann, wie die Ausrechnung zeigt, glatt in die beiden Faktoren

$$\left\{\begin{matrix} t_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & t_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & t_{yy} \end{matrix}\right. \quad \text{und} \quad \left\{\begin{matrix} 1 & \dfrac{t_{xy}}{t_{xx}} & \dfrac{t_{xz}}{t_{xx}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{t_{zy}}{t_{yy}} & 1 \end{matrix}\right. \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

oder in bequemerer Schreibart

$$\Phi = \left\{\begin{matrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{matrix}\right. \cdot \left\{\begin{matrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & e & 1. \end{matrix}\right. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Der erste von diesen ist ein Tensor, der zweite ein Diatensor sui generis, den wir einen Schieber nennen und mit dem Buchstaben Σ bezeichnen. Multipliziert man ihn mit irgend einem Vektor $\mathfrak{v}$ und nennt das Diatensorvektorprodukt $\mathfrak{w}$, so ist

$$\mathfrak{w} = (v_x + b v_y + c v_z)\mathfrak{i} + v_y \mathfrak{j} + (e v_y + v_z)\mathfrak{k}. \quad \ldots \quad (10)$$

Es bleiben also bei der Schiebung alle y-Komponenten unverändert erhalten, d. h. die Punkte aller Ebenen, welche der xz-Ebene parallel sind, werden in diesen Ebenen verschoben, und zwar in der x-Richtung um den Betrag $b v_y + c v_z$, in der z-Richtung um den Betrag $c v_z$.

Sind im Spezialfall zwei der Seitenglieder von Σ Null, so reduziert er sich auf den einfachen Schieber des § 42, und man sieht leicht, wie die Schiebungen parallel den Achsen sich modifizieren, je nachdem b und c oder b und e oder c und e gleich Null sind.

Ist c allein gleich Null, so ist die ganze Schiebung proportional dem Abstand von der xz-Ebene und erfolgt in der

x-Richtung um den Betrag $b v_y$, in der z-Richtung um den Betrag $e v_y$.

Die hier hervorgehobene Eigenschaft des Diatensors mit zwei gleichen reellen Achsen beeinträchtigt die Tatsache nicht, daß derselbe alle Vektoren, welche in die Ebene seiner gleichen Achsen fallen bzw. mit ihr komplanar sind, einfach dehnt, ohne sie zu drehen. Man kann also den fraglichen Diatensor auf zwei verschiedene Arten darstellen, einmal als Diatensor mit zwei reellen Achsen, das andere Mal als Produkt aus Tensor und Schieber. Die Möglichkeit dieser doppelten Darstellung involviert den geometrischen Satz: Erteilt man einem Raum erst eine Schiebung, welche die Abstände von der xz-Ebene unverändert läßt, dann eine reine Deformation mit zwei gleichen Hauptachsen, deren dritte Hauptachse in die x-Richtung fällt, so gibt es stets ein Büschel von parallelen Ebenen, welche die Eigenschaft haben, daß die in ihnen liegenden Vektoren bei der Operation ohne Drehung gedehnt werden.

II. Im allgemeinen Fall $t_{yz} t_{zy} \neq 0$ läßt sich der Diatensor nicht in reine Deformation und Schiebung zerlegen; die beiden Faktoren der Gleichung (9) enthalten nur sechs disponible Größen, während die allgemeine Formel (2) deren sieben verlangt. Wir fügen also versuchsweise eine Drehung hinzu, indem wir das Produkt bilden

$$\Phi = \left\{\begin{matrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & e & 1 \end{matrix}\right. \cdot \left\{\begin{matrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{matrix}\right. \cdot \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi. \end{matrix}\right. \quad . \ . \ (11)$$

Die Ausrechnung ergibt

$$\Phi = \left\{\begin{matrix} p & bq\cos\varphi + cr\sin\varphi & -bq\sin\varphi + cr\cos\varphi \\ 0 & q\cos\varphi & -q\sin\varphi \\ 0 & eq\cos\varphi + r\sin\varphi & -eq\sin\varphi + r\cos\varphi. \end{matrix}\right. \quad . \ . \ (12)$$

Soll das mit Gleichung (2) übereinstimmen, so müssen die Gleichungen erfüllt sein

$$\left.\begin{matrix} p = t_{xx}, \quad q\cos\varphi = t_{yy}, & -q\sin\varphi = t_{yz}, \\ bq\cos\varphi + cr\sin\varphi = t_{xy}, & -bq\sin\varphi + cr\cos\varphi = t_{xz}, \\ eq\cos\varphi + r\sin\varphi = t_{zy}, & -eq\sin\varphi + r\cos\varphi = t_{yy}, \end{matrix}\right\} \cdot (13)$$

deren Lösungen lauten:

$$p = t_{xx}, \quad q = \sqrt{t_{yy}^2 + t_{yz}^2}, \quad \cos\varphi = \frac{t_{yy}}{q}, \quad \sin\varphi = \frac{-t_{yz}}{q},$$

$$r = \frac{t_{yy}^2 - t_{zy}^2}{q}, \qquad b = \frac{t_{xy}t_{yy} + t_{xz}t_{yz}}{t_{yy}^2 + t_{yz}^2},$$

$$c = \frac{t_{xz}t_{yy} - t_{xy}t_{yz}}{t_{yy}^2 - t_{zy}^2}, \qquad e = \frac{t_{yy}(t_{yz} + t_{zy})}{t_{yy}^2 + t_{yz}^2}.$$

Sie sind sämtlich reell, also läßt sich jeder Diatensor in die drei Faktoren der Gleichung (11), Schieber, Tensor und Versor, zerlegen, und zwar so, daß die Achse des Versors in eine bzw. in die Hauptachse des Tensors fällt. Im Spezialfall $t_{yz} = 0$ wird $\varphi = 0$, und damit gelangt man wieder zu dem unter I behandelten Fall. Die hier gegebene Zerlegung macht zwischen dreiachsigen und einachsigen Diatensoren nur den Unterschied, daß sie sich bei den ersteren auf drei verschiedene Achsen, für die letzteren nur auf die eine reelle Achse beziehen läßt; eine andere Reduktion, welche den Unterschied etwas schärfer hervortreten läßt, ergibt sich auf dem Boden der Dyaden so natürlich, daß wir ihre Behandlung dorthin verlegen (siehe § **81**).

58. Übersicht über die möglichen Arten der Raumtransformation.

Als Grundelemente aller Deformationsbewegungen ergeben sich aus dem Bisherigen die reine Deformation, dargestellt durch den Tensor T, die reine Drehung, dargestellt durch den Versor X, und die Schiebung, dargestellt durch den Schieber Σ. Man kann danach die Modalitäten, welche der allgemeine Diatensor in sich schließt, einteilen. Als nächstliegendes Mittel dazu hat man an die Hamiltonsche Gleichung oder, was praktisch gleichbedeutend ist, die im § **60** besprochene Hamilton-Cayleysche Gleichung gedacht. Es ist in der Tat der Versuch gemacht worden, auf diese Gleichung eine vollständige Einteilung der Diatensoren zu gründen. Derselbe ist aber nicht korrekt durchführbar aus dem einfachen Grunde, weil die Hamiltonsche Gleichung zur vollständigen Charakteristik der Diatensorelemente nicht ausreicht. Die einfache Ausrechnung zeigt, daß der Schieber

$$\left\{\begin{matrix} p & b & c \\ 0 & q & 0 \\ 0 & e & q \end{matrix}\right.$$

dieselben drei Skalare, also auch dieselbe Hamiltonsche Gleichung hat wie der Tensor

$$\begin{cases} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q. \end{cases}$$

Dagegen reicht zur vollständigen Einteilung aus die in Gleichung (2) des § 57 gegebene Diatensorform

$$\Phi = \begin{cases} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ 0 & t_{yy} & t_{yz} \\ 0 & t_{zy} & t_{yy}, \end{cases}$$

welche deshalb als diskriminierende Form bezeichnet werden kann.

1. Hauptfall I. $t_{yz} t_{zy} > 0$.

Der Diatensor hat drei reelle ungleiche Achsen. Er kann in Tensor, Versor und Schieber zerlegt werden; dabei fällt die Achse des Versors in eine Achse des Diatensors, und da die drei Achsen des Diatensors gleichwertig sind, kann die Zerlegung auf drei verschiedene Arten ausgeführt werden.

2. Grenzfall. $t_{yz} t_{zy} = 0$.

Diatensor mit zwei gleichen reellen Achsen. Er zerfällt in Tensor und Schieber.

3. Hauptfall II. $t_{yz} t_{zy} < 0$.

Der Diatensor hat nur eine reelle Achse. Er zerfällt wieder in Tensor, Versor und Schieber, aber die Zerlegung ist nur mit Zugrundelegung der einen reellen Achse ausführbar; die Achse des Versors fällt wieder mit derjenigen des Tensors zusammen.

Spezialfälle können nun dadurch eintreten, daß der eine oder andere der in Betracht kommenden Faktoren zu Einheitstensoren degenerieren.

Zum Hauptfall I:

a) Der Schieber wird zu I. Der Diatensor zerfällt in Tensor und Versor, wobei die Achse des Versors mit der ausgewählten Achse des Diatensors zusammenfällt. Drei Achsen sind möglich.

b) Der Versor wird zu I. Der Fall ist identisch mit dem Grenzfall.

c) Versor und Schieber werden beide zu I. Es bleibt eine reine Deformation; die Achsen des Diatensors stehen senkrecht aufeinander.

d) Der Tensor wird zu I. Es bleibt eine Kombination von Drehung und Schiebung.

e) Tensor und Schieber werden zu I; reine Drehung.

f) Tensor und Versor werden zu I; reine Schiebung.

Zum Grenzfall.

Es sind die beiden Möglichkeiten $\Sigma = I$ und $T = I$ vorhanden, welche auf die vorstehenden Spezialfälle c) und f) führen. Außerdem kann der engere Spezialfall eintreten, daß alle drei Achsen einander gleich werden; Tensor, wobei das Erzeugnis der Deformation dem ursprünglich gegebenen Gebilde ähnlich ist.

Zum Hauptfall II.

Die Spezialfälle sind dieselben wie beim Hauptfall I; der Unterschied besteht nur darin, daß der Zerlegung nur eine Hauptachse zugrunde gelegt werden kann.

Die vorstehende Einteilung läßt den Satz des § **56**, wonach jeder Diatensor in Tensor und Versor zerlegt werden kann, unberührt; das Neue, was sie bringt, liegt darin, daß hier, wenn ein Tensor und ein Versor verhanden ist, die Achsen beider zusammenfallen, während sie bei dem Satz des § **56** irgendwie gegeneinander gerichtet sein können.

Die Schieber Σ lassen sich noch weiter einteilen, je nachdem sie drei, zwei oder ein von Null verschiedenes Seitenglied enthalten.

Ist nur ein „Schiebungsparameter“ vorhanden, so hat man mit einem „einfachen Schieber“ zu tun. Die Zeile, in welcher der Parameter steht, bestimmt die Richtung, nach welcher die Schiebung erfolgt; die Kolonne, in der er sich befindet, bestimmt die Stellung der Ebenen, welche ohne Verzerrung und Drehung verschoben werden.

Sind zwei Parameter von Null verschieden, so hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Sie können beide in derselben Kolonne oder in verschiedenen Kolonnen stehen.

Beispiel. Es sei zunächst das erstere der Fall

$$\Sigma = \begin{cases} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & e & 1. \end{cases}$$

Multipliziert man hiermit den Vektor $\mathfrak{v}$, so erhält man

$$\mathfrak{w} = (v_x + b v_y)\mathfrak{i} + v_y \mathfrak{j} + (e v_y + v_z)\mathfrak{k}.$$

Der Vektor, welcher die Schiebung darstellt, ist also

$$v_y(b\,\mathfrak{i} + e\,\mathfrak{k}).$$

Er hängt demnach nur von v_y ab, d. h. jede Ebene, welche der xz-Ebene parallel ist, wird ohne Verzerrung und ohne Drehung in sich verschoben; die xz-Ebene bleibt in Ruhe; die Schiebung erfolgt nicht in der Richtung einer Achse, sondern in einer Richtung, welche mit der x-Achse den Winkel $arc\,tg\,\frac{e}{b}$ macht. Es handelt sich demnach hier immer noch um eine einfache Schiebung, die aber schief zu zwei Achsen erfolgt.

Ist dagegen

$$\Sigma = \begin{cases} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & e & 1, \end{cases}$$

so ergibt sich durch Multiplikation von Σ mit $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{w} = (v_x + c\,v_z)\,\mathfrak{i} + v_y\,\mathfrak{j} + (e\,v_y + v_z)\,\mathfrak{k}.$$

Die Punkte einer Ebene $v_y = const$ bleiben also sämtlich in dieser Ebene. Aber für einen Vektor der Koordinatenebene $v_y = 0$ ist

$$\mathfrak{w} = (v_x + c\,v_z)\,\mathfrak{i} + v_z\,\mathfrak{k}.$$

Es gibt also keine eigentliche „Nullebene“, in der alle Punkte in Ruhe bleiben; vielmehr bleibt nur die Gerade $v_z = 0$, also die Achse der x, in Ruhe, und in irgend einer Ebene $v_y = const$ hängt die Bewegung der Punkte nicht allein von ihrem Abstand von der Ebene $y = 0$, sondern auch von v_z ab.

Dasselbe ist der Fall bei dem Schieber mit drei von Null verschiedenen Parametern. Derselbe kann aufgefaßt werden als Produkt der beiden Schieber

$$\begin{cases} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases} \cdot \begin{cases} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & e & 1, \end{cases}$$

und da der erste von diesen, wie am Beispiel gezeigt wurde, ein einfacher Schieber ist, unterscheidet sich dieser Fall nicht wesentlich von dem des Schiebers mit zwei Parametern, welche in verschiedenen Kolonnen stehen.

Die Untersuchung führt also darauf, daß die Schieber in zwei Unterklassen eingeteilt werden,

1. solche mit einem Parameter oder mit zwei in derselben Kolonne stehenden Parametern, einfache Schieber,

2. solche mit zwei Parametern, die in verschiedenen Kolonnen stehen, oder mit drei Parametern.

Für die zweite Klasse hat Gibbs den Ausdruck „complex shearer" gewählt, der, wenn man ihn nachbilden will, etwa durch „komplizierter Schieber" zu übersetzen wäre.

59. Die allgemeine Bewegung eines kleinen Volumens.

Rein geometrisch betrachtet, besteht die Bewegung eines Körpers darin, daß seine Punkte ihre Lage irgendwie stetig ändern. Wir beschränken die Untersuchung auf einen sehr kleinen Teil K eines Körpers in der Umgebung eines Punktes 0 und verfolgen nicht den zeitlichen Verlauf der Bewegung, sondern begnügen uns damit, ihr Resultat, d. h. den Unterschied zwischen End- und Anfangslage zu betrachten. Dabei werde vorausgesetzt, der Betrag der Bewegung sei so klein, daß nur die erste Potenz einer jeden Dislokation in Betracht kommt.

Zu Anfang falle der Punkt 0 des Körpers mit einem Punkt ω des Raumes zusammen. Wir legen durch diesen gemeinschaftlichen Punkt zunächst ein im Raum festes Koordinatensystem der ξ, η, ζ, dann ein zweites System der x, y, z, welches sich mit dem Punkt 0 des Körpers verschiebt, und wir setzen fest, daß die entsprechenden Achsen beider Systeme parallel seien und während der Bewegung auch parallel bleiben sollen.

Irgend ein Punkt unseres Körperteilchens K hatte zur Anfangszeit die Koordinaten ξ, η, ζ und hat am Ende der Bewegung die Koordinaten ξ', η', ζ'. Er hat also eine Verschiebung erlitten, deren Komponentenbeträge sind

$$u = \xi' - \xi, \qquad v = \eta' - \eta, \qquad w = \zeta' - \zeta.$$

Der Punkt 0 des Körpers, welcher vor der Bewegung mit ω zusammenfiel, hat nachher eine Verschiebung, deren Komponentenbeträge seien

$$u_0, \quad v_0, \quad w_0.$$

Irgend ein benachbarter Punkt 1 von K ist zu Anfang durch den Fahrstrahl $0\,1 = \mathfrak{r}$ bestimmt, und $\mathfrak{r}$ hat die drei Komponentenbeträge x, y, z. Man kann den Betrag der Verschiebung des Punktes 1 nach der Taylorschen Reihe entwickeln und kann dabei unter den gemachten Voraussetungen die zweite und alle höheren Potenzen in der Reihe vernachlässigen; so erhält man

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z,\\ v &= v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z,\\ w &= w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Die Größen $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ usw. sind die Differentialquotienten der Beträge der Seitenverschiebungen für den Nullpunkt 0; sie sind skalare Größen.

Addiert man die Gleichungen (1) geometrisch und setzt $u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j} + w\mathfrak{k} = d\mathfrak{r}$, so erhält man

$$d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r}_0 \left\{\begin{aligned} &\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z\right\}\mathfrak{i}\\ +&\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z\right\}\mathfrak{j}\\ +&\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 z\right\}\mathfrak{k}, \end{aligned}\right.$$

also

$$d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r}_0 + \Phi\mathfrak{r},$$

wenn man unter Φ den Diatensor versteht, dessen Glieder sind $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ usw.

Die Gesamtbewegung aller Punkte von K zerfällt demnach in

1. Verschiebung eines beliebig ausgewählten Punktes 0,
2. Transformation von K mit 0 als Transformationsmittelpunkt.

(Auch die Verschiebung von K läßt sich als Koordinatenverschiebung auffassen, die Darstellung stimmt also damit, daß jede Bewegung eines Raumes als eine Transformation desselben aufgefaßt werden kann.)

Die Verschiebung von 0 ist unmittelbar vorstellbar, es wird also im folgenden von ihr abgesehen.

Helmholtz hat nun zuerst gezeigt, daß man den hier auftretenden Diatensor Φ durch additive Zerlegung in zwei einfache

Elemente teilen kann. In der Ausdrucksweise der Diatensorenrechnung hat er den Satz benutzt:

$$\Phi = \frac{\Phi + \Phi_c}{2} + \frac{\Phi - \Phi_c}{2}, \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

und da es sich um eine unendlich kleine Bewegung handelt, repräsentiert der Antitensor in diesem Fall die durch eine Drehung hervorgebrachte Dislokation der Punkte von K (§ **36**, III). Damit ergibt sich der Helmholtzsche Fundamentalsatz: Jede unendlich kleine Bewegung eines kleinen Körperteilchens läßt sich außer der Verschiebung in eine reine Deformation und eine reine Drehung zerlegen.

Man beachte übrigens, daß diese Zerlegung additiv ist. Bei Benutzung derselben muß man sich also vorerst vorstellen, daß jede der beiden Operationen an jedem einzelnen Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ in der ursprünglichen Lage von $\mathfrak{r}$ vorgenommen wird, und daß die dabei auftretenden Verschiebungen des Endpunktes von $\mathfrak{r}$ geometrisch addiert werden. Stellt man sich die Bewegung des Körpers so vor, daß er erst gedehnt und hierauf in der gedehnten Form gedreht, oder erst gedreht und dann in der gedrehten Lage gedehnt würde, so gilt allerdings, auch für endliche affine Bewegungen, ein Satz, der genau den gleichen Wortlaut hat, wie der Helmholtzsche, der aber nicht die additive Helmholtzsche Zerlegung, sondern die multiplikative Zerlegung des § **56** ausdrückt, also im allgemeinen einen wesentlich anderen Sinn hat und erst durch die Erörterung des § **56** bewiesen wird. Nur in einem Spezialfall, und zwar gerade in dem Helmholtzschen, sind die beiden Arten der Zerlegung gleichbedeutend. Es läßt sich nämlich zeigen, daß für unendlich kleine Bewegungen die multiplikative Zusammensetzung einer reinen Deformation mit einer Drehung äquivalent ist mit der additiven.

Beweis: Es seien $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ drei unendlich kleine Größen; dann läßt sich ein unendlich kleiner Tensor, auf seine Achsen bezogen, darstellen durch

$$T = \begin{cases} 1 + \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \zeta_3 . \end{cases} \quad \dots\dots \quad (3)$$

Ein unendlich kleiner Versor X von beliebiger Achsenlage ist dargestellt durch § **55**, Gleichung (5). Bezeichnen wir in ihr diejenige Wurzel, in welcher ε_ν das negative Vorzeichen hat, abkürzend mit η_ν, so ist der unendlich kleine Versor

$$X = \begin{cases} 1-\varepsilon_1 & \eta_3 & -\eta_2 \\ -\eta_3 & 1-\varepsilon_2 & \eta_1 \\ \eta_2 & -\eta_1 & 1-\varepsilon_3; \end{cases} \quad \dots\dots \quad (4)$$

also ist das Produkt beider, wenn in jedem Glied die unendlich kleinen Größen von höherer Ordnung fortgelassen werden,

$$TX = \begin{cases} 1+\zeta_1-\varepsilon_1 & \eta_3 & -\eta_2 \\ -\eta_3 & 1+\zeta_2-\varepsilon_2 & \eta_1 \\ \eta_2 & -\eta_1 & 1+\zeta_3-\varepsilon_3. \end{cases} \quad \dots \quad (5)$$

Dies zerlegt sich aber in die Summe $T + [\mathfrak{h}$, wenn[1])

$$[\mathfrak{h} = \begin{cases} -\varepsilon_1 & \eta_3 & -\eta_2 \\ -\eta_3 & -\varepsilon_2 & \eta_1 \\ \eta_2 & -\eta_1 & -\varepsilon_3. \end{cases} \quad \dots\dots \quad (6)$$

Die Drehung, welche diesem $[\mathfrak{h}$ entspricht, erhält man nach § **36**, III, wenn man zu $[\mathfrak{h}$ einen Einheitstensor addiert, d. h., sie ist darzustellen durch

$$\begin{cases} 1-\varepsilon_1 & \eta_3 & -\eta_2 \\ -\eta_3 & 1-\varepsilon_2 & \eta_1 \\ \eta_2 & -\eta_1 & 1-\varepsilon_3. \end{cases} \quad \dots\dots \quad (7)$$

Das ist aber der Versor X der Gleichung (4), und damit ist die Behauptung bewiesen.

60. Die Hamilton-Cayleysche Gleichung.

Satz: Der ganze Diatensor Φ erfüllt eine Gleichung, welche mit der Hamiltonschen Gleichung des § **19** vollständig übereinstimmt, bis auf den Umstand, daß der Homogeneität wegen dem Skalar S_3 der Faktor I zugesetzt werden muß. Die Gleichung lautet also (die Skalare haben dieselbe Bedeutung wie bisher):

$$\Phi^3 - S_1\Phi^2 + S_{21}\Phi - S_3 I = 0 \quad \dots\dots \quad (1)$$

und heißt die Hamilton-Cayleysche Gleichung, weil Cayley ihre Anwendbarkeit auf diatensorähnliche Gebilde ausgesprochen hat.

[1]) In Gleichung (5) sind die η unendlich klein erster Ordnung, die ε sind zweiter Ordnung. Letztere verschwinden also gegen die η, und die Anwesenheit der ε verstößt nicht dagegen, daß die Diagonalglieder eines Antitensors den Seitengliedern gegenüber verschwinden müssen.

Beweis: Es sei

$$\Phi = \begin{cases} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z; \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dann ist

$$\Phi^2 = \begin{cases} a_x^2 \quad + a_y b_x + a_z c_x, & a_x a_y + a_y b_y + a_z c_y, & a_x a_z + a_y b_z + a_z c_z \\ b_x a_x + b_y b_x + b_z c_x, & b_x a_y + b_y^2 \quad + b_z c_y, & b_x a_z + b_y b_z + b_z c_z \\ c_x a_x + c_y b_x + c_z c_x, & c_x a_y + c_y b_y + c_z c_y, & c_x a_z + c_y b_z + c_z^2, \end{cases} \quad (3)$$

und die beiden ersten Glieder von Φ^3 sind

$$\left.\begin{aligned} t_{xx} &= a_x(a_x^2 + a_y b_x + a_z c_x) + a_y(b_x a_x + b_y b_x + b_z c_x) \\ &\qquad + a_z(c_x a_x + c_y b_x + c_z c_x), \\ t_{xy} &= a_x(a_x a_y + a_y b_y + a_z c_y) + a_y(b_x a_y + b_y^2 + b_z c_y) \\ &\qquad + a_z(c_x a_y + c_y b_y + c_z c_y). \end{aligned}\right\} \quad \cdot \quad (4)$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} S_1 \Phi^2 &= (a_x + b_y + c_z)\Phi^2, \\ S_{21}\Phi &= \{(b_y c_z - b_z c_y) + (c_z a_x - c_x a_z) + (a_x b_y - a_y b_x)\}\Phi, \\ S_3 &= a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x), \end{aligned}\right\} \quad \cdot \quad (5)$$

und es ist zu bedenken, daß

$$S_3 I = \begin{cases} S_3 & 0 & 0 \\ 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & S_3. \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Bildet man mit den vorstehenden Gleichungen das erste Glied von jedem Term des Polynoms von Gleichung (1), so erhält man durch Addition

$$\begin{aligned} &a_x(a_x^2 + a_y b_x + a_z c_x) + a_y(b_x a_x + b_y b_x + b_z c_x) + a_z(c_x a_x + c_y b_x + c_z c_x) \\ &\quad - (a_x + b_y + c_z)(a_x^2 + a_y b_x + a_z c_x) \\ &\quad + a_x(b_y c_z - b_z c_y + c_z a_x - c_x a_z + a_x b_y - a_y b_x) \\ &\quad - a_x(b_y c_z - b_z c_y) - a_y(b_z c_x - b_x c_z) - a_z(b_x c_y - b_y c_x), \end{aligned}$$

und die Durchrechnung ergibt, daß dieses Glied Null ist. Zyklisch folgt, daß auch diejenigen Gliedersummen, welche mit t_{yy} und t_{zz} gebildet werden, Null sind.

Das zweite Glied des Polynoms wird, entsprechend gebildet,

$$\begin{aligned} &a_x(a_x a_y + a_y b_y + a_z c_y) + a_y(b_x a_y + b_y^2 + b_z c_y) + a_z(c_x a_y + c_y b_y + c_z c_y) \\ &\quad - (a_x + b_y + c_z)(a_x a_y + a_y b_y + a_z c_y) \\ &\quad + a_y(b_y c_z - b_z c_y + c_z a_x - c_x a_z + a_x b_y - a_y b_x) \\ &\quad - 0. \end{aligned}$$

Auch dieses ist Null, und daraus folgt zyklisch, daß alle übrigen Glieder des Polynoms Null sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Für Leser, die sich in dem Buch von Gibbs-Wilson Rats erholen wollen, sei bemerkt, daß die dort gegebene Ableitung der Gleichung (1) nicht bündig ist. Sie wird nur dadurch möglich, daß auf der rechten Seite der ersten Zeile (l. c., S. 320, die Gleichung ist mit „by 68" bezeichnet) der später wieder erscheinende Faktor I ausgelassen ist und dadurch ein Diatensor gleich einem reinen Skalar gesetzt und dann mit diesem reinen Skalar zunächst weiter operiert wird, was nicht zulässig ist.

Vollständig homogen ausgeschrieben lautet übrigens die Hamilton-Cayleysche Gleichung

$$\Phi^3 - S_1 \Phi^2 I + S_{21} \Phi I^2 - S_3 I^3 = 0.$$

Die abgekürzte Form (1) ist indessen zulässig, weil $\Phi^2 I = \Phi^2$ usw. ist.

Zweiter Abschnitt.

Diatensoren in Form von Dyadentripeln.

Erstes Kapitel: **Die einzelne Dyade.**

61. Definition der Dyade.

In § **28** wurde die Gleichung aufgestellt:

$$\Phi\{\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c}\}\,\mathfrak{v} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{i} + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{j} + (\mathfrak{c}\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{k}$$

und in § **45** die entsprechende

$$\Phi\{\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c}\}\,.\,\Phi\{\mathfrak{e},\ \mathfrak{f},\ \mathfrak{g}\}\,\mathfrak{v} = \mathfrak{a}_c(\mathfrak{e}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{b}_c(\mathfrak{f}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{c}_c(\mathfrak{g}\,\mathfrak{v}).$$

In § **29** wurde gezeigt, wie man die Größe $\mathfrak{v}$ mittels eines Diatensors aus den Tripelprodukten heraussetzen kann, welche auf den rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen vorkommen. Hätte man dieses Verfahren von vornherein an den hier rechts stehenden Größen durchgebildet, so würde man dadurch auf den Begriff des Diatensors geführt worden sein. Gibbs hat nun im Anschluß an Hamilton und Grassmann für dieselbe Aufgabe eine andere Lösung durchgebildet, welche von der Bildung einer besonderen Produktenart ausgeht. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ zwei Vektoren. Aus beiden werde ein Gebilde hergestellt, welches wir $\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a}$ schreiben, und dasselbe werde definiert durch die beiden Gleichungen

$$(\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a})\,\mathfrak{v} = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\mathfrak{v}\,(\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a}) = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{A})\,\mathfrak{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a}$ heißt eine Dyade, und zwar, weil sie durch ein skalares Produkt definiert ist, eine skalare Dyade. $\mathfrak{A}$ heißt der Antezedent, $\mathfrak{a}$ der Konsequent der Dyade. $(\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a})\,\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{v}\,(\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a})$ heißt ein Dyadoprodukt, $\mathfrak{v}$ das Argument desselben. In Gleichung (1) steht nach der bereits bekannten konventionellen Bezeichnung die Dyade als Präfaktor, in Gleichung (2) steht sie als Postfaktor. Die Dyade wird der Deutlichkeit wegen gegen das

Argument durch Klammern abgegrenzt; wo sie allein steht, kann die Klammer fortgelassen werden[1]).

Man hat in den Gleichungen (1) und (2) zwei Operationen zu unterscheiden:

1. diejenige, welche aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ die Dyade $\mathfrak{A};\mathfrak{a}$ bildet; diese besitzt, wie sich zeigen wird, die distributiven Eigenschaften der Multiplikation, kann also als eine erweiterte Grassmannsche Multiplikation angesehen werden;

2. diejenige, welche aus der Dyade $\mathfrak{A};\mathfrak{a}$ und dem Argument $\mathfrak{v}$ das Dyadoprodukt $(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v}$ bildet. Diese hat den Charakter einer inneren Multiplikation, und wir geben ihr, wo die Deutlichkeit es erfordert, diese Benennung. Demnach wäre $(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v}$ genau als „inneres Dyadoprodukt aus einer skalaren Dyade und dem Argument“ zu benennen. Hier, wo keine Produkte anderer Art vorkommen, heißt es einfach Dyadoprodukt.

Um den Ausdruck völlig sicherzustellen, ist noch darauf hinzuweisen, daß wir ein für allemal das Wort Antezedent für denjenigen Faktor der Dyade gebrauchen, der in der Dyade selbst vorangeht, einerlei, ob die Dyade Präfaktor oder Postfaktor ist. In den Gleichungen (1) und (2) ist also beide Male $\mathfrak{A}$ der Antezedent.

Ein Blick auf Gleichung (1) zeigt, daß die Operation, welche aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ eine Dyade bildet, nicht kommutativ ist:

$$(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v} = \mathfrak{A}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}), \quad \text{während} \quad (\mathfrak{a};\mathfrak{A})\mathfrak{v} = \mathfrak{a}(\mathfrak{A}\,\mathfrak{v});$$

die beiden Produkte haben also verschiedene Richtung.

Gleichung (2) setzt ferner gegenüber der Gleichung (1) fest, daß die innere Multiplikation, welche aus der Dyade und dem Argument das Dyadoprodukt bildet, nicht kommutativ sein soll.

Man hat also ein für allemal bei Behandlung von Dyadoprodukten streng auf die Reihenfolge der Bestandteile zu achten.

Dyaden und Dyadoprodukte sind offenbar invariant, weil in ihre Definitionen nur Invarianten eingehen.

Das skalare Produkt $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a})$ nennt man den Skalar der Dyade.

---

[1]) Gibbs schreibt das skalare Produkt irgend zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in der Form $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$, die aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildete Dyade schlechthin $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ ohne Zwischensatz. In unserer der Enzyklopädie sich anschließenden Schreibweise ist dies nicht zulässig, da $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ das skalare Produkt $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$ bedeuten würde. Wir schreiben daher die Dyade im Anschluß an Jaumann, wie oben, mit zwischengesetztem Semikolon; man liest sie am bequemsten $\mathfrak{A}$ *dyas* $\mathfrak{a}$.

62. Multiplikation mit einem Skalar.

Ist m ein Skalar, so ergibt sich aus den Definitionsgleichungen sofort, daß

$$(m\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v} = (\mathfrak{A};m\mathfrak{a})\mathfrak{v} = m(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

also auch

$$m(\mathfrak{A};\mathfrak{a}) = (m\mathfrak{A};\mathfrak{a}) = (\mathfrak{A};m\mathfrak{a}). \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Man multipliziert also eine Dyade mit einem Skalar, indem man entweder den Antezedenten oder den Konsequenten mit diesem Skalar multipliziert. Es folgt unmittelbar

$$\left(\frac{\mathfrak{A}}{m};m\mathfrak{a}\right) = (\mathfrak{A};\mathfrak{a}). \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

63. Gleichheit zweier Dyaden.

Definitionsgemäß werden wir zwei Dyaden $(\mathfrak{A};\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{B};\mathfrak{b})$ für gleich erklären, wenn für ein beliebiges Argument $\mathfrak{v}$

$$(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v} = (\mathfrak{B};\mathfrak{b})\mathfrak{v} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{A};\mathfrak{a}) = \mathfrak{v}(\mathfrak{B};\mathfrak{b}) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

ist.

Die hinreichende und notwendige geometrische Bedingung dafür lautet: Die Antezedenten der beiden Dyaden sind kollinear, ihre Konsequenten sind gleichfalls kollinear und ihre Skalare sind gleich.

Diese Bedingungen sind hinreichend; denn sie sagen aus, daß $\mathfrak{B} = m\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{a}}{m}$ sein muß, wo m irgend ein Skalar. Dann ist aber nach dem vorigen Paragraphen offenbar:

$$\mathfrak{B};\mathfrak{b} = m\mathfrak{A};\frac{\mathfrak{a}}{m} = \mathfrak{A};\mathfrak{a}.$$

Sie sind aber auch notwendig; denn da $(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{B};\mathfrak{b})\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{B}$ kollinear ist, so folgt aus Gleichung (1), daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ kollinear sein müssen. Entsprechend folgt aus Gleichung (2) die Kollinearität von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und daraus, daß die Beträge von $(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v}$ und $(\mathfrak{B};\mathfrak{b})\mathfrak{v}$ gleich sein sollen, folgt, daß $(\mathfrak{A}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{b})$ sein muß.

Es ergibt sich hieraus, daß eine Dyade in irgend einem Koordinatensystem durch f ü n f Angaben bestimmt ist. Die beiden

Richtungen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ erfordern je zwei Angaben, der Betrag ihres Skalars eine fünfte.

Ist eine Dyade $\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a}$ gegeben, so sind hiernach ihre beiden Bestandteile bis auf einen skalaren Faktor m geometrisch bestimmt. Jede Dyade, die ihr gleich sein soll, muß die Gestalt $m\mathfrak{A}\,;\frac{\mathfrak{a}}{m}$ haben.

Außerdem folgt noch:

$$\left[m\mathfrak{A},\frac{\mathfrak{a}}{m}\right]=[\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}]. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Das vektorielle Produkt $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}]$ ist also auch eine charakteristische Größe der Dyade; Jaumann nennt es den Rotor der Dyade.

64. Dyaden aus Grundvektoren.

Besonders einfach und deswegen im späteren verwendbar sind die speziellen „Grunddyaden“, welche man aus den rechtwinkligen Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bilden kann. Es ist

$$(\mathfrak{i}\,;\mathfrak{i})\mathfrak{v}=\mathfrak{i}(\mathfrak{i}\,\mathfrak{v})=\mathfrak{i}v_x$$

usw., also ergibt die Zusammenstellung:

$$\begin{array}{lll}(\mathfrak{i}\,;\mathfrak{i})\mathfrak{v}=\mathfrak{i}v_x, & (\mathfrak{i}\,;\mathfrak{j})\mathfrak{v}=\mathfrak{i}v_y, & (\mathfrak{i}\,;\mathfrak{k})\mathfrak{v}=\mathfrak{i}v_z,\\ (\mathfrak{j}\,;\mathfrak{i})\mathfrak{v}=\mathfrak{j}v_x, & (\mathfrak{j}\,;\mathfrak{j})\mathfrak{v}=\mathfrak{j}v_y, & (\mathfrak{j}\,;\mathfrak{k})\mathfrak{v}=\mathfrak{j}v_z,\\ (\mathfrak{k}\,;\mathfrak{i})\mathfrak{v}=\mathfrak{k}v'_x, & (\mathfrak{k}\,;\mathfrak{j})\mathfrak{v}=\mathfrak{k}v_y, & (\mathfrak{k}\,;\mathfrak{k})\mathfrak{v}=\mathfrak{k}\mathfrak{v}_z.\end{array}$$

65. Freie Wählbarkeit des Dyadoproduktes.

Ist ein Argument $\mathfrak{v}$ gegeben und soll ein zweiter Vektor $\mathfrak{w}$ als Dyadoprodukt von $\mathfrak{v}$ ausgedrückt werden, so daß, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ noch unbestimmt gelassen werden,

$$\mathfrak{w}=(\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a})\mathfrak{v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ist, so kann der Vektor $\mathfrak{w}$ beliebig vorgeschrieben werden, es läßt sich immer eine Dyade $\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a}$ angeben, welche der Gleichung (1) genügt.

Denn $\mathfrak{w}=\mathfrak{A}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v})$; es läßt sich immer ein Vektor $\mathfrak{A}$ angeben, der die Richtung von $\mathfrak{w}$ hat; man kann dem Vektor den Betrag $m\mathfrak{w}$ geben, wo m ein beliebiger Skalar, und man kann auch offenbar immer einen zweiten Vektor $\mathfrak{a}$ so bestimmen, daß

$$|\mathfrak{a}|\,cos\,\mathfrak{a},\mathfrak{v}=\frac{1}{m\,|v|}$$

ist; dann ist $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) = \frac{1}{m}$, also $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) = m\,\mathfrak{w} \cdot \frac{1}{m} \cdot$ Damit ist die gesuchte Dyade gefunden. Da m unbestimmt bleibt, läßt die Aufgabe unendlich viele Lösungen zu, entsprechend § **62**, Gleichung (3).

Außerdem bilden die Vektoren, für welche $|a|\,cos\,\mathfrak{a},\mathfrak{v} = \frac{1}{m\,|v|}$ ist, offenbar einen Kegel um v als Achse, dessen halbe Öffnung durch eine Gleichung $cos\,\mathfrak{a},\mathfrak{v} = const$ bestimmt ist. Jede Erzeugungslinie dieses Kegels kann als $\mathfrak{a}$ dienen. Es gibt also ∞^2 Lösungen.

66. Konjugierte Dyaden und Dyadoprodukte.

Zwei Dyaden heißen konjugiert, wenn der Antezedent der ersten gleich dem Konsequenten der zweiten und umgekehrt ist. Konjugiert sind also z. B.:

$$\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}\,;\mathfrak{A}.$$

Zwei Dyadoprodukte heißen konjugiert, wenn sie mit konjugierten Dyaden und mit dem gleichen Argument in gleicher Stellung (Argument in beiden Fällen Postfaktor oder in beiden Fällen Präfaktor) gebildet sind. Die Konjugierte bezeichnen wir, wie früher, durch ein angehängtes c.

Die Definitionsgleichungen zeigen sofort, daß

$$(\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a})\,\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\,(\mathfrak{a}\,;\mathfrak{A}). \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Eine als Präfaktor gebrauchte Dyade ist äquivalent mit ihrer als Postfaktor gebrauchten Konjugierten, und

$$(\mathfrak{a}\,;\mathfrak{A})\,\mathfrak{v} = \big((\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a})\,\mathfrak{v}\big)_c, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\mathfrak{v}\,(\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a}) = \big((\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a})\,\mathfrak{v}\big)_c. \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

„Zwei Dyadoprodukte aus der gleichen Dyade und dem gleichen Argument sind konjugiert, wenn das Argument das eine Mal als Präfaktor, das andere Mal als Postfaktor steht.“ Dyadoprodukte zeigen also bezüglich der Konjugation dasselbe Verhalten, welches wir für Diatensorvektorprodukte im Anschluß an die vektoriellen Produkte festgesetzt haben.

Ferner ergibt sich

$$(\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a})\,\mathfrak{v} - (\mathfrak{a}\,;\mathfrak{A})\,\mathfrak{v} = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{v}). \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Größe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist aber nach einem bekannten Satz der Vektorenrechnung $\left[\mathfrak{v}[\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}]\right]$ oder $\left[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{A}]\mathfrak{v}\right]$.

Es folgt:

$$(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v} - (\mathfrak{a};\mathfrak{A})\mathfrak{v} = \left[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{A}]\mathfrak{v}\right]: \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

„Die Differenz zwischen einem Dyadoprodukt und seinem Konjugierten ist gleich dem vektoriellen Tripelprodukt aus den drei Bestandteilen, letztere genommen in derjenigen Reihenfolge, in welcher sie im Subtrahendus auftreten. Die innere eckige Klammer [ ] tritt dabei an die Stelle von ()." Dies gilt, wie die einfache Ausrechnung zeigt, auch dann, wenn $\mathfrak{v}$ Präfaktor ist.

67. Addition bei Dyaden und Dyadoprodukten.

Den Begriff „Summe zweier Dyaden", also die Bedeutung des Zeichens $\pm$ zwischen zwei Dyaden, definieren wir durch die dem Wesen der inneren Multiplikation entsprechende Festsetzung:

$$(\mathfrak{A};\mathfrak{a} \pm \mathfrak{B};\mathfrak{b})\mathfrak{v} = (\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v} \pm (\mathfrak{B};\mathfrak{b})\mathfrak{v}. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Im einzelnen ist hiernach

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B};\mathfrak{a})\mathfrak{v} = (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{B}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) = (\mathfrak{A};\mathfrak{a}+\mathfrak{B};\mathfrak{a})\mathfrak{v},$$

also

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B};\mathfrak{a} = \mathfrak{A};\mathfrak{a}+\mathfrak{B};\mathfrak{a}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und ebenso ergibt sich

$$\mathfrak{A};\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{A};\mathfrak{a}+\mathfrak{A};\mathfrak{b}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B};\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{A};\mathfrak{a}+\mathfrak{B};\mathfrak{b}+\mathfrak{B};\mathfrak{a}+\mathfrak{B};\mathfrak{b}. \quad . \quad (4)$$

Die Gleichungen (2), (3) und (4) besagen, daß die Operation, durch welche aus zwei Vektoren eine Dyade gebildet wird, distributiv ist. Bestehen die Elemente der Dyade aus Summen, so sind dieselben in der Dyade genau so zu behandeln, als ob es sich um eine gewöhnliche Multiplikation handelte. Daraus ergibt sich die Berechtigung, die Dyadenbildung als eine Art der Multiplikation zu bezeichnen.

Ferner ist definitionsgemäß

$$(\mathfrak{A};\mathfrak{a})(\mathfrak{v}+\mathfrak{w}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{a},\,\mathfrak{v}+\mathfrak{w}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{A}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}), \quad . \quad . \quad (5)$$

also

$$(\mathfrak{A};\mathfrak{a})(\mathfrak{v}+\mathfrak{w}) = (\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v} + (\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{w}.$$

Hiernach ist auch die Operation, welche aus der Dyade und dem Argument das Dyadoprodukt bildet, distributiv.

Die Ausdehnung auf Differenzen, so wie auf Summen, welche mehr als zwei Terme enthalten, ist selbstverständlich.

68. Symmetrische Dyaden.

Eine Dyade oder Dyadensumme heißt selbstkonjugiert oder symmetrisch, wenn sie sich bei Vertauschung des oder der Antezedenten mit dem oder den Konsequenten nicht ändert. Die Einzeldyade kann natürlich nur dann symmetrisch sein, wenn der Konsequent dem Antezedenten gleich ist. Die Summe zweier konjugierter Dyaden ist symmetrisch:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A};\mathfrak{a}+\mathfrak{a};\mathfrak{A})\mathfrak{v} &= \mathfrak{A}(\mathfrak{a}\mathfrak{v})+\mathfrak{a}(\mathfrak{A}\mathfrak{v})\\ &= \mathfrak{a}(\mathfrak{A}\mathfrak{v})+\mathfrak{A}(\mathfrak{a}\mathfrak{v}) = (\mathfrak{a};\mathfrak{A}+\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v}.\end{aligned}$$

Der Beweisgang bleibt gültig, wenn $\mathfrak{v}$ als Präfaktor steht.

69. Operative Multiplikation von Dyaden.

Was in § **43** über operative Multiplikationen gesagt wurde, gilt auch hier. Da das Dyadoprodukt ein Vektor ist, kann man es wieder mit einer Dyade multiplizieren. Es bietet sich also die Aufgabe dar, Dyaden operativ miteinander zu multiplizieren. Was bedeutet $(\mathfrak{B};\mathfrak{b})(\mathfrak{A};\mathfrak{a})$? Bei Beantwortung dieser Frage ist nach § **43** vorauszusetzen, daß die Operation, welche zuerst vorgenommen werden soll, proximal zum Argument geschrieben wird. Die beiden Ausdrücke:

$$(\mathfrak{B};\mathfrak{b})(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}(\mathfrak{a};\mathfrak{A})(\mathfrak{b};\mathfrak{B})$$

sind also gleichbedeutend. Die beiden Ausdrücke:

$$(\mathfrak{B};\mathfrak{b})(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}(\mathfrak{A};\mathfrak{a})(\mathfrak{B};\mathfrak{b})$$

sind nicht gleichbedeutend, entsprechen einander aber insofern, als in beiden die Multiplikation mit $(\mathfrak{A};\mathfrak{a})$ vorangehen soll. Die Ausrechnung ergibt:

A. Mit $\mathfrak{v}$ als Postfaktor:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{B};\mathfrak{b})(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v} &= (\mathfrak{B};\mathfrak{b})\mathfrak{A}(\mathfrak{a}\mathfrak{v}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{b}\mathfrak{A})(\mathfrak{a}\mathfrak{v})\\ &= \big(\mathfrak{B}(\mathfrak{b}\mathfrak{A});\mathfrak{a}\big)\mathfrak{v} \quad \text{oder} \quad \big(\mathfrak{B};(\mathfrak{b}\mathfrak{A})\mathfrak{a}\big)\mathfrak{v},\end{aligned}$$

also

$$(\mathfrak{B};\mathfrak{b})(\mathfrak{A};\mathfrak{a}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{b}\mathfrak{A});\mathfrak{a} = \mathfrak{B};(\mathfrak{b}\mathfrak{A})\mathfrak{a}. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

B. Mit $\mathfrak{v}$ als Präfaktor:

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{A};\mathfrak{a})(\mathfrak{B};\mathfrak{b}) = (\mathfrak{v}\mathfrak{A})\mathfrak{a}(\mathfrak{B};\mathfrak{b}) = (\mathfrak{v}\mathfrak{A})(\mathfrak{a}\mathfrak{B})\mathfrak{b}$$
$$= \mathfrak{v}\big(\mathfrak{A}(\mathfrak{a}\mathfrak{B});\mathfrak{b}\big) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{v}\big(\mathfrak{A};(\mathfrak{a}\mathfrak{B})\mathfrak{b}\big),$$

also

$$(\mathfrak{A};\mathfrak{a})(\mathfrak{B};\mathfrak{b}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{a}\mathfrak{B});\mathfrak{b} = \mathfrak{A};(\mathfrak{a}\mathfrak{B})\mathfrak{b}. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Das Ergebnis lautet in beiden Fällen: Das operative Produkt zweier Dyaden ist wieder eine Dyade. In ihr haben die Buchstaben dieselbe Anordnung wie in dem ursprünglichen Produkt, aber die beiden mittleren sind zu einem skalaren Produkt verbunden. Das Semikolon steht beliebig vor oder hinter diesem Skalar.

Natürlich kann der Skalar auch herausgesetzt werden, so daß man hat:

$$(\mathfrak{A};\mathfrak{a})(\mathfrak{B};\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{B})(\mathfrak{A};\mathfrak{b}). \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Man sieht sofort, daß die operative Multiplikation von Dyaden nicht kommutativ ist. $(\mathfrak{B};\mathfrak{b})(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v}$ liefert ein Produkt, welches die Richtung von $\mathfrak{B}$ besitzt; $(\mathfrak{A};\mathfrak{a})(\mathfrak{B};\mathfrak{b})\mathfrak{v}$ dagegen hat die Richtung von $\mathfrak{A}$.

Die operative Multiplikation ist definitionsgemäß assoziativ, solange das Argument an einem Ende des Produktes steht; denn die Vorschrift, daß die zuerst vollzogene Operation zunächst dem Argument geschrieben werden soll, sagt nichts anderes aus, als daß

$$(\mathfrak{B};\mathfrak{b})(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v} = (\mathfrak{B};\mathfrak{b})\big((\mathfrak{A};\mathfrak{a})\,\mathfrak{v}\big)$$

sein soll.

Zweites Kapitel: **Dyadentripel.**

70. Reduktion von Dyadensummen.

Es sei $\mathfrak{v}$ ein Zeichen, welches jeden beliebigen Vektor vertritt, und es seien $\mathfrak{G};\mathfrak{g}$, $\mathfrak{G}';\mathfrak{g}'$ usw. eine beliebige Anzahl von Dyaden. Wir bilden die Summe derselben und mit ihr das Dyadoprodukt des Argumentes $\mathfrak{v}$, zunächst mit $\mathfrak{v}$ als Postfaktor, dann ist:

$$(\mathfrak{G};\mathfrak{g} + \mathfrak{G}';\mathfrak{g}' + \mathfrak{G}'';\mathfrak{g}'' + \cdots \text{usw.})\,\mathfrak{v} = \mathfrak{G}(\mathfrak{g}\mathfrak{v}) + \mathfrak{G}'(\mathfrak{g}'\mathfrak{v}) + \cdots \text{usw.} \quad (1)$$

Sind nun $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ drei willkürlich angenommene, im allgemeinen aber als nicht komplanar vorauszusetzende Vektoren, so läßt sich nach Vorbemerkung **c**) jeder von den Vektoren $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ usw. in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G} &= l\,\mathfrak{A} + m\,\mathfrak{B} + n\,\mathfrak{C}, \\ \mathfrak{G}' &= l'\mathfrak{A} + m'\mathfrak{B} + n'\mathfrak{C}, \\ &\text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ausdrücken, wo die l, m, n Sakalare sind. Die Summe auf der rechten Seite von (1) nimmt also die Form an

$$L\mathfrak{A} + M\mathfrak{B} + N\mathfrak{C},$$

und es ist

$$\left.\begin{aligned} L &= l(\mathfrak{g}\,\mathfrak{v}) + l'(\mathfrak{g}'\mathfrak{v}) + l''(\mathfrak{g}''\mathfrak{v}) + \cdots \text{ usw.} \\ &= (l\,\mathfrak{g} + l'\mathfrak{g}' + l''\mathfrak{g}'' + \cdots \text{ usw.}, \mathfrak{v}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

oder, wenn $l\,\mathfrak{g} + l'\mathfrak{g}' + l''\mathfrak{g}'' + \cdots$ usw. $= \mathfrak{a}$ gesetzt wird,

$$L\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) = (\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a})\mathfrak{v}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Offenbar erhält man auf dieselbe Weise:

$$M\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}\,;\mathfrak{b})\,\mathfrak{v}, \qquad N\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}\,;\mathfrak{c})\,\mathfrak{v};$$

also ergibt sich:

Die Summe der Dyadoprodukte auf der linken Seite von Gleichung (1) läßt sich stets darstellen in der Form:

$$(\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a} + \mathfrak{B}\,;\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\,;\mathfrak{c})\,\mathfrak{v}.$$

Hierin sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ willkürlich angenommen, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ aber nachdem diese willkürliche Annahme einmal erfolgt ist, eindeutig bestimmt. Denn in der Gleichung für $\mathfrak{a}$ sind $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ usw. von vornherein gegeben, l, l', l'' usw. aber durch die Gleichungen (2) eindeutig bestimmt. Multipliziert man die Summe von Dyadoprodukten auf der linken Seite von Gleichung (1) mit $\mathfrak{v}$ als Präfaktor, so ergibt sich auf ganz analogem Wege, daß diese linke Seite sich darstellen läßt durch

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a} + \mathfrak{B}\,;\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\,;\mathfrak{c}),$$

und in dieser Summe sind dann $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ willkürlich anzunehmen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ aber eindeutig bestimmt.

Es folgt: „Jede beliebige Summe von Dyaden läßt sich ersetzen durch ein Dyadentripel. In diesem Tripel können die Antezedenten willkürlich angenommen werden, und dann sind die Konsequenten eindeutig bestimmt, oder man kann die Konsequenten willkürlich annehmen, und dann sind die Antezedenten eindeutig bestimmt.“ Die willkürlichen Annahmen sind nur beschränkt durch die Bedingung, daß das willkürlich gewählte Vektorentripel im allgemeinen nicht komplanar sein darf, weil es anderenfalls nicht allgemein möglich wäre, die Vektoren $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ usw. durch seine Glieder auszudrücken.

71. Dyadentripel.

Hiernach ist das Dyadentripel die typische Form, auf welche die Dyadengrößen sich im allgemeinen zurückführen lassen. Wir bezeichnen ein Dyadentripel mit Φ oder verwandten Buchstaben. Soll dasselbe bei dieser Bezeichnung durch Angabe seiner Bestandteile näher charakterisiert werden, so schreiben wir die Antezedenten als untere, die Konsequenten als obere Marken an das Φ, letztere, wo keine Verwechslung mit Potenzen möglich ist, ohne Klammern; auch brauchen keine Komma zwischengesetzt zu werden.

Es steht demnach:

$$\Phi^{\mathfrak{abc}}_{\mathfrak{ABC}} \text{ für } (\mathfrak{A}\,;\mathfrak{a} + \mathfrak{B}\,;\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\,;\mathfrak{c}).$$

Ist das Dyadentripel ausgeschrieben, so wird es der Deutlichkeit wegen gegen das Argument durch runde Klammern abgegrenzt; ist es durch Φ bezeichnet, so sind die Klammern überflüssig.

Die Größe $(\mathfrak{A}\mathfrak{a}) + (\mathfrak{B}\mathfrak{b}) + (\mathfrak{C}\mathfrak{c})$ heißt der erste Skalar des Dyadentripels; die übrigen Benennungen bleiben dieselben wie bei der einfachen Dyade des § **61**.

Entsprechend heißt die Größe $[\mathfrak{A}\mathfrak{a}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{b}] + [\mathfrak{C}\mathfrak{c}]$ der Rotor des Dyadentripels.

72. Distributive Eigenschaften des Dyadentripels.

Aus den Eigenschaften der einzelnen Dyade ergeben sich ohne weiteres die folgenden Sätze, die auch dann gelten, wenn das Dyadentripel als Postfaktor steht,

$$\Phi(\mathfrak{v} + \mathfrak{w}) = \Phi\mathfrak{v} + \Phi\mathfrak{w}. \qquad (1)$$

Sind Φ und Φ' zwei Dyadentripel, so ist:

$$(\Phi + \Phi')\mathfrak{v} = \Phi\mathfrak{v} + \Phi'\mathfrak{v}. \qquad (2)$$

Ist n ein Skalar, so ist

$$n(\Phi\mathfrak{v}) = (n\Phi)\mathfrak{v} = \Phi(n\mathfrak{v}) = n\Phi\mathfrak{v}, \qquad (3)$$

$$n\Phi^{\mathfrak{abc}}_{\mathfrak{ABC}} = \Phi^{\mathfrak{abc}}_{n\mathfrak{A},n\mathfrak{B},n\mathfrak{C}} = \Phi^{n\mathfrak{a},n\mathfrak{b},n\mathfrak{c}}_{\mathfrak{ABC}}. \qquad (4)$$

Ferner
$$\Phi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'} = \Phi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A}} + \Phi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A}'},$$
$$\Phi^{\mathfrak{a}+\mathfrak{a}'}_{\mathfrak{A}} = \Phi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A}} + \Phi^{\mathfrak{a}'}_{\mathfrak{A}},$$
$$\Phi^{\mathfrak{a}+\mathfrak{a}',\,\mathfrak{b}+\mathfrak{b}',\,\mathfrak{c}+\mathfrak{c}'}_{\mathfrak{A}+\mathfrak{A}',\,\mathfrak{B}+\mathfrak{B}',\,\mathfrak{C}+\mathfrak{C}'} = \Phi^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \Phi^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'} + \Phi^{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'}_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \Phi^{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'}_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'}. \quad (5)$$

Die letzten drei Gleichungen lassen sich, wie bei der Einzeldyade, in den Satz zusammenfassen, daß die dyadische Multiplikation von Summen im Inneren des Dyadentripels den Regeln der gewöhnlichen Multiplikation folgt. Es bedarf nicht der Bemerkung, daß die Additionen kommutativ sind, daß aber bei den Multiplikationen die Reihenfolge von Antezedenten und Konsequenten beibehalten werden muß.

73. Konjugierte Dyadentripel; Symmetrie.

Wie zwei Dyaden, so heißen auch zwei Dyadentripel konjugiert, wenn die Antezedenten des einen die Konsequenten des anderen sind und umgekehrt:
$$\mathfrak{a};\mathfrak{A} + \mathfrak{b};\mathfrak{B} + \mathfrak{c};\mathfrak{C} = (\mathfrak{A};\mathfrak{a} + \mathfrak{B};\mathfrak{b} + \mathfrak{C};\mathfrak{c})_c. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Der Satz
$$\Phi\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\Phi_c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
gilt für die Dyadentripel, weil er für alle einzelnen Summanden in Φ und Φ_c gilt. Er kann auch geschrieben werden:
$$\Phi\mathfrak{v} = (\mathfrak{v}\Phi)_c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Der Schlußsatz des § **66** nimmt für das Dyadentripel folgende Form an:
$$\left.\begin{aligned}\Phi^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}\mathfrak{v} - \Phi^{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\mathfrak{v} &= \mathfrak{A}(\mathfrak{a}\mathfrak{v}) + \mathfrak{B}(\mathfrak{b}\mathfrak{v}) + \mathfrak{C}(\mathfrak{c}\mathfrak{v}) \\ &\quad - \mathfrak{a}(\mathfrak{A}\mathfrak{v}) - \mathfrak{b}(\mathfrak{B}\mathfrak{v}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{C}\mathfrak{v}),\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
das ist
$$\big[[\mathfrak{a}\mathfrak{A}] + [\mathfrak{b}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{c}\mathfrak{C}],\, \mathfrak{v}\big].$$

Hiernach ist die Differenz zweier konjugierten Dyadoprodukte gleich dem vektoriellen Produkt aus dem Rotor des subtrahierten Dyadentripels und dem (nachfolgenden) Argument.

Ein Dyadentripel heißt symmetrisch, wenn es gleich seinem Konjugierten ist.

Die Summe zweier konjugierten Dyadentripel ist immer symmetrisch; denn
$$\mathfrak{A};\mathfrak{a} + \mathfrak{a};\mathfrak{A} + \mathfrak{B};\mathfrak{b} + \mathfrak{b};\mathfrak{B} + \mathfrak{C};\mathfrak{c} + \mathfrak{c};\mathfrak{C}$$
ändert sich offenbar nicht, wenn man die Antezedenten und Konsequenten überall vertauscht.

74. Operative Multiplikation von Dyadentripeln.

Gegeben seien zwei Dyadentripel $\Phi = \mathfrak{A};\mathfrak{a} + \mathfrak{B};\mathfrak{b} + \mathfrak{C};\mathfrak{c}$ und $\Phi' = \mathfrak{A}';\mathfrak{a}' + \mathfrak{B}';\mathfrak{b}' + \mathfrak{C}';\mathfrak{c}'$; es erwächst die Aufgabe, ihr Produkt durch die Einzeldyaden, aus denen sie bestehen, darzustellen. Es ist

$$\left.\begin{aligned}\Phi'\Phi\mathfrak{v} &= (\mathfrak{A}';\mathfrak{a}' + \mathfrak{B}';\mathfrak{b}' + \mathfrak{C}';\mathfrak{c}')\{\mathfrak{A}(\mathfrak{a}\mathfrak{v}) + \mathfrak{B}(\mathfrak{b}\mathfrak{v}) + \mathfrak{C}(\mathfrak{c}\mathfrak{v})\}\\ &= \mathfrak{A}'\{(\mathfrak{a}'\mathfrak{A})(\mathfrak{a}\mathfrak{v}) + (\mathfrak{a}'\mathfrak{B})(\mathfrak{b}\mathfrak{v}) + (\mathfrak{a}'\mathfrak{C})(\mathfrak{c}\mathfrak{v})\}\\ &+ \mathfrak{B}'\{(\mathfrak{b}'\mathfrak{A})(\mathfrak{a}\mathfrak{v}) + (\mathfrak{b}'\mathfrak{B})(\mathfrak{b}\mathfrak{v}) + (\mathfrak{b}'\mathfrak{C})(\mathfrak{c}\mathfrak{v})\}\\ &+ \mathfrak{C}'\{(\mathfrak{c}'\mathfrak{A})(\mathfrak{a}\mathfrak{v}) + (\mathfrak{c}'\mathfrak{B})(\mathfrak{b}\mathfrak{v}) + (\mathfrak{c}'\mathfrak{C})(\mathfrak{c}\mathfrak{v})\}.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nun ist nach § 69 $\mathfrak{A}'(\mathfrak{a}'\mathfrak{A})(\mathfrak{a}\mathfrak{v}) = (\mathfrak{A}';\mathfrak{a}')(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{v}$ usw., also ergibt sich ohne weiteres:

$$\left.\begin{aligned}&(\mathfrak{A}';\mathfrak{a}' + \mathfrak{B}';\mathfrak{b}' + \mathfrak{C}';\mathfrak{c}')(\mathfrak{A};\mathfrak{a} + \mathfrak{B};\mathfrak{b} + \mathfrak{C};\mathfrak{c})\\ &= (\mathfrak{A}';\mathfrak{a}')(\mathfrak{A};\mathfrak{a}) + (\mathfrak{A}';\mathfrak{a}')(\mathfrak{B};\mathfrak{b}) + (\mathfrak{A}';\mathfrak{a}')(\mathfrak{C};\mathfrak{c})\\ &+ (\mathfrak{B}';\mathfrak{b}')(\mathfrak{A};\mathfrak{a}) + (\mathfrak{B}';\mathfrak{b}')(\mathfrak{B};\mathfrak{b}) + (\mathfrak{B}';\mathfrak{b}')(\mathfrak{C};\mathfrak{c})\\ &+ (\mathfrak{C}';\mathfrak{c}')(\mathfrak{A};\mathfrak{a}) + (\mathfrak{C}';\mathfrak{c}')(\mathfrak{B};\mathfrak{b}) + (\mathfrak{C}';\mathfrak{c}')(\mathfrak{C};\mathfrak{c}).\end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

Dyadentripel werden nach dem Schema gewöhnlicher Summen miteinander multipliziert.

Das Produkt zweier gleichen Dyadentripel $\Phi\Phi$ werden wir folgerichtig Φ^2 schreiben, und die Potenzierung läßt sich beliebig fortsetzen.

Anmerkung. Das Quadrat einer einzelnen Dyade ist gleich dem Produkt aus der Dyade und ihrem Skalar. Für Dyadentripel besteht dieser Satz aber nicht.

75. Gleichheit zweier Dyadentripel.

Definitionsgemäß werden wir zwei Dyadentripel Φ und Ψ für gleich erklären, wenn für jeden Wert von $\mathfrak{v}$

$$\Phi\mathfrak{v} = \Psi\mathfrak{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

und

$$\mathfrak{v}\Phi = \mathfrak{v}\Psi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Es genügt zur Gleichheit, wenn die Gleichungen (1) und (2) für drei nichtkomplanare Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ erfüllt sind. Denn gelten sie für $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$, so gelten sie auch für $l\mathfrak{v}_1$, $m\mathfrak{v}_2$, $n\mathfrak{v}_3$, wo l, m, n beliebige Skalare. Sind aber l, m, n beliebig wählbar, so kann man aus $l\mathfrak{v}_1$, $m\mathfrak{v}_2$ und $n\mathfrak{v}_3$ jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$ zusammensetzen, also sind bei der gemachten Voraussetzung die Hauptkriterien erfüllt.

Zwei Dyadentripel sind offenbar auch dann gleich, wenn man ihnen willkürlich die gleichen Antezedenten vorschreibt, und wenn sie dabei dieselben Konsequenten haben oder umgekehrt.

Soll für beliebige $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die Gleichung

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{B}(\mathfrak{b}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{C}(\mathfrak{c}\,\mathfrak{v}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{a}'\mathfrak{v}) + \mathfrak{B}(\mathfrak{b}'\mathfrak{v}) + \mathfrak{C}(\mathfrak{c}'\mathfrak{v})$$

erfüllt sein, so müssen offenbar die Gleichungen

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{v} = \mathfrak{a}'\mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{b}\,\mathfrak{v} = \mathfrak{b}'\mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{c}\,\mathfrak{v} = \mathfrak{c}'\mathfrak{v}$$

einzeln erfüllt sein.

Hieraus ergibt sich, daß die Gleichheit zweier Dyadentripel mit neun skalaren Bedingungen äquivalent ist; denn die Richtungen von $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ liefern je zwei Bedingungen, und die Gleichheit der drei skalaren Produkte liefert drei weitere, zusammen neun.

76. Der dritte Skalar des Dyadentripels.

Bildet man aus den Antezedenten das Parallelepiped $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$ und ebenso aus den Konsequenten das Parallelepiped $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$, so heißt das Produkt

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$$

der dritte Skalar des Dyadentripels. Seine Bedeutung erhellt aus § 79, II.

77. Die Transformation des Dyadentripels I.

Sie kann, der Natur des Gebildes entsprechend, zunächst darin bestehen, daß das Tripel auf andere Antezedenten oder andere Konsequenten bezogen wird.

Gegeben sei ein Dyadentripel

$$\Phi = \mathfrak{A}\,;\mathfrak{a} + \mathfrak{B}\,;\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\,;\mathfrak{c}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dasselbe soll zunächst auf neue Antezedenten $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ transformiert werden. Es seien $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die neuen Konsequenten, und

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}' &= l_1\mathfrak{A} + m_1\mathfrak{B} + n_1\mathfrak{C}, \\ \mathfrak{B}' &= l_2\mathfrak{A} + m_2\mathfrak{B} + n_2\mathfrak{C}, \\ \mathfrak{C}' &= l_3\mathfrak{A} + m_3\mathfrak{B} + n_3\mathfrak{C}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ist dann $\mathfrak{v}$ ein beliebiger Vektor, so muß, wenn das neue Dyadentripel mit dem alten identisch sein soll, für jedes $\mathfrak{v}$ die Gleichung erfüllt sein:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{B}(\mathfrak{b}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{C}(\mathfrak{c}\,\mathfrak{v}) &= \{l_1\mathfrak{A} + m_1\mathfrak{B} + n_1\mathfrak{C}\}(\mathfrak{a}'\mathfrak{v}) \\ + \{l_2\mathfrak{A} + m_2\mathfrak{B} + n_2\mathfrak{C}\}(\mathfrak{b}'\mathfrak{v}) &+ \{l_3\mathfrak{A} + m_3\mathfrak{B} + n_3\mathfrak{C}\}(\mathfrak{c}'\mathfrak{v}). \end{aligned}\right\} \cdot (3)$$

Faßt man rechts die Faktoren von $\mathfrak{A}$ usw. zusammen, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v})+\mathfrak{B}(\mathfrak{b}\,\mathfrak{v})+\mathfrak{C}(\mathfrak{c}\,\mathfrak{v}) &= \mathfrak{A}\{l_1(\mathfrak{a}'\mathfrak{v})+l_2(\mathfrak{b}'\mathfrak{v})+l_3(\mathfrak{c}'\mathfrak{v})\}\\ +\mathfrak{B}\{m_1(\mathfrak{a}'\mathfrak{v})+m_2(\mathfrak{b}'\mathfrak{v})&+m_3(\mathfrak{c}'\mathfrak{v})\}+\mathfrak{C}\{n_1(\mathfrak{a}'\mathfrak{v})+n_2(\mathfrak{b}'\mathfrak{v})+n_3(\mathfrak{c}'\mathfrak{v})\}.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

das heißt:

$$\left.\begin{aligned} l_1\mathfrak{a}'+l_2\mathfrak{b}'+l_3\mathfrak{c}' &= \mathfrak{a},\\ m_1\mathfrak{a}'+m_2\mathfrak{b}'+m_3\mathfrak{c}' &= \mathfrak{b},\\ n_1\mathfrak{a}'+n_2\mathfrak{b}'+n_3\mathfrak{c}' &= \mathfrak{c}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(5)$$

Wir führen nun Bezeichnungen ein, die den in § **16** bis **19** gebrauchten analog sind. Wir schreiben $\varDelta$ für die Determinante der 3^2 Größen l, m, n in Gleichung (5) und setzen:

$$\frac{m_2 n_3 - m_3 n_2}{\varDelta} = \bar{l}_1, \qquad \frac{n_2 l_3 - n_3 l_2}{\varDelta} = \bar{m}_1$$

usw.

Dann ergibt die Auflösung der Gleichungen (5)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{a}' &= \bar{l}_1\mathfrak{a}+\bar{m}_1\mathfrak{b}+\bar{n}_1\mathfrak{c},\\ \mathfrak{b}' &= \bar{l}_2\mathfrak{a}+\bar{m}_2\mathfrak{b}+\bar{n}_2\mathfrak{c},\\ \mathfrak{c}' &= \bar{l}_3\mathfrak{a}+\bar{m}_3\mathfrak{b}+\bar{n}_3\mathfrak{c},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(6)$$

und zwischen den Größen l und $\bar{l}$ usw. dieser Gleichungen bestehen offenbar dieselben Beziehungen wie zwischen den α und $\bar{\alpha}$ usw. der § **16** usw. Demnach ist

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= l_1\mathfrak{A}+m_1\mathfrak{B}+n_1\mathfrak{C}\,;\,\bar{l}_1\mathfrak{a}+\bar{m}_1\mathfrak{b}+\bar{n}_1\mathfrak{c}\\ &+ l_2\mathfrak{A}+m_2\mathfrak{B}+n_2\mathfrak{C}\,;\,\bar{l}_2\mathfrak{a}+\bar{m}_2\mathfrak{b}+\bar{n}_2\mathfrak{c}\\ &+ l_3\mathfrak{A}+m_3\mathfrak{B}+n_3\mathfrak{C}\,;\,\bar{l}_3\mathfrak{a}+\bar{m}_3\mathfrak{b}+\bar{n}_3\mathfrak{c}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(7)$$

mit beliebig wählbaren l_μ, m_μ, n_μ der Ausdruck für alle möglichen Transformationen, denen Φ durch Wahl von neuen Antezedenten unterworfen werden kann.

Sind $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ vorgeschrieben, so sind die l_μ, m_μ, n_μ durch Gleichung (2) eindeutig bestimmt. Gleichung (6) liefert dann, ebenfalls eindeutig, die zugehörigen Konsequenten.

Wählt man nicht neue Antezedenten, sondern neue Konsequenten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ willkürlich und setzt

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{a}' &= \bar{l}_1\mathfrak{a}+\bar{m}_1\mathfrak{b}+\bar{n}_1\mathfrak{c},\\ \mathfrak{b}' &= \bar{l}_2\mathfrak{a}+\bar{m}_2\mathfrak{b}+\bar{n}_2\mathfrak{c},\\ \mathfrak{c}' &= \bar{l}_3\mathfrak{a}+\bar{m}_3\mathfrak{b}+\bar{n}_3\mathfrak{c},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(8)$$

so erhält man durch eine analoge Rechnung genau die Formel (7), nur sind die skalaren Faktoren von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zweimal überstrichen. Da aber $\bar{\bar{l}} = l$ usw., dient die Formel (7) für beide Fälle. Betrachtet man die l, m, n als primär willkürlich gewählt, so hat man die Transformation auf veränderte Antezedenten, und die Koeffizienten in den Konsequenten sind bestimmt durch die Beziehungen $\bar{l}_1 = \frac{m_2 n_3 - m_3 n_2}{\Delta}$ usw. Betrachtet man aber die $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ als primär willkürlich gewählt, so hat man die Transformation auf geänderte Konsequenten, und die Koeffizienten l, m, n bestimmen sich durch die Gleichungen $l_1 = \frac{\bar{m}_2 \bar{n}_3 - \bar{m}_3 \bar{n}_2}{\bar{\Delta}}$ usw.

Das transformierte Dyadentripel Φ' muß nun nicht bloß die durch Gleichung (3) dargestellte Bedingung $\Phi' \mathfrak{v} = \Phi \mathfrak{v}$ erfüllen, sondern auch die Bedingung $\mathfrak{v}\Phi' = \mathfrak{v}\Phi$. Diese liefert die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{a}(\mathfrak{A}\mathfrak{v}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{B}\mathfrak{v}) + \mathfrak{c}(\mathfrak{C}\mathfrak{v}) = \mathfrak{a}'(l_1\mathfrak{A} + m_1\mathfrak{B} + n_1\mathfrak{C}, \mathfrak{v}) \\ &\quad + \mathfrak{b}'(l_2\mathfrak{A} + m_2\mathfrak{B} + n_2\mathfrak{C}, \mathfrak{v}) + \mathfrak{c}'(l_3\mathfrak{A} + m_3\mathfrak{B} + n_3\mathfrak{C}, \mathfrak{v}) \\ &\quad = (\mathfrak{a}'l_1 + \mathfrak{b}'l_2 + \mathfrak{c}'l_3)\mathfrak{A}\mathfrak{v} + \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \cdot (9)$$

Es folgt:

$$\left.\begin{aligned} l_1\mathfrak{a}' + l_2\mathfrak{b}' + l_3\mathfrak{c}' &= \mathfrak{a}, \\ m_1\mathfrak{a}' + m_2\mathfrak{b}' + m_3\mathfrak{c}' &= \mathfrak{b}, \\ n_1\mathfrak{a}' + n_2\mathfrak{b}' + n_3\mathfrak{c}' &= \mathfrak{c}. \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (10)$$

Das sind aber dieselben Beziehungen, welche bereits durch Gleichung (5) ausgedrückt wurden. Die Bedingung $\mathfrak{v}\Phi' = \mathfrak{v}\Phi$ liefert also nichts Neues.

Nach dem Satze, daß eine Dyade unverändert bleibt, wenn man ihre Antezedenten mit einem Skalar multipliziert und den Konsequenten mit demselben Skalar dividiert, ist selbstverständlich, daß die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$ usw. in der Gleichung (7) die entsprechende Unbestimmtheit haben, und daß man demgemäß auch die sämtlichen Antezedenten in Gleichung (7) mit einem beliebigen Skalar multiplizieren kann, wenn man die entsprechenden Konsequenten mit demselben Skalar dividiert.

Wir können immer annehmen, in dem gegebenen Dyadentripel fallen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems der x, y, z, deren Lage willkürlich angenommen sei.

Die Konsequenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zerlegen wir nach den Achsen, indem wir $\mathfrak{a} = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j} + a_z \mathfrak{k}$ usw. setzen. Dann wird das Dyadentripel:

$$\left.\begin{aligned} \Phi = {} & A a_x \mathfrak{i};\mathfrak{i} + A a_y \mathfrak{i};\mathfrak{j} + A a_z \mathfrak{i};\mathfrak{k} \\ & + B b_x \mathfrak{j};\mathfrak{i} + B b_y \mathfrak{j};\mathfrak{j} + B b_z \mathfrak{j};\mathfrak{k} \\ & + C c_x \mathfrak{k};\mathfrak{i} + C c_y \mathfrak{k};\mathfrak{j} + C c_z \mathfrak{k};\mathfrak{k}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Sind nun p, q, r drei Skalare, so kann man immer setzen:

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= (A a_x)^2 + (A a_y)^2 + (A a_z)^2, \\ q^2 &= (B b_x)^2 + (B b_y)^2 + (B b_z)^2, \\ r^2 &= (C c_x)^2 + (C c_y)^2 + (C c_z)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

und

$$\left.\begin{aligned} A a_x &= p \alpha_1, & A a_y &= p \alpha_2, & A a_z &= p \alpha_3, \\ B b_x &= q \beta_1, & B b_y &= q \beta_2, & B b_z &= q \beta_3, \\ C c_x &= r \gamma_1, & C c_y &= r \gamma_2, & C c_z &= r \gamma_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

p, q, r sind stets als reelle Größen angebbar. Die Wurzeln nehmen wir willkürlich positiv. α_1, α_2, α_3 sind die Kosinus der Winkel, welche $\mathfrak{a}$ mit den Achsen macht usw. Sie genügen den Bedingungen $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ usw. Im allgemeinen ist aber nicht $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ usw., da nicht vorauszusetzen war, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ aufeinander senkrecht stehen. Nach dem Vorstehenden wird

$$\left.\begin{aligned} \Phi = {} & p\alpha_1 \mathfrak{i};\mathfrak{i} + p\alpha_2 \mathfrak{i};\mathfrak{j} + p\alpha_3 \mathfrak{i};\mathfrak{k} \\ & + q\beta_1 \mathfrak{j};\mathfrak{i} + q\beta_2 \mathfrak{j};\mathfrak{j} + q\beta_3 \mathfrak{j};\mathfrak{k} \\ & + r\gamma_1 \mathfrak{k};\mathfrak{i} + r\gamma_2 \mathfrak{k};\mathfrak{j} + r\gamma_3 \mathfrak{k};\mathfrak{k}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 \mathfrak{i} + \alpha_2 \mathfrak{j} + \alpha_3 \mathfrak{k} &= \mathfrak{l}, \\ \beta_1 \mathfrak{i} + \beta_2 \mathfrak{j} + \beta_3 \mathfrak{k} &= \mathfrak{m}, \\ \gamma_1 \mathfrak{i} + \gamma_2 \mathfrak{j} + \gamma_3 \mathfrak{k} &= \mathfrak{n}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

so erhält man für Φ die Form:

$$\Phi = p\mathfrak{i};\mathfrak{l} + q\mathfrak{j};\mathfrak{m} + r\mathfrak{k};\mathfrak{n}. \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Nimmt man einzelne oder alle der Faktoren p, q, r negativ, so würde man einfach dem entsprechenden Konsequenten die entgegengesetzte Richtung zu geben haben, dann bleibt die Gleichung unverändert. Die willkürliche Festsetzung, daß p, q, r positiv sein sollen, ist also berechtigt. Die Gleichungen für α_1, β_1 usw. bleiben immer erfüllbar.

Die Lage der Antezedenten $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ war nun bisher willkürlich gelassen, man kann also noch von dem erst angenommenen System der $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ auf ein anderes Antezedententripel $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$ transformieren. Dann erhält man nach (6) drei neue Konsequenten $\mathfrak{l}'\ \mathfrak{m}'\ \mathfrak{n}'$, und wenn das Schema der Kosinus für die Transformation lautet:

	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{i}'$	λ_1	λ_2	λ_3
$\mathfrak{j}'$	μ_1	μ_2	μ_3
$\mathfrak{k}'$	ν_1	ν_2	ν_3,

so ist nach Gleichung (6):

$$\mathfrak{l}' = \lambda_1 \mathfrak{l} + \mu_1 \mathfrak{m} + \nu_1 \mathfrak{n},$$
$$\mathfrak{m}' = \lambda_2 \mathfrak{l} + \mu_2 \mathfrak{m} + \nu_2 \mathfrak{n},$$
$$\mathfrak{n}' = \lambda_3 \mathfrak{l} + \mu_3 \mathfrak{m} + \nu_3 \mathfrak{n}.$$

Da drei von den Kosinus willkürlich sind, lassen sich die λ, μ, ν so bestimmen, daß $\mathfrak{l}', \mathfrak{m}', \mathfrak{n}'$ aufeinander senkrecht stehen[1]); in diesem Falle nennen wir sie $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$, erhalten also die Form:

$$\Phi = p\,\mathfrak{i}';\mathfrak{i} + q\,\mathfrak{j}';\mathfrak{j} + r\,\mathfrak{k}';\mathfrak{k}, \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

in welcher wieder p, q, r drei positiv zu nehmende Skalare sind und sowohl die Antezedenten wie die Konsequenten je ein orthogonales Tripel bilden. Diese Form heißt nach Gibbs die Normalform des Dyadentripels. Die Doppelrichtungen der $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ sowohl wie der $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$ sind bestimmt. Es ist selbstverständlich nur eine Frage der Benennung, ob man die Antezedenten oder die Konsequenten mit gestrichelten Buchstaben schreibt.

Ist Φ symmetrisch, so muß es auch in der Normalform seinem Konjugierten gleich sein; das ist nur möglich, wenn $\mathfrak{i}'$ mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}'$ mit $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}'$ mit $\mathfrak{k}$ zusammenfällt. Das symmetrische Dyadentripel hat also in der Normalform die Gestalt:

$$\Phi = p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}. \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Hier kann man aber nicht mehr willkürlich festsetzen, daß p, q, r positiv sein sollen; denn wenn man einem der drei Konsequenten die umgekehrte Richtung geben wollte, würde die Identität der Richtung von Antezedenten und Konsequenten verloren gehen. Es können also in Gleichung (18) p, q, r einzeln sowohl negativ wie positiv sein.

[1]) Daß die Bestimmung stets im Reellen möglich ist, wird in § 80 unabhängig nachgewiesen.

78. Transformation II.

Bei den im vorigen Paragraphen vorgenommenen Umformungen hat das Dyadentripel schließlich wieder seine Tripelform. Es kamen indessen schon in den Gleichungen (11) und (14) Gestalten vor, in denen es aus neun Einzeldyaden besteht. Solche ergeben sich allgemein, wenn man die einzelnen Vektoren, aus denen das Dyadentripel zusammengesetzt ist, transformiert. Die allgemeinste Gestalt des Herganges ist folgende: Gegeben sei ein Dyadentripel

$$\Phi = \mathfrak{A}\,;\mathfrak{a} + \mathfrak{B}\,;\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\,;\mathfrak{c}, \qquad (1)$$

und es seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ drei nichtkomplanare, übrigens beliebige Vektoren und $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ drei andere, gleichfalls nicht komplanar, übrigens beliebig. Wir transformieren die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$. Sind l, m, n und p, q, r Skalare, so ist zu setzen:

$$\mathfrak{A} = l\mathfrak{x} + m\mathfrak{y} + n\mathfrak{z}, \qquad (2)$$

$$\mathfrak{a} = p\mathfrak{x}' + q\mathfrak{y}' + r\mathfrak{z}'. \qquad (3)$$

Damit wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}\,;\mathfrak{a} = {} & lp\,\mathfrak{x}\,;\mathfrak{x}' + lq\,\mathfrak{x}\,;\mathfrak{y}' + lr\,\mathfrak{x}\,;\mathfrak{z}' \\ & + mp\,\mathfrak{y}\,;\mathfrak{x}' + mq\,\mathfrak{y}\,;\mathfrak{y}' + mr\,\mathfrak{y}\,;\mathfrak{z}' \\ & + np\,\mathfrak{z}\,;\mathfrak{x}' + nq\,\mathfrak{z}\,;\mathfrak{y}' + nr\,\mathfrak{z}\,;\mathfrak{z}'. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Entsprechend erhält man, wenn l', m' usw., sowie l'', m'' usw. zwölf neue Skalare sind,

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}\,;\mathfrak{b} = {} & l'p'\,\mathfrak{x}\,;\mathfrak{x}' + l'q'\,\mathfrak{x}\,;\mathfrak{y}' + l'r'\,\mathfrak{x}\,;\mathfrak{z}' \\ & + m'p'\,\mathfrak{y}\,;\mathfrak{x}' + \text{usw.} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$\mathfrak{C}\,;\mathfrak{c} = l''p''\,\mathfrak{x}\,;\mathfrak{x}' + \text{usw.} \qquad (6)$$

Setzt man nun:

$$\left.\begin{aligned} lp + l'p' + l''p'' &= t_{11} \\ lq + l'q' + l''q'' &= t_{12} \\ mp + m'p' + m''p'' &= t_{21} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

usw.,

so findet sich:

$$\left.\begin{aligned} \Phi = {} & t_{11}\mathfrak{x}\,;\mathfrak{x}' + t_{12}\mathfrak{x}\,;\mathfrak{y}' + t_{13}\mathfrak{x}\,;\mathfrak{z}' \\ & + t_{21}\mathfrak{y}\,;\mathfrak{x}' + t_{22}\mathfrak{y}\,;\mathfrak{y}' + t_{23}\mathfrak{y}\,;\mathfrak{z}' \\ & + t_{31}\mathfrak{z}\,;\mathfrak{x}' + t_{32}\mathfrak{z}\,;\mathfrak{y}' + t_{33}\mathfrak{z}\,;\mathfrak{z}'. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Das Dyadentripel erscheint also hier in Gestalt einer Summe von neun Dyaden. Da die Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ usw. keine andere Bedingung zu erfüllen brauchen, als diejenige der Nichtkomplanarität, können wir willkürlich vorschreiben, daß sowohl $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ wie $\mathfrak{x}'$ $\mathfrak{y}'$ $\mathfrak{z}'$ gleich den Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ein und desselben rechtwinkligen Koordinatensystems der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sein sollen. Dann ergibt sich für Φ die Form:

$$\left.\begin{aligned}\Phi = t_{11}\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + t_{12}\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} + t_{13}\,\mathfrak{i};\mathfrak{k} \\ + t_{21}\,\mathfrak{j};\mathfrak{i} + t_{22}\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + t_{23}\,\mathfrak{j};\mathfrak{k} \\ + t_{31}\,\mathfrak{k};\mathfrak{i} + t_{32}\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} + t_{33}\,\mathfrak{k};\mathfrak{k},\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

in welcher die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, immer unter der Voraussetzung, daß sie rechtwinklig aufeinanderstehen, beliebige Lage im Raum haben können. Diese Form heißt nach Gibbs die Nonionform des Dyadentripels.

Offenbar sind zwei Dyadentripel einander gleich, wenn sie in der Nonionform in demselben Koordinatensystem die gleichen skalaren Koeffizienten in der gleichen Reihenfolge haben.

Ist das ursprüngliche Dyadentripel in der Normalform gegeben:

$$\Phi = p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i}' + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j}' + r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}', \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

so erhält man die Nonionform sofort, wenn man

$$\mathfrak{i}' = \alpha_1\,\mathfrak{i} + \alpha_2\,\mathfrak{j} + \alpha_3\,\mathfrak{k}$$

usw. einführt. Es wird

$$\left.\begin{aligned}\Phi = p\alpha_1\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + p\alpha_2\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} + p\alpha_3\,\mathfrak{i};\mathfrak{k} \\ + q\beta_1\,\mathfrak{j};\mathfrak{i} + q\beta_2\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + q\beta_3\,\mathfrak{j};\mathfrak{k} \\ + r\gamma_1\,\mathfrak{k};\mathfrak{i} + r\gamma_2\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} + r\gamma_3\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

79. Das Dyadentripel als Diatensor.

Die in dem vorigen Paragraphen gegebenen Ausdrücke für ein Dyadentripel sind sämtlich gleichwertig. Wir wählen die Form (9) und bilden mit ihr die beiden Dyadoprodukte $\Phi\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}\Phi$. Unter Berücksichtigung des § **64** erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\Phi\mathfrak{v} = (t_{11}v_x + t_{12}v_y + t_{13}v_z)\,\mathfrak{i} \\ + (t_{21}v_x + t_{22}v_y + t_{23}v_z)\,\mathfrak{j} \\ + (t_{31}v_x + t_{32}v_y + t_{33}v_z)\,\mathfrak{k},\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{v}\Phi = (t_{11}v_x + t_{21}v_y + t_{31}v_z)\,\mathfrak{i} \\ + (t_{12}v_x + t_{22}v_y + t_{32}v_z)\,\mathfrak{j} \\ + (t_{13}v_x + t_{23}v_y + t_{33}v_z)\,\mathfrak{k}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Die beiden Gleichungen (1) und (2) sagen nun aus:

1. Das Dyadentripel ist identisch mit einem Diatensor. Unser Dyadentripel Φ ist identisch mit dem Diatensor:

$$\begin{cases} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}. \end{cases} \qquad (3)$$

Dieser Diatensor ist in demselben Koordinatensystem der x, y, z bestimmt, auf welches das Dyadentripel bezogen war.

2. Die in § **66** gegebene Definition der Konjugation ist gleichbedeutend mit der in § **23** gegebenen; denn der durch Gleichung (2) bestimmte Diatensor ist nach beiden Definitionen konjugiert zu dem durch Gleichung (1) bestimmten.

Demgemäß stimmt auch die Definition der Symmetrie und Antimetrie für Dyadentripel und Diatensor inhaltlich überein.

Sonach fallen Diatensor und Dyadentripel unter einen gemeinschaftlichen Begriff, und für diesen wollen wir nunmehr das Wort Diatensor gebrauchen; der Name wurde schon mit Rücksicht darauf gewählt, daß er gleichzeitig an die Worte Dyade und Tensor anklingt. Zugleich rechtfertigt sich der Gebrauch desselben Buchstabens Φ für beide. Wir unterscheiden nunmehr die Größe, welche im ersten Abschnitt Diatensor genannt wurde, und das Dyadentripel nur noch als formale Abarten des übergeordneten Begriffes Diatensor. Man kann die eine die dyadische, und die andere die enneadische Form des Diatensors nennen (ἕννεα = neun); doch bleiben auch die Ausdrücke dyadische und tensorielle Form gestattet, auch kann das Wort Dyadentripel noch gebraucht werden, wo es für die gerade vorliegende Form bequem ist.

War das Dyadentripel in der Normalform gegeben, so wird

$$p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i}' + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j}' + r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}' = \begin{cases} p\alpha_1 & p\alpha_2 & p\alpha_3 \\ q\beta_1 & q\beta_2 & q\beta_3 \\ r\gamma_1 & r\gamma_2 & r\gamma_3, \end{cases} \qquad (4)$$

und die enneadische Form ist damit in dem Koordinatensystem der $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bestimmt.

Es sind nun auf dem Boden der Dyadenrechnung einige Begriffe selbständig definiert worden, nämlich der erste Skalar, der dritte Skalar und der Rotor des dyadischen Diatensors. Es ist festzustellen, wie sie sich in der enneadischen Form ausdrücken.

I. Erster Skalar. Da $(\mathfrak{i}\,\mathfrak{i}') = \alpha_1$ usw., so lautet der Ausdruck für den ersten Skalar von $p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i}' + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j}' + r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}'$

$$p\,\alpha_1 + q\,\beta_2 + r\,\gamma_3; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

das ist die Summe der enneadischen Diagonalglieder von (4), also ist der erste Skalar der dyadischen Form identisch mit dem ersten Skalar S_1 der enneadischen.

II. Der dritte Skalar des Dyadentripels in der Normalform ist nach § **76**:

$$(p\,\mathfrak{i}, q\,\mathfrak{j}, r\,\mathfrak{k})(\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}') = p\,q\,r \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = p\,q\,r. \quad \ldots \quad (6)$$

Das ist aber die Determinante der rechten Seite von (4), also ist der dritte Skalar der dyadischen Form identisch mit demjenigen der enneadischen.

III. Der Rotor endlich wurde entwickelt als die Differenz $\Phi - \Phi_c$; das liefert ohne weiteres den Satz: Der Rotor der dyadischen Form ist identisch mit dem doppelten Antitensor der enneadischen.

Ist Φ in der enneadischen Form

$$\Phi = \begin{cases} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

gegeben, so braucht man nur die Klammer fortzulassen und $a_x\,\mathfrak{i};\mathfrak{i}$ statt a_x, $a_y\,\mathfrak{i};\mathfrak{j}$ statt a_y, $b_x\,\mathfrak{j};\mathfrak{i}$ statt b_x usw. zu setzen; dann hat man das entsprechende Dyadentripel in Nonionform, von der man mittels der bereits angegebenen Transformationen zu irgend welchen anderen dyadischen Formen übergehen kann.

Ist der Diatensor in der enneadischen Normalform des § **56** gegeben:

$$\Phi = \begin{cases} p\,\alpha_1 & p\,\alpha_2 & p\,\alpha_3 \\ q\,\beta_1 & q\,\beta_2 & q\,\beta_3 \\ r\,\gamma_1 & r\,\gamma_2 & r\,\gamma_3, \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

wo die α, β, γ die Kosinus zwischen den Achsen zweier rechtwinkligen Koordinatensysteme sind, so liefert die Umformung das Dyadentripel in der Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= p\,\alpha_1\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + p\,\alpha_2\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} + p\,\alpha_3\,\mathfrak{i};\mathfrak{k} \\ &+ q\,\beta_1\,\mathfrak{j};\mathfrak{i} + q\,\beta_2\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + q\,\beta_3\,\mathfrak{j};\mathfrak{k} \\ &+ r\,\gamma_1\,\mathfrak{k};\mathfrak{i} + r\,\gamma_2\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} + r\,\gamma_3\,\mathfrak{k};\mathfrak{k} \\ &= p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i}' + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j}' + r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}'; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

d. h. die dyadische Normalform entspricht der enneadischen. Die Koordinatensysteme der x, y, z und ξ, η, ζ haben in beiden dieselbe Lage.

Da nun in § **56** der Nachweis geliefert wurde, daß jeder enneadische Diatensor sich im Reellen auf seine Normalform reduzieren läßt, so ist hiermit auch der Beweis erbracht, daß jedes Dyadentripel sich reell in seiner Normalform darstellen läßt.

$p\,\mathfrak{i}'$, $q\,\mathfrak{j}'$, $r\,\mathfrak{k}'$ sind gleichzeitig die Zeilenvektoren des Diatensors in der enneadischen Form.

Es erübrigt noch zu ermitteln, wie sich das allgemeinst formulierte Dyadentripel $\mathfrak{A};\mathfrak{a}+\mathfrak{B};\mathfrak{b}+\mathfrak{C};\mathfrak{c}$ in Nonionform oder, was praktisch dasselbe ist, in enneadischer Gestalt ausdrückt. Bezogen auf das feste System der x, y, z ist

$$\mathfrak{A} = A_x\mathfrak{i} + A_y\mathfrak{j} + A_z\mathfrak{k}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

$$\mathfrak{a} = a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

usw.

Multipliziert man die einzelnen Zeilen aus und faßt die Ergebnisse nach Grunddyaden zusammen, so findet sich

$$\Phi = \left\{\begin{array}{lll} (A_xa_x+B_xb_x+C_xc_x)\mathfrak{i};\mathfrak{i} & +(A_xa_y+B_xb_y+C_xc_y)\mathfrak{i};\mathfrak{j} & +(A_xa_z+B_xb_z+C_xc_z)\mathfrak{k};\mathfrak{k} \\ +(A_ya_x+B_yb_x+C_yc_x)\mathfrak{j};\mathfrak{i} & +(A_ya_y+B_yb_y+C_yc_y)\mathfrak{j};\mathfrak{j} & +(A_ya_z+B_yb_z+C_yc_z)\mathfrak{k};\mathfrak{k} \\ +(A_za_x+B_zb_x+C_zc_x)\mathfrak{k};\mathfrak{i} & +(A_za_y+B_zb_y+C_zc_y)\mathfrak{k};\mathfrak{j} & +(A_za_z+B_zb_z+C_zc_z)\mathfrak{k};\mathfrak{k}. \end{array}\right. \quad (12)$$

Die skalaren Koeffizienten von (12) sind die Glieder der enneadischen Form.

Die Identität der beiden Diatensorformen ist im Grunde schon gegeben durch die formale Übereinstimmung der beiden Gleichungen aus § **45** und § **61**:

$$\Phi\{\mathfrak{E},\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}\,.\,\Phi\{\mathfrak{e},\mathfrak{f},\mathfrak{g}\}\,\mathfrak{v} = \mathfrak{E}_c(\mathfrak{e}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{F}_c(\mathfrak{f}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{G}_c(\mathfrak{g}\,\mathfrak{v}) \quad . \; . \quad (13)$$

und

$$(\mathfrak{A};\mathfrak{a}+\mathfrak{B};\mathfrak{b}+\mathfrak{C};\mathfrak{c})\,\mathfrak{v} = \mathfrak{A}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{B}(\mathfrak{b}\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{C}(\mathfrak{c}\,\mathfrak{v}); \quad . \; . \quad (14)$$

denn diese sagt aus, daß das Dyadentripel ebensowohl wie das Produkt zweier tensoriell gestalteten Diatensoren ein symbolischer Multiplikator ist, welcher einen beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$ in eine seiner linearen Vektorfunktionen überführt. Aus der Übereinstimmung folgt weiter: Stellt man einen Diatensor nach § **45** als enneadisches Produkt $\Phi\{\mathfrak{E},\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}\,.\,\Phi\{\mathfrak{e},\mathfrak{f},\mathfrak{g}\}$ dar, so ist er mit $\mathfrak{A};\mathfrak{a}$ $\mathfrak{B};\mathfrak{b}+\mathfrak{C};\mathfrak{c}$ identisch, wenn $\mathfrak{E}_c=\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}_c=\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}_c=\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{e}=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{f}=\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{c}$ genommen wird. Es ergibt sich also

$$\mathfrak{A};\mathfrak{a}+\mathfrak{B};\mathfrak{b}+\mathfrak{C};\mathfrak{c} = \left\{\begin{array}{lll} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{array}\right. \cdot \left\{\begin{array}{lll} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z, \end{array}\right. \quad . \; . \; . \; . \quad (15)$$

wo die Größen rechts auf ein beliebig gewähltes System der x, y, z bezogen sind. Die Ausführung der Multiplikation rechts führt wieder auf Gleichung (12). — Schreibt man die vorstehende Gleichung

$$\mathfrak{A};\mathfrak{a}+\mathfrak{B};\mathfrak{b}+\mathfrak{C};\mathfrak{c}=\Phi\{\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c\mathfrak{C}_c\}.\Phi\{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\}, \quad . \; . \; . \; (16)$$

so hat man die Beziehung zwischen der dyadischen und enneadischen Form in der kürzesten Gestalt.

80. Vergleichung der Normalformen.

Die vollständige Behandlung der Raumtransformation mit Dyadentripeln würde nach dem Vorstehenden, soweit nicht neue Elemente eingeführt werden (vgl. hierzu § **81**), nur auf eine Reihe von Wiederholungen führen. Alle Sätze des ersten Abschnittes, in denen der Buchstabe Φ oder T unaufgelöst benutzt wird, gelten einfach für die dyadischen Formen des Diatensors mit. Es handelt sich demgemäß im folgenden zunächst nur um die Aufgabe, nachzuweisen, wie die wichtigeren Zusammenhänge sich in dyadischer Form darstellen. Wir legen hierbei die Normalformen

$$\Phi = p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i}'+q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j}'+r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}', \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$\Phi = \begin{cases} p\,\alpha_1 & p\,\alpha_2 & p\,\alpha_3 \\ q\,\beta_1 & q\,\beta_2 & q\,\beta_3 \\ r\,\gamma_1 & r\,\gamma_2 & r\,\gamma_3 \end{cases} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

zugrunde, wobei immer im Auge zu behalten ist, daß bei Verwendung dieser Gleichungen die aus den vorangegangenen Paragraphen bekannten Koordinatensysteme der x, y, z und ξ, η, ζ benutzt sind. Die α, β, γ sind durch die Winkel, welche die Achsen beider Systeme miteinander machen, bestimmt. Für ein symmetrisches Φ ist $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$.

I. Hilfsgrößen und Achsen. Die Zeilenvektoren von (2) sind $p\,\alpha_1\,\mathfrak{i}+p\,\alpha_2\,\mathfrak{j}+p\,\alpha_3\,\mathfrak{k}$ usw., d. h. sie sind, wie schon gesagt wurde,

$$p\,\mathfrak{i}', \qquad q\,\mathfrak{j}', \qquad r\,\mathfrak{k}'. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Der Kodiatensor Φ_2 hat die Glieder $q\,r\,(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)$, $q\,r\,(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)$, $q\,r\,(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)$, $r\,p\,(\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2)$ usw. Die Klammern sind aber der Reihe nach gleich α_1, α_2, α_3, β_1 usw., also wird

$$\Phi_2 = \begin{cases} q\,r\,\alpha_1 & q\,r\,\alpha_2 & q\,r\,\alpha_3 \\ r\,p\,\beta_1 & r\,p\,\beta_2 & r\,p\,\beta_3 \\ p\,q\,\gamma_1 & p\,q\,\gamma_2 & p\,q\,\gamma_3 \end{cases} = q\,r\,\mathfrak{i};\mathfrak{i}'+r\,p\,\mathfrak{j};\mathfrak{j}'+p\,q\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}'. \quad . \; (4)$$

Damit wird

$$\Phi_{21} = qr\alpha_1 + rp\beta_2 + pq\gamma_3 \,. \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

S_3 ist, wie schon bekannt, pqr. . . . . . . (6)

Die Hamiltonsche Gleichung wird also

$$t_\xi^3 - (p\alpha_1 + q\beta_2 + r\gamma_3)t_\xi^2 + (qr\alpha_1 + rp\beta_2 + pq\gamma_3)t_\xi - pqr = 0. \quad (7)$$

Über ihre Lösung ist dasselbe zu sagen, wie früher. Ist der Diatensor symmetrisch, so reduziert sich die Hamiltonsche Gleichung auf

$$t_\xi^3 - (p + q + r)t_\xi^2 + (qr + rp + pq)t_\xi - pqr = 0 \,. \quad (8)$$

mit den Lösungen p, q, r.

II. Vollständigkeit und Unvollständigkeit. Die Untersuchung der Vollständigkeit und Unvollständigkeit von Dyadentripeln wurde von Gibbs auf getrennte Annahmen über die Antezedenten und Konsequenten gegründet; sie vereinfacht sich ungemein, wenn man die obigen Zeilenvektoren einführt; dann bleiben alle Folgerungen des § **33** erhalten. Der Diatensor ist auch in dyadischer Form planar und linear, wenn die Zeilenvektoren komplanar oder kollinear werden. Ein unvollständiger Diatensor von der Gestalt

$$p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i}' + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j}'$$

vernichtet offenbar, wenn er mit einem Vektor $\mathfrak{v}$ multipliziert wird, die Komponente $\mathfrak{v}_\zeta$ dieses Vektors und führt die dazu senkrecht stehenden Komponenten in solche über, die in der $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$-Ebene liegen.

Entsprechend vernichtet ein unvollständiger Diatensor von der Form

$$p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i}'$$

jede Komponente $m\mathfrak{v}_\eta + n\mathfrak{v}_\zeta$, welche mit der $\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$-Ebene komplanar ist und führt die Komponente $\mathfrak{v}_\xi$ in eine solche über, die mit $\mathfrak{i}$ kollinear ist. Unvollständige Diatensoren dieser Art sind von Gibbs als „Annihilatoren" bezeichnet worden.

III. Einheitstensor oder Idemfaktor. Der Einheitstensor nimmt einfach die Gestalt an:

$$I = \mathfrak{i};\mathfrak{i} + \mathfrak{j};\mathfrak{j} + \mathfrak{k};\mathfrak{k} \,. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Die Richtigkeit der Behauptung ist unmittelbar durch Multiplikation des Dyadentripels mit einem beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$ nachzuweisen.

IV. Inverse oder reziproke Diatensoren. Die Sätze des § **51** bleiben sämtlich erhalten; es handelt sich hier darum, die dyadische Form von Φ^{-1} vorzuzeigen. Nach Satz I, Gleichung (4), in § **51** und mit der obigen Gleichung (6) ist, wenn der Diatensor selbst in Form der Gleichung (1) geschrieben wird,

$$\Phi^{-1} = \frac{\Phi_{2c}}{S_3} = \frac{1}{p}\mathfrak{i}';\mathfrak{i} + \frac{1}{q}\mathfrak{j}';\mathfrak{j} + \frac{1}{r}\mathfrak{k}';\mathfrak{k}. \quad \ldots \quad (10)$$

V. Tensoren. Die Gestalt des Tensors

$$\Phi = p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

wurde bereits festgelegt. Derselbe läßt sich in drei Faktoren spalten:

$$\Phi = (p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + \mathfrak{j};\mathfrak{j} + \mathfrak{k};\mathfrak{k})(\mathfrak{i};\mathfrak{i} + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + \mathfrak{k};\mathfrak{k})(\mathfrak{i};\mathfrak{i} + \mathfrak{j};\mathfrak{j} + r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}),$$

deren Reihenfolge offenbar willkürlich ist. Die Zerlegung entspricht der am Schlusse des § **56** gegebenen und hat dieselbe geometrische Bedeutung.

VI. Versoren. Will man einen Versor durch den Drehungswinkel φ und die Kosinus der Winkel, welche die Drehungsachse mit den Koordinatenachsen macht, dyadisch ausdrücken, so hat man einfach den in § **54**, Gleichung (7), angegebenen Diatensorgliedern die Faktoren $\mathfrak{i};\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i};\mathfrak{j}$ usw. anzuhängen und sie sämtlich zu addieren.

Fällt die Drehungsachse in eine der Koordinatenachsen, z. B. in die Achse der x, so erhält man mit Gleichung (12) des § **41** sofort

$$\Phi_\varphi^x = \mathfrak{i};\mathfrak{i} + \cos\varphi\,(\mathfrak{j};\mathfrak{j} + \mathfrak{k};\mathfrak{k}) + \sin\varphi\,(\mathfrak{k};\mathfrak{j} - \mathfrak{j};\mathfrak{k}). \quad . \, . \, . \quad (12)$$

Hierin kann man für $\mathfrak{j};\mathfrak{j} + \mathfrak{k};\mathfrak{k}$ schreiben $I - \mathfrak{i};\mathfrak{i}$. Ferner ist, wie man leicht findet, $(\mathfrak{k};\mathfrak{j} - \mathfrak{j};\mathfrak{k})\,\mathfrak{v} = [\mathfrak{i}\,\mathfrak{v}]$, also können wir statt $\mathfrak{k};\mathfrak{j} - \mathfrak{j};\mathfrak{k}$ schreiben $[\mathfrak{i}$. Damit nimmt der Versor um die Achse der x die Form an:

$$\Phi_\varphi^x = \mathfrak{i};\mathfrak{i} + \cos\varphi\,(I - \mathfrak{i};\mathfrak{i}) + \sin\varphi\,[\mathfrak{i}, \quad \ldots \quad (13)$$

in welcher er außer I nur noch den auf die Achse der x bezogenen Einheitsvektor enthält. Man erhält also die entsprechende Form für Drehungen um eine beliebige Achse, wenn der Einheitsvektor in der Richtung dieser Achse mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet wird, in der Gestalt:

$$\Phi_\varphi = \mathfrak{p};\mathfrak{p} + \cos\varphi\,(I - \mathfrak{p};\mathfrak{p}) + \sin\varphi\,[\mathfrak{p}, \quad \ldots \quad (14)$$

denn man kann die Achse der $\mathfrak{p}$ ohne weiteres als x-Achse ansehen. In der Tat, wenn man $\mathfrak{p} = \lambda\,\mathfrak{i} + \mu\,\mathfrak{j} + \nu\,\mathfrak{k}$ setzt, und damit die vorstehende Formel ausrechnet, so erhält man Φ in der Nonionform, und die einzelnen skalaren Terme derselben werden identisch mit den in Gleichung (7) des § **54** gegebenen. Aus Gleichung (14) ergeben sich die allgemeinen Formeln für den quadrantalen und biquadrantalen Versor, wenn man das eine Mal $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$ und das andere Mal $\cos\varphi = -1$, $\sin\varphi = 0$ setzt:

$$\Phi_{\pi/2} = \mathfrak{p};\mathfrak{p} + \sin\varphi\,[\mathfrak{p}, \quad \ldots \quad (15)$$

$$\Phi_\pi = 2\,\mathfrak{p};\mathfrak{p} - I. \quad \ldots \quad (16)$$

Will man den Versor dadurch ausdrücken, daß er das Koordinatensystem der ξ, η, ζ in die Stellung der x, y, z überführt, so ergibt sich aus Gleichung (1) des § **54** sofort:

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= \alpha_1\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + \alpha_2\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} + \alpha_3\,\mathfrak{i};\mathfrak{k} \\ &+ \beta_1\,\mathfrak{j};\mathfrak{i} + \beta_2\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + \beta_3\,\mathfrak{j};\mathfrak{k} \\ &+ \gamma_1\,\mathfrak{k};\mathfrak{i} + \gamma_2\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} + \gamma_3\,\mathfrak{k};\mathfrak{k} = \mathfrak{i};\mathfrak{i}' + \mathfrak{j};\mathfrak{j}' + \mathfrak{k};\mathfrak{k}'.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

Der reziproke Versor, welcher das System der x, y, z in die Lage ξ, η, ζ dreht, ist

$$\left.\begin{aligned}\Phi^{-1} &= \alpha_1\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + \beta_1\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} + \gamma_1\,\mathfrak{i};\mathfrak{k} \\ &+ \alpha_2\,\mathfrak{j};\mathfrak{i} + \beta_2\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + \gamma_2\,\mathfrak{j};\mathfrak{k} \\ &+ \alpha_3\,\mathfrak{k};\mathfrak{i} + \beta_3\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} + \gamma_3\,\mathfrak{k};\mathfrak{k},\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (18)$$

und wenn man hier die Kosinus zu den Antezedenten zieht, findet man

$$\Phi^{-1} = \mathfrak{i}';\mathfrak{i} + \mathfrak{j}';\mathfrak{j} + \mathfrak{k}';\mathfrak{k}. \quad \ldots \quad (19)$$

Der Vergleich mit Gleichung (17) bestätigt, daß der reziproke mit dem konjugierten Versor identisch ist.

VII. Zerlegung in Tensor und Versor. Nach der Multiplikationsformel für Dyaden ist

$$(\mathfrak{i};\mathfrak{i})(\mathfrak{i};\mathfrak{i}') = \mathfrak{i};\mathfrak{i}', \qquad (\mathfrak{i};\mathfrak{i})(\mathfrak{j};\mathfrak{j}') = 0 \quad \text{usw.}$$

Damit wird

$$\left.\begin{aligned}&p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i}' + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j}' + r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}' \\ &= (p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k})(\mathfrak{i};\mathfrak{i}' + \mathfrak{j};\mathfrak{j}' + \mathfrak{k};\mathfrak{k}').\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (20)$$

Ebenso ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}&p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i}' + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j}' + r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}' \\ &= (\mathfrak{i};\mathfrak{i}' + \mathfrak{j};\mathfrak{j}' + \mathfrak{k};\mathfrak{k}')(p\,\mathfrak{i}';\mathfrak{i}' + q\,\mathfrak{j}';\mathfrak{j}' + r\,\mathfrak{k}';\mathfrak{k}').\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21)$$

Diese beiden Gleichungen stellen offenbar die in § **56** behandelte doppelte Zerlegung der affinen Bewegung in reine Drehung und reine Deformation dar. Der Versor ist in beiden Fällen derselbe, der Tensor der Gleichung (20) liegt im System der x, y, z, derjenige der Gleichung (21) im System der ξ, η, ζ.

Auch die Zerlegungen des § 57 würden sich in dyadischer Form nachbilden lassen; hierfür soll aber ein neues von Gibbs angegebenes Hilfsmittel benutzt werden.

VIII. Hamiltonsche Gleichung. Es möge noch angeführt werden, wie man nach Gibbs zur Hamiltonschen Gleichung gelangt, ohne auf die Transformationsformeln zurückzugreifen. Es sei $\mathfrak{u}$ ein Vektor, der durch die Multiplikation mit Φ ohne Richtungsänderung im Verhältnis $t_\xi : 1$ gedehnt wird, so daß

$$\Phi \mathfrak{u} = t_\xi \mathfrak{u}. \qquad (22)$$

Dann ist

$$(\Phi - t_\xi I)\mathfrak{u} = 0, \qquad (23)$$

also ist $\Phi - t_\xi I$ ein unvollständiger Diatensor, weil er den Vektor $\mathfrak{u}$ auf Null reduziert; also muß seine Determinante Null sein. Der Diatensor $\Phi - t_\xi I$ lautet aber, wenn er in allgemeiner Nonionform dargestellt wird,

$$\begin{aligned}&(t_{xx} - t_\xi)\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + t_{xy}\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} + t_{xz}\,\mathfrak{i};\mathfrak{k}\\ &+ t_{yx}\,\mathfrak{j};\mathfrak{i} + (t_{yy} - t_\xi)\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + t_{yz}\,\mathfrak{j};\mathfrak{k}\\ &+ t_{zx}\,\mathfrak{k};\mathfrak{i} + t_{zy}\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} + (t_{zz} - t_\xi)\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}.\end{aligned}$$

Setzt man also seine Determinante gleich Null, so hat man die Hamiltonsche Gleichung.

81. Einführung reziprokaler Vektorensysteme.

Gibbs hat diese Einführung vorgenommen. Sie läßt sich für die enneadische Form nachbilden[1]), ergibt sich aber am natürlichsten aus der dyadischen Form. Ihre Brauchbarkeit beruht darauf, daß die reziprokalen Vektoren Multiplikationseigenschaften von ähnlicher Einfachheit haben, wie die Grundvektoren, die ja ein Spezialfall der reziprokalen sind. Sind z. B. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ reziprokale Vektorentripel und ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Vektor, so ist nach Vorbemerkung **f**):

$$(\mathfrak{a};\mathfrak{a}')(\mathfrak{a};\mathfrak{p}) = \mathfrak{a};\mathfrak{p}, \qquad (\mathfrak{a};\mathfrak{a}')(\mathfrak{b};\mathfrak{p}) = 0 \text{ usw.},$$

analog wie

$$(\mathfrak{i};\mathfrak{i})(\mathfrak{i};\mathfrak{p}) = \mathfrak{i};\mathfrak{p}, \qquad (\mathfrak{i};\mathfrak{i})(\mathfrak{j};\mathfrak{p}) = 0 \text{ usw.}$$

---

[1]) Indem man vorschreibt, daß in $\Phi = \Phi\{\mathfrak{A}_c, \mathfrak{B}_c, \mathfrak{C}_c\} \cdot \Phi\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ die Vektorentripel $\mathfrak{A}_c, \mathfrak{B}_c, \mathfrak{C}_c$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ reziprokal sein sollen.

Dies legt die Frage nahe, was aus den im vorigen Paragraphen behandelten Dyadentripeln wird, wenn man in ihnen die Grundvektorensysteme durch reziprokale Vektorensysteme ersetzt.

I. Idemfaktor. Der Einheitstensor nimmt dann die Gestalt an:

$$I = \mathfrak{a};\mathfrak{a}' + \mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}' \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

und bleibt, wie die Gleichung aussagt, ein Einheitstensor. Denn wenn man das Dyadentripel mit einem beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$ multipliziert, erhält man nach Vorbemerkung **d)** wieder $\mathfrak{v}$. Selbstverständlich können in Gleichung (1) die gestrichenen mit den ungestrichenen Buchstaben vertauscht werden. Man beachte, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in Gleichung (1) nicht komplanar, sonst aber vollkommen willkürlich sind. Transformiert man also etwa I auf drei andere willkürlich gewählte Antezedenten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, indem man setzt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a} &= l_1\mathfrak{e} + l_2\mathfrak{f} + l_3\mathfrak{g}, \\ \mathfrak{b} &= m_1\mathfrak{e} + m_2\mathfrak{f} + m_3\mathfrak{g}, \\ \mathfrak{c} &= n_1\mathfrak{e} + n_2\mathfrak{f} + n_3\mathfrak{g}, \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

so muß man erhalten:

$$I = \mathfrak{e};\mathfrak{e}' + \mathfrak{f};\mathfrak{f}' + \mathfrak{g};\mathfrak{g}', \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

was in der Tat der Fall ist.

II. Diatensoren mit drei reellen Achsen. Verfährt man ebenso mit dem Tensor $p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}$, so erhält man:

$$\Phi = p\,\mathfrak{a};\mathfrak{a}' + q\,\mathfrak{b};\mathfrak{b}' + r\,\mathfrak{c};\mathfrak{c}'. \quad \dots \dots \quad (4)$$

Dieses Φ ist aber dann nicht ein Tensor, sondern ein Diatensor. Multipliziert man Gleichung (4) der Reihe nach mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so erhält man leicht:

$$\Phi\mathfrak{a} = p\,\mathfrak{a}, \qquad \Phi\mathfrak{b} = q\,\mathfrak{b}, \qquad \Phi\mathfrak{c} = r\,\mathfrak{c}. \quad \dots \quad (5)$$

Φ ist also ein Faktor, welcher die drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ohne Richtungsänderung dehnt, d. h. Φ ist ein Diatensor mit drei reellen Achsen, welche in die Doppelrichtungen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ fallen. Dabei können $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ beliebige Winkel miteinander bilden. Nur wenn sie senkrecht aufeinander stehen, ist Φ ein Tensor. Der Satz, daß die Antezedenten eines Dyadentripels frei gewählt werden können, verliert aber für die Form (4) seine Gültigkeit; denn er gilt offenbar unter der Voraussetzung, daß die Konsequenten, nachdem die Antezedenten einmal gewählt sind, frei berechnet werden können, ohne an vorgeschriebene Bedingungen gebunden zu sein. Hier liegt aber die Bedingung vor, daß die Konsequenten zu den Antezedenten reziprokal sein sollen, und damit hört die freie Wählbarkeit der Antezedenten auf; anders gewählte Antezedenten bedingen einen anderen Diatensor. Man könnte ja auch sonst die Antezedenten eines beliebigen Diatensors rechtwinklig wählen, also jeden beliebigen Diatensor als Tensor darstellen.

Wir untersuchen zunächst, was sich ergibt, wenn man einen der Antezedenten, etwa $\mathfrak{b}$, willkürlich durch einen neuen Vektor $\mathfrak{e}$ ersetzt. Wir setzen also an Stelle von $\mathfrak{b}$ einen Vektor $\mathfrak{e}$, der durch die Gleichung bestimmt sei

$$\mathfrak{e} = l\mathfrak{a} + m\mathfrak{b} + n\mathfrak{c}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und schreiben für die neuen Konsequenten, die sich dann ergeben, $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{c}_1'$. Es ist zunächst das Parallelepiped

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{c}) = l(\mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{c}) + m(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}) + n(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{c}) = m(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}), \quad . \; . \quad (7)$$

da $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{c})$ Null sind. Hiermit ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_1' &= \frac{[l\mathfrak{a} + m\mathfrak{b} + n\mathfrak{c}, \mathfrak{c}]}{m(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} = \frac{l[\mathfrak{a}\mathfrak{c}] + m[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]}{m(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} = \mathfrak{a}' - \frac{l}{m}\mathfrak{b}', \\ \mathfrak{e}' &= \frac{[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]}{m(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} = \frac{\mathfrak{b}'}{m}, \\ \mathfrak{c}_1' &= \frac{[\mathfrak{a}, l\mathfrak{a} + m\mathfrak{b} + n\mathfrak{c}]}{m(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} = \frac{m[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] + n[\mathfrak{a}\mathfrak{c}]}{m(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}' - \frac{n}{m}\mathfrak{b}', \end{aligned}\right\} \cdot \quad (8)$$

und daraus ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} p\,\mathfrak{a};\mathfrak{a}_1' + q\,\mathfrak{e};\mathfrak{e}' + r\,\mathfrak{c};\mathfrak{c}_1' &= p\left(\mathfrak{a};\mathfrak{a}' - \frac{l}{m}\mathfrak{a};\mathfrak{b}'\right) \\ &+ q\left(\frac{l}{m}\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{n}{m}\mathfrak{c}\right);\mathfrak{b}' + r\left(\mathfrak{c};\mathfrak{c}' - \frac{n}{m}\mathfrak{c};\mathfrak{b}'\right) \end{aligned}\right\} \cdot \quad (9)$$

oder

$$\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}'\mathfrak{e}'\mathfrak{c}'} - \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'} = (q-p)\left(\frac{l}{m}\right)\mathfrak{a};\mathfrak{b}' + (q-r)\frac{n}{m}\mathfrak{c};\mathfrak{b}'. \quad . \; (10)$$

Wird nun der Vektor $\mathfrak{e}$ komplanar mit $\mathfrak{b}$ und einem anderen Antezedenten, etwa $\mathfrak{c}$, gewählt, so ist $l = 0$. Die Differenz der vorstehenden Gleichung reduziert sich also auf

$$(q-r)\frac{n}{m}\mathfrak{c};\mathfrak{b}',$$

und dies wird offenbar Null, wenn $r = q$ ist.

Das heißt, sind zwei der Achsenbeträge, etwa q und r, in Gleichung (4) einander gleich, so ändert sich der Diatensor nicht, wenn man an Stelle von $\mathfrak{b}$ einen beliebigen anderen mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ komplanaren Vektor einführt. Aus Symmetriegründen gilt das gleiche ohne weiteres für $\mathfrak{c}$; man kann statt $\mathfrak{c}$ einen beliebigen mit $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ komplanaren Vektor einführen, wenn $q = r$ ist. Dies ist der Satz des § **20**, nach welchem man zwei gleiche Konstituenten in ihrer Ebene beliebig drehen kann. Anscheinend liegt eine Erweiterung darin, daß man dem Vektor $\mathfrak{c}$ einen beliebigen Betrag vorschreiben kann; diese Erweiterung ist jedoch nur scheinbar, da die Dyade $\mathfrak{c};\mathfrak{c}'$ ihren Wert nicht ändert, wenn man $\mathfrak{c}$ mit einem beliebigen Skalar multipliziert; $\mathfrak{c}'$ wird dann ja mit demselben Skalar dividiert.

Die aus Gleichung (10) gezogene Folgerung gilt auch dann, wenn Φ ein Tensor der Form $p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + q\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + r\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}$ ist, weil ja $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ mit sich selbst reziprokal sind.

Die Form (4) stellt nach dem Vorigen einen Diatensor dar, der drei reelle Achsen p, q, r besitzt. Umgekehrt kann jeder Diatensor, der drei reelle Achsen hat, auf die Gestalt (4) gebracht werden. Man suche die Achsen auf, lege $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in die Doppelrichtung derselben und setze p, q, r gleich den Beträgen der gegebenen oder errechneten Achsenbeträge; dann ist die Aufgabe gelöst. Da $(-\mathfrak{a});(-\mathfrak{a})' = \mathfrak{a};\mathfrak{a}'$ usw., ist es dabei gleichgültig, ob man die eine oder die andere der beiden in jeder Doppelrichtung enthaltenen Richtungen für $\mathfrak{a}$ usw. in Anspruch nimmt. Hierin spricht sich auf dyadischem Gebiet die Tatsache aus, daß für den Diatensor nur Doppelrichtungen in Betracht kommen.

III. Elliptische Versoren. Ersetzt man in dem Versor § **80**, Gleichung (12) die Grundvektoren durch reziprokale Vektoren, so erhält man den Diatensor

$$\Psi = \mathfrak{a};\mathfrak{a}' + \cos\varphi\,(\mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}') + \sin\varphi\,(\mathfrak{c};\mathfrak{b}' - \mathfrak{b};\mathfrak{c}') \quad \ldots \quad (11)$$

Multipliziert man Ψ mit $\mathfrak{a}$, so erhält man

$$\Psi\mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$\mathfrak{a}$ ist also eine, und da keine andere vorhanden ist, die reelle Achse von Ψ. Außerdem läßt sich nach Analogie der Gleichung (13) des vorigen Paragraphen Ψ ausdrücken als

$$\Psi = \mathfrak{a};\mathfrak{a}' + \cos\varphi\,(I - \mathfrak{a};\mathfrak{a}') + \sin\varphi\,[1_{\mathfrak{a}}, \quad \ldots \quad (13)$$

und diese immer noch allgemeine Form von Ψ ist nur insofern von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ abhängig, als der Wert von $\mathfrak{a}'$ durch die Wahl von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bedingt wird. Da ergeben nun wieder die Gleichungen (8), daß $\mathfrak{a}'$ nicht geändert wird, wenn man $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ innerhalb ihrer Ebene beliebig dreht.

Wir können also von vornherein festsetzen, daß $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ aufeinander (im allgemeinen aber nicht auf $\mathfrak{a}$) senkrecht stehen. Man kann dann $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ als Halbachsen einer Ellipse E ansehen, deren Gleichung in einem durch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gelegten System der η, ζ ist:

$$\frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

Wir nehmen ferner einen Vektor $\mathfrak{v}$ an, der bestimmt sei durch

$$\mathfrak{v} = b \cos \chi \, \mathfrak{j} + c \sin \chi \, \mathfrak{k}, \quad \ldots \ldots \ldots (15)$$

wo $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ die Grundvektoren in η, ζ sind. Die Koordinaten des Endpunktes von $\mathfrak{v}$ sind dann $b \cos \chi$ und $c \sin \chi$, und da

$$\frac{(b \cos \chi)^2}{b^2} + \frac{(c \sin \chi)^2}{c^2} = 1, \ldots \ldots \ldots (16)$$

gehört sein Endpunkt der Ellipse E an. Er macht nach Gleichung (15) mit der Achse der η den Winkel χ.

Multipliziert man nun diesen Vektor mit Ψ, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \Psi \mathfrak{v} &= \mathfrak{b} \cos \varphi \cos \chi + \mathfrak{c} \cos \varphi \sin \chi + \mathfrak{c} \sin \varphi \cos \chi - \mathfrak{b} \sin \varphi \sin \chi \\ &= \mathfrak{b} \cos(\varphi + \chi) + \mathfrak{c} \sin(\varphi + \chi), \end{aligned}\right\} (17)$$

d. h. der Vektor $\Psi \mathfrak{v}$ liegt mit seinem Endpunkt auf der Ellipse E und ist zugleich gegen $\mathfrak{v}$ um den Winkel φ im Sinne von η nach ζ hin gedreht. Nach Gibbs heißt Ψ „elliptischer Versor".

Vektoren, deren Beträge größer oder kleiner als der Betrag des Vektors $\mathfrak{v}$ von Gleichung (15) sind, können einfach als Multipla des entsprechenden $\mathfrak{v}$ angesehen werden; ihre Endpunkte bewegen sich auf Ellipsen, welche der Ellipse E ähnlich sind.

IV. Diatensoren mit einer reellen Achse. Eine naheliegende Verallgemeinerung der Gleichung (11) erhält man durch Zufügung von zwei Skalaren p und q, indem man setzt:

$$\Phi = p \, \mathfrak{a};\mathfrak{a}' + q \cos \varphi (\mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}') + q \sin \varphi (\mathfrak{c};\mathfrak{b}' - \mathfrak{b};\mathfrak{c}'). \quad . (18)$$

Dieser Ausdruck läßt sich in drei Faktoren zerlegen:

$$\left.\begin{aligned} \Phi = {} & (p \, \mathfrak{a};\mathfrak{a}' + \mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}')(\mathfrak{a};\mathfrak{a}' + q \, \mathfrak{b};\mathfrak{b}' + q \, \mathfrak{c};\mathfrak{c}') \\ & \cdot \{\mathfrak{a};\mathfrak{a}' + \cos \varphi (\mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}') + \sin \varphi (\mathfrak{c};\mathfrak{b}' - \mathfrak{b};\mathfrak{c}')\}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . (19)$$

von denen die beiden ersten auch zu einem Diatensor mit zwei gleichen reellen Achsen zusammengefaßt werden können. Die Ausführung der Multiplikation ergibt die Richtigkeit der Behauptung. Von den drei Faktoren sind die beiden ersten bekannte Diatensoren, der dritte bewirkt die soeben behandelte elliptische Drehung. Es ist nun die Frage aufzuwerfen, welche Diatensoren sich auf die Form (18) reduzieren lassen. Ein allgemeiner Diatensor sei gegeben in der diskriminierenden Form des § 57, Gleichung (2):

$$\left.\begin{aligned}\Phi = t_{xx}\mathfrak{i};\mathfrak{i} + t_{xy}\mathfrak{i};\mathfrak{j} + t_{xz}\,\mathfrak{i};\mathfrak{k}\\ + t_{yy}\mathfrak{j};\mathfrak{j} + t_{yz}\,\mathfrak{j};\mathfrak{k}\\ + t_{zy}\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} + t_{yy}\mathfrak{k};\mathfrak{k},\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (20)$$

wo er auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen ist, dessen x-Achse mit seiner reellen Achse (bzw. mit einer seiner reellen Achsen) zusammenfällt.

In diese Achse der x legen wir den Vektor $\mathfrak{a}$ der Gleichung (18) und lassen die Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ dieser Gleichung beliebig. Dann sind die drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bestimmt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{a} &= a\,\mathfrak{i},\\ \mathfrak{b} &= b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k},\\ \mathfrak{c} &= c_x\,\mathfrak{i} + c_y\,\mathfrak{j} + c_z\mathfrak{k}.\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (21)$$

Damit wird

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = a\,(b_y c_z - b_z c_y)$$

und ferner

$$\mathfrak{a}' = \frac{(b_y c_z - b_z c_y)\mathfrak{i} + (b_z c_x - b_x c_z)\mathfrak{j} + (b_x c_y - b_y c_x)\mathfrak{k}}{a\,(b_y c_z - b_z c_y)},$$

$$\mathfrak{a};\mathfrak{a}' = \mathfrak{i};\mathfrak{i} + \frac{(b_z c_x - b_x c_z)\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} + (b_x c_y - b_y c_x)\,\mathfrak{i};\mathfrak{k}}{b_y c_z - b_z c_y};$$

$$\mathfrak{b}' = \frac{c_z\mathfrak{j} - c_y\mathfrak{k}}{b_y c_z - b_z c_y},$$

$$\mathfrak{b};\mathfrak{b}' = \frac{b_x c_z\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} - b_x c_y\,\mathfrak{i};\mathfrak{k} + b_y c_z\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} - b_y c_y\,\mathfrak{j};\mathfrak{k} + b_z c_z\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} - b_z c_y\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}}{b_y c_z - b_z c_y};$$

$$\mathfrak{c}' = \frac{-b_z\mathfrak{j} + b_y\mathfrak{k}}{b_y c_z - b_z c_y},$$

$$\mathfrak{c};\mathfrak{c}' = \frac{-c_x b_z\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} + c_x b_y\,\mathfrak{i};\mathfrak{k} - c_y b_z\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + c_y b_y\,\mathfrak{j};\mathfrak{k} - c_z b_z\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} + c_z b_y\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}}{b_y c_z - b_z c_y}.$$

Damit ergibt sich

$$\mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}' = \mathfrak{j};\mathfrak{j} + \mathfrak{k};\mathfrak{k} + \frac{(b_x c_z - b_z c_x)\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} + (b_y c_x - b_x c_y)\,\mathfrak{i};\mathfrak{k}}{b_y c_z - b_z c_y}.$$

Ferner wird der Zähler von

$$\mathfrak{c};\mathfrak{b}' = c_x c_z\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} - c_x c_y\,\mathfrak{i};\mathfrak{k} + c_y c_z\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} - c_y^2\,\mathfrak{j};\mathfrak{k} + c_z^2\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} - c_y c_z\,\mathfrak{k};\mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{b};\mathfrak{c}' = -b_x b_z\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} + b_x b_y\,\mathfrak{i};\mathfrak{k} - b_y b_z\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + b_y^2\,\mathfrak{j};\mathfrak{k} - b_z^2\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} + b_y b_z\,\mathfrak{k};\mathfrak{k},$$

und hiermit

$$\mathfrak{c};\mathfrak{b}' - \mathfrak{b};\mathfrak{c}' = \frac{1}{b_y c_z - b_z c_y}\{(b_z b_x + c_z c_x)\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} - (b_x b_y + c_x c_y)\,\mathfrak{i};\mathfrak{k}$$
$$+ (b_y b_z + c_y c_z)\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} - (b_y^2 + c_y^2)\,\mathfrak{j};\mathfrak{k} + (b_z^2 + c_z^2)\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} - (b_y b_z + c_y c_z)\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}\}.$$

Sonach nimmt Gleichung (18) die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi = p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} &+ \frac{p(b_z c_x - b_x c_z) + q\cos\varphi\,(b_x c_z - b_z c_x) + q\sin\varphi\,(b_z b_x + c_z c_x)}{b_y c_z - b_z c_y}\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} \\
&+ \frac{p\,(b_x c_y - b_y c_x) + q\cos\varphi\,(b_y c_x - b_x c_y) - q\sin\varphi\,(b_x b_y + c_x c_y)}{b_y c_z - b_z c_y}\,\mathfrak{i};\mathfrak{k} \\
&+ \left(q\cos\varphi + q\sin\varphi\,\frac{b_y b_z + c_y c_z}{b_y c_z - b_z c_y}\right)\mathfrak{j};\mathfrak{j} - q\sin\varphi\,\frac{b_y^2 + c_y^2}{b_y c_z - b_z c_y}\,\mathfrak{j};\mathfrak{k} \\
&+ q\sin\varphi\,\frac{b_z^2 + c_z^2}{b_y c_z - b_z c_y}\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} + \left(q\cos\varphi - q\sin\varphi\,\frac{b_y b_z + c_y c_z}{b_y c_z - b_z c_y}\right)\mathfrak{k};\mathfrak{k}.
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Es müssen also, wenn Gleichung (20) auf (18) reduziert werden soll, die Faktoren der Grunddyaden in (20) und (22) übereinstimmen. Wir wollen die Gleichsetzung nicht in voller Allgemeinheit durchführen, greifen vielmehr nur die Faktoren von $\mathfrak{j};\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k};\mathfrak{j}$ heraus. Diese ergeben die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
-q\sin\varphi\,\frac{b_y^2 + c_y^2}{b_y c_z - b_z c_y} &= t_{yz}, \\
q\sin\varphi\,\frac{b_z^2 + c_z^2}{b_y c_z - b_z c_y} &= t_{zy},
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

aus denen folgt:

$$\frac{t_{yz}}{t_{zy}} = -\frac{b_y^2 + c_y^2}{b_z^2 + c_z^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Dies ist im Reellen nur möglich, wenn t_{yz} und t_{zy} entgegengesetzte Vorzeichen haben, also folgt [vgl. § **57**, Gleichung (6)]: Die Reduktion auf die Form (18) ist auch bei allgemeinster Wahl der Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ nur möglich für Diatensoren mit nur einer reellen Achse. Für diese ist sie aber offenbar allgemein möglich, denn wir haben nur sieben Gleichungen für neun Unbekannte; man kann also zwei der letzteren noch willkürlich wählen und erhält bei passender Wahl reelle Lösungen. Die wirkliche Reduktion wollen wir zunächst vornehmen an dem

Spezialfall A. Es sei $t_{xy} = t_{xz} = 0$; der gegebene Diatensor habe also die Gestalt

$$\begin{cases} t_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & t_{yy} & t_{yz} \\ 0 & t_{zy} & t_{yy}; \end{cases}$$

dann müssen die Faktoren der Grunddyaden $\mathfrak{i};\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{i};\mathfrak{k}$ in Gleichung (22) zu Null werden. Da diese sämtlich entweder b_x oder c_x enthalten, kann man diese Bedingung schon erfüllen, indem man $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ in die yz-Ebene legt, wo b_x und c_x zu Null werden. Man kann aber noch weiter vereinfachen, indem man $\mathfrak{b}$ in die y-Achse und $\mathfrak{c}$ in die z-Achse verlegt, so daß $b_z = c_y = 0$ und $\mathfrak{b} = b\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{c} = c\,\mathfrak{k}$ wird. Die Gleichungen lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} p &= t_{xx}, & q\cos\varphi &= t_{yy}, \\ q\sin\varphi\frac{b}{c} &= -t_{yz}, & q\sin\varphi\frac{c}{b} &= t_{zy} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (25)$$

und liefern die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= t_{yy}^2 - t_{yz}t_{zy}, \\ tang^2\varphi &= -\frac{t_{yz}t_{zy}}{t_{yy}^2}, \\ \frac{b}{c} &= \sqrt{\frac{-t_{yz}}{t_{zy}}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

Von den beiden Beträgen b und c kann einer noch willkürlich gewählt werden. Hierin liegt aber keine Unbestimmtheit der elliptischen Drehung; denn da c mit b proportional ist, werden die sämtlichen Ellipsen E, welche man mit ihnen konstruieren kann, einander ähnlich, haben also die gleiche geometrische Wirkung. In dem gegebenen Spezialfall reduziert sich also die Gesamtbewegung auf erstens eine reine Deformation mit den Konstituenten p, q und q, und zweitens eine elliptische Drehung senkrecht zu p; die Hauptachsen der Ellipsen E liegen in den Achsen der y und z, und die Lage dieser Achsen ist bestimmt durch die Bedingung, daß der gegebene Diatensor auf diejenige Form reduziert sein muß, in welcher $t_{zz} = t_{yy}$ wird.

B. Der allgemeine Fall. t_{xy} und t_{xz} sind von Null verschieden. Dann ergibt sich auf folgende Weise sehr einfach die Reduktion: Wir lassen die Koordinatenachsen und die drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in derselben Lage wie im Spezialfall A, haben also

$$\mathfrak{a} = a\mathfrak{i}, \qquad \mathfrak{b} = b\mathfrak{j}, \qquad \mathfrak{c} = c\mathfrak{k}, \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

$$\mathfrak{a}' = \frac{\mathfrak{i}}{a}, \qquad \mathfrak{b}' = \frac{\mathfrak{j}}{b}, \qquad \mathfrak{c}' = \frac{\mathfrak{k}}{c}. \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

Dem Ausdruck (18) setzen wir dann versuchsweise zwei Dyaden $\mathfrak{a};\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{a};\mathfrak{c}'$ zu, nachdem wir eine von ihnen mit einem unbestimmten Skalar l multipliziert haben. Wir setzen also

$$\left.\begin{aligned} \Phi = {} & p\,\mathfrak{a};\mathfrak{a}' + q\cos\varphi(\mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}') + q\sin\varphi(\mathfrak{c};\mathfrak{b}' - \mathfrak{b};\mathfrak{c}') \\ & + \mathfrak{a};\mathfrak{b}' + l\,\mathfrak{a};\mathfrak{c}'. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Mit den Gleichungen (27) und (28) liefert das

$$\left.\begin{aligned} \Phi = {} & p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + q\cos\varphi(\mathfrak{j};\mathfrak{j} + \mathfrak{k};\mathfrak{k}) + q\sin\varphi\left(\frac{c}{b}\mathfrak{k};\mathfrak{j} - \frac{b}{c}\mathfrak{j};\mathfrak{k}\right) \\ & + \frac{a}{b}\mathfrak{i};\mathfrak{j} + l\frac{a}{c}\mathfrak{i};\mathfrak{k}. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Durch Gleichsetzung mit (20) findet sich

$$\left.\begin{aligned} & p = t_{xx}, \qquad q\cos\varphi = t_{yy}, \qquad q\sin\varphi\frac{c}{b} = t_{zy}, \\ & -q\sin\varphi\frac{b}{c} = t_{yz}, \qquad \frac{a}{b} = t_{xy}, \qquad l\frac{a}{c} = t_{xz}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (31)$$

Die Lösungen sind dieselben wie in Gleichung (26) mit den Zusätzen

$$a = t_{xy}b, \qquad l = t_{xz}\frac{c}{a}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

Es kann also hier wieder einer von den drei Beträgen a, b, c willkürlich gewählt werden und man erhält für willkürliches a

$$b = \frac{a}{t_{xy}}, \qquad c = \frac{a}{t_{xy}}\sqrt{-\frac{t_{zy}}{t_{yz}}}, \qquad l = \frac{t_{xz}}{t_{xy}}\sqrt{-\frac{t_{zy}}{t_{yz}}}. \quad \cdot \quad (33)$$

Der Ausdruck (29) zerlegt sich in

$$\left.\begin{aligned} \Phi = {} & \{p\,\mathfrak{a};\mathfrak{a}' + q\cos\varphi(\mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}') + q\sin\varphi(\mathfrak{c};\mathfrak{b}' - \mathfrak{b};\mathfrak{c}')\} \\ & \cdot\left\{\mathfrak{a};\mathfrak{a}' + \mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}' + \frac{1}{p}\mathfrak{a};\mathfrak{b}' + \frac{l}{p}\mathfrak{a};\mathfrak{c}'\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Der erste dieser beiden Faktoren ist das bereits bekannte Produkt aus Tensor und elliptischem Versor. Der zweite ist zu untersuchen. Wir ersetzen $\frac{1}{p}$ und $\frac{l}{p}$ durch die einfachen Buchstaben m und n, dann lautet er

$$\Sigma = \mathfrak{a};\mathfrak{a}' + \mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}' + m\,\mathfrak{a};\mathfrak{b}' + n\,\mathfrak{a};\mathfrak{c}', \quad . \; . \; . \; . \quad (35)$$

wofür man auch kürzer schreiben kann:

$$\Sigma = I + m\,\mathfrak{a};\mathfrak{b}' + n\,\mathfrak{a};\mathfrak{c}'. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

Ist ein Vektor $\mathfrak{v}$ kollinear mit $\mathfrak{a}$, also gleich $e\,\mathfrak{a}$, so wird er durch Multiplikation mit Σ nicht geändert. Ein mit $\mathfrak{b}$ kollinearer Vektor $f\,\mathfrak{b}$ wird durch Multiplikation mit Σ zu $f\,\mathfrak{b} + m f\,\mathfrak{a}$. Sein Endpunkt wird also in der Richtung der x um den Betrag $m f\,\mathfrak{a}$ verschoben. Die Achse der y neigt sich demgemäß in der xy-Ebene um einen Winkel, dessen Tangente $m\frac{a}{b}$ ist, und dasselbe tut jede ihr parallele Gerade der xy-Ebene. Entsprechend verschiebt sich der Endpunkt eines mit $\mathfrak{c}$ kollinearen Vektors $g\,\mathfrak{c}$ in der x-Richtung um $n g\,\mathfrak{a}$; alle mit der z-Achse parallelen Geraden der xz-Ebene neigen sich in ihr um den Winkel $arctg\, n\frac{a}{c}\cdot$ Eine beliebige Gerade, welche senkrecht auf der x-Achse steht und zu Anfang in der Ebene der beiden Geraden $x = e$, $z = 0$ und $x = e$, $y = 0$ liegt, neigt sich in der x-Richtung so, daß sie auch nach der Bewegung mit beiden komplanar ist.

Hiernach ist Σ, wie schon durch die Bezeichnung angedeutet, ein Schieber nach der x-Richtung. In der Tat ist Σ identisch mit dem bereits bekannten Schieber in enneadischer Form

$$\begin{cases} 1 & t_{xy} & t_{xz} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{cases}$$

Auch hier ist zu bemerken: Die Eindeutigkeit der Schiebung wird dadurch, daß man einen der drei Beträge a, b, c frei wählen kann, nicht beeinträchtigt. Denn die Maßzahlen f und g sind umgekehrt proportional mit den für die Messung zugrunde gelegten Einheiten b und c, also, da auch a proportional mit b und c ist, hat das Produkt $(m f + n g)\,a$ für alle Beträge von a den gleichen Wert.

Anmerkung 1. Es ist von Interesse, die einfachste Form festzustellen, welche die Hamiltonsche Gleichung für den Diatensor mit einer reellen

Achse annehmen kann. Mit § 57, Gleichung (3), und mit den Gleichungen (31) dieses Paragraphen ergibt sich

$$S_1 = p + 2q\cos\varphi, \qquad S_{21} = q^2 + 2pq\cos\varphi, \qquad S_3 = pq^2.$$

Damit wird die Hamiltonsche Gleichung

$$t_\xi^3 - (p + 2q\cos\varphi)\,t_\xi^2 + (q^2 + 2pq\cos\varphi)\,t_\xi - pq^2 = 0.$$

Entsprechend dem Umstande, daß die eine Wurzel $t_\xi = p$ schon bekannt ist, läßt sich das Polynom dieser Gleichung durch $t_\xi - p$ dividieren und man erhält

$$(t_\xi - p)(t_\xi^2 - 2q\cos\varphi\, t_\xi + q^2) = 0. \qquad (37)$$

Wegen der bekannten Invarianzverhältnisse gilt dieser Ausdruck für die Diatensoren mit einer reellen Achse, einerlei, in welcher Form sie gegeben sind, wobei aber den Größen p, q und φ immer die Bedeutung beizulegen ist, welche sie in den obigen Gleichungen haben.

V. Diatensoren mit zwei gleichen reellen Achsen. Diese sind nach § 57 dadurch charakterisiert, daß für sie entweder $t_{yz} = 0$ oder $t_{zy} = 0$ ist. Wir setzen $t_{yz} = 0$ und nehmen außerdem zunächst an, es sei auch $t_{xy} = t_{xz} = 0$. Dann ist also für die Reduktion gegeben der Diatensor

$$\Phi = \begin{cases} t_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & t_{yy} & 0 \\ 0 & t_{zy} & t_{yy}. \end{cases} \qquad (38)$$

Die Reduktion ergibt sich einfach, wenn man die bisherige Lage des Koordinatensystems beibehält, in Gleichung (18) $\varphi = 0$ setzt und außerdem eine Dyade $\mathfrak{c};\mathfrak{b}'$ zufügt. Wir setzen also

$$\Phi = p\,\mathfrak{a};\mathfrak{a}' + q(\mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}') + \mathfrak{c};\mathfrak{b}'. \qquad (39)$$

Mit den Gleichungen (27) und (28) wird daraus

$$\Phi = p\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + q(\mathfrak{j};\mathfrak{j} + \mathfrak{k};\mathfrak{k}) + \frac{c}{b}\,\mathfrak{k};\mathfrak{j}, \qquad (40)$$

und es ergibt sich sofort

$$p = t_{xx}, \qquad q = t_{yy}, \qquad \frac{c}{b} = t_{zy}. \qquad (41)$$

(Will man nicht t_{yz}, sondern t_{zy} gleich Null nehmen, so hat man $\mathfrak{b};\mathfrak{c}'$ statt $\mathfrak{c};\mathfrak{b}'$ zuzusetzen und erhält ebenso einfach $p = t_{xx}$, $q = t_{yy}$, $\frac{b}{c} = t_{yz}$.) Der Ausdruck (38) zerlegt sich in die beiden Faktoren

$$\Phi = \{p\,\mathfrak{a};\mathfrak{a}' + q(\mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}')\}.\left(I + \frac{1}{q}\,\mathfrak{c};\mathfrak{b}'\right). \qquad (42)$$

Der zweite von diesen ist sofort als einfacher Schieber kenntlich, welcher die xz-Ebene in Ruhe läßt und allen mit ihr parallelen Ebenen $y = eb$ eine Schiebung vom Betrage $\frac{e}{q}c$ in der z-Richtung erteilt. (Ist $t_{zy} = 0$, $t_{yz} = \frac{b}{c}$, so erhält man eine entsprechende Schiebung in der y-Richtung.)

Läßt man nun die Bedingung $t_{xy} = t_{xz} = 0$ fallen, so ergibt sich auf demselben Wege die Lösung:

$$\Phi = \{p\mathfrak{a};\mathfrak{a}' + q(\mathfrak{b};\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}')\} \cdot \left(I + \frac{1}{p}\mathfrak{a};\mathfrak{b}' + \frac{l}{p}\mathfrak{a};\mathfrak{c}' + \frac{1}{q}\mathfrak{c};\mathfrak{b}'\right). \quad (43)$$

Der zweite Faktor ist offenbar identisch mit dem allgemeinen Schieber von § 57, Gleichung (9).

Der Diatensor mit zwei gleichen reellen Achsen zerlegt sich also ganz wie in § 57 in Tensor und allgemeinen Schieber. Das Deformationsellipsoid des Tensors ist ein Umdrehungsellipsoid; seine ungleiche Achse fällt in die ungleiche Achse des Diatensors.

Anmerkung 2. Es liegt auf der Hand, daß die Reduktionen noch variiert werden können, und zwar in reichhaltiger Weise, weil die der Reduktion zugrunde liegenden Gleichungen in allgemeinster Gestalt zur vollen Bestimmung sämtlicher Unbekannten nicht ausreichen. So könnte man z. B., falls t_{xy} und t_{xz} nicht Null sind, die entsprechenden Schieber dadurch überflüssig machen, daß man der Achse der x eine andere Lage gibt. Bei Gibbs-Wilson ist eine mehr geometrische Methode bevorzugt, welche die Mannigfaltigkeit dieser Möglichkeiten nicht hervortreten läßt; daher kommt es, daß die vorstehenden Darstellungen zwar auf dieselben Grundformen führen, wie bei Gibbs-Wilson, aber im einzelnen Abweichungen zeigen. Die vorstehenden Reduktionen sind hier bevorzugt, weil sie die einfachsten Vorstellungen von der Lage der benutzten Koordinatensysteme geben.

82. Einteilung der Transformationen.

Die Einführung der reziprokalen Vektorensysteme läßt, worauf in § 57 hingewiesen wurde, den Unterschied zwischen dreiachsigen und einachsigen Diatensoren schärfer hervortreten als die bloße Benutzung der Grundvektoren. Der einachsige Diatensor ist hier dadurch charakterisiert, daß als einer seiner Faktoren der elliptische Versor auftritt.

Im übrigen ergibt sich auf Grund der dyadischen Formen dieselbe Einteilung der möglichen Raumtransformationen, welche in § 58 gegeben wurde.

Anmerkung. Die bei Gibbs-Wilson gegebene Einteilung stützt sich ausschließlich auf die Hamilton-Cayleysche Gleichung; da hinter ihr die große Autorität von Gibbs steht, mag sie hier kurz richtiggestellt werden.

Die Hamilton-Cayleysche Gleichung lautet, vollständig homogen geschrieben (vgl. § **60**):

$$\Phi^3 - S_1 \Phi^2 I + S_{21} \Phi I^2 - S_3 I^3 = 0.$$

Es seien nun p, q, r irgend drei Beträge, dann sind folgende Fälle möglich.

Hauptfall I. Die Gleichung hat drei reelle Wurzeln, von denen wir zunächst voraussetzen, daß sie alle von I verschieden sind. Sie kann dann folgende Formen haben:

Unterfall a):

$$(\Phi - p I)(\Phi - q I)(\Phi - r I) = 0.$$

Dehnung nach drei verschiedenen Richtungen; stehen dieselben senkrecht aufeinander, so ist eine reine Deformation gegeben.

Unterfall b):

$$(\Phi - p I)(\Phi - q I)^2 = 0.$$

Diatensor mit zwei gleichen Achsen; ersetzbar durch Tensor und Schiebung. Stehen die Achsen aufeinander senkrecht, so ist wieder eine reine Deformation gegeben, deren Ellipsoide Rotationskörper sind.

Unterfall c):

$$(\Phi - p I)^3 = 0.$$

Reine Deformation, wobei der deformierte Raum dem ursprünglich gegegebenen ähnlich ist.

Hauptfall II. Die Gleichung hat nur eine reelle Lösung:

$$(\Phi - p I)(\Phi^2 - 2 q \cos\varphi\, \Phi I + q^2 I^2) = 0.$$

Dehnung nach einer Richtung, kombiniert mit elliptischer Drehung, deren Ebene senkrecht auf der Dehnungsrichtung steht, und im allgemeinen mit einer Schiebung.

Spezialfälle ergeben sich dadurch, daß im Einzelfalle I als Lösung auftreten kann.

Zu Hauptfall I.

Spezialfall 1: $(\Phi - I)(\Phi - q I)(\Phi - r I) = 0.$

Spezialfall 2: $(\Phi - I)^2 (\Phi - r I) = 0.$

Im ersten Fall ergibt sich, soweit nur die Hamilton-Cayleysche Gleichung in Betracht kommt, die Dehnung nach zwei Richtungen, im zweiten diejenige nach einer Richtung.

Spezialisiert man nun noch weiter, indem man im Spezialfall 2 auch r zu Eins werden läßt, so tritt die Insuffizienz der Hamilton-Cayleyschen Gleichung deutlich hervor. Der Spezialfall 2 umfaßt nämlich sowohl den mit einem Tensor kombinierten Schieber

$$T\Sigma = \begin{cases} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & e & r, \end{cases}$$

wie den Tensor

$$T = \begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r. \end{cases}$$

Setzt man nun $r = 1$, so erhält man aus dem Spezialfall 2:

$$(\Phi - I)^3 = 0,$$

d. h. man erhält nur den Einheitstensor, während der Schieber nicht zum Ausdruck kommt. Man muß also auch hier auf die diskriminierende Form des Diatensors zurückgreifen, und dann erhält man die Ergebnisse von § 58.

Drittes Kapitel: **Hinweise auf Begriffserweiterungen.**

83. Pseudoskalare Diatensoren.

Die Vektoren teilen sich bekanntlich in polare (Typus Verschiebung), die ihr Vorzeichen wechseln, wenn man die Richtung der drei Koordinatenachsen umkehrt, und axiale (Typus Drehung bzw. eine durch Umlauf eines Punktes beschriebene Fläche), deren Vorzeichen durch Umkehrung der Koordinatenachsen nicht geändert wird.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Glieder der betrachteten Diatensoren reine Skalare seien, deren Vorzeichen von der Lage irgend eines Koordinatensystems unabhängig sind. Solange dies der Fall ist, ändert die Multiplikation eines Vektors $\mathfrak{v}$ mit dem Diatensor Φ offenbar den Charakter von $\mathfrak{v}$ nicht; ein polares $\mathfrak{v}$ bleibt polar, ein axiales bleibt axial.

Man kann nun, ohne im übrigen an den bisherigen Entwickelungen etwas Wesentliches zu ändern, diese Voraussetzung dahin erweitern, daß die Diatensorglieder auch pseudoskalar sein dürfen, d. h. daß zwar für sie keine Richtung in Betracht kommt, daß sie aber bei Umkehrung des Koordinatensystems ihr Vorzeichen ändern. Multipliziert man dann einen polaren Vektor mit einem Diatensor Φ, so erhält das Diatensorvektorprodukt $\Phi\mathfrak{v}$ offenbar die Eigenschaft, daß sein Vorzeichen sich nicht mehr ändert, wenn die Koordinatenachsen umgekehrt werden; Φ macht aus dem polaren Vektor einen axialen. Offenbar wird entsprechend durch Multiplikation mit Φ aus dem axialen Vektor ein polarer.

Es ist zu beachten, daß das letztere nur gilt, wenn das axiale $\mathfrak{v}$ direkt mit dem pseudoskalaren Diatensor Φ multipliziert wird. Sind dagegen in einem Raum polare Vektoren $\mathfrak{v}$ und axiale vektorielle Kombinationen $\mathfrak{u}$ dieser Vektoren gegeben, und transformiert man den ganzen Raum mit dem pseudoskalaren Tensor Φ, so tritt der in § 38 aufgestellte Satz in Geltung: Während die $\mathfrak{v}$ mit Φ multipliziert werden, also ihren Charakter ändern und axial werden, multiplizieren sich die $\mathfrak{u}$ mit Φ_2; Φ_2 besteht aber aus lauter paarigen Gliedern, wie $t_{yy} t_{zz}$ usw., d. h. Φ_2 ist rein skalar, auch wenn Φ pseudoskalar ist; die Vektoren $\mathfrak{u}$ wechseln demnach bei der Transformation ihren Charakter nicht.

84. Jaumanns rotorische Dyaden.

Analog den für die skalare Dyade $\mathfrak{A};\mathfrak{a}$ gegebenen Definitionsgleichungen

$$(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\,\mathfrak{v} = \mathfrak{A}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}), \qquad \mathfrak{v}(\mathfrak{A};\mathfrak{a}) = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{A})\,\mathfrak{a} \quad \ldots . (1)$$

hat Jaumann eine Dyade definiert, die er „rotorische" Dyade nennt, und die, wenn sie aus den beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ zusammengesetzt wird, zu bezeichnen ist durch $\mathfrak{A}\underset{;}{\times}\mathfrak{a}$. Dieselbe wird definiert durch die Gleichungen

$$(\mathfrak{A}\underset{;}{\times}\mathfrak{a})\,\mathfrak{v} = \big[\mathfrak{A}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}]\big], \qquad \mathfrak{v}(\mathfrak{A}\underset{;}{\times}\mathfrak{a}) = \big[[\mathfrak{v}\,\mathfrak{A}]\,\mathfrak{a}\big], \quad \ldots (2)$$

wo die eckigen Klammern in bekannter Weise das vektorielle Produkt aus den eingeschlossenen Vektoren bezeichnen. Da das vektorielle Produkt dieselben additiven und distributiven Eigenschaften hat wie das skalare, leuchtet ein, daß die rotorische Dyade die gleichen additiven Eigenschaften besitzt wie die skalare. Man kann also analog, wie das bei skalaren Dyaden geschieht, ein „rotorisches Dyadentripel" bilden.

Es ist nun nach einem bekannten Satz der Vektorentheorie

$$\big[\mathfrak{A}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}]\big] = \mathfrak{a}(\mathfrak{A}\,\mathfrak{v}) - \mathfrak{v}(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}), \quad \ldots\ldots . (3)$$

also

$$(\mathfrak{A}\underset{;}{\times}\mathfrak{a})\,\mathfrak{v} = (\mathfrak{a};\mathfrak{A})\,\mathfrak{v} - (\mathfrak{A}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{v} = (\mathfrak{A};\mathfrak{a})_c\,\mathfrak{v} - (\mathfrak{A}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{v}. \quad \ldots (4)$$

Setzt man nun ein rotorisches Dyadentripel Ω aus drei Dyaden $\mathfrak{A}\underset{;}{\times}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}\underset{;}{\times}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{C}\underset{;}{\times}\mathfrak{c}$ zusammen, so daß

$$\Omega = \mathfrak{A}\underset{;}{\times}\mathfrak{a} + \mathfrak{B}\underset{;}{\times}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\underset{;}{\times}\mathfrak{c}, \quad \ldots\ldots . (5)$$

und multipliziert es nach Gleichung (4) mit einem Vektor $\mathfrak{v}$, so erhält man

$$\Omega\,\mathfrak{v} = (\mathfrak{A};\mathfrak{a} + \mathfrak{B};\mathfrak{b} + \mathfrak{C};\mathfrak{c})_c\,\mathfrak{v} - (\mathfrak{A}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{v}. \quad \ldots (6)$$

Setzt man also $\mathfrak{A};\mathfrak{a} + \mathfrak{B};\mathfrak{b} + \mathfrak{C};\mathfrak{c} = \Phi$, so lautet die vorstehende Gleichung:

$$\Omega\,\mathfrak{v} = \Phi_c\,\mathfrak{v} - S_1\,\mathfrak{v}, \quad \ldots\ldots\ldots . (7)$$

wo S_1 wie bisher den ersten Skalar von Φ bezeichnet.

Das Produkt $-S_1 \mathfrak{v}$ kann man aber als Tensorvektorprodukt

$$-\left\{\begin{matrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 \end{matrix}\right. . \mathfrak{v}$$

darstellen und kann es in dieser Gestalt zu dem Diatensorvektorprodukt $\Phi_c \mathfrak{v}$ addieren. So erhält man

$$\Omega \mathfrak{v} = \left(\Phi_c - \left\{\begin{matrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 \end{matrix}\right. \right) \mathfrak{v}, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

also

$$\Omega = \Phi_c - \left\{\begin{matrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 . \end{matrix}\right. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Ist demnach das skalare Dyadentripel Φ in Nonionform oder in enneadischer Form dargestellt durch

$$\mathfrak{A}; \mathfrak{a} + \mathfrak{B}; \mathfrak{b} + \mathfrak{C}; \mathfrak{c} = \left\{\begin{matrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz}, \end{matrix}\right. \quad \ldots \quad (10)$$

so läßt sich das entsprechende rotorische Dyadentripel Ω darstellen durch

$$\mathfrak{A} \underset{;}{\times} \mathfrak{a} + \mathfrak{B} \underset{;}{\times} \mathfrak{b} + \mathfrak{C} \underset{;}{\times} \mathfrak{c} = \left\{\begin{matrix} -(t_{yy} + t_{zz}) & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & -(t_{zz} + t_{xx}) & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & -(t_{xx} + t_{yy}). \end{matrix}\right. \quad (11)$$

Angesichts dieser restlosen Reduktion auf einen skalaren Diatensor scheint dem rotorischen Dyadentripel keine besondere Bedeutung für die Raumtransformation zuzukommen. Sein Wert muß sich ausweisen, wenn es sich um die Frage handelt, ob eine physikalische Eigenschaft bzw. Vektorenkombination sich einfacher und naturgemäßer durch skalare oder durch rotorische Diatensoren darstellen läßt.

Anhang.

Analytische Behandlung der einfachen Schiebun

A. Einführung.

Die Diatensoren sind — von anderen Verwendungen abgesehen — das naturgemäße Mittel zur analytischen Behandlung der deformativen Bewegungen. Als Beispiel mögen hier einige Hauptsätze über die Kinematik der einfachen Schiebung behandelt werden. Man vergleiche dazu Thomson und Tait (als T. & T. zitiert), Theoretische Physik, § **171** ff.

Vorab sei bemerkt, daß im folgenden alle zu multiplizierenden Vektoren $\mathfrak{v}$ als Postfaktoren gedacht sind.

Ersetzt man im Einheitstensor eines der Seitenglieder durch eine endliche Zahl a, so hat man einen einfachen Schieber. Der „Schiebungsparameter" a kann an jeder Stelle stehen, wo im Einheitstensor eine Null steht; wie bereits bemerkt, bestimmt die Zeile, in welcher er sich befindet, die Richtung der Schiebung, die Kolonne bestimmt, welche Ebene in Ruhe bleibt.

Wir legen ihn in die erste Zeile und dritte Kolonne, schreiben also

$$\Sigma = \begin{cases} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases} = I + a\,\mathfrak{i}\,;\mathfrak{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

a muß eine reine Zahl sein, da der Schieber sonst nicht homogen wäre; demgemäß erscheinen die Schiebungsparameter in § **57** usw. stets als Quotienten zweier Größen von gleicher Dimension. Wir setzen ferner fest, daß a positiv sein soll; ist a negativ, so kehrt sich einfach die Richtung der Schiebung um, ohne daß im übrigen an den geometrischen Verhältnissen etwas geändert wird. Die Schiebung sei auf einen Transformationsmittelpunkt 0 und ein durch ihn gelegtes Koordinatensystem der x, y, z bezogen, in welchem letzteren der Schieber die Gestalt (1) habe.

Ist $\mathfrak{v}$ ein von 0 aus gezogener Fahrstrahl und $\mathfrak{w}$ das Produkt $\Sigma\mathfrak{v}$, so ist

$$\mathfrak{w} = (v_x + a v_z)\,\mathfrak{i} + v_y\,\mathfrak{j} + v_z\,\mathfrak{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Der Endpunkt von $\mathfrak{v}$ wird also in der x-Richtung um das $a$fache seines Abstandes von der xy-Ebene verschoben. Die xy-Ebene bleibt danach in Ruhe, sie ist die „Nullebene" (T. & T.) der Schiebung; jede mit ihr parallele Ebene wird in sich selbst in der x-Richtung um den Betrag $a\,v_z$ verschoben. In der xz-Ebene erleidet jede mit der x-Achse parallele Gerade die entsprechende Verschiebung. Die z-Achse und mit ihr die yz-Ebene wird um den Winkel $arc\,tg\,a$ geneigt. Jede ihr parallele Ebene desgleichen.

a bedeutet den Betrag der Schiebung für den Abstand Eins und heißt nach T. & T. die Größe der Schiebung.

B. Das Deformationsellipsoid.

Das Deformationsellipsoid ist zu ermitteln. Da der in die y-Achse fallende Radius der Einheitskugel unverändert bleibt, genügt es offenbar, den Schnitt des Ellipsoids mit der zx-Ebene zu untersuchen. In ihr bilden die Endpunkte der Einheitsvektoren einen Kreis, der die Gleichung erfüllt:

$$v_x^2 + v_z^2 = 1. \qquad (3)$$

Nach der Schiebung ist

$$w_x = v_x + a v_z, \qquad w_z = v_z, \qquad v_x = w_x - a w_z,$$

also wird aus (3)

$$w_x^2 + (1 + a^2) w_z^2 - 2 a w_x w_z = 1. \qquad (4)$$

Wir führen nun ein neues Koordinatensystem der ξ, ζ ein, dessen ξ-Achse mit x den Winkel φ macht. Es ist dann

$$\left.\begin{aligned} w_x &= w_\xi \cos\varphi - w_\zeta \sin\varphi, \\ w_z &= w_\xi \sin\varphi + w_\zeta \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Damit wird (4)

$$\left.\begin{aligned} &w_\xi^2 (1 + a^2 \sin^2\varphi - 2 a \cos\varphi \sin\varphi) + w_\zeta^2 (1 + a^2 \cos^2\varphi + 2 a \cos\varphi \sin\varphi) \\ &\quad + w_\xi w_\zeta \big(2 a^2 \cos\varphi \sin\varphi - 2 a (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\big) = 1. \end{aligned}\right\} (6)$$

Soll also eine Hauptachse der Deformationsellipse in ξ fallen, so ist ihre Lage bestimmt durch die Bedingung

$$2 a^2 \cos\varphi \sin\varphi = 2 a (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

$$tang\, 2\varphi = \frac{2}{a}. \qquad (7)$$

Die Konstruktion von φ liegt danach auf der Hand. Für $a = 0$ wird $\varphi = \frac{\pi}{4}$, für $a = \infty$ wird $\varphi = 0$, dabei ist $\frac{d\varphi}{da}$ stets negativ, der Winkel φ liegt also stets zwischen 0 und 45⁰.

Aus (7) folgt

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\varphi &= \frac{1}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2+4}}, \\ \sin^2\varphi &= \frac{1}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2+4}}, \\ \cos\varphi \sin\varphi &= \sqrt{\frac{1}{a^2+4}}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Die Vorzeichen sind dadurch bestimmt, daß nach Gleichung (7) $\cos\varphi > \sin\varphi$ und beide > 0 sein müssen. Damit wird Gleichung (6)

$$w_\xi^2 \left(1 + \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{a^2+4}\right) + w_\zeta^2 \left(1 + \frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{a^2+4}\right) = 1. \qquad (9)$$

Die Koeffizienten von w_ξ^2 und w_ζ^2 haben die leicht zu verifizierende Eigenschaft, daß ihr Produkt $= 1$ ist. Außerdem sind sie genaue Quadrate, so daß die vorstehende Gleichung geschrieben werden kann

$$\frac{w_\xi^2}{\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}\right)^2}+\frac{w_\zeta^2}{\left(-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}\right)^2}=1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Hier sind die Vorzeichen dadurch bestimmt, daß die Halbachsen Absolutwerte, also > 0 sind.

Die große Halbachse der Ellipse ist bei T. & T. mit α bezeichnet. Die kleinere ist dann $\frac{1}{\alpha}$. Offenbar ist $\alpha - \frac{1}{\alpha} = a$, also kann die Größe der Schiebung auch durch $\alpha - \frac{1}{\alpha}$ angegeben werden.

T. & T. haben für die beiden Hauptachsen der Ellipse den Namen „Hauptachsen der Schiebung" eingeführt. α ist der Koeffizient der maximalen Elongation, $\frac{1}{\alpha}$ derjenige der stärksten Verkürzung. Die Einheit, also die dritte Achse, welche in die Achse der y, η fällt, ist die mittlere Proportionale zwischen beiden.

C. Die Drehungsbeträge der einzelnen Vektoren.

Irgend ein Vektor v in der xz-Ebene hat anfänglich die Komponenten $v_x \mathfrak{i}$ und $v_z \mathfrak{k}$; nach der Schiebung sind dieselben $(v_x + a v_z)\mathfrak{i}$ und $v_z \mathfrak{k}$. Vorher macht er mit den Achsen der x und der z die Kosinus $\frac{v_x}{v}$ und $\frac{v_z}{v}$, nachher $\frac{v_x + a v_z}{w}$ und $\frac{v_z}{w}$, also wird er gedreht um einen Winkel ω, wenn

$$\cos\omega = \frac{v_x^2 + a v_x v_z + v_z^2}{v\,w}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Hieraus berechnet sich leicht

$$\sin\omega = \frac{a v_z^2}{v\,w}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die Drehung erfolgt in positiver Richtung von z nach x hin; dadurch ist das Vorzeichen von $\sin\omega$ begründet.

In den vorstehenden Formeln sind die Drehungswinkel durch die Komponenten der Anfangslage ausgedrückt. Will man sie durch die Komponenten der Endlage ausdrücken, so hat man w_x und w_z statt v_x und v_z einzuführen. Mit $v_x = w_x - a w_z$ und $v_z = w_z$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega &= \frac{w_x^2 - a w_x w_z + w_z^2}{v\,w}, \\ \sin\omega &= \frac{a w_z^2}{v\,w}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Es ist von Interesse, die Drehung desjenigen Vektors $\mathfrak{v}_e$ festzustellen, der nach der Schiebung die große Achse der Ellipse bildet. Zu dem Ende transformiere man die Gleichung (13) mit (5) auf das System der ξ, η, ζ. Man erhält

$$\begin{aligned} v\,w \cos\omega &= w_\xi^2 (1 - a\cos\varphi\sin\varphi) + w_\zeta^2 (1 + a\cos\varphi\sin\varphi) \\ &\quad - a w_\xi w_\zeta (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), \\ v\,w \sin\omega &= a(w_\xi^2 \sin^2\varphi + w_\zeta^2 \cos^2\varphi + 2\,w_\xi w_\zeta \cos\varphi\sin\varphi). \end{aligned}$$

Für die große Achse der Ellipse wird $w_\zeta = 0$, also, wenn der betreffende Winkel mit ω_e bezeichnet wird,

$$tang\,\omega_e = \frac{a\sin^2\varphi}{1 - a\cos\varphi\sin\varphi},$$

und wenn man hierin die Werte der Winkelfunktionen aus Gleichung (8) einsetzt, erhält man

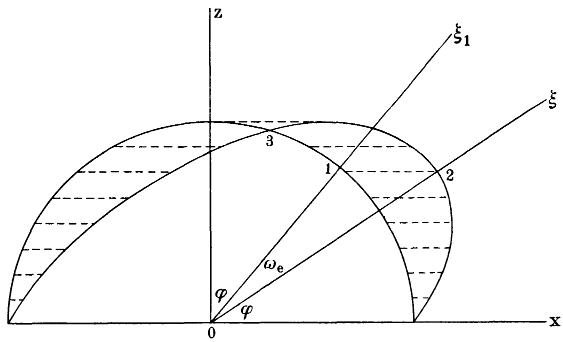
$$tang\,\omega_c = \frac{\frac{a}{2} - \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2+4}}}{1 - a\sqrt{\frac{1}{a^2+4}}} = \frac{a}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Aus dem Vergleich mit Gleichung (7) ergibt sich

$$tang\,\omega_e = \cot 2\varphi, \qquad \omega = \frac{\pi}{2} - 2\varphi. \quad \ldots\ldots (15)$$

Fig. 3 gibt eine Vorstellung davon, wie die Ellipse durch die Schiebung der Kreispunkte zustande kommt, und zugleich durch die Lage der Winkel φ

Fig. 3.



und ω_e die einfache Konstruktion für die Größe von ω_e. Punkt 1 liegt nach der Schiebung im Endpunkt 2 der großen Achse der Ellipse.

Den Radius 0 1 der Fig. 3 wollen wir den „bevorzugten Radius" nennen. Er liegt symmetrisch zu 0ξ in bezug auf die Halbierungslinie des Winkels $x0z$.

Zwei Radien der Einheitskugel bleiben an Größe unverändert; sind v_x und v_z ihre Komponenten, so ist die Bedingung dafür offenbar

$$(v_x + a\,v_z)^2 + v_z^2 = v_x^2 + v_z^2.$$

Die Gleichung liefert erstens die Lösung $v_z = 0$, d. h. einer der unveränderlichen Radien fällt in die x-Achse, wie es sein muß. Die zweite Lösung ist

$$\frac{v_z}{v_x} = -\frac{2}{a}.$$

Nach der Schiebung wird daraus

$$\frac{w_z}{w_x} = \frac{v_z}{v_x + a v_z} = \frac{2}{a}.$$

In der Anfangslage steht der betrachtete Radius also senkrecht auf einer Geraden, welche mit der Achse der x den Winkel $arc\,tg \frac{a}{2}$ oder ω_e macht. In der Endlage macht er mit der Achse der x den Winkel 2φ, und mit der z-Achse den Winkel ω_e, d. h. er liegt, wie es sein muß, symmetrisch zur x-Achse in bezug auf die große Achse 0ξ. Hier ist er der Radius 0 3 der Fig. 3. Die beiden unveränderlichen Radien und die Parallelen zu ihnen in der xz-Ebene sind die Spuren der Kreisschnitte des Deformationsellipsoids in der xz-Ebene. Alle mit ihnen parallelen Vektoren teilen die Eigenschaft, daß ihre Beträge durch die betrachtete einfache Schiebung nicht geändert werden.

D. Transformation des Schiebers.

Die Fig. 3 läßt deutlich erkennen, daß die seitliche Operation der Schiebung, wie es § **56** verlangt, ersetzt werden kann durch eine Drehung und eine reine Deformation: Man drehe die ganze Einheitskugel um die Achse der y und um einen solchen Betrag ω_e, daß der bevorzugte Radius 0 1 in die Richtung 0 2 wandert, und bringe dann eine reine Deformation an, welche in der Richtung 0 2 den Konstituenten α, senkrecht dazu $\frac{1}{\alpha}$ besitzt.

Dieses Ergebnis läßt sich nun durch rein tensorielle Erwägungen recht einfach erhalten. Transformiert man Σ auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem der ξ, η, ζ nach dem Winkelschema und den Gleichungen des § **18**, so sind die Produkte $\lambda_1 t_{xx} + \lambda_2 t_{xy} + \lambda_3 t_{xz}$ usw., welche in den dortigen Gleichungen auftreten, der Reihe nach:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 + a\lambda_3, & \lambda_2, & \lambda_3, \\ \mu_1 + a\mu_3, & \mu_2, & \mu_3, \\ \nu_1 + a\nu_3, & \nu_2, & \nu_3. \end{array}$$

Der transformierte Schieber stellt sich also im System der ξ, η, ζ dar als das Produkt

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{lll} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{array} \right. \cdot \left\{ \begin{array}{lll} \lambda_1 + a\lambda_3 & \mu_1 + a\mu_3 & \nu_1 + a\nu_3 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 . \end{array} \right. \quad \ldots (16)$$

Fassen wir den vorangehenden Versor als Repräsentanten einer Drehung vom Winkelbetrage ω um die Achse der y auf, so wird

$$\lambda_1 = \nu_3 = cos\,\omega, \quad \mu_2 = 1, \quad \lambda_3 = -\nu_1 = sin\,\omega, \quad \lambda_2 = \mu_1 = \mu_3 = \nu_2 = 0.$$

Und wenn man nun diese Werte auch in den zweiten Faktor von Gleichung (16) einsetzt, erhält man

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} \cos\omega & 0 & \sin\omega \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\omega & 0 & \cos\omega \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\omega + a\sin\omega & 0 & -\sin\omega + a\cos\omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega & 0 & \cos\omega. \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Der zweite Faktor wird ein Tensor, wenn

$$-\sin\omega + a\cos\omega = \sin\omega,$$

$$\tang\omega = \frac{a}{2}, \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

also wenn $\omega = \omega_e$ ist. Man hat dann

$$\cos^2\omega = \frac{4}{a^2+4}, \qquad \sin^2\omega = \frac{a^2}{a^2+4}, \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

und der Tensor nimmt die vereinfachte Form an

$$T = \begin{Bmatrix} \frac{a^2+2}{2}\cos\omega & 0 & \sin\omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega & 0 & \cos\omega. \end{Bmatrix} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Die Zerlegung von Σ in Tensor und Versor ist damit ausgeführt. Die drei Skalare von T sind unter Berücksichtigung der Gleichung (19):

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{a^2+4}{2}\cos\omega + 1 = 1 + \sqrt{a^2+4}, \\ S_{21} &= \frac{a^2+4}{2}\cos\omega + \frac{a^2+2}{2}\cos^2\omega - \sin^2\omega \\ &= \frac{a^2+4}{2}\cos\omega + \frac{a^2+4}{2}\cos^2\omega - 1 = \sqrt{a^2+4} + 1, \\ S_3 &= \frac{a^2+2}{2}\cos^2\omega - \sin^2\omega = \frac{a^2+4}{2}\cos^2\omega - 1 = 1. \end{aligned}$$

Damit wird die Hamiltonsche Gleichung von T

$$t_\xi^3 - (1 + \sqrt{a^2+4})\, t_\xi^2 + (\sqrt{a^2+4} + 1)\, t_\xi - 1 = 0,$$

und nach Division mit $t_\xi - 1$

$$t_\xi^2 - \sqrt{a^2+4}\, t_\xi = -1,$$

also

$$t_\xi = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4} \pm \sqrt{\frac{a^2+4}{4} - 1} = \pm\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4} \quad \ldots \quad (21)$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (10).

E. Kombination von Schiebung mit Rückwärtsdrehung.

Nach dem Obigen wird irgend ein Vektor $\mathfrak{v}$ durch die Schiebung um den Winkel ω gedreht. Man kann diese Drehung rückgängig machen, indem man den Schieber mit einem distalen Versor multipliziert, der um den Winkel $-\omega$ dreht. Die Gesamtoperation von Schiebung und Rückwärtsdrehung wird also ausgedrückt durch das Produkt

$$X\Sigma = \begin{Bmatrix} \cos\omega & 0 & -\sin\omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega & 0 & \cos\omega \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\omega & 0 & a\cos\omega - \sin\omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega & 0 & a\sin\omega + \cos\omega. \end{Bmatrix} \tag{22}$$

Im allgemeinen liefert also die Kombination von Schiebung und nachfolgender Rückwärtsdrehung eines beliebig ausgewählten Vektors einen Diatensor. Derselbe wird zum Tensor, wenn

$$a\cos\omega - \sin\omega = \sin\omega,$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{a}{2}, \qquad \omega = \omega_e. \quad \dots\dots\dots\dots \tag{23}$$

Es ergibt sich sonach: Wendet man die Schiebung und Rückwärtsdrehung auf einen beliebigen Radius der Einheitskugel an, so erhält man im allgemeinen nicht eine reine Deformation, sondern eine Deformation mit Drehung; eine reine Deformation erfolgt dann und nur dann, wenn man die Rückwärtsdrehung so ausführt, daß der bevorzugte Radius in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt. Der Hergang ist auch geometrisch leicht zu übersehen: Der bevorzugte Radius wird durch die Schiebung zur großen Halbachse des Deformationsellipsoids, und wenn man nun diese in die bevorzugte Richtung zurückdreht, so dreht sich das ganze Ellipsoid mit und es bleibt die reine Deformation, deren große Achse in die bevorzugte Doppelrichtung fällt.

Durch vollständige Elimination von ω ergibt sich für diesen Fall

$$(X\Sigma)_e = \begin{Bmatrix} \frac{2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{a^2+4}} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+4}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+4}}. \end{Bmatrix} \tag{24}$$

Dieser Tensor hat noch eine bemerkenswerte Eigenschaft. Erhebt man ihn ins Quadrat, so erhält man

$$(X\Sigma)_e^2 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1+a^2. \end{Bmatrix}$$

Hier ist die rechte Seite das genaue Produkt zweier einfachen Schieber (Reihenfolge nicht verwechselbar!).

$$(X\Sigma)_e^2 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1, \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots \tag{25}$$

Das heißt: Erteilt man einem Körper erst eine einfache Schiebung in der x-Richtung, parallel zur xz-Ebene, und dann eine zweite einfache Schiebung von gleicher Größe in der z-Richtung, parallel der yz-Ebene, so ist das Ergebnis eine reine Deformation mit den Elongationskoeffizienten α^2 und $\frac{1}{\alpha^2}$, deren große Achse in die Doppelrichtung des bevorzugten Radius des proximalen Schiebers fällt.

F. Kombination von Schieber und Tensor.

Im vorigen wurde gezeigt, daß die Kombination von Schiebung und Versor einen Tensor liefern kann; es ist die Frage aufzuwerfen, ob umgekehrt die Kombination von Schiebung und Tensor einen Versor liefern kann. Dabei ist offenbar vorauszusehen, daß die einfachsten Ergebnisse erhalten werden, wenn zwei Hauptachsen des Tensors in die xz-Ebene fallen. Wir beschränken uns auf diesen Fall und wählen einen Tensor von der Gestalt $\left\{\begin{matrix} p & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & r \end{matrix}\right.$. Steht zunächst Σ als Präfaktor, so wird

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right. \cdot \left\{\begin{matrix} p & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & r \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} p+as & 0 & s+ar \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & r. \end{matrix}\right.$$

Soll das Produkt ein Versor sein, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$p + as = r, \qquad -s = s + ar, \qquad r^2 + s^2 = 1.$$

Diese liefern

$$p = \frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+4}}, \qquad r = \frac{2}{\sqrt{a^2+4}}, \qquad s = \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}},$$

also das Ergebnis:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right. \cdot \left\{\begin{matrix} \frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{a^2+4}} \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} \frac{2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+4}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{a^2+4}}. \end{matrix}\right. \tag{26}$$

Steht Σ als Postfaktor, so findet sich auf demselben Wege:

$$\left\{\begin{matrix} \frac{2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{2+a^2}{\sqrt{a^2+4}} \end{matrix}\right. \cdot \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} \frac{2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+4}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{a^2+4}}. \end{matrix}\right. \tag{27}$$

Nennen wir den Tensor auf der linken Seite von (26) kurz T_p, den von (27) T_d, so ergibt sich: Man kann einen Versor sowohl aus proximalem Schieber und distalem Tensor, wie aus proximalem Tensor und distalem Schieber zusammensetzen. Wählt man den Tensor so, daß eine seiner Achsen mit dem Wert 1 in die y-Richtung fällt, so ist das in jedem der beiden Fälle nur auf eine Art möglich. Das Ergebnis der Operation ist in beiden Fällen dasselbe, eine Drehung um den Winkel $\omega = arctg\frac{a}{2}$ von z nach x hin; das ist derselbe Drehungswinkel, den die bevorzugte Richtung bei der Schiebung erleidet. Der Tensor ist verschieden zu wählen, je nachdem die Schiebung zeitlich vorangeht oder nachfolgt. T_p hat in der ersten Zeile und

Kolonne dieselben Glieder wie T_d in der letzten und umgekehrt, d. h. in den beiden in Frage kommenden Tensoren sind die Beziehungen zur x- und zur z-Richtung miteinander vertauscht; ihre großen Achsen liegen symmetrisch zu der Geraden, welche den Winkel zwischen der x- und der z-Achse halbiert. Ihre Hamiltonsche Gleichung ist in beiden Fällen

$$t_\xi^3 - (1 + \sqrt{a^2+4})\, t_\xi^2 + 2\sqrt{a^2+4}\, t_\xi - \sqrt{a^2+4} = 0$$

mit den Lösungen

$$t_\xi = 1, \quad t_\xi = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4} = \frac{1}{\alpha}, \quad t_\xi = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4} = \alpha. \tag{28}$$

Das Deformationsellipsoid für T_p und T_d hat also in beiden Fällen die Form des Deformationsellipsoides, welche dem Schieber zukommt, aber offenbar mit reziproken Achsenwerten: Geht die Schiebung zeitlich voran, so dreht sie den bevorzugten Radius (vgl. Fig. 3) in die Richtung der ξ und verlängert ihn im Verhältnis $\alpha:1$; der Tensor T fällt mit dem Achsenwert $\frac{1}{\alpha}$ in die Richtung der ξ, hebt also die Verlängerung auf, und es bleibt die reine Drehung um ω. Geht die reine Deformation voran, so fällt ihre große Achse in die Richtung $0\,\xi_1$ der Fig. 3, welche mit der Achse der z den Winkel φ macht, also in die bevorzugte Richtung; die Schiebung verkürzt diese im Verhältnis $\frac{1}{\alpha}:1$ und dreht zugleich den Körper um den Winkel ω; da $\omega = \frac{\pi}{2} - 2\varphi$, fällt der bevorzugte Radius $0\,\xi_1$ nach der Operation in $0\,\xi$.

G. Kombination von Schieber und Schieber.

Um einen kurzen Ausdruck zu haben, wollen wir die Form (auch wenn sie enneadisch gefaßt ist)

$$\Sigma = I + a\,\mathfrak{m}\,;\mathfrak{n} \tag{29}$$
$$(\mathfrak{m} = \mathfrak{i}, \mathfrak{j} \text{ oder } \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{i}, \mathfrak{j} \text{ oder } \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{m} \neq \mathfrak{n})$$

die typische Form des Schiebers nennen. Wir betrachten zwei einfache Schieber, die in dem gleichen Koordinatensystem die typische Form haben, deren Schiebungen also gleichgerichtet sind oder senkrecht aufeinander stehen Multipliziert man zwei derselben, $\Sigma_1 = I + a\,\mathfrak{m}\,;\mathfrak{n}$ und $\Sigma_2 = I + b\,\mathfrak{p}\,;\mathfrak{q}$ miteinander, so erhält man

$$\Sigma_1 \Sigma_2 = I + a\,\mathfrak{m}\,;\mathfrak{n} + b\,\mathfrak{p}\,;\mathfrak{q} + ab\,(\mathfrak{m}\,;\mathfrak{n})\,(\mathfrak{p}\,;\mathfrak{q}). \tag{30}$$

Hiernach zerfallen die Produkte zunächst formal in zwei Klassen:

1. Solche, für welche $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{p}$ ist; bei ihnen ist der Faktor $(\mathfrak{m}\,;\mathfrak{n})(\mathfrak{p}\,;\mathfrak{q}) = 0$, die Multiplikation wird also vollzogen, indem man einfach die entsprechenden Seitenglieder der enneadischen Form addiert, z. B.:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right. \cdot \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & a+b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1, \end{matrix}\right.$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right. \cdot \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & a \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix}\right.$$

Die Reihenfolge der Faktoren ist gleichgültig.

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt nebenbei, wenn n ein Exponent ist:

$$(I + a\,\mathfrak{m}\,;\mathfrak{n})^n = I + n\,a\,\mathfrak{m}\,;\mathfrak{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

2. Ist in Gleichung (30) $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$, so ist $(\mathfrak{m}\,;\mathfrak{n})(\mathfrak{n}\,;\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}\,;\mathfrak{q}$. Das Produkt $a\,b$ tritt also in dem Produkt der beiden Schieber auf, wenn bei enneadischer Form die den Parameter enthaltende Zeile des zweiten Schiebers dieselbe Ordnungszahl hat wie die Parameterkolonne des ersten. Wir können immer annehmen, für Σ_1 sei die Achse der x in die Richtung der Schiebung und die Achse der y in die Nullebene gelegt, so daß Σ_1 die Form hat:

$$\Sigma_1 = \begin{cases} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{cases}$$

In $\Sigma_1\,\Sigma_2$ tritt dann $a\,b$ auf, wenn b in der dritten Zeile steht. Es sind aber hier noch die beiden Fälle möglich:

$$\text{a)}\ \Sigma_2 = \begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \text{b)}\ \Sigma_2 = \begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1. \end{cases}$$

Im Fall a) ergibt sich

$$\Sigma_1\,\Sigma_2 = \begin{cases} 1 & a\,b & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1. \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Dies ist nach § 58 ein komplizierter Schieber, und zwar in der diskriminierenden Form.

Im Fall b) dagegen kommt

$$\Sigma_1\,\Sigma_2 = \begin{cases} 1 + a\,b & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1. \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Hier steht rechts ein Diatensor (ist $b = a$, so haben wir den in Gleichung (25) bereits behandelten Fall vor uns). Σ_1 schiebt in der x-Richtung, und seine Nullebene ist die $x\,y$-Ebene. Σ_2 schiebt in der z-Richtung, und seine Nullebene ist die $y\,z$-Ebene. Also: Das Produkt zweier Schiebungen ist eine allgemeine Deformation, wenn ihre Richtungen aufeinander senkrecht stehen und wenn ihre Nullebenen sich in einer Geraden schneiden, die auf beiden Schiebungsrichtungen senkrecht steht. Die Deformation ist rein, wenn beide Schiebungen gleiche Größe haben.

Im anderen Fall läßt sich der Diatensor (33) leicht in eine Drehung und eine reine Deformation zerlegen. Falls $b = -\dfrac{a}{1 + a^2}$, fallen die Hauptachsen der proximal gedachten Deformation in die Koordinatenachsen.

Ferner ist für ihn $S_1 = 3 + a\,b$, $S_{21} = 3 + a\,b$, $S_3 = 1$, und damit wird seine Hamiltonsche Gleichung

$$(t_\xi - 1)\left\{t_\xi^2 - (2 + a\,b)\,t_\xi + 1\right\} = 0.$$

Sie liefert also, wie es der Anschauung entspricht, in der xz-Ebene zwei reelle Achsen.

Nach allem Vorstehenden teilen sich die Kombinationen zweier Schiebungen sachlich in drei Klassen:

1. Die Kombination $(I + a\,\mathfrak{m}\,;\,\mathfrak{n})\,(I + b\,\mathfrak{n}\,;\,\mathfrak{m})$ (die Parameter haben in der enneadischen Form symmetrische Stellung gegen die Diagonale) liefert den zuletzt beschriebenen Diatensor.

2. Die Kombination $(I + a\,\mathfrak{m}\,;\,\mathfrak{n})\,(I + b\,\mathfrak{p}\,;\,\mathfrak{n})$ (in enneadischer Form stehen die beiden Parameter in derselben Kolonne) liefert einen einfachen Schieber.

3. Alle übrigen Kombinationen liefern komplizierte Schieber.

Zweiter Teil.

Additivdiatensoren, Derivative Beziehungen;

Entwicklung des Tensorbegriffes aus Zerlegungs- und Transformationseigenschaften;

Selbständige Tensoren und Diatensoren.

Erster Abschnitt.

Fortsetzung der Untersuchungen über den als symbolischen Faktor gedachten Diatensor.

Erstes Kapitel: Additive Diatensoren.

85. Die Spezies der Diatensoren.

Schon in § 9 wurde auf die Existenz von multiplikativen und additiven Tensoren hingewiesen. Wir dehnen die Unterscheidung auf Diatensoren aus und benutzen für die Bezeichnung der Kategorien, da andere passende Ausdrücke schon vergriffen sind, das Wort „Spezies“.

Wird eine Länge l_1 gedehnt, bis sie zur Länge l_2 geworden ist, so kann man diese Operation auf zwei einfache Arten beschreiben: Erstens, man gibt das Verhältnis $\frac{l_2}{l_1}$ an; zweitens, man gibt die Differenz $l_2 - l_1$ oder den prozentischen Zusatz $\frac{l_2 - l_1}{l_1}$ an. Das erste Verfahren wird man als multiplikative, das zweite als additive Beschreibung zu bezeichnen haben. Entsprechend kann man, wenn ein Vektor $\mathfrak{B}$ eine homogene lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{A}$ ist, die Beziehung zwischen beiden auf zweierlei Weise ausdrücken:

Erstens:

$$\mathfrak{B} = \Phi \mathfrak{A} = \begin{cases} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{cases} \cdot \mathfrak{A}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

zweitens:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \Psi \mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \begin{cases} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{cases} \cdot \mathfrak{A}. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Sowohl Ψ wie Φ ist ein Diatensor; wir haben demnach zwei Spezies von Diatensoren zu unterscheiden, den Verhältnisdiatensor oder multiplikativen Diatensor Φ und den Zusatzdiatensor oder additiven Diatensor Ψ. Daraus, daß $\Phi\mathfrak{A} = \Psi\mathfrak{A} + \mathfrak{A}$ ist, ergibt sich sofort

$$\Phi = \Psi + I. \qquad (3)$$

Der Verhältnisdiatensor ist also immer um einen Einheitstensor größer als der Zusatzdiatensor, welcher dieselbe Operation darstellt. Folglich sind die Seitenglieder der beiden gleich, aber die Diagonalglieder des Verhältnisdiatensors sind immer um 1 größer als diejenigen des Zusatzdiatensors. Man kann also, wenn Ψ durch die Gleichung (2) bestimmt ist, jederzeit schreiben:

$$\Phi = \begin{cases} 1 + p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & 1 + p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & 1 + p_{zz}. \end{cases} \qquad (4)$$

Offenbar ist Ψ symmetrisch, wenn Φ diese Eigenschaft hat und umgekehrt. Handelt es sich also um Tensoren und wird für diesen Fall Φ mit T und Ψ mit Π bezeichnet, so gilt die Gleichung $T = \Pi + I$.

Wenn ein und dieselbe geometrische Operation durch zwei verschiedene analytische Darstellungen beschrieben werden kann, so wollen wir diese letzteren „korrespondierend" nennen und die Korrespondenz andeuten durch das Zeichen $\simeq$. Der Inhalt des Vorstehenden läßt sich damit zusammenfassen in den Satz: Wenn $\Phi \simeq \Psi$ ist, so ist $\Phi = \Psi + I$. Die bisherige Bedeutung des Zeichens $=$ bleibt dabei offenbar erhalten.

Anmerkung. Man könnte das Verfahren, durch welches p_{xx} aus t_{xx} usw. gebildet wird, offenbar fortsetzen und $p_{xx} = q_{xx} + 1$ usw. setzen. Bei dieser Fortsetzung wäre indessen zurzeit nicht viel zu gewinnen. Die beiden hier hervorgehobenen Spezies präsentieren sich aber als die natürlichsten Beschreibungsweisen der an $\mathfrak{A}$ hervorgebrachten Änderung, und dementsprechend präsentieren sich auch die später zu erwähnenden selbständigen oder angeblich selbständigen Tensoren und Diatensoren von selbst in denjenigen Formen, die wir hier multiplikativ und additiv genannt haben. Die etwas nähere Untersuchung der Additivtensoren ist also angezeigt.

86. Algebra der Additivdiatensoren.

I. Transformation. Da die Größe I invariant ist, transformiert sich Ψ genau so wie Φ; leicht mit § **18** und **9** zu verifizieren.

II. Skalare. Wir bilden für Ψ drei Skalare nach derselben Regel, nach welcher die Skalare für Verhältnistensoren gebildet werden, und nennen sie s_1, s_2, s_3. Demgemäß ist

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= p_{xx} + p_{yy} + p_{zz},\\ s_{21} &= p_{yy}p_{zz} + p_{zz}\,p_{xx} + p_{xx}p_{yy} - (p_{yz}^2 + p_{zx}^2 + p_{xy}^2),\\ s_3 &= p_{xx}p_{yy}p_{zz} + 2\,p_{yz}\,p_{zx}\,p_{xy} - (p_{xx}p_{yz}^2 + p_{yy}p_{zx}^2 + p_{zz}p_{xy}^2). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Schreibt man Φ in Form der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen, so sind die drei Skalare von Φ:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= 3 + p_{xx} + p_{yy} + p_{zz},\\ S_{21} &= 3 + 2\,p_{xx} + 2\,p_{yy} + 2\,p_{zz} + p_{yy}p_{zz} + p_{zz}p_{xx} + p_{xx}\,p_{yy}\\ &\qquad - (p_{yz}^2 + p_{zx}^2 + p_{xy}^2),\\ S_3 &= 1 + p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} + p_{yy}p_{zz} + p_{zz}p_{xx} + p_{xx}p_{yy}\\ &\qquad + p_{xx}p_{yy}p_{zz} + 2\,p_{yz}\,p_{zx}\,p_{xy}\\ &\quad - (p_{yz}^2 + p_{zx}^2 + p_{xy}^2) - (p_{xx}p_{yz}^2 + p_{yy}p_{zx}^2 + p_{zz}p_{xy}^2). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Der Vergleich ergibt:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= s_1 + 3,\\ S_{21} &= s_{21} + 2\,s_1 + 3,\\ S_3 &= s_3 + s_{21} + s_1 + 1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

s_1, s_2, s_3 sind offenbar invariant.

III. Beträge der Achsen. Nach Satz I kann man Ψ so transformieren, daß seine Seitenglieder zu Null werden, daß es also auf seine Achsen p_ξ, p_η, p_ζ bezogen wird. Die Beziehung zwischen Φ und Ψ ist offenbar invariant, also folgen für diesen Fall die Gleichungen:

$$t_\xi = p_\xi + 1, \quad t_\eta = p_\eta + 1, \quad t_\zeta = p_\zeta + 1. \;\ldots \quad (4)$$

Diese Gleichungen zusamt der Gleichung $\Phi = \Psi + I$ charakterisieren die Beziehung zwischen Φ und Ψ. Es folgt aus ihnen unter anderem: Wird eine Achse des Verhältnisdiatensors < 1, so wird die entsprechende Achse des korrespondierenden Zusatzdiatensors < 0. Im Zusatzdiatensor drückt sich also die Verkürzung als negative Verlängerung aus.

IV. Richtung der Achsen. Geht man mit den Gliedern von Ψ in die Gleichung (15) des § **19** ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} (p_{xx} - p_\xi)\,\alpha_1 + p_{xy}\alpha_2 + p_{xz}\alpha_3 &= 0,\\ p_{yx}\alpha_1 + (p_{yy} - p_\xi)\,\alpha_2 + p_{yz}\,\alpha_3 &= 0,\\ p_{zx}\,\alpha_1 + p_{zy}\,\alpha_2 + (p_{zz} - p_\xi)\,\alpha_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Da nun $p_{xx} - p_\xi = t_{xx} - t_\xi$ und gleichzeitig $p_{xy} = t_{xy}$ usw., so sind die Gleichungen (5) identisch mit denjenigen für die Winkel, welche t_ξ, t_η, t_ζ mit den Koordinatenachsen machen; d. h. die Achsen von Ψ fallen der Richtung nach mit denjenigen von Φ zusammen. In der Tat sind die Achsen von Φ nichts anderes als die um die Längeneinheit verlängerten Achsen von Ψ.

V. Die Hamiltonsche Gleichung. Es ergibt sich unmittelbar: Die beiden Hamiltonschen Gleichungen

$$t_\xi^3 - S_1 t_\xi^2 + S_{21} t_\xi - S_3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

und

$$p_\xi^3 - s_1 p_\xi^2 + s_{21} p_\xi - s_3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

beziehen sich auf korrespondierende Diatensoren, wenn zwischen den S und den s die Gleichungen (3) bestehen. Dies ist leicht zu verifizieren: Führt man die Gleichungen (3) in (6) ein und setzt $t_\xi = p_\xi + 1$, so erhält man (7).

VI. Multiplikation mit einem Vektor. Die definierende Gleichung (2) des § 85 enthält schon den Satz, daß das Schema der Multiplikation mit einem Vektor für additive Diatensoren dasselbe ist wie für multiplikative.

$$\left.\begin{aligned} \Psi\mathfrak{A} = {} & (p_{xx} A_x + p_{xy} A_y + p_{xz} A_z)\,\mathfrak{i} \\ & + (p_{yx} A_x + p_{yy} A_y + p_{yz} A_z)\,\mathfrak{j} \\ & + (p_{zx} A_x + p_{zy} A_y + p_{zz} A_z)\,\mathfrak{k}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Natürlich bedeutet das formale Produkt $\Psi\mathfrak{A}$ geometrisch etwas wesentlich anderes als $\Phi\mathfrak{A}$. Wird aus einem Vektor $1 \longrightarrow 2$ durch die Multiplikation mit Φ der Vektor $1 \longrightarrow 3$, so ist $2 \longrightarrow 3$ der Vektor $\Psi\mathfrak{A}$.

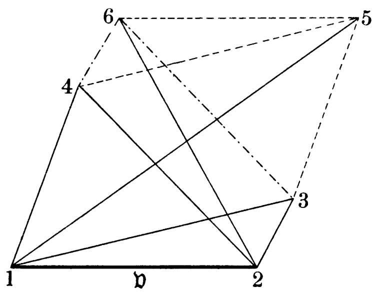
VII. Addition. Aus der Linearität der Gleichung (8) ergibt sich, daß für additive Tensoren dasselbe Additionsgesetz gilt wie für multiplikative. Man addiert sie, indem man ihre entsprechenden Glieder einzeln addiert.

Bezüglich der geometrischen Bedeutung besteht wieder ein dem Vorigen entsprechender Unterschied, der der Deutlichkeit wegen durchkonstruiert werden möge.

In Fig. 4 sei 1 2 ein beliebig gegebener Vektor $\mathfrak{v}$. Es seien Φ und Ψ zwei korrespondierende Diatensoren, Φ' und Ψ' desgleichen. Multipliziert man $\mathfrak{v}$ mit Φ, so erhält man irgend einen anderen Vektor 1 3, multipliziert man $\mathfrak{v}$ mit Φ', so erhält man einen dritten Vektor 1 4, also ist $(\Phi + \Phi')\,\mathfrak{v}$ die vektorielle Summe 1 3 + 1 4, d. i. die Diagonale 1 5 des aus 1 3 und aus

1 4 gebildeten Parallelogramms. Stellt man nun die gleiche Operation durch die Additivtensoren Ψ und Ψ' dar, so ist $\Psi\mathfrak{v}$ gleich dem Vektor 2 3 und $\Psi'\mathfrak{v}$ gleich dem Vektor 2 4. Die geometrische Addition dieser beiden Vektoren ergibt die Diagonale 2 6 des aus 2 3 und aus 2 4 gebildeten Parallelogramms. Die entsprechenden Konstruktionen für die im Nächstfolgenden behandelten Operationen bleiben dem Leser überlassen. Hervorzuheben ist aber noch folgendes:

Fig. 4.



Ist

$$\Phi \simeq \Psi \quad \text{und} \quad \Phi' \simeq \Psi',$$

so ist

$$\Phi + \Phi' = \Psi + \Psi' + 2\,I \simeq \Psi + \Psi' + I.$$

Zunächst liegt hierin der Beweis, daß die Strecke 6 5 der Fig. 4 gleich und parallel 1 2 ist. Ferner aber ersieht man, daß die Korrespondenz durch die Addition zerstört wird. Es sei eine Anzahl von multiplikativen Diatensoren nebst den korrespondierenden Additivdiatensoren gegeben, und es soll, beiderseits entsprechend, eine Anzahl m derselben zueinander addiert, eine andere Anzahl n von der Summe abgezogen werden. Die zu addierenden mögen Φ_a, die zu subtrahierenden Φ_s markiert sein. Dann ergibt sich, wie leicht zu sehen, aus dem Vorstehenden:

$$\sum \Phi_a - \sum \Phi_s \simeq \sum \Psi_a - \sum \Psi_s + (m - n - 1)\,I. \quad . \quad (9)$$

VIII. Multiplikation. Aus der Grundbeziehung $\Phi = \Psi + I$ folgt, wenn Φ und Φ' zwei Diatensoren,

$$\Phi\Phi' = \Psi\Psi' + \Psi I + \Psi' I + I.$$

Stellt man die Ψ und Φ in enneadischer Form her, so findet sich leicht, daß diese Gleichung dann und nur dann erfüllt ist, wenn man für additive Diatensoren dasselbe Schema der Multiplikation annimmt wie für die multiplikativen. Demnach werden auch die Additivdiatensoren nach dem Schema der Multiplikation von Determinanten miteinander multipliziert, und es sind dabei die Zeilen des ersten mit den Kolonnen des zweiten zu kombinieren.

Selbstverständlich gilt auch hier die Bedingung, daß die beiden Faktoren in dem gleichen Koordinatensystem gegeben sein müssen.

IX. Faktorenzerlegung. Daraus folgt ohne weiteres, daß die für die Faktorenzerlegung im ersten Teil aufgestellten Sätze auch für Additivdiatensoren gelten und damit auch, soweit es sich um analytische Darstellungen handelt, die sämtlichen Sätze der §§ **43** bis **53**. Auf die geometrische Bedeutung derselben wird nach Bedürfnis zurückzukommen sein.

X. Additive Fundamentalzerlegung. Aus dem Additionsgesetz folgt, daß Ψ sich wie Φ stets additiv in einen symmetrischen Teil $\frac{\Psi + \Psi_c}{2}$ und einen antimetrischen $\frac{\Psi - \Psi_c}{2}$ zerlegen läßt. Auch sieht man sofort, daß

$$\frac{\Psi + \Psi_c}{2} = \frac{\Phi + \Phi_c}{2} - I, \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

$$\frac{\Psi - \Psi_c}{2} = \frac{\Phi - \Phi_c}{2}. \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

„Bei Zerlegung in Tensor und Antitensor werden die Tensoren von Φ und Ψ korrespondierend, die Antitensoren gleich.“

87. Dyadische Form des additiven Tensors und Diatensors.

Überträgt man den auf seine Hauptachsen bezogenen Tensor T in dyadische Normalform, so erhält man:

$$T = t_\xi \mathfrak{i}\,;\mathfrak{i} + t_\eta \mathfrak{j}\,;\mathfrak{j} + t_\zeta \mathfrak{k}\,;\mathfrak{k}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

und da $t_\xi = p_\xi + 1$ usw., so ist die Gleichung $\Pi = T - I$ augenscheinlich erfüllt, wenn man setzt:

$$\Pi = p_\xi \mathfrak{i}\,;\mathfrak{i} + p_\eta \mathfrak{j}\,;\mathfrak{j} + p_\zeta \mathfrak{k}\,;\mathfrak{k}. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Handelt es sich um Diatensoren, so sei Φ gleichfalls in der Normalform gegeben:

$$\Phi = t_1 \mathfrak{i}\,;\mathfrak{i}' + t_2 \mathfrak{j}\,;\mathfrak{j}' + t_3 \mathfrak{k}\,;\mathfrak{k}', \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

und dann wird offenbar

$$\Psi = (p_1 + 1)\mathfrak{i}\,;\mathfrak{i}' + (p_2 + 1)\mathfrak{j}\,;\mathfrak{j}' + (p_3 + 1)\mathfrak{k}\,;\mathfrak{k}' - I. \quad . \quad (4)$$

Dieser Ausdruck läßt sich nicht wesentlich vereinfachen; die Dyaden sind eben wesentlich multiplikativ gedacht und eignen sich daher weniger zu einer additiven Darstellung, solange nicht die Symmetrie zur Vereinfachung beiträgt.

88. Ellipsoide.

I. Das „Ellipsoid" eines Additivtensors. Zu irgend einem Additivtensor Π läßt sich selbstverständlich eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung konstruieren, welche der des § **3** vollständig analog ist. Sie hat die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} 2\varDelta &= p_{xx}x^2 + p_{yy}y^2 + p_{zz}z^2 \\ &+ 2p_{yz}yz + 2p_{zx}zx + 2p_{xy}xy = \pm 1, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

und die im § **3** gegebene Betrachtung läßt sich für diesen Kegelschnitt wörtlich wiederholen. Es ergibt sich:

Legt man einen gegebenen Vektor $\mathfrak{v}$ mit seinem Anfangspunkt in den Mittelpunkt 0 der Fläche $2\varDelta = 0$, und schneidet $\mathfrak{v}$ (eventuell verlängert) die Fläche im Punkt x, y, z, so fällt das Tensorvektorprodukt $\Pi\mathfrak{v}$ in die Richtung des Perpendikels q, welches von 0 aus auf die in x, y, z an die Fläche gelegte Tangentialebene gefällt werden kann, und der Betrag von $\Pi\mathfrak{v}$ ist bestimmt durch die Gleichung:

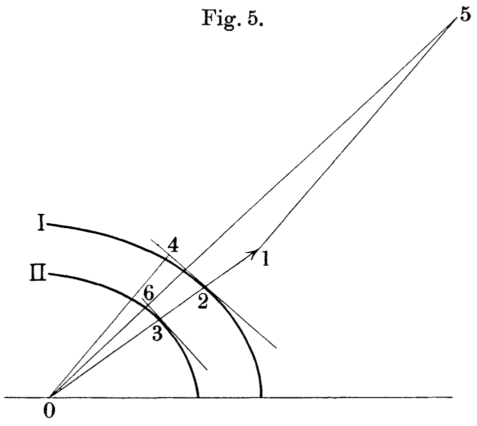
$$\text{Betrag } \Pi\mathfrak{v} : v = \frac{1}{q} : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Die Halbachsen des Ellipsoids haben offenbar die Längen

$$\frac{1}{\sqrt{p_\xi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{p_\eta}}, \quad \frac{1}{\sqrt{p_\zeta}}.$$

Die Bedeutung von $\Pi\mathfrak{v}$ ist natürlich im Auge zu behalten.

Fig. 5.



Mit Rücksicht auf dieselbe läßt sich mit Hilfe der beiden „Ellipsoide" von T und Π eine Konstruktion für die Produkte $T\mathfrak{v}$ und $\Pi\mathfrak{v}$ angeben.

Man denke sich zwei Ellipsoide I und II konstruiert, das erste mit den Hauptachsen

$$\frac{1}{\sqrt{p_\xi}}, \; \frac{1}{\sqrt{p_\eta}} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{p_\zeta}},$$

das zweite mit den Hauptachsen

$$\frac{1}{\sqrt{p_\xi+1}}, \; \frac{1}{\sqrt{p_\eta+1}} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{p_\zeta+1}}.$$

Der gegebene Vektor $\mathfrak{v}$ sei durch 0 1 dargestellt, und er schneide das Ellipsoid I im Punkt 2, das Ellipsoid II im Punkt 3. Legt man in 2 eine berührende Ebene an das Ellipsoid I, und ist 0 4 das von 0 aus auf diese Ebene gefällte Perpendikel, so wissen wir, daß 0 4 die Richtung des Zusatzvektors $\Pi\mathfrak{v}$ ist. Legt man also eine Parallele zu 0 4 an 1 an und nennt sie 1 5, so muß der Endpunkt von $T\mathfrak{v}$ auf dieser Geraden liegen. $T\mathfrak{v}$ hat aber auch die Richtung des Perpendikels auf diejenige Berührungsebene, welche im Punkt 3 an das Ellipsoid II gelegt werden kann. Ist 0 6 dieses Perpendikel, so muß die Verlängerung von 0 6 die Gerade 1 5 schneiden, und wenn 5 der Durchschnittspunkt ist, so ist 0 5 das Produkt $T\mathfrak{v}$ und 1 5 ist $\Pi\mathfrak{v}$.

II. Dehnungszusatzellipsoid. Die Transformation mit einem Additivdiatensor verwandelt offenbar, ganz ebenso, wie es beim Verhältnistensor der Fall ist, eine Einheitskugel in ein Ellipsoid. Wir nennen dieses das Dehnungszusatzellipsoid. Addiert man zu jedem einzelnen Radius der Einheitskugel den entsprechenden Semidiameter des Dehnungszusatzellipsoids, so bilden die Endpunkte der so erhaltenen Vektorensummen das Dehnungsellipsoid des mit Ψ korrespondierenden Φ.

89. Kriterien.

Ergibt sich aus physikalischen Eigenschaften oder Kombinationen ein Diatensor, so kann die Frage von Wichtigkeit sein, zu welcher Spezies er gehört. Das Verhalten des fraglichen Diatensors bei Addition und Multiplikation kann offenbar kein Kriterium hierfür ergeben, da die beiden Spezies sich darin nicht unterscheiden; wohl aber kann die Schlußbemerkung des § **86**, III dazu dienen: Ändert man die physikalische Kombination, aus der der Diatensor hervorgegangen ist, so ab, daß ihre Wirkung sich in das Gegenteil verkehrt (wie z. B. Verlängerung in Verkürzung), so werden die Konstituenten des entsprechenden Diatensors entweder reziproke oder negative Werte annehmen. Im ersteren Fall gehört er zur multiplikativen, im zweiten zur additiven Spezies.

Zweites Kapitel: **Derivative Operationen.**

90. Operationen am ganzen Diatensor.

Bisher wurden die Diatensoren stets als konstant vorausgesetzt. Man kann aber auch annehmen, der betrachtete Diatensor Φ sei im Raum als Funktion des Ortes gegeben. Der Raum, in welchem er bestimmt ist, heißt dann ein Diatensorfeld. Φ sei gegeben in der Form:

$$\Phi = \begin{cases} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z, \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo die a, b, c nunmehr als Funktionen des Ortes zu denken sind. Wir bilden das Diatensorvektorprodukt $\Phi\mathfrak{v}$ und setzen definitorisch fest, daß dieses Produkt nach einem Skalar t ebenso differenziiert werden soll wie ein gewöhnliches Produkt, d. h. es soll sein:

$$\frac{d(\Phi\mathfrak{v})}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}\mathfrak{v} + \Phi\frac{d\mathfrak{v}}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Offenbar folgt:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \begin{cases} \dfrac{da_x}{dt} & \dfrac{da_y}{dt} & \dfrac{da_z}{dt} \\[2ex] \dfrac{db_x}{dt} & \dfrac{db_y}{dt} & \dfrac{db_z}{dt} \\[2ex] \dfrac{dc_x}{dt} & \dfrac{dc_y}{dt} & \dfrac{dc_z}{dt}. \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Man differentiiert Φ nach einem Skalar, indem man seine Glieder einzeln differentiiert. Durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens ergibt sich:

$$\frac{d^n\Phi}{dt^n} = \begin{cases} \dfrac{d^n a_x}{dt^n} & \dfrac{d^n a_y}{dt^n} \\[2ex] \dfrac{d^n b_x}{dt^n} & \text{usw.} \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Ist der Skalar t von den Koordinaten unabhängig, so leuchtet ein, daß $\dfrac{da_x}{dt}$, $\dfrac{da_y}{dt}$ usw. sich ebenso transformieren werden wie a_x, a usw. In diesem Fall sind also die Differentialquotienten von Φ echte Diatensoren. Wenn aber t von den Koordinaten abhängt, so transformieren sich die Glieder von $\frac{d\Phi}{dt}$ offenbar nicht mehr wie diejenigen von Φ. Die Differentialquotienten sind also dann nicht mehr Diatensoren. Aber sie teilen mit den eigentlichen Diatensoren zwei grundlegende Eigenschaften: Erstens die Form der Multiplikation mit einem Vektor, und zweitens die Linearität in bezug auf die Komponentenbeträge dieses Vektors. Infolgedessen gilt für sie auch dasselbe Additionsgesetz wie für die eigentlichen Diatensoren. Sie können daher mehrfach brauchbar sein, und es wird zweckmäßig sein, sie durch eine besondere Benennung, etwa Formaldiatensoren, zu charakterisieren.

Es liegt auf der Hand, daß ein symmetrisches Φ auch symmetrische Differentialquotienten liefert, und daß eine Zerlegung der Differentialquotienten stattfinden kann, welche der fundamentalen Additivzerlegung der Diatensoren entspricht:

Ist

$$\Phi = T + \tau, \quad \text{so ist} \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{d\tau}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Nach Gleichung (3) lassen sich die Größen $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ in Form von drei Formaldiatensoren darstellen. Man kann auf diese den Hamiltonschen Operator anwenden und folgerichtig definieren:

$$\nabla \Phi = \mathfrak{i}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Man denke sich die 27 Glieder dieses Ausdruckes hingeschrieben und je drei zusammengehörige, wie $\mathfrak{i}\frac{\partial a_x}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial a_x}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial a_x}{\partial z}$ zusammengefaßt, so erhält man:

$$\nabla \Phi = \begin{cases} \nabla a_x & \nabla a_y & \nabla a_z \\ \nabla b_x & \nabla b_y & \nabla b_z \\ \nabla c_x & \nabla c_y & \nabla c_z. \end{cases} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Läßt man Φ zu einem skalaren Faktor degenerieren, indem man die Seitenglieder $= 0$ und die Diagonalglieder sämtlich $= a$ setzt, so wird aus (7):

$$\nabla \Phi = \begin{cases} \nabla a & 0 & 0 \\ 0 & \nabla a & 0 \\ 0 & 0 & \nabla a, \end{cases} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

also nicht ein einfacher Gradient, sondern ein Formaltensor, dessen Diagonalglieder Gradienten sind. $\nabla\boldsymbol{\Phi}$ kann also nicht wohl als $\mathfrak{grad}\,\boldsymbol{\Phi}$ bezeichnet werden. Vorläufig erscheint es nicht geboten, ihm einen besonderen Namen zu geben.

Man überzeugt sich ferner durch einfache Nachrechnung, daß eine zur Gleichung (2) analoge Beziehung

$$\nabla(\boldsymbol{\Phi}\mathfrak{v}) = (\nabla\boldsymbol{\Phi})\mathfrak{v} + \boldsymbol{\Phi}(\nabla\mathfrak{v})$$

nicht existiert.

Die Operation ∇ läßt sich wiederholen und man erhält:

$$\nabla^2\boldsymbol{\Phi} = \begin{cases} \nabla^2 a_x & \nabla^2 a_y & \nabla^2 a_z \\ \nabla^2 b_x & \nabla^2 b_y & \nabla^2 b_z \\ \nabla^2 c_x & \nabla^2 c_y & \nabla^2 c_z. \end{cases} \qquad \ldots\ldots \quad (9)$$

Da jedes einzelne Glied auf der rechten Seite von Gleichung (8) ein Skalar ist, gilt in bezug auf jedes einzelne der Gausssche Satz: Ist $dx\,dy\,dz$ das Element eines Körpers K, und $d\mathfrak{f}$ das Element seiner Oberfläche, so ist

$$\iiint \nabla^2 t_{\mu\nu}\,dx\,dy\,dz = \iint (\nabla t_{\mu\nu}\,d\mathfrak{f}). \quad \ldots\ldots (10)$$

Das Flächenintegral auf der rechten Seite dieser Gleichung, dessen Elemente skalare Produkte sind, kann bekanntlich ersetzt werden durch $\iint \nabla_n t_{\mu\nu}\,d\sigma$, wo $d\sigma$ der skalare Wert von $d\mathfrak{f}$, und $\nabla_n t_{\mu\nu}$ die zu $d\sigma$ senkrecht stehende Komponente von $\nabla t_{\mu\nu}$ ist.

Man kann die neun Gleichungen (10) additiv zusammenfassen, erhält aber dann als Integranden nicht etwa links $\nabla^2\boldsymbol{\Phi}$, und rechts $\nabla\boldsymbol{\Phi}$, sondern links die Summe

$$\nabla^2 a_x + \nabla^2 a_y + \nabla^2 a_z + \nabla^2 b_x \text{ usw.,}$$

und rechts eine entsprechende Summe. Die Summe aus den ∇^2 wollen wir $\sum \nabla^2 t$ nennen, und die entsprechende aus den ∇a_x usw. heiße $\sum \nabla t$. Dann ergibt die Addition:

$$\iiint \sum \nabla^2 t\,dx\,dy\,dz = \iint \sum \nabla t\,d\sigma. \quad \ldots\ldots (11)$$

Im vorstehenden ist als bekannt vorausgesetzt, daß die Integration links über das ganze Volumen und rechts über die ganze Oberfläche von K auszudehnen ist. Die Normale von $d\sigma$ ist nach außen positiv gerechnet; bei denjenigen Autoren, welche sie nach innen positiv rechnen, erscheint auf einer Seite der Gleichung (10) usw. ein Minuszeichen. Diese Bemerkungen gelten auch für das Folgende mit.

91. Erweiterungen des Gaussschen Satzes.

I. Der Gausssche Satz beruht wesentlich darauf, daß ein skalarer Ausdruck von der Form $\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}$ nach der Multiplikation mit einem Körperelement $dx\, dy\, dz$ sofort drei teilweise Integrationen nach den Koordinatenrichtungen zuläßt. Um ihn also für die Anwendung auf Diatensoren zu erweitern, stellt man aus den Gliedern von Φ Kombinationen von der Art des vorstehenden Ausdruckes her. Man bildet zunächst einen Vektor $\mathfrak{G}$, der definiert ist durch die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G} = & \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\mathfrak{i} \\ & + \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right)\mathfrak{j} \\ & + \left(\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}\right)\mathfrak{k}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Läßt man nun Φ, wie oben, zu einem skalaren Faktor a degenerieren, so wird $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{grad}\, a$. $\mathfrak{G}$ ist also folgerichtig, wie das R. H. Weber getan hat, als $\mathfrak{grad}\, \Phi$ zu bezeichnen. Der Vektor $\mathfrak{G}$ hat eine vom Koordinatensystem unabhängige geometrische Bedeutung. Der Beweis für diese Behauptung ergibt sich einfach, wenn man vorübergehend die konventionelle Festsetzung trifft, daß $a_x \frac{\partial}{\partial x}$ für $\frac{\partial a_x}{\partial x}$, $a_y \frac{\partial}{\partial y}$ für $\frac{\partial a_y}{\partial y}$ usw. in jedem beliebigen Koordinatensystem geschrieben werden soll. Dann ist formal $\mathfrak{G} = \Phi \nabla$, und da sowohl Φ wie ∇ eine vom Koordinatensystem unabhängige geometrische Bedeutung hat, muß $\mathfrak{G}$ dieselbe Eigenschaft besitzen.

Man sieht, daß die drei Klammern auf der rechten Seite von Gleichung (1) nichts anderes sind als die Divergenzen der drei Zeilenvektoren; die Gleichung kann also kürzer geschrieben werden:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{i}\, div\, \mathfrak{a} + \mathfrak{j}\, div\, \mathfrak{b} + \mathfrak{k}\, div\, \mathfrak{c}. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Wir bilden noch die skalare Summe der Divergenzen aus dieser Gleichung und nennen sie $div\, \Phi$, definieren also $div\, \Phi$ durch die Gleichung

$$div\, \Phi = div\, \mathfrak{a} + div\, \mathfrak{b} + div\, \mathfrak{c}. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Wir wählen nun einen Einheitsvektor $\mathfrak{1}_\mathfrak{n}$ der Richtung $\mathfrak{n}$, die mit den Koordinatenachsen die drei Richtungskosinus α, β, γ macht. Es ist dann

$$\mathfrak{1}_\mathfrak{n} = \alpha\mathfrak{i} + \beta\mathfrak{j} + \gamma\mathfrak{k}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

und wenn man $\mathfrak{1}_\mathfrak{n}$ mit Φ multipliziert, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \Phi\,\mathfrak{1}_\mathfrak{n} = & (\alpha a_x + \beta a_y + \gamma a_z)\mathfrak{i} \\ & + (\alpha b_x + \beta b_y + \gamma b_z)\mathfrak{j} \\ & + (\alpha c_x + \beta c_y + \gamma c_z)\mathfrak{k}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Statt $\Phi\,\mathfrak{1}_\mathfrak{n}$ schreibt man kürzer $\Phi_\mathfrak{n}$, wo die deutsch geschriebene Marke daran erinnert, daß $\Phi_\mathfrak{n}$ ein Vektor ist. Auch hier ist zwischen Vektoren und Beträgen genau zu unterscheiden. Die drei Komponenten von $\Phi_\mathfrak{n}$ heißen $\Phi_{\mathfrak{n}x}$, $\Phi_{\mathfrak{n}y}$, $\Phi_{\mathfrak{n}z}$; ihre Beträge seien Φ_{nx}, Φ_{ny}, Φ_{nz}, so daß also

$$\Phi_{nx} = \alpha a_x + \beta a_y + \gamma a_z \text{ usw.}, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

und analog dem Obigen definieren wir das Zeichen „Φ_n schlechthin" durch die skalare Gleichung

$$\Phi_n = \Phi_{nx} + \Phi_{ny} + \Phi_{nz}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Es gilt nun für jeden der drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Gausssche Satz; ist K ein Körper, σ seine Oberfläche, n die nach außen positiv genommene Normale der letzteren, so ist

$$\left.\begin{aligned} \iiint div\,\mathfrak{a}\,dx\,dy\,dz &= \iint a_n\,d\sigma, \\ \iiint div\,\mathfrak{b}\,dx\,dy\,dz &= \iint b_n\,d\sigma, \\ \iiint div\,\mathfrak{c}\,dx\,dy\,dz &= \iint c_n\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Wenden wir nun die Gleichung (4) auf unsere Normale an, so ist $a_n = \alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x = \Phi_{nx}$ nach Gleichung (6) usw., und damit werden die vorstehenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \iiint div\,\mathfrak{a}\,dx\,dy\,dz &= \iint \Phi_{nx}\,d\sigma, \\ \iiint div\,\mathfrak{b}\,dx\,dy\,dz &= \iint \Phi_{ny}\,d\sigma, \\ \iiint div\,\mathfrak{c}\,dx\,dy\,dz &= \iint \Phi_{nz}\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Diese drei Gleichungen kann man auf zweierlei Art addieren, zunächst skalar. Auf der linken Seite stehen als Integranden richtungslose Divergenzen, auf der rechten Seite Skalare, die für jedes Element $d\sigma$ als Abschnitte auf derselben Richtungslinie n zu denken sind. Die Addition ergibt

$$\iiint div\, \Phi\, dx\, dy\, dz = \iint \Phi_n\, d\sigma \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

und damit eine Erweiterung des Gaussschen Satzes auf Diatensoren, die ganz im Gebiete der skalaren Integration bleibt. Es haftet ihr aber die Tatsache an, daß die in ihr auftretenden Integrale nicht von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig sind; denn da $\mathfrak{G}$ und $\Phi_\mathfrak{n}$ diese Eigenschaft haben, können die Größen, die man erhält, wenn man ihre Komponenten der Reihe nach durch $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ dividiert, nicht invariant sein. Dasselbe ergibt sich direkt daraus, daß die Zeilenvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ im allgemeinen vom Koordinatensystem abhängen.

Um zu einer Gleichung zu gelangen, deren Bestandteile invariant sind, multiplizieren wir die erste Gleichung (9) mit $\mathfrak{i}$, die zweite mit $\mathfrak{j}$, die dritte mit $\mathfrak{k}$ und addieren, dann ergibt sich sofort:

$$\iiint \mathfrak{G}\, dx\, dy\, dz = \iint \Phi_\mathfrak{n}\, d\sigma, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

wobei aber zu beachten ist, daß diese Gleichung vektoriell ist und drei skalare Gleichungen repräsentiert, die nichts anderes sind als die Gleichungen (9).

Bezüglich der Bezeichnungen bestehen in der Literatur Widersprüche. Der Vektor $\mathfrak{G}$ heißt nach Gans $div\,\Phi$ und bei M. Laue $\mathfrak{div}\,\Phi$, letzteres im Anschluß an eine von A. Sommerfeld in die vierdimensionale Geometrie eingeführte Bezeichnung. Diese wird nicht berührt, wenn man in drei Dimensionen die Benennung $\mathfrak{grad}\,\Phi$ für $\mathfrak{G}$ benutzt. Hier wird also vorgeschlagen, dem $div\,\Phi$ diejenige Bedeutung zu belassen, die es in Gleichung (3) hat, und Gleichung (11) zu schreiben:

$$\iiint \mathfrak{grad}\,\Phi\, dx\, dy\, dz = \iint \Phi_\mathfrak{n}\, d\sigma. \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

II. Wir wählen ferner irgend einen festen Anfangspunkt 0, nennen $\mathfrak{r}$ den Fahrstrahl, der von 0 aus nach dem Element $dx\, dy\, dz$ unseres Körpers K gezogen wird, und bilden das Produkt $[\mathfrak{r}\,\mathfrak{G}]$. Die x-Komponente von $[\mathfrak{r}\,\mathfrak{G}]$ ist

$$[\mathfrak{r}\,\mathfrak{G}]_x = (y\, G_z - z\, G_y)\,\mathfrak{i}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

und wenn wir konventionell festsetzen, daß der Betrag dieser x-Komponente $[r\, G]_x$ geschrieben werden soll, so ist

$$[rG]_x = y\left(\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{dz}\right) - z\left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) \cdot \cdot \quad (14)$$

Wir multiplizieren diese Größe mit dem Körperelement $dx\,dy\,dz$ und integrieren über K. In dem so entstehenden Ausdruck

$$\iiint\left\{y\left(\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}\right) - z\left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right)\right\} dx\,dy\,dz$$

ist y für die Integration nach x und z konstant, und z ist konstant für die Integration nach x und y. Die beiden Posten $y\frac{\partial c_y}{\partial y}$ und $z\frac{\partial b_z}{\partial z}$ sind durch partielle Integration zu erledigen und liefern

$$\int y\frac{\partial c_y}{\partial y} = y c_y - \int c_y\,dy, \qquad \int z\frac{\partial b_z}{\partial z} = z b_z - \int b_z\,dz. \quad . \quad (15)$$

Man erhält also durch Ausführung der ganzen Integration:

$$\left.\begin{aligned} &\iint \{y_2 c_{x2} - y_1 c_{x1} - (z_2 b_{x2} - z_1 b_{x1})\}\, dy\,dz \\ &+ \iint \{y_2 c_{y2} - y_1 c_{y1} - (z_2 b_{y2} - z_1 b_{y1})\}\, dz\,dx \\ &+ \iint \{y_2 c_{z2} - y_1 c_{z1} - (z_2 b_{z2} - z_1 b_{z1})\}\, dx\,dy \\ &\qquad - \iiint (c_y - b_z)\, dx\,dy\,dz, \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \quad (16)$$

wo die Marken 1 und 2 sich auf die Ein- und Austrittsstelle des Elementarbalkens beziehen, über den sich die Integration erstreckt.

Nach bekannter Schlußweise ist nun $dy\,dz$ an der Austrittsstelle $= \alpha\,d\sigma$, an der Eintrittsstelle $= -\alpha\,d\sigma$; also ist für die Summierung über die ganze Oberfläche $(y_2 c_{x2} - y_1 c_{x1}) \cdot dy\,dz$ gleichwertig mit $\alpha y c_x d\sigma$ usw. und damit wird Gleichung (14)

$$\left.\begin{aligned} \iiint [rG]_x\, dx\,dy\,dz &= -\iiint (c_y - b_z)\, dx\,dy\,dz \\ + \iint \{y(\alpha c_x + \beta c_y + \gamma c_z) &- z(\alpha b_x + \beta b_y + \gamma b_z)\}\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \cdot \quad (17)$$

Der zweite Integrand rechts aber ist nach Gleichung (5) gleich dem Betrage der x-Komponente von $[\mathfrak{r}\,\boldsymbol{\Phi}_{\mathfrak{n}}]$. Schreibt man also diesen Betrag nach der gleichen Konvention wie oben $[r\,\Phi_n]_x$, so folgt:

$$\iiint [r\,G]_x\, dx\,dy\,dz = \iint [r\,\Phi_n]_x\, d\sigma - \iiint (c_y - b_z)\, dx\,dy\,dz. \quad . \quad (18)$$

Ist Φ symmetrisch, so ist $c_y = b_z$ und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$\iiint [r\,G]_x\,dx\,dy\,dz = \iint [r\,\Phi_n]_x\,d\sigma. \quad \ldots \quad (19)$$

Für $[r\,G]_y$ und $[r\,G]_z$ existieren die den Gleichungen (18) und (19) entsprechenden Formeln. Man kann nun hier, ganz wie oben, die drei Gleichungen sowohl skalar wie vektoriell addieren.

Im ersten Fall ergibt die skalare Addition links:

$$[r\,G]_x + [r\,G]_y + [r\,G]_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ div\,\mathfrak{a} & div\,\mathfrak{b} & div\,\mathfrak{c} \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (20)$$

und rechts:

$$[r\,\Phi_n]_x + [r\,\Phi_n]_y + [r\,\Phi_n]_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ \Phi_{nx} & \Phi_{ny} & \Phi_{nz} \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (21)$$

Für die beiden Determinanten, welche hier auftreten, ist in den obigen Definitionen noch kein Ausdruck enthalten. Will man solche nach Analogie der Gleichungen (3) und (7) bilden, so wäre für die erste zu schreiben $[r, div\,\Phi]$ und für die zweite $[r, \Phi_n]$. Da man sich bei der Benutzung immer an die sehr spezialisierte Bedeutung dieser Ausdrücke erinnern muß, schreiben wir, ohne diese Abkürzungen anzuwenden:

$$\left.\begin{aligned} &\iiint \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ div\,\mathfrak{a} & div\,\mathfrak{b} & div\,\mathfrak{c} \end{vmatrix} dx\,dy\,dz \\ = \iint \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ \Phi_{nx} & \Phi_{ny} & \Phi_{nz} \end{vmatrix} d\sigma - \iiint &\{(c_y - b_z) + (a_z - c_x) \\ &\quad + (b_x - a_y)\}\,dx\,dy\,dz, \end{aligned}\right\} (22)$$

und wenn T ein Tensor ist, so fällt das zweite Integral auf der rechten Seite fort. Gleichung (22) ist rein skalar, hat aber wieder die Eigenschaft, daß die geometrische Bedeutung ihrer beiden Seiten von der Wahl des Koordinatensystems abhängt.

Zweitens kann man die drei Gleichungen (19) der Reihe nach mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ multiplizieren und erhält dann durch Addition:

$$\mathfrak{i}\,[r\,G]_x + \mathfrak{j}\,[r\,G]_y + \mathfrak{k}\,[r\,G]_z = [\mathfrak{r}\,\mathfrak{G}], \quad \ldots \quad (23)$$

$$\mathfrak{i}\,[r\,\Phi_n]_x + \mathfrak{j}\,[r\,\Phi_n]_y + \mathfrak{k}\,[r\,\Phi_n]_z = [\mathfrak{r}\,\Phi_{\mathfrak{n}}]. \quad \ldots \quad (24)$$

Demnach ergibt sich als Schlußresultat:

$$\left.\begin{aligned} \iiint [\mathfrak{r}, \mathfrak{grad}\,\Phi]\,dx\,dy\,dz &= \iint [\mathfrak{r}\,\Phi_{\mathfrak{n}}]\,d\sigma \\ - \iiint \{c_y - b_z + a_z - c_x + b_x - a_y\}\,dx\,dy\,dz, & \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (25)$$

eine vektorielle Gleichung, welche die drei skalaren Gleichungen (19) repräsentiert.

Ist Φ ein Tensor, so verschwindet das zweite Integral auf der rechten Seite von Gleichung (25); es bleibt:

$$\iiint [\mathfrak{r}, \mathfrak{grad}\,T]\,dx\,dy\,dz = \iint [\mathfrak{r}\,T_{\mathfrak{n}}]\,d\sigma. \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Da der Integrand rechts ein Vektorprodukt ist, ist seine Invarianz selbstverständlich.

Drittes Kapitel: **Vektorfelder und Diatensoren.**

92. Bildung von Diatensoren aus den Differentialquotienten eines Vektors.

Gegeben seien zwei Koordinatensysteme der x, y, z und ξ, η, ζ mit dem Kosinusschema:

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3.

Für partielle Ableitung nach den Koordinatenachsen gelten bekanntlich die Grundsätze der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi} \text{ usw.,}$$

und es ist, wenn in jedem der folgenden Differentialquotienten der Divisor als das unabhängige Inkrement angesehen wird:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{d\xi}{dx} = \alpha_1, \qquad \frac{dx}{d\eta} = \frac{d\eta}{dx} = \beta_1 \text{ usw.}$$

Man kann also für die Differentiationen ein Schema aufstellen, welches mit dem für die Richtungskosinus übereinstimmt und in ähnlicher Weise zu benutzen ist. Ist nun ein Vektor $\mathfrak{v}$ gegeben, so bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_\xi &= \alpha_1 v_x + \alpha_2 v_y + \alpha_3 v_z, \\ v_\eta &= \beta_1 v_x + \beta_2 v_y + \beta_3 v_z, \\ v_\zeta &= \gamma_1 v_x + \gamma_2 v_y + \gamma_3 v_z. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

Differentiiert man die erste von diesen etwa nach ξ, so ergibt sich:

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} = \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\right)(\alpha_1 v_x + \alpha_2 v_y + \alpha_3 v_z),$$

also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} &= \alpha_1^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \alpha_2^2 \frac{\partial v_y}{\partial y} + \alpha_3^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &+ \alpha_2 \alpha_3 \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \alpha_3 \alpha_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} (2)$$

Differentiiert man dieselbe Gleichung nach η, so ergibt sich auf die gleiche Weise:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} &= \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \alpha_2 \beta_2 \frac{\partial v_y}{\partial y} + \alpha_3 \beta_3 \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &+ \alpha_2 \beta_3 \frac{\partial v_y}{\partial z} + \alpha_3 \beta_2 \frac{\partial v_z}{\partial y} + \alpha_3 \beta_1 \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ &+ \alpha_1 \beta_3 \frac{\partial v_x}{\partial z} + \alpha_1 \beta_2 \frac{\partial v_x}{\partial y} + \alpha_2 \beta_1 \frac{\partial v_y}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3)$$

Die Koeffizienten in den Gleichungen (2) und (3) sind aber, wenn man λ, μ, ν statt α, β, γ schreibt, genau die Koeffizienten aus den Transformationsformeln des § **18**, und es folgt zyklisch, daß auch für die übrigen Differentiationen, welche man an den Gleichungen (1) vornehmen kann, diese Übereinstimmung der Koeffizienten mit denjenigen der Transformationsformeln besteht. Also ergibt sich:

Satz I. Ist $\mathfrak{v}$ ein beliebiger Vektor und sind v_x, v_y, v_z seine Komponentenbeträge in einem beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystem, so bilden die neun Größen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_z}{\partial x} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{cases}$$

in dieser wie in der konjugierten Anordnung einen Diatensor.

Denn sie besitzen die Transformationseigenschaften, welche den Gliedern eines solchen zugeschrieben werden müssen.

Aus dem Satz, daß die halbe Summe zweier konjugierten Diatensoren einen Tensor bildet, folgt dann

Satz II. Die sechs Größen

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial z}, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

sind Glieder eines Tensors. Man nennt denselben nach Gans die „Deformation von $\mathfrak{v}$" und schreibt ihn:

$$def\, \mathfrak{v}.$$

Ist endlich $\dfrac{\partial v_y}{\partial x} = \dfrac{\partial v_x}{\partial y}$ usw., so ist der Vektor $\mathfrak{v}$ ein Potentialvektor, und seine drei Komponentenbeträge lassen sich in bekannter Weise als Differentialquotienten $\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z}$ eines Skalars U ausdrücken. Der Satz II nimmt dann die Gestalt an:

Satz III. Ist U ein stetig mit den Koordinaten veränderlicher Skalar, so bilden die sechs Größen

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

einen Tensor, der auch $def\, \mathfrak{grad}\, U$ geschrieben werden kann.

93. Der derivative Diatensor eines Vektorfeldes.

Ein Vektor sei als Funktion der Koordinaten gegeben, dann ist:

$$d\mathfrak{v}_x = \mathfrak{i}\, d v_x = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz\right)\mathfrak{i}, \quad . \; . \; . \; (1)$$

$$d\mathfrak{v}_y = \mathfrak{j}\, d v \;\; = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz\right)\mathfrak{j}, \quad . \; . \; . \; (2)$$

$$d\mathfrak{v}_z = \mathfrak{k}\, d v_z = \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz\right)\mathfrak{k}. \quad . \; . \; . \; (3)$$

Addiert man die drei Gleichungen geometrisch, so erhält man links $d\mathfrak{v}$ und rechts eine Größe, welche die Form eines Diatensorvektorproduktes hat; denn dx, dy, dz sind die Komponentenbeträge des Fahrstrahlelementes $d\mathfrak{r}$. In § **92** wurde nachgewiesen, daß die Koeffizienten $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ usw. sich wie Tensorglieder transformieren. Setzt man also:

$$\Omega_{\mathfrak{v}} = \begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial x} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z}, \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

so ist

$$d\mathfrak{v} = \Omega_{\mathfrak{v}} d\mathfrak{r}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

und $\Omega_{\mathfrak{v}}$ ist ein Diatensor, den wir den derivativen Diatensor[1]) des Vektorfeldes nennen. Er ist durch (4) für jeden Punkt des Feldes bestimmt. In dem unendlich kleinen Bezirk, der einen Punkt 1 umgibt, kann man den Gliedern von $\Omega_{\mathfrak{v}}$ konstante Werte zuschreiben; im allgemeinen werden sie von einer Stelle zur anderen variieren. $\Omega_{\mathfrak{v}}$ ist offenbar ein skalarer Diatensor.

Mittels des derivativen Diatensors lassen sich die charakteristischen Größen des Feldes sehr einfach ausdrücken. Heißt zunächst, wie früher, S_1 der erste Skalar von $\Omega_{\mathfrak{v}}$, so ergibt Gleichung (4) sofort

Satz I.

$$S_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = div\,\mathfrak{v}.$$

Die Divergenz von $\mathfrak{v}$ wird also durch den ersten Skalar von $\Omega_{\mathfrak{v}}$ ausgedrückt.

Ferner läßt sich $\Omega_{\mathfrak{v}}$, wie bekannt, additiv in Tensor und Antitensor zerlegen. Heißt $T_{\mathfrak{v}}$ der symmetrische Anteil von $\Omega_{\mathfrak{v}}$, so ist:

---

[1]) R. H. Weber hat in seiner Göttinger Abhandlung den Diatensor $\Omega_{\mathfrak{v}}$ als $def\,\mathfrak{v}$ bezeichnet, hat sich aber auf Anfrage damit einverstanden erklärt, daß die Namen von $\Omega_{\mathfrak{v}}$ und $T_{\mathfrak{v}}$ so gewählt werden, wie es hier geschehen ist, daß also dem $def\,\mathfrak{v}$ die von Gans gegebene Bedeutung bleibt.

$$T_{\mathfrak{v}} = \begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v_z}{\partial z}, \end{cases} \quad . \; . \; (6)$$

also nach § **92** kurz:

Satz II.

$$T_{\mathfrak{v}} = \mathit{def}\, \mathfrak{v}.$$

„Der in $\Omega_{\mathfrak{v}}$ enthaltene Tensor ist identisch mit der Deformation von $\mathfrak{v}$. Zugleich ist der erste Skalar von $T_{\mathfrak{v}}$ identisch mit demjenigen von $\Omega_{\mathfrak{v}}$."

Der in $\Omega_{\mathfrak{v}}$ enthaltene Antitensor $\tau_{\mathfrak{v}}$ ist:

$$\tau_{\mathfrak{v}} = \begin{cases} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right) & 0 \end{cases} \quad . \; . \; (7)$$

und kann ersetzt werden durch den Vektor $[\mathfrak{h}$, wenn

$$2\,[\mathfrak{h}_{\mathfrak{v}} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathfrak{k}.$$

Hier steht aber rechts der Curl von $\mathfrak{v}$, also ergibt sich

Satz III.

$$\mathfrak{curl}\, \mathfrak{v} = 2\, \mathfrak{h}_{\mathfrak{v}}.$$

Der Curl von $\mathfrak{v}$ ist gleich dem doppelten Zusatzfaktor von $\Omega_{\mathfrak{v}}$.

Sieht man nun davon ab, daß die Begriffe *div* und $\mathfrak{curl}$ auf anderem Wege gewonnen sind, so kann man die Sätze I und III als Definitionen derselben ansehen und untersuchen, was sich für die allgemeine Vektorenlehre aus den bereits bekannten Eigenschaften der Diatensoren ergibt. Da findet sich:

Ist $\mathfrak{v}$ ein Potentialvektor, so ist von vornherein $\dfrac{\partial v_y}{\partial x} = \dfrac{\partial v_x}{\partial y}$ usw., also $\mathfrak{curl}\, \mathfrak{v} = 0$. Ist $\mathfrak{v}$ ein Curl, so ist $\Omega_{\mathfrak{v}}$ von vornherein in Gestalt eines Antitensors gegeben, also ist sein erster Skalar 0, demnach $\mathit{div}\, \mathfrak{v} = 0$, und damit

Satz IV. „Jeder Curl ist quellenfrei und jeder Gradient ist wirbelfrei.“

Da $\Omega_{\mathfrak{v}} = T_{\mathfrak{v}} + \tau_{\mathfrak{v}}$, folgt $\Omega_{\mathfrak{v}} d\mathfrak{r} = T_{\mathfrak{v}} d\mathfrak{r} + \tau_{\mathfrak{v}} d\mathfrak{r}$, d. h.

Satz V. Jeder Vektor $\mathfrak{v}$ läßt sich in zwei Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ zerlegen, von denen der eine wirbelfrei, der andere quellenfrei ist. Die Divergenz des wirbelfreien ist identisch mit derjenigen des Vektors $\mathfrak{v}$ selbst, und der Curl des quellenfreien ist gleich dem Curl von $\mathfrak{v}$.

Sind zwei Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ gegeben, deren derivative Diatensoren $\Omega_{\mathfrak{v}}$ und $\Omega_{\mathfrak{w}}$ heißen, heißt ferner $\Omega_{\mathfrak{v}+\mathfrak{w}}$ der derivative Diatensor von $(\mathfrak{v} + \mathfrak{w})$, so ist $\frac{\partial (v_x + w_x)}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial x}$ usw., also

$$\Omega_{\mathfrak{v}+\mathfrak{w}} = \Omega_{\mathfrak{v}} + \Omega_{\mathfrak{w}},$$

$$d(\mathfrak{v} + \mathfrak{w}) = (\Omega_{\mathfrak{v}} + \Omega_{\mathfrak{w}})\, d\mathfrak{r} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Offenbar folgt:

Satz VI. Die Divergenz einer Vektorensumme ist an jeder Stelle des gemeinschaftlichen Feldes gleich der Summe aus den Divergenzen der einzelnen Vektoren.

Satz VII. Ebenso ist offenbar der Curl einer Vektorensumme gleich der Summe aus den Curlen der einzelnen Summanden.

Wie bekannt, liefert die additive Zusammensetzung von beliebig vielen Tensoren wieder einen Tensor, diejenige von Antitensoren wieder einen Antitensor; also

Satz VIII. Die Summe von beliebig vielen Potentialvektoren ist ein Potentialvektor, diejenige von beliebig vielen Curlen ist ein Curl.

Die Diatensorentheorie gestattet hiernach, einige bekannte Sätze sehr einfach abzuleiten. Für die Sätze jedoch, welche die Beziehung von Oberflächenintegralen eines Vektors zu Volumenintegralen einerseits und Linienintegralen andererseits aussprechen, hat sie keine Bedeutung. Der Gausssche Satz beruht auf der einfachen Tatsache, daß man einen Ausdruck von der Form $\iiint \left(\frac{\partial U}{dx} + \frac{\partial U}{dy} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$ nach jeder Achsenrichtung einmal integrieren kann. Da dies mit der Diatensorform des Quotienten $\frac{d\mathfrak{v}}{d\mathfrak{r}}$ nichts zu tun hat, ergibt die Einführung der Diatensoren keine Besonderheiten; die Ableitung erfolgt auch hier in der in der Vektorenrechnung gebräuchlichen Weise. Dasselbe gilt für den Greenschen Satz, für den Satz von Stokes und für die sämtlichen aus ihnen zu ziehenden Folgerungen, insbesondere auch für den Ausdruck eines Potentials durch die Divergenz und für den Ausdruck eines Vektorpotentials durch den Curl des betreffenden Vektors. Auf diese Entwicklungen wird daher hier nicht eingegangen. Dagegen ergeben sich auf dem Boden der Diatensorentheorie noch folgende Bemerkungen:

a) Ist $\mathfrak{v}$ ein Potentialvektor, so hat sein derivativer Diatensor im allgemeinen an jeder Stelle des Raumes drei aufeinander senkrecht stehende Hauptachsen, deren Doppelrichtungen ξ, η, ζ heißen mögen. Da $\Omega_\mathfrak{v}$ variiert, so kann auch jede seiner Hauptachsen, z. B. die Achse der ξ, ihre Richtung von Ort zu Ort ändern; dabei werden offenbar sämtliche Lagen der ξ-Achse, die man erhält, wenn man von einem bestimmten Punkt 1 ausgeht, von einer Kurve eingehüllt, deren Elemente an jeder Stelle in die Richtung der dortigen ξ fallen. Entsprechendes gilt für die Achsen der η und ζ. Also folgt: Die Lagen der Hauptachsen des Tensors bilden drei Kurvenscharen, welche einander an jeder Stelle des Feldes orthogonal schneiden. Denkt man sich diese Kurven wie Vektorlinien derart verteilt, daß ihre Dichte an jeder Stelle gleich dem Betrage von t_ξ usw. ist, so stellen sie den Tensor $\Omega_\mathfrak{v}$ in ähnlicher Weise dar, wie ein Vektor durch seine Vektorlinien dargestellt wird.

Das Element der ξ-Kurve hat in bezug auf die Achsen der x, y, z dieselben Richtungskosinus α_1, α_2, α_3 [§ **19**, Gleichung (15)], wie die ξ-Achse selbst an der gleichen Stelle, also sind die Differentialgleichungen der Kurve

$$\frac{dx}{ds} = \alpha_1, \quad \frac{dy}{ds} = \alpha_2, \quad \frac{dz}{ds} = \alpha_3, \quad \ldots\ldots \tag{9}$$

und hier sind α_1, α_2, α_3 an jeder Stelle als bekannt anzusehen, da sie aus den Elementen von $\Omega_\mathfrak{v}$ berechnet werden können. Die Dreideutigkeit der α entspricht den drei Kurven.

b) Ist $\mathfrak{v}$ ein quellenfreier Vektor, so erscheint sein derivativer Diatensor von vornherein in der Gestalt:

$$\Omega_\mathfrak{v} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & -\dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & 0 & -\dfrac{\partial v_z}{\partial y} \\[2ex] -\dfrac{\partial v_x}{\partial z} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} & 0, \end{array} \right. \quad \ldots\ldots \tag{10}$$

und der $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{v}}$ vertretende Zusatzfaktor hat demgemäß die Form:

$$[\mathfrak{h}_{\mathfrak{v}} = \frac{\partial v_z}{\partial y}\mathfrak{i} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathfrak{j} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathfrak{k}. \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Offenbar lassen sich für diesen Zusatzfaktor nach Analogie des Vorigen $\mathfrak{h}$-Linien konstruieren, deren Differentialgleichungen sind:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial v_z}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{\partial v_x}{\partial z}, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{\partial v_y}{\partial x}. \quad \ldots \quad (12)$$

c) Auf den durch Gleichung (10) dargestellten antimetrischen Diatensor läßt sich der Satz des § **56** anwenden, nach welchem jeder Diatensor als Produkt aus einem Versor und einem Tensor dargestellt werden kann, vorausgesetzt, daß für den Tensor ein bestimmtes Koordinatensystem der x, y, z gewählt werde. Sind also λ_1, λ_2, λ_3 usw. die Winkel, welche die Achsen der x, y, z mit denjenigen eines zweiten Koordinatensystems der ξ, η, ζ machen, so kann man setzen:

$$\mathfrak{Q}_{\mathfrak{v}} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} t_a & 0 & 0 \\ 0 & t_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = XT. \quad . \quad . \quad (13)$$

[Nach (10) ist $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{v}}$ in diesem Falle ein planarer Diatensor, also muß einer der beiden Faktoren in Gleichung (13) jedenfalls planar sein; der Versor hat bekanntlich immer die Determinante 1, also muß der Tensor planar sein. In Gleichung (13) ist willkürlich angenommen, die Doppelrichtung der z sei in diejenige des verschwindenden Konstituenten gelegt.]

Aus Gleichung (13) ergibt sich, daß die Inkremente eines quellenfreien Vektors sich darstellen lassen als gedrehte Inkremente eines Potentialvektors. Multipliziert man $d\mathfrak{r}$ zunächst mit dem Tensor T, so erhält man das Inkrement $d\mathfrak{u}$ eines Potentialvektors, und diese $d\mathfrak{u}$ liegen jederzeit in der xy-Ebene der betreffenden Stelle; dreht man dann $d\mathfrak{u}$ mittels des Versors X, so entsteht $d\mathfrak{v}$. Wir beschränken uns hier auf diese Andeutung.

94. Dyadische Form des derivativen Diatensors.

Das ∇ konnte bisher mit einem Vektor vermittelst der inneren ($\nabla\mathfrak{v} = div\,\mathfrak{v}$) und der äußeren ($[\nabla\mathfrak{v}] = \mathbf{curl}\,\mathfrak{v}$) Multiplikation verbunden werden. Wie früher gezeigt, ist auch die Dyade eine Art von Produkt; man kann also das ∇ mit einem Vektor $\mathfrak{v}$ auch in dyadischer Form multiplizieren, eine Dyade $\nabla;\mathfrak{v}$ bilden. Man hat folgerichtig zu definieren:

$$\nabla;\mathfrak{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{k}\right);(v_x\mathfrak{i} + v_y\mathfrak{j} + v_z\mathfrak{k}). \quad . \quad . \ (1)$$

Das ist ausgeführt:

$$\left.\begin{aligned}\nabla;\mathfrak{v} = & \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathfrak{i};\mathfrak{i} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathfrak{j};\mathfrak{i} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathfrak{k};\mathfrak{i} \\ & + \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathfrak{i};\mathfrak{j} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathfrak{j};\mathfrak{j} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\mathfrak{k};\mathfrak{j} \\ & + \frac{\partial v_z}{\partial x}\mathfrak{i};\mathfrak{k} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\mathfrak{j};\mathfrak{k} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathfrak{k};\mathfrak{k}.\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Man ersieht daraus, daß $\nabla;\mathfrak{v}$ der konjugierte Diatensor zu $\Omega_{\mathfrak{v}}$ ist:

$$\nabla;\mathfrak{v} = \Omega_{\mathfrak{v}c}. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Nimmt man für $\mathfrak{v}$ den Fahrstrahl $\mathfrak{r}$, so ist $v_x = x$, $v_y = y$ usw., aus Gleichung (2) wird also:

$$\nabla;\mathfrak{r} = \mathfrak{i};\mathfrak{i} + \mathfrak{j};\mathfrak{j} + \mathfrak{k};\mathfrak{k} = I. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

Akzeptiert man die Schreibweise $\nabla;\mathfrak{v}$, so muß man auch die konjugierte zulassen: $\mathfrak{v};\nabla$ hat ebensowohl einen Sinn wie $\nabla;\mathfrak{v}$, und es ist $\mathfrak{v};\nabla = \Omega_{\mathfrak{v}}$. Eine ähnliche Bemerkung gilt übrigens schon für das äußere Produkt $[\nabla\mathfrak{v}]$. Die Konsequenz verlangt $[\mathfrak{v}\nabla] = [\nabla\mathfrak{v}]_c$.

Da das ∇ aus drei Elementen von verschiedener Richtung zusammengesetzt ist, ist $\nabla;\mathfrak{v}$ nicht eine Dyade, sondern ein Dyadentripel, und dies ist wohl zu beachten. Insbesondere ist es nicht erlaubt, den für die Einzeldyade gültigen definierenden Satz $(\mathfrak{A};\mathfrak{a})\mathfrak{u} = \mathfrak{A}(\mathfrak{a}\mathfrak{u})$ auf $\nabla;\mathfrak{v}$ anzuwenden und $(\nabla;\mathfrak{v})\mathfrak{u} = \nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{u})$ zu setzen, ebensowenig wie es erlaubt sein würde, $(\mathfrak{A};\mathfrak{i} + \mathfrak{B};\mathfrak{j} + \mathfrak{C};\mathfrak{k})\mathfrak{u} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})(\mathfrak{i}\mathfrak{u})$ zu schreiben [1]). Man muß vielmehr das Dyadentripel, wenn man es mit einem Vektor multiplizieren will, vorher in seine Bestandteile auflösen. Damit kommt man immer wieder

---

[1]) Durch Nichtbeachtung dieses Umstandes ist Jaumann gelegentlich zu befremdlichen Resultaten gelangt, z. B.:

$$\mathfrak{v} = I\mathfrak{v} = (\nabla;\mathfrak{r})\mathfrak{v} = \nabla(\mathfrak{r}\mathfrak{v}) = \mathfrak{grad}(\mathfrak{r}\mathfrak{v}).$$

Danach würde jeder Vektor ein Potentialvektor sein. Die Gleichung $\mathfrak{v} = \mathfrak{grad}(\mathfrak{r}\mathfrak{v})$ ist nicht einmal dann bewiesen, wenn $\mathfrak{v}$ wirklich ein Potential hat; die korrekte Fortsetzung ergibt nur $(\nabla;\mathfrak{r})\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$.

zu der Gleichung (2), die praktisch mit Gleichung (4) des vorigen Paragraphen gleichwertig ist. Für die Anwendung bietet also das $\nabla;\mathfrak{v}$ keinen ersichtlichen Vorteil, ausgenommen gelegentlich die Kürze der Schreibweise.

95. Homogene Vektorfelder.

Ein Vektor $\mathfrak{v}$ heißt homogen verteilt und sein Feld heißt homogen[1]), wenn $\mathfrak{v}$ an allen Stellen desselben bis auf einen konstanten Zusatz ein und dieselbe lineare Vektorfunktion des von irgend einem Mittelpunkt aus gezogenen Fahrstrahles $\mathfrak{r}$ ist. Der homogen verteilte Vektor kann demnach als

$$\mathfrak{v} = \Phi\mathfrak{r} + \mathfrak{e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ausgedrückt werden, wobei die Glieder von Φ konstant sind und $\mathfrak{e}$ irgend einen unveränderlichen Vektor bedeutet. Wir nennen Φ den direkten Diatensor, kürzer den Diatensor des Feldes. Sind 1 und 2 zwei verschiedene Orte des Feldes und werden die Vektoren entsprechend markiert, so folgt aus (1):

$$\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1 = \Phi(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1). \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Der Unterschied zwischen $\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{v}_1$ hängt also nur von der Länge und Richtung des Abstandes $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$ ab, nicht aber von der Lage seines Anfangspunktes 1. Diese Eigenschaft und die Gleichung (1) bedingen einander offenbar gegenseitig, so daß man beliebig eine von ihnen als Definition des homogenen Vektorfeldes benutzen kann.

Sind 0 und ω zwei verschiedene Anfangspunkte und wird der Abstand $\omega - 0$ mit $\mathfrak{r}_1$ bezeichnet, heißt ferner $\mathfrak{r}$ der Fahrstrahl von 0 nach einem Punkte 1 und $\mathfrak{r}'$ der Fahrstrahl von ω nach demselben Punkte 1, so ist

$$\Phi\mathfrak{r} + \mathfrak{e} = \Phi(\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}_1) + \mathfrak{e}, \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

und da $\Phi\mathfrak{r}_1$ ein konstanter Vektor ist, setzt sich $\Phi\mathfrak{r}_1$ mit $\mathfrak{e}$ zu einem neuen konstanten Vektor $\mathfrak{e}'$ zusammen, so daß sich ergibt:

$$\Phi\mathfrak{r} = \Phi\mathfrak{r}' + \mathfrak{e}'. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

[1]) In der Physik beschränkt man nicht selten die Bezeichnung „homogen" auf Felder, welche die Bedingung $\mathfrak{v} = const$ erfüllen. Als Beispiel eines Feldes, welches in dem weiteren Sinne des § 95 homogen ist, denke man etwa an einen Massenpunkt μ, der im Inneren eines homogenen, im allgemeinen aber anisotropen Körpers elastischen Kräften unterworfen ist. Die Kräfte sollen im Gleichgewicht sein, wenn μ sich an einer bestimmten Stelle 0, dem der Gleichung (7) zugrunde gelegten Mittelpunkt, befindet.

Das Feld von $\mathfrak{v}$ ist also für jeden beliebigen Anfangspunkt homogen und sein Diatensor ist für alle Anfangspunkte der gleiche.

Gilt für einen vorgeschriebenen Anfangspunkt die Gleichung (1) mit einem bestimmt vorgeschriebenen Wert von $\mathfrak{e}$, so kann man offenbar in Gleichung (3) den Wert $\mathfrak{r}_1$ so bestimmen, daß $\mathfrak{e}'$ verschwindet. Die Bedingungen hierfür sind, wenn x_1, y_1, z_1 die Koordinaten von ω, und $\Phi = \Phi\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$,

$$\left.\begin{aligned} a_x x_1 + a_y y_1 + a_z z_1 &= -e_x, \\ b_x x_1 + b_y y_1 + b_z z_1 &= -e_y, \\ c_x x_1 + c_y y_1 + c_z z_1 &= -e_z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist das zu Φ gehörige S_3. Man erhält also:

$$S_3\, x_1 = \begin{vmatrix} -e_x & a_y & a_z \\ -e_y & b_y & b_z \\ -e_z & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ usw.} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Es folgt: Im allgemeinen hat das homogene Vektorfeld einen ausgezeichneten Punkt, den „Mittelpunkt“. Wählt man diesen als Bezugspunkt, so verschwindet der zusätzliche konstante Vektor der Gleichung (1) und das Feld wird beschrieben durch

$$\mathfrak{v} = \Phi\mathfrak{r}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Der Mittelpunkt rückt offenbar ins Unendliche, wenn $S_3 = 0$.

Wir nehmen im folgenden an, Φ sei vollständig und das Feld sei auf seinen Mittelpunkt reduziert. Dann ist

$$v_x = a_x x + a_y y + a_z z, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

also, da die Glieder des Diatensors konstant sind,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = a_y \text{ usw.} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Die Glieder von Φ stimmen also überein mit den Gliedern des zugehörigen derivativen Diatensors $\Omega_\mathfrak{v}$ in § **93**. Es folgt, daß alle dort ausgesprochenen Sätze erhalten bleiben, wenn man $\Omega_\mathfrak{v}$ durch Φ ersetzt.

Wir bemerken über die Einzelfälle noch folgendes:

I. Ist Φ ein Tensor, also $\mathfrak{v}$ ein Potentialvektor, so wird man die Koordinatenachsen in die Tensorachsen legen. Dann kann $\mathfrak{v}$ an jeder Stelle des Feldes mit Hilfe eines „Ellipsoids“ konstruiert werden, dessen Hauptachsen parallel den Koordinatenachsen sind. Sind a, b, c die Konstituenten von Φ, so ist

$$\mathfrak{v} = a x \mathfrak{i} + b y \mathfrak{j} + c z \mathfrak{k}, \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

und wenn $-U$ das Potential von $\mathfrak{v}$ ist, so ist

$$U = \tfrac{1}{2}(a x^2 + b y^2 + c z^2). \quad \ldots \ldots \ldots (11)$$

Die drei Scharen der ξ-, η-, ζ-Linien (§ **93**, Bemerkung a) reduzieren sich auf Parallelen zu den Koordinatenachsen.

II. Ist zweitens Φ ein Antitensor, $\mathfrak{v}$ ein quellenfreier Vektor, so sind die $\mathfrak{h}$-Linien Gerade, da die Glieder von Φ im homogenen Felde konstant sind. Legt man die Achse der x in die Richtung von $\mathfrak{h}$, so stehen die $\mathfrak{v}$-Linien senkrecht zur Achse der x und zu $\mathfrak{r}$, sind also sämtlich parallel mit der yz-Ebene und zugleich lotrecht auf $\mathfrak{r}$. Ihr Sinn ist dadurch bestimmt, daß $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ in dieser Anordnung ein Rechtssystem bilden. Ihre Länge ist gleich dem doppelten Inhalt des zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_x$ eingeschlossenen Dreiecks.

Zugleich aber ergibt sich folgendes: Ist die Achse der x in die Richtung der $\mathfrak{h}$ gelegt, so ist $\mathfrak{h} = h\mathfrak{i}$ und der Antitensor Φ reduziert sich auf

$$\Phi = \begin{cases} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h \\ 0 & h & 0. \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots (12)$$

Dies zerlegt sich in die beiden Faktoren X und T, wenn man setzt:

$$X = \begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0, \end{cases} \qquad T = \begin{cases} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h. \end{cases} \quad \ldots (13)$$

Die Potentialfunktion $-U$, welche dem Tensor T entspricht, ist nach Gleichung (11) bestimmt durch

$$U = \tfrac{1}{2} h (y^2 + z^2), \quad \ldots \ldots \ldots (14)$$

ihre Niveauflächen $y^2 + z^2 = const$ sind Kreiszylinder, deren Achse in die Achse der x fällt. Die zu irgend einem Punkt 1 gehörige Vektorlinie $T\mathfrak{r} = \mathfrak{u}$ ist das Lot von 1 auf die Achse der x. Die Vektoren $\mathfrak{u}$ sind also sämtlich der yz-Ebene parallel, wie es der Planarität von (12) und (13) entspricht. Entsprechend der Bemerkung c) des § **93** erhält man also durch die proximale Multiplikation mit T zunächst Potentialvektoren. Die $\mathfrak{v}$ ergeben sich aus diesen, wenn man sie mittels des Versors X dreht. Nun ist X ein Versor um die Achse der x, dessen Drehungswinkel der Bedingung $\sin\varphi = 1$ genügt. Es werden also die sämtlichen Vektoren $\mathfrak{u}$ parallel zur yz-Ebene um einen rechten Winkel gedreht und ergeben dann die Vektoren $\mathfrak{v}$. Man sieht leicht, daß dieses Ergebnis mit demjenigen der direkten Konstruktion des Vektorproduktes $[\mathfrak{h}\,\mathfrak{v}]$ übereinstimmt.

96. Ersatz eines Vektorfeldes durch ein Diatensorfeld.

Das Feld eines veränderlichen Vektors kann offenbar dadurch ersetzt werden, daß man einen konstanten Vektor mit einem veränderlichen Diatensor multipliziert. Der konstante Vektor heiße $\mathfrak{e}$, es sei also der Vektor $\mathfrak{v}$, dessen Feld beschrieben werden soll, bestimmt durch die Gleichung

$$\mathfrak{v} = \Phi\mathfrak{e}, \qquad (1)$$

welches für $\Phi = \Phi\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ gleichbedeutend ist mit

$$\mathfrak{v} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{e})\mathfrak{i} + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{e})\mathfrak{j} + (\mathfrak{c}\,\mathfrak{e})\mathfrak{k} \qquad (2)$$

bei veränderlichen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Bildet man zunächst die charakteristischen Größen von $\mathfrak{v}$, so ergibt sich folgendes:

I. Divergenz. Aus Gleichung (2) folgt:

$$div\,\mathfrak{v} = \frac{\partial(\mathfrak{a}\,\mathfrak{e})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathfrak{b}\,\mathfrak{e})}{\partial y} + \frac{\partial(\mathfrak{c}\,\mathfrak{e})}{\partial z}. \qquad (3)$$

Bildet man andererseits mit Gleichung (7) des § **90** das Produkt aus dem Formaldiatensor $\nabla\Phi$ und dem Vektor $\mathfrak{e}$, so ergibt sich:

$$\nabla\Phi.\mathfrak{e} = \begin{cases} (\nabla a_x . e_x + \nabla a_y . e_y + \nabla a_z . e_z)\mathfrak{i} \\ + (\nabla b_x . e_x + \nabla b_y . e_y + \nabla b_z . e_z)\mathfrak{j} \\ + (\nabla c_x . e_x + \nabla c_y . e_y + \nabla c_z . e_z)\mathfrak{k}; \end{cases} \qquad (4)$$

das ist

$$\nabla\Phi.\mathfrak{e} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z) \\ + \frac{\partial}{\partial y}(b_x e_x + b_y e_y + b_z e_z) \\ + \frac{\partial}{\partial z}(c_x e_x + c_y e_y + c_z e_z). \end{cases} \qquad (5)$$

Hier stehen auf der rechten Seite dieselben Werte wie in Gleichung (3), also ist

$$div\,\mathfrak{v} = \nabla \Phi . \mathfrak{e}. \qquad (6)$$

$\mathfrak{v}$ ist quellenfrei, wenn $div\,\mathfrak{a}_c = div\,\mathfrak{b}_c = div\,\mathfrak{c}_c = 0$.

II. Curl. Aus Gleichung (1) folgt unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathfrak{v} = \left(\frac{\partial(\mathfrak{c}\mathfrak{e})}{\partial y} - \frac{\partial(\mathfrak{b}\mathfrak{e})}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial(\mathfrak{a}\mathfrak{e})}{\partial z} - \frac{\partial(\mathfrak{c}\mathfrak{e})}{\partial x}\right)\mathfrak{j} \\ + \left(\frac{\partial(\mathfrak{b}\mathfrak{e})}{\partial x} - \frac{\partial(\mathfrak{a}\mathfrak{e})}{\partial y}\right)\mathfrak{k}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Stellt man hieraus die Faktoren von e_x zusammen, so erhält man

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & b_x & c_x \end{vmatrix}.$$

Das ist $\operatorname{curl} \mathfrak{a}_c$; mit zyklischer Fortsetzung folgt:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v} = e_x \operatorname{curl} \mathfrak{a}_c + e_y \operatorname{curl} \mathfrak{b}_c + e_z \operatorname{curl} \mathfrak{c}_c; \qquad (8)$$

$\mathfrak{v}$ ist wirbelfrei, wenn die Kolonnenvektoren $\mathfrak{a}_c$, $\mathfrak{b}_c$, $\mathfrak{c}_c$ einzeln wirbelfrei sind.

III. Derivativer Diatensor. Aus Gleichung (2) folgt:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(\mathfrak{a}\mathfrak{e})}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial(\mathfrak{a}\mathfrak{e})}{\partial y} \quad \text{usw.} \\ &\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial(\mathfrak{b}\mathfrak{e})}{\partial x} \quad \text{usw.} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

und es liegt auf der Hand, wie mit diesen Größen der derivative Diatensor $\Omega_\mathfrak{v}$ sowie die Deformation und der Curl von $\mathfrak{v}$ zu bilden sind. Für Divergenz und Curl ergeben sich wieder die Gleichungen (3) und (8).

Ist der Vektor $\mathfrak{v}$ als Funktion der Koordinaten gegeben, etwa in der Form $\Psi\mathfrak{r}$, so bestimmt sich der Diatensor Φ sehr einfach. Es sei

$$\Psi = \begin{cases} t_{xx} & t_{xy} \quad t_{xz} \\ t_{yz} & \text{usw.} \end{cases} \quad \text{und} \quad \Phi = \begin{cases} a_x & a_y \quad a_z \\ b_x & \text{usw.} \end{cases} \qquad (10)$$

Dann muß, wenn beide übereinstimmen sollen,

$$a_x e_x = t_{xx} x, \quad a_y e_y = t_{xy} y \quad \text{usw.} \qquad (11)$$

also

$$a_x = \frac{t_{xx}\, x}{e_x} \qquad a_y = \frac{t_{xy}\, y}{e_y} \quad \text{usw.} \qquad (12)$$

sein. Die Gleichungen (12) versagen also, wenn eine der Größen e_x, e_y oder e_z Null ist. Der konstante Vektor $\mathfrak{e}$ darf nicht so gewählt werden, daß er in eine der Koordinatenachsen oder -ebenen fällt; im übrigen kann er beliebig gewählt werden. Dann liefern die Gleichungen (12) die Glieder von Φ.

Viertes Kapitel: **Orthogonale krummlinige Koordinaten.**

97. Einführung.

Krummlinige Koordinaten können unter Umständen für die Formulierung von Grenzbedingungen von erheblichem Vorteil sein und werden deswegen in physikalischen Rechnungen häufig verwendet. In den meisten Fällen benutzt man orthogonale krummlinige Koordinaten, wir beschränken daher die Betrachtung auf diese.

Es sei ein System von krummlinigen Koordinaten u, v, w gegeben, die an jeder Stelle des Raumes aufeinander senkrecht stehen und rechtshändig angeordnet sind. Von einem geradlinigen rechtwinkligen Koordinatensystem der x, y, z geht man zu den u, v, w über mittels dreier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(u, v, w), \\ y &= f_2(u, v, w), \\ z &= f_2(u, v, w). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Setzt man in diesen w konstant, so stellen die Gleichungen eine Fläche dar; setzt man gleichzeitig $v = const$ und $w = const$, so erhält man die Schnittkurve zweier Flächen, auf der u allein sich ändert. Das Linienelement dieser Kurve habe den pseudoskalaren Betrag $d s_u$, und wir ordnen ihm an jeder Stelle einen Einheitsvektor $\mathfrak{i}'$ zu, der die Richtung der positiven $d s_u$ haben soll. Das mit Richtung gedachte Linienelement heiße $d \mathfrak{s}_u$, so daß $d \mathfrak{s}_u$ gleichbedeutend ist mit $\mathfrak{i}' d s_u$. Es hat nun der Differentialquotient $\dfrac{d s_u}{d u}$ irgend einen skalaren Wert e_u, der eine Funktion der Koordinaten ist. Das gleiche gilt in v und w. Man erhält also die Zusammenstellung:

$$d s_u = e_u d u, \quad d s_v = e_v d v, \quad d s_w = e_w d w, \quad \ldots \quad (2)$$

welche gleichbedeutend ist mit

$$d \mathfrak{s}_u = e_u d u \,.\, \mathfrak{i}', \quad d \mathfrak{s}_v = e_v d v \,.\, \mathfrak{j}', \quad d \mathfrak{s}_w = e_w d w \,.\, \mathfrak{k}'. \quad \ldots \quad (3)$$

Die Elemente $d\mathfrak{s}_u$, $d\mathfrak{s}_v$, $d\mathfrak{s}_w$ stehen senkrecht aufeinander, bilden also mit den Elementen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$ Winkel, deren Kosinus gegeben seien durch das Schema:

	$d\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{i}$	$d\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{j}$	$d\mathfrak{z}$ oder $\mathfrak{k}$
$d\mathfrak{s}_u$ oder $\mathfrak{i}'$	λ_1	λ_2	λ_3
$d\mathfrak{s}_v$ oder $\mathfrak{j}'$	μ_1	μ_2	μ_3
$d\mathfrak{s}_w$ oder $\mathfrak{k}'$	ν_1	ν_2	ν_3

. . (4)

Es ist gleichgültig, ob man hierin die gerichteten Elemente oder die Einheitsvektoren, welche ihre Richtung angeben, einführt.

Die λ, μ, ν findet man in den einfacheren Fällen leicht aus der geometrischen Anschauung. Allgemein erhält man etwa die λ aus den Gleichungen (1), indem man die Schnittlinie, auf welcher u allein variiert, in x, y, z darstellt und die Kosinus der Winkel, welche ihre Tangente an der untersuchten Stelle mit den Achsen der x, y, z bildet, danach bestimmt. Die μ und ν finden sich analog aus den beiden Schnittlinien, auf welchen v und w allein variieren.

Nach dem Schema (4) ist

$$\left.\begin{aligned} dx &= \lambda_1 e_u du + \mu_1 e_v dv + \nu_1 e_w dw, \\ dy &= \lambda_2 e_u du + \mu_2 e_v dv + \nu_2 e_w dw, \\ dz &= \lambda_3 e_u du + \mu_3 e_v dv + \nu_3 e_w dw. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

Hieraus folgt durch Auflösung:

$$\left.\begin{aligned} e_u du &= \lambda_1 dx + \lambda_2 dy + \lambda_3 dz, \\ e_v dv &= \mu_1 dx + \mu_2 dy + \mu_3 dz, \\ e_w dw &= \nu_1 dx + \nu_2 dy + \nu_3 dz. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Für das Linienelement $d\mathfrak{s}$, welches den Punkt u, v, w mit dem Punkt $u + du, v + dv, w + dw$ verbindet, ergibt sich:

$$d\mathfrak{s} = e_u du\,\mathfrak{i}' + e_v dv\,\mathfrak{j}' + e_w dw\,\mathfrak{k}', \quad \ldots\ldots (7)$$

und hieraus durch Quadrierung:

$$ds^2 = e_u^2 du^2 + e_v^2 dv^2 + e_w^2 dw^2. \quad \ldots\ldots (8)$$

Da dasselbe Linienelement gleichzeitig die Komponenten $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$ hat, läßt sich diese Gleichung schreiben:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = e_u^2 du^2 + e_v^2 dv^2 + e_w^2 dw^2, \quad \ldots (9)$$

und damit ist das Mittel zur Bestimmung von e_u, e_v und e_w gegeben: Bildet man mittels der Gleichungen (1) die Gleichung (9), so sind die Koeffizienten von du^2, dv^2 und dw^2 in dieser Gleichung die Quadrate von e_u, e_v, e_w.

Das Gesagte möge an dem einfachen Beispiel von Zylinderkoordinaten erläutert werden. Man setze

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z.$$

Die Fläche $r = const$ ist ein Kreiszylinder, dessen Achse in der z-Achse liegt, $\varphi = const$ ist eine durch die z-Achse gehende Halbebene, $z = const$ eine Ebene parallel xy. Differentiiert man die vorstehenden Gleichungen, so erhält man leicht

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

und die drei Inkremente dr, $r\,d\varphi$, dz stehen rechtshändig zueinander, wenn φ von x nach y hin gezählt wird. Sie sind also richtig angeordnet, wenn man r und x, φ und y, z und z als einander entsprechende Koordinaten ansieht. Nach dem Obigen ist nun

$$e_r = 1, \qquad e_\varphi = r, \qquad e_z = 1,$$
$$ds_r = dr, \qquad ds_\varphi = r\,d\varphi, \qquad ds_z = dz.$$

Setzt man φ und z konstant, so hat das Inkrement dr die Richtung senkrecht zu z. Die Kurve s_r ist also eine Gerade, welche senkrecht auf der z-Achse steht. In den Gleichungen für x und y ist $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ als konstant anzusehen, sie ergeben also durch Differentiation $\frac{dx}{dr} = \cos\varphi$, $\frac{dy}{dr} = \sin\varphi$. Außerdem steht s_r senkrecht zu z, also folgt

$$\lambda_1 = \cos\varphi, \qquad \lambda_2 = \sin\varphi, \qquad \lambda_3 = 0.$$

Setzt man $z = const$ und $r = const$, so ist in $r\cos\varphi$ und $r\sin\varphi$ das r als konstant anzusehen, und es folgt $x^2 + y^2 = r^2$; die Kurve s_φ ist ein Kreis vom Radius r. Das Element ds_φ dieses Kreises macht mit der Achse der x bekanntlich den Winkel $\varphi + \frac{\pi}{2}$, mit der Achse der y den Winkel φ und steht senkrecht auf z. Also wird

$$\mu_1 = -\sin\varphi, \qquad \mu_2 = \cos\varphi, \qquad \mu_3 = 0.$$

Setzt man endlich r und φ konstant, so bleibt als dritte Kurve s_z eine Gerade parallel zur z-Achse. Damit wird offenbar

$$\nu_1 = 0, \qquad \nu_2 = 0, \qquad \nu_3 = 1.$$

Sonach reduziert sich für den Fall der Zylinderkoordinaten das Kosinusschema auf

	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{i}'$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\mathfrak{j}'$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\mathfrak{k}'$	0	0	1

Aus Gleichung (5) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= \lambda_1 e_u, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \mu_1 e_v, & \frac{\partial x}{\partial w} &= \nu_1 e_w, \\
\frac{\partial y}{\partial u} &= \lambda_2 e_u, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \mu_2 e_v, & \frac{\partial y}{\partial w} &= \nu_2 e_w, \\
\frac{\partial z}{\partial u} &= \lambda_3 e_u, & \frac{\partial z}{\partial v} &= \mu_3 e_v, & \frac{\partial z}{\partial w} &= \nu_3 e_w,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

oder, wenn man abkürzend l_1 für $\lambda_1 e_u$, l_2 für $\lambda_2 e_u$, m_1 für $\mu_1 e_v$ usw. schreibt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= l_1, & \frac{\partial x}{\partial v} &= m_1, & \frac{\partial x}{\partial w} &= n_1, \\
\frac{\partial y}{\partial u} &= l_2, & \frac{\partial y}{\partial v} &= m_2, & \frac{\partial y}{\partial w} &= n_2, \\
\frac{\partial z}{\partial u} &= l_3, & \frac{\partial z}{\partial v} &= m_3, & \frac{\partial z}{\partial w} &= n_3.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

Die λ, μ, ν müssen den bekannten Orthogonalitätsbedingungen genügen. Daraus ergeben sich folgende Schlüsse:

I. Bedeutet das Zeichen $\sum$ eine Summierung über die drei Werte $\varepsilon = 1, 2$ und 3, so folgt aus

$$\sum \mu_\varepsilon \nu_\varepsilon = \sum \nu_\varepsilon \lambda_\varepsilon = \sum \lambda_\varepsilon \mu_\varepsilon = 0,$$

daß auch

$$\sum e_v e_w \mu_\varepsilon \nu_\varepsilon = 0 \quad \text{usw.},$$

also

$$\sum m_\varepsilon n_\varepsilon = \sum n_\varepsilon l_\varepsilon = \sum l_\varepsilon m_\varepsilon = 0. \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Da ferner $\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u}$ usw., so ergibt sich aus (11):

$$\frac{\partial l_\varepsilon}{\partial v} = \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial u}, \qquad \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial w} = \frac{\partial n_\varepsilon}{\partial v}, \qquad \frac{\partial n_\varepsilon}{\partial u} = \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial w}. \quad \ldots \quad (13)$$

Wir bilden nun den Ausdruck $\sum l_\varepsilon \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial v}$. Aufgelöst lautet derselbe $\sum e_u \lambda_\varepsilon \frac{\partial}{\partial v}(e_u \lambda_\varepsilon)$, und damit ergibt die direkte Differentiation

$$e_u \frac{\partial e_u}{\partial v} \sum \lambda_\varepsilon^2 + e_u^2 \sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial v}.$$

Da nun $\sum \lambda_\varepsilon^2 = 1$ und die Größe unter dem zweiten Summenzeichen der Differentialquotient von $\frac{1}{2} \sum \lambda_\varepsilon^2$, also Null ist, so bleibt

$$\sum l_\varepsilon \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial v} = e_u \frac{\partial e_u}{\partial v}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Nach der ersten Gleichung (13) ist aber

$$\sum l_\varepsilon \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial v} = \sum l_\varepsilon \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial u} = \sum e_u \lambda_\varepsilon \frac{\partial}{\partial u}(e_v \mu_\varepsilon),$$

und wenn man hier die Differentiation auf der rechten Seite ausführt, erhält man:

$$e_u e_v \sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial u} + \sum e_u \lambda_\varepsilon \mu_\varepsilon \frac{\partial e_v}{\partial u}.$$

Hier ist die zweite Summe wieder Null, also bleibt

$$\sum l_\varepsilon \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial v} = e_u e_v \sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial u}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Der Vergleich von (15) mit (14) ergibt:

$$\sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial u} = \frac{1}{e_v} \frac{\partial e_u}{\partial v}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Zugleich ist wegen $\sum \lambda_\varepsilon \mu_\varepsilon = 0$ auch $\sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial u} = -\sum \mu_\varepsilon \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial u}$, so daß man schließlich erhält:

$$\sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial u} = -\sum \mu_\varepsilon \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial u} = \frac{1}{e_v} \frac{\partial e_u}{\partial v}. \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Indem man das gleiche Verfahren auf die übrigen Größen der Gleichung (12) anwendet, findet man die folgende Zusammenstellung:

$$\left.\begin{aligned}
\sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial u} &= -\sum \mu_\varepsilon \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial u} = \frac{1}{e_v} \frac{\partial e_u}{\partial v}, \\
\sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \nu_\varepsilon}{\partial u} &= -\sum \nu_\varepsilon \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial u} = \frac{1}{e_w} \frac{\partial e_u}{\partial w}, \\
\sum \mu_\varepsilon \frac{\partial \nu_\varepsilon}{\partial v} &= -\sum \nu_\varepsilon \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial v} = \frac{1}{e_w} \frac{\partial e_v}{\partial w}, \\
\sum \mu_\varepsilon \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial v} &= -\sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v} = \frac{1}{e_u} \frac{\partial e_v}{\partial u}, \\
\sum \nu_\varepsilon \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial w} &= -\sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \nu_\varepsilon}{\partial w} = \frac{1}{e_u} \frac{\partial e_w}{\partial u}, \\
\sum \nu_\varepsilon \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial w} &= -\sum \mu_\varepsilon \frac{\partial \nu_\varepsilon}{\partial w} = \frac{1}{e_v} \frac{\partial e_w}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

II. Wir setzen nun abkürzend:

$$\sum m_\varepsilon n_\varepsilon = f_u, \qquad \sum n_\varepsilon l_\varepsilon = f_v, \qquad \sum l_\varepsilon m_\varepsilon = f_w \quad \ldots \quad (19)$$

Durch direkte Differentiation erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f_u}{\partial u} &= \sum m_\varepsilon \frac{\partial n_\varepsilon}{\partial u} + \sum n_\varepsilon \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial u},\\
\frac{\partial f_v}{\partial v} &= \sum n_\varepsilon \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial v} + \sum l_\varepsilon \frac{\partial n_\varepsilon}{\partial v},\\
\frac{\partial f_w}{\partial w} &= \sum l_\varepsilon \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial w} + \sum m_\varepsilon \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial w}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Hierin kann man nach Belieben entweder die Werte $\frac{\partial n_\varepsilon}{\partial u}, \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial v}, \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial w}$ in der ersten Kolonne rechts durch diejenigen ersetzen, die ihnen nach (13) zukommen, oder man kann dasselbe mit den Größen $\frac{\partial m_\varepsilon}{\partial u}, \frac{\partial n_\varepsilon}{\partial v}, \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial w}$ aus der zweiten Kolonne ausführen. So erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f_u}{\partial u} &= \sum m_\varepsilon \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial w} + \sum n_\varepsilon \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial u} = \sum m_\varepsilon \frac{\partial n_\varepsilon}{\partial u} + \sum n_\varepsilon \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial v},\\
\frac{\partial f_v}{\partial v} &= \sum n_\varepsilon \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial u} + \sum l_\varepsilon \frac{\partial n_\varepsilon}{\partial v} = \sum n_\varepsilon \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial v} + \sum l_\varepsilon \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial w},\\
\frac{\partial f_w}{\partial w} &= \sum l_\varepsilon \frac{\partial n_\varepsilon}{\partial v} + \sum m_\varepsilon \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial w} = \sum l_\varepsilon \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial w} + \sum m_\varepsilon \frac{\partial n_\varepsilon}{\partial u},
\end{aligned}\right\} \cdot \quad (21)$$

und damit findet sich leicht:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial f_u}{\partial u} + \frac{\partial f_v}{\partial v} + \frac{\partial f_w}{d w} &= 2\sum l_\varepsilon \frac{\partial n_\varepsilon}{\partial v} = 2\sum l_\varepsilon \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial w},\\
\frac{\partial f_u}{\partial u} - \frac{\partial f_v}{\partial v} + \frac{\partial f_w}{\partial w} &= 2\sum m_\varepsilon \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial w} = 2\sum m_\varepsilon \frac{\partial n_\varepsilon}{\partial u},\\
\frac{\partial f_u}{\partial u} + \frac{\partial f_v}{\partial v} - \frac{\partial f_w}{\partial w} &= 2\sum n_\varepsilon \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial u} = 2\sum n_\varepsilon \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \quad (22)$$

Da nun f_u, f_v und f_w sämtlich Null sind, so ergibt sich, daß die Summen $\sum$ in (22) alle Null sind. Ferner ist leicht zu sehen, daß, wenn $\sum l_\varepsilon \frac{\partial n_\varepsilon}{\partial v} = 0$ ist, auch $\sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \nu_\varepsilon}{\partial v} = 0$ sein muß, usw. Also erhält man schließlich:

$$\left.\begin{aligned}
\sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \nu_\varepsilon}{\partial v} &= \sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial w} = 0,\\
\sum \mu_\varepsilon \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial w} &= \sum \mu_\varepsilon \frac{\partial \nu_\varepsilon}{\partial u} = 0,\\
\sum \nu_\varepsilon \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial u} &= \sum \nu_\varepsilon \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial v} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Man bemerke, daß in jedem Posten der Gleichungen (18) je zwei, in jedem Posten der Gleichungen (23) dagegen alle drei Koordinatenrichtungen vertreten sind. Die oft nützlichen Beziehungen, die von R. H. Weber herrühren, sind an den Zylinderkoordinaten leicht zu verifizieren.

Wie oben gezeigt, ist

$$d s_u = e_u du, \qquad d s_v = e_v dv, \qquad d s_w = e_w dw.$$

Von den Flächenelementen, welche ein Elementarparallelepiped begrenzen, heiße $d\sigma_u$ der Betrag desjenigen, welches die beiden Seiten $d s_v$ und $d s_w$ hat usw. Demgemäß gelten für die skalaren Inhalte dieser Flächenelemente die Formeln:

$$d\sigma_u = e_v e_w dv\, dw, \quad d\sigma_v = e_w e_u dw\, du, \quad d\sigma_w = e_u e_v du\, dv, \qquad (24)$$

und der Inhalt dS des Elementarparallelepipeds ist

$$dS = e_u e_v e_w du\, dv\, dw. \qquad (25)$$

98. Vektoren in krummlinigen Koordinaten.

I. Komponenten. Irgend ein Vektor $\mathfrak{A}$ ist im System der x, y, z als $l\mathfrak{i}$, $m\mathfrak{j}$, $n\mathfrak{k}$ gegeben, wo l, m, n Skalare sind, die man gewöhnlich A_x, A_y, A_z nennt. In u, v, w ist $\mathfrak{i}$ durch $\lambda_1 \mathfrak{i}' + \mu_1 \mathfrak{j}' + \nu_1 \mathfrak{k}'$ zu ersetzen usw. Man erhält also:

$$\left.\begin{aligned} A_u &= \lambda_1 A_x + \lambda_2 A_y + \lambda_3 A_z, \\ A_v &= \mu_1 A_x + \mu_2 A_y + \mu_3 A_z, \\ A_w &= \nu_1 A_x + \nu_2 A_y + \nu_3 A_z, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} A_u &= A_x \frac{1}{e_u}\frac{\partial x}{\partial u} + A_y \frac{1}{e_u}\frac{\partial y}{\partial u} + A_z \frac{1}{e_u}\frac{\partial z}{\partial u}, \\ A_v &= A_x \frac{1}{e_v}\frac{\partial x}{\partial v} + A_y \frac{1}{e_v}\frac{\partial y}{\partial v} + A_z \frac{1}{e_v}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ A_w &= A_x \frac{1}{e_w}\frac{\partial x}{\partial w} + A_y \frac{1}{e_w}\frac{\partial y}{\partial w} + A_z \frac{1}{e_w}\frac{\partial z}{\partial w}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

In Zylinderkoordinaten z. B. wird

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi, \\ A_\varphi &= -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi, \\ A_z &= A_z. \end{aligned}$$

II. Produkte. Wegen der Rechtwinkligkeit der Komponenten bleibt die Definition des skalaren und des vektoriellen Produktes erhalten: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Vektoren, so ist

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = A_u B_u + A_v B_v + A_w B_w, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{c}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \\ (A_v B_w - A_w B_v)\,\mathfrak{i}' + (A_w B_u - A_u B_w)\,\mathfrak{j}' + (A_u B_v - A_v B_u)\,\mathfrak{k}'.\end{array}\right\} \quad (4)$$

III. Gradienten. Ist U ein Skalar, so ist:

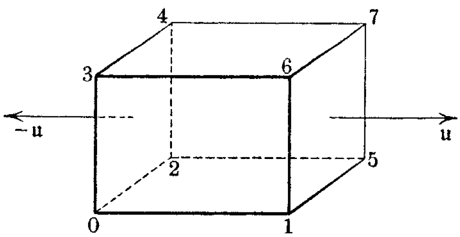
$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{grad}_u U &= \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{s}_u} = \frac{1}{e_u}\frac{\partial U}{\partial u}\,\mathfrak{i}', \\ \mathfrak{grad}_v U &= \frac{1}{e_v}\frac{\partial U}{\partial v}\,\mathfrak{j}', \\ \mathfrak{grad}_w U &= \frac{1}{e_w}\frac{\partial U}{\partial w}\,\mathfrak{k}'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ist $\mathfrak{n}$ die Richtung des maximalen Anstiegs von U, so ist $\mathfrak{grad}_\mathfrak{n} U = \mathfrak{grad}\, U$ schlechthin, und

$$\mathfrak{grad}\, U = \mathfrak{grad}_u U + \mathfrak{grad}_v U + \mathfrak{grad}_w U. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

IV. Divergenz. Die Divergenz des Vektors $\mathfrak{A}$ wird bekanntlich definiert als der Quotient aus dem Oberflächenintegral von $\mathfrak{A}$ über die Oberfläche eines Körperelementes und dem Inhalt dieses Elementes. Nehmen wir als Element das am Schluß des vorigen Paragraphen erwähnte Elementarparallelepiped und betrachten zunächst das Flächenpaar desselben, welches senkrecht auf $\mathfrak{u}$ steht, so hat jede dieser beiden Flächen den Betrag $e_v e_w\, dv\, dw$, vgl. Fig. 6, wo 0 2 4 3 die erste, 1 5 7 6 die zweite dieser Flächen darstellt. Auf 0 2 4 3 hat das Oberflächenintegral offenbar den Wert $-(A_u e_v e_w\, dv\, dw)_u$; auf der entgegengesetzten Fläche ist der Wert $+(A_u e_v e_w\, dv\, dw)_{u+du}$, also liefern die beiden betrachteten Flächen zu dem Oberflächenintegral den Beitrag

Fig. 6.



$$\frac{\partial}{\partial u}(A_u e_v e_w)\, du\, dv\, dw.$$

Die beiden anderen Flächenpaare liefern die Beiträge

$$\frac{\partial}{\partial v}(A_v e_w e_u)\, du\, dv\, dw \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial w}(A_w e_u e_v)\, du\, dv\, dw.$$

Somit wird nach Division mit dem Volumen $e_u e_v e_w du\, dv\, dw$:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{e_u e_v e_w}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(A_u e_v e_w) + \frac{\partial}{\partial v}(A_v e_w e_u) + \frac{\partial}{\partial w}(A_w e_u e_v)\right\}. \quad (7)$$

Für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ ein Potentialvektor mit dem Potential $-U$ ist, ergibt sich daraus:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div} \operatorname{\mathbf{grad}} U = \\ &\frac{1}{e_u e_v e_w}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e_v e_w}{e_u}\frac{\partial U}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e_w e_u}{e_v}\frac{\partial U}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{e_u e_v}{e_w}\frac{\partial U}{\partial w}\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

V. Curl. Der Curl von $\mathfrak{A}$ ergibt sich analog dem Vorigen, wenn man die Definition „der Curl ist gleich dem Quotienten aus dem über die Umrandung eines Flächenelements genommenen Linienintegral von $\mathfrak{A}$ und dem Inhalt des Flächenelementes“ auf ein Flächenelement des Parallelepipeds der Fig. 6 anwendet. Man findet leicht:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{\mathbf{curl}}_u \mathfrak{A} &= \frac{1}{e_v e_w}\left\{\frac{\partial}{\partial v}(e_w A_w) - \frac{\partial}{\partial w}(e_v A_v)\right\}\mathfrak{i}', \\ \operatorname{\mathbf{curl}}_v \mathfrak{A} &= \frac{1}{e_w e_u}\left\{\frac{\partial}{\partial w}(e_u A_u) - \frac{\partial}{\partial u}(e_w A_w)\right\}\mathfrak{j}', \\ \operatorname{\mathbf{curl}}_w \mathfrak{A} &= \frac{1}{e_u e_v}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(e_v A_v) - \frac{\partial}{\partial v}(e_u A_u)\right\}\mathfrak{k}',\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (9)$$

und es ist

$$\operatorname{\mathbf{curl}} \mathfrak{A} = \operatorname{\mathbf{curl}}_u \mathfrak{A} + \operatorname{\mathbf{curl}}_v \mathfrak{A} + \operatorname{\mathbf{curl}}_w \mathfrak{A}. \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

99. Diatensoren in krummlinigen Koordinaten.

Ist ein Diatensor im System der x, y, z durch seine neun Glieder t_{xx}, t_{xy} usw. gegeben, so ist für die Transformation auf u, v, w die allgemeine Transformationsformel des § **18** und **44** auf ihn ohne weiteres anwendbar. Es findet sich, wenn der transformierte Diatensor Φ' heißt,

$$\Phi' = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \lambda_1 t_{xx}+\lambda_2 t_{xy}+\lambda_3 t_{xz}, & \mu_1 t_{xx}+\mu_2 t_{xy}+\mu_3 t_{xz}, & \nu_1 t_{xx}+\nu_2 t_{xy}+\nu_3 t_{xz}, \\ \lambda_1 t_{yx}+\lambda_2 t_{yy}+\lambda_3 t_{yz}, & \mu_1 t_{yx}+\mu_2 t_{yy}+\mu_3 t_{yz}, & \nu_1 t_{yx}+\nu_2 t_{yy}+\nu_3 t_{yz}, \\ \lambda_1 t_{zx}+\lambda_2 t_{zy}+\lambda_3 t_{zz}, & \mu_1 t_{zx}+\mu_2 t_{zy}+\mu_3 t_{zz}, & \nu_1 t_{zx}+\nu_2 t_{zy}+\nu_3 t_{zz}, \end{Bmatrix} \quad (1)$$

wo die λ, μ, ν nunmehr aus dem Schema (4) des § **97** zu entnehmen sind.

Wir wollen mittels dieser Formel den derivativen Diatensor eines Vektors $\mathfrak{A}$ in u, v, w ausdrücken. In x, y, z sind die Glieder des derivativen Diatensors, wie bekannt, $\frac{\partial A_x}{\partial x}$, $\frac{\partial A_x}{\partial y}$ usw. Damit werden die beiden ersten Glieder von $\Omega_{\mathfrak{A}}$:

$$\left.\begin{aligned} t_{uu} &= \lambda_1\left(\lambda_1 \frac{\partial A_x}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial A_x}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) \\ &+ \lambda_2\left(\lambda_1 \frac{\partial A_y}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial A_y}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\ &+ \lambda_3\left(\lambda_1 \frac{\partial A_z}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial A_z}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial A_z}{\partial z}\right), \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

und

$$\left.\begin{aligned} t_{uv} &= \lambda_1\left(\mu_1 \frac{\partial A_x}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial A_x}{\partial y} + \mu_3 \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) \\ &+ \lambda_2\left(\mu_1 \frac{\partial A_y}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial A_y}{\partial y} + \mu_3 \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\ &+ \lambda_3\left(\mu_1 \frac{\partial A_z}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial A_z}{\partial y} + \mu_3 \frac{\partial A_z}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (3)$$

Multipliziert man Gleichung (2) mit e_u, Gleichung (3) mit e_v und bedenkt, daß nach § **97**, Gleichung (10) $e_u \lambda_1 = \frac{\partial x}{\partial u}$ usw., so erhält man

$$e_u t_{uu} = \lambda_1 \frac{\partial A_x}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial A_y}{\partial u} + \lambda_3 \frac{\partial A_z}{\partial u}, \quad \cdots \quad (4)$$

$$e_v t_{uv} = \lambda_1 \frac{\partial A_x}{\partial v} + \lambda_2 \frac{\partial A_y}{\partial v} + \lambda_3 \frac{\partial A_z}{\partial v}. \quad \cdots \quad (5)$$

Hierin ist nun

$$\begin{aligned} A_x &= \lambda_1 A_u + \mu_1 A_v + \nu_1 A_w, \\ A_y &= \lambda_2 A_u + \mu_2 A_v + \nu_2 A_w, \\ A_z &= \lambda_3 A_u + \mu_3 A_v + \nu_3 A_w \end{aligned}$$

zu setzen. Führt man dies aus, so erhält man zunächst für t_{uu}:

$$\begin{aligned} e_u t_{uu} &= \frac{\partial A_u}{\partial u} \sum \lambda_\varepsilon^2 + \frac{\partial A_v}{\partial u} \sum \lambda_\varepsilon \mu_\varepsilon + \frac{\partial A_w}{\partial u} \sum \lambda_\varepsilon \nu_\varepsilon \\ &+ A_u \sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial u} + A_v \sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial u} + A_w \sum \lambda_\varepsilon \frac{\partial \nu_\varepsilon}{\partial u}. \end{aligned} \quad (\varepsilon = 1, 2, 3.)$$

In dieser Gleichung verschwinden der zweite, dritte und vierte Posten rechts, und wenn man auf die übrigen die Gleichungen (18) des § **97** anwendet, erhält man nach Division mit e_u die erste der nachfolgenden Gleichungen; die zweite ergibt sich durch Ausrechnung auf dem gleichen Wege, die übrigen folgen zyklisch:

$$t_{uu} = \frac{\partial A_u}{e_u \partial u} + \frac{A_v}{e_u} \frac{\partial e_u}{e_v \partial v} + \frac{A_w}{e_u} \frac{\partial e_u}{e_w \partial w},$$

$$t_{uv} = \frac{\partial A_u}{e_v \partial v} - \frac{A_v}{e_v} \frac{\partial e_v}{e_u \partial u},$$

$$t_{uw} = \frac{\partial A_u}{e_w \partial w} - \frac{A_w}{e_w} \frac{\partial e_w}{e_u \partial u},$$

$$t_{vu} = \frac{\partial A_v}{e_u \partial u} - \frac{A_u}{e_u} \frac{\partial e_u}{e_v \partial v},$$

$$t_{vv} = \frac{\partial A_v}{e_v \partial v} + \frac{A_w}{e_v} \frac{\partial e_v}{e_w \partial w} + \frac{A_u}{e_v} \frac{\partial e_v}{e_u \partial u},$$

$$t_{vw} = \frac{\partial A_v}{e_w \partial w} - \frac{A_w}{e_w} \frac{\partial e_w}{e_v \partial v},$$

$$t_{wu} = \frac{\partial A_w}{e_u \partial u} - \frac{A_u}{e_u} \frac{\partial e_u}{e_w \partial w},$$

$$t_{wv} = \frac{\partial A_w}{e_v \partial v} - \frac{A_v}{e_v} \frac{\partial e_v}{e_w \partial w},$$

$$t_{ww} = \frac{\partial A_w}{e_w \partial w} + \frac{A_u}{e_w} \frac{\partial e_w}{e_u \partial u} + \frac{A_v}{e_w} \frac{\partial e_w}{e_v \partial v}.$$

Der derivative Diatensor $\Omega_{\mathfrak{A}}$ hat die neun vorstehenden Glieder. Aus diesen werden die Divergenz, die Deformation und der Antitensor von $\mathfrak{A}$ nach den in § **93**, Satz I, II und III, ausgesprochenen Regeln gebildet, und es gelten auch die weiteren Bemerkungen desselben Paragraphen. Die Identität der in § **98** gegebenen Ausdrücke für Divergenz und Curl mit denjenigen, die aus den vorstehenden Gleichungen folgen, ergibt sich sofort, wenn man die Differentiationen in den ersteren ausführt.

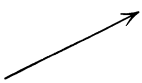
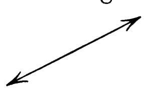
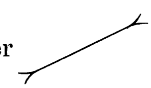
Zweiter Abschnitt.

Die Voigtsche Ableitung des Tensorbegriffes und die selbständigen Tensoren.

Erstes Kapitel:

Die Voigtsche Ableitung des Tensorbegriffes.

100. Der Einzeltensor.

Ein Vektor hat Betrag und Richtung, welch letztere in einem rechtwinkligen Koordinatensystem der x, y, z durch drei Richtungskosinus α_1, α_2, α_3 bestimmt ist. Gibt man den α umgekehrte Vorzeichen, so kehrt sich die Richtung des Vektors um. Die Betrachtung von deformierenden Bewegungen und Kräften führt nun zu der Wahrnehmung, daß Größen existieren, die nicht durch einen Betrag und eine Richtung, sondern durch einen Betrag und eine Doppelrichtung charakterisiert sind. Den einfachsten Fall dieser Art hat man vor sich, wenn man sich vorstellt, eine homogene Strecke werde, ohne daß die Lage ihres Schwerpunktes sich ändert, nach ihrer Doppelrichtung gedehnt. Für diese Dehnung sind dann die beiden entgegengesetzten Richtungen, nach welchen sie stattfindet, offenbar gleichwertig. Während man einen Vektor anschaulich durch eine Strecke mit Pfeilspitze  darstellt, kann das für die Dehnung durch eine Strecke mit zwei Pfeilspitzen geschehen, die  oder  zu zeichnen sind, je nachdem es sich um Verlängerung oder um Verkürzung handelt. Man kann den Doppelpfeil zur vollständigen Charakterisierung der Dehnung benutzen, indem man ihm die Doppelrichtung der Dehnung und zugleich eine Länge gibt, welche dem Betrag der Dehnung entspricht. Die doppelt gerichtete

Größe, welche die Dehnung einer Strecke darstellt, nennen wir einen Einzeltensor.

Die im ersten Teil behandelte reine Deformation ist bis hierher der einzige Fall, in dem wir einen zugleich vorstellbaren und in seinen Eigenschaften gut bekannten Fall von Größen, die durch Betrag und Doppelrichtung bestimmt sind, vor uns haben. Bis zur Erwähnung des Gegenteils werden wir also die Erörterungen dieses Kapitels an den Fall der reinen Deformation anschließen und die zu untersuchenden Größen zunächst als Deformationen, solange vom Einzeltensor die Rede ist, als einfache Dehnungen vorstellen.

Einen Vektor zerlegt man in Komponenten nach den Koordinatenachsen, indem man ihn mit seinen Richtungskosinus multipliziert. Für den Einzeltensor ist eine derartige Zerlegung nicht zulässig, weil die Zweideutigkeit seiner Richtung dabei nicht zum Ausdruck kommen würde. Das letztere kann nur geschehen, wenn man für die Zerlegung des Einzeltensors gerade Potenzen der Richtungskosinus verwendet, weil dann die Bestimmungsstücke unverändert bleiben, wenn die α entgegengesetzte Vorzeichen annehmen. Im einfachsten Fall, der eben der Tatsache entspicht, daß es sich um zwei gleichzeitig entgegengesetzte Vorgänge handelt, wird man die Kombinationen zweiter Dimension der Richtungskosinus benutzen, also die Größen α_1^2, α_2^2, α_3^2, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$ und $\alpha_1\alpha_2$. Ein Einzeltensor heiße π und sein skalarer Betrag sei p, er dehne eine gegebene Strecke, welche die Richtungskosinus α_1, α_2, α_3 besitzt, in ihrer Doppelrichtung. Wir können ihm dann im System der x, y, z sechs Bestimmungsstücke zuschreiben, deren Beträge wir p_{xx}, p_{xy} usw. nennen, und die bestimmt sein sollen durch die Festsetzungen:

$$p_{xx} = \alpha_1^2 p, \qquad p_{yy} = \alpha_2^2 p, \qquad p_{zz} = \alpha_3^2 p, \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$p_{yz} = \alpha_2\alpha_3 p, \qquad p_{zx} = \alpha_3\alpha_1 p, \qquad p_{xy} = \alpha_1\alpha_2 p. \quad . \; . \quad (2)$$

Die drei ersten in Gleichung (1) formulierten Größen heißen Bestimmungsstücke erster Art, die drei anderen solche zweiter Art. Aus (1) und (2) folgen unmittelbar die Gleichungen:

für das erste Tripel:

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$\alpha_1^2 : \alpha_2^2 : \alpha_3^2 = p_{xx} : p_{yy} : p_{zz}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

für das zweite Tripel:

$$\frac{p_{zx}p_{xy}}{p_{yz}} + \frac{p_{xy}p_{yz}}{p_{zx}} + \frac{p_{yz}p_{zx}}{p_{xy}} = p, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \frac{1}{p_{yz}} : \frac{1}{p_{zx}} : \frac{1}{p_{xy}}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Man sieht, daß im Fall des Einzeltensors jedes einzelne der Tripel genügt, um den Betrag und die Doppelrichtung von π zu bestimmen. Das liegt in der Natur der Sache, da der Einzeltensor durch seinen Betrag und durch die beiden Winkel, welche seine Doppelrichtung festlegen, gegeben ist, also nur drei Bestimmungsstücke besitzt. Fällt der Einzeltensor in eine der Koordinatenachsen, z. B. in die Achse der x, so wird $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Es verschwinden also die drei Bestimmungsstücke zweiter Art sämtlich, während von denen erster Art eins übrigbleibt. Hierin liegt ein charakteristischer Unterschied zwischen den beiden Tripeln.

101. Transformation des Einzeltensors.

Ist $\mathfrak{r}$ ein vom Koordinatenanfang aus gezogener Fahrstrahl, der in die Doppelrichtung von π fällt, und ist x, y, z der Endpunkt von $\mathfrak{r}$, so ist $\pm x = \alpha_1 r$, $\pm y = \alpha_2 r$, $\pm z = \alpha_3 r$, also:

$$x^2 = \alpha_1^2 r^2, \qquad y^2 = \alpha_2^2 r^2, \qquad z^2 = \alpha_3^2 r^2, \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$yz = \alpha_2 \alpha_3 r^2, \quad zx = \alpha_3 \alpha_1 r^2, \quad xy = \alpha_1 \alpha_2 r^2. \quad . \; . \quad (2)$$

Die Koeffizienten von r^2 in diesen Gleichungen stimmen mit denen von p in den Gleichungen (1) und (2) des vorigen Paragraphen überein. Daraus folgt offenbar: Die Bestimmungsstücke eines Einzeltensors transformieren sich wie die Quadrate und Produkte der Achsenkomponenten eines Vektors von gleicher Doppelrichtung.

Eine Verschiebung des Anfangspunktes kommt dabei ebensowenig wie beim Vektor zur Geltung, weil in die Definition beider kein Anfangspunkt eingeht.

Gilt für das System der x, y, z und für ein zweites rechtwinkliges System der ξ, η, ζ das Kosinusschema

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3,

so folgt aus $x = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta$ und $\xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$ usw., daß man für die Transformation der Einzeltensoren ein Schema der Koeffizienten aufstellen kann, welches dem für Vektoren ähnlich ist, bis auf einen gleich zu erwähnenden Unterschied. Es lautet

	p_{xx}	p_{yy}	p_{zz}	p_{yz}	p_{zx}	p_{xy}
$p_{\xi\xi}$	α_1^2	α_2^2	α_3^2	$\underline{\alpha_2\alpha_3}$	$\underline{\alpha_3\alpha_1}$	$\underline{\alpha_1\alpha_2}$
$p_{\eta\eta}$	β_1^2	β_2^2	β_3^2	$\underline{\beta_2\beta_3}$	$\underline{\beta_3\beta_1}$	$\underline{\beta_1\beta_2}$
$p_{\zeta\zeta}$	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2	$\underline{\gamma_2\gamma_3}$	$\underline{\gamma_3\gamma_1}$	$\underline{\gamma_1\gamma_2}$
$p_{\eta\zeta}$	$\underline{\underline{\beta_1\gamma_1}}$	$\underline{\underline{\beta_2\gamma_2}}$	$\underline{\underline{\beta_3\gamma_3}}$	$(\beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2)$	$(\beta_3\gamma_1+\beta_1\gamma_3)$	$(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1)$
$p_{\zeta\xi}$	$\underline{\underline{\gamma_1\alpha_1}}$	$\underline{\underline{\gamma_2\alpha_2}}$	$\underline{\underline{\gamma_3\alpha_3}}$	$(\gamma_2\alpha_3+\gamma_3\alpha_2)$	$(\gamma_3\alpha_1+\gamma_1\alpha_3)$	$(\gamma_1\alpha_2+\gamma_2\alpha_1)$
$p_{\xi\eta}$	$\underline{\underline{\alpha_1\beta_1}}$	$\underline{\underline{\alpha_2\beta_2}}$	$\underline{\underline{\alpha_3\beta_3}}$	$(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)$	$(\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_3)$	$(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$.

Bei Benutzung desselben muß man aber, wie die Ausrechnung von x^2 usw. zeigt, die einmal unterstrichenen Größen dann und nur dann mit 2 multiplizieren, wenn die Zeilen des Schemas in Anspruch genommen werden, und die zweimal unterstrichenen, wenn die Kolonnen in Anspruch genommen werden, z. B.:

$$\begin{aligned} p_{yy} &= \alpha_2^2 p_{\xi\xi} + \beta_2^2 p_{\eta\eta} + \gamma_2^2 p_{\zeta\zeta} + 2\beta_2\gamma_2 p_{\eta\zeta} + 2\gamma_2\alpha_2 p_{\zeta\xi} \\ &\quad + 2 a_2\beta_2 p_{\xi\eta}, \\ p_{\eta\zeta} &= \beta_1\gamma_1 p_{xx} + \beta_2\gamma_2 p_{yy} + \beta_3\gamma_3 p_{zz} + (\beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2) p_{yz} \\ &\quad + (\beta_3\gamma_1+\beta_1\gamma_3) p_{zx} + (\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1) p_{xy}. \end{aligned}$$

Darin, daß die Koeffizienten für die letzten Terme der Bestimmungsstücke erster Art mit 2 multipliziert werden müssen, liegt der eben erwähnte Unterschied. Das Schema für Vektoren kann in der gleichen Gestalt von oben nach unten wie von links nach rechts benutzt werden; man bezeichnet diese Eigenschaft dadurch, daß man es „orthogonal" nennt; das Schema für den Einzeltensor ist nicht orthogonal, aber wenn man die Multiplikation mit 2 im Auge behält, gleichfalls bequem zu benutzen.

Nimmt man an, ein Einzeltensor falle in die Achse der ξ, sei also bestimmt durch die Gleichungen $p_{\xi\xi} = p$, $p_{\eta\eta} = p_{\zeta\zeta} = 0$, so wird nach dem obigen Schema:

$$p_{xx} = \alpha_1^2 p, \qquad p_{yy} = \alpha_2^2 p, \qquad p_{zz} = \alpha_3^2 p, \quad \ldots \quad (3)$$

$$p_{yz} = \alpha_2\alpha_3 p, \qquad p_{zx} = \alpha_3\alpha_1 p, \qquad p_{xy} = \alpha_1\alpha_2 p, \quad \ldots \quad (4)$$

d. h. die Transformation von einer in die Richtung des Einzeltensors fallenden Achse auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem liefert die Bestimmungsstücke des Einzeltensors in diesem Koordinatensystem. Zerlegung nach den Koordinatenachsen kann definiert werden als Transformation nach diesen Achsen. Mit einem alsbald zu erwähnenden Vorbehalt kann also das Transformationsgesetz als das entscheidende Kennzeichen für den Tensorcharakter angesehen werden.

102. Die Spezies des Einzeldiatensors.

Wir bleiben bei der Annahme, daß die Doppelrichtung des betrachteten Einzeldiatensors in die Achse der ξ falle. Seine Wirkung besteht dann darin, daß er einen Vektor von der Richtung $\pm\xi$ dehnt, ohne ihn zu drehen. Dieselbe Operation läßt sich aber offenbar in der Ausdrucksweise des ersten Teiles darstellen durch einen auf die Achsen der ξ, η, ζ bezogenen Tensor

$$\tau' = \begin{cases} t_{\xi\xi} & 0 \quad 0 \\ 0 & 1 \quad 0 \\ 0 & 0 \quad 1. \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Transformiert man diesen nach § **6** auf das System der x, y, z, so erhält man:

$$\begin{aligned} t_{xx} &= \alpha_1^2 t_{\xi\xi} + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 + \alpha_1^2(t_{\xi\xi} - 1), \\ t_{yy} &= 1 + \alpha_2^2(t_{\xi\xi} - 1), \quad t_{zz} = 1 + \alpha_3^2(t_{\xi\xi} - 1), \\ t_{yz} &= \alpha_2\alpha_3 t_{\xi\xi} + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = \alpha_2\alpha_3(t_{\xi\xi} - 1), \\ t_{zx} &= \alpha_3\alpha_1(t_{\xi\xi} - 1), \qquad t_{xy} = \alpha_1\alpha_2(t_{\xi\xi} - 1). \end{aligned}$$

Setzt man hierin $t_{\xi\xi} - 1 = p$, so erhält man in x, y, z

$$\tau = \begin{cases} 1 + \alpha_1^2 p & \alpha_1\alpha_2 p & \alpha_3\alpha_1 p \\ \alpha_1\alpha_2 p & 1 + \alpha_2^2 p & \alpha_2\alpha_3 p \\ \alpha_3\alpha_1 p & \alpha_2\alpha_3 p & 1 + \alpha_3^2 p. \end{cases}$$

Es ist also

$$\tau = \pi + I; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

jedes der Diagonalglieder von τ ist um 1 größer als das entsprechende Diagonalglied von π. Das ist aber die Beziehung, welche ausspricht, daß τ und π korrespondierende Tensoren sind. Es ergibt sich also der folgende Schluß: Man kann ein und denselben Einzeltensor auf zwei verschiedene Weisen darstellen, erstens als τ nach den Grundsätzen des ersten Teiles, indem man ausdrückt, daß er als symbolischer Faktor einen Vektor in eine seiner homogenen linearen Vektorfunktionen überführt, zweitens als π, indem man rein von seinen Transformationseigenschaften ausgeht. Tut man das letztere ohne weiteren Zusatz, so erhält man einen Additivtensor π, der mit dem Verhältnistensor τ korrespondiert.

Der Unterschied rührt daher, daß die Bestimmung aus den Transformationseigenschaften allein nicht ganz vollständig ist, daß sie vielmehr noch eine additive Invariante zuläßt. Schon in § **9** und **86** wurde darauf hingewiesen, daß die Transformationseigenschaften eines Tensors sich nicht ändern, wenn man ihm die Größe nI zusetzt, wo n irgend eine konstante Zahl ist. Auf Grund der bloßen Transformationseigenschaften kann man also $\pi + nI$ für π setzen. Aus Gründen, die in der Anmerknng zu § **85** bereits dargelegt wurden, interessieren uns nur die Werte 1 und 0 der Zahl n. Setzt man $n = 1$, so wird der Tensor durch τ, setzt man $n = 0$, so wird er durch π ausgedrückt.

Im Anschluß hieran können wir die beiden Einzeltensoren τ und π in korrespondierender Form:

$$\pi = \begin{cases} \alpha_1^2 p & \alpha_1\alpha_2 p \quad \alpha_3\alpha_1 p \\ \alpha_1\alpha_2 p & \alpha_2^2 p \quad \alpha_2\alpha_3 p \\ \alpha_3\alpha_1 p & \alpha_2\alpha_3 p \quad \alpha_3^2 p \end{cases}$$

und $$\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\tau = \begin{cases} 1+\alpha_1^2 p & \alpha_1\alpha_2 p \quad \alpha_3\alpha_1 p \\ \alpha_1\alpha_2 p & 1+\alpha_2^2 p \quad \alpha_2\alpha_3 p \\ \alpha_3\alpha_1 p & \alpha_2\alpha_3 p \quad 1+\alpha_3^2 p \end{cases}$$

schreiben, und es gelten nunmehr für π die in Teil II, Abschnitt 1, Kapitel 1 gegebenen Erwägungen.

103. Tensor.

Es seien nun zwei aufeinander senkrechte multiplikative Einzeltensoren der Doppelrichtungen ξ und η gegeben; nennen wir sie τ und τ' und drücken sie mit der letzten Gleichung des vorigen Paragraphen in p aus, so ist in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$\tau = \begin{cases} 1+\alpha_1^2 p & \alpha_1\alpha_2 p \quad \alpha_3\alpha_1 p \\ \alpha_1\alpha_2 p & 1+\alpha_2^2 p \quad \alpha_2\alpha_3 p \\ \alpha_3\alpha_1 p & \alpha_2\alpha_3 p \quad 1+\alpha_3^2 p, \end{cases} \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\tau' = \begin{cases} 1+\beta_1^2 p' & \beta_1\beta_2 p' \quad \beta_3\beta_1 p' \\ \beta_1\beta_2 p' & 1+\beta_2^2 p' \quad \beta_2\beta_3 p' \\ \beta_3\beta_1 p' & \beta_2\beta_3 p' \quad 1+\beta_3^2 p'. \end{cases}$$

Multipliziert man nach bekannter Regel τ mit τ', so findet man, daß die Terme, welche $p p'$ enthalten, sämtlich verschwinden, und es ergibt sich:

$$\tau\tau' = \begin{cases} 1 + \alpha_1^2 p + \beta_1^2 p' & \alpha_1\alpha_2 p + \beta_1\beta_2 p' & \alpha_3\alpha_1 p + \beta_3\beta_1 p' \\ \alpha_1\alpha_2 p + \beta_1\beta_2 p' & 1 + \alpha_2^2 p + \beta_2^2 p' & \alpha_2\alpha_3 p + \beta_2\beta_3 p' \\ \alpha_3\alpha_1 p + \beta_3\beta_1 p' & \alpha_2\alpha_3 p + \beta_2\beta_3 p' & 1 + \alpha_3^2 p + \beta_3^2 p'; \end{cases} \quad (2)$$

d. h. die operative Multiplikation von zwei aufeinander senkrecht stehenden Einzeltensoren, die beide in dem gleichen Koordinatensystem als Verhältnistensoren gegeben sind, vollzieht man, indem man die Glieder der entsprechenden Additivtensoren addiert und aus diesen durch Addition von I wieder einen Verhältnistensor herstellt.

Dieser Satz läßt sich offenbar ohne weiteres auf drei aufeinander senkrecht stehende Einzeltensoren übertragen, denn die Multiplikation von $\tau\tau'$ mit einem dritten in die Richtung der ζ fallenden Einzeltensor τ'' vollzieht sich in derselben Form wie diejenige von τ mit τ'. Es ergibt sich also:

$$\tau\tau'\tau'' = \pi + \pi' + \pi'' + I. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Das Produkt $\tau\tau'\tau''$ stellt in Gemäßheit dessen, was über operative Multiplikationen festgestellt wurde, drei sukzessive Dehnungen nach drei aufeinander senkrecht stehenden Achsen dar, es ist also ein Verhältnistensor T im Sinne der im ersten Teil gegebenen Definition (vgl. § **56** am Schluß).

Die Summe $\pi + \pi' + \pi''$ nennen wir einen Additivtensor Π, und die Richtungen der π, π', π'', welche mit denen der τ, τ', τ'' übereinstimmen, bezeichnen wir als seine Hauptachsenrichtungen. Die entsprechenden Größen p, p', p'' sind die Beträge seiner Konstituenten. Es ist $T = \Pi + I$.

Somit sind wir auf dem Wege über die Transformationseigenschaften zu den aus dem Früheren bereits bekannten Definitionen von Verhältnistensor und Additivtensor gelangt.

Es ist darauf aufmerksam zu machen, daß die hier gegebene Ableitung sich zwar an die Vorstellung der dehnenden Deformation anlehnt, aber nicht notwendig mit ihr verknüpft ist. Die Transformationen können auch gültig sein für Größen, die nicht Deformationen sind; darin liegt die größere Allgemeinheit, welche durch die Voigtsche Ableitung gewährleistet wird.

Außerdem ergibt sich für den hier behandelten speziellen Fall die Bemerkung: Die (operative) Multiplikation zweier orthogonalen Einzeltensoren ist geometrisch gleichbedeutend nicht mit der Multiplikation, sondern mit der Addition der korrespondierenden Additivtensoren. Das gilt aber in dieser Einfachheit nur, wenn die Einzeltensoren aufeinander senkrecht stehen.

Aus der Gleichung $\Pi = \pi + \pi' + \pi''$ folgt, daß man berechtigt ist, die Einzelgrößen π, π', π'' als Komponenten von Π zu bezeichnen. Daraus, daß in § **100** die Herstellung der Größen p_{xx}, p_{xy} usw. als eine Zerlegung aufgefaßt wurde, folgt ferner, daß man auch diese Größen in Analogie mit den Komponenten eines Vektors als Komponenten des Einzeltensors auffassen und somit schließlich die Glieder eines Additivtensors allgemein als seine Komponenten bezeichnen kann, wie dies von W. Voigt geschehen ist. Hier ergibt sich also für die Ausdehnung des Summenbegriffes auf die tensorielle Zusammenfügung eine Begründung, die (vgl. § **6**) auf dem Boden der in § **1** gegebenen Definition nicht vorhanden war.

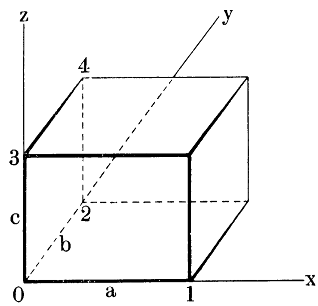
Zweites Kapitel:

Selbständige Tensoren und Diatensoren.

104. Der Voigtsche Spannungstensor für homogen verteilte, im Gleichgewicht befindliche Oberflächenkräfte.

An den Anfang eines rechtwinkligen Koordinatensystems der x, y, z legen wir ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den Seiten (Fig. 7) $0\,1 = a$, $0\,2 = b$, $0\,3 = c$, so daß die drei Kanten a, b, c in die Koordinatenachsen fallen. Von je zwei gegenüberliegenden Seitenflächen des Parallelepipeds markieren wir diejenige, welche durch den Nullpunkt geht, mit einem unten angesetzten Minuszeichen, die gegenüberliegende mit einem Pluszeichen, so daß also die Fläche $0\,2\,4\,3$ cb_-, die gegenüberliegende cb_+ heißt.

Fig. 7.



Es sollen nun auf sämtliche sechs Flächen des Parallelepipeds Kräfte wirken, und zwar nehmen wir an, diese Kräfte seien homogen verteilt, d. h. so, daß auf jede Einheit ein und derselben Fläche gleich große und gleich gerichtete Kraftanteile kommen. Dann können die Kräfte für jede Fläche offenbar zu einer Resultante vereinigt werden, die im Mittelpunkt der Fläche angreift. Wird z. B. die Kraft, welche auf die Einheit einer Fläche bc wirkt, mit $\mathfrak{p}_x$ bezeichnet, so wirkt auf die ganze Fläche die Kraft $bc\mathfrak{p}_x$ usw. Man erhält daher, wenn man auch die Kräfte, die auf eine negativ markierte Fläche wirken, mit einer Minusmarke versieht, die folgende, ohne weiteres verständliche Liste von Kräften und Angriffspunkten:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\text{Fläche:} & \text{Kraft:} & & \text{Angriffspunkt:} & \\
bc_- & bc\mathfrak{p}_{-x} & x = 0, & y = \frac{b}{2}, & z = \frac{c}{2}, \\
bc_+ & bc\mathfrak{p}_{+x} & x = a, & y = \frac{b}{2}, & z = \frac{c}{2}, \\
ca_- & ca\mathfrak{p}_{-y} & x = \frac{a}{2}, & y = 0, & z = \frac{c}{2}, \\
ca_+ & ca\mathfrak{p}_{+y} & x = \frac{a}{2}, & y = b, & z = \frac{c}{2}, \\
ab_- & ab\mathfrak{p}_{-z} & x = \frac{a}{2}, & y = \frac{b}{2}, & z = 0, \\
ab_+ & ab\mathfrak{p}_{+z} & x = \frac{a}{2}, & y = \frac{b}{2}, & z = c,
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Wir stellen nun weiter die Bedingung, daß diese Kräfte an dem Parallelepiped im Gleichgewicht sein sollen. Das heißt, sowohl ihre Resultante wie ihre Momente in bezug auf die Koordinatenachsen sollen verschwinden. Die drei Achsenkomponenten von $\mathfrak{p}_{+x}$ mögen der Reihe nach $\mathfrak{p}_{xx}$, $\mathfrak{p}_{xy}$, $\mathfrak{p}_{xz}$ heißen, diejenigen von $\mathfrak{p}_{-y}$ heißen $\mathfrak{p}_{-yx}$ usw. Dann ergibt sich

erstens: die sechs Kräfte liefern 18 Komponenten, und wenn die Resultanten Null sein sollen, so muß sein

$$\left.\begin{array}{lll}
\mathfrak{p}_{xx} + \mathfrak{p}_{-xx} = 0, & \mathfrak{p}_{yx} + \mathfrak{p}_{-yx} = 0, & \mathfrak{p}_{xz} + \mathfrak{p}_{-xz} = 0, \\
\mathfrak{p}_{xy} + \mathfrak{p}_{-xy} = 0, & \mathfrak{p}_{yy} + \mathfrak{p}_{-yy} = 0, & \mathfrak{p}_{yz} + \mathfrak{p}_{-yz} = 0, \\
\mathfrak{p}_{xz} + \mathfrak{p}_{-xz} = 0, & \mathfrak{p}_{yz} + \mathfrak{p}_{-yz} = 0, & \mathfrak{p}_{zz} + \mathfrak{p}_{-zz} = 0;
\end{array}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

zweitens: die y- und z-Komponenten der sechs in Liste (1) aufgestellten Kräfte sind der Reihe nach:

$$\begin{aligned} &bc\mathfrak{p}_{-xy} \text{ und } bc\mathfrak{p}_{-xz}, && bc\mathfrak{p}_{xy} \text{ und } bc\mathfrak{p}_{xz}, \\ &ca\mathfrak{p}_{-yy} \text{ und } ca\mathfrak{p}_{-yz}, && ca\mathfrak{p}_{yy} \text{ und } ca\mathfrak{p}_{yz}, \\ &ab\mathfrak{p}_{-zy} \text{ und } ab\mathfrak{p}_{-zz}, && ab\mathfrak{p}_{zy} \text{ und } ab\mathfrak{p}_{zz}. \end{aligned}$$

Werden also die Beträge ihrer Momente in bezug auf die Achse der x der Reihe nach mit L_1, L_2 usw. bezeichnet, so ist ($p_{\mu\nu}$ der Betrag von $\mathfrak{p}_{\mu\nu}$):

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \left(\frac{b}{2}p_{-xz} - \frac{c}{2}p_{-xy}\right)bc, & L_2 &= \left(\frac{b}{2}p_{xz} - \frac{c}{2}p_{xy}\right)bc, \\ L_3 &= \left(0 . p_{-yz} - \frac{c}{2}p_{-yy}\right)ca, & L_4 &= \left(b\,p_{yz} - \frac{c}{2}p_{yy}\right)ca, \\ L_5 &= \left(\frac{b}{2}p_{-zz} - 0 . p_{-zy}\right)ab, & L_6 &= \left(\frac{b}{2}p_{zz} - c p_{zy}\right)ab, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und durch Addition dieser sämtlichen L_ν ergibt sich für das resultierende Moment unter Berücksichtigung von Gleichung (2):

$$L = abc(p_{yz} - p_{zy}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Soll dieses, wie die Gleichgewichtsbedingung verlangt, verschwinden, so muß mit zyklischer Fortsetzung sein:

$$p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Es bestehen also nunmehr zwischen den 18 Komponentenbeträgen die 12 Gleichungen (2) und (5), so daß nur 6 von jenen unabhängig sind. Nach Gleichung (2) sind die negativ markierten Kräfte durch die positiven mit bestimmt; sehen wir also die letzteren als bestimmend an, so sind die übrigbleibenden unabhängigen Größen die folgenden:

Erste Gruppe.

$\mathfrak{p}_{xx}$, Angriff Mitte bc_+, Richtung $\mathfrak{x}$, bestimmt gleichzeitig $\mathfrak{p}_{-xx}$ Richtung $-\mathfrak{x}$,
$\mathfrak{p}_{yy}$, " " ca_+, " $\mathfrak{y}$, " " $\mathfrak{p}_{-yy}$ " $-\mathfrak{y}$,
$\mathfrak{p}_{zz}$, " " ab_+, " $\mathfrak{z}$, " " $\mathfrak{p}_{-zz}$ " $-\mathfrak{z}$.

Zweite Gruppe.

$\mathfrak{p}_{yz}$ liegt in ca_+, Richtung $\mathfrak{z}$, bestimmt gleichzeitig:
$\mathfrak{p}_{-yz}$ in ca_- mit der Richtung $-\mathfrak{z}$,
$\mathfrak{p}_{zy}$ " ab_+ " " " $\mathfrak{y}$,
$\mathfrak{p}_{-zy}$ " ab_- " " " $-\mathfrak{y}$,

$\mathfrak{p}_{zx}$ liegt in ab_+, Richtung $\mathfrak{x}$, bestimmt $\mathfrak{p}_{-zx}$, $\mathfrak{p}_{xz}$ und $\mathfrak{p}_{-xz}$,
$\mathfrak{p}_{xy}$ " " bc_+, " $\mathfrak{y}$, " $\mathfrak{p}_{-xy}$, $\mathfrak{p}_{yx}$ " $\mathfrak{p}_{-yx}$.

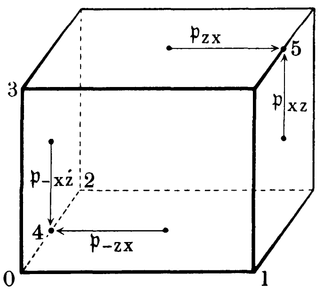
Wir fassen nun zunächst die entgegengesetzt gleichen und einander gegenüberliegenden Kräfte $\mathfrak{p}_{xx}$ und $\mathfrak{p}_{-xx}$ zu einer Spannung π_{xx} zusammen und mit zyklischer Fortsetzung:

$$\left.\begin{array}{llllll} \mathfrak{p}_{xx} \text{ und } & \mathfrak{p}_{-xx} & \text{zu} & \pi_{xx} & \text{vom Betrage} & P_{xx}, \\ \mathfrak{p}_{yy} \quad \text{"} & \mathfrak{p}_{-yy} & \text{"} & \pi_{yy} & \text{"} \quad \text{"} & P_{yy}, \\ \mathfrak{p}_{zz} \quad \text{"} & \mathfrak{p}_{-zz} & \text{"} & \pi_{zz} & \text{"} \quad \text{"} & P_{zz}. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Es bietet sich hier die folgende Frage dar: Man setze irgend zwei entgegengesetzt gleiche Vektoren $\mathfrak{v}$ und $-\mathfrak{v}$ zu einem Einzeltensor zusammen. Welches ist der „Betrag" dieses Einzeltensors? Soll man ihm den Wert v oder den Wert $2v$ zuschreiben? Auf dem Gebiete der reinen Tensoren finden sich keine Tatsachen, die zu einer Entscheidung dieser Frage Veranlassung geben; solche treten erst auf, wenn es sich um Diatensoren handelt, wo unter Umständen zwei Vektoren von entgegengesetzter Richtung und ungleicher Größe zusammengesetzt werden müssen. Näheres in § **109**. Hier sei vorgreifend bemerkt, daß man durch die Betrachtung der Diatensoren dazu geführt wird, $2v$ als den Betrag des aus $\mathfrak{v}$ und $-\mathfrak{v}$ gebildeten Tensors anzusehen. Danach ist $P_{xx} = 2p_{xx}$, $P_{yy} = 2p_{yy}$ und $P_{zz} = 2p_{zz}$.

Ferner: In Fig. 8 sind die vier Kräfte, in deren Marken x und z auftreten, eingezeichnet. Sie sind offenbar sämtlich senkrecht zur Achse der y und symmetrisch gegen die Gerade 45 gruppiert. Zwei gegenüberliegende entgegengesetzt gleiche Kräfte, wie $\mathfrak{p}_{zx}$ und $\mathfrak{p}_{-zx}$, bilden offenbar ein Kräftepaar, ebenso $\mathfrak{p}_{xz}$ und $\mathfrak{p}_{-xz}$, und diese Kräftepaare haben gleiche Beträge, entgegengesetzten Sinn, und die Achse beider hat die Doppelrichtung der y. Sie bilden demnach, wenn sie auf ihrer Achse abgetragen werden, einen axialen Einzeltensor im Sinne des § **100**. Wir fassen sie demnach zu einem solchen zusammen, nennen denselben π_{zx} und schreiben ihm den Betrag P_{zx} zu.

Fig. 8.



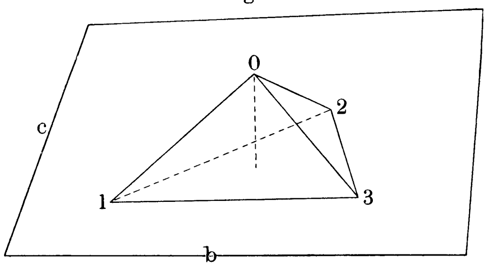
Verfährt man ebenso für die vier Kräftepaare, welche senkrecht auf z, und für die weiteren vier, welche senkrecht auf x stehen, so erhält man insgesamt drei Einzeltensoren:

$$\left.\begin{array}{llll} \pi_{yz}, & \text{Betrag } P_{yz}, & \text{Doppelrichtung der Achsen} & x, \\ \pi_{zx}, & \quad \text{"} \quad P_{zx}, & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & y, \\ \pi_{xy}, & \quad \text{"} \quad P_{xy}, & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & z. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Die Größen π_{xx}, π_{yy}, π_{zz} sind die normalen oder Zugspannungen der Elastizitätslehre, die Größen π_{yz}, π_{zx}, π_{xy} sind die tangentialen oder Schubspannungen, auch scherende Spannungen genannt. Dem Begriff Spannung entspricht die Zweiseitigkeit der π.

Jedes π hat nun offenbar die Zweiseitigkeit eines Einzeltensors. Dies legt die Frage nahe, welches seine Transformationsgesetze sind. Um dieselbe zu beantworten, wählen wir zunächst eine von den Flächen des Parallelepipeds, etwa die Fläche bc_+, aus und legen auf dieselbe (vgl. Fig. 9) ein unendlich kleines Tetraeder auf, dessen drei außerhalb der Fläche bc liegende Kanten im Punkte 0 unter rechten Winkeln zusammenstoßen. Wir nehmen die Kanten 0 1, 0 2, 0 3 zu Achsen eines neuen Koordinatensystems der ξ, η, ζ. Die frühere Achse der x hat dann die Richtung eines Lotes von 0 auf die Fläche bc. Das Kosinusschema für die beiden Koordinatensysteme sei das bisher benutzte.

Fig. 9.



Der Flächeninhalt des Dreiecks 1 2 3, in welchem die Fläche bc das Tetraeder schneidet, heiße f, dann sind die drei Flächen 0 2 3, 0 3 1 und 0 1 2 die Projektionen von f auf die Koordinatenebenen der $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$, also ist:

$$023 = \alpha_1 f, \qquad 031 = \beta_1 f, \qquad 012 = \gamma_1 f. \quad . \quad . \quad (8)$$

Wir wollen nun annehmen, daß auf die drei Seitenflächen des Tetraeders wiederum homogen verteilte, aber rein normale Zugkräfte angreifen. Dieselben seien pro Flächeneinheit

auf 0 2 3	$\mathfrak{s}_\xi$,	Richtung $+\xi$,	Betrag	s_ξ,
„ 0 3 1	$\mathfrak{s}_\eta$,	„ $+\eta$,	„	s_η,
„ 0 1 2	$\mathfrak{s}_\zeta$,	„ $+\zeta$,	„	s_ζ.

Die resultierenden Kräfte, welche auf die drei Flächen wirken, haben dann die Beträge

$$\alpha_1 f s_\xi, \qquad \beta_1 f s_\eta, \qquad \gamma_1 f s_\zeta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und wir wollen nunmehr diese Beträge so bestimmen, daß ihre Gesamtwirkung gleich ist der Wirkung, welche die ursprünglich an der Fläche bc gegebene Kraft $\mathfrak{p}_x$ auf die Grundfläche f übte. Zu dem Ende müssen offenbar die drei Komponenten von $f\mathfrak{p}_x$ nach ξ, η, ζ mit den in (9) aufgezählten Komponenten identisch sein, d. h.:

$$\left.\begin{aligned} p_x \cos \xi, \mathfrak{p}_x &= \alpha_1 s_\xi, \\ p_x \cos \eta, \mathfrak{p}_x &= \beta_1 s_\eta, \\ p_x \cos \zeta, \mathfrak{p}_x &= \gamma_1 s_\zeta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Führt man dieselbe Konstruktion an den Flächen ca und ab aus, so erhält man die weiteren sechs entsprechenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p_y \cos \xi, \mathfrak{p}_y &= \alpha_2 s_\xi, \\ p_y \cos \eta, \mathfrak{p}_y &= \beta_2 s_\eta, \\ p_y \cos \zeta, \mathfrak{p}_y &= \gamma_2 s_\zeta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

und

$$\left.\begin{aligned} p_z \cos \xi, \mathfrak{p}_z &= \alpha_3 s_\xi, \\ p_z \cos \eta, \mathfrak{p}_z &= \beta_3 s_\eta, \\ p_z \cos \zeta, \mathfrak{p}_z &= \gamma_3 s_\zeta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Multipliziert man nun die erste Gleichung (10) mit α_1, die zweite mit β_1, die dritte mit γ_1 und addiert, so erhält man links

$$p_x (\alpha_1 \cos \xi, \mathfrak{p}_x + \beta_1 \cos \eta, \mathfrak{p}_x + \gamma_1 \cos \zeta, \mathfrak{p}_x),$$

und das ist

$$p_x(\cos \xi, x \cos \xi, \mathfrak{p}_x + \cos \eta, x \cos \eta, \mathfrak{p}_x + \cos \zeta, x \cos \zeta, \mathfrak{p}_x),$$

also

$$p_x \cos x, \mathfrak{p}_x \quad \text{oder} \quad p_{xx}.$$

Die Operation ergibt also

$$p_{xx} = \alpha_1^2 s_\xi + \beta_1^2 s_\eta + \gamma_1^2 s_\zeta \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

und mit zyklischer Fortsetzung

$$\left.\begin{aligned} p_{yy} &= \alpha_2^2 s_\xi + \beta_2^2 s_\eta + \gamma_2^2 s_\zeta, \\ p_{zz} &= \alpha_3^2 s_\xi + \beta_3^2 s_\eta + \gamma_3^2 s_\zeta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Offenbar gelten Gleichungen mit denselben Koeffizienten für $-p_{-xx}$, $-p_{-yy}$ und $-p_{-zz}$. Fassen wir also nun wieder die einander gegenüberliegenden entgegengesetzt gleichen Kräfte der ersten Gruppe zu Spannungen zusammen und schreiben dann auch auf der rechten Seite S_ν statt s_ν, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} P_{xx} &= \alpha_1^2 S_\xi + \beta_1^2 S_\eta + \gamma_1^2 S_\zeta, \\ P_{yy} &= \alpha_2^2 S_\xi + \beta_2^2 S_\eta + \gamma_2^2 S_\zeta, \\ P_{zz} &= \alpha_3^2 S_\xi + \beta_3^2 S_\eta + \gamma_3^2 S_\zeta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Multipliziert man die erste Gleichung (11) mit α_3, die zweite mit β_3, die dritte mit γ_3 und addiert, so erhält man:

$$p_y(\alpha_3 \cos \xi, \mathfrak{p}_y + \beta_3 \cos \eta, \mathfrak{p}_y + \gamma_3 \cos \zeta, \mathfrak{p}_y) = \alpha_2 \alpha_3 s_\xi + \beta_2 \beta_3 s_\eta + \gamma_2 \gamma_3 s_\zeta.$$

Hier steht links

$$p_y(\cos \xi, z \cos \xi, \mathfrak{p}_y + \cos \eta, z \cos \eta, \mathfrak{p}_y + \cos \zeta, z \cos \zeta, \mathfrak{p}_y) = p_y \cos z, \mathfrak{p}_y = p_{yz},$$

also mit zyklischer Fortsetzung:

$$\left.\begin{aligned} p_{yz} &= \alpha_2 \alpha_3 s_\xi + \beta_2 \beta_3 s_\eta + \gamma_2 \gamma_3 s_\zeta, \\ p_{zx} &= \alpha_3 \alpha_1 s_\xi + \beta_3 \beta_1 s_\eta + \gamma_3 \gamma_1 s_\zeta, \\ p_{xy} &= \alpha_1 \alpha_2 s_\xi + \beta_1 \beta_2 s_\eta + \gamma_1 \gamma_2 s_\zeta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

Multipliziert man die erste Gleichung (12) mit α_2, die zweite mit β_2, die dritte mit γ_2, so findet sich auf dem gleichen Wege mit zyklischer Fortsetzung:

$$\left.\begin{aligned} p_{zy} &= \alpha_2 \alpha_3 s_\xi + \beta_2 \beta_3 s_\eta + \gamma_2 \gamma_3 s_\zeta = p_{yz}, \\ p_{xz} &= p_{zx}, \\ p_{yx} &= p_{xy}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

Faßt man nun wieder p_{yz}, p_{-yz}, p_{zy} und p_{-zy} zu je einer Spannung zusammen, so ergibt sich analog wie oben:

$$\left.\begin{aligned} P_{yz} &= \alpha_2 \alpha_3 S_\xi + \beta_2 \beta_3 S_\eta + \gamma_2 \gamma_3 S_\zeta, \\ P_{zx} &= \alpha_3 \alpha_1 S_\xi + \beta_3 \beta_1 S_\eta + \gamma_3 \gamma_1 S_\zeta, \\ P_{xy} &= \alpha_1 \alpha_2 S_\xi + \beta_1 \beta_2 S_\eta + \gamma_1 \gamma_2 S_\zeta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (18)$$

Die Gleichungen (15) und (18) sind die Transformationsgleichungen für die uns beschäftigende Größe, und zwar geben sie die Transformation von den Achsen der ξ, η, ζ auf diejenigen der x, y, z an. Sie stimmen vollständig überein mit den Transformationsgleichungen des § **6** für einen Tensor, der von seinen Hauptachsen auf irgend ein anderes rechtwinkliges Achsensystem transformiert wird. Sie ergeben also den Satz, daß die Beträge der Spannungen sich transformieren wie die Glieder eines Tensors, und sie zeigen zugleich, daß S_ξ, S_η, S_ζ die Konstituenten dieses Tensors sind.

Die bisherige Deduktion bezieht sich unmittelbar nur auf das unendlich kleine Tetraeder der Fig. 9 und die entsprechenden kleinen Tetraeder, welche man sich auf den Flächen *ca* und *ab* hergestellt zu denken hat. Man kann aber jede von den Flächen *bc*, *ca* und *ab* vollständig und kontinuierlich mit derartigen kleinen Tetraedern überdecken, deren gleichnamige Achsen sämtlich die gleiche Richtung haben, wenn man die eine Hälfte der Tetraeder konvex, die andere konkav macht. Also gilt die Deduktion für alle Elemente der Flächen *bc*, *ca* und *ab*; d. h. sie gilt für die Flächen selbst. Hiernach kann man die sechs Einzeltensoren π_{xx}, π_{xy} usw. zu einem dreiachsigen Tensor zusammenfassen, den wir provisorisch schreiben:

$$\begin{cases} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{zx} \\ \pi_{xy} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{yz} & \pi_{zz}. \end{cases}$$

In dieser Zusammenstellung kann man noch π_{yx} statt π_{xy} usw. schreiben. Die rationellste Schreibweise erhält man, wenn man die Größen so zusammenstellt, daß in jeder Zeile die Kräfte, welche (siehe oben S. 225, erste und zweite Gruppe) als bestimmend angenommen sind, die gleiche Richtung haben. Das ist der Fall, wenn man schreibt:

$$\Pi = \begin{cases} \pi_{xx} & \pi_{yx} & \pi_{zx} \\ \pi_{xy} & \pi_{yy} & \pi_{zy} \\ \pi_{xz} & \pi_{yz} & \pi_{zz} \end{cases} \qquad (19)$$

mit

$$\pi_{xy} = \pi_{yx}, \qquad \pi_{zx} = \pi_{xz}, \qquad \pi_{yz} = \pi_{zy}.$$

In Gleichung (19) gibt die erste Marke an jedem der π an, an welchem Flächenpaar der betreffende Einzeltensor angreift, die zweite Marke aber gibt die Richtung der bestimmenden Kräfte an.

Fallen die Achsen der x, y, z in die Richtung der ξ, η, ζ, so fallen die Seitenglieder fort und es bleibt:

$$\Pi = \begin{cases} \pi_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\zeta\zeta}. \end{cases} \qquad (20)$$

Mittels der vorstehenden Ableitung hat W. Voigt das „Tensortripel“, unseren „Tensor“, eingeführt.

105. Diatensor für nicht im Gleichgewicht befindliche Oberflächenkräfte.

Das Parallelepiped und die homogene Kraftverteilung des vorigen Paragraphen werden beibehalten, auch sei zunächst die Resultante der Kräfte $\mathfrak{p}$ nach wie vor Null. Wir wollen aber jetzt annehmen, das resultierende Moment der Kräfte $\mathfrak{p}$ sei von Null verschieden. Es bleiben dann offenbar sämtliche Zerlegungen des vorigen Paragraphen bestehen. Da durch das Verschwinden der Momente Gleichung (4) die Gleichheit der tangentialen Komponenten und damit die Gleichungen $p_{xy} = p_{yz}$ usw. bedingt sind, so besteht die eintretende Änderung darin, daß diese Gleichungen jetzt nicht mehr gelten. Bildet man also ganz wie im vorigen Paragraphen den Diatensor

$$\Pi = \begin{cases} \pi_{xx} & \pi_{yx} & \pi_{zx} \\ \pi_{xy} & \pi_{yy} & \pi_{zy} \\ \pi_{xz} & \pi_{yz} & \pi_{zz}, \end{cases} \qquad (1)$$

so bestehen die Gleichungen $\pi_{xy} = \pi_{yx}$ usw. nicht mehr; Π ist asymmetrisch. Man kann dann Π nach der bekannten Gleichung

$$\Pi = \frac{\Pi + \Pi_c}{2} + \frac{\Pi - \Pi_c}{2} \qquad (2)$$

in Tensor und Antitensor zerlegen, und der Tensor ist identisch mit dem Spannungstensor des vorigen Paragraphen. Der Antitensor kann ersetzt werden durch den Vektor $\mathfrak{h}$ mit den Komponentenbeträgen:

$$h_x = p_{yz} - p_{zy}, \quad h_y = p_{zx} - p_{xz}, \quad h_z = p_{xy} - p_{yx}.$$

Diese bestimmen die Komponenten des überschießenden Momentes, welches das Parallelepiped zu drehen strebt, und zwar sind die drei Komponentenbeträge der gesamten auf die Flächen des Parallelepipeds wirkenden Momente:

$$a\,b\,c\,h_x, \quad a\,b\,c\,h_y, \quad a\,b\,c\,h_z.$$

Sie sind positiv, wenn $p_{yz} > p_{zy}$ usw. ist. Vergleiche den Drehungssinn in Fig. 8. Die additive Fundamentalzerlegung der Gleichung (2) teilt also das gegebene Kraftsystem ohne weiteres in spannende und drehende Kräfte; der Diatensor (1) repräsentiert beide gleichzeitig.

Nimmt man ferner an, daß auch die Resultante der Kräfte $\mathfrak{p}$ von Null verschieden sei, so erhält man offenbar außer dem Diatensor noch eine Resultante $\mathfrak{R}$, welche gleich der Summe aller $\mathfrak{p}$ ist. Es ergibt sich also für beliebige homogene Oberflächenkräfte, die an dem Parallelepiped abc angreifen, eine Zerlegung, welche derjenigen der allgemeinen unendlich kleinen Bewegung vollkommen analog ist. Sie teilen sich in

erstens eine Resultante, welche der Verschiebung des Punktes 0 im § **59** entspricht, und

zweitens in einen Diatensor.

Dieser zerfällt wieder additiv in ein Moment und einen Tensor, den Spannungstensor. Im Falle des Gleichgewichts bleibt der letztere allein übrig.

Nach dem Vorigen lassen sich aus einem gegebenen System von Oberflächenkräften die deformierenden Spannungen abtrennen und gesondert behandeln. Infolgedessen ist die Elastizitätslehre in der Lage, die Spannungen so zu behandeln, als ob sie allein vorhanden wären; sie behandelt also ihre Probleme in erster Linie als Gleichgewichtsaufgaben, und daher haben gerade für sie die Tensoren eine besondere Wichtigkeit.

106. Ablösung des Spannungstensors von der speziellen Gestalt des angegriffenen Körpers.

Die historisch bedeutsame Ableitung des Begriffes „Spannungstensor", welche in § **104** reproduziert wurde, ist in ihrer Gültigkeit beschränkt dadurch, daß sie auf einen Körper von bestimmter Form, das Parallelepiped der Fig. 7, zugeschnitten ist. Diese Beschränkung ist indessen leicht abzustreifen. Man denke sich das Parallelepiped als körperliches Element eines elastischen Körpers, der äquilibrierten Oberflächenkräften unterliegt. Dann gilt die Deduktion des § **104** für dieses Element, und der Satz, daß jeder Tensor sich auf drei rechtwinklige Konstituenten reduzieren läßt, liefert unmittelbar das Ergebnis: An jedem Ort 1 des affizierten Körpers läßt sich ein Volumenelement $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ so legen, daß an ihm drei aufeinander senkrechte Einzeltensoren wirksam sind. Diese lassen sich ohne weiteres zu einem Tensor

$$\Pi = \left\{\begin{matrix} \pi_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\zeta\zeta} \end{matrix}\right.$$

vereinigen, der die „Hauptspannungen“ an der Stelle 1 darstellt. Das Elementarparallelepiped dient dabei nur zur Fixierung der Richtungen ξ, η, ζ; man kann es also auch nachträglich aus der Vorstellung fallen lassen und an seine Stelle eine kleine Kugel gesetzt denken; das Ellipsoid mit den Hauptachsenrichtungen ξ, η, ζ, welches aus der Multiplikation der Kugelradien mit Π hervorgeht, liefert dann durch sein Verhältnis zur Kugel die Vorstellung von der Größe und der dreifachen Doppelrichtung des Spannungstensors an der Stelle 1. (Dieses Ellipsoid hat übrigens, wie aus dem ersten Satze des nächsten Paragraphen hervorgeht, die Spezies eines Zusatzdehnungsellipsoids und ist nicht zu verwechseln mit demjenigen Ellipsoid, welches die durch die Spannung hervorgebrachten Dehnungen angibt. Es repräsentiert unmittelbar nicht eine Deformation, sondern ein System von äquilibrierten Kräften.)

107. Spezies und Klasse des Spannungstensors.

I. Spezies. Soll die Wirkung eines Spannungstensors umgekehrt, soll also Druck in Zug oder Zug in Druck verwandelt werden, so müssen die Kräftedupel, aus denen er sich zusammensetzt, nicht reziprok, sondern negativ genommen werden. Also gehört er nach § **89** zur Spezies der Additivtensoren.

II. Klasse. Der skalare Tensor (Diatensor) hat einen Sinn nur als symbolischer Faktor. Seine Glieder sind Skalare ohne Doppelrichtungen — die Doppelrichtungen der Hauptachsen sind erst dem ganzen Tensor, nicht seinen Gliedern zugeordnet. Läßt man ihn dahin degenerieren, daß seine Konstituenten einander gleich werden, so entartet die Multiplikation mit $\boldsymbol{\Phi}$ zur Multiplikation mit einem Skalar. Man ist daher berechtigt, den skalaren Tensor als „Ultraskalar“ zu bezeichnen.

Der Spannungstensor hat wesentlich andere Eigenschaften. Er existiert als Kombination von Vektordupeln, ohne als Faktor gedacht zu sein; er besteht für sich, ist also ein selbständiger Tensor. Die Glieder, aus denen er zusammengesetzt ist, sind Einzeltensoren, haben also an sich je eine Doppelrichtung. Läßt man seine drei Konstituenten einander gleich werden, so entartet er nicht zu einem Skalar, sondern zu einem Spannungssystem, welches nach allen Richtungen gleichmäßig zieht oder drückt.

Wollte man für ihn also eine Benennung schaffen, die dem Worte Ultraskalar ganz analog wäre, so müßte man ihn einen „Ultradoppelvektor" nennen. Deshalb wurden oben seine Glieder mit dem griechischen Buchstaben π geschrieben.

Wir haben demnach zwei Klassen von Tensoren zu unterscheiden: Erstens die unselbständigen oder Ultraskalare und zweitens die selbständigen oder, wie wir sie nennen wollen, die vektoralen[1]) Tensoren. Selbständigkeit und vektorale Beschaffenheit sind hiernach die Merkmale, welche unser Π von dem früheren Φ unterscheiden.

Einen vektoralen Tensor Π etwa mit einem Vektor in der Weise zu multiplizieren, wie man aus dem skalaren Φ und einem Vektor $\mathfrak{v}$ das Produkt $\Phi \mathfrak{v}$ bildet, ist undenkbar; da Π aus Vektoren zusammengesetzt ist, könnte nur etwa von Kombination mit $\mathfrak{v}$ in den Formen der skalaren oder vektoriellen Multiplikation die Rede sein; wohl aber ist ein Produkt $\Phi \Pi$ oder $\Phi^{-1} \Pi$ denkbar.

108. Verallgemeinerung auf beliebige Vektoren; Charakter.

Die Erwägungen, welche zur Bildung des Begriffes Spannungstensor führten, beruhen in letzter Linie auf den bekannten Zerlegungseigenschaften der Kräfte. Da nun alle Vektoren dieselben Zerlegungseigenschaften haben, bleiben die in § **104** ff. gezogenen Schlüsse unverändert, wenn man an Stelle des Wortes „Kräfte" das allgemeinere Wort „Vektoren" setzt.

Ein einfaches Beispiel erhält man, wenn man sich statt der Kräfte Kraftmomente eingesetzt denkt. An die Stelle des Spannungstensors tritt dann ein Drillungstensor. Wir beschränken die Betrachtung auf einen Einzeltensor, da, was für diesen gilt, sich ohne weiteres auf die Konstituenten eines Tensors übertragen läßt. Denkt man sich (vgl. Fig. 10) an den Enden einer Strecke, die der bequemen Zeichnung wegen in die x-Achse gelegt sei, zwei Kräftepaare von entgegengesetzt gleichem Moment gegeben, so bilden diese einen Einzeltensor. Wie die Zweiseitigkeit des aus zwei Kräften zusammengesetzten Tensors sich dadurch äußert, daß dem Beobachter, der von der Verlängerung des Systems aus auf dasselbe hinschaut, immer eine Spitze zugekehrt ist, einerlei,

[1]) Das Wort „vektoriell" wird vermieden, weil man es im allgemeinen für einseitig gerichtete Größen gebraucht.

ob er von den positiven oder von den negativen x aus blickt, so äußert sich die Zweiseitigkeit des Systems der Fig. 10 darin, daß das nächstgelegene Ende dem Beobachter als linksdrehend erscheint, einerlei, ob er von den entfernteren positiven oder von den entfernteren negativen x aus auf dasselbe hinblickt.

Kräfte sind polare, Momente sind axiale Vektoren; man kann diesen Charakterunterschied in der Benennung des Tensors zum Ausdruck bringen. Dabei sind indessen zwei Wege möglich:

1. Man schreibt dem Tensor willkürlich denselben Charakter zu, den die Vektoren haben, aus welchen er gebildet wird; dann ist z. B. ein Kräftetensor als polar, ein Momententensor als axial zu bezeichnen. Dies ist die von W. Voigt gegebene Benennung.

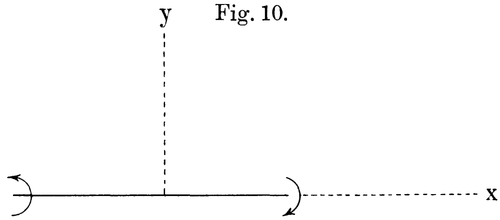


Fig. 10.

2. Man untersucht nicht das Verhalten der einzelnen Vektoren, aus welchen der Tensor besteht, sondern dasjenige des Gesamttensors und fragt, ob an ihm eine Änderung bemerklich wird, wenn man die drei Koordinatenachsen umkehrt. Da ergibt sich: Der einfache Doppelpfeil, der einen aus zwei polaren Vektoren zusammengesetzten Tensor darstellt, bleibt in seinen Beziehungen zum Koordinatensystem offenbar unverändert, wenn man das letztere umkehrt; es liegt stets eine Spitze in der positiven, die zweite in der negativen Hälfte der x-Achse und die beiden Spitzen sind nicht voneinander zu unterscheiden. Anders verhält sich ein Tensor, der aus axialen Vektoren zusammengesetzt ist: In Fig. 10 liegt, da wir Rechtshändigkeit voraussetzen, die Achse der z vor (bei horizontaler Lage der Zeichnungsebene über) der Zeichnung: Auf der positiven Seite dreht also das eingezeichnete Moment (auf dem kürzesten Wege) von der Achse der y zu der Achse der z hin. Kehrt man alle drei Achsen um, so verwandelt sich die eingezeichnete positive y-Achse in ihr Spiegelbild an der xz-Ebene und die z-Achse liegt hinter (unterhalb) der Zeichnung. Es liegt also dann der gekrümmte Pfeil, welcher auf der linken Seite unserer Figur gezeichnet ist, auf der positiven Hälfte der x-Achse und dreht von $+z$ nach $+y$ hin. Nennt man den Einzeltensor der Figur positiv, so ist er nach Umkehrung der

Koordinatenachsen negativ geworden. Geht man also von den Eigenschaften des Gesamttensors aus, so kommt man zu der umgekehrten Benennung wie im ersten Fall: Ein aus polaren Vektoren zusammengesetzter Tensor wäre als axial, und ein aus axialen Vektoren zusammengesetzter Tensor wäre als polar zu bezeichnen.

Die Auswahl zwischen beiden Verfahren ist willkürlich; das letztere scheint logischer, weil das Adjektiv „polar" oder „axial" in der gewöhnlichen Redeweise dem „Tensor" beigefügt wird; das Vorstehende zeigt jedenfalls, daß man bei Benutzung der Ausdrücke axialer und polarer Tensor angeben muß, in welchem Sinne sie gemeint sind.

Man bemerke, daß der Klassenunterschied sich auch hier geltend macht. Ein symbolischer Faktor Φ kann nur skalar oder pseudoskalar sein, polar oder axial ist erst das mit ihm gebildete Produkt $\Phi\mathfrak{v}$; der selbständige Tensor Π ist an sich polar oder axial.

109. Zur Algebra der vektoralen Tensoren.

Da die Glieder der skalaren Tensoren skalare, diejenigen der vektoralen Tensoren aber doppelt gerichtete Größen sind, gelten die für die ersteren bewiesenen Sätze keineswegs ohne weiteres für die letzteren. Doch vereinfacht sich die Sachlage dadurch, daß in zwei vektoralen Tensoren, die auf das gleiche Koordinatensystem bezogen sind, die entsprechenden Glieder dieselbe Doppelrichtung haben.

I. Addition. Daraus folgt zunächst, daß sie algebraisch addiert werden können und daß diese Addition der geometrischen Addition der Kräftesysteme, aus welchen sie entstanden sind, entspricht, also ergibt sich der Satz:

Vektorale Tensoren, die in demselben Koordinatensystem gegeben sind, addiert man wie skalare, indem man die entsprechenden Glieder addiert.

II. Multiplikation mit einem Skalar. Ebenso leuchtet ein, daß, wenn man sämtliche Vektoren eines Systems mit dem Skalar m multipliziert, auch ihre Komponenten und die aus diesen zusammengefaßten Größen mit m multipliziert werden. Also folgt: Man multipliziert einen vektoralen Tensor mit einem Skalar m, indem man seine Glieder einzeln mit m multipliziert.

III. Multiplikation mit einem skalaren Tensor. Es sei T ein skalarer und Π ein vektoraler Tensor; die Bedeutung des Produktes $T\Pi$ soll ermittelt werden. Man hat sich jeden einzelnen der Vektoren $\mathfrak{p}$, aus welchen das System Π besteht, mit T multipliziert zu denken. Wir greifen auf die in § **104** gegebenen Zerlegungen zurück und betrachten etwa die Kräfte, welche auf die Flächen bc_+ und bc_- wirken. Nach dem Satz

$$T\mathfrak{v} + T\mathfrak{w} = T(\mathfrak{v} + \mathfrak{w})$$

können wir annehmen, diese Kräfte seien, ehe die Multiplikation vorgenommen wird, bereits auf ihre Resultanten reduziert, können also die Multiplikation an diesen Resultanten vornehmen.

Wir erhalten dann pro Flächeneinheit

an bc_+ die Kraft $T\mathfrak{p}_x$ mit den Komponentenbeträgen $(Tp_x)_x$, $(Tp_x)_y$, $(Tp_x)_z$,
„ bc_- „ „ $T\mathfrak{p}_{-x}$ „ „ „ $(Tp_{-x})_x, (Tp_{-x})_y, (Tp_{-x})_z$.

Ist $T = \Phi\{\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\}$, so sind diese Beträge ($f_x = e_y$ usw.):

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= (\Phi p_x)_x = e_x p_{xx} + e_y p_{xy} + e_z p_{xz},\\
X_y &= (\Phi p_x)_y = f_x p_{xx} + f_y p_{xy} + f_z p_{xz},\\
X_z &= (\Phi p_x)_z = g_x p_{xx} + g_y p_{xy} + g_z p_{xz},\\
X_{-x} &= (\Phi p_{-x})_x = e_x p_{-xx} + e_y p_{-xy} + e_z p_{-xz},\\
X_{-y} &= f_x p_{-xx} + f_y p_{-xy} + f_z p_{-xz},\\
X_{-z} &= g_x p_{-xx} + g_y p_{-xy} + g_z p_{-xz}.
\end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \quad (1)$$

Man ersieht hieraus zunächst: Wenn, wie vorausgesetzt, $p_{-\mu\nu} = -p_{\mu\nu}$, so ist auch $\Phi p_{-\mu\nu} = -\Phi p_{\mu\nu}$, d. h. die Kräfte haben auch nach der Multiplikation mit Φ die Resultante Null. Es läßt sich demgemäß die auf die Flächeneinheit entfallende Kraft X_x mit der Kraft X_{-x} wieder zu einem Einzeltensor zusammenfassen, und da offenbar in y und z dasselbe gilt, erhält man mit zyklischer Fortsetzung:

In $\pm x$ den Einzeltensor Π'_{xx} vom Betrag $2(e_x p_{xx} + e_y p_{xy} + e_z p_{xz})$,
„ $\pm y$ „ „ Π'_{yy} „ „ $2(f_x p_{yx} + f_y p_{yy} + f_z p_{yz})$,
„ $\pm z$ „ „ Π'_{zz} „ „ $2(g_x p_{zx} + g_y p_{zy} + g_z p_{zz})$. (2)

Zur Ergänzung stellen wir noch die Posten $Y_x = (\Phi p_y)_x$ usw. her. Man findet leicht

$$\left.\begin{aligned}
Y_x &= e_x p_{yx} + e_y p_{yy} + e_z p_{yz}, \\
Y_{-x} &= e_x p_{-yx} + e_y p_{-yy} + e_z p_{-yz}, \\
Y_z &= g_x p_{yx} + g_y p_{yy} + g_z p_{yz}, \\
Y_{-z} &= g_x p_{-yx} + g_y p_{-yy} + g_z p_{-yz}, \\
Z_x &= e_x p_{zx} + e_y p_{zy} + e_z p_{zz}, \\
Z_{-x} &= e_x p_{-zx} + e_y p_{-zy} + e_z p_{-zz}, \\
Z_y &= f_x p_{zx} + f_y p_{zy} + f_z p_{zz}, \\
Z_{-y} &= f_x p_{-zx} + f_y p_{-zy} + f_z p_{-zz}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen drei auf die Flächeneinheit reduzierte Gruppen von je zwei Kräften, die im Anschluß an die links gegebenen kürzeren Bezeichnungen als X, Y, Z und X_-, Y_-, Z_- zu bezeichnen sind. Von den 18 Komponenten derselben sind 6 durch die Bildung von (2) ausgeschieden. Von den übrigen 12 betrachten wir im Anschluß an Fig. 8 diejenigen, welche senkrecht auf der y-Richtung stehen, also X_z und X_{-z}, Z_x und Z_{-x}. Die beiden ersten wirken an $b c_+$ und $b c_-$, repräsentieren also für die ganze Fläche die Werte $b c X_z$ und $b c X_{-z}$. Sie bilden ein Kräftepaar vom Arm a, repräsentieren also (zum Vorzeichen vgl. Fig. 8!)

$$\text{das Moment } - a b c X_z \mathfrak{j}.$$

Entsprechend liefern Z_x und Z_{-x} an den Flächen $a b_+$ und $a b_-$

$$\text{das Moment } + a b c Z_x \mathfrak{j}.$$

Zusammen liefern sie also zwei Momente, die auf ihrer in die y-Richtung fallenden Achse nach der negativen und positiven Seite hin abzutragen sind, und die, wenn sie wieder auf die Flächeneinheit und zugleich auf die Einheit des Abstandes reduziert werden, die Beträge X_z und Z_x bei entgegengesetzter Richtung haben.

Das gleiche gilt für die Kräfte, welche senkrecht auf der x- und auf der z-Achse stehen; man erhält also im ganzen die drei Dupel Y_z und Z_y, Z_x und X_z, X_y und Y_x, welche den Größen p_{yz} und p_{zy} usw. in § **104** entsprechen. Während aber die letzteren einander paarweise gleich sind, sind die hier auftretenden Größenpaare wie Y_z und Z_y nach den Gleichungen (1) und (3) ungleich. Sie liefern also, wenn sie zusammengefügt werden, nicht ohne weiteres einen Tensor, vielmehr ergibt sich aus ihrer

Zusammenfügung nach § **105** ein Diatensor, der sich aus Tensor und Antitensor zusammensetzt. Der Antitensor läßt sich ohne weiteres aus der Anschauung bestimmen. In dem Beispiel der Fig. 8 liefern die beiden entgegengesetzt gerichteten Momente Z_x und X_z offenbar ein überschießendes Moment vom Betrage $Z_x - X_z$. Das entsprechende gilt für die Momentenpaare Y_z und Z_y, X_y und Y_x. Diese drei überschießenden Momente sind die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{m}$, wo

$$\mathfrak{m} = (Y_z - Z_y)\,\mathfrak{i} + (Z_x - X_z)\,\mathfrak{j} + (X_y - Y_x)\,\mathfrak{k}, \quad . \; . \; . \quad (4)$$

und dieser Vektor ist äquivalent mit dem Antitensor

$$\begin{cases} 0 & Y_x - X_y & Z_x - X_z \\ X_y - Y_x & 0 & Z_y - Y_z \\ X_z - Z_x & Y_z - Z_y & 0. \end{cases} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Diesem Antitensor entspricht der Tensor

$$\begin{cases} 2\,X_x & Y_x + X_y & Z_x + X_z \\ X_y + Y_x & 2\,Y_y & Z_y + Y_z \\ X_z + Z_x & Y_z + Z_y & 2\,Z_z, \end{cases} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

und beide lassen sich zusammenfassen in einen Diatensor mit den Beträgen

$$\begin{cases} 2\,X_x & 2\,Y_x & 2\,Z_x \\ 2\,X_y & 2\,Y_y & 2\,Z_y \\ 2\,X_z & 2\,Y_z & 2\,Z_z. \end{cases} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Dieser Ausdruck enthält nur Beträge als Glieder. Er rechtfertigt die in § **104** aufgestellte Behauptung, daß der Betrag eines Einzeltensors $= 2\,v$ zu setzen ist, wenn derselbe aus den Vektoren $\mathfrak{v}$ und $-\mathfrak{v}$ entsteht. Denn stellt man, von (7) ausgehend, rückwärts den Vektor $\mathfrak{m}$ der Gleichung (4) her, so subsummiert sich das Verfahren nur dann den im ersten Teil gegebenen Regeln über die Beziehungen zwischen einem Antitensor und dem entsprechenden Vektor, wenn man eben die in (7) gegebenen Werte zugrunde legt.

Dabei ist in (5) und (6) die Tatsache noch nicht zum Ausdruck gekommen, daß die Seitenglieder ebensowohl wie die Diagonalglieder eine bestimmte Doppelrichtung haben. Um dieses auszudrücken, setzen wir analog zu der Zusammenstellung (2):

$$\left.\begin{array}{ll} \Pi'_{yx} = Y_x + X_y & \text{mit der Doppelrichtung } z, \\ \Pi'_{zy} = Z_y + Y_z & \text{,, \quad ,, \quad ,, } \quad x, \\ \Pi'_{xz} = Z_x + X_z & \text{,, \quad ,, \quad ,, } \quad y \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (8)$$

und kehren die Reihenfolge der Marken auf der linken Seite dieser Gleichungen um, wenn die Reihenfolge der Summanden auf der rechten Seite umgekehrt wird. Dann ergibt sich als Schlußresultat:

$$T\Pi = \begin{cases} \Pi'_{xx} & \Pi'_{yx} & \Pi'_{zx} \\ \Pi'_{xy} & \Pi'_{yy} & \Pi'_{zy} \\ \Pi'_{xz} & \Pi'_{yz} & \Pi'_{zz} \end{cases} + \begin{cases} 0 & Y_x - X_y & Z_x - X_z \\ X_y - Y_x & 0 & Z_y - Y_z \\ X_z - Z_x & Y_z - Z_y & 0 \end{cases} \quad (9)$$

mit der Bedingung:

$$\Pi'_{xy} = \Pi'_{yx}, \quad \Pi'_{yz} = \Pi'_{zy}, \quad \Pi'_{zx} = \Pi'_{xz}. \quad . \; . \; . \; (10)$$

Man denke sich nun die Beträge der Glieder von Π in enneadischer Zusammenstellung hingeschrieben, dann nimmt das uns beschäftigende Produkt die Form an:

$$\begin{cases} e_x & e_y & e_z \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{cases} \cdot 2 \cdot \begin{cases} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz}. \end{cases} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Führt man die Multiplikation nach der für skalare Diatensoren gültigen Regel aus und bezeichnet die Glieder des Produktes in der üblichen Reihenfolge mit t_{11}, t_{12} usw., so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} t_{11} &= 2\,(e_x p_{xx} + e_y p_{xy} + e_z p_{xz}), \\ t_{12} &= 2\,(e_x p_{yx} + e_y p_{yy} + e_z p_{yz}), \\ t_{21} &= 2\,(f_x p_{xx} + f_y p_{xy} + f_z p_{xz}) \\ &\text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Der Vergleich zeigt, daß

$$t_{11} = 2\,X_x, \quad t_{12} = 2\,Y_x, \quad t_{21} = 2\,X_y \text{ usw.} \quad . \; . \; (13)$$

Außerdem sind diese Beträge mit denselben Doppelrichtungen zu denken, die den entsprechenden Gliedern des vektoralen Tensors Π zukommen, also ergibt sich der

Schlußsatz: Das Produkt aus einem skalaren und einem vektoralen Tensor ist nach demselben Schema herzustellen, welches für die Multiplikation von skalaren Diatensoren gilt.

(Die Bedingungen $e_y = f_x$ usw. wurden bei der Ableitung dieses Satzes nicht in Anspruch genommen, also gilt er auch für die Multiplikation von Π mit einem allgemeinen Diatensor.)

War der Tensor Π von vornherein auf seine Hauptachsen bezogen, so sind seine Seitenglieder Null, und es bleibt unter Berücksichtigung der Bedingungen $e_y = f_x$ usw.

$$\left.\begin{array}{lll} X_x = e_x p_{\xi\xi}, & Y_x = e_y p_{\eta\eta}, & Z_x = e_z p_{\zeta\zeta}, \\ X_y = e_y p_{\xi\xi}, & Y_y = f_y p_{\eta\eta}, & Z_y = f_z p_{\zeta\zeta}, \\ X_z = e_z p_{\xi\xi}, & Y_z = f_z p_{\eta\eta}, & Z_z = g_z p_{\zeta\zeta}. \end{array}\right\} \quad (14)$$

Die Asymmetrie dieser Ausdrücke zeigt auf die einfachste Weise, daß das Produkt $T\Pi$ im allgemeinen asymmetrisch ist. Fallen aber die Hauptachsen von T mit denjenigen von Π zusammen, so ist $e_x = e$, $f_y = f$, $g_z = g$, und e_y usw. sind Null, also bleibt in diesem Fall

$$T\Pi = \left\{\begin{array}{ccc} e\pi_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & f\pi_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & g\pi_{\zeta\zeta}. \end{array}\right. \quad (15)$$

Das Ergebnis entspricht demjenigen, welches sich bei der Multiplikation skalarer Tensoren miteinander herausstellt: $T\Pi$ ist dann und nur dann ein Tensor, wenn die Hauptachsen der beiden Faktoren zusammenfallen.

IV. Weitere Folgerungen. Aus dem obigen Schlußsatz ergibt sich sofort die Gültigkeit derjenigen Folgerungen, welche auf der analytischen Form des Produktes zweier Tensoren beruhen. Insbesondere folgt, daß man einen gegebenen vektoralen Tensor als Produkt aus einem vorgeschriebenen vektoralen Tensor und einem zu bestimmenden skalaren Diatensor darstellen kann. Soll dieser Diatensor ein Tensor sein, so müssen die Achsen des vorgeschriebenen vektoralen Faktors mit denjenigen des gegebenen Produktes zusammenfallen. Die Mittel zur Ausrechnung des skalaren Faktors liegen auf der Hand.

110. Die Klasse der physikalischen Eigenschaften von Kristallen.

Wir setzen voraus, die in Betracht gezogenen Körper seien fest und homogen. Wir halten uns ferner an die Begriffe der klassischen Physik. Die Größen, welche die physikalischen Eigenschaften der Materie charakterisieren, sind dann zum Teil unabhängig von der physikalischen Konstitution des Körpers, an dem sie in die Erscheinung treten. (Beispiel Masse.) Und wo das nicht der Fall ist, sind sie zum Teil derart, daß sie nur die Verbindung zwischen zwei Skalaren herstellen. (Beispiel: Kapazitätseigenschaften wie $\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$ = Dichte, oder $\frac{\text{Wärmezufuhr}}{\text{Temperaturzunahme}}$ = spezifische Wärme unter den Umständen der Zufuhr). Derartige Größen haben für die Tensorentheorie kein Interesse.

Dagegen gibt es andere, welche die Verbindung zwischen gerichteten Größen herstellen. Wir betrachten zunächst Körper, die nicht nur homogen, sondern auch isotrop sind, dann sind die grundlegenden Größen die folgenden:

$$\text{Wärmeleitungsfähigkeit} \cdot \cdot = \frac{\text{Dichte des Wärmestroms}}{\text{Temperaturgefälle}},$$

$$\text{Brechungskoeffizient} \cdot \cdot \cdot = \frac{\text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum}}{\text{Lichtgeschwindigkeit im Körper}},$$

$$\text{Dielektrizitätskonstante} \cdot \cdot = \frac{\text{Dielektrische Polarisation}}{\text{Elektrische Feldstärke}},$$

$$\text{Ohmsche Leitungsfähigkeit} = \frac{\text{Stromdichte}}{\text{Elektrische Feldstärke}},$$

$$\text{Permeabilität} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = \frac{\text{Magnetische Induktion}}{\text{Magnetische Feldstärke}}.$$

In den sämtlichen physikalischen Eigenschaften steckt, wie bekannt, noch ein willkürlicher Zahlenfaktor, der aber durch passende Wahl der Einheiten auf den Wert 1 gebracht werden kann. Außerdem kann man überall die reziproken Werte[1]) der auf den linken Seiten angegebenen Größen auch als physikalische Eigenschaften definieren; der Sprachgebrauch in dieser Beziehung hat sich durch zufällige Gewöhnung ausgebildet. Während man z. B. bei der Elektrizitätsleitung ganz allgemein neben und vor der Leitungsfähigkeit ihren reziproken Wert, den „Widerstand“, benutzt, ist der „Widerstand gegen Wärmefluß“ nicht in Gebrauch gekommen.

Mit einer leicht verständlichen Erweiterung des Begriffes Ursache und Wirkung, indem unter Ursache auch die „Veranlassung“ einbegriffen ist, läßt sich die vorstehende Aufzählung in den Satz zusammenfassen: Die Ursache mit der physikalischen Eigenschaft multipliziert ergibt die Wirkung. Die Wirkung kann dabei dieselbe Dimension oder auch eine andere physikalische Dimension haben wie die Ursache; im ersten Fall hat die physikalische Eigenschaft die Dimension einer reinen Zahl, im anderen

---

[1]) Im folgenden nicht mehr hervorgehoben; die entsprechenden Ergänzungen sind selbstverständlich.

hat sie eine von Null verschiedene Dimension, die aber ihre Eigenschaft als Skalar nicht beeinträchtigt.

Auch physikalische Eigenschaften, die sich von vornherein nicht in Form einer linearen Gleichung zwischen „Ursache“ und „Wirkung“ präsentieren, fallen bei näherer Besichtigung unter dieselbe Form. Die Absorption, welche ein Energiestrom beim Eindringen in einen Körper erfährt, wird in der Regel dargestellt durch eine Gleichung $J = J_0 e^{-kx}$, wo x die Tiefe des Eindringens und k der Absorptionskoeffizient ist. Diese Gleichung läßt sich eben sowohl logarithmisch darstellen in der Form

$$log\, J = log\, J_0 - k x.$$

Als die Größe, von der die Absorption abhängt, also als die „Ursache“ in dem etwas verallgemeinerten Sinne des Vorigen, ist hier die Tiefe x des Eindringens anzusehen, und damit ergibt sich die Gleichung

$$\text{Absorptionskoeffizient} = \frac{\text{Abnahme des Logarithmus der Strömung}}{\text{Tiefe des Eindringens}}.$$

Gewisse Größen, wie die Wärmeausdehnung, die immer nur an dreidimensionalen Körpern beobachtet werden können, lassen sich rein mathematisch in Elongationen nach drei aufeinander senkrechten Richtungen zerlegen; man gelangt dadurch zum Begriff der linearen Ausdehnung und zu den Gleichungen:

$$\text{Linearer Ausdehnungskoeffizient} = \frac{\text{Lineare Ausdehnung}}{\text{Temperaturzunahme}},$$

$$\text{Linearer Elastizitätskoeffizient} = \frac{\text{Einseitige elastische Dehnung}}{\text{Zugkraft}}.$$

(In der letzten Gleichung kann der Elastizitätsmodul als reziproker Wert an die Stelle des Elastizitätskoeffizienten treten.)

Man ersieht aus dem Vorstehenden, daß die Größen, welche irgend eine grundlegende physikalische Eigenschaft bestimmen, für homogene isotrope Körper oder Körperelemente sämtlich Skalare sind, und zwar skalare Faktoren, welche mit der Ursache multipliziert die Wirkung ergeben. Sie haben Existenz nur als solche Faktoren, und wenn keine Ursache vorhanden ist, zu der sie als Faktor dienen können, so treten sie überhaupt nicht in die Erscheinung.

Läßt man nun die Annahme der Isotropie fallen, setzt also voraus, daß man mit kristallinischen Körpern zu tun hat, so werden die Faktoren, die mit dem Vektor „Ursache“ zu verbinden sind, verschiedene Werte annehmen, wenn die „Ursache“ verschiedene Richtung annimmt. Aus den skalaren Faktoren werden also im einfachsten Fall Tensoren, aber auch diese Tensoren existieren nur als symbolische Faktoren, welche die Multiplikation nach drei aufeinander senkrechten Richtungen zusammenfassen, und sie haben ebensowohl wie die bei isotropen Körpern auftretenden Skalare einen Sinn nur als Faktoren, und daraus folgt: Die Tensoren, welche physikalische Eigenschaften der Kristalle darstellen, sind nicht selbständige, sondern skalare Tensoren.

In § **105** wurde darauf hingewiesen, daß aus einem System beliebiger Kräfte, die an einem Körper tätig sind, diejenigen, welche im Gleichgewicht miteinander stehen, sich absondern und durch einen Tensor darstellen lassen. Dementsprechend werden die Elastizitätseigenschaften stets als Gleichgewichtseigenschaften behandelt. Dasselbe gilt für die sämtlichen physikalischen Eigenschaften, von denen oben die Rede war. Man nimmt an, daß in weitgehender Annäherung die physikalischen Eigenschaften eines Körpers durch seine etwaige Bewegung, mag diese nun von vornherein gegeben oder durch überschießende Resultanten und Momente verursacht sein, nicht geändert werden. Vektorielle Agentien, die etwa durch die Bewegung selbst ausgelöst werden (z. B. Zentrifugalkräfte), stellt man als besondere Vektoren in Rechnung. Dann hat man für die Deutung der Beobachtungen in erster Linie nur mit denjenigen physikalischen Eigenschaften zu tun, welche sich im Zustande der Ruhe und des Gleichgewichts beobachten lassen. Daher, daß diese sich in vielen Fällen durch Tensoren beschreiben lassen, kommt es, daß gerade die symmetrischen Tensorenausdrücke in der Physik eine besonders hervorragende Rolle spielen.

In der neueren Physik ist es denkbar geworden, daß die vorstehend erwähnte Annahme auch in den einfachsten Fällen nicht streng richtig ist, daß vielmehr alle physikalischen Eigenschaften durch Bewegung modifiziert werden. Während z. B. in der klassischen Mechanik die Masse (Trägheitskoeffizient) als unveränderliche Eigenschaft eines bestimmten Quantums von Materie definiert ist, führen neuere Erwägungen darauf, daß bei einem bewegten Körperteilchen zwischen longitudinaler und transversaler Masse zu unterscheiden ist. Ist in gewissen Koordinatensystemen, auf deren Charakterisierung hier nicht näher eingegangen werden kann, ein Massenteilchen in Ruhe, so hat es angreifenden Kräften gegenüber eine bestimmte „Ruhe-masse" m_0; wird es von einer rein verschiebenden Kraft f affiziert, so hat es die Beschleunigung $\frac{f}{m_0}$. Ist es aber in Bewegung begriffen, etwa in der Richtung der x, so tritt für eine Beschleunigung in der Richtung x an die Stelle von m_0 ein anderer Divisor, die „longitudinale Masse" m_l. Für eine Beschleunigung aber, die senkrecht auf x steht, tritt an die Stelle von m_0 als Divisor die „transversale Masse" m_t. Nach der Theorie von Einstein, welche die einfachsten Formeln liefert, ist, wenn $v = \frac{dx}{dt}$ und c die Lichtgeschwindigkeit ist,

$$m_l = \frac{c^3}{\sqrt{c^2 - v^2}^{\,3}} m_0, \qquad m_t = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} m_0.$$

Bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen Achse der x in die Richtung der gerade vorhandenen Geschwindigkeit fällt, erscheint also die Masse als ein Formaltensor

$$m = m_0 \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right)^3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \end{array} \right. .$$

Sind die Erwägungen, welche zu derartigen Formeln führen, richtig, so ist höchst wahrscheinlich, daß auch andere physikalische Eigenschaften, die im ruhenden homogenen isotropen Körper durch reine Skalare ausgedrückt werden, zu Tensoren oder Formaltensoren werden, sobald der Körper sich in Bewegung befindet. In Kristallen würden dann diejenigen Eigenschaften, die schon in der Ruhe durch Tensoren dargestellt werden, dargestellt sein durch die Überlagerung zweier Tensoren, von denen der eine die Ruheeigenschaft des Kristallelementes wiedergibt, der andere auf der Bewegung beruht. Sie werden also, da die Richtung der Bewegung zufällig ist, im allgemeinen nicht mehr durch Tensoren, sondern durch Diatensoren dargestellt werden. Diese Bemerkung hat Interesse für die mathematische Theorie; die Modifikation, welche die Bewegung hervorbringt, ist für tellurische und terrestrische Geschwindigkeiten meist so klein, daß sie sich für lange Zeit der Beobachtung entziehen wird.

Schlußkapitel.

111. Hinweise auf fernere Begriffserweiterungen.

I. Die Erörterungen dieses Buches beschränken sich auf den dreidimensionalen Raum. Eine Erweiterung der behandelten Begriffe ergibt sich, wenn man sie auf Räume von mehr als drei Dimensionen anwendet. Speziell die Anwendung auf vier Dimensionen hat durch die Arbeiten von Minkowski erhebliche Wichtigkeit erhalten. Man sehe dazu die im Literaturverzeichnis erwähnten Schriften von A. Sommerfeld und M. Laue.

II. W. Voigt hat eine Begriffserweiterung nach anderer Richtung angegeben und benutzt. Er unterscheidet Größen, die sich transformieren wie die Koordinaten, solche, die sich transformieren wie die Quadrate und Produkte zweiter Dimension, dann weiter solche, die sich transformieren wie höhere Potenzen der Koordinaten. Wir wollen sagen, daß die betreffende Größe vom $n$ten „Range“ ist, wenn sie sich transformiert wie eine Kombination $n$ter Dimension der Koordinaten. Die Größen ersten Ranges sind dann Vektoren, die symmetrischen zweiten Ranges sind die Tensoren, diejenigen dritten Ranges nennt Voigt Trivektoren, diejenigen vierten Ranges Bitensoren. Die Größen ersten bis vierten Ranges finden in der Kristallphysik weitgehende Anwendung. Neuerdings hat M. Grossmann (siehe Literaturverzeichnis) eine noch weitergehende Verallgemeinerung angegeben. Er bezeichnet Größen beliebigen Ranges als „Tensoren“, so daß auch die Vektoren, Trivektoren und Bitensoren der Benennung „Tensor“ subsummiert werden; die Verallgemeinerung besteht darin, daß seine Definitionen sich auf Gebilde $n$ten Ranges im m-dimensionalen Raum erstrecken.

Register der Definitionen.

20000. 10. 12.

Forsyth, Prof. Dr. Andrew Russel, **Lehrbuch der Differentialgleichungen.** Mit den Auflösungen der Aufgaben von Herm. Maser. Zweite autorisierte Auflage nach der dritten des Originals besorgt und mit Zusätzen versehen von Walter Jacobsthal. XXII, 920 S. gr. 8°. 1912. ℳ 20,—, in Lnwdbd. ℳ 21,50.

Fricke, Prof. Dr. Robert, **Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung** als Leitfaden zum Gebrauche bei Vorlesungen zusammengestellt. 5. Auflage. Mit 74 Figuren. XV, 219 S. gr. 8°. 1909. ℳ 5,—, in Lnwdbd. ℳ 5,80.

Kneser, Prof. Adolf, **Lehrbuch der Variationsrechnung.** Mit 24 Abbild. XV, 313 S. gr. 8°. 1900. ℳ 8,—, in Lnwdbd. ℳ 9,—.

——— **Die Integralgleichungen** und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Vorlesungen an der Universität zu Breslau. VIII, 243 S. 8°. 1911. ℳ 6,—, geb. in Lnwdb. ℳ 7,—.

Láska, Dr. W., **Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik.** Mit 3 Tafeln. XVI, 1071 S. gr. 8°. 1888—94. ℳ 26,—, in Hlbfrzbd. ℳ 28,—.

Logarithmen, Vier- und fünfstellige, nebst einigen physikalischen Konstanten. (Aufgestellt und revidiert von Prof. Dr. L. Holborn und Prof. Dr. Karl Scheel.) 24 S. Lex.-8°. 1904. Kart. ℳ —,80.

Müller, Prof. Dr. Reinhold, **Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie** an der herzoglichen technischen Hochschule zu Braunschweig. 2. Auflage. Mit Abbildungen. VIII, 95 S. gr. 8°. 1903. ℳ 2,50.

Riemann, B., **Partielle Differentialgleichungen.** Siehe Weber. (S. 2.)

Schlömilch, Prof. Dr. Oskar, **Compendium der höheren Analysis.** 2 Bände. Mit Holzstichen. gr. 8°.

I. Band. 5. Auflage. XIII, 566 S. 1881. ℳ 9,—, in Hlbfrzbd. ℳ 10,50.

II. Band (auch unter dem Titel: Vorlesungen über einzelne Teile der höheren Analysis, gehalten im königl. sächsischen Polytechnikum zu Dresden). 4. Auflage. X, 546 S. 1895. ℳ 9,—, in Hlbfrzbd. ℳ 10,50.

Schlömilch, Prof. Dr. Oskar, **Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln.** Sechste Auflage. Mit einem Anhang chemischer und physikalischer Konstanten revidiert von Prof. Dr. Karl Scheel. XXVII, 182 S. 8°. 1912. ℳ 2,—, in Lnwdbd. ℳ 2,40.

——— ——— Wohlfeile Schulausgabe. **23.** Auflage. IV, 1 Bl., 151 S. 8°. 1912. In Lnwdbd. ℳ 1,30.

Schrön, Prof. Dr. Ludwig, **Siebenstellige gemeine Logarithmen** der Zahlen von 1 bis 108 000 und der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller Winkel des Quadranten von 10 zu 10 Sekunden, nebst einer Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionalteile. **27.** revidierte Stereotyp-Ausgabe. Imp.-8°. 1910.

Tafel I und II. Die Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen. VIII, 498 S. ℳ 4,20.

Tafel III. Interpolationstafel (Supplement zu allen Logarithmentafeln). VIII, 88 S. ℳ 1,80.

Tafel I. Die Logarithmen der Zahlen. (Für solche, welche Tafeln für trigonometrische Rechnungen nicht nötig haben.) VIII, 226 S. ℳ 2,40.

Tafel I in Hlbfrzbd. ℳ 3,60.
Tafel I—III in Hlbfrzbd. ℳ 7,30.

Seiffert, O., Herzogl. Braunschw. Landesvermessungsinspektor, **Vierstellige polygonometrische Tafeln** zur Berechnung und Sicherung der Koordinatenunterschiede mit der Rechenmaschine. 34 S. gr. 8°. 1907. Kart. ℳ 2,50.

Treutlein, Realgymnasialdirektor P., **Vierstellige logarithmische und goniometrische Tafeln** nebst den nötigen Hilfstafeln. IV, 72 S. kl. 8°. 1896. Kart. ℳ —,60, extra steif kart. ℳ —,70.

Wertheim, Prof. Gustav, **Anfangsgründe der Zahlenlehre.** Mit den Bildnissen von Fermat, Lagrange, Euler und Gauß. XIII, 427 S. gr. 8°. 1902. ℳ 9,—, in Lnwdbd. ℳ 10,—.

——— **Die Arithmetik des Elia Misrachi.** Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. **2.** verbesserte Auflage. IX, 68 S. gr. 8°. 1896. ℳ 3,—.

Spezialverzeichnisse: „Physik und Elektrotechnik, Mathematik und Astronomie“ sowie „Lehr- und Handbücher“ auf Wunsch kostenlos