

Einführung in die Höhere Mathematik

unter besonderer Berücksichtigung
der Bedürfnisse des Ingenieurs

Von

Dr. phil. Fritz Wicke

Professor an der Staatlichen Gewerbe-Akademie
in Chemnitz

Erster Band

Mit den Abbildungen 1 bis 231
und einer Tafel



Berlin
Verlag von Julius Springer
1927

ISBN-13: 978-3-642-90576-6 e-ISBN-13: 978-3-642-92433-0
DOI: 10.1007/978-3-642-92433-0

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1927 by Julius Springer in Berlin.
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1927

Vorwort.

Das vorliegende Buch verdankt sein Entstehen den Lehrerfahrungen an einer höheren technischen Lehranstalt (Staatl. Gewerbe-Akademie zu Chemnitz) und soll der theoretischen Ausbildung des Praktikers (Ingenieur, Naturwissenschaftler usw.) dienen. Daraus erklärt sich die Stoffwahl und die Behandlungsweise des Gegenstandes: Anknüpfung der theoretischen Erörterungen an praktische Aufgaben und umgekehrt unmittelbare Anwendung der entwickelten allgemeinen Theorie auf spezielle physikalische, chemische und besonders technische Probleme, die zum Teil ausführlich behandelt werden; möglichste Heranziehung der Anschauung auch bei der Ableitung abstrakter mathematischer Ergebnisse. Mit Rücksicht darauf, daß das Buch außer Differentialrechnung, Integralrechnung, Differentialgleichungen und der Lehre von den Reihen die Grundlagen der analytischen Geometrie und der Nomographie sowie viele ausführlich durchgearbeitete Beispiele und Anwendungen enthält, dürfte der Umfang des Buches nicht als zu groß erscheinen, zumal an die Vorkenntnisse nur sehr geringe Anforderungen gestellt werden.

Im einzelnen sei zur Erläuterung des Voranstehenden noch das Folgende hinzugefügt: Der Abschnitt Differentialrechnung beginnt aus dem oben erwähnten Grunde nicht mit dem Begriffe „Funktion“, sondern mit einem Beispiele; der Differentialquotient wird nicht abstrakt formell eingeführt, sondern an Hand des Steigungsbegriffes (Leibniz: Tangentenkonstruktion) sowie des Begriffes der Geschwindigkeit (Newton: Fluxion). Im zweiten Abschnitte, Integration, ist ebenso eine praktische Aufgabe vorangestellt, die auf die Notwendigkeit des Integrierens hinführt, wobei das Verfahren selbst (Umkehrung der Differentiation) sich aus dem Sachverhalte ergibt. — Besonders ist der Abschnitt der Analytischen Geometrie der Ebene von dem angeführten allgemeinen Gesichtspunkte beeinflusst: Nur die notwendigen Grundlagen der reinen analytischen Geometrie sind entwickelt (ausführliche Behandlung von Gerade und Kreis). Hieran schließt sich sofort die Verwendung des Gewonnenen für die Kurvenuntersuchung mit Mitteln der Differentialrechnung: Tangente, Normale, Differentialquotienten höherer Ordnung und Krümmung, Evolute. Unmittelbar angeschlossen finden sich dann im gleichen Abschnitte die Parameterdarstellung und die Polarkoordinatenform der Kurve mit ihren Folgerungen aus der Anwendung der Differential- und Integralrechnung. —

In ähnlichem Gedankengang finden sich in dem Abschnitte Analytische Geometrie des Raumes nur die notwendigen Grundlagen dieser selbst, um sofort für die Flächentheorie, die Lehre von den Funktionen mit mehreren Veränderlichen, die Integration, die Theorie der impliziten Funktionen ausgewertet zu werden. Überdies sind die drei räumlichen Koordinatensysteme vorangestellt, um je nach dem größeren Vorteile verwendet zu werden, den jedes gegebenenfalls bieten kann. — Die Tangentialebenen und Normalen wiederum erscheinen erst im Abschnitte Unendliche Reihen mit mehreren Veränderlichen, wo ihre Gleichungen sich besonders bequem entwickeln lassen, zusammen mit den Extremwerten von Funktionen mehrerer Veränderlichen, deren Theorie sich durch Betrachtung der Entwicklung in unendliche Reihen ohne Schwierigkeiten ergibt. Endlich ist die Nomographie unmittelbar aus der Entwicklung von Beispielen aufgebaut unter Beiseitelassung aller allgemeinen Theorien (Abbildungstheorie usw.).

Die sich hieraus ergebende Stofffolge, mag sie vielleicht auch hier und da von dem sonst üblichen Schema abweichen, dürfte mithin das volle Verständnis aller derjenigen finden, welche in der mathematischen Lehrpraxis stehen; überdies wird das am Ende des zweiten Bandes befindliche ausführliche Sachverzeichnis ein rasches Auffinden eines gewünschten Gegenstandes ermöglichen. —

So geht das Buch nirgends auf Betonung systematischer Reinheit und Ausschließlichkeit aus, sondern auf vielseitige Ausnutzung aller mathematischen Mittel zur Bewältigung praktischer Aufgaben. Vielleicht kann das Buch aber gerade aus diesem Grunde auch dem Mathematikstudierenden manche Anregung bieten, zumal durch die zahlreich gestellten und gelösten Aufgaben; sie können ihn durch ihre Verschiedenartigkeit zu einer gewissen Beweglichkeit und Schlagfertigkeit in der Handhabung der Theorie erziehen helfen. —

Schließlich drängt es mich, allen meinen verehrten Amtsgenossen, die mir ihre höchst wertvolle Unterstützung zuteil werden ließen, unter ihnen ganz besonders Herrn Prof. Dr. phil. Erich Müller, der mir in allen Stadien der Entstehung des Buches mit Rat und Tat zur Seite stand, zu danken.

Chemnitz, im August 1927.

Fritz Wicke.

Inhaltsverzeichnis

für den ersten und zweiten Band.

Erster Band.

Erster Abschnitt: Das Differenzieren.

	Seite
§ 1. Ein Beispiel	1
§ 2. Die lineare Funktion	9
§ 3. Die quadratische Funktion	17
§ 4. Der Differentialquotient. Die einfachsten Differentiationsregeln . . .	34
§ 5. Die ganze rationale Funktion	50
§ 6. Die Quotientenregel. Die gebrochene rationale Funktion	64
§ 7. Die Kettenregel. Die inversen Funktionen	76
§ 8. Die irrationalen Funktionen	87
§ 9. Die goniometrischen Funktionen	98
§ 10. Die zyklometrischen Funktionen	126
§ 11. Die logarithmische Funktion	131
§ 12. Die Exponentialfunktion	139
§ 13. Die hyperbolischen Funktionen	148

Zweiter Abschnitt: Das Integrieren.

§ 1. Das Problem und die Grundformeln	158
§ 2. Die wichtigsten Integrationsregeln	166
§ 3. Integration der gebrochenen rationalen Funktion	184
§ 4. Die wichtigsten Integrale mit irrationalem oder gebrochenem Integranden	196
§ 5. Die geometrische Deutung des Integrals. Das bestimmte Integral. .	209
§ 6. Berechnung des Inhalts ebener Figuren (Quadratur); Näherungsformeln	218
§ 7. Weitere Anwendungen des bestimmten Integrals in der Geometrie .	236
§ 8. Anwendung des bestimmten Integrals auf technische Probleme . . .	247

Dritter Abschnitt: Analytische Geometrie der Ebene.

§ 1. Die Koordinatensysteme	279
§ 2. Strecken und Flächen im rechtwinkligen Koordinatensysteme. Transformation der Parallelkoordinatensysteme	290
§ 3. Die Gerade	306
§ 4. Das Wichtigste aus der analytischen Geometrie des Kreises.	330
§ 5. Die Differentialquotienten höherer Ordnung	340
§ 6. Die Kurve in Parameterdarstellung	366
§ 7. Die Kurve in Polarkoordinaten	401
Tabelle der wichtigsten Integrale	424

Zweiter Band.

Vierter Abschnitt: Analytische Geometrie des Raumes.

	Seite
§ 1. Räumliche Koordinatensysteme; besondere Flächen	429
§ 2. Strecken und Winkel im räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystem	454
§ 3. Die Ebene und die räumliche Gerade	464
§ 4. Besondere Gruppen von Flächen und Raumkurven	484
§ 5. Die partielle Differentiation	500
§ 6. Die ebene Kurve mit unentwickelter Gleichung	512
§ 7. Die mehrfachen Integrale: Volumenberechnung	532
§ 8. Mehrfache Integrale: Schwerpunkt, Trägheitsmoment von Körpern; resultierende Kräfte	550
§ 9. Nomographie	584

Fünfter Abschnitt: Von den Reihen.

§ 1. Die Taylorsche Reihe	614
§ 2. Die Exponentialreihe und die goniometrischen Reihen	626
§ 3. Reihenentwicklung weiterer Funktionen	642
§ 4. Unbestimmte Ausdrücke	665
§ 5. Der Taylorsche Satz für Funktionen mehrerer Veränderlichen und seine Anwendung auf die Geometrie.	679
§ 6. Berechnung von Inhalt, Schwerpunkt und Trägheitsmoment einer krummen Fläche. Die Raumkurven	695
§ 7. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlichen	718
§ 8. Die Fourierschen Reihen	732

Sechster Abschnitt: Die Differentialgleichungen.

§ 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades	747
§ 2. Differentialgleichungen erster Ordnung, die nicht vom ersten Grade sind	793
§ 3. Kurvenscharen	806
§ 4. Integrierbare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	825
§ 5. Die linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung	857
§ 6. Simultane Differentialgleichungen	881
§ 7. Näherungsweise Integration von Differentialgleichungen	893
Sachverzeichnis	911

Das Differenzieren.

§ 1. Ein Beispiel.

(1) Es möge die Aufgabe gestellt sein, aus einer Temperaturangabe nach der Celsius-Skala die Angabe der gleichen Temperatur in der Fahrenheit-Skala zu berechnen. Die gegebene Celsius-Temperaturangabe sei C , die dieser entsprechende Fahrenheit-Angabe F . Nun ist bekannt, daß Celsius das Temperaturintervall zwischen dem Gefrierpunkt des Wassers und dessen Siedepunkt in 100 gleiche Teile, Fahrenheit das nämliche Intervall in 180 gleiche Teile teilt, so daß also je 5 Celsiusgraden 9 Fahrenheitgrade entsprechen; ferner daß Celsius den Gefrierpunkt des Wassers mit 0° bezeichnet, Fahrenheit dagegen dieser Temperatur die Zahl 32° zuteilt. Um also zu einer Celsius-Temperatur C die zugehörige Fahrenheit-Temperatur F zu berechnen, muß man zu 32° noch die C entsprechenden Fahrenheit-Einheiten, d. h. $\frac{9}{5} C$ hinzufügen. Es ist also

$$F = 32 + \frac{9}{5} C. \quad 1)$$

Mit dieser Formel ist die anfangs gestellte Aufgabe gelöst; denn mit ihrer Hilfe kann man nun zu jeder beliebigen Celsius-Temperatur die zugehörige Fahrenheit-Temperatur berechnen. So entspricht beispielsweise einer Celsius-Temperatur von 15° eine Fahrenheit-Temperatur $F = 32 + \frac{9}{5} \cdot 15 = 59^\circ$. Man berechne ebenso F für $C = -15^\circ$, 50° , 100° (Siedepunkt des Wassers), -273° (absoluter Nullpunkt); für welche Temperaturen zeigen beide Skalen a) gleiche, b) entgegengesetzt gleiche Angaben?

$$[a) C = F = -40^\circ; \quad b) F = -C = 11\frac{3}{7}.]$$

Die Formel 1) teilt den beiden Größen C und F verschiedene Rollen zu. Gemeinsam ist ihnen, daß sie — im Gegensatz zu den in Formel 1) auftretenden Zahlengrößen 32 und $\frac{9}{5}$ — verschiedene Werte annehmen können, daß sie veränderlich sind. Man bezeichnet sie daher als Veränderliche (Variable) und nennt im Gegensatz zu ihnen die unveränderlichen Größen (32; $\frac{9}{5}$) Konstante. Formel 1)

lehrt nun, zu jedem C das zugehörige F zu finden. Während man also C willkürlich wählen kann, ist F durch dieses willkürlich gewählte C bestimmt; F ist von C abhängig. F heißt daher die abhängige Veränderliche, C die unabhängige Veränderliche. Man nennt F auch eine Funktion von C . Ganz allgemein kann man eine Funktion definieren als den Ausdruck für das Gesetz der Abhängigkeit einer Größe von einer oder mehreren unabhängigen Größen. Die Mathematik hat es ausschließlich mit solchen Funktionen zu tun, deren Gesetz sich durch eine mathematische Formel darstellen läßt. Dies ist durchaus nicht immer möglich, so ist beispielsweise die Tagestemperatur wohl abhängig von der Tagesstunde, indessen dürfte sich diese Abhängigkeit kaum durch eine mathematische Formel ausdrücken lassen.

In unserem Beispiele ist nun F eine ganz besonders einfache Funktion von C ; der Ausdruck der rechten Seite von 1) ist nämlich in C vom 1. Grade; sie heißt daher auch eine Funktion ersten Grades von C oder auch eine lineare Funktion von C , ein Ausdruck, der schon in den nächsten Zeilen (S. 9) seine Begründung finden wird.

Im Anschluß an das Obige sei schon hier bemerkt, daß die Verteilung der Rollen der unabhängigen und der abhängigen Veränderlichen im allgemeinen nur bedingten Wert hat und durch den jeweiligen praktischen Fall bestimmt wird. Löst man nämlich Gleichung 1) nach C auf, so erhält man einen neuen Funktionsausdruck

$$C = \frac{5}{9} F - 17 \frac{7}{9},$$

in welchem F die Rolle der unabhängigen und C diejenige der abhängigen Veränderlichen übernommen hat; diese Funktion würde praktische Bedeutung haben, wenn die Aufgabe gestellt wäre, aus der Fahrenheit-Angabe die Celsius-Angabe zu errechnen. Auf die gegenseitigen Beziehungen zweier derartig miteinander verbundenen Funktionen wird später näher einzugehen sein (S. 80).

(2) Wir wollen uns nun nach Verfahren umsehen, die es uns ermöglichen, den durch Gleichung 1) ausgedrückten mathematischen Zusammenhang zwischen Celsius- und Fahrenheit-Temperatur anschaulich und praktisch verwertbar darzustellen. Das, wenn auch nicht gerade schwierige, auf die Dauer aber doch ermüdende Ausrechnen des F aus dem C mit Hilfe von Formel 1) erübrigt sich, wenn man eine Tabelle benutzt, die sofort das zu C gehörige F aufzuschlagen gestattet, ähnlich den Tafeln für die Logarithmen der Zahlen, oder für die Funktionen der Winkel. Der Vorteil einer solchen Tafel besteht einmal, wie schon erwähnt, darin, daß man jeglicher Rechenmühe enthoben ist, zum anderen darin, daß man die Genauigkeit der Ablesung bis zu jedem gewünschten Grade treiben kann, wenn

man nur eine Tafel mit der dazu nötigen Genauigkeit verwendet (man denke nur an die drei-, vier-, fünf-, siebenstelligen Logarithmentafeln!). Indessen liegt hierin zugleich ein großer Nachteil derartiger Tafeln; je genauer sie sind, um so unhandlicher und unübersichtlicher sind sie auch, und der Forderung der Anschaulichkeit wird eine Tafel überhaupt nicht gerecht.

Da verrichtet nun die Zeichnung die besten Dienste. Allerdings sind die zeichnerischen (graphischen) Methoden so mannigfaltig, daß es unmöglich ist, sie hier auch nur zu einem geringen Teile zu behandeln. Für unser Beispiel dürfte sich u. a. diejenige empfehlen, die wir an den Thermometern selbst angewendet finden. Ein Thermometer, das sowohl Fahrenheit- als auch Celsius-Temperaturen abzulesen gestattet, enthält zwei Leitern (Skalen), die mit ihrer Achse zusammengefügt sind, vielleicht so, daß auf der linken Seite sich die Celsius-, auf der rechten die Fahrenheit-Einteilung befindet (Abb. 1). An die Stelle der C -Skala, auf welche das Ende des Quecksilberfadens bei der Schmelztemperatur des Eises weist, wird die Zahl 0° , gegenüber auf der F -Skala dagegen die Zahl 32° geschrieben; an die Stelle, auf welche das Ende des Quecksilberfadens bei der Siedetemperatur des Wassers zeigt, links 100° , rechts 212° . Das Intervall der C -Skala wird daraufhin zwischen diesen beiden Punkten in 100, das der F -Skala in 180 gleiche Teile geteilt und fortlaufend beziffert, links von 0 bis 100, rechts von 32 bis 212. Doch nicht genug! Durch die Fortsetzung dieser Einteilung (fortgesetztes Antragen der Celsius- bzw. Fahrenheit-Einheiten) nach oben und unten ist man in der Lage, auch solche C - und F -Ablesungen miteinander zu vergleichen, die außerhalb dieses Intervalls liegen. Das nötigt allerdings dazu, die unter dem Nullpunkt beider Skalen gelegenen Teilpunkte von den darüberegelegenen zu unterscheiden; man tut dies, indem man vor diese ein Minuszeichen setzt. — Das Verfahren der Aneinanderfügung und Zuordnung solcher Leitern ist in der **Nomographie** ausgebaut worden, auf die an späterer Stelle (s. S. 584—613) näher eingegangen werden soll.

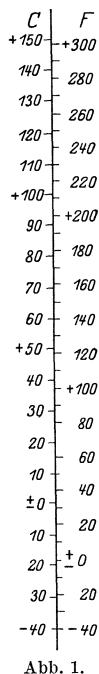


Abb. 1.

(3) Zu einer mathematisch und technisch fruchtbareren Darstellung der Abhängigkeit des F von dem C gelangt man auf folgendem Wege: Man wählt in der Ebene einen beliebigen Punkt, der mit O bezeichnet werde (Abb. 2); er möge der **Koordinatenanfangspunkt**, **Anfangspunkt**, **Nullpunkt** genannt werden. Durch ihn zieht man zwei beliebige, aufeinander senkrecht stehende Geraden; meist liegt die eine wagerecht, die andere also lotrecht. Erstere heißt die **Abszissenachse**, letztere die **Ordinatenachse**. Jene wird zum Träger der unabhängigen Ver-

änderlichen, diese zum Träger der abhängigen Veränderlichen gewählt. Weil nun in unserem Beispiele die unabhängige Veränderliche C , die abhängige F ist, wollen wir an die Abszissenachse den Buchstaben C , an die Ordinatenachse F schreiben und erstere auch die C -Achse, letztere die F -Achse nennen. — Die beiden Achsen, Abszissenachse und Ordinatenachse, haben auch den gemeinsamen Namen **Koordinatenachsen**, und das ganze Gebilde wird als ein **Koordinatensystem**, und zwar, weil die

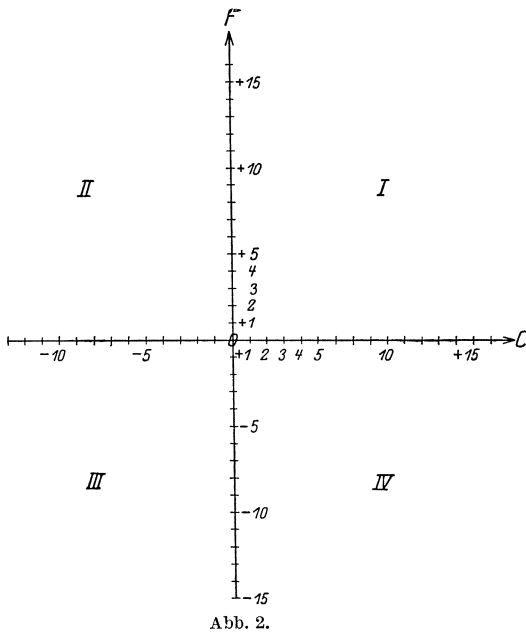


Abb. 2.

beiden Achsen aufeinander senkrecht stehen, als ein **rechtwinkliges Koordinatensystem** bezeichnet.

Nun wählen wir auf der C -Achse eine Strecke, die der Einheit des C -Maßes, also 1°C , entsprechen soll: dadurch erhalten wir auf der C -Achse eine Celsius-Leiter, und wenn wir uns dafür entscheiden, daß der Punkt O zugleich der Nullpunkt derselben sein, und von diesem nach rechts die Leiter mit positiver Temperaturangabe, nach links die mit negativer

gerichtet sein soll, eine Skala, die alle Temperaturangaben von $-\infty$ bis $+\infty$ umfaßt. Dasselbe wollen wir mit der F -Achse vornehmen; auch hier wählen wir eine Strecke, die 1°F entspricht, eine sog. „Einheitsstrecke“; diese kann an sich beliebig lang sein, sie soll aber in unserem Falle dieselbe Länge haben wie diejenige, welche 1°C entsprechen soll. Wählen wir hier die nach oben gerichtete als die „positive“, die nach unten gerichtete als die „negative“ F -Achse, so können wir auch auf der F -Achse, wenn wir von unten nach oben gehen, alle Temperaturen $-\infty < F^\circ < +\infty$ unterbringen. Die beiden Koordinatenachsen teilen die Ebene in vier Quadranten, von denen man den von der positiven C - und der positiven F -Achse begrenzten als ersten und die übrigen, im Gegenzeigersinne umlaufend, als zweiten, dritten, vierten bezeichnet (s. Abb. 2: *I, II, III, IV*).

Nun wissen wir, daß nach dem durch die Formel 1) ausgedrückten Gesetze beispielsweise einer Temperatur von 15°C eine solche von

59°F entspricht; jetzt führen wir folgendes aus: In Abb. 3, die im Maßstab 1:10 gegenüber Abb. 2 verkürzt ist, suchen wir auf der C -Achse denjenigen Punkt C , der 15°C entspricht, und auf der F -Achse den 59°F entsprechenden Punkt F . Ferner ziehen wir durch C zur F -Achse und durch F zur C -Achse die beiden Parallelen, die sich in A schneiden mögen. Dieser Punkt A soll nun derjenige Punkt sein, der dem Wertepaare $15^\circ \text{C} | 59^\circ \text{F}$ entspricht. Da $FA = OC$ und $CA = OF$ ist, hätte man zu A auch gelangen können, wenn man durch C die Parallele zur F -Achse gezogen und auf ihr $CA = OF$ abgetragen hätte. Man nennt $OC = 15^\circ \text{C}$ die **Abszisse** und $CA = 59^\circ \text{F}$ die **Ordinate** und beide zusammen die **Koordinaten** des Punktes A . Zugleich erkennt man, daß jeder Punkt in der Ebene eine und nur eine Abszisse und ebenso eine und nur eine Ordinate hat, und daß zu jedem Wertepaare C und F ein und nur ein einziger Punkt gehört, für den C die Abszisse und F die Ordinate ist. Der Punkt A ist also dadurch gefunden worden, daß man zu den Koordinatenachsen Parallele gezogen hat; das Koordinatensystem trägt aus diesem Grunde auch den Namen **Parallelkoordinatensystem**.

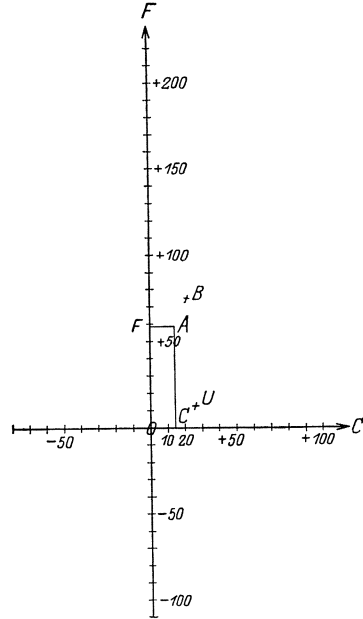


Abb. 3.

Es ist ohne weiteres klar, daß nicht jeder Punkt der Ebene die Eigenschaft hat, daß seine Koordinaten die Gleichung

$$F = \frac{2}{3} C + 32 \quad 1)$$

erfüllen; sie kommt nur gewissen Punkten zu, wenn deren Anzahl auch an sich unendlich groß ist. Einer dieser Punkte ist, wie wir gefunden haben, A , ein anderer, wie man sich leicht überzeugt, B ($25^\circ \text{C} | 77^\circ \text{F}$), während beispielsweise der Punkt U ($25^\circ \text{C} | 12^\circ \text{F}$) diese Eigenschaft nicht aufweist. Es empfiehlt sich, zur Förderung des Verständnisses eine größere Anzahl solcher Punkte zu bestimmen, indem man in Gleichung 1) für C eine Reihe von Werten einsetzt und das zugehörige F berechnet. So gehören zu den Werten

$C = -80 \quad -60 \quad -40 \quad -20 \quad \pm 0 \quad +20 \quad +40 \quad +60 \quad +80$
 die Werte $F = -112 \quad -76 \quad -40 \quad -4 \quad +32 \quad +68 \quad +104 \quad +140 \quad +176$

(In Abb. 4 sind die zugehörigen Punkte eingetragen.) In dieser Tabelle wachsen die Werte von C um je 20° ; man kann selbstverständlich

die Intervalle noch dichter wählen, 1° oder $0,1^\circ$ oder $0,01^\circ \dots$; das würde, wie man sich leicht überzeugt, zur Folge haben, daß zwischen je zwei der obigen Tabelle entsprechende aufeinanderfolgende Punkte noch 19 oder 199 oder 1999 \dots weitere Punkte einzuschalten wären. Die Punkte folgen dichter und dichter aufeinander; sie erfüllen schließlich eine Linie, die man als das **Schaubild** oder **Diagramm** der Gleichung 1) bezeichnet.

Schon Abb. 4 läßt vermuten, daß diese Linie eine Gerade ist;

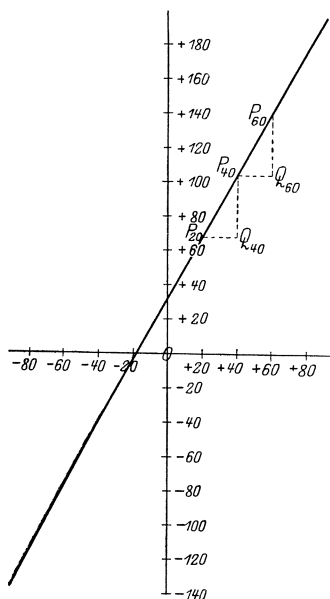


Abb. 4.

denn die Tabelle lehrt, daß der Unterschied je zweier aufeinanderfolgenden Werte von F beständig derselbe, nämlich 36 ist, daß also zu einer konstanten Differenz von C , nämlich der Differenz 20, die konstante Differenz 36 von F gehört. Was bedeutet dies aber geometrisch? Zieht man in Abb. 4 beispielsweise durch P_{20} die Parallele zur C -Achse und durch P_{40} die Parallele zur F -Achse, die sich in Q_{40} schneiden mögen, so bildet sich ein rechtwinkliges Dreieck $P_{20}Q_{40}P_{40}$, indem die Kathete $P_{20}Q_{40} = 20$, der Differenz der C , und die Kathete $Q_{40}P_{40} = 36$, der Differenz der F , ist. Dann ist aber das Dreieck $P_{40}Q_{60}P_{60}$ in Abb. 4 deckungsgleich mit diesem, folglich ist auch

$$\sphericalangle P_{40}P_{20}Q_{40} = \sphericalangle P_{60}P_{40}Q_{60} = \alpha;$$

und zwar ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{36}{20} = \frac{9}{5}$. Da nun die beiden Schenkel $P_{20}Q_{40}$ bzw. $P_{40}Q_{60}$ parallel der C -Achse, also auch untereinander parallel sind, müssen auch die beiden Schenkel $P_{20}P_{40}$ und $P_{40}P_{60}$ untereinander parallel sein; weil sie fernerhin den Punkt P_{40} gemeinsam haben, müssen sie sogar auf die nämliche Gerade fallen. Das heißt aber nichts anderes, als daß P_{60} auf der Geraden $P_{20}P_{40}$ liegen muß. Damit ist bewiesen, daß die Punkte der Abb. 4 auf einer Geraden liegen, und zwar bildet diese Gerade mit der C -Achse einen Winkel α , für welchen $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{5}$ ist, der also $\alpha \approx 61^\circ$ ist. Man bezeichnet $\operatorname{tg} \alpha = A$ als den Richtungsfaktor der Geraden.

So bleibt nur noch der Nachweis übrig, daß jeder der Punkte, deren Koordinaten die Gleichung 1) erfüllen, sich dieser Geraden einfügt. Wir wollen uns zu diesem Zwecke unter C einen ganz beliebigen, aber bestimmten Wert vorstellen; zu ihm gehört vermöge Gleichung 1) ein bestimmter Wert $F = \frac{9}{5}C + 32$; beiden Koordinaten

entspricht (Abb. 5) ein bestimmter Punkt P . Diesen wollen wir durch eine Gerade mit P_{20} verbinden. Ferner wollen wir durch P_{20} die Parallele zur C -Achse und durch P die Parallele zur F -Achse ziehen; beider Schnittpunkt sei Q . Dann ist $P_{20}Q$ gleich der Differenz der zu P_{20} und zu P gehörigen Abszissen, also gleich $C - 20$, ebenso ist QP gleich der Differenz der Ordinaten dieser Punkte, also gleich

$$\frac{9}{5}C + 32 - 68 = \frac{9}{5}C - 36;$$

folglich ist

$$\operatorname{tg} PP_{20}Q = \frac{\frac{9}{5}C - 36}{C - 20} = \frac{9}{5} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Die Gerade $P_{20}P$ hat demnach dieselbe Richtung wie die Gerade $P_{20}P_{40}$ der Abb. 4; demnach fallen beide aufeinander, d. h. der Punkt P ist ein Punkt dieser Geraden. Damit ist der Beweis erbracht.

(4) Wir sind am Ende unserer Betrachtungen über das eingangs dieses Paragraphen eingeführte Beispiel; fassen wir daher das Wesentlichste unserer Erörterungen nochmals zusammen:

Die Gleichung 1) $F = \frac{9}{5}C + 32$ lehrt, zu einer beliebigen Celsius-Temperatur C die zugehörige Fahrenheit-Temperatur F zu finden. Die abhängige Veränderliche F ist eine lineare Funktion von C , deshalb linear genannt, weil ihr Schaubild im rechtwinkligen Parallelkoordinatensystem eine gerade Linie ist. Bildet man die Differenz irgend zweier Werte von C , ebenso die Differenz der zu ihnen gehörigen beiden Werte von F und dividiert letztere Differenz durch erstere, d. h. bildet man den Quotienten aus der Differenz irgend zweier Werte der abhängigen Veränderlichen und der Differenz der zugehörigen unabhängigen Veränderlichen, den sog. **Differenzenquotient**, so ist dieser für unsere lineare Funktion konstant, d. h. gänzlich unabhängig von den zufällig gewählten Werten von C . Er hat in unserem Falle den Wert $\frac{9}{5}$, ist also identisch mit dem Richtungsfaktor der Geraden. Man sieht fernerhin, daß der Differenzenquotient identisch mit dem Faktor von C in Gleichung 1) ist. Damit hat dieser einen geometrischen Sinn erhalten. Aber auch die andere konstante Größe in Gleichung 1), das Absolutglied 32, läßt eine geometrische Deutung zu; es ist nämlich gleich dem Stücke, das die Bildgerade auf der F -Achse, der Ordinatenachse, abschneidet, wie man sich leicht überzeugt, und wie schon aus der Tabelle (S. 5) ersichtlich ist.

Was hat uns dieses Schaubild praktisch zu sagen? In Abb. 6 ist es noch einmal wiedergegeben unter Fortlassung aller konstruktiven

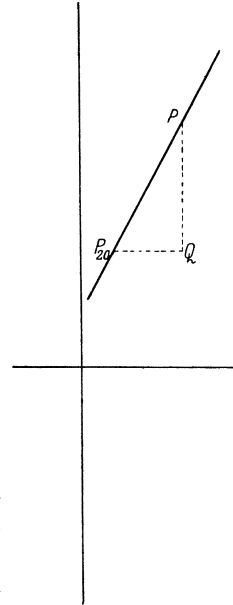


Abb. 5.

und für die Beweise notwendigen Einzelheiten der vorangehenden Abbildungen. Wir können mit Hilfe des Schaubildes zu einer beliebigen Celsius-Temperatur C die Fahrenheit-Temperatur F finden und umgekehrt, und zwar auf folgendem Wege: Wir lesen auf der C -Achse das gegebene C ab, gehen von diesem Punkte auf der Parallelen zur F -Achse bis zum Punkte P der Geraden und von diesem auf der Parallelen zur C -Achse bis zum Schnittpunkte F der F -Achse; dieser liefert die gesuchte Fahrenheit-Temperatur. — Es lassen sich zeichnerisch noch eine große Fülle anderer Aufgaben lösen. So macht beispielsweise die Beantwortung der in (1) S. 1, gestellten Frage nach der Temperatur, für welche F und C gleiche Angaben haben, keine Mühe; man braucht bloß zu bedenken, daß die Halbierende w_1 des Winkels zwischen der positiven C - und der positiven F -Achse und seines Scheitelwinkels der Ort für jeden Punkt ist, dessen Abszisse gleich der Ordinate ist, um im Schnittpunkte G mit der Geraden von der Gleichung 1) den Punkt zu finden, für welchen $F = C$ ist; das Bild läßt deutlich erkennen, daß für ihn $F = C = -40^\circ$ ist.

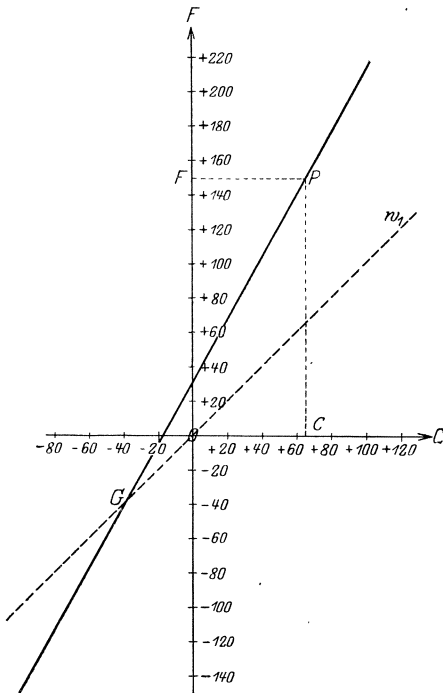


Abb. 6.

(Wie findet man zeichnerisch die Temperaturen, für welche F und C entgegengesetzt gleiche Angaben liefern? Für welche ist die F -Angabe um 100° höher als die C -Angabe? usw.)

Es empfiehlt sich, einer ganz entsprechenden Betrachtung auch die Beziehung zwischen Celsius und Réaumur und zwischen Fahrenheit und Réaumur zu unterziehen und diese Untersuchungen in allen den Richtungen zu vertiefen, wie es in diesem Paragraphen für Fahrenheit-Celsius geschehen ist. Doch sei dies dem Leser überlassen.

Haben wir uns mit den Ausführungen dieses Paragraphen voll vertraut gemacht, so dürfte die Behandlung der allgemeinen linearen Funktion, mit der wir uns im folgenden Paragraphen befassen wollen, keine Schwierigkeit bereiten.

Haben wir uns mit den Ausführungen dieses Paragraphen voll vertraut gemacht, so dürfte die Behandlung der allgemeinen linearen Funktion, mit der wir uns im folgenden Paragraphen befassen wollen, keine Schwierigkeit bereiten.

§ 2. Die lineare Funktion.

(5) Man ist übereingekommen, solange keine anderweitigen Gründe, wie praktische Erwägungen usw., es erfordern, die Veränderlichen mit den letzten Buchstaben des (lateinischen, griechischen, deutschen) Alphabets, die Unveränderlichen dagegen mit den ersten Buchstaben zu bezeichnen. Handelt es sich also um eine Funktionsbeziehung zwischen nur zwei Veränderlichen, so wählt man die Buchstaben x und y , ersteren für die unabhängige, letzteren für die abhängige Veränderliche. Die allgemeinste Form der linearen Funktion wird demnach durch die Gleichung

$$y = Ax + b \quad 2)$$

wiedergegeben. Die Konstante A heiße der **Beiwert (Koeffizient)** der unabhängigen Veränderlichen, die Konstante b das **Absolutglied**; im Gegensatz hierzu heiße das Glied Ax das **lineare Glied** der Funktion.

Setzt man in 2) $x = 0$, so ergibt sich $y = b$; das Absolutglied ist also derjenige Wert, den die abhängige Veränderliche annimmt, wenn man der unabhängigen Veränderlichen den Wert Null erteilt. Auch der Größe A kann man eine funktionale Bedeutung beimesen; wir kommen zu ihr durch folgende Überlegungen:

Wir nehmen einen beliebigen, aber bestimmten Wert für x an; zu ihm gehört vermöge 2) ein bestimmter Wert $y = Ax + b$. Nun erteilen wir der unabhängigen Veränderlichen einen zweiten beliebigen, aber bestimmten Wert, er möge x_1 sein; ihm entspricht ein anderer Wert y_1 der abhängigen Veränderlichen, so daß $y_1 = Ax_1 + b$ ist. Jetzt bilden wir die Differenz der beiden Werte der unabhängigen Veränderlichen, sie ist $x_1 - x$; ebenso die Differenz der beiden Werte der abhängigen Veränderlichen, diese ist $y_1 - y = A(x_1 - x)$. Schließlich dividieren wir diese Differenz durch die erste; wir bilden den **Differenzenquotienten**:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = A. \quad 3)$$

Formel 3) sagt uns zweierlei: Erstens: Für jede lineare Funktion ist der Differenzenquotient konstant, welche beiden Werte man auch für die unabhängige Veränderliche wählen möge. Und zweitens: Der Beiwert der unabhängigen Veränderlichen ist für jede lineare Funktion gleich ihrem Differenzenquotienten.

Eine im Grunde völlig gleiche, nur in der äußeren Form und der Ausdrucksweise etwas abweichende Ableitung derselben Ergebnisse ist

die folgende: Man gibt der Unabhängigen einen bestimmten Wert x ; der zugehörige Wert der Abhängigen ist

$$y = Ax + b. \quad 2)$$

Nun erteilt man dem gewählten x einen Zuwachs, der mit Δx bezeichnet wird, so daß der neue Wert der unabhängigen Veränderlichen $x + \Delta x$ lautet; zu ihm gehört auch ein anderer Wert der abhängigen Veränderlichen, der sich von dem vorherigen um den Zuwachs Δy unterscheiden möge, so daß also die Gleichung besteht:

$$y + \Delta y = A(x + \Delta x) + b. \quad 2')$$

(Es sei, um Mißverständnissen vorzubeugen, ausdrücklich betont, daß die Bezeichnungen Δx bzw. Δy nicht etwa Produkte aus Δ und x bzw. y sind, sondern Abkürzungen für „Differenz der x bzw. y “, ähnlich wie $\sin x$ nicht das Produkt aus den beiden Faktoren \sin und x darstellt, sondern „Sinus des Winkels x “ zu lesen ist; Δx und Δy sind also gleichbedeutend mit den Ausdrücken, die oben als $x_1 - x$ bzw. $y_1 - y$ bezeichnet worden sind.) Subtrahiert man die Gleichungen 2) und 2') voneinander, so erhält man die Größe des Zuwachses $\Delta y = A \cdot \Delta x$ und hieraus den Quotienten der beiden Zuwächse bzw. Differenzen, also den **Differenzenquotienten** in Übereinstimmung mit oben:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A. \quad 3')$$

Es ist also gleichgültig, welche der beiden Betrachtungsweisen man zugrunde legt; wir werden im folgenden bald diese, bald jene wählen, je nachdem ob wir mehr den Begriff der Differenz oder den des Zuwachses betonen wollen. Im übrigen ist es nicht nötig, daß Δx und Δy stets einen Zuwachs im eigentlichen Sinne bedeuten; Δx kann auch negativ gewählt werden, also nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch eigentlich eine Abnahme darstellen; ebenso gibt es, wie die folgenden Beispiele zeigen, Fälle, in denen Δy negativ wird.

(6) Wir kommen nun zum **Schaubild** der allgemeinen linearen Funktion im rechtwinkligen Parallelkoordinatensystem. Da wir die unabhängige Veränderliche mit x bezeichnet haben, so heißt ihr Träger, die Abszissenachse, auch die X -Achse, und entsprechend die Ordinatenachse die Y -Achse. Wir wählen auf beiden Achsen eine Maßeinheit, die, soweit keine Zweckmäßigkeitsgründe dagegen sprechen, für beide Achsen dieselbe sein möge. Der Punkt P (Abb. 7) habe die Eigenschaft, daß seine Koordinaten $OX = x$ und $XP = y$ die Gleichung 2) erfüllen

$$y = Ax + b;$$

dasselbe möge von den Koordinaten $OX_1 = x_1$ und $X_1P_1 = y_1$ des Punktes P_1 gelten: $y_1 = Ax_1 + b$. Jetzt ziehen wir durch P die Parallele

zur x -Achse, die X_1P_1 in Q_1 schneiden möge. Nun ist aber

$$PQ_1 = X X_1 = O X_1 - O X = x_1 - x = \Delta x,$$

also gleich der Differenz bzw. Zunahme der unabhängigen Veränderlichen, und

$$Q_1P_1 = X_1P_1 - X_1Q_1 = X_1P_1 - XP = y_1 - y = \Delta y,$$

d. h. gleich der Differenz bzw. Zunahme der abhängigen Veränderlichen. Folglich ist

$$\operatorname{tg} P_1PQ_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \quad [\text{s. 3) bzw. 3')].$$

Wenn man also irgend zwei Punkte, deren Koordinaten Gleichung 2) erfüllen, miteinander durch eine Gerade verbindet, so schließt diese mit der X -Achse einen Winkel α ein, dessen Tangensfunktion gleich dem Beiwert A des linearen Gliedes, also konstant ist. Das ist aber nur dann möglich, wenn alle diese Punkte auf einer Geraden g liegen, deren Richtungsfaktor gleich dem Beiwert A ist. Das Schaubild der linearen Funktion ist also eine Gerade. Es genügt, von dieser Geraden irgendeinen Punkt zu be-

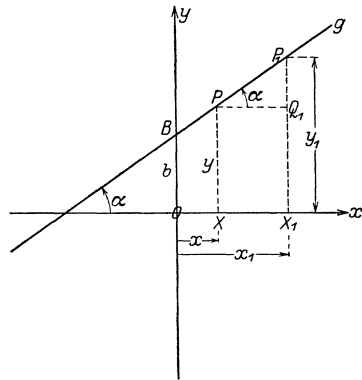


Abb. 7.

stimmen und durch diesen die Gerade mit dem Richtungsfaktor A zu legen. Da $\operatorname{tg} \alpha = A$ ist, so ist man imstande, den Winkel α selbst zu berechnen; Voraussetzung hierzu ist allerdings, daß man für beide Koordinatenachsen die gleiche Strecke als Maßeinheit gewählt hat: im Falle des § 1 ist also $\alpha = 60^\circ 56' 44''$. Aus 3) bzw. 3') ergibt sich ferner: Ist A positiv, so steigt die Gerade bei wachsender Abszisse, ist A negativ, so fällt sie.

Einen besonderen Punkt B erhält man, wenn man $x = 0$ setzt; für ihn ergibt sich $y = b$; es ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der y -Achse. Damit hat auch das Absolutglied von Gleichung 2) seine geometrische Deutung erhalten; es liefert den Abschnitt, den die Bildgerade der linearen Funktion auf der Ordinatenachse bildet: $b = OB$. Ist also b positiv, so schneidet die Gerade die y -Achse in ihrem positiven Teil, im anderen Falle in ihrer negativen Hälfte.

Das Ergebnis unserer Untersuchungen ist also das folgende:

Das Schaubild der linearen Funktion ist im rechtwinkligen Parallelkoordinatensystem stets eine Gerade; der Beiwert des linearen Gliedes bestimmt die Richtung dieser Geraden, derart, daß bei für beide Achsen gleicher Maßeinheit dieser Beiwert gleich dem Tangens desjenigen

Winkels ist, den die Gerade mit der positiven Abszissenachse einschließt; das Absolutglied bestimmt nach Größe und Vorzeichen den Abschnitt, den die Gerade auf der Ordinatenachse bildet.

(7) Wir wollen diesen Paragraphen nicht schließen, ohne noch einiger Anwendungen der linearen Funktion, denen technische Bedeutung zukommt, zu gedenken. An erster Stelle sollen zwei Beispiele aus der Bewegungslehre stehen, in denen, in Vorbereitung später folgender Paragraphen, der Differenzenquotient eine wichtige Deutung erfährt. Das eine ist die **gleichförmige Bewegung**; man versteht unter ihr eine solche, bei welcher der bewegte Massenpunkt in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt. Bedeutet t die Zeit in einer Maßeinheit (Sekunde, Minute, Stunde, . . .), die seit dem Beginn der Zeitmessung verflossen ist, und s die Länge des Weges in der zugrunde gelegten Längeneinheit (cm, m, km, . . .) von seinem Anfangspunkte aus gemessen, so besteht für die gleichförmige Bewegung zwischen Weg und Zeit die Gleichung

$$s = s_0 + c \cdot t, \quad (4)$$

wobei t die unabhängige, s die abhängige Veränderliche, s_0 und c Konstanten sind. Daß Gleichung 4) wirklich die gleichförmige Bewegung beschreibt, sehen wir an folgendem: Gibt man der Veränderlichen t irgendeinen Zuwachs Δt , so daß seit Beginn der Zeitmessung die Gesamtzeit $t + \Delta t$ verflossen ist, so ist der Massenpunkt um eine Länge $s + \Delta s$ von dem Anfangspunkte seiner Bewegung entfernt, wobei

$$s + \Delta s = s_0 + c(t + \Delta t) \quad (4')$$

sein muß. Hieraus berechnet sich durch Subtraktion von 4) und 4') $\Delta s = c \cdot \Delta t$. Das heißt aber nichts anderes, als daß in gleichen Zeiträumen Δt auch die gleichen Wegstrecken $\Delta s = c \cdot \Delta t$ durchlaufen werden, worin eben das Wesen der gleichförmigen Bewegung beruht.

Der Differenzenquotient dieser linearen Funktion ist $\frac{\Delta s}{\Delta t} = c$; c ist also der Quotient aus der durchlaufenen Strecke und der hierzu benötigten Zeit, der als **Geschwindigkeit** bezeichnet wird. Wir haben also gefunden, daß bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit während der ganzen Bewegung konstant ist; sie ist der Beiwert des linearen Gliedes. — Setzt man in 4) $t = 0$, so ergibt sich $s = s_0$. Hiermit ist auch die andere Konstante der Gleichung 4) gedeutet; sie gibt an, welche Entfernung vom Anfangspunkte seiner Bahn der bewegte Punkt im Augenblicke des Beginns der Zeitmessung hat.

Das Schaubild der Gleichung 4) liefert natürlich wieder eine Gerade. In Abb. 8 ist die gleichförmige Bewegung

$$s = 5m - \frac{1}{2} ms^{-1} \cdot t$$

dargestellt; hierbei sind für die Zeiteinheit und die Längeneinheit verschieden lange Strecken gewählt worden, da sonst das Bild, wie man sich leicht überzeugt, zu wenig ausdrucksvoll geworden wäre. Selbstverständlich sagt die Gerade — dessen muß sich besonders der Anfänger bewußt sein — nichts über die Gestalt der Bahn des Massenpunktes aus. Die Bahn braucht durchaus keine Gerade zu sein; ein an einem Faden befestigter Stein, der im Kreise geschleudert wird, kann sehr wohl eine gleichförmige Bewegung beschreiben, der das obige Diagramm zukommt; das Schaubild gibt einzig den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen Weg und Zeit.

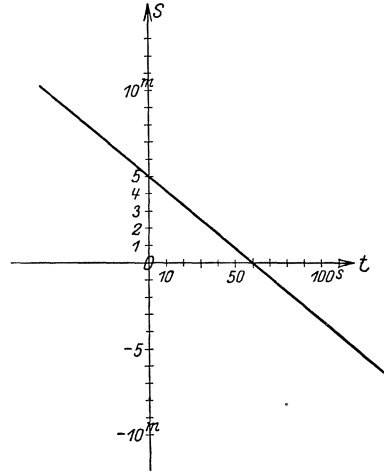


Abb. 8.

Noch klarer werden diese Verhältnisse durch Abb. 9 werden, die einen Teil des graphischen Eisenbahnfahrplanes der Strecke Freiberg—Chemnitz gibt. Sie zeigt, daß die Geradenzüge, von denen ein jeder das Schaubild eines auf dieser Strecke verkehrenden Eisenbahnzuges ist, verschiedene Richtung haben. Im übrigen dürfte das Bild so klar verständlich sein, daß sich ein weiteres Wort der Erklärung erübrigt.

(8) Auch die **gleichmäßig-veränderte Bewegung** bietet eine Anwendung der linearen Funktion, da bei ihr die Geschwindigkeit v sich in gleichen Zeiten um gleiche Beträge ändert. Die Geschwindigkeits-Zeit-Beziehung ist also hier gegeben durch eine Gleichung von der Form

$$v = v_0 + b \cdot t, \quad 5)$$

wobei v_0 die Geschwindigkeit des bewegten Massenpunktes im Zeit-Nullpunkt ist und $b = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ die Beschleunigung heißt, die also bei der gleichförmig-veränderlichen Bewegung konstant ist; ist sie negativ, so heißt sie auch **Verzögerung**. Ein Beispiel hierfür ist der senkrecht nach oben gerichtete Wurf im luftleeren Raume; für ihn ist, falls die Bewegungsrichtung nach aufwärts als die positive angesehen wird, $b = -g = -9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Es sei $v_0 = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; dann lautet die Gleichung

$$v = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot t. \quad 5')$$

Abb. 10 gibt die Kurve wieder. Bis $t = 4,08^s$ ist v positiv, wird aber mit wachsendem t immer kleiner. Für $t = 4,08^s$ ist $v = 0$; der bewegte Massenpunkt hat seine höchste Stelle erreicht; er kehrt um

und bewegt sich in umgekehrter Richtung; v wird negativ. — Die Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung für den freien Fall lautet, falls die Bewegungsrichtung nach unten als positiv gelten soll, $v = g \cdot t$, wenn der Fall gerade zum Zeit-Nullpunkt beginnt. Der Entwurf des Schaubildes sei dem Leser überlassen.

(9) Der Hydrostatik entnommen ist das folgende Beispiel: In einem Gefäße befinde sich eine Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte γ ; der Oberflächenspiegel habe den Abstand h vom Boden des Gefäßes.

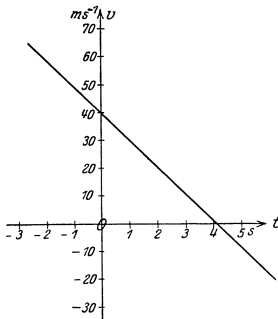


Abb. 10.

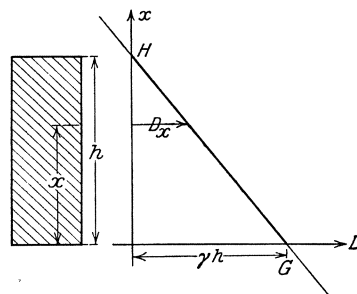


Abb. 11.

Die Flüssigkeit übt auf die Wandung einen Druck aus, der in verschiedenen Höhen verschieden ist, da die darüberlagernde Flüssigkeitssäule um so mehr wiegt, je höher sie ist, und zwar ist der Druck proportional der Höhe der darüberlagernden Flüssigkeitsschicht. In der Höhe h über dem Boden ist der Druck Null; der Boden trägt das Flüssigkeitsgewicht $f \cdot h \cdot \gamma$, wenn f die Fläche des Bodens ist; folglich ist der Druck am Boden gleich

$$\frac{\text{Gewicht der Flüssigkeit}}{\text{Grundfläche}} = h \cdot \gamma.$$

Um den Druck D in der Höhe x über dem Boden zu finden, verwende man die Proportion

$$D : (h \cdot \gamma) = (h - x) : h;$$

hieraus folgt:

$$D = \gamma(h - x). \quad (6)$$

D ist also eine lineare Funktion von x ; der Differenzenquotient ist $-\gamma$. Da die unabhängige Veränderliche x in diesem Beispiele eine Höhe ist, also lotrechte Richtung hat, empfiehlt es sich, für das Schaubild, abweichend von der sonstigen Gepflogenheit, die x -Achse auch lotrecht, die D -Achse dagegen wagerecht zu wählen; das Schaubild gestattet dann, sofort für jede beliebige Höhe den Druck abzulesen. Erwähnt sei ferner noch, daß Gleichung 6) zwar von den Koordinaten aller Punkte der unendlich langen Geraden GH erfüllt

wird, daß aber für das gestellte Problem nur die Strecke GH Wert hat, da x praktisch ja nur zwischen den endlichen Werten 0 und h variieren kann.

(10) Ein elektrischer Stromerzeuger habe eine elektromotorische Kraft e und einen inneren Widerstand w_i ; wie ändert sich die Klemmenspannung e_a mit der Verbraucherstromstärke i ? Ist w_a der Widerstand des Verbraucherstromkreises, der äußere Widerstand, und e_i das Spannungsgefälle im Innern der Stromquelle, so ist nach dem Ohmschen Gesetze

$$\text{a) } i = \frac{e}{w_i + w_a},$$

ferner

$$\text{b) } e = e_i + e_a$$

und nach dem Kirchhoffschen Gesetze

$$\text{c) } e_i : e_a = w_i : w_a.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen e_i und w_a , so ergibt sich:

$$e_a = e - w_i i. \quad 7)$$

Die Klemmenspannung ist also eine lineare Funktion der Verbraucherstromstärke. Da e_a praktisch nur zwischen den Grenzen 0 und e variieren kann, gelten für das Schaubild dieselben Bemerkungen wie in (9).

Außerdem erkennt man, daß der Höchstwert, der für i aus unserer Stromquelle herausgeholt werden kann, für $e_a = 0$ eintritt; er beträgt

$$i_{\max} = \frac{e}{w_i}.$$

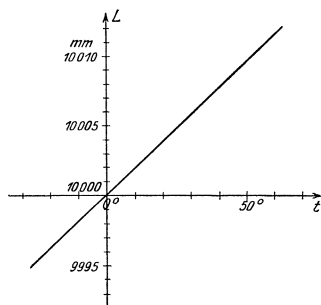


Abb. 12.

Schließlich sei noch an das Gesetz aus der Wärmelehre erinnert, nach dem im allgemeinen die Ausdehnung eines Körpers innerhalb gewisser Grenzen der Temperaturerhöhung proportional ist:

$$L_t = L_0(1 + \alpha t).$$

(L_0 die Länge bei 0°C , L_t die Länge bei $t^\circ \text{C}$, α der Ausdehnungskoeffizient.) Da α im allgemeinen sehr klein ist, empfiehlt es sich, um überhaupt ein handliches Schaubild zu erhalten, die Bezifferung der L -Achse nicht mit 0, sondern mit einem höheren Werte, etwa L_0 zu beginnen. So gibt Abb. 12 das Schaubild für die lineare Ausdehnung des Messings ($\alpha = 0,000019$).

Wir sind am Ziele unserer Betrachtungen über die lineare Funktion und haben zuletzt an Beispielen ihr mannigfaches Auftreten kennengelernt; wir haben die praktische Bedeutung der auftretenden Größen,

insbesondere des Differenzenquotienten, erkannt und gesehen, wie man beim Entwurf des Schaubildes bisweilen zweckmäßigerweise von der üblichen Form in der einen oder anderen Richtung abweicht, und so gelernt, das Wesentliche der Darstellung vom Unwesentlichen zu unterscheiden. Wir sind damit reif geworden zur Behandlung von weniger einfachen Problemen; wir gehen einen Schritt weiter und wollen uns im folgenden Paragraphen in das Wesen der quadratischen Funktion vertiefen.

§ 3. Die quadratische Funktion.

(11) Die allgemeinste Form der quadratischen Funktion ist

$$y = ax^2 + bx + c, \quad 8)$$

d. h. also, daß — zum Unterschied von der linearen Funktion — y auch noch von der zweiten Potenz (dem Quadrat) von x abhängig ist. Ehe wir jedoch zu ihrer Untersuchung übergehen, wollen wir vorerst den einfachsten Sonderfall betrachten; wir erhalten ihn, indem wir der Konstanten a den Wert 1, den Konstanten b und c den Wert 0 erteilen. Es ergibt sich die **rein quadratische Funktion** von der Form

$$y = x^2; \quad 9)$$

sie liefert also zu jeder Zahl x die zugehörige Quadratzahl, und jede Tabelle der Quadratzahlen ist eine tabellarische Darstellung dieser Funktion. Wenden wir uns ihrem Schaubilde zu! Es ist nach obigem eine Linie, die alle Punkte umfaßt, für welche der Zahlenwert der Ordinate das Quadrat des Zahlenwertes der Abszisse ist; auf ihr liegen also beispielsweise die Punkte $(0|0)$, $(1|1)$, $(2|4)$, $(3|9)$. . .; diese Bezeichnungsweise wird gern verwendet, die erste Zahl in der Klammer gibt die Abszisse, die zweite die Ordinate des Punktes. Schon hieraus erkennt man, daß die Linie keine Gerade sein kann. Durch Einschalten weiterer Punkte tritt die Art der Kurve noch deutlicher hervor, um so deutlicher, je dichter die Punkte gewählt werden;

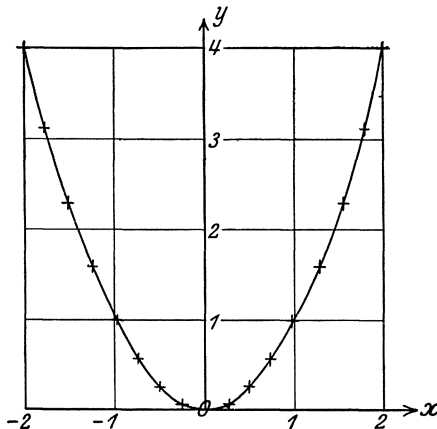


Abb. 13.

in Abb. 13 sind noch die Punkte $(\frac{1}{2}|\frac{1}{4})$, $(\frac{3}{2}|\frac{9}{4})$. . . eingezeichnet. Das Schaubild der rein quadratischen Funktion ist die **Parabel**, nach der Geraden wohl die wichtigste Kurve der Technik. Die Gleichung $y = x^2$ möge für uns die Definitionsgleichung der Parabel

sein. Aus ihr lassen sich sofort einige wichtige Eigenschaften dieser Kurve finden. Ziehen wir, was bisher nicht geschehen ist, auch negative Abszissen in den Bereich unserer Betrachtungen ein, und berücksichtigen wir, daß die Quadrate entgegengesetzt gleicher Zahlen einander gleich sind, so finden wir, daß zu entgegengesetzt gleichen Abszissen Punkte von gleicher Ordinate gehören [z. B. $P(\frac{5}{4} | \frac{25}{16})$ und $P'(-\frac{5}{4} | \frac{25}{16})$]. Da diese Punktepaare spiegelbildlich (symmetrisch) zur Ordinatenachse liegen, so muß die Kurve selbst aus zwei Teilen bestehen, von denen der eine das Spiegelbild des anderen bezüglich der Ordinatenachse ist. Diese hat daher eine ganz besondere Bedeutung für die Parabel; sie heißt die Achse der Parabel. Der Punkt, in welchem beide Teile zusammenstoßen — in unserem Falle der Koordinatenanfangspunkt —, hat ebenfalls eine besondere Bedeutung; er heißt der Scheitel der Parabel. Unter dem Scheitel der Parabel versteht man also ihren Schnittpunkt mit ihrer Achse. — Da das Quadrat einer reellen Größe stets positiv ist, so folgt weiter, daß die Ordinate eines jeden Punktes unserer Parabel positiv sein muß, daß also die Parabel in ihrem ganzen Verlaufe oberhalb der x -Achse, d. h. in demjenigen Teile der Ebene läuft, welcher durch die positive Hälfte der y -Achse bestimmt ist.

(12) Wir wählen jetzt für die unabhängige Veränderliche einen neuen Wert x_1 ; zu ihm gehört auch ein neuer Wert der abhängigen Veränderlichen $y_1 = x_1^2$. Die Differenz beider Werte der abhängigen Veränderlichen ist also $y_1 - y = x_1^2 - x^2$; dividiert man diese durch die Differenz der beiden Werte der unabhängigen Veränderlichen, also durch $x_1 - x$, so ergibt sich der Differenzenquotient:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} = x_1 + x. \quad (10)$$

Hier ist nun eine Tatsache besonders bemerkenswert; der Differenzenquotient ist nämlich nicht, wie bei der linearen Funktion, eine konstante Größe; er ist im Gegenteil, da er gleich der Summe der beiden Werte der unabhängigen Veränderlichen ist, abhängig sowohl von x als auch von x_1 , also von zwei Bestimmungsstücken. Dies lehrt auch der andere Weg zur Bestimmung des Differenzenquotienten [s. (5)]. Gibt man nämlich der Veränderlichen x den Zuwachs Δx , so daß der neue Wert der unabhängigen Veränderlichen $x + \Delta x$ ist, so erhält die Abhängige y einen Zuwachs Δy , und der zu $x + \Delta x$ gehörige Wert derselben, $y + \Delta y$, ist durch die Gleichung

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \quad (11)$$

bestimmt. Durch Subtraktion der beiden Gleichungen 9) und 11) folgt für Δy

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

und hieraus für den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x; \quad (12)$$

auch in dieser Form erkennt man seine Abhängigkeit von der Wahl zweier Größen, von x und Δx . Der Zusammenhang zwischen den Formeln 10) und 12) wird durch die Gleichungen

$$\Delta x = x_1 - x, \quad \Delta y = y_1 - y \quad \text{bzw.} \quad x_1 = x + \Delta x, \quad y_1 = y + \Delta y$$

hergestellt.

Zwecks geometrisch anschaulicher Darstellung des Differenzenquotienten sei P (Abb. 14) der Punkt mit den Koordinaten $OX = x$, $XP = y$, wobei $y = x^2$ ist; P_1 habe die Koordinaten $OX_1 = x_1$, $X_1P_1 = y_1$, so daß also

$$XX_1 = \Delta x, \quad QP_1 = X_1P_1 - XP = \Delta y$$

ist. PP_1 ist also eine durch den Punkt P gehende Sekante s der Parabel, deren Richtung gegen die x -Achse gerade durch den Differenzenquotienten $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ wiedergegeben wird [s. (6)].

Nun erkennt man weiter, daß sich durch P unendlich viele Parabelsekanten legen lassen, da man noch den Punkt P_1 willkürlich wählen kann; dieser Umstand ist das geometrische Gegenstück zu der oben abgeleiteten Eigenschaft, daß der Differenzenquotient von der Wahl von x_1 bzw. Δx abhängig ist.

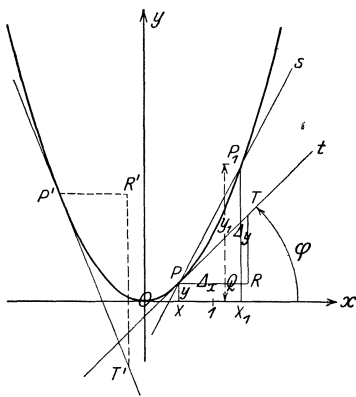


Abb. 14.

(13) Die bemerkenswerteste der unendlich vielen durch P gehenden Parabelsekanten ist nun die in P an die Parabel gelegte Tangente; sie ergibt sich, wenn der Punkt P_1 auf der Parabel wandert, bis er in unmittelbare Nachbarschaft von P gelangt, bis er zum Nachbarpunkt von P auf der Parabel wird. Da entsteht sofort die Frage: Wie drückt sich dieser Grenzübergang, wie wir den soeben beschriebenen geometrischen Vorgang nennen wollen, analytisch, d. h. rechnerisch, aus? Da brauchen wir nur im Auge zu behalten, daß dem Umstande, daß P_1 sich P nähert, rechnerisch die Tatsache entspricht, daß die Differenz ihrer Abszissen, also $x_1 - x = \Delta x$, immer kleiner wird oder, wie man sich ausdrückt, „sich der Grenze Null nähert“, „unter jeden noch so kleinen Wert fällt“, oder „gegen Null konvergiert“. Man schreibt dies in folgender Form:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} (x_1 - x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$$

(sprich limes Δx ; limes = Grenzwert). Nun ergibt sich aber für diesen Grenzwert des Differenzenquotienten der rein quadratischen Funktion

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x, \quad (13)$$

wie aus Formel 10) und 12) übereinstimmend folgt.

Für

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

hat man einen besonderen Ausdruck geprägt; man bezeichnet den Grenzwert des Differenzenquotienten als **Differentialquotient** und schreibt ihn in der Form $\frac{dy}{dx}$ und liest ihn mit den Worten „ dy nach dx “. Also ist der Differentialquotient der rein quadratischen Funktion

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad (14)$$

d. h. der Differentialquotient der rein quadratischen Funktion ist für einen bestimmten Wert der unabhängigen Veränderlichen gleich ihrem doppelten Betrage.

Der Differenzenquotient lieferte uns die Richtung der Sekante; folglich gibt der Differentialquotient uns die Richtung der Tangente; d. h. bezeichnet man in Abb. 14 den Winkel, den die in P an die Parabel gelegte Tangente mit der x -Achse bildet, mit φ , so ist

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = 2x. \quad (15)$$

Voraussetzung ist allerdings, daß Abszisse und Ordinate mit derselben Einheit gemessen sind. Dieses Ergebnis bietet uns also ein Mittel, um in einem bestimmten Punkte P an die Parabel die Tangente zu legen. Man braucht zu diesem Zwecke nur von P in Richtung der positiven x -Achse um die Längeneinheit bis zum Punkte R und von diesem in Richtung der y -Achse um die Länge $RT = 2x$ zu gehen; der Endpunkt T ist ein Punkt der in P an die Parabel gelegten Tangente; denn es ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{RT}{PR} = \frac{2x}{1} = 2x.$$

Ist x negativ, d. h. liegt der Parabelpunkt links der Achse, so muß selbstverständlich die Strecke $2x$ im Sinne der negativen Achse gezogen werden (s. Abb. 14, Punkt P'). Wir sind also imstande, von der Parabel nicht nur Punkte in beliebiger Zahl anzugeben, sondern vermittelt des Differentialquotienten in diesen Punkten auch die Tangenten zu zeichnen, die Parabel also mit einem ziemlich hohen Grade der Genauigkeit zu entwerfen. Es sei nun dem Leser als lehrreiche Übung anheimgestellt, diese Konstruktion auch wirklich durchzuführen.

(14) Erteilt man in Gleichung 8) der Größe a einen beliebigen, vorläufig positiven Wert, während die Größen b und c auch noch weiterhin gleich Null sein mögen, so kommt man zu der allgemeineren quadratischen Funktion

$$y = ax^2. \quad (16)$$

Da $a > 0$ sein soll, so ist auch $y > 0$; also läuft die zugehörige Kurve ebenfalls ganz auf der positiven Seite der y -Achse. Sie unterscheidet sich von der bisherigen Parabel $y = x^2$

einfach nur dadurch, daß die Ordinaten ihrer Punkte das a fache der zu derselben Abszisse gehörigen Punkte der früheren sind. In Abb. 15 sind die Kurven für verschiedene Werte von a eingezeichnet; man erhält, wie man aus ihr erkennt, beispielsweise die Kurve für $a = 4$ aus derjenigen für $a = 1$ einfach dadurch, daß man die Ordinaten der letzteren vervierfacht. Ist $a > 1$, so ergibt sich die entsprechende Kurve gewissermaßen dadurch aus der ursprünglichen Parabel, daß man diese in Richtung der y -Achse dehnt, für $a < 1$ umgekehrt dadurch, daß man sie zusammen-

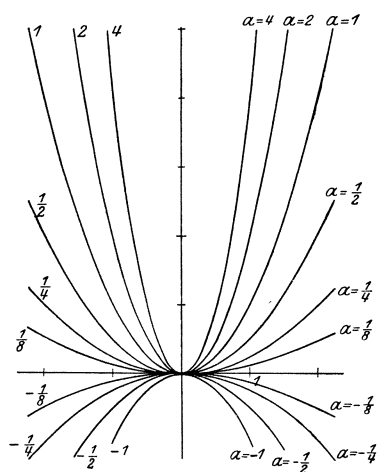


Abb. 15.

drückt. Für $a < 0$ ist y stets negativ; die zugehörige Kurve verläuft also ganz auf der zur negativen Hälfte der y -Achse gehörigen Halbebene; es bedarf wohl keines Beweises dafür, daß man sie aus der zu dem entgegengesetzt gleichen Werte von a gehörigen Kurve dadurch erhält, daß man diese an der x -Achse spiegelt (s. Abb. 15).

Die durch die Gleichung $y = ax^2$ definierte Kurve ist eine Parabel. Beweis: Nach 8) verstehen wir unter einer Parabel eine Kurve, deren Gleichung im rechtwinkligen Koordinatensystem $y = x^2$ lautet. Nun ist aber die Gestalt der Parabel wesentlich abhängig von der Wahl der Längeneinheit des Koordinatensystems. So ist beispielsweise in Abb. 16a als Längeneinheit 1 cm, in Abb. 16b 2 cm gewählt, in letzterer zum Vergleiche nochmals die Parabel von 16a, und zwar gestrichelt, eingezeichnet. Abb. 17 sei das Bild der Funktion $y = ax^2$, wobei eine bestimmte Längeneinheit e zugrunde gelegt sei, so daß also die Strecken OX x und XP $y = ax^2$ dieser Längeneinheiten umfassen. Messen wir nun aber die Strecken mit einer anderen Längeneinheit e' von der Art, daß $e' = e/a$ bzw. $e = ae'$ ist, so enthält OX $\xi = ax$ und XP $\eta = a \cdot ax^2 = a^2x^2$ solcher Längeneinheiten; es ist also $\eta = \xi^2$ die Gleichung der nämlichen Kurve unter Zugrundelegung

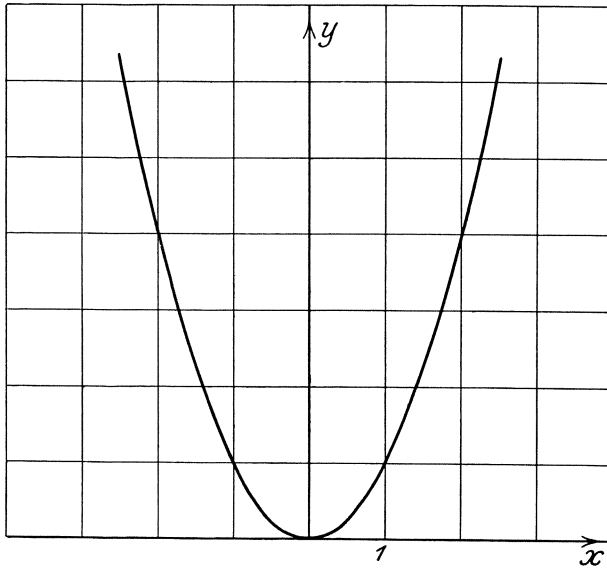


Abb. 16 a.

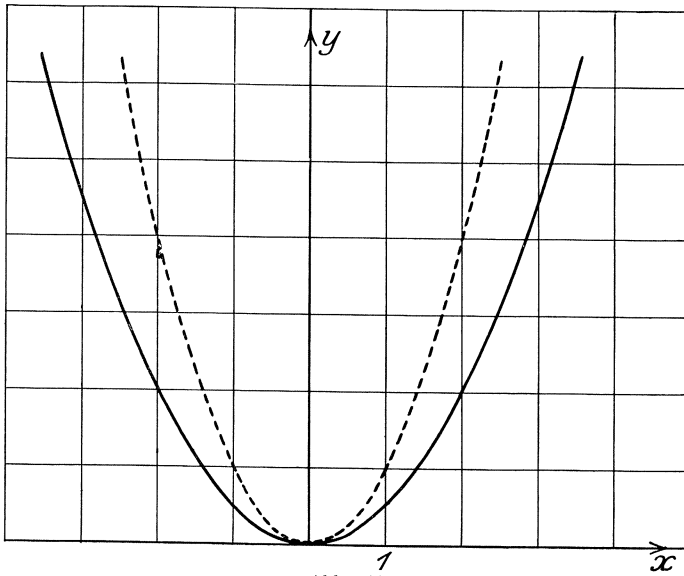


Abb. 16 b.

der Längeneinheit e' , womit der Beweis erbracht ist. (In Abb. 17 ist $a = \frac{3}{2}$, also die neue Einheit das $\frac{2}{3}$ fache der ursprünglichen; man prüfe an einzelnen Punkten der Kurve die Zusammenhänge der Koordinaten-

paare nach; ist für P beispielsweise $x = \frac{5}{8}e$, $y = \frac{25}{4}e$, so ist $\xi = \frac{5}{4}e'$, $\eta = \frac{25}{4}e'$, und in der Tat $\eta = \xi^2$.) Man erhält also: Jede Gleichung von der Form $y = ax^2$ ist die Gleichung einer Parabel, deren Achse die y -Achse, deren Scheitel der Koordinatenanfangspunkt und deren Scheiteltangente die x -Achse ist. Sie ist für positive Werte von a im Sinne der positiven y -Achse, für negative Werte von a im Sinne der negativen y -Achse geöffnet.

Da, wie schon gezeigt, die Parabel $y = ax^2$ aus der Parabel $y = x^2$ dadurch hervorgeht, daß man die Ordinaten mit a multipliziert, so verzerrt sich auch die Tangentenrichtung in dem Maße, daß der Richtungsfaktor irgendeiner Tangente der Parabel $y = ax^2$ das a fache

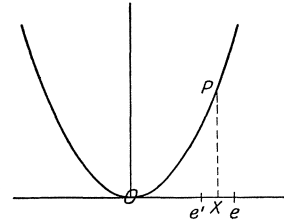


Abb. 17.

des Richtungsfaktors der entsprechenden Tangente an die Parabel $y = x^2$ ist; es ist also nach Formel 15) $\operatorname{tg} \varphi = 2ax$. — Zu diesem Ergebnis gelangen wir aber auch auf Grund ähnlicher Betrachtungen, wie sie oben [s. (13)] durchgeführt worden sind. Auch hier ist, wie dort und wie überhaupt ganz allgemein, die Tangente an die Parabel $y = ax^2$ im Punkte P die Gerade, in welche irgendeine durch P gehende Sekante übergeht, wenn ihr zweiter Schnittpunkt P_1 mit der Parabel sich dem Punkte P unbegrenzt nähert. Rechnerisch läßt sich dies ganz wie oben durchführen: P habe die Abszisse x , also die Ordinate $y = ax^2$; P_1 habe die Abszisse $x + \Delta x$, also die Ordinate $y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2$, wobei Δx und Δy wieder die Zuwüchse sind, die man den Koordinaten von P erteilen muß, um diejenigen von P_1 zu erhalten. Es ist daher, wie man durch einfache Subtraktion findet,

$$\Delta y = a(x + \Delta x)^2 - ax^2 \quad \text{oder} \quad \Delta y = 2ax \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

daher der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + \Delta x;$$

geometrisch ist dieser Ausdruck (s. Abb. 14) nichts weiter als der Richtungsfaktor der Sekante PP_1 . Nähert sich nun P_1 auf der Parabel dem Punkte P , so heißt dies analytisch, daß Δx dem Grenzwert Null zustrebt und $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in den Differentialquotienten übergeht; man erhält also für diesen

$$\frac{dy}{dx} = 2ax = \operatorname{tg} \varphi, \quad (17)$$

wie oben.

Der Leser tut gut, auf Grund dieser Formel 17), etwa in Anlehnung an Abb. 15, an verschiedene Parabeln in mehreren Punkten die Tangenten tatsächlich zu zeichnen; empfehlenswert ist es ferner, wie auch

sonst im folgenden, das Problem umzukehren und nach demjenigen Punkte einer bestimmten Parabel zu fragen, in welchem die Tangente eine verlangte Richtung hat. (So muß beispielsweise derjenige Punkt der Parabel $y = \frac{1}{3}x^2$, dessen Tangente mit der x -Achse den Winkel 60° einschließt, eine Abszisse haben, welche sich aus der Gleichung bestimmt $\frac{2}{3}x = \sqrt{3}$, also $x = \frac{5}{2}\sqrt{3}$; hieraus folgt weiter $y = \frac{1}{4}$.) In welchem Punkte schließt insbesondere die Tangente an die Parabel $y = ax^2$ mit der x -Achse den Winkel 45° ein? Welches ist bei veränderlichem a der Ort aller dieser Punkte? (Die Gerade $y = \frac{x}{2}$.)

(15) Wenden wir uns nun der allgemeinen quadratischen Funktion
$$y = ax^2 + bx + c \tag{8}$$

zu. Auf Grund der bisher erworbenen Kenntnisse sind wir in der Lage, uns die zugehörige Kurve zu entwerfen; wir brauchen ja bloß zu einem gegebenen x mit Hilfe der Gleichung 8) das zugehörige y zu berechnen und den Punkt in der Ebene zu suchen, der die soeben ermittelten Koordinaten x und y hat; er ist ein Punkt der Kurve. Durch Wahl weiterer Werte von x gelangen wir zu anderen Punkten des Schaubildes von Gleichung 8). So gehören zur Funktion $y = \frac{x^2}{5} - \frac{4}{3}x + \frac{17}{15}$ die Wertepaare:

$x = -4$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$	$+8$	$+9$	$+10$	$+11$
$y = +\frac{2}{3}$	$+\frac{10}{15}$	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{8}{3}$	$+\frac{17}{15}$	0	$-\frac{11}{15}$	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{8}{15}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{8}{15}$	$+\frac{4}{3}$	$+\frac{14}{15}$	$+\frac{3}{3}$	$+\frac{32}{15}$

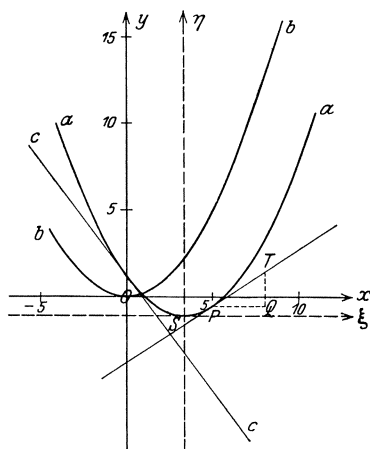


Abb. 18.

Abb. 18 gibt die zu dieser Funktion gehörige Schaubkurve aa .

Setzt man $y_1 = ax^2$ und $y_2 = bx + c$, so ist $y = y_1 + y_2$. Nun hat nach (14) $y_1 = ax^2$ zum Schaubild eine Parabel bb , deren Scheitel in O und deren Achse die y -Achse ist, während das Schaubild von $y_2 = bx + c$ nach (6) eine Gerade cc von der Richtung b und dem Abschnitt c auf der y -Achse ist. Wir können unsere Kurve aa also auch erhalten, indem wir (s. Abb. 18) die Parabel bb und die Gerade cc zeichnen und die zu einer beliebigen Abszisse x gehörigen Ordinaten beider Kurven addieren; ihre Summe gibt uns die zu

diesem x gehörige Ordinate der Kurve aa . Hiermit ist die der Gleichung 8) entsprechende Kurve in einfacher Weise auf bekannte Kurven zurückgeführt. Ja, wir können noch einen Schritt weiter gehen; es kann

nämlich bewiesen werden, daß diese Kurve nichts anderes ist als die uns aus (14) bekannte Parabel, und daß in Abb. 18 die Kurve aa kongruent ist der Kurve bb . Doch zuvor soll der Differentialquotient der quadratischen Funktion 8) gebildet werden.

Wir wissen nun schon, wie wir zu diesem Zwecke zu verfahren haben: Wir erteilen der unabhängigen Veränderlichen x einen Zuwachs Δx ; dadurch erhält auch y von selbst einen Zuwachs Δy , der sich durch die Gleichung bestimmt:

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c. \tag{18}$$

Durch Subtraktion von Gleichung 8) folgt

$$\Delta y = a(2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) + b \cdot \Delta x = \Delta x[a(2x + \Delta x) + b], \tag{18'}$$

und hieraus durch Division mit Δx für den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a(2x + \Delta x) + b \tag{19}$$

und hieraus wiederum durch den Grenzübergang $\lim \Delta x \rightarrow 0$ für den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b. \tag{20}$$

Auch hier gelten für die geometrische Deutung des Differentialquotienten die gleichen Schlüsse wie in (13) und (14). Sind nämlich $x|y$ die Koordinaten des Punktes P der Kurve, so sind $x + \Delta x|y + \Delta y$ nach 18) die Koordinaten eines anderen Punktes P_1 dieser Kurve, und $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist der Richtungsfaktor der durch P und P_1 bestimmten Sekante; er errechnet sich aus 19). Wird $\lim \Delta x \rightarrow 0$, so heißt das geometrisch, daß P_1 auf der Kurve bis in unmittelbare Nähe von P wandert; die Sekante wird also zur Tangente, deren Richtung demnach durch den Differentialquotienten ermittelt wird. Für das Beispiel in Abb. 18 ergeben sich in Ergänzung der Tabelle auf S. 24 aus 20) die Richtungsfaktoren der Tangenten für

$x = -4$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$	$+8$	$+9$	$+10$	$+11$	zu
$\frac{dy}{dx} = -\frac{4 \cdot 4}{15}$	$-\frac{3 \cdot 8}{15}$	$-\frac{2 \cdot 6}{15}$	$-\frac{2 \cdot 6}{15}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1 \cdot 4}{15}$	$-\frac{8}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$+\frac{4}{15}$	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1 \cdot 6}{15}$	$+\frac{2 \cdot 2}{15}$	$+\frac{2 \cdot 8}{15}$	$+\frac{3 \cdot 4}{15}$	$+\frac{8}{3}$	$+\frac{4 \cdot 6}{15}$	

In Abb. 18 ist für den Punkt $P(5 | -\frac{8}{15})$ die Konstruktion der Tangentenrichtung angedeutet ($PQ = 3, QT = 2, PT$ Tangente). Der Leser möge zur Übung die Tangenten für weitere Kurvenpunkte und ebenso für andere Kurven von der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ konstruieren.

Damit ist eigentlich auch die umgekehrte Aufgabe schon gelöst, nämlich die Frage nach demjenigen Punkte der Kurve, in welchem diese eine vorgeschriebene Richtung A hat; da $2ax + b = A$ sein

muß, so folgt für die Abszisse des betreffenden Punktes $x = \frac{A-b}{2a}$. Um beispielsweise für den Fall der Abb. 18 denjenigen Punkt zu finden, in dem die Tangente unter 45° gegen die x -Achse geneigt ist, setzen wir $\frac{2x}{5} - \frac{4}{3} = 1$, woraus folgt $x = \frac{35}{6}$ und daher $y = -\frac{253}{240}$. In der Folge wird uns nun bei einer Kurve besonders derjenige Punkt beschäftigen, in welchem die Tangente parallel der x -Achse, der zugehörige Richtungswinkel $\varphi = 0$ und daher auch der Richtungsfaktor $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = 0$ ist. Wollen wir also den Punkt von dieser Eigenschaft auf der Kurve von unserer Gleichung 8) suchen, so müssen wir setzen [s. Formel 20)]:

$$2ax + b = 0.$$

Die Abszisse dieses Punktes S ist demnach

$$x_s = -\frac{b}{2a}, \quad (21a)$$

und also nach Formel 8) die Ordinate

$$y_s = -\frac{b^2}{4a} + c. \quad (21b)$$

(Im Falle der Abb. 18 ist, wie man sich leicht überzeugt, $x_s = \frac{1}{3}^0$, $y_s = -\frac{4}{9}$.)

Nun wollen wir einmal diesen Punkt S als Nullpunkt eines Koordinatensystems wählen, dessen Achsen parallel zu den Achsen des ursprünglichen Systems liegen sollen; die Abszissenachse möge ξ -Achse, die Ordinatenachse η -Achse, und also die Abszisse eines beliebigen Punktes dieses neuen Systems ξ , die Ordinate η heißen. Wir fragen: Wie heißt die Gleichung der Kurve im $\xi\eta$ -System, deren Gleichung im alten xy -System $y = ax^2 + bx + c$ lautet? Man bezeichnet einen

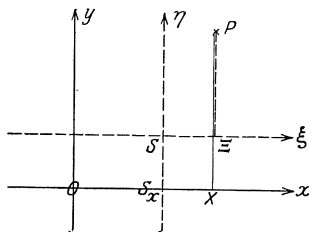


Abb. 19.

solchen Übergang aus einem Koordinatensystem in ein anderes als eine Umformung (Transformation) des Koordinatensystems, und in unserem Sonderfall, wo die Koordinatenachsen des neuen Systems parallel zu den entsprechenden des alten Systems sind, als eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems [s. (110)]. Damit wir diese vornehmen können, müssen wir natürlich den Zusammenhang beider Systeme kennen; er ist (Abb. 19) im Falle der Parallelverschiebung völlig bestimmt, wenn wir die Koordinaten $OS_x = x_s$ und $S_x S = y_s$ des neuen Anfangspunktes im alten System kennen. P sei nun ein beliebiger Punkt der Ebene; seine Koordinaten im alten Systeme seien

$OX = x$ und $XP = y$, die im neuen $S\mathcal{E} = \xi$ und $\mathcal{E}P = \eta$, und es ist aus Abb. 19 ohne weiteres ersichtlich, daß $OX = OS_x + S_x X = OS_x + S\mathcal{E}$, also

$$x = x_s + \xi \quad 22 \text{ a)}$$

und $XP = X\mathcal{E} + \mathcal{E}P = S_x S + \mathcal{E}P$, also

$$y = y_s + \eta \quad 22 \text{ b)}$$

ist. Setzt man also für x und y die in 22) gefundenen Werte in Gleichung 8) ein, wobei sich x_s und y_s aus Gleichung 21) bestimmen, so erhält man die Gleichung derselben Kurve, jetzt aber im $\xi\eta$ -System; sie lautet

$$y_s + \eta = a(x_s + \xi)^2 + b(x_s + \xi) + c$$

oder

$$\eta - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(\xi - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(\xi - \frac{b}{2a}\right) + c$$

oder

$$\eta - \frac{b^2}{4a} + c = a\xi^2 - b\xi + \frac{b^2}{4a} + b\xi - \frac{b^2}{2a} + c$$

oder nach Zusammenfassung der Glieder:

$$\eta = a\xi^2. \quad 23)$$

Es ist also in der Tat die Gleichung einer Parabel. Damit ist der Beweis erbracht dafür, daß das Bild der allgemeinsten quadratischen Funktion im rechtwinkligen Koordinatensystem die in (13) definierte Parabel ist. Wir fassen das Ergebnis in dem Satze zusammen:

Das Bild der allgemeinsten quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ ist im rechtwinkligen Koordinatensystem eine Parabel, deren Achse parallel der y -Achse ist; sie ist in Richtung der positiven y -Achse geöffnet, wenn $a > 0$ ist, und in Richtung der negativen y -Achse geöffnet, wenn $a < 0$ ist. —

(16) Derjenige Wert der unabhängigen Veränderlichen x , für welchen der Differentialquotient gleich Null ist, gibt uns, wie wir gesehen haben, die Abszisse, der zugehörige Wert der abhängigen Veränderlichen die Ordinate des Parabelscheitels. Wir sehen weiter, daß der Scheitel zugleich derjenige Punkt ist, für welchen die Ordinate unter allen zur Parabel gehörigen die kleinste ist für $a > 0$ und die größte für $a < 0$; denn im ersten Falle geht die Kurve in diesem Punkte aus dem Fallen ins Steigen, im anderen aus dem Steigen ins Fallen über. Abstrahieren wir vom Bilde, so können wir also sagen: Für denjenigen Wert der unabhängigen Veränderlichen, für welchen der Differentialquotient verschwindet, besitzt die quadratische Funktion einen Kleinstwert (Minimum) (für $a > 0$) oder einen Größtwert (Maximum) (für $a < 0$).

Der Satz wird nun besonders wertvoll durch seine Umkehrung, die sich in der Aufgabe ausdrückt, den Kleinst- bzw. Größt- wert einer gegebenen quadratischen Funktion zu ermitteln. Man braucht, um sie zu lösen, nur den Differentialquotienten der Funktion gleich Null zu setzen; dadurch erhält man eine Bestimmungsgleichung für die unabhängige Veränderliche, die für die quadratische Funktion, wie wir gesehen haben, stets linear sein muß. Man löst sie auf, setzt den gefundenen Wert in die Funktionsgleichung ein und erhält schließlich den gesuchten Funktionswert, der ein Minimum ist, wenn der Beiwert des quadratischen Gliedes positiv ist, und ein Maximum, wenn er negativ ist. Ein einfaches Beispiel möge dies erläutern.

Sind die beiden Seiten eines Rechtecks a und b , so beträgt sein Umfang $u = 2(a + b)$. Ist nun umgekehrt eine Strecke u gegeben, so lassen sich unendlich viele Rechtecke finden, für welche der Umfang gleich u ist. Eine Seite a eines solchen Rechtecks kann man beliebig wählen,

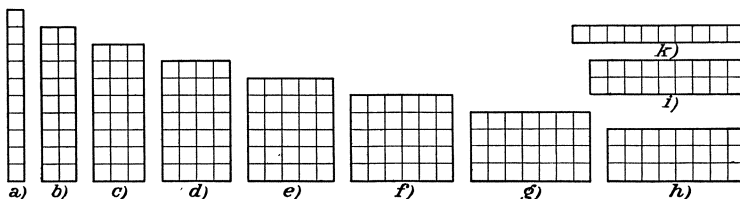


Abb. 20 a - k.

wenn sie nur, um negative Strecken zu vermeiden, die Bedingung erfüllt: $0 \leq a \leq \frac{1}{2}u$. Durch Wahl dieser Seite ist aber das Rechteck auch völlig bestimmt; denn die andere Seite b findet sich aus der obigen Gleichung zu $b = \frac{1}{2}u - a$.

Abb. 20 a - k zeigen eine Anzahl von Rechtecken, die in ihrem Umfange u übereinstimmen, und zwar ist $u = 22$ Längeneinheiten gewählt. Kennt man die Seiten eines Rechtecks, so findet man den Inhalt aus ihrem Produkte

$$F = a \cdot b = a \cdot \left(\frac{u}{2} - a \right) \quad \text{oder} \quad F = -a^2 + \frac{u}{2} a.$$

Der Inhalt ist also eine quadratische Funktion der Seite a . (Im obigen Beispiele sind die Inhalte der Reihe nach 10, 18, 24, 28, 30, 30, 28, 24, 18, 10 Flächeneinheiten.)

Abb. 21 gibt die zu dieser Funktion gehörige Parabel für obiges Beispiel. Praktischen Wert hat allerdings von der Parabel nur der dick ausgezogene, oberhalb der a -Achse verlaufende Bogen, da für den anderen Teil die Ordinaten, das heißt die Inhalte der entsprechenden Rechtecke, negativ sind. Schon aus der Zahlenreihe der für die Rechtecke der Abb. 20 angeführten Inhalte sieht man, daß diese anfangs

zunehmen und später wieder abnehmen. Es gibt also unter allen diesen Rechtecken eines, das den größten Inhalt hat. Dies wird bestätigt durch

die Parabel der Abb. 21; denn sie hat in der Tat einen Punkt, der eine größte Ordinate hat. Wir wissen nach dem Obigen nun auch, wie wir diesen Punkt und damit auch das Rechteck vom größten Inhalte finden. Wir bilden nämlich den Differentialquotienten von F nach a , setzen ihn gleich Null und lösen die so gefundene Bestimmungsgleichung nach a auf. Dieser Wert liefert uns die eine Seite des Rechtecks, aus der wir dann mit Hilfe des gegebenen Umfanges die andere Seite und den Inhalt berechnen können. Nun ist, wie man entweder unmittelbar aus 20) oder durch Bilden des Grenzüberganges findet,

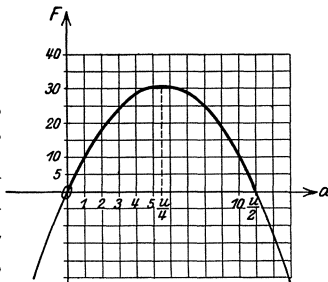


Abb. 21.

$$\frac{dF}{da} = -2a + \frac{u}{2};$$

die Gleichung $-2a + \frac{u}{2} = 0$ liefert den gewünschten Wert $a = \frac{u}{4}$; folglich ist auch $b = \frac{u}{4}$. Unter allen Rechtecken, die den gegebenen Umfang u haben, hat daher das Quadrat den größten Flächeninhalt, und dieser ist $F_{\max} = \frac{u^2}{16}$. (Ist, wie im obigen Beispiele, $u = 22$ Längeneinheiten, so ist also $F_{\max} = \frac{1}{4} \cdot 1$ Flächeneinheiten.)

Zur Einübung des Vorstehenden möge der Leser die verwandte Aufgabe behandeln: In Anlehnung an eine Mauer MM (Abb. 22) soll ein rechteckiges Flächenstück $ABCD$ so eingezäunt werden, daß der Zaun $AB + BC + CD$ eine gegebene Länge l hat. Wie muß man das Rechteck wählen, damit sein Inhalt möglichst groß wird? ($AB = CD = \frac{l}{4}$; $BC = \frac{l}{2}$.)

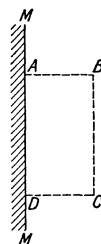


Abb. 22.

(17) Wir wenden uns jetzt einigen mechanischen Anwendungen zu, und beginnen mit dem freien Fall im luftleeren Raume; er wird durch die Formel

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad (24)$$

beschrieben. Hierbei ist $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ die Erdbeschleunigung, t die Zeit in Sekunden, gerechnet von dem Augenblick an, wo der Körper zu fallen beginnt, und s der von ihm in dieser Zeit durchfallene Weg. s ist nach 24) eine quadratische Funktion von t , das Weg-Zeit-Diagramm demnach eine Parabel, deren Scheitel im Schnittpunkte der Weg- und der Zeitachse liegt. Zu einem Zeitpunkte t ist die durchfallene Wegstrecke $s = \frac{1}{2} g t^2$, zu einem anderen Zeitpunkte $t_1 > t$ aber $s_1 = \frac{1}{2} g t_1^2$; folglich hat der Körper in der Zwischenzeit $t_1 - t$ die Strecke

$s_1 - s = \frac{1}{2}g(t_1^2 - t^2)$ zurückgelegt. Würde sich der Körper in dieser Zeit gleichförmig bewegt haben, so würde seine Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{1}{2}g(t_1 + t) \quad (25)$$

betragen haben; v_m heißt die durchschnittliche oder mittlere Geschwindigkeit innerhalb des Zeitraumes $t_1 - t$. In Wirklichkeit hat er sich aber am Anfange des betrachteten Zeitintervalles langsamer, am Ende desselben schneller bewegt. Läßt man nun das betrachtete Zeitintervall $t_1 - t$ immer kleiner werden ($1^s, 0,1^s, 0,01^s \dots$), so wird auch die durchfallene Wegstrecke immer kleiner, der Quotient v_m nähert sich dabei nach (25) mehr und mehr dem Werte

$$\frac{1}{2}g \cdot (t + t) = \frac{1}{2}g \cdot 2t = gt,$$

ein Wert, der wirklich erreicht wird, wenn $\lim t_1 \rightarrow t$, was zur Folge hat, daß auch $\lim s_1 \rightarrow s$ ist. Dann ist aber nach den Betrachtungen von (13) $\lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{ds}{dt}$, und aus der mittleren Geschwindigkeit wird nun die augenblickliche Geschwindigkeit v . Es ist also für den freien Fall:

$$v = \frac{ds}{dt} = gt. \quad (26)$$

Die Geschwindigkeit des freien Falles ist also der Differentialquotient des Weges nach der Zeit. Daß dieser Satz für jede beliebige Bewegung gilt, wird im nächsten

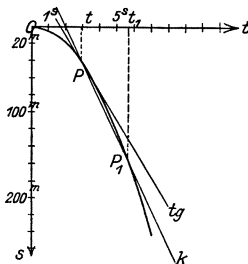


Abb. 23.

Paragraphen dargetan werden. Daß hier bei der Ableitung des Differentialquotienten das Verfahren $\lim t_1 \rightarrow t$ und nicht das Verfahren $\lim \Delta t \rightarrow 0$ verwendet worden ist [s. (13)], geschah nur, um dem Leser auch dieses wieder vor Augen zu führen; er möge die gleichen Betrachtungen für das letzte selbst durchdenken. — Der Unterschied zwischen mittlerer und augenblicklicher Geschwindigkeit zeigt sich recht

klar im Weg-Zeit-Diagramm (Abb. 23), in welchem die s -Achse nicht, wie gewöhnlich die positive Ordinatenachse, nach oben, sondern — ein übliches Zugeständnis an die Fallrichtung — nach unten gezeichnet ist. Solange $t_1 - t$ endlich ist, gehören zu den beiden Zeitpunkten t und t_1 zwei getrennte Punkte P und P_1 , deren Verbindungsgerade, eine Sekante k der Parabel, einen Richtungsfaktor hat, welcher gleich der diesem Zeitintervalle zukommenden mittleren Geschwindigkeit ist; ist aber $\lim t_1 \rightarrow t$, so wird P_1 unmittelbarer Nachbarpunkt von P , und die Sekante wird zur Tangente t in P , deren Richtungsfaktor entsprechend die augenblickliche Geschwindigkeit zur Zeit t liefert.

Eine weitere Anwendung ist der senkrecht aufwärtsgerichtete Wurf im luftleeren Raume. Ein Körper möge zur Zeit $t = 0$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen werden; dann hat er (vom Anfangspunkt der Bewegung aus gerechnet) zur Zeit t eine Höhe erreicht, die sich aus der Formel errechnet:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (27)$$

Auch hier ist s eine quadratische Funktion von t , das Schaubild also ebenfalls eine Parabel; sie geht zwar, da für $t = 0$ auch $s = 0$ ist, ebenfalls durch O ; dieser Punkt ist aber hier nicht der Scheitel der Parabel (Abb. 24). Außerdem soll an dieser Stelle nochmals vor einem Irrtum gewarnt werden, der hier für den Anfänger nahe liegt, daß nämlich diese Parabel die Bahn darstelle, die der Körper wirklich beschreibt (denn diese ist eine vertikale Gerade), sondern einzig den Zusammenhang verbildlichen soll, der zwischen der Wurfzeit und der Wurfhöhe besteht. — Zu einer bestimmten Zeit t hat der Körper also eine Höhe $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ erreicht, nach einem weiteren Zeitintervalle Δt , nachdem also vom Anfang der Bewegung die Gesamtzeit $t + \Delta t$ verstrichen ist, dagegen die Höhe

$$s + \Delta s = v_0(t + \Delta t) - \frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2;$$

demnach ist er in diesem Zeitintervalle Δt um

$$\Delta s = v_0 \Delta t - g t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} g \cdot (\Delta t)^2$$

gestiegen. (Ergibt sich $\Delta s < 0$, so bedeutet dies, wie ohne weiteres einleuchtet, ein Fallen.) Folglich ist die mittlere Geschwindigkeit während dieser Zeit

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_0 - g \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot \Delta t.$$

Durch den Grenzübergang $\lim \Delta t \rightarrow 0$ errechnet sich, wie im vorigen Beispiele, die augenblickliche Geschwindigkeit zur Zeit t für den Fall vertikal aufwärts zu

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \frac{ds}{dt} = v_0 - g t; \quad (28)$$

sie ist auch hier der Differentialquotient des Weges nach der Zeit. Die Geschwindigkeit ändert sich demnach von Zeitpunkt zu Zeitpunkt, und zwar gibt es einmal einen Augenblick, in dem sie gleich Null ist in dem also der Körper frei im Raume schwebt; für ihn ist

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - g t = 0,$$

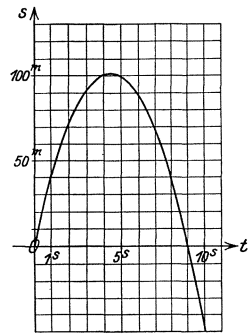


Abb. 24.

d. h. er tritt ein zur Zeit $t = \frac{v_0}{g}$. Der Körper erreicht dort seine größte Höhe; sie errechnet sich aus 27) zu

$$s_{\max} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}.$$

Für die Zeit $t > \frac{v_0}{g}$ ist die Geschwindigkeit negativ, d. h. nach unten gerichtet: der Körper fällt. Diese Betrachtungen stehen völlig im Einklange mit den Ergebnissen von (16), nach denen eine Funktion ihr Maximum erreicht, wenn der Differentialquotient verschwindet. Verfolgen wir den Körper weiter in seiner Bahn! Es wird einmal ein Augenblick kommen, in welchem er wieder an der Ausgangsstelle anlangt, für den also $s = 0$ ist. Dann muß aber $v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$ sein; diese quadratische Gleichung hat außer der Wurzel $t = 0$, die selbstverständlich ist, noch die Wurzel $t = 2 \cdot \frac{v_0}{g}$; also braucht der Körper doppelt soviel Zeit, um wieder an der Ausgangsstelle anzukommen, wie um die höchste Stelle zu erreichen; die Fallzeit ist gleich der Steigzeit. Die Geschwindigkeit, mit der er unten wieder anlangt, ergibt sich aus 28) zu $v = -v_0$; d. h. er trifft auf dem Boden mit der gleichen, aber entgegengesetzten Geschwindigkeit wieder auf, mit der er ihn verlassen hat. Daß dies übrigens allgemein gilt, d. h. daß der Körper ein und dieselbe Stelle sowohl beim Steigen als auch beim Fallen mit gleicher, wenn auch entgegengesetzt gerichteter Geschwindigkeit durchläuft, daß er auch die gleiche Zeit braucht, um von ihr aus die höchste Stelle seiner Bahn zu erreichen, wie um von dieser wieder bis zu ihr zu fallen, dies nachzuweisen, sei dem Leser überlassen. — Ist der Körper in der Lage, noch über die Ausgangsstelle hinaus zu fallen (etwa wenn der Versuch in einem Schachte stattfindet), so ergibt sich die Steighöhe für $t > 2 \frac{v_0}{g}$ als negativ; denn nach 27) ist $s = \frac{gt}{2} \left(2 \frac{v_0}{g} - t \right)$. Dies steht völlig im Einklange mit unseren Betrachtungen; denn da wir die Richtung nach oben positiv eingeführt haben, ist die nach unten negativ zu rechnen. — Den geometrischen Ausdruck findet die jeweilige Geschwindigkeit ebenso wie im vorangehenden Beispiele in der Richtung, die die Parabeltangente im entsprechenden Parabelpunkte hat.

Mit den folgenden beiden Beispielen möge sich der Leser selbst befassen.

1. Zwischen der Umlaufzahl n und der Leistung N einer Turbine besteht die Beziehung $N = -0,0010344 n^2 + 0,45543 n$; hierbei ist n die Zahl der minutlichen Umdrehungen, und N in Pferdestärken gemessen. Es ist das Schaubild zu zeichnen und anzugeben, bei welcher Umdrehungszahl die Höchstleistung erzielt wird, und wie groß diese ist. ($n = 220$, $N_{\max} = 50,13$.)

2. Zwischen der Temperatur t und der spezifischen Wärme c des Wassers ist die folgende Gleichung aufgestellt worden [s. (216) S. 731]:

$$c = 0,0000105884 t^2 - 0,000599201 t + 1,00660562 .$$

Wie sieht das Schaubild aus? Bei welcher Temperatur hat sie den kleinsten Wert, und wie groß ist dieser?

Überschauen wir nochmals den Inhalt dieses Paragraphen, so hat uns die Betrachtung der quadratischen Funktion in folgerichtiger Weiterspinnung der linearen Funktion eine Reihe neuer Vorstellungen und Begriffe gebracht. Der Differenzenquotient des § 2 führte uns hier zum Differentialquotienten; während jener bei der linearen Funktion konstant war, hängt der Differentialquotient der quadratischen Funktion von der Veränderlichen ab; er ist selbst eine Funktion von ihr. Das Bild der allgemeinsten quadratischen Funktion ist eine krumme Linie, Parabel genannt; ihre Achse ist parallel der Ordinatenachse; alle diese Parabeln sind untereinander ähnlich und ähnlich gelegen. Wir haben gelernt, an eine Parabel die Tangenten in beliebigen Punkten zu legen, da ihr Richtungsfaktor gleich dem Differentialquotienten für denjenigen Wert der unabhängigen Veränderlichen ist, der gleich der Abszisse des Berührungspunktes ist. Auch eine physikalische Deutung haben wir für den Differentialquotienten gefunden: Ist nämlich bei der Bewegung eines Punktes die zurückgelegte Bahn eine quadratische Funktion der Zeit, so liefert ihr Differentialquotient nach dieser die augenblickliche Geschwindigkeit. Weiterhin konnten wir dadurch, daß wir den Differentialquotienten gleich Null setzten, den Höchst- oder Tiefstwert der quadratischen Funktion bestimmen. Alle diese Ergebnisse haben wir gewonnen durch eine Reihe von Schlußfolgerungen, die der niederen Mathematik durchaus fremd sind, die im Gegenteil der sog. höheren Mathematik das Gepräge geben, durch den Grenzübergang: wir ließen eine Größe sich einer gegebenen Größe unbegrenzt nähern und studierten die Veränderung, welche der Differenzenquotient bei diesem Vorgange erfuhr, insbesondere den Wert, den dieser annahm, wenn die betreffende Größe der gegebenen, wie wir sagten, unendlich nahe gekommen war, und dies führte uns zum Differentialquotienten. Es sei noch besonders hervorgehoben, daß wir absichtlich die Worte gebrauchten „sich unendlich nähern“; der Anfänger könnte vermuten, daß wir statt der anscheinend geschraubten Ausdrucksweise kurz hätten sagen können: die betreffende Größe nimmt den Wert der gegebenen Größe an. Doch zwischen beiden Ausdrucksweisen besteht ein wesentlicher Unterschied, den wir uns am besten geometrisch klarmachen: Wenn sich ein Punkt auf einer Kurve bewegt und sich dabei einem anderen fest zu denkenden Kurvenpunkte unbegrenzt

nähert, so nimmt die Verbindungssekante beider Punkte bei dieser Bewegung eine ganz bestimmte Grenzlage an, die wir als Tangente bezeichnen. Wenn dagegen der bewegliche Punkt mit dem festen zusammenfällt, so sind in Wirklichkeit nicht mehr zwei getrennte Punkte, sondern es ist nur noch ein einziger Punkt vorhanden, und durch diesen lassen sich unendlich viele Geraden legen; das ganze Problem ist damit völlig unbestimmt geworden. Erklärlicherwise bieten derartige Grenzübergänge, besonders dem Anfänger, mannigfaltige Schwierigkeiten; man muß daher ganz besondere Sorgfalt auf sie verwenden. — Wir haben es also in der höheren Mathematik zum Unterschiede von der niederen mit „unendlich kleinen Größen“, die indessen noch verschieden von Null zu denken sind, zu tun; aus dieser Tatsache leitet sich der andere Name dieser mathematischen Disziplin, der Name Infinitesimalrechnung, ab.

Ehe wir nun nach der Betrachtung der Funktionen ersten und zweiten Grades zu denen höheren Grades übergehen, ist es nötig, den durch Behandlung der quadratischen Funktion gewonnenen Begriff des Differentialquotienten zu vertiefen und seine Anwendbarkeit auf jede beliebige Funktion zu zeigen. Dieser Untersuchung ist der nächste Paragraph gewidmet.

§ 4. Der Differentialquotient. Die einfachsten Differentiationsregeln.

(18) Die bisher behandelten Funktionen, die lineare und die quadratische, sind die einfachsten Formen der Abhängigkeit einer Größe von einer anderen. Es ist ohne weiteres verständlich, daß die Abhängigkeit unendlich mannigfaltig sein kann. Wenn wir alle nur erdenklichen Abhängigkeiten ins Auge fassen wollen, so ist es in erster Linie nötig, ein mathematisches Symbol zu schaffen, unter dem wir uns irgendeine dieser Abhängigkeiten vorstellen können. Ist x die unabhängige, y die abhängige Veränderliche, so drückt man dies dadurch aus, daß man sagt, „ y ist eine Funktion von x “; man schreibt hierfür die Gleichung

$$y = f(x), \tag{29}$$

die man liest: „ y ist gleich f von x .“ Statt des Buchstabens f , der an das Wort „Funktion“ erinnern soll, kann man aus gleichem Grunde auch F oder φ , Φ oder auch jeden beliebigen Buchstaben wählen.

Die quadratische Funktion hat uns gelehrt, wie der Differentialquotient zu bilden ist; wir haben dort zwei Wege kennengelernt, die sich wohl äußerlich unterscheiden, in Wirklichkeit jedoch den gleichen Gedankengang wiedergeben. Wir wollen beide Wege auch für die allgemeine Funktion $u = f(x)$ einschlagen.

Beim ersten Wege geben wir der unabhängigen Veränderlichen x den Zuwachs Δx , so daß der neue Wert der unabhängigen Veränderlichen $x + \Delta x$ ist; zu diesem gehört nach 29) auch ein anderer Wert der abhängigen Veränderlichen, der sich von dem ursprünglichen um den Zuwachs Δy unterscheiden möge; er ist also $y + \Delta y$ und ergibt sich zu

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x), \quad 30)$$

hieraus berechnet sich durch Subtrahieren von 29) und 30) der Zuwachs Δy zu

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad 31)$$

Ehe wir den Weg zum Differentialquotienten fortsetzen, wollen wir an Gleichung 31) noch eine kurze, für die Folge aber sehr wichtige Betrachtung anknüpfen.

Nähert sich Δx dem Grenzwerte Null, $\lim \Delta x \rightarrow 0$, so haben wir bei der quadratischen Funktion gesehen, daß auch Δy sich dem Grenzwerte Null nähert, also auch $\lim \Delta y \rightarrow 0$ ist. Eine Funktion von der Eigenschaft, daß für ein bestimmtes x zugleich mit $\lim \Delta x \rightarrow 0$ auch $\lim \Delta y \rightarrow 0$ wird, heißt für diesen Wert von x **stetig**, im anderen Falle heißt sie **unstetig** für den betreffenden Wert von x . Die quadratische Funktion ist nun für alle möglichen Werte von x stetig, sie ist eine überall stetige Funktion, sie hat für endliche Werte von x nirgends eine Unstetigkeitsstelle. Daß es aber wirklich Funktionen mit Unstetigkeitsstellen gibt, werden wir bald erkennen. — Wir nehmen nun die unterbrochene Entwicklung wieder auf!

Wir wollen voraussetzen, daß für den betrachteten Wert von x $y = f(x)$ stetig ist, d. h. daß $\lim \Delta y \rightarrow 0$ ist. Dividiert man beide Seiten der Gleichung 31) durch Δx , so ergibt sich der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad 32)$$

Lassen wir nun Δx dem Grenzwerte Null zustreben, so nähert sich der Differenzenquotient einem bestimmten endlichen Werte, dem Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{d(f(x))}{dx}. \quad 33)$$

In der Formel 33) ist der ganze Gang der Bildung des Differentialquotienten in eine knappe mathematische Form gebracht; sie sagt aus: Gib dem x den Zuwachs Δx , bilde den zu $x + \Delta x$ gehörigen Funktionswert; ziehe von ihm den zu x gehörigen Funktionswert ab; dividiere die Differenz durch Δx , erteile dem Zuwachs Δx den Wert 0; das Ergebnis ist der Differentialquotient.

Der zweite Weg sagt aus: Erteile der unabhängigen Veränderlichen einen zweiten Wert x_1 ; der zugehörige Funktionswert ist $y_1 = f(x_1)$. Bilde die Differenz beider Funktionswerte $y_1 - y = f(x_1) - f(x)$. Dividiere diese durch die Differenz der beiden Werte, die die unabhängige Veränderliche erhielt; das Ergebnis ist der Differenzenquotient

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Lasse nun x_1 sich unbegrenzt dem Werte x nähern; der Grenzwert ist der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{d(f(x))}{dx}. \quad 34)$$

Bei diesem Wege drückt sich die Stetigkeit dadurch aus, daß $\lim_{x_1 \rightarrow x} (y_1 - y) = 0$ oder $\lim_{x_1 \rightarrow x} y_1 = y$ ist. Da im allgemeinen der Differentialquotient $\frac{d(f(x))}{dx} = \frac{dy}{dx}$ wiederum eine Funktion von x ist, so schreibt man zur Abkürzung für ihn auch $f'(x)$ oder y' und liest dies „ f -Strich von x “ bzw. „ y -Strich“.

Welche der beiden Vorschriften, ob Formel 33) oder 34), man verwendet, ist für das Endergebnis ohne Belang. Wir wollen jetzt ein Beispiel behandeln, dessen Ergebnis uns bald die besten Dienste leisten wird; wir werden Formel 34) verwenden, weil durch sie der Differentialquotient sich in einfacher, leicht verständlicher Weise errechnet. Es betrifft die Funktion $y = x^n$, wobei n eine natürliche (d. h. ganze positive) Zahl sein soll. Wir geben der unabhängigen Veränderlichen den Wert x_1 ; dann ist die zugehörige abhängige Veränderliche $y_1 = x_1^n$; die Differenz der beiden Funktionswerte ist also $y_1 - y = x_1^n - x^n$; es wird also $\lim_{x_1 \rightarrow x} (y_1 - y) = 0$, d. h. $y = x^n$

ist eine für alle endlichen Werte von x stetige Funktion. Für den Differenzenquotienten ergibt sich weiter $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}$; dieser Quotient läßt sich aber, da n eine natürliche Zahl ist, nach einer bekannten Regel der Arithmetik restlos ausdividieren; man erhält

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + x_1^{n-3}x^2 + x_1^{n-4}x^3 + \dots + x_1x^{n-2} + x^{n-1}.$$

Setzt man hier $x_1 = x$, so nimmt jedes der n Glieder der rechten Seite den Wert x^{n-1} an, und sie ergibt einfach $n \cdot x^{n-1}$; es ist also der Differentialquotient von $y = x^n$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1}. \quad 35)$$

Sonderfälle:

$$n = 1 : \frac{d(x^1)}{dx} = 1 ;$$

$$n = 2 : \frac{d(x^2)}{dx} = 2x \quad [\text{in \u00dcbereinstimmung mit 14)];$$

$$n = 3 : \frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2 ; \quad n = 4 : \frac{d(x^4)}{dx} = 4x^3 \dots$$

(19) Wir kommen nun zur geometrischen Deutung der durch Gleichung 29) gegebenen Beziehung. Fassen wir die unabh\u00e4ngige Ver\u00e4nderliche als Abszisse, die abh\u00e4ngige als Ordinate eines Punktes im rechtwinkligen Koordinatensystem auf, so gibt uns ein durch 29) vermitteltes Wertepaar $x|y$ einen bestimmten Punkt der Ebene. L\u00e4\u00df man x beliebig viele Werte annehmen, so h\u00e4ufen sich die Punkte. Ist die Funktion stetig, d. h. ist f\u00fcr ein beliebiges $x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, so liegt

dem zu x geh\u00f6rigen Punkte der n\u00e4chste Punkt unendlich nahe; die Punkte schlie\u00dfen sich also zu einer Kurve zusammen. Ist dagegen f\u00fcr ein bestimmtes $x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y \neq 0$, so erleidet der

Kurvenzug an dieser Stelle eine Unterbrechung. Wir werden f\u00fcr dieses Verhalten sp\u00e4terhin eine Reihe von Belegen finden.

Abb. 25 stelle ein St\u00fcck der durch die Gleichung 29) definierten Kurve dar; P sei der zu einem gegebenen x geh\u00f6rige Kurvenpunkt, der Endpunkt der zugeh\u00f6rigen Abszisse sei X ; die Funktion sei f\u00fcr dieses x stetig, die Kurve also in P zusammenh\u00e4ngend. x erfahre einen

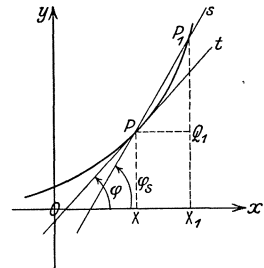


Abb. 25.

Zuwachs Δx ; die diesem entsprechende Abszisse ende in X_1 , so da\u00df $XX_1 = \Delta x$ ist. Zum Werte $x_1 = x + \Delta x$ der unabh\u00e4ngigen Ver\u00e4nderlichen geh\u00f6rt nach 29) der Funktionswert $y_1 = y + \Delta y = f(x + \Delta x)$; diesem Wertepaare $x_1|y_1$, bzw. $x + \Delta x|y + \Delta y$ sei der Punkt P_1 der Kurve zugeordnet. Die Parallele zur x -Achse schneide X_1P_1 in Q_1 , und es ist

$$PQ_1 = XX_1 = \Delta x = x_1 - x$$

und

$$Q_1P_1 = X_1P_1 - X_1Q_1 = X_1P_1 - XP = y_1 - y = \Delta y .$$

Zeichnen wir nun die durch die beiden Kurvenpunkte P und P_1 bestimmte Sekante s , so schlie\u00dft diese mit der x -Achse einen Winkel φ_s ein, der (s. Dreieck PQ_1P_1) durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\text{tg } \varphi_s = \frac{Q_1P_1}{PQ_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} ;$$

d. h. der Differenzenquotient liefert die Richtung der Sekante. Dies alles bleibt erhalten, wie groß, oder vielmehr wie klein auch Δx gewählt wird, wie nahe also auch P_1 auf der Kurve an P heranrückt; es gilt also auch noch, wenn Δx sich der Grenze Null oder x_1 sich dem Werte x nähert. In diesem Falle nimmt aber die Sekante — Stetigkeit vorausgesetzt — eine ganz bestimmte Grenzlage an; sie ist die Verbindungsgerade zweier unendlich benachbarter Punkte der Kurve, die man als Tangente t bezeichnet. Schließt sie mit der x -Achse den Winkel φ ein, so muß sein:

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}. \quad (36)$$

Wir kommen also zu dem folgenden Ergebnis:

Die Tangente an eine Kurve, deren Gleichung im rechtwinkligen Koordinatensystem lautet $y = f(x)$, schließt mit der x -Achse einen Winkel ein, dessen Tangenswert gleich dem Differentialquotienten dieser Funktion ist.

Diesen Satz haben wir schon bei der quadratischen Funktion und der zu ihr gehörigen Parabel bestätigt gefunden; jetzt haben wir bewiesen, daß er ganz allgemeine Gültigkeit hat.

Aus der geometrischen Deutung der Funktion und ihres Differentialquotienten folgt zwanglos ein weiterer Vorteil, den wir auch schon bei der quadratischen Funktion kennengelernt haben. Ist nämlich die Tangente horizontal, d. h. parallel der x -Achse, also der Differentialquotient gleich Null, so wird im allgemeinen die Kurve entweder aus dem Steigen ins Fallen oder aus dem Fallen ins Steigen übergehen (eine weitere Möglichkeit soll jetzt übergangen werden); im ersten Falle hat die Kurve ihren höchsten Punkt erreicht, die Funktion also ihren größten Wert, im letzten hat die Kurve ihren tiefsten Punkt erreicht, die Funktion also ihren kleinsten Wert. Wenn man umgekehrt den Höchst- oder Tiefstwert einer Funktion ermitteln will, so muß man ihren Differentialquotienten bilden und diesen gleich Null setzen; man erhält dadurch eine Bestimmungsgleichung für diejenigen Werte der unabhängigen Veränderlichen, für welche allein die Funktion einen Höchst- oder Tiefstwert annehmen kann; löst man die Gleichung auf und setzt man den gefundenen Wert in die Funktion ein, so bekommt man den Höchst- oder Tiefstwert selbst. Ob dieser Funktionswert ein Höchstwert oder ein Tiefstwert (oder keines von beiden) ist, können wir allerdings mit unseren bisherigen Mitteln im allgemeinen nicht entscheiden; dazu gehören Untersuchungen, die erst später angestellt werden können; doch läßt sich in den Anwendungen häufig ohne weiteres erkennen, welcher Fall in Frage kommt.

(20) Im Anschlusse an die geometrische Deutung wollen wir auf die wesentlichsten Verwendungen des Differentialquotienten in der Mechanik zukommen. Drückt die Gleichung

$$s = f(t) \quad (37)$$

die Abhängigkeit des Weges s eines materiellen Punktes von der dazu benötigten Zeit t aus [s. auch (17)!], so ist der Punkt nach einem weiteren Zeitverlauf Δt um ein Wegstück Δs vorwärts gekommen, wobei nach (37) $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ sein muß. Die Wegzunahme Δs berechnet sich also zu $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$. Würde der Punkt sich in dem Zeitraume Δt gleichmäßig bewegt haben, so würde der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nach (7) die Geschwindigkeit dieser Bewegung sein. Da aber im allgemeinen die Bewegung ungleichmäßig sein wird, so bezeichnet man $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ als die mittlere oder durchschnittliche Geschwindigkeit während des Zeitintervalles Δt ; $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ist nämlich die konstante Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt vom Augenblicke t bis zum Augenblicke $t + \Delta t$ bewegen müßte, um die Strecke Δs zurückzulegen. Wählt man den Zeitraum Δt immer kleiner und kleiner, so wird bei stetigem Zusammenhange zwischen s und t auch Δs sich dem Werte 0 nähern, während $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ einem bestimmten Grenzwerte zustreben wird:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Man nennt diesen Grenzwert der mittleren Geschwindigkeit die augenblickliche Geschwindigkeit des Massenpunktes oder auch kurzweg seine Geschwindigkeit im Zeitpunkte t ; und wir erkennen, daß diese einfach der Differentialquotient des Weges nach der Zeit ist

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t). \quad (38)$$

In Verbindung mit der geometrischen Darstellung der Weg-Zeit-Beziehung als Kurve (Weg-Zeit-Diagramm) finden wir weiter, daß die Geschwindigkeit hier als die Richtung der Tangente an die Weg-Zeit-Kurve zu deuten ist.

Weiter sei die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Zeit behandelt: Ein Massenpunkt bewege sich so, daß zwischen seiner Geschwindigkeit v und dem zugehörigen Zeitpunkte t die Gleichung besteht

$$v = f(t). \quad (39)$$

In einem anderen Augenblicke t_1 hat der Körper im allgemeinen eine andere Geschwindigkeit v_1 , die sich aus der Gleichung $v_1 = f(t_1)$ ergibt.

Im Zeitraume $t_1 - t$ hat also die Geschwindigkeit um den Wert $v_1 - v = f(t_1) - f(t)$ zugenommen. Das Verhältnis der Geschwindigkeitszunahme zur Zeitzunahme ist demnach

$$\frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}.$$

Wäre dieser Quotient unabhängig von der Wahl von t_1 , also konstant, so hätten wir nach (8) die gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor uns, und der Quotient würde die — konstante — Beschleunigung sein. Im allgemeinen trifft dies aber nicht zu, und man bezeichnet $\frac{v_1 - v}{t_1 - t}$ als die durchschnittliche oder mittlere Beschleunigung des Massenpunktes während der Frist $t_1 - t$; es ist die Beschleunigung, die dem Punkte erteilt werden müßte, wenn er, sich gleichförmig bewegend, seine Geschwindigkeit vom Werte v zur Zeit t bis zum Werte v_1 zur Zeit t_1 steigern wollte. Wählt man das Zeitintervall $t_1 - t$ kleiner und kleiner, d. h. läßt man t_1 nach t konvergieren, so konvergiert — wiederum stetige Beziehungen zwischen v und t vorausgesetzt — auch v_1 gegen v , die mittlere Beschleunigung aber gegen einen Grenzwert, den man als die augenblickliche Beschleunigung oder auch kurzweg als die Beschleunigung b des Massenpunktes im Augenblicke t bezeichnet. Es ist also

$$b = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = f'(t) = b. \quad 40)$$

Die Beschleunigung einer Bewegung ist der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit. — In der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve gibt demnach die Richtung der Tangente ein Maß für die jeweilige Beschleunigung.

(21) Wir haben nun nach verschiedenen Richtungen hin Wert und Bedeutung des Differentialquotienten einer Funktion erkannt. Um zu ihm zu gelangen, ist, wie wir gesehen haben, stets ein Grenzübergang nötig. Es ist nun das Verdienst des großen deutschen Gelehrten Leibniz, dem wir auch die Bezeichnungsweise des Differentialquotienten verdanken, durch Aufstellung einiger weniger Sätze die Differentiation zusammengesetzter Funktionen auf die von wenigen einfachen Funktionen zurückgeführt zu haben, so daß wir nur an diesen die Grenzübergänge wirklich vorzunehmen brauchen. Drei von diesen Sätzen sollen jetzt abgeleitet werden.

I. Es sei $f(x)$ eine für den zu betrachtenden Wert von x stetige Funktion, also

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) = 0; \quad 41)$$

dabei kann es sehr wohl eine endliche Anzahl von Werten x geben, für die $f(x)$ unstetig ist, also Formel 41) nicht erfüllt ist; diese sollen

von den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen werden. Wir wollen jetzt diese Funktion mit einem endlichen konstanten Faktor $a \neq 0$ multiplizieren; dadurch entsteht eine neue Funktion

$$y = a \cdot f(x); \quad (42)$$

von dieser soll nun der Differentialquotient gebildet werden. Es ist

$$y + \Delta y = a \cdot f(x + \Delta x),$$

also

$$\Delta y = a \cdot f(x + \Delta x) - a \cdot f(x) = a(f(x + \Delta x) - f(x)).$$

Da nach 41) beim Grenzübergange $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$ der zweite Faktor der rechten Seite verschwindet, wird die ganze rechte Seite gleich Null, also auch Δy ; es ist $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, und wir erhalten als erstes Ergebnis den Satz:

Das Produkt aus einer Konstanten und einer stetigen Funktion ist wieder eine stetige Funktion.

Wir bilden weiterhin

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Es ist also der Differenzenquotient von y stets das a fache des Differenzenquotienten von $f(x)$, wie groß oder wie klein auch Δx gewählt werden möge. Diese Eigenschaft gilt daher auch dann noch, wenn sich Δx dem Grenzwerte Null nähert; dann geht aber die obige Gleichung über in

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \cdot f'(x),$$

oder

$$\frac{d[a \cdot f(x)]}{dx} = a \cdot \frac{df(x)}{dx}. \quad (43)$$

Wir erhalten sonach die erste wichtige Differentiationsregel, die wir kurz als die **Konstantenregel** bezeichnen wollen:

Ein Produkt aus einer Konstanten und einer Funktion wird differenziert, indem man die Konstante mit dem Differentialquotienten der Funktion multipliziert.

Einen Beleg für die Richtigkeit dieses Satzes haben wir übrigens schon in (14) Formel 17) gefunden, wo wir gezeigt haben, daß

$$\frac{d(ax^2)}{dx} = a \cdot \frac{dx^2}{dx} = 2ax$$

ist. Eine weitere Bestätigung ergibt sich aus den geometrischen Betrachtungen: Zeichnen wir in ein rechtwinkliges Koordinatensystem einmal die Kurve von der Gleichung $y = f(x)$ und dann die Kurve von der Gleichung $y = a \cdot f(x)$, so sehen wir, daß die Ordinaten der letzteren das a fache der Ordinaten jener Kurve sind. Also gehört

auch für ein bestimmtes x zu dem gleichen Δx für die zweite Kurve ein Δy , das a mal so groß wie bei der ersten Kurve ist, wie man durch elementare geometrische Betrachtungen zeigen kann. Dann ist aber der Richtungsfaktor der zugehörigen Sekante der zweiten Kurve auch das a fache desjenigen der Sekante der ersten. Folglich ist auch im Grenzfalle $\Delta x \rightarrow 0$ der Richtungsfaktor der zugehörigen Tangente der zweiten Kurve das a fache desjenigen der Tangente der ersten.

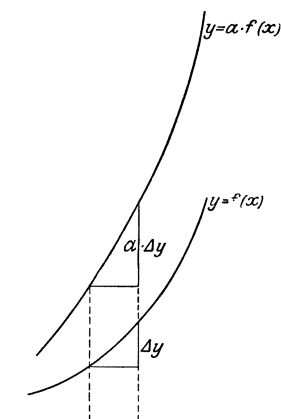


Abb. 26.

Anwendung: a) Nach Formel 35) ist für jedes positive ganzzahlige n

$$\frac{d(ax^n)}{dx} = anx^{n-1}. \quad (44)$$

b) Ist $y = a$, also die Funktion eine von x unabhängige Konstante, so ist auch $y_1 = a$, also $y_1 - y = 0$ und mithin

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

daher auch

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{da}{dx} = 0.$$

Der Differentialquotient einer Konstanten ist Null. (Geometrischer Beweis!)

II. Es sei $y = u + v$; $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ seien zwei Funktionen von x , die beide für die Werte von x , die wir der folgenden Betrachtung zugrunde legen wollen, stetig sind. [Da wir jetzt mehrere Funktionen benötigen, so reicht die bisherige alleinige Verwendung der Bezeichnung f für die Funktion nicht mehr aus; daher haben wir oben die griechischen Buchstaben φ und ψ , und ebenso u und v an Stelle von y herangezogen; s. a. (18).] Dann ist

$$y = u + v = \varphi(x) + \psi(x) = f(x)$$

als die Summe beider Funktionen wieder eine Funktion von x . Erteilen wir x den Zuwachs Δx , so erhält u einen Zuwachs Δu und v einen Zuwachs Δv , und zwar ist

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x) \quad \text{und} \quad v + \Delta v = \psi(x + \Delta x).$$

Zugleich erhält aber auch die Summe y beider Funktionen einen Zuwachs Δy , und es muß sein

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v = \varphi(x + \Delta x) + \psi(x + \Delta x) = f(x + \Delta x);$$

dennach ist

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta u + \Delta v = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) + \psi(x + \Delta x) - \psi(x) \\ &= f(x + \Delta x) - f(x). \end{aligned}$$

Da für das betrachtete x $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ und $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$ sein soll, so ist auch $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$; das heißt aber:

Die Summe zweier stetigen Funktionen ist wieder eine stetige Funktion.

Dividieren wir nun Δy durch Δx , so erhalten wir weiter

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x};$$

und da

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

ist, so wird für den Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{oder} \quad f'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x),$$

oder auch

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{oder} \quad \frac{d[\varphi(x) + \psi(x)]}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx}. \quad 45)$$

In Worten:

Die Summe zweier stetigen Funktionen wird differenziert, indem man die Differentialquotienten der Summanden addiert (**Summenregel, Regel von der gliedweisen Differentiation**).

Diese Regel ist übrigens, wie leicht zu erweisen ist, nicht auf zwei Summanden beschränkt, sondern gilt für jede Summe mit einer endlichen Anzahl von Gliedern.

Wenden wir diesen Satz auf die quadratische Funktion

$$y = ax^2 + bx + c$$

an, so erhalten wir

$$\frac{d(ax^2 + bx + c)}{dx} = \frac{d(ax^2)}{dx} + \frac{d(bx)}{dx} + \frac{dc}{dx} = 2ax + b + 0,$$

in Übereinstimmung mit Formel 20) in (15). Auch eine geometrische Bestätigung wollen wir uns suchen: Wir zeichnen die beiden Kurven $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ (Abb. 27), und finden durch Addition der zu einem bestimmten Werte von x gehörigen Ordinaten $u = XU$ und $v = XV$ die zu diesem x gehörige Ordinate $y = XY$. Erhält x den Zuwachs $X X_1 = \Delta x$, so erhält u den Zuwachs $U U_1 = \Delta u$, v den Zuwachs

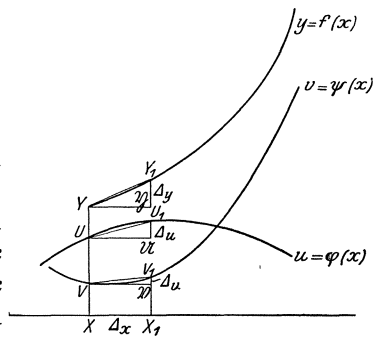


Abb. 27.

$\Re V_1 = \Delta v$ und y den Zuwachs $\Im Y_1 = \Delta y$, wobei die Punkte U_1, V_1, Y_1 selbstverständlich auf den zugehörigen Kurven liegen müssen. Da nun die Summe der Ordinaten der beiden Kurven u und v für jedes x , also auch für $x + \Delta x$ gleich der entsprechenden Ordinate von y sein muß, so ist $y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$, also $\Delta y = \Delta u + \Delta v$, d. h. $\Im Y_1 = \Re U_1 + \Re V_1$. Dann ist aber auch

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

d. h. der Richtungsfaktor der Sekante an die Kurve y ist gleich der Summe der Richtungsfaktoren der Sekanten an die Kurven u und v , wie klein auch Δx gewählt werden möge; folglich auch noch in dem Falle $\lim \Delta x = 0$. Dies ergibt aber, daß für ein bestimmtes x der Richtungsfaktor der Tangente an die Kurve y gleich der Summe der Richtungsfaktoren der Tangenten an die Kurven u und v sein muß:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

III. Es seien wiederum $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ zwei Funktionen, die für die zu betrachtenden Werte von x stetig sind und endliche Werte haben. Dann ist auch ihr Produkt $y = u \cdot v = \varphi(x) \cdot \psi(x) = f(x)$ eine Funktion von x , deren Eigenschaften wir nun untersuchen wollen. Erteilt man dem x den Zuwachs Δx , so vermehrt sich u um Δu , v um Δv und y um Δy , und es ist

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v), \\ y + \Delta y &= uv + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v; \end{aligned}$$

also

$$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Da nun $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ und $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$ sein soll, so ist auch

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0, \text{ d. h. :}$$

Das Produkt zweier stetigen Funktionen ist wieder eine stetige Funktion.

Dividieren wir durch Δx , so ergibt sich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Gehen wir hier zur Grenze $\lim \Delta x = 0$ über, so nehmen die beiden ersten Glieder der rechten Seite die Werte $u \cdot \frac{dv}{dx}$ bzw. $v \cdot \frac{du}{dx}$ an, während das letzte Glied

$$\lim \left(\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = 0 \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

wird. Wir erhalten die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} \\ \text{oder} \quad \frac{d(uv)}{dx} &= u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}, \\ \frac{d[\varphi(x) \cdot \psi(x)]}{dx} &= \varphi(x) \cdot \psi'(x) + \psi(x) \cdot \varphi'(x). \end{aligned} \right\} \quad 46)$$

Das Produkt zweier stetigen Funktionen wird differenziert, indem man zum Produkte aus dem ersten Faktor und dem Differentialquotienten des zweiten Faktors das Produkt aus dem zweiten Faktor und dem Differentialquotienten des ersten Faktors addiert (**Produktregel**).

Eine geometrische Deutung dieses Satzes auf Grund der zu den Funktionen $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ und $y = f(x)$ gehörigen Kurven ist nicht recht angängig. Wenn wir indessen

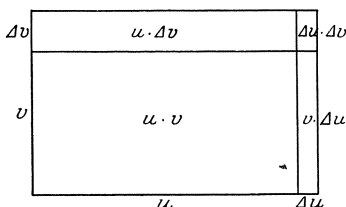


Abb. 28.

u und v als Strecken deuten, dann entspricht dem Ausdruck $y = u \cdot v$ der Inhalt des Rechtecks mit den Seiten u und v (Abb. 28). Erhält u den Zuwachs Δu und v den Zuwachs Δv , so hat das neue Rechteck den Inhalt

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) = uv + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v;$$

die Inhaltzunahme ist also

$$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Sie ist gleich der Summe dreier Rechtecke mit den Seiten u und Δv bzw. v und Δu bzw. Δu und Δv . Nähert sich nun Δx , und damit auch Δu und Δv , dem Grenzwert Null, so werden auch die Inhalte dieser drei Rechtecke unendlich klein; doch nimmt der Inhalt des letzten unendlich viel schneller ab als derjenige der beiden ersten, weil bei ihm beide Seiten sich dem Grenzwerte Null nähern. (Beispiel: $u = 10$ cm, $v = 8$ cm; $\Delta u = 0,1$ mm, $\Delta v = 0,2$ mm; $u \Delta v = 20$ mm², $v \Delta u = 8$ mm², dagegen $\Delta u \Delta v = 0,02$ mm²; wählt man $\Delta u = 0,001$ mm, $\Delta v = 0,002$ mm, so wird $u \Delta v = 0,2$ mm², $v \Delta u = 0,08$ mm², dagegen $\Delta u \Delta v = 0,000002$ mm².) Daher fällt der Inhalt $\Delta u \cdot \Delta v$ um so weniger dem Inhalte der beiden anderen Rechtecke gegenüber ins Gewicht, je mehr sich Δu und Δv der Null nähern.

Die Produktregel gestattet auch eine Erweiterung auf ein Produkt aus mehr als zwei Faktoren. Ist nämlich $y = u \cdot v \cdot w$, so wollen wir vorerst $v \cdot w = z$ setzen; dann ist $y = u \cdot z$, also nach der Produktregel

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dz}{dx} + z \cdot \frac{du}{dx}.$$

Da nun aber $z = v \cdot w$, folglich (ebenfalls nach der Produktregel)

$$\frac{dz}{dx} = v \cdot \frac{dw}{dx} + w \cdot \frac{dv}{dx}$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(uvw)}{dx} = uv \frac{dw}{dx} + u w \frac{dv}{dx} + v w \frac{du}{dx}.$$

So kann man fortfahren; man würde beispielsweise erhalten:

$$\frac{d(uvwt)}{dx} = uvw \frac{dt}{dx} + uvt \frac{dw}{dx} + uwt \frac{dv}{dx} + vwt \frac{du}{dx}.$$

Man erkennt ohne weiteres die Richtigkeit des Satzes:

Um ein Produkt von n Funktionen zu differenzieren, bildet man die n möglichen Produkte aus $(n - 1)$ dieser Funktionen und dem Differentialquotienten der übrigen Funktion und addiert alle diese Produkte.

Eine Anwendung: Es sei $y = x^n = \overset{1}{x} \cdot \overset{2}{x} \cdot \overset{3}{x} \dots \overset{n}{x}$; also

$$u = v = w = \dots = x.$$

Daher ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} = \frac{dw}{dx} = \dots = 1,$$

und jedes Glied der Summe ist $x^{n-1} \cdot 1 = x^{n-1}$; da die Summe aus n derartigen Gliedern besteht, so wird $\frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ in Übereinstimmung mit (18) Formel 35).

(22) Vor einer irrtümlichen Auffassung sei noch gewarnt! Es könnte scheinen, als ob der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ein wirklicher Quotient oder Bruch im Sinne der Arithmetik sei, daß sich also auf ihn unbeschränkt die Regeln der Bruchrechnung anwenden ließen. Die Konstantenregel und die Summenregel scheinen diese Auffassung zu bestätigen. Doch schon die Produktregel steht mit dieser Auffassung in Widerspruch. Um die irrtümliche Auffassung zu widerlegen, müssen wir uns den ganzen Gedankengang, der uns zum Differentialquotienten geführt hat, nochmals vergegenwärtigen. Wir haben erst die Differenz der abhängigen Veränderlichen, also Δy , gebildet und sie dann durch die Differenz der unabhängigen Veränderlichen Δx dividiert. Diese Division läßt sich wirklich ausführen, wie die bisher angeführten Beispiele bestätigen, so daß, wenn auch die linke Seite noch in Form eines Quotienten geschrieben wird, die rechte Seite in Wirklichkeit überhaupt kein Quotient mehr ist. Daher kann auch dem Grenzwert der linken Seite, dem Differentialquotienten, nicht die Bedeutung eines Quotienten zukommen; und es ist sehr wohl möglich, wie ja die Produktregel bestätigt, daß die Regeln der Bruchrechnung keine

Anwendung beim Rechnen mit Differentialquotienten mehr finden. Die Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ und die Ausdrucksweise Differentialquotient haben also rein symbolischen Wert; sie erklären sich einfach aus der Entstehungsweise. Trotzdem macht man von dieser Schreibweise ab und zu Gebrauch und operiert mit dem Symbole $\frac{dy}{dx}$ wie mit einem Quotienten, selbstverständlich nur solange, als man nicht in Widerspruch mit den Gesetzen der Differentialrechnung gerät. Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, wenn $y = f(x)$ ist, erhält man durch formales Multiplizieren mit dx die Gleichung

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad 47)$$

Man bezeichnet hierin dx , das den Grenzwert der Differenz Δx darstellt, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = dx$, als das **Differential** der unabhängigen Veränderlichen, und ebenso $dy = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y$ als das **Differential** der abhängigen Veränderlichen, und die Gleichung 47) sagt uns, in welchem Größenverhältnis beide Differentiale stehen. Und der Quotient der beiden Differentiale $\frac{dy}{dx}$ heißt unter Weiterführung der symbolischen Ausdrucksweise der Differentialquotient, eine uns schon seit § 2 vertraute Bezeichnung, die, wie auch die Schreibweise $\frac{dy}{dx}$, durch die obigen Ausführungen ihre formale Begründung und Berechtigung erhält. Wenn wir auf die bisher gewonnenen Differentiationsregeln die Schreibweise der Differentiale anwenden, so nehmen die zugehörigen Formeln die folgenden Gestalten an:

Konstantenregel:

$$y = a \cdot f(x), \quad dy = a \cdot f'(x) \cdot dx \quad \text{oder} \quad d[a \cdot f(x)] = a \cdot f'(x) \cdot dx. \quad 43')$$

Summenregel:

$$\left. \begin{array}{l} y = \varphi(x) + \psi(x), \quad dy = [\varphi'(x) + \psi'(x)] dx \\ \text{oder} \quad d[\varphi(x) + \psi(x)] = [\varphi'(x) + \psi'(x)] dx \\ \text{bzw.} \quad y = u + v, \quad dy = du + dv \quad \text{oder} \quad d(u + v) = du + dv. \end{array} \right\} 45')$$

Produktregel:

$$\left. \begin{array}{l} y = \varphi(x) \cdot \psi(x), \quad dy = [\varphi(x) \cdot \psi'(x) + \varphi'(x) \cdot \psi(x)] dx \\ \text{oder} \quad d[\varphi(x) \cdot \psi(x)] = [\varphi(x) \cdot \psi'(x) + \varphi'(x) \cdot \psi(x)] dx \\ \text{bzw.} \\ y = u \cdot v, \quad dy = u \cdot dv + v \cdot du \quad \text{oder} \quad d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du. \end{array} \right\} 46')$$

Dividiert man die vorletzte Formel durch $y = u \cdot v$, so nimmt die Produktregel die besonders einfache Gestalt an:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$

oder, wenn y das Produkt von n Funktionen $y = y_1, y_2 \dots y_n$ ist:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dy_1}{y_1} + \frac{dy_2}{y_2} + \dots + \frac{dy_n}{y_n}.$$

Eine praktische Anwendung findet diese als rein formale Ausdrucksweise berechnete Einführung der Differentiale bei den sog. **Fehlerabschätzungen**: Folgt aus einer durch Beobachtung oder Messung zu findenden Größe x eine andere Größe y durch die Beziehung

$$y = f(x), \quad (29)$$

und ist x mit einem Beobachtungsfehler Δx behaftet, so also, daß man an Stelle des wirklichen Wertes x eine Größe $x + \Delta x$ an dem Meßinstrument abgelesen hat, so wird natürlich auch die Formel (29) nicht den bei einwandfreier Messung zu erwartenden Wert y ergeben, sondern einen Wert, der mit dem Fehler Δy behaftet ist, so daß $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ ist. Der Fehler Δy errechnet sich zu

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

Nimmt man nun an, daß Δx sehr klein ist, so wird — bei Stetigkeit der Funktion — auch Δy sehr klein sein, und man erhält für die Fehlerfortpflanzung die Gleichung

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (48)$$

Beispiel: Über einem Kreise vom Halbmesser a ist ein Kegelstumpf von der Höhe h errichtet; der obere Grundkreis hat den Halbmessers b . Welchen Einfluß hat eine fehlerhafte Messung von b auf den Inhalt des Kegelstumpfes?

Für den Inhalt des Kegelstumpfes gilt die Formel

$$V = \frac{\pi}{3} h(a^2 + ab + b^2).$$

Hat man beim Messen des Halbmessers b den Fehler db begangen, so haftet dem daraus errechneten Rauminhalt V ein Fehler dV an, der sich nach (48) ergibt zu

$$dV = \frac{\pi}{3} h(a + 2b) db.$$

Sind beispielsweise $a = 10$ cm, $h = 15$ cm gegeben und $b = 7$ cm gemessen, wobei der verwendete Maßstab auf höchstens 1 mm genau abzulesen gestattet, so ist $V = 3440$ cm³. Nun ist der beim Messen mögliche Fehler höchstens $\frac{1}{2}$ mm, eine Größe, die gegenüber den in

diesem Beispiele sonst in Betracht kommenden sehr klein ist, die wir also praktisch gleich dem Differential db setzen können; $db = 0,05$ cm. Dann ergibt sich $dV = \frac{\pi}{3} \cdot 15 \cdot (10 + 14) \cdot 0,05 \text{ cm}^3 = 18,8 \text{ cm}^3$. Um diesen Betrag ist also infolge der Unzuverlässigkeit der Messung das berechnete Volumen unsicher. Der sog. relative Fehler, d. h. der Quotient $\frac{dV}{V}$ beträgt in diesem Falle $\frac{dV}{V} = 0,0055 = 5,5 \text{ ‰}$.

(23) Es erübrigt noch, die in (21) gewonnenen Differentiationsregeln an einigen einfachen Beispielen zu erläutern; ihre Handhabung, ebenso die der folgenden Regeln, muß durch Übungen an zahlreichen Beispielen so geläufig werden, daß sie dem Rechnenden überhaupt keine Schwierigkeiten mehr bieten, sie sind das Einmaleins der Differentialrechnung. Es gibt zahlreiche Aufgabensammlungen, auf die hinzuweisen hier genügt.

Die einzige Elementarfunktion, deren Differentialquotienten wir bisher haben ableiten können, ist die Funktion $y = x^n$, wobei n eine positive ganze Zahl ist; wir haben gefunden, daß

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1} \quad (35)$$

ist. Nun sind wir aber durch unsere Differentiationsregeln imstande, jede Funktion zu differenzieren, die sich aus dieser durch Addieren und Multiplizieren bilden läßt.

a) Es ist der Differentialquotient der Funktion

$$y = \frac{1}{2} x^7 - 0,6 x^3 + a x + \pi$$

zu bilden. Nach der Summenregel ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\frac{1}{2} x^7)}{dx} - \frac{d(0,6 x^3)}{dx} + \frac{d(ax)}{dx} + \frac{d\pi}{dx};$$

wenden wir jetzt die Konstantenregel an, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dx^7}{dx} - 0,6 \frac{dx^3}{dx} + a \frac{dx}{dx} + 0,$$

also auf Grund von Formel (35)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{2} x^6 - 1,8 x^2 + a.$$

b) $y = x^2(5x^3 - 7x + 1)(x - 3)$ ist von der Form $y = u \cdot v \cdot w$, wobei $u = x^2$, $v = 5x^3 - 7x + 1$, $w = x - 3$ ist. Nach der Produktregel ist

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot v \cdot \frac{dw}{dx} + v \cdot w \cdot \frac{du}{dx} + w \cdot u \cdot \frac{dv}{dx},$$

also in unserem Falle

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2(5x^3 - 7x + 1) \cdot 1 + (5x^3 - 7x + 1)(x - 3) \cdot 2x \\ &\quad + x^2(x - 3)(15x^2 - 7); \end{aligned}$$

die Ausrechnung ergibt

$$\frac{dy}{dx} = 30x^5 - 75x^4 - 28x^3 + 66x^2 - 6x.$$

Zu demselben Ergebnis gelangen wir, wenn wir die Funktion von vornherein ausmultiplizieren:

$$y = 5x^6 - 15x^5 - 7x^4 + 22x^3 - 3x^2;$$

nach der Summenregel ist dann wie oben

$$y' = 30x^5 - 75x^4 - 28x^3 + 66x^2 - 6x.$$

Überschauen wir zusammenfassend diesen Paragraphen, so erscheinen die Ergebnisse der vorigen Paragraphen jetzt als Sonderfälle einer viel umfassenderen Lehre. Er bringt uns den allgemeinen Begriff der Funktion und die allgemeine Definition des Differentialquotienten. Diese neu gewonnenen Vorstellungen sollen nun der Reihe nach auf die uns bekannten Funktionen angewendet werden. Wir gelangen dadurch zugleich zu einer Einteilung der Funktionen und bringen in ihre Fülle eine gewisse Ordnung. Wir beginnen mit der ganzen rationalen Funktion.

§ 5. Die ganze rationale Funktion.

(24) Wir wollen uns eine Veränderliche x , außerdem eine Anzahl konstanter Größen denken. Diese wollen wir untereinander einzig durch die beiden Rechnungsarten der Addition (einschließlich Subtraktion) und Multiplikation verbinden. Wir erhalten dadurch einen Ausdruck, der von x abhängig, also eine Funktion von x ist. Eine solche Funktion soll eine ganze rationale Funktion heißen. Sind beispielsweise die zu verwendenden Konstanten 2 , $\frac{3}{4}$, π , $+\sqrt{3}$, a , so ließe sich u. a. durch Anwendung der Addition und Multiplikation die Funktion bilden:

$$y = \pi[(x-2)(x-2) + \frac{3}{4}x - (a \cdot x \cdot x \cdot x + \pi x)(x\sqrt{3} - \frac{3}{4})] + 2xx - \frac{3}{4}\pi.$$

Führt man die Multiplikationen aus, faßt die Glieder mit gleicher Potenz von x zusammen und ordnet diese nach fallenden Potenzen von x , so muß sich ein Ausdruck ergeben von der Form

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (49)$$

wobei n eine natürliche Zahl ist und die Beiwerte $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sich durch Addition und Multiplikation aus den gegebenen Konstanten zusammensetzen. Im Falle des obigen Beispiels ist:

$$y = -\pi a \sqrt{3} \cdot x^4 - \frac{3}{4} \pi a x^3 + (\pi - \pi^2 \sqrt{3} + 2)x^2 - (\frac{1}{4} \pi + \frac{3}{4} \pi^2)x + \frac{1}{4} \pi,$$

also

$$\begin{aligned} n = 4, \quad a_4 &= -\pi a \sqrt{3}, & a_3 &= -\frac{3}{4} \pi a, & a_2 &= \pi - \pi^2 \sqrt{3} + 2, \\ a_1 &= -\left(\frac{1}{4} \pi + \frac{3}{4} \pi^2\right), & a_0 &= \frac{1}{4} \pi. \end{aligned}$$

Gleichung 49) stellt die allgemeinste ganze rationale Funktion in geordneter Form dar. Die Zahl n , den höchsten Exponenten, den x hat, nennt man den Grad der Funktion. Unser Beispiel ergibt also eine ganze rationale Funktion vierten Grades.

Sonderfälle:

$n = 0$, $y = a_0$; die ganze rationale Funktion nullten Grades ist eine Konstante;

$n = 1$, $y = a_1 x + a_0$; die ganze rationale Funktion ersten Grades ist die lineare Funktion;

$n = 2$, $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$; die ganze rationale Funktion zweiten Grades ist die quadratische Funktion.

Da nun [s. (18)] x^n für endliche Werte von x eine stetige Funktion von x ist, nach der Konstantenregel und der Summenregel also auch 49) eine stetige Funktion von x ergibt, so erhält man den

Lehrsatz: Jede ganze rationale Funktion von x ist für jeden endlichen Wert von x eine stetige Funktion.

Das Bild der ganzen rationalen Funktion n ten Grades im rechtwinkligen Koordinatensystem ist eine Kurve; man nennt sie eine Parabel n ter Ordnung. Das Bild der linearen Funktion, die Gerade, würde also eine Parabel erster Ordnung sein, und das Bild der quadratischen Funktion, das wir oben als Parabel schlechthin bezeichnet haben, müßten wir nun genauer Parabel zweiter Ordnung benennen; sie ist gemeint, wenn man von Parabel (ohne Beisatz) spricht. Man nennt sie auch Apollonische Parabel. Aus der Tatsache, daß die ganze rationale Funktion stetig ist, folgt sofort, daß die Parabel n ter Ordnung eine überall stetige Kurve, also nirgends unterbrochen ist, ferner daß sie für endliche Werte der Abszisse im Endlichen verläuft.

Da

$$\frac{dx^k}{dx} = k \cdot x^{k-1} \tag{35}$$

ist, so ist der Differentialquotient der ganzen rationalen Funktion n ten Grades

$$y' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1,$$

und es ergibt sich der

Lehrsatz: Der Differentialquotient einer ganzen rationalen Funktion n ten Grades ist eine ganze rationale Funktion $(n-1)$ ten Grades.

Aus der Gleichung der Parabel n ter Ordnung lassen sich für ihren Verlauf einige allgemeine Schlüsse ziehen; wir schreiben zu diesem Zwecke Gleichung 49) in der Form

$$y = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right). \quad (50)$$

Wählen wir für x einen positiven Wert, so wird der erste Faktor der rechten Seite von 50) x^n ebenfalls positiv; der zweite Faktor wird um so weniger vom ersten Gliede a_n abweichen, je größer wir x wählen, da die übrigen Glieder bei Wachsen des x immer kleiner werden. Also muß es einen endlichen genügend großen Wert x_0 geben, für welchen das zweite und erst recht die weiteren Glieder und ebenso auch ihre Summe ohne Einfluß sind auf das Vorzeichen der Klammer; dies gilt dann für jedes $x > x_0$ natürlich um so mehr. Dadurch wird ihr Vorzeichen und damit auch das von y identisch mit demjenigen von a_n . Wir erhalten also für die ganze rationale Funktion die Eigenschaft, daß von einem bestimmten Werte $x_0 > 0$ an für jedes $x \geq x_0$ das Vorzeichen des Funktionswertes mit demjenigen des Beiwertes des höchsten Gliedes übereinstimmt, und zwar so, daß der Funktionswert mit x über alle Grenzen hinauswächst. — Wählen wir dagegen $x < 0$, so wird der erste Faktor von 50), der Faktor x^n , positiv, wenn n eine gerade Zahl, dagegen negativ, wenn n eine ungerade Zahl ist; für den zweiten Faktor gelten dieselben Betrachtungen wie oben (für positives x). Von einem bestimmten Werte $x_0 < 0$ an hat also der Wert einer ganzen rationalen Funktion für jedes $x < x_0$ das gleiche Vorzeichen wie der Beiwert des höchsten Gliedes von x , wenn n gerade ist, für ungerades n aber das entgegengesetzte. Auch für $x < 0$ wächst y mit x über alle Grenzen hinaus.

Ist also $a_n > 0$, so muß die Parabel für gerades n aus dem zweiten Quadranten kommen und im ersten Quadranten die Bildebene wieder verlassen. Für ungerades n aber tritt die Parabel im dritten Quadranten in die Bildebene ein und verläßt sie im ersten Quadranten. Für negatives a_n bekommt man den Verlauf der Parabel durch Spiegelung der obigen Ergebnisse an der x -Achse: also bei geradem n kommt die Parabel aus dem dritten Quadranten, bei ungeradem n aus dem zweiten Quadranten, um beide Male im vierten Quadranten zu verschwinden. Abb. 29 gibt den typischen Verlauf der betreffenden Parabeln an. Für $n = 1$ und $n = 2$ haben wir in den §§ 1—3 die Bestätigungen schon gefunden.

Da die Parabeln n ter Ordnung einen stetigen, d. h. ununterbrochenen Linienzug darstellen, so folgt hieraus weiter, daß die x -Achse von jeder Parabel gerader Ordnung in einer geraden Anzahl von Punkten, von jeder Parabel ungerader Ordnung dagegen in einer ungeraden Anzahl von Punkten geschnitten wird. Im ersten Falle ist unter Umständen kein reeller Schnittpunkt vorhanden; dagegen muß

jede Parabel ungerader Ordnung die x -Achse sicherlich wenigstens einmal schneiden. Diese Tatsachen werden wichtig, wenn es sich darum handelt, eine allgemeine Gleichung n ten Grades zu lösen.

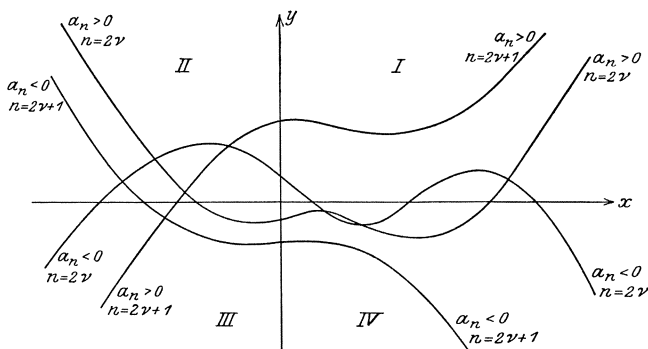


Abb. 29.

(25) Wir wollen alle diese Fragen an der allgemeinen Funktion dritten Grades, der **kubischen Funktion**, und der allgemeinen Parabel dritter Ordnung, der **kubischen Parabel**, näher erörtern: Ihre Gleichung lautet:

$$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \quad (51)$$

Wir untersuchen die Funktion auf Maxima und bilden zu diesem Zwecke den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1.$$

Setzen wir ihn gleich Null und lösen wir die quadratische Gleichung nach x auf, so erhalten wir

$$x = -\frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3} \pm \frac{\sqrt{a_2^2 - 3a_1 a_3}}{3a_3}.$$

Je nachdem $a_2^2 - 3a_1 a_3 \geq 0$ ist, sind die beiden Wurzeln reell oder imaginär; d. h. die Parabel dritter Ordnung hat entweder zwei Punkte, in denen die Tangenten parallel zur x -Achse sind, oder keinen solchen Punkt. Sind es zwei, so muß infolge des zusammenhängenden Verlaufes der eine Punkt ein Höchst-, der andere ein Tiefstpunkt sein. Ehe wir diese indessen bestimmen, wollen wir denjenigen Punkt P_0 der Parabel betrachten, dessen Abszisse das arithmetische Mittel aus den Abszissen dieser beiden Punkte ist, für den also $x_0 = -\frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3}$, demnach stets reell ist; die zugehörige Ordinate ergibt sich zu

$$y_0 = \frac{2}{27} \frac{a_2^3}{a_3^3} - \frac{1}{3} \frac{a_1 a_2}{a_3} + a_0.$$

Diesen Punkt wollen wir als neuen Koordinatenanfangspunkt wählen; d. h. wir wollen das Achsenkreuz so verschieben, daß P_0 der neue

Anfangspunkt Ω ist und die neuen Achsen ξ und η parallel zu den alten x und y sind; s. a. (110) S. 296f. Ein beliebiger Punkt P der Ebene habe im alten System die Koordinaten x und y , im neuen die Koordinaten ξ und η , und zwischen diesen muß (Abb. 30) die Beziehung bestehen:

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0.$$

Führt man dies in Gleichung 51) unter gleichzeitiger Einsetzung der für x_0 und y_0 gefundenen Werte ein, so erhält man die Gleichung

$$\eta = a_3 \xi^3 + \left(a_1 - \frac{a_2^2}{3a_3} \right) \xi. \quad (52)$$

Aus der bemerkenswerten Tatsache, daß die Parabel dritter Ordnung im ξ - η -System eine Gleichung hat, in der nur noch Glieder mit ungeraden Potenzen von ξ auftreten, folgt ohne weiteres, daß zu entgegengesetzt gleichen Werten von ξ auch entgegengesetzt gleiche Werte von η gehören; zwei Punkte P' und P'' , deren Koordinaten diese Eigenschaft haben (s. Abb. 31), müssen aber symmetrisch zum Koordinatenanfangspunkt liegen, d. h. ihre Verbindungsstrecke muß durch diesen Punkt hindurchgehen und von ihm halbiert werden. Das sagt also aus: Alle durch diesen Punkt Ω gehenden Sehnen (Verbindungsstrecken zweier Kurvenpunkte) der kubischen Parabel werden von Ω halbiert. Einen Punkt aber, der alle durch ihn gehenden Sehnen einer Kurve halbiert, bezeichnet man als einen Mittelpunkt der Kurve.

Die kubische Parabel ist also eine Mittelpunktskurve; sie besteht aus zwei in ihrem Mittelpunkte zusammenstoßenden kongruenten Hälften, die man dadurch zur Deckung bringen kann, daß man die eine in der Ebene um den Mittelpunkt um einen Winkel von 180° dreht.

Nehmen wir jetzt an, daß in Gleichung 52) $a_3 > 0$ ist, und setzen wir zur Abkürzung unter Einführung einer neuen Konstanten b_1

$$a_1 - \frac{a_2^2}{3a_3} = -3a_3 b_1,$$

so geht 52) über in die einfachere Form

$$\eta = a_3(\xi^3 - 3b_1 \xi). \quad (53)$$

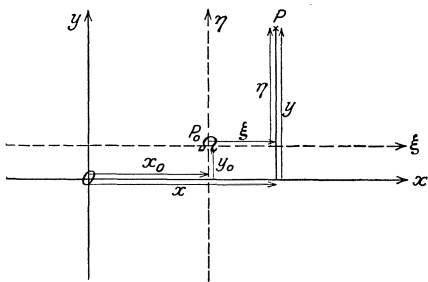


Abb. 30.

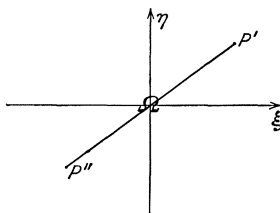


Abb. 31.

Bilden wir den Differentialquotienten, so erhalten wir

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 3a_3(\xi^2 - b_1);$$

also ergeben sich ausgezeichnete Werte für $\xi_{1,2} = \pm\sqrt{b_1}$. Reelle Werte für ξ_1 ergeben sich aber nur, wenn $b_1 > 0$ ist; nur in diesem Falle hat die kubische Parabel also Höchst- und Tiefstpunkte, und zwar im ganzen zwei, nämlich $\eta_1 = +2b_1 a_3 \sqrt{b_1}$ für $\xi_1 = -\sqrt{b_1}$ und $\eta_2 = -2b_1 a_3 \sqrt{b_1}$ für $\xi_2 = +\sqrt{b_1}$. Dabei ist $\eta_1 > 0$, also ein Höchstwert, $\eta_2 < 0$, also ein Tiefstwert; der Höchstpunkt liegt im zweiten, der Tiefstpunkt im vierten Quadranten des $\xi \eta$ -Achsenkreuzes. Da nun die Parabel im dritten Quadranten in die Zeichenebene eintritt [s. (24)],

durch den zweiten Quadranten, den Nullpunkt, den vierten Quadranten in den ersten geht, um in diesem die Bildebene wieder zu verlassen, so muß sie die Abszissenachse noch in zwei weiteren Punkten schneiden. Dies ergibt sich auch aus Gleichung 53); denn η nimmt den Wert Null an, außer für $\xi = 0$, auch für die beiden Abszissen $\xi = -\sqrt{3b_1}$ und $\xi = +\sqrt{3b_1}$, die ebenfalls reell sind, solange $b_1 > 0$ ist. — Ist $b_1 = 0$, so fallen der Tiefst- und der Höchstpunkt und ebenso die beiden Schnittpunkte mit der Abszissenachse alle mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammen; dieser, in welchem die

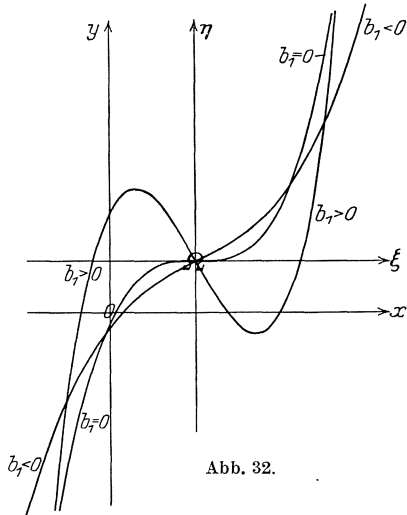


Abb. 32.

Kurve horizontal verläuft, da seine Tangente mit der Abszissenachse zusammenfällt, ist ein sog. Terrassenpunkt. Für $b_1 < 0$ hat die kubische Parabel weder einen Höchst- noch einen Tiefstpunkt, auch keinen weiteren Schnittpunkt mit der Abszissenachse, außer dem Nullpunkt; sie steigt beständig (s. hierüber Abb. 32). Die Gleichung 53) geht für den Fall $b_1 = 0$ über in die Gleichung $\eta = a_3 \xi^3$; diese Funktion heißt die rein kubische Funktion; ihre Kurve die rein kubische Parabel.

Ist schließlich $a_3 < 0$, so erhält man Kurven, die sich aus denjenigen der Abb. 32 durch Spiegelung an der Abszissenachse ergeben.

(26) Im Anschluß hieran soll jetzt die **reduzierte kubische Gleichung** untersucht werden. Sie möge in der Form geschrieben werden:

$$x^3 - 3ax - 2b = 0, \quad (54)$$

wobei a und b irgendwelche positiven oder negativen Zahlen sein können. Wir setzen

$$x^3 - 3ax - 2b = y, \quad (54')$$

erhalten damit eine kubische Funktion, in der das quadratische Glied fehlt, eine sog. reduzierte kubische Funktion; ihr Bild ist eine kubische Parabel. Von dieser kommen jetzt in erster Linie die Schnittpunkte mit der x -Achse in Frage; denn für diese ist $y = 0$, demnach die Gleichung 54) erfüllt. Die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel mit der x -Achse sind also die reellen Wurzeln der Gleichung 54). Es handelt sich nun für uns darum, zu untersuchen, wie oft die Parabel die x -Achse schneidet, da die Zahl der Schnittpunkte mit der Zahl der reellen Wurzeln von 54) übereinstimmen muß. Aus den in (24) angestellten Erörterungen folgt, daß Gleichung 54) eine ungerade Anzahl von reellen Wurzeln haben muß, also entweder eine oder drei. Welcher von beiden Fällen eintritt, hängt — wie das Schaubild lehrt — von der Lage der beiden ausgezeichneten Werte ab. Um sie zu bestimmen, setzen wir den Differentialquotient gleich Null und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3a = 0, \quad \text{also} \quad x = \pm\sqrt{a}.$$

Ist a negativ, so werden die Abszissen der Höchst- und Tiefstelle imaginär; die Parabel hat keine solchen Punkte; folglich hat sie die in Abb. 32 für $b_1 < 0$ skizzierte Gestalt, d. h. nur einen Schnittpunkt mit der x -Achse, und wir bekommen als erstes Ergebnis:

Die Gleichung 54) hat für $a < 0$ eine und nur eine reelle Wurzel.

Ist dagegen $a > 0$, so sind beide Werte $x = \pm\sqrt{a}$ reell; die Parabel hat demnach ein Maximum und ein Minimum (Abb. 32, $b_1 > 0$). Da die Parabel nach den Erörterungen von (24) im dritten Quadranten in die Bildebene eintritt und diese im ersten Quadranten wieder verläßt, so folgt, daß sie erst ansteigen, dann wieder fallen muß, um schließlich wieder zu steigen; das heißt aber, daß für $x = -\sqrt{a}$ das Maximum, für $x = +\sqrt{a}$ das Minimum erreicht wird. Aus Gleichung 54') ergibt sich für das erstere

$$y_{\max} = +2a\sqrt{a} - 2b \quad \text{und für das letztere} \quad y_{\min} = -2a\sqrt{a} - 2b. \quad (55)$$

Damit nun die Parabel drei Schnittpunkte mit der x -Achse hat, muß der Höchstpunkt über der x -Achse, der Tiefpunkt unter der x -Achse liegen, d. h. $y_{\max} > 0$, $y_{\min} < 0$ sein. Haben beide gleiches Vorzeichen, so kann die Parabel nur einen Schnittpunkt mit der x -Achse, Gleichung 54) also nur eine reelle Wurzel haben. Damit nun $y_{\max} > 0$, $y_{\min} < 0$ wird, muß $a\sqrt{a}$ größer sein als der absolute Betrag von b , $a\sqrt{a} > |b|$, wie sich aus den Gleichungen 55) durch einfache Überlegung ergibt, oder $a^3 > b^2$. Ist dagegen $a^3 < b^2$, also $a\sqrt{a} < |b|$,

so sind bei $b > 0$ im ersten Falle y_{\max} und y_{\min} beide negativ, bei $b < 0$ positiv, im zweiten beide positiv; die Parabel hat nur einen Schnittpunkt mit der x -Achse, Gleichung 54) nur eine reelle Wurzel.

Wir haben also gefunden: Ist $b^2 - a^3 > 0$, so hat die Gleichung stets nur eine reelle Wurzel; hierin ist auch der Fall eingeschlossen, daß $a < 0$ ist, da dann diese Bedingung stets erfüllt ist (Abb. 33, Kurve 1, 2 und 3). Ist dagegen $b^2 - a^3 < 0$, so hat die Gleichung stets drei reelle Wurzeln (Abb. 33, Kurve 4). Diese Ergebnisse stimmen völlig mit den in der Algebra gewonnenen Lösungen der Gleichung 54) überein. Denn ist $b^2 - a^3 > 0$, so ist die Cardanische Lösung anzuwenden, die die drei Wurzeln liefert

$$x = \varepsilon \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}},$$

wobei $\varepsilon^3 = 1$ ist. Ist dagegen $b^2 - a^3 < 0$, so verwendet man am besten die goniometrische Lösung, die die drei reellen Wurzeln liefert

$$x = 2\sqrt[3]{a} \cos(\varphi + k \cdot 120^\circ), \quad k = 0, 1, 2,$$

wobei $\cos 3\varphi = \frac{b}{a\sqrt[3]{a}}$ ist.

(27) Wir haben in den vorangehenden Abschnitten mehrere Male erwähnt, daß

ein Schnittpunkt einer stetigen Kurve mit der Abszissenachse dadurch gekennzeichnet ist, daß für ihn die Ordinate den Wert Null hat. Die Ordinaten der linken Nachbarpunkte haben also ein anderes Vorzeichen als die der rechten Nachbarpunkte. Durchläuft mithin ein Punkt die Kurve, so tritt im allgemeinen beim Durchgang durch eine solche Nullstelle für seine Ordinate ein Vorzeichenwechsel ein. Übertragen wir diese Ergebnisse auf die stetige Funktion $y = f(x)$, deren Bild diese Kurve ist, so finden wir die folgende Eigenschaft: Suchen wir einen Wert von x , für welchen y gleich Null ist, so heißt dies nichts anderes, als daß wir eine Lösung (Wurzel) der Gleichung $f(x) = 0$ suchen. Wir können als erstes Ergebnis buchen, daß eine solche Gleichung ebenso viele Wurzeln hat, als ihre Kurve Schnittpunkte mit der Abszissenachse besitzt. Weiterhin wird der Funktionswert für Nachbarwerte einer solchen Wurzel, die kleiner sind als diese, ein anderes Vorzeichen haben als derjenige für Nachbarwerte, die größer als diese sind. Tritt also, wenn x eine Reihe von Werten durchläuft, für $f(x)$ ein Zeichenwechsel ein, so heißt dies, daß in dem von x durchlaufenen Intervall eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt. Diese Tatsache läßt sich ausnutzen zur näh-

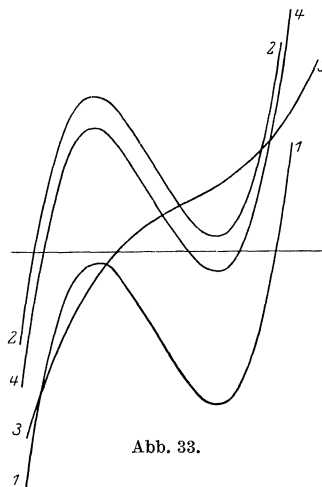


Abb. 33.

rungsweisen Auflösung einer Gleichung $f(x) = 0$. Man wird nämlich zwei Werte x (durch Probieren) suchen, für welche $f(x)$ entgegengesetzte Vorzeichen hat; zwischen diesen Werten muß eine Wurzel der Gleichung liegen. Durch systematisches Einengen dieser Grenzen kann man dann die Wurzel bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit berechnen. Dieses hier nur in groben Strichen angedeutete Verfahren läßt sich stets anwenden, welcher Art auch die Gleichung $f(x) = 0$ sei, was für eine Funktion also $y = f(x)$ auch sein möge. Das Näherungsverfahren der Lösung von Gleichungen soll aber schon in diesem Paragraphen, der die ganzen rationalen Funktionen behandelt, besprochen werden, weil die mit ihr aufs engste verwandte algebraische Gleichung n ten Grades das Näherungsverfahren am einfachsten anwenden und am klarsten durchschauen läßt. In späteren Abschnitten

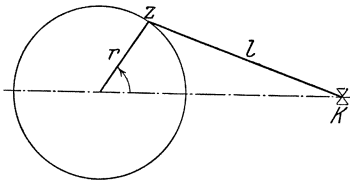


Abb. 34.

werden sich gelegentlich auch Näherungslösungen für andere Gleichungen finden. Wir erläutern das Näherungsverfahren am besten an einem

Beispiel: Im Schubkurbelgetriebe (Abb. 34) bewegt sich bei gleichförmigem Umlaufe des Pleuelzapfens Z der Pleuelkopf K geradlinig, aber mit wechselnder Geschwindigkeit. Derjenige Winkel ϑ zwischen Pleuelstange und Pleuelbahn, für welchen die Geschwindigkeit von K ihren größten Wert erreicht, bestimmt sich aus der Gleichung

$$\sin^6 \vartheta - \lambda^2 \sin^4 \vartheta - \lambda^4 \sin^2 \vartheta + \lambda^4 = 0. \quad \text{a)}$$

wobei $\lambda = \frac{l}{r}$ das Verhältnis der Pleuelstangenlänge zur Pleuellänge angibt. Für den sehr gebräuchlichen Fall, daß $\lambda = 5$ ist, erhält man hieraus durch die Substitution

$$\sin^2 \vartheta = \lambda^2 x \quad \text{b)}$$

die kubische Gleichung

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 0,04 = 0. \quad \text{c)}$$

Da $f(0) = +0,04$ und $f(1) = -0,96$ ist, also zwischen 0 und +1 ein Zeichenwechsel stattfindet, muß eine Wurzel dieser Gleichung zwischen $x = 0$ und $x = 1$ liegen, und zwar besonders nahe an $x = 0$, da +0,04 wesentlich näher an Null liegt als -0,96. Wir probieren deshalb weiter mit $x = 0,1$; es ist $f(0,1) = -0,069$. Der Zeichenwechsel liegt zwischen $x = 0$ und $x = 0,1$, folglich ist auch die Wurzel unserer Gleichung zwischen diesen beiden Grenzen gelegen. Nun könnten wir der Reihe nach für die Werte $x = 0,01, 0,02, \dots 0,09$ die zugehörigen Funktionswerte berechnen, den Ort des Zeichenwechsels bestimmen und hätten so die Wurzel auf zwei Dezimalen gefunden. Dann könnten wir durch weiteres Teilen des Intervalls, in dem der Zeichenwechsel stattfindet, eine dritte

Dezimale bestimmen usw. Doch läßt sich dieses immerhin mühsame Verfahren wesentlich vereinfachen. Wie das geschehen kann, soll an den zwei gebräuchlichsten Methoden, der **Regula falsi** und der **Newton'schen Methode** auseinandergesetzt werden.

Die **Regula falsi** beruht auf folgenden Erwägungen: Wir zeichnen (Abb. 35 a) in einem zweckmäßigen Maßstabe diejenigen Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ der Kurve $y = f(x) = x^3 - x^2 - x + 0,04$, zwischen denen der Schnittpunkt mit der x -Achse liegt. Wir wissen zwar nichts über den Verlauf der Kurve zwischen diesen Punkten, können aber in erster Annäherung annehmen, daß sie sich nicht allzu weit vom geradlinigen Verlaufe P_1P_2 entfernen wird. Der Schnittpunkt X dieser Strecke mit der x -Achse wird also in unmittelbarer Nachbarschaft des Schnittpunktes der Kurve mit der x -Achse liegen. Da die beiden Dreiecke $P_1P'P_2$ ($P_1P' \parallel y$ -Achse, $P'P_2 \parallel x$ -Achse) und P_1X_1X ähnlich sind, so ergibt sich für die Abszisse x von X die Proportion

$$(x - x_1) : (x_2 - x_1) = y_1 : (y_1 - y_2),$$

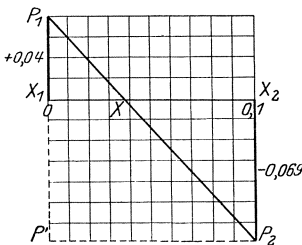


Abb. 35 a.

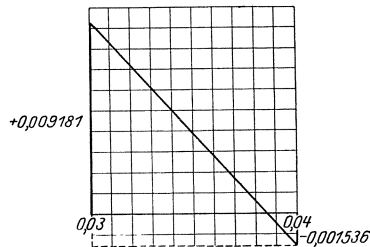


Abb. 35 b.

in unserem Beispiele also, da $x_1 = 0$, $x_2 = 0,1$, $y_1 = 0,04$, $y_2 = -0,069$ ist,

$$(x - 0) : (0,1 - 0) = 0,04 : (0,04 + 0,069)$$

oder

$$x - 0 = 0,004 : 0,109 \approx 0,04.$$

Wir bekommen demnach als neuen Näherungswert $x = 0,04$; hierzu gehört $f(0,04) = -0,001536$. Da $f(0,04)$ negativ ist, so ist nach Abb. 35 a $x = 0,04$ zu groß; wir probieren daher mit $x = 0,03$ und erhalten $f(0,03) = +0,009181$. Also findet zwischen $x = 0,03$ und $x = 0,04$ Zeichenwechsel statt. Wir erhalten aus Abb. 35 b, die entsprechend der Abb. 35 a entworfen ist, durch eine erneute Proportion einen besseren Näherungswert. Es ist nämlich

$$(x - 0,03) : 0,01 = 0,009181 : (0,009181 + 0,001536) = 0,857 ;$$

$$x = 0,0386 .$$

Da $f(0,0386) = -0,000032447$, $f(0,0385) = +0,000074817$ ist, so erhält man für einen weiteren Näherungswert die Proportion

$$(x - 0,0385) : 0,0001 = 0,00007482 : 0,00010726 = 0,6976$$

und daraus $x = 0,03856976$.

So kommt man schrittweise zu immer besseren Näherungswerten. Die aufgestellte Proportion wird einen um so genaueren Wert liefern, je weniger die Sehne von dem Kurvenbogen abweicht, und das trifft um so mehr zu, je kleiner das Intervall ist. Das hat aber zur Folge, daß wir durch die Proportion um so mehr neue Dezimalstellen gewinnen können, je genauer der zugrunde gelegte Näherungswert schon ist. Aus diesem Grunde haben wir auch oben durch die erste Proportion nur eine Dezimale, durch die zweite aber schon zwei und durch die dritte sogar vier neue Dezimalen gewonnen. — Der Umstand, daß wir in diesem Verfahren die Kurve durch die Sehne ersetzen, also die aufgestellte Proportion eigentlich nicht richtig ist, hat diesem Verfahren seinen Namen: **Regula falsi** (die Regel vom falschen Ansatz) erteilt. —

Die **Newtonsche Methode** verfährt folgendermaßen: Man legt an die durch die Funktion $y = f(x)$ bestimmte Kurve in einem Punkte $P_0(x_0/y_0)$ die Tangente; diese weicht verhältnismäßig wenig von der Kurve ab. Daher wird auch ihr Schnittpunkt X_1 mit der x -Achse in der Nähe des gesuchten Schnittpunktes X der Kurve mit der x -Achse liegen (Abb. 36), und zwar berechnet sich, da

$$\operatorname{tg} P_0 X_1 X_0 = \operatorname{tg} \varphi_0 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0}$$

ist, die Strecke $X_1 X_0 = h_1$ durch die Gleichung

$$h_1 = \frac{y_0}{\operatorname{tg} \varphi_0} \quad \text{oder} \quad h_1 = \frac{y_0}{\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0}}.$$

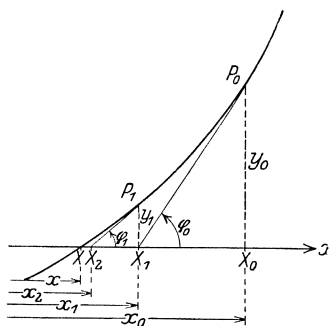


Abb. 36.

Um diesen Betrag vermindere man x_0 , um die Abszisse von X_1 zu erhalten. Für unser Beispiel ist $y = x^3 - x^2 - x + 0,04$, also

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x - 1.$$

Der erste Näherungswert sei $x_0 = 0,1$; dann ist

$$h_1 = \frac{-0,069}{-1,17} = 0,06, \quad \text{also} \quad x_1 = 0,04.$$

Nun bestimme man zu dieser Abszisse den zur Kurve $y = f(x)$ gehörigen Punkt P_1 , der im allgemeinen wesentlich näher am gesuchten Schnittpunkte X liegen wird als P_0 ; in unserem Falle ist $y_1 = -0,001536$. Jetzt legt man in P_1 an die Kurve die Tangente und sucht ihren Schnittpunkt X_2 mit der x -Achse, dessen Abszisse einen weiteren besseren Näherungswert für die Wurzel der gegebenen Gleichung liefert usw. Unser Beispiel wird sich also folgendermaßen fortsetzen:

$$h_2 = \frac{-0,001536}{-1,0752} = 0,0014, \quad x_2 = 0,0386;$$

$$h_3 = \frac{-0,000032447}{-1,07273} = 0,00003025, \quad x_3 = 0,03856975.$$

Damit sind wir zu derselben Genauigkeit gelangt wie nach der **Regula falsi**. Der Leser möge sich selbst ein Urteil über die Vorzüge und Nachteile der beiden Verfahren bilden.

Aus Gleichung b) erhält man für $x = 0,03856975$

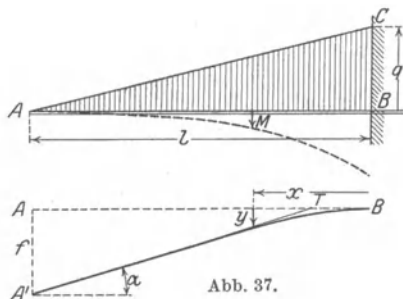
$$\sin^2 \vartheta = 0,964244,$$

also

$$\vartheta = 79^\circ 6' 0''.$$

Da $y = x^3 - x^2 - x + 0,4$ für $x = -1$ den Wert $-0,6$ hat, liegt eine zweite Wurzel der Gleichung $x^3 - x^2 - x + 0,4 = 0$ zwischen 0 und -1 , und da y für $x = +2$ den Wert $+2,4$ hat, eine dritte zwischen 1 und 2. Doch kommen diese für unsere ursprüngliche Aufgabe deshalb nicht in Betracht, weil beide für $\sin \vartheta$ unmögliche Werte ergeben.

(28) Von den technischen Anwendungen der ganzen rationalen Funktion und damit der Parabel n ter Ordnung seien besonders die Gebiete der **Momentenlinie** und der **elastischen Linie** erwähnt. Hier möge der Fall heraus-



gegriffen und eingehender behandelt werden¹⁾: Ein an einem Ende B wagerecht eingeklemmter Stab von der Länge l trägt eine stetig verteilte Last (Sand u. ä.) derart, daß deren auf die Längeneinheit bezogenes Gewicht von dem Werte q in B gleichmäßig bis zum Werte Null im freien Ende A abnimmt; die Strecke AC in Abb. 37 soll die Belastung veranschaulichen. Der Stab hat eine Momentenlinie, deren Gleichung

$$M = \frac{Pl}{3} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^3$$

lautet; und er biegt sich durch nach einer Linie von der Gleichung

$$y = \frac{Pl^3}{6EJ} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{1}{10} \left(\frac{x}{l}\right)^5 \right].$$

Hierbei ist als Koordinatenanfangspunkt der Punkt B gewählt, in welchem der Stab aus dem Mauerwerk austritt; ferner ist die Abszissenachse für beide Kurven in Abb. 37 nach links und die Ordinatenachse nach unten gerichtet gewählt. Sodann ist $P = \frac{lq}{2}$ das Eigen-

¹⁾ Siehe Freytags Hilfsbuch, 7. Aufl., S. 232ff. Berlin: Julius Springer 1924.

gewicht des Stabes, E das Elastizitätsmaß des Stabes und J das auf die Schwerachse bezogene axiale Trägheitsmoment seines Querschnittes. Die Momentenlinie ist also eine rein kubische Parabel, deren Mittelpunkt in A liegt, und die vom Stabe in diesem Punkte berührt wird; praktische Bedeutung hat naturgemäß nur das zur Länge l gehörige Stück AD der Parabel, und zwar ist das zu dem Endpunkte B gehörige Moment $BD = M_B = \frac{Pl}{3}$. Die elastische Linie dagegen, nach der sich der Stab durchbiegt, ist eine Parabel fünfter Ordnung; sie geht durch den Endpunkt B und verläuft hier wagerecht, da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pl^2}{6EJ} \left[2\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^5 \right]$$

für $x = 0$ ebenfalls gleich Null wird. Ihre Durchbiegung $AA' = f$ am Ende A ($x = l$) beträgt $f = \frac{Pl^3}{15EJ}$. Diese Gleichung gibt u. a. einen Zusammenhang zwischen der meßbaren Größe f und der Elastizitätszahl E ; es läßt sich also E aus dieser Durchbiegung berechnen: $E = \frac{Pl^3}{15fJ}$. Führt man f in die Gleichung der elastischen Linie ein, so wird diese Gleichung:

$$y = \frac{5}{2} f \left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{1}{10} \left(\frac{x}{l}\right)^5 \right],$$

die den Vorzug hat, daß sie die Gestalt der elastischen Linie einzig durch die Länge l und die Durchbiegung f am freien Ende des Stabes bestimmt. Der Neigungswinkel α am freien Ende läßt sich zeichnerisch dadurch finden, daß

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \left\{ \frac{5}{2} \frac{f}{l} \left[2\frac{x}{l} - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^4 \right] \right\}_{x=l} = \frac{5}{4} \frac{f}{l}$$

sein muß. Man erhält also die Gestalt der elastischen Linie des Stabes mit sehr großer Genauigkeit, indem man AB in fünf gleiche Teile teilt und den dem Punkte B zunächstliegenden Teilpunkt T mit A' verbindet; diese Gerade ist die Tangente an die elastische Linie in A' . Berücksichtigt man weiter, daß die Tangente in B in die Gerade AB fällt, so läßt sich die Durchbiegung des Stabes bequem einzeichnen (Abb. 37). Für das Problem der elastischen Durchbiegung des Stabes kommt praktisch nur der Bogen AB in Frage. Will man sich ein Bild vom ganzen Verlaufe der Parabel machen, so kann man dies auf Grund der folgenden leicht nachzuweisenden Tabelle tun. Es ist für

$x =$	$-3l$	$-2l$	$-l$	0	$+l$	$+2l$	$+3l$	$+4l$	$+5l$
$y =$	$+252f$	$+58f$	$+6,5f$	0	f	$+2f$	$-4,5f$	$-56f$	$-250f$
$\frac{dy}{dx} =$	$-318,75 \frac{f}{l}$	$-100 \frac{f}{l}$	$-18,75 \frac{f}{l}$	0	$1,25 \frac{f}{l}$	0	$-18,75 \frac{f}{l}$	$-100 \frac{f}{l}$	$-318,75 \frac{f}{l}$

In Abb. 38 ist die Parabel gezeichnet; das der Abb. 37 entsprechende Stück $A'B$ ist durch stärkeren Strich hervorgehoben.

Aufgabe: Die Tragfähigkeit T eines Balkens von rechteckigem Querschnitt mit der Breite b und der Höhe h ist durch die Formel gegeben $T = cbh^2$, wobei c ein durch den Werkstoff des Balkens usw. bedingter Beiwert ist. Welche Breite und Höhe hat der Balken von größter Tragfähigkeit, den man aus einem Stamme von kreisförmigem Querschnitte heraus-schneiden kann ?

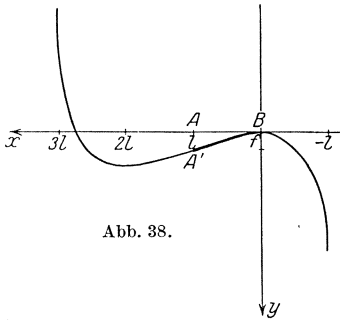


Abb. 38.

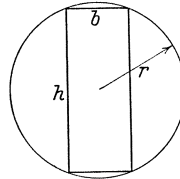


Abb. 39.

Ist (Abb. 39) r der Radius des Kreises, so besteht zwischen b und h die Gleichung $h^2 = 4r^2 - b^2$; setzt man dies in die Formel für T ein, so erhält man $T = cb(4r^2 - b^2)$. T ist also eine ganze rationale Funktion dritten Grades von b . Damit T ein Maximum werde, muß $\frac{dT}{db} = 0$ sein; wir erhalten demnach zur Bestimmung des zugehörigen b die Gleichung $c(4r^2 - 3b^2) = 0$. Hieraus folgt $b = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$; also $h = \frac{2}{3}r\sqrt{6}$ und $T_{\max} = \frac{1}{9}c r^3 \sqrt{3}$.

Aufgabe: Der Rauminhalt v einer Wassermenge, die bei der Temperatur 0°C den Rauminhalt 1 hat, ist für die Temperatur $t^\circ\text{C}$ angenähert durch die Gleichung gegeben:

$$v = 1 - 0,000061045t + 0,0000077183t^2 - 0,00000003734t^3.$$

Bei welcher Temperatur ist der Rauminhalt am kleinsten, und wie groß ist er dann? ($t = 4,08^\circ\text{C}$, $v_{\min} = 0,9998769$).

Wir sind damit am Ende dieser Betrachtungen über die ganze rationale Funktion angelangt. Ehe wir nun zu der nächsten Funktionsgruppe übergehen können, zu den gebrochenen rationalen Funktionen, müssen wir erst unsere Differentiationsregeln um eine neue, die Quotienten- oder Bruchregel, vermehren; ihre Ableitung und die Behandlung der gebrochenen rationalen Funktion sollen den Inhalt des nächsten Paragraphen bilden.

§ 6. Die Quotientenregel. Die gebrochene rationale Funktion.

(29) Es seien $u = f(x)$ und $v = \varphi(x)$ zwei stetige Funktionen von x ; dann ist auch ihr Quotient

$$y = \frac{u}{v} \quad (56)$$

eine Funktion von x ; über ihre Stetigkeit sind allerdings erst Untersuchungen anzustellen. Geben wir zu diesem Zwecke der unabhängigen Veränderlichen x einen Zuwachs Δx , so erhalten u und v die Zunahmen Δu und Δv ; und zwar ist

$$u + \Delta u = f(x + \Delta x) \quad \text{und} \quad v + \Delta v = \varphi(x + \Delta x).$$

Zugleich ändert sich auch y um einen Wert Δy , wobei

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} = \frac{f(x + \Delta x)}{\varphi(x + \Delta x)}$$

ist. Der Zuwachs, den y erfährt, ist also

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \Delta u) - u \cdot (v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v(v + \Delta v)}. \quad (57)$$

Da u und v stetige Funktionen von x sind, d. h. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ und

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$ ist, so nähert sich der Zähler von 57) für $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$

auch dem Werte Null; der Nenner nähert sich dagegen dem Werte v^2 .

Es ist also $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \frac{0}{v^2}$. Solange demnach x nur Werte hat, für welche $v \neq 0$ ist, ist auch $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$; dies gilt jedoch nicht mehr

ohne weiteres für solche Werte von x , für welche $v = 0$ ist. Wir kommen demnach zu dem überaus bemerkenswerten

Lehrsatz: Der Quotient zweier stetiger Funktionen ist wieder eine stetige Funktion für solche Werte der unabhängigen Veränderlichen, für welche die Divisorfunktion von Null verschieden ist.

Wir gehen nun über zur Ableitung des Differentialquotienten. Wir bilden

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

und erkennen, daß

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

$$y = \frac{u}{v}, \quad y' = \frac{v u' - u v'}{v^2}. \quad (58)$$

Lehrsatz: Der Differentialquotient eines Bruches ist wieder ein Bruch; sein Nenner ist das Quadrat des ursprünglichen Nenners; den Zähler erhält man, indem man vom Produkt aus dem ursprünglichen Nenner und dem Differentialquotienten des ursprünglichen Zählers das Produkt aus dem ursprünglichen Zähler und dem Differentialquotienten des ursprünglichen Nenners abzieht (**Quotientenregel, Bruchregel**).

Diese anscheinend ziemlich verwickelte Regel läßt sich auch aus der Produktregel ableiten: Bedienen wir uns nämlich der Schreibweise in Differentialen, so läßt sich die Bruchregel auch in folgender Gestalt wiedergeben:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

Ist $y = \frac{u}{v}$, so ist $u = v y$, also nach (22) S. 48

$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v} + \frac{dy}{y} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $y = \frac{u}{v}$, so wird

$$dy = \frac{du}{v} - \frac{u dv}{v^2} = \frac{v du - u dv}{v^2}, \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}, \quad \text{wie oben.}$$

Beispiele: a) $y = \frac{1 - 2x^2}{2 - x^2}$; $u = 1 - 2x^2$, $v = 2 - x^2$, also

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -4x, & \frac{dv}{dx} &= -2x, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(2 - x^2)(-4x) - (1 - 2x^2)(-2x)}{(2 - x^2)^2} = \frac{-6x}{(2 - x^2)^2}. \end{aligned}$$

b) Die Funktion $y = \frac{ax + b}{\alpha x + \beta}$ wird gebrochene lineare Funktion genannt; ihr Differentialquotient ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha x + \beta) \cdot a - (ax + b) \alpha}{(\alpha x + \beta)^2} = \frac{a\beta - \alpha b}{(\alpha x + \beta)^2};$$

der Zähler ist also eine Konstante.

Man übe die Quotientenregel an einer großen Anzahl weiterer Beispiele, da ihre gründliche Beherrschung ein unbedingtes Erfordernis ist.

Setzen wir $u = 1$, $v = x^n$, so wird

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = n x^{n-1}, \quad \text{also} \quad d\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n \cdot 0 - n \cdot x^{n-1} \cdot 1}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Differenzieren wir andererseits $y = x^{-n}$ nach Formel 35), so erhalten wir

$$\frac{d(x^{-n})}{dx} = (-n) x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}},$$

also das gleiche Ergebnis wie oben; damit ist gezeigt, daß Formel 35), die wir früher nur für natürliche Exponenten abgeleitet hatten, auch für solche Exponenten richtig ist, die negative ganze Zahlen sind:

Lehrsatz: Die Formel

$$\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

gilt für jeden ganzzahligen Exponenten.

Beispiel: a) $y = \frac{1}{x^3}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x^4};$

b) $y = \left(x - \frac{3}{x^2}\right)^3 = x^3 - 9 + \frac{27}{x^3} - \frac{27}{x^6},$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - \frac{81}{x^4} + \frac{162}{x^7} = 3\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^2 \left(1 + \frac{6}{x^3}\right).$$

(30) Wir gehen nun zur Behandlung der gebrochenen rationalen Funktion über: Wenden wir in beliebiger Folge auf die Veränderliche x und eine Anzahl von Konstanten außer der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation [s. (24)] auch noch die Division an, so erhalten wir eine Funktion von x , die als gebrochene rationale Funktion bezeichnet wird. Sind beispielsweise die Konstanten $2, \frac{3}{4}, \sqrt{3}, \pi, a$, so läßt sich auf die angegebene Weise u. a. die Funktion bilden:

$$y = \frac{2x - a}{xx + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{4}} - \frac{\frac{a\pi - 2}{x} - 2xxx}{x + \frac{\pi}{\sqrt{3}}xx}.$$

Eine auf diese Weise gewonnene Funktion läßt selbstverständlich noch wesentliche Vereinfachungen zu; so kann man zuerst einmal alle Doppelbrüche beseitigen, so daß y sich als eine Summe von Brüchen darstellt; im obigen Beispiele:

$$y = \frac{-6x^2 + 3ax + 8x\sqrt{3} - 4a\sqrt{3}}{-3x^3 + 4x^2\sqrt{3} + 4\pi x} - \frac{-8x^5\sqrt{3} - 6x^4\sqrt{3} + 40\pi x\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{4\pi x^4 + 4x^3\sqrt{3} + 3\pi x^2 + 3x^2\sqrt{3}}.$$

Schließlich lassen sich die einzelnen Brüche noch auf einen Hauptnenner bringen; Zähler und Nenner können ausmultipliziert und nach fallenden Potenzen von x geordnet werden. Man erkennt dadurch, daß sich eine gebrochene rationale Funktion stets als Quotient zweier ganzen rationalen Funktionen schreiben läßt; ja man kann sogar die gebrochenen rationalen Funktionen als Quotienten zweier ganzen rationalen Funktionen definieren. So würde unser oben ganz willkürlich gewähltes Beispiel einer gebrochenen rationalen Funktion der Quotient zweier ganzen rationalen Funktionen

werden, von denen der Dividend eine ganze rationale Funktion siebenten Grades, der Divisor eine solche sechsten Grades ist, es würde sich also die Form ergeben:

$$y = \frac{a_7 x^7 + a_6 x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_6 x^6 + b_5 x^5 + b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

wobei sich die Beiwerte a_7, \dots, a_0 und b_6, \dots, b_0 durch die vier Grundrechnungsarten aus den Konstanten $2, \frac{3}{4}, \sqrt[3]{3}, \pi, a$ zusammensetzen; ihre Berechnung sei dem Leser überlassen.

Die allgemeinste Form der gebrochenen rationalen Funktion ist also

$$y = \frac{a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + a_{r-2} x^{r-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + b_{s-2} x^{s-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}, \tag{59}$$

wobei Zähler und Nenner zueinander relativ prim sein, d. h. keinen gemeinsamen Faktor haben sollen. Ist der Grad des Zählers kleiner als derjenige des Nenners, also $r < s$, so nennt man die Funktion eine echt gebrochene Funktion, für $r \geq s$ dagegen eine unecht gebrochene rationale Funktion. Unser obiges Beispiel stellt demnach eine unecht gebrochene rationale Funktion dar.

Dividiert man in einer unecht gebrochenen rationalen Funktion den Zähler durch den Nenner, so wird im allgemeinen die Division nicht aufgehen, sondern es wird ein Rest bleiben, den man nur noch formell durch den Nenner dividieren kann. Da für diesen Bruch der Grad des Zählers notwendig niedriger ist als der des Nenners (sonst ließe sich ja die Division noch weiter durchführen), stellt er eine echt gebrochene rationale Funktion dar, während der erste Teil eine ganze rationale Funktion ist.

Beispiel:

$$\frac{7x^5 - 2x^2 + 9x - 5}{x^3 + 2x^2 - 2x - 1} = \frac{(7x^5 - 2x^2 + 9x - 5) : (x^3 + 2x^2 - 2x - 1) = 7x^2 - 14x + 42}{\frac{-14x^4 + 14x^3 + 5x^2 + 9x - 5}{+ 42x^3 - 23x^2 - 5x - 5} - 107x^2 + 79x + 37}$$

Also ist

$$\frac{7x^5 - 2x^2 + 9x - 5}{x^3 + 2x^2 - 2x - 1} = 7x^2 - 14x + 42 - \frac{107x^2 - 79x - 37}{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}.$$

Hier ist $7x^2 - 14x + 42$ eine ganze rationale Funktion und

$$\frac{107x^2 - 79x - 37}{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}$$

eine echt gebrochene rationale Funktion. Wir erhalten demnach den

Lehrsatz: Jede unecht gebrochene rationale Funktion läßt sich in eine Summe aus einer ganzen rationalen Funktion und einer echt gebrochenen rationalen Funktion zerlegen.

Solange die unabhängige Veränderliche x solche endliche Werte annimmt, für welche der Nenner $b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + \dots + b_0$ von Null

verschieden ist, muß die Funktion 59) einen endlichen Wert haben. Das wird aber anders, wenn x eine Wurzel der Gleichung

$$b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + \dots + b_0 = 0$$

ist; denn dann wird der Nenner gleich Null, der Zähler dagegen nicht, da nach Voraussetzung Zähler und Nenner zueinander relativ prim sein sollen. Der Zähler wird also endlich und von Null verschieden sein, demnach y selbst unendlich groß werden. Wir treffen damit zum ersten Male auf den Fall, daß der Funktionswert für einen endlichen Wert der unabhängigen Veränderlichen unendlich groß wird. Die Funktion selbst muß an einer solchen Stelle nach den Ableitungen von (29) unstetig werden. Was dies bedeutet, wird uns erst völlig klar werden, wenn wir die zu einer solchen gebrochenen rationalen Funktion gehörige Kurve untersuchen. Doch wollen wir vorher ein

Beispiel durchführen.

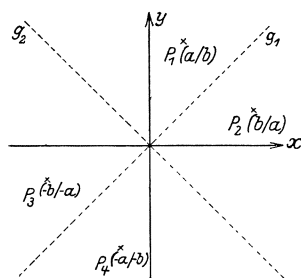


Abb. 40.

(31) Die einfachste gebrochene rationale Funktion ist

$$y = \frac{1}{x}. \quad (60)$$

Man kann Gleichung 60) auch in der Form schreiben:

$$xy = 1. \quad (60a)$$

Aus 60) und 60 a) kann man über den Verlauf der zugehörigen Kurve einige Schlüsse ziehen: 60 a) ist in x und y symmetrisch gebaut; d. h. eine Vertauschung von x und y führt 60 a) in sich selbst über. Kennen wir also ein Wertepaar $x = a$ und $y = b$, das Gleichung 60 a) befriedigt, so muß auch das Wertepaar $x = b$ und $y = a$ Gleichung 60 a) befriedigen. Die zugehörigen Punkte P_1 und P_2 (Abb. 40) liegen aber symmetrisch zueinander bezüglich derjenigen durch O gehenden Geraden g_1 , welche beide Achsen unter 45° schneidet, also den Winkel zwischen der positiven x - und der positiven y -Achse und ebenso den Winkel zwischen der negativen x - und der negativen y -Achse halbiert; wir wollen diese Gerade künftig kurz als die 45° -Linie bezeichnen. Unsere Kurve ist also symmetrisch bezüglich der 45° -Linie. Diese Eigenschaft kommt übrigens nach der obigen Ableitung allen Kurven zu, deren Gleichung symmetrisch in x und y gebaut ist. — Weiterhin folgt aus 60 a), daß auch das Wertepaar $x = -b$ und $y = -a$ die Gleichung 60 a) erfüllen muß; der Punkt P_3 muß also auch auf der Kurve liegen. $P_1(a|b)$ und $P_3(-b|-a)$ liegen aber zueinander symmetrisch bezüglich einer Geraden g_2 , die gegen die positive x -Achse unter 135° geneigt ist, die sog. 135° -Linie; also ist auch die 135° -Linie eine Symmetrieachse der Kurve. — Schließlich erfüllt auch das

Wertepaar $x = -a$ und $y = -b$ die Gleichung; die beiden Punkte $P_1(a|b)$ und $P_2(-a|-b)$ liegen [(25) Abb. 31] symmetrisch zu O . Die Kurve hat demnach den Punkt O zum Mittelpunkt, eine notwendige Folge der beiden ersten Eigenschaften. Da x und y stets dasselbe Vorzeichen haben, verläuft die Kurve nur im ersten und dritten Quadranten. Abb. 41 zeigt ihren Verlauf. Die Kurve ist die **gleichseitige Hyperbel**. Da auf Grund von Gleichung 60) für wachsendes x der Wert von y immer kleiner wird, und $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ ist, so schmiegt sich

die Hyperbel mit wachsender Abszisse immer näher an die x -Achse an, ohne sie jedoch im Endlichen zu erreichen; gleiches gilt, wenn x die negativen Werte durchläuft. Eine Gerade, der sich eine Kurve beständig nähert, die von ihr aber erst im Unendlichen erreicht wird, heißt eine **Asymptote** der Kurve. Die x -Achse ist demnach eine Asymptote der gleichseitigen Hyperbel von der

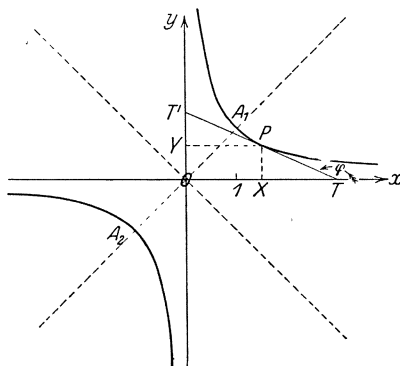


Abb. 41.

Gleichung $y = \frac{1}{x}$. Nach den Auseinandersetzungen von (30) ist, da der Nenner der gebrochenen Funktion für $x = 0$ verschwindet, die Funktion für diesen Wert von x unstetig. Wir finden dies bestätigt; denn für $x = 0$ ist $y = \infty$. Je näher also $x > 0$ dem Werte Null kommt, um so größere Werte nimmt y an, und je mehr sich $x < 0$ der Null nähert, um so mehr nähert sich y dem Werte $-\infty$. Auf Grund unserer obigen Betrachtungen ist daher die y -Achse eine Asymptote der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$. Der Nullstelle des Nenners einer gebrochenen rationalen Funktion entspricht also bei der Kurve eine parallel zur y -Achse verlaufende Asymptote. Weil die beiden Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, nennt man die Gleichung $y = \frac{1}{x}$ die Asymptotengleichung der gleichseitigen Hyperbel. Da für $x = 1$ auch $y = 1$ und für $x = -1$ auch $y = -1$ ist, sind die beiden Punkte $A_1(1|1)$ und $A_2(-1|-1)$ der Hyperbel deren Schnittpunkte mit der 45° -Linie, also der einen Symmetrieachse. A_1 und A_2 heißen die Scheitel der Hyperbel, die Gerade A_1A_2 die reelle Achse, die Strecke $A_1A_2 = 2 \cdot \sqrt{2}$ die Länge der reellen Achse und die Strecke $OA_1 = \sqrt{2}$ die Länge der reellen Halbachse der Hyperbel. Die 135° -Linie hat dagegen keinen Punkt mit der gleichseitigen Hyperbel gemeinsam; sie ist die imaginäre Achse der Hyperbel.

Um Tangenten an die gleichseitige Hyperbel zu konstruieren, müssen wir den Differentialquotienten der Funktion $y = \frac{1}{x}$ bilden; es ist

$$\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Der Richtungsfaktor ist daher stets negativ; d. h. die gleichseitige Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ fällt beständig. Man kann schreiben:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{x} : x = -\frac{y}{x};$$

dies gibt eine überaus einfache Tangentenkonstruktion (Abb. 41): Man trage auf der x -Achse der Strecke $OT = 2OX = 2x$ ab und verbinde T mit P ; PT ist dann die in P an die Hyperbel gelegte Tangente. (Daß übrigens $OT' = 2y$ ist, wenn T' der Schnittpunkt der Tangente mit der y -Achse ist, ist leicht einzusehen; der Leser mag sich dies selbst beweisen.)

Für den allgemeineren Fall der gleichseitigen Hyperbel lautet die Gleichung

$$y = \frac{c}{x}; \quad (61)$$

ist $c > 0$, so verläuft die Hyperbel im ersten und dritten, ist $c < 0$, im zweiten und vierten Quadranten, da im ersten Falle x und y stets gleiche, im letzten stets verschiedene Vorzeichen haben. Als Bild kann wieder Abb. 41 gelten, wenn man nur die Koordinaten des Scheitels A_1 $OX_1 = +\sqrt{c}$ und $X_1A_1 = +\sqrt{c}$ (oder für $c < 0$ $+\sqrt{-c}$ bzw. $-\sqrt{-c}$) wählt. — Da das Rechteck $OXPY$ die Seiten x und y und folglich den von der Wahl des Punktes P unabhängigen Inhalt $x \cdot y = c$ hat, ist die gleichseitige Hyperbel der geometrische Ort der vierten Eckpunkte aller Rechtecke von gleichem Inhalte c , von denen ein Eckpunkt in einem festen Punkte O liegt, während die beiden diesem benachbarten Eckpunkte sich auf zwei durch O gehenden und aufeinander rechtwinkligen Geraden bewegen.

Die gleichseitige Hyperbel wird in der Technik vielfach verwendet. Als Beispiel diene das Boyle-Mariottesche Gesetz, nach dem das Produkt aus Volumen v und Druck p eines vollkommenen Gases bei gleichbleibender Temperatur konstant ist: $v \cdot p = C$. Je nachdem man p oder v als die unabhängige Veränderliche betrachtet, erhält man die beiden Gleichungen

$$v = \frac{C}{p} \quad \text{oder} \quad p = \frac{C}{v}.$$

Der Leser zeichne sich unter Zugrundelegung einer der Volumeneinheit und der Druckeinheit entsprechenden Längeneinheit die zu verschiedenen Werten von C gehörigen gleichseitigen Hyperbeln [s. (184) S. 584].

(32) Kehren wir nun zur allgemeinsten gebrochenen rationalen Funktion zurück! Wir wollen sie in der Form schreiben

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \quad (62)$$

wobei $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei ganze rationale Funktionen sein mögen, die zueinander relativ prim sind, also etwa [s. 59])

$$f(x) = a_r x^r + \dots + a_0, \quad \varphi(x) = b_s x^s + \dots + b_0.$$

Für alle reellen Werte von x , welche Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ sind, wird $y = \infty$; sie sind also Unstetigkeitsstellen der Funktion. Daß nicht jede gebrochene rationale Funktion solche Unstetigkeitsstellen zu haben braucht, leuchtet ohne weiteres ein, wenn man bedenkt, daß nicht jede Gleichung $\varphi(x) = 0$ reelle Wurzeln hat. Beispielsweise hat die Funktion $y = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$ keine solchen Unstetigkeitsstellen. Die der Funktion 62) entsprechende Kurve hat an diesen Unstetigkeitsstellen Asymptoten, welche der y -Achse parallel sind. — Um weiterhin den Verlauf der Kurve für wachsendes x zu untersuchen, wollen wir uns die gebrochene rationale Funktion als Summe einer ganzen rationalen und einer echt gebrochenen rationalen Funktion geschrieben denken: Ist also $r < s$, so wollen wir die rechte Seite von Gleichung 59) mit x^s kürzen; wir erhalten dann:

$$y = \frac{\frac{a_r}{x^{s-r}} + \frac{a_{r-1}}{x^{s-r+1}} + \dots + \frac{a_1}{x^{s-1}} + \frac{a_0}{x^s}}{b_s + \frac{b_{s-1}}{x} + \frac{b_{s-2}}{x^2} + \dots + \frac{b_1}{x^{s-1}} + \frac{b_0}{x^s}}. \quad (63)$$

Wird nun x sehr groß, so wird $\frac{1}{x}$ sich immer mehr der Null nähern, in noch viel höherem Maße aber die Potenzen von $\frac{1}{x}$; der Zähler der rechten Seite von 63) nähert sich immer mehr dem Werte Null, während der Nenner sich unbegrenzt dem Werte b_s nähert; also wird y sich der Null nähern. Wächst schließlich x über alle Grenzen hinaus, so erhält y den Wert Null: $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$. Die Kurve schmiegt sich dem-

nach immer enger an die x -Achse an, erreicht sie aber erst für eine unendlich große Abszisse. Die x -Achse ist also Asymptote der Kurve. [Vgl. (31), gleichseitige Hyperbel.] Im Falle der unecht gebrochenen rationalen Funktion kommt zu dem Ausdrucke in 63) noch eine ganze rationale Funktion hinzu; von ihr wissen wir aber aus (24), daß sie mit wachsendem x über alle Grenzen hinauswächst.

Folglich verhält sich eine unecht gebrochene rationale Funktion für ein unbegrenzt wachsendes x wie die zu ihr gehörige ganze rationale Funktion. Insbesondere hat die der Funktion

$$y = \frac{a_s x^s + \dots + a_0}{b_s x^s + \dots + b_0} \quad (r = s)$$

entsprechende Kurve die Gerade $y = \frac{a_s}{b_s}$, also eine Parallele zur x -Achse zur Asymptote, ebenso ist für die der Funktion

$$y = \frac{a_{s+1} x^{s+1} + \dots + a_0}{b_s x^s + \dots + b_0} \quad (r = s + 1)$$

entsprechende Kurve eine Gerade vom Richtungsfaktor $\frac{a_{s+1}}{b_s}$ Asymptote. (Ausdividieren!)

(33) Einige Anwendungen aus der Technik mögen das Verständnis für die gebrochene rationale Funktion vertiefen. Wir beginnen mit dem folgenden Problem:

A. In einem Punkte A einer Geraden befinde sich die Elektrizitätsmenge $+\varepsilon$, in einem um die Strecke e von A entfernten Punkte B die Elektrizitätsmenge -2ε . Eine punktförmige Elektrizitätsmenge $+\varepsilon'$ werde auf der Strecke AB bewegt. Wie groß ist die jeweilige Kraft, die in irgendeinem Punkte X durch die beiden Elektrizitätsmengen $+\varepsilon$ und -2ε auf die Elektrizitätsmenge $+\varepsilon'$ ausgeübt wird?

Wir wählen A als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsenkreuzes und AB als x -Achse. Der Punkt X , in dem sich die Elektrizitätsmenge $+\varepsilon'$ augenblicklich befinden möge, habe die Abszisse x , von A also den Abstand x und von B den Abstand $e - x$. Auf $+\varepsilon'$ wird demnach ausgeübt von A die Abstoßung $\frac{+\varepsilon\varepsilon'}{x^2}$ und von B die Anziehung $\frac{-2\varepsilon\varepsilon'}{(e-x)^2}$. Solange sich, wie angenommen, X zwischen A und B befindet, wirken beide Kräfte in gleichem Sinne, nämlich in Richtung der positiven x -Achse; sie summieren sich also, und die auf X ausgeübte Gesamtkraft ist

$$K = \varepsilon\varepsilon' \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(e-x)^2} \right).$$

K ist eine echt gebrochene rationale Funktion des Ortes X . Für $x=0$ und $x=e$ wird $K=\infty$; für Zwischenwerte von x nimmt K endliche Werte an; so ist für $x = \frac{e}{4}$, $\frac{e}{2}$, $\frac{3}{4}e$ entsprechend

$$K = 19,56 \frac{\varepsilon\varepsilon'}{e^2}, \quad 12 \frac{\varepsilon\varepsilon'}{e^2}, \quad 33,78 \frac{\varepsilon\varepsilon'}{e^2},$$

wie man durch einfache Rechnung findet. Man kann sich den Verlauf der Kraft anschaulich machen, wenn man K als Ordinate in dem

jeweiligen Punkte X aufträgt; es ergibt sich eine Kurve, die in A und B ins Unendliche geht und dort Asymptoten parallel der K -Achse hat. Ferner erkennt man mühelos, daß es einen Punkt X_0 gibt, in welchem auf die Elektrizitätsmenge $+\varepsilon'$ die geringste Kraft ausgeübt wird; ihn wollen wir jetzt ermitteln. Für ihn muß $\frac{dK}{dx} = 0$ sein, also erhalten wir zur Bestimmung seiner Abszisse die Gleichung

$$-\frac{2}{x^3} + \frac{4}{(e-x)^3} = 0$$

oder

$$\left(\frac{x}{e-x}\right)^3 = \frac{1}{2}, \quad \frac{x}{e-x} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

$$x = \frac{e}{1 + \sqrt[3]{2}} \approx 0,4425 e$$

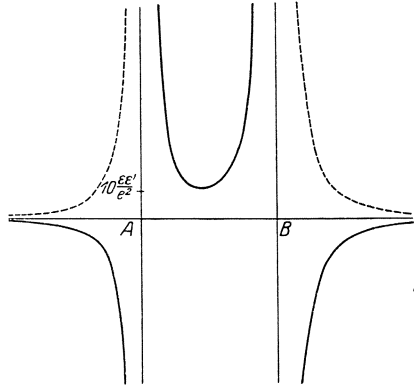


Abb. 42.

und daraus

$$K_{\min} = (1 + \sqrt[3]{2})^3 \frac{\varepsilon \varepsilon'}{e^2} \approx 11,5420 \frac{\varepsilon \varepsilon'}{e^2}.$$

Verfolgen wir die Kurve von der Gleichung

$$K = \varepsilon \varepsilon' \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(e-x)^2} \right)$$

weiter, also für $x > e$ und $x < 0$, so ergibt sich der in Abb. 42 gestrichelt angegebene Verlauf

$$\left(\text{z. B.: } x = -e, \quad K = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{e^2}; \quad x = 2e, \quad K = \frac{9}{4} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{e^2} \right).$$

Doch gibt die Funktion

$$K = \varepsilon \varepsilon' \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(e-x)^2} \right)$$

für die Werte von x , die außerhalb des Bereiches $0 < x < e$ liegen, die wirklichen Kraftverhältnisse unseres Beispiels gar nicht wieder. Ist nämlich $x < 0$, befindet sich also die Elektrizitätsmenge ε' außerhalb AB auf der zu A gehörigen Seite, so wirkt die durch A hervorgerufene Abstoßung im Sinne der negativen x -Achse, schwächt also die durch B hervorgerufene Anziehung, und der Kraftverlauf wird durch die Gleichung

$$K = \varepsilon \varepsilon' \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(e-x)^2} \right)$$

beschrieben. Die Kraft K ist anfangs negativ; in der Entfernung

$$x = + \frac{e}{-\sqrt{2} + 1} \infty -2,414 e$$

heben Anziehung und Abstoßung einander auf, da hier $K = 0$ wird, und für noch weitere Entfernung von A überwiegt die Anziehung die Abstoßung. Ist dagegen $x > e$, befindet sich die Elektrizitätsmenge jenseits des Punktes B , so wirkt die von B ausgeübte Anziehung im Sinne der negativen x -Achse, und der Kraftverlauf wird in diesem Falle durch die Gleichung

$$K = \varepsilon \varepsilon' \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{(e-x)^2} \right)$$

wiedergegeben; jetzt ist die Kraft für jeden Wert $x > e$ nach A bzw. B hin gerichtet. Abb. 42 enthält die zugehörigen Kurven. — Es dürfte sich empfehlen, zur Übung auch den Fall zu behandeln, bei dem A und B Träger gleichnamiger Elektrizitätsmengen sind, sowie den Fall, bei welchem mehr als zwei punktförmige Elektrizitätsmengen auf einer Geraden verteilt sind.

B. Ein weiteres Beispiel ist folgendes: Gegeben seien n Elemente von der gleichen elektromotorischen Kraft e und dem gleichen inneren Widerstande w_i ; sie mögen zu je x in Reihen, und diese Reihen parallel geschaltet sein. Der Stromkreis sei geschlossen, der äußere Widerstand sei w_a ; wie groß ist die Stromstärke? — Die Gesamtspannung einer Reihe beträgt ex , ihr innerer Widerstand $w_i x$; solche Reihen lassen sich insgesamt $\frac{n}{x}$ bilden. Da sie parallel geschaltet sind, ist der innere Gesamt-widerstand des Systems $w_i x : \frac{n}{x} = \frac{w_i}{n} x^2$, während die Gesamtspannung ex bleibt. Zum inneren Widerstande $\frac{w_i}{n} \cdot x^2$ kommt noch der äußere Widerstand w_a des Stromkreises hinzu, so daß der vom Strome zu überwindende Gesamt-widerstand $w = \frac{w_i}{n} x^2 + w_a$ ist. Dann berechnet sich die Stromstärke i zu

$$i = \frac{ex}{\frac{w_i}{n} x^2 + w_a}.$$

Zwar kann praktisch x als Anzahl der in Reihen geschalteten Elemente nur eine in n als Faktor enthaltene natürliche Zahl sein; doch wollen wir einmal von dieser Beschränkung absehen und die Funktion

$$i = \frac{ex}{\frac{w_i}{n} x^2 + w_a}$$

rein mathematisch behandeln, also annehmen, daß x irgendeine, also auch eine gebrochene oder irrationale positive oder negative Zahl sein kann. Daß diese Annahme keine abstrakt mathematische Betrachtung ist, sondern sehr wohl praktischen Nutzen zeitigt, wird die folgende Höchstwertuntersuchung lehren. Wir erkennen, daß unsere

Funktion eine echt gebrochene rationale Funktion ist; da unter der praktisch einzig möglichen Annahme, daß die Konstanten e, w_i, w_a, n absolute Größen sind, die Gleichung $\frac{w_i}{n} x^2 + w_a = 0$ keine reellen Wurzeln hat, wird i auch für keinen reellen Wert von x unendlich groß. Außerdem ist für $x > 0$ auch $i > 0$. Die zugehörige Kurve hat also die x -Achse zur Asymptote, sonst aber keine weiteren Asymptoten. Ferner geht sie, wie man sich leicht überzeugt, durch den Nullpunkt; schließlich hat sie den Nullpunkt zum Mittelpunkt, da zu entgegengesetzt gleichen Werten von x auch entgegengesetzt gleiche Werte von i gehören [s. (25) S. 54]. Sie hat demnach den in Abb. 43 angedeuteten Verlauf. Aus ihm erkennt man, daß für kleine positive x auch i klein ist, daß mit wachsendem x auch i anfangs wächst, bis es einen Höchstwert erreicht hat, um von da an allmählich bis zum Betrage Null abzunehmen. Derjenige Wert von x , für den i am größten ist, hat nun besondere Bedeutung; denn er gibt uns jene Schaltweise, durch welche wir mit den vorhandenen Mitteln die größtmögliche Stromstärke erzielen. Zur rechnerischen Ermittlung bilden wir den Differentialquotienten

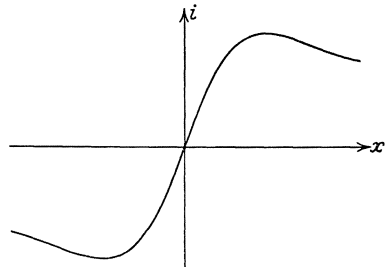


Abb. 43.

$$\frac{di}{dx} = \frac{\left(\frac{w_i}{n} x^2 + w_a\right) e - e x \cdot 2 \frac{w_i}{n} x}{\left(\frac{w_i}{n} x^2 + w_a\right)^2} = \frac{e \left(w_a - \frac{w_i}{n} x^2\right)}{\left(\frac{w_i}{n} x^2 + w_a\right)^2}.$$

Damit $\frac{di}{dx}$ gleich Null wird, muß der Zähler verschwinden; es ist also

$$w_a - \frac{w_i}{n} x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x = + \sqrt{n \cdot \frac{w_a}{w_i}}.$$

(Warum nur $+\sqrt{\quad}$?) Die höchste zu erzielende Stromstärke ist

$$i_{\max} = \frac{e}{2} \sqrt{\frac{n}{w_i w_a}}.$$

Ist beispielsweise $n = 12, w_a = 3 w_i$, so schaltet man am zweckmäßigsten die Elemente zu je sechs in zwei Reihen, um als größtmöglichen Wert der Stromstärke $\frac{e}{w_i}$ zu erhalten.

C. Die Unkosten, die die Anlage einer elektrischen Leitung verursacht, setzen sich im wesentlichen aus zwei Teilen zusammen, den Anlagekosten und den durch Energieverlust hervorgerufenen Kosten. Beide sind vorwiegend bestimmt durch den Quer-

schnitt q des Leitungsdrahtes. Der Preis für 1 m Draht ist im allgemeinen proportional dem Querschnitt, also $K \cdot q$. Der Energieverlust auf 1 m Draht ist um so größer, je kleiner der Querschnitt ist; er möge umgekehrt proportional zu diesem angenommen werden, also gleich $\frac{E}{q}$. Dabei sind K und E Konstanten, die von wirtschaftlichen und sonstigen Verhältnissen bestimmt sind. Die Gesamtkosten für 1 m sind also

$$U = K \cdot q + \frac{E}{q}.$$

U ist demnach eine unecht gebrochene rationale Funktion von q . Nach den Ableitungen von (32) muß die zugehörige Kurve die Gestalt der Abb. 44 haben, wobei $K = \operatorname{tg} \alpha$ ist. Es sei dem Leser überlassen, das

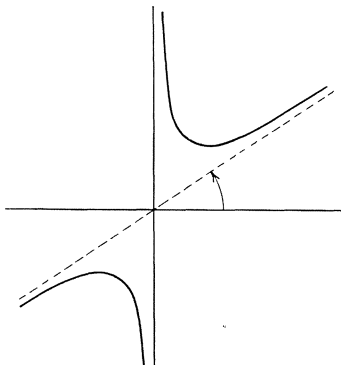


Abb. 44.

Beispiel weiter durchzuführen, insbesondere festzustellen, mit welchem Querschnitte man am wirtschaftlichsten arbeitet.

$$\left(q = \sqrt{\frac{E}{K}}, \quad U_{\min} = 2\sqrt{EK} \right).$$

Die gebrochene rationale Funktion unterscheidet sich wesentlich von den bisher betrachteten Funktionen dadurch, daß sie uns zwingt, auch den Begriff der Unstetigkeit, allerdings noch ver-

bunden mit dem Begriffe des Unendlichen, in unsere Betrachtungen hereinzuziehen. Im nächsten Paragraphen werden uns wieder neue Begriffe entgegenreten, wenn wir uns mit den inversen Funktionen befassen. Da zu ihrem Verständnis die sogenannte Kettenregel erforderlich ist, soll sie am Anfange der folgenden Betrachtungen stehen.

§ 7. Die Kettenregel. Die inversen Funktionen.

(34) Wenn wir den Differentialquotienten einer ganzen rationalen Funktion, etwa von der Gestalt $y = (ax^2 + bx + c)^4$, bilden wollen, so haben wir nach unseren bisher erworbenen Kenntnissen zuerst die Potenz auszumultiplizieren — wir bekommen in unserem Beispiele eine Funktion achten Grades — und dann gliedweise zu differenzieren. Einen einfacheren Weg eröffnet uns die **Kettenregel**, zu deren Ableitung wir nunmehr schreiten wollen.

Wir führen statt $ax^2 + bx + c$ eine neue Größe z ein; dann ist $y = z^4$, wobei $z = ax^2 + bx + c$ ist. Ganz allgemein möge sein

$y = f(z)$, wobei $z = \varphi(x)$ ist; y ist gewissermaßen nicht direkt, sondern durch Vermittlung einer Zwischenveränderlichen z von x abhängig. Man sagt, „ y ist eine Funktion von einer Funktion von x “ oder „ y ist eine mittelbare Funktion von x “. Die vermittelnde Größe z spielt eine doppelte Rolle; bezüglich x ist es die abhängige, bezüglich y die unabhängige Veränderliche.

Erteilt man der Größe x einen Zuwachs Δx , so erhält auch wegen der Beziehung $z = \varphi(x)$ die Größe z einen Zuwachs Δz und daher infolge der Beziehung $y = f(z)$ auch y einen Zuwachs Δy ; mit anderen Worten: der Zuwachs Δx hat einen Zuwachs Δy zur Folge. Für den der Betrachtung zugrunde gelegten Wert von x möge $z = \varphi(x)$ stetig sein, also $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta z = 0$, und für den sich aus x ergebenden Wert von z möge auch $y = f(z)$ stetig, also $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta y = 0$ sein. Das heißt aber, daß auch $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ ist, und man erhält den Satz: Die stetige Funktion

einer stetigen Funktion einer Veränderlichen ist ebenfalls eine stetige Funktion dieser Veränderlichen. In unserem obigen Beispiel ist $y = z^4$ eine stetige Funktion von z (als ganze rationale Funktion von z) und $z = ax^2 + bx + c$ eine solche von x (aus demselben Grunde); daher ist auch $y = (ax^2 + bx + c)^4$ eine stetige Funktion von x .

Wir bilden nun den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$. Wir gehen vom Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aus; diesen können wir schreiben:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Wird nun Δx unendlich klein, so nähert sich $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ dem Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{\Delta y}{\Delta z}$ dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dz}$; zugleich wird aber auch Δz unendlich klein, und $\frac{\Delta y}{\Delta z}$ nähert sich dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dz}$. Wir erhalten demnach die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}. \quad (64)$$

Lehrsatz: Ist $y = f(z)$ eine stetige Funktion von z , wobei $z = \varphi(x)$ eine stetige Funktion von x ist, so ist auch $y = f(\varphi(x))$ eine stetige Funktion von x ; ihren Differentialquotienten nach x erhält man, indem man den Differentialquotienten von $f(z)$ nach z mit dem Differentialquotienten von $\varphi(x)$ nach x multipliziert.

Im obigen Beispiele ist

$$\frac{dy}{dz} = 4z^3 = 4(ax^2 + bx + c)^3 \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = 2ax + b;$$

also ist $\frac{d(ax^2 + bx + c)^4}{dx} = 4(ax^2 + bx + c)^3 \cdot (2ax + b)$.

Diese Differentiationsregel gestattet noch eine Erweiterung: Ist nämlich z nicht direkt eine Funktion von x , sondern eine Funktion einer anderen Veränderlichen u : $z = \varphi(u)$, und u eine Funktion von x : $u = \psi(x)$, so ist nach der eben abgeleiteten Regel

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

demnach

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Die drei Faktoren der rechten Seite folgen derart aufeinander, daß der formale Nenner des ersten Faktors zugleich der formale Zähler des zweiten Faktors ist usw.; es wird eine Art von Kette gebildet, die das Anfangsglied dy derselben durch Zwischenglieder mit dem Endgliede dx verknüpft. Aus diesem rein äußerlichen Grunde nennt man die obige Regel auch die **Kettenregel**. Einige Beispiele folgen. Auch diese Regel ist gut einzuüben.

1. $y = \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^3 = z^3$, wobei $z = \frac{ax+b}{cx+g}$ ist. Nun ist nach der Grundformel 35)

$$\frac{dy}{dz} = 3z^2 = 3\left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^2$$

und nach der Quotientenregel

$$\frac{dz}{dx} = \frac{ag - bc}{(cx+g)^2},$$

also ist

$$\frac{d\left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^3}{dx} = 3\left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^2 \cdot \frac{ag - bc}{(cx+g)^2} = \frac{3(ag - bc)(ax+b)^2}{(cx+g)^4}.$$

2. $y = (3x^2 - 7x + 6)^3 \cdot (x + 5)^2 = u \cdot v$, wobei $u = (3x^2 - 7x + 6)^3$ und $v = (x + 5)^2$ ist. Nach der Produktregel ist

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}.$$

Wir müssen demnach zuerst $\frac{dv}{dx}$ bilden; es ist $v = z^2$, wobei $z = x + 5$ ist, also ist nach der Kettenregel

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 2z \cdot 1 = 2(x + 5).$$

Ferner ist $\frac{du}{dx}$ zu ermitteln; es ist $u = w^3$, wobei $w = 3x^2 - 7x + 6$ ist; also ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = 3w^2 \cdot (6x - 7) = 3(3x^2 - 7x + 6)^2 \cdot (6x - 7).$$

Setzen wir dies oben ein, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 - 7x + 6)^3 \cdot 2(x + 5) + (x + 5)^2 \cdot 3 \cdot (3x^2 - 7x + 6)^2 (6x - 7).$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch zusammenfassen in

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (3x^2 - 7x + 6)^2(x + 5)[2(3x^2 - 7x + 6) + 3(x + 5)(6x + 7)] \\ &= (3x^2 - 7x + 6)^2(x + 5)(24x^2 + 55x - 93).\end{aligned}$$

3. $y = \frac{(x-1)^3}{(x^2+1)^2} = \frac{u}{v}$, wobei $u = (x-1)^3$ und $v = (x^2+1)^2$ ist. Nach der Bruchregel ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Hierbei sind $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dv}{dx}$ wieder nach der Kettenregel zu berechnen: $u = z^3$, wobei $z = x - 1$ ist; also $\frac{du}{dx} = 3z^2 \cdot 1 = 3(x - 1)^2$. $v = w^2$, wobei $w = x^2 + 1$ ist; also $\frac{dv}{dx} = 2w \cdot 2x = 4x(x^2 + 1)$. Demnach erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2 + 1)^2 \cdot 3 \cdot (x - 1)^2 - (x - 1)^3 \cdot 4x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{(x - 1)^2[3(x^2 + 1) - 4x(x - 1)]}{(x^2 + 1)^3} = \frac{(x - 1)^2(3 + 4x - x^2)}{(x^2 + 1)^3}.\end{aligned}$$

Ein anderer häufig zu empfehlender Weg für die Differentiation eines Bruches ist der, den Bruch in Produktform zu schreiben und damit dieses Beispiel auf die Form des Beispiels 2 zurückzuführen: $y = (x - 1)^3 \cdot (x^2 + 1)^{-2} = u \cdot v$, wobei $u = (x - 1)^3$ und $v = (x^2 + 1)^{-2}$ ist. Jetzt ist

$$\frac{dv}{dx} = -2(x^2 + 1)^{-3} \cdot 2x = -4x(x^2 + 1)^{-3},$$

während wie oben $\frac{du}{dx} = 3(x - 1)^2$ ist. Dann ist aber nach der Produktregel

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x - 1)^3 \cdot [-4x(x^2 + 1)^{-3}] + (x^2 + 1)^{-2} \cdot 3(x - 1)^2 \\ &= \frac{(x - 1)^2[3(x^2 + 1) - 4x(x - 1)]}{(x^2 + 1)^3} = \frac{(x - 1)^2(3 + 4x - x^2)}{(x^2 + 1)^3}.\end{aligned}$$

Man vermeidet auf diesem Wege eine überflüssig hohe Potenz des ursprünglichen Nenners im Differentialquotienten.

$$4. \quad y = \left[\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^2 + b \right]^3 + a; \quad y = z^3, \quad \text{wobei } z = u^3 + a,$$

$u = v^2 + b$ und $v = x^2 + \frac{1}{x}$ ist. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dz} &= 2z = 2 \left[\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^2 + b \right]^3 + a, \\ \frac{dz}{du} &= 3u^2 = 3 \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^2 + b, \\ \frac{du}{dv} &= 2v = 2 \left(x^2 + \frac{1}{x} \right), \\ \frac{dv}{dx} &= 2x - \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2 \left[\left(\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^2 + b \right)^3 + a \right] \cdot 3 \left(\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^2 + b \right)^2 \cdot 2 \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(2x - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= 12 \left[\left(\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^2 + b \right)^3 + a \right] \cdot \left(\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^2 + b \right)^2 \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \left(2x - \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Diese Beispiele mögen genügen; aus ihnen kann man — und zwar, wie sich im Laufe der weiteren Entwicklung herausstellen wird, mit Recht — vermuten, daß man mit Hilfe der Kettenregel stets imstande ist, die Differentiation einer auch noch so verwickelten Funktion auf die Differentiation von Elementarfunktionen — in unseren Beispielen der Elementarfunktion $y = x^n$, der einzigen, die wir bis jetzt differenzieren können — zurückzuführen.

(35) Überaus wertvoll erweist sich die Kettenregel in ihrer Anwendung auf die **inversen Funktionen**, denen wir uns jetzt zuwenden wollen. Es ist, wie schon in (1) angedeutet worden ist, häufig nicht von vornherein zu entscheiden, welche der beiden Veränderlichen man als die unabhängige, welche man als die abhängige anzusehen hat; zuweilen wird man die eine, dann wieder die andere Anschauung vorziehen. So wird im Beispiele (1) die Beziehung $F = \frac{9}{5}C + 32$ zu wählen sein, wenn man aus gegebener Celsiusangabe die Fahrenheitangabe errechnen will; umgekehrt wird man zur Formel $C = \frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9}$ greifen, wenn man die entgegengesetzte Aufgabe lösen muß. Die beiden Funktionen $F = \frac{9}{5}C + 32$ und $C = \frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9}$ gehören eng zusammen; man nennt die eine die **Umkehrfunktion** oder die **inverse Funktion** zur anderen; dabei ist es gleichgültig, welche von beiden man als die ursprüngliche und welche man als die abgeleitete Funktion ansehen will.

Wie erhält man nun die inverse Funktion zu einer gegebenen Funktion? Ist $y = f(x)$ die gegebene Funktion, so löse man diese Gleichung nach der Größe x auf. Man erhält dadurch einen Ausdruck von der Form $x = \varphi(y)$. Da wir aber gewöhnt sind, die unabhängige Veränderliche mit x , die abhängige dagegen mit y zu bezeichnen, so ist $y = \varphi(x)$ die zu $y = f(x)$ inverse Funktion. Ist also $y = \frac{9}{5}x + 32$ die ursprüngliche Funktion, so erhalten wir durch Auflösung nach x die Gleichung $x = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9}$ und durch Vertauschen von x und y $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$. Also sind die beiden Funktionen $y = \frac{9}{5}x + 32$ und $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$ zueinander invers. Noch einfacher wird die Überleitung aus einer Funktion in die andere, wenn man in der ursprünglichen Funktionsgleichung x und y miteinander vertauscht; so ist zu $y = f(x)$ die inverse Funktion $x = f(y)$. Allerdings verzichtet man hierbei darauf, die letzte Gleichung nach der abhängigen Veränderlichen aufzulösen.

Beispiel: $y = \frac{9}{5}x + 32$ und $x = \frac{9}{5}y + 32$.

Desgleichen ist die zur quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ inverse Funktion $x = ay^2 + by + c$ oder nach der abhängigen Veränderlichen aufgelöst:

$$y = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4a(c - x)}.$$

Woran erkennt man nun, daß zwei gegebene Funktionen $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ zueinander invers sind? Diese Frage ist nach den obigen Ausführungen nicht mehr so schwer zu entscheiden. In einer der beiden Gleichungen, beispielsweise in der letzteren, vertausche man x und y , so daß sich ergibt $x = \varphi(y)$; diesen Wert setze man in die erste Gleichung für x ein. Der Ausdruck $y \equiv f(\varphi(y))$ muß eine identische Gleichung ergeben; d. h. die rechte Seite muß sich dann so umformen lassen, daß nur noch y stehenbleibt. Beispiel: Es seien wiederum $y = \frac{9}{5}x + 32$ und $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$ gegeben; in der letzteren vertauschen wir x und y , um zu erhalten $x = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9}$; diesen Wert setzen wir in die rechte Seite der ersten Gleichung ein:

$$\frac{9}{5}x + 32 = \frac{9}{5}(\frac{5}{9}y - \frac{160}{9}) + 32 = y - 32 + 32 = y.$$

Damit ist gezeigt, daß die beiden Funktionen zueinander invers sind. Zeige, daß dies auch für die beiden Funktionen

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - x)})$$

gilt!

Schließlich soll noch die Frage beantwortet werden: Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Schaubildern, die zu zwei inversen Funktionen gehören? Erfüllt das Wertepaar $x = a$, $y = b$ die Gleichung $y = f(x)$, so liegt der Punkt $P_1(a|b)$ auf der zu dieser Gleichung gehörigen Kurve. Dann muß aber das Wertepaar $x = b$, $y = a$ die zur vorigen inverse Gleichung $x = f(y)$ erfüllen, d. h. der Punkt $P_2(b|a)$ auf der zu dieser gehörigen Kurve liegen. Nun sind aber die beiden Punkte P_1 und P_2 zueinander spiegelbildlich bezüglich der 45° -Linie [s. a. (31)]. Demnach müssen die beiden Kurven selbst zueinander bezüglich dieser Linie symmetrisch liegen. Man zeige dies an den zu den Funktionen

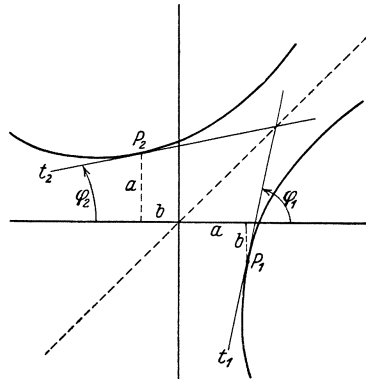


Abb. 45.

$y = \frac{9}{5}x + 32$ und $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$
 bzw. $y = ax^2 + bx + c$ und $y = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - x)})$
 gehörigen Bildern.

Zwischen zwei inversen Funktionen bestehen also die denkbar innigsten Beziehungen; diese müssen sich auch auf deren Differentialquotienten erstrecken, die wir nun bilden wollen. Den Schlüssel hierzu liefert uns die Kettenregel: Es sei $y = f(x)$ die gegebene Funktion, die nach x aufgelöst, die Form haben möge $x = \varphi(y)$ so daß $f(\varphi(y)) \equiv y$ ist und demnach $f(x)$ und $\varphi(y)$ zueinander invers sind. Da nun $\frac{dy}{dx} = 1$ [s. (18)] ist, so muß auch $\frac{df(\varphi(y))}{dy} = 1$ sein. Nun ist aber nach der Kettenregel:

$$\frac{df(x)}{dy} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{d\varphi(y)}{dy} = f'(x) \cdot \varphi'(y).$$

Folglich ist

$$f'(x) \cdot \varphi'(y) = 1. \quad (65)$$

Die Differentialquotienten zweier zueinander inversen Funktionen sind zueinander reziprok. Dieses überaus wichtige Ergebnis können wir auch aus Abb. 45 ablesen: Sind t_1 die in P_1 und t_2 die in P_2 an die inversen Kurven gelegten Tangenten und φ_1 bzw. φ_2 ihre Richtungswinkel, so muß infolge der Symmetrie bezüglich der 45° -Linie $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$, also $\text{tg } \varphi_1 \cdot \text{tg } \varphi_2 = 1$, oder da $\text{tg } \varphi_1 = f'(x)_{x=a}$ und $\text{tg } \varphi_2 = \varphi'(x)_{x=b}$ ist, $f'(x)_{x=a} \cdot \varphi'(x)_{x=b} = 1$ sein — in Übereinstimmung mit dem obigen Ergebnis.

Die in den vorangehenden Zeilen entwickelte Lehre von den Umkehrfunktionen gibt uns in Verbindung mit der Kettenregel den Schlüssel, eine neue Gruppe von Funktionen, die bei weitem umfangreicher als die bisherige ist, zu untersuchen. Die Funktionen, die wir bisher behandelt haben: die ganze und die gebrochene rationale Funktion, werden unter dem Begriffe der **rationalen Funktionen** zusammengefaßt. Wir erinnern uns daran, daß sie entstehen, wenn man auf die Veränderliche und eine Anzahl von Konstanten die vier elementaren Rechnungsarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division anwendet. Die Multiplikation schließt dabei von selbst auch das Potenzieren mit natürlichem Exponenten ein. Ehe wir uns jedoch mit den **irrationalen Funktionen** befassen, sei noch der **binomische Satz** abgeleitet, da wir ihn bald benötigen werden.

(36) Es ist, wie sich leicht durch fortschreitendes Ausmultiplizieren bestätigen läßt:

$$\left. \begin{aligned} (1+x)^2 &= 1 + 2x + x^2, \\ (1+x)^3 &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3, \\ (1+x)^4 &= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4, \\ (1+x)^5 &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Der binomische Satz befaßt sich nun mit der Entwicklung des Ausdruckes $(1+x)^n$ nach steigenden Potenzen von x für beliebige Werte von n . Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß n eine natürliche Zahl ist. Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß wir in diesem Falle beim Ausmultiplizieren von $(1+x)^n$ eine Summe von $n+1$ Gliedern erhalten. Das erste Glied heißt 1, die übrigen sind nach steigenden Potenzen von x geordnet, das letzte Glied ist x^n ; die übrigen Potenzen von x sind mit je einem Faktor multipliziert; diese Faktoren heißen die Binomialkoeffizienten. Um sie zu ermitteln, setzen wir an:

$$(1+x)^n = \left. \begin{aligned} & \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots \\ & + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n; \end{aligned} \right\} \quad 67)$$

die Binomialkoeffizienten sind also der Reihe nach mit

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \cdots \binom{n}{k}, \cdots \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

bezeichnet worden; man liest $\binom{n}{k}$ als „ n über k “ und nennt $\binom{n}{k}$ den k ten Binomialkoeffizienten der n ten Reihe. $\binom{n}{k}$ ist nur von n und k abhängig, muß sich also durch diese beiden Zahlen ausdrücken lassen. Für besondere Werte von n und k können wir $\binom{n}{k}$ schon angeben: man erkennt aus 67) sofort, daß $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ist. 66) lehrt ferner, daß

$$\begin{aligned} \binom{2}{1} &= 2, & \binom{3}{1} &= 3, & \binom{3}{2} &= 3, & \binom{4}{1} &= 4, & \binom{4}{2} &= 6, & \binom{4}{3} &= 4, \\ \binom{5}{1} &= 5, & \binom{5}{2} &= 10, & \binom{5}{3} &= 10, & \binom{5}{4} &= 5 \dots \text{ist.} \end{aligned}$$

Kennt man alle Binomialkoeffizienten der $(n-1)$ ten Reihe, so kann man leicht diejenigen der n ten Reihe bilden, da man $(1+x)^n$ aus $(1+x)^{n-1}$ dadurch erhält, daß man $(1+x)^{n-1}$ mit $(1+x)$ multipliziert. In der Reihe $(1+x)^{n-1}$ kommt nun ein Glied vor mit der Potenz x^k und eines mit der Potenz x^{k-1} ; ersteres hat den Binomialkoeffizienten $\binom{n-1}{k}$, letzteres den Binomialkoeffizienten $\binom{n-1}{k-1}$. Multipliziert man $(1+x)^{n-1}$ mit $1+x$, so muß auch u. a. das Glied $\binom{n-1}{k}x^k$ mit 1 und das Glied $\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}$ mit x multipliziert werden; beide Multiplikationen ergeben die k te Potenz von x . Es sind dies aber auch die einzigen Glieder von $(1+x)^{n-1}$, die bei der Multiplikation mit $1+x$ Glieder von $(1+x)^n$ mit der Potenz x^k liefern;

also lautet dieses Glied $\left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] x^k$. Da dieses aber den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ hat, so muß

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{68}$$

sein. Wir sehen diese Formel in den Gleichungen 66) bestätigt. Mit Hilfe von Formel 68) können wir also aus den Binomialkoeffizienten der $(n-1)$ ten Reihe die der n ten Reihe ableiten. Um dieses recht übersichtlich zu gestalten, machen wir von den beiden selbstverständlichen Gleichungen Gebrauch $(1+x)^0 = 1$ und $(1+x)^1 = 1+x$, aus denen folgt $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{1}{0} = 1$, $\binom{1}{1} = 1$. Wir schreiben die Binomialkoeffizienten einer bestimmten Reihe in eine Zeile, und zwar so, wie das folgende Schema es zeigt:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{cccccc} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \end{array}} \right\} \tag{69}$$

Man nennt es das **Pascalsche Dreieck**. Nach Formel 68) muß nun jedes Glied gleich der Summe derjenigen beiden Glieder der vorangehenden Zeile sein, unter deren Lücke es steht; wir überzeugen uns, daß dies der Fall ist. Wir können auf Grund dieser Eigenschaft mit Leichtigkeit, ohne weiteres Ausmultiplizieren, die Binomialkoeffizienten der sechsten Reihe aufstellen; sie müssen lauten:

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

und ebenso die der folgenden Reihen

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & 7 & 1 \\ & 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\ & & 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 \\ 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & \dots \end{array}$$

Dieses Verfahren, die Binomialkoeffizienten zu ermitteln, hat den Nachteil, daß man zwei Binomialkoeffizienten der vorangehenden $(n-1)$ ten Reihe schon kennen oder selbst erst ableiten muß, um einen der n ten Reihe zu berechnen. Befriedigend ist die Aufgabe erst dann gelöst, wenn wir eine Formel gefunden haben, die $\binom{n}{k}$ unmittelbar durch n und k ausdrückt. Zu ihrer Ableitung gehen wir von der Gleichung 67) aus; sie stellt eine Identität dar; d. h. sie soll für jeden

Nun setzen wir in den Gleichungen 67), 67a), 67b) für x den Wert Null ein; wir bekommen dadurch der Reihe nach die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= \binom{n}{0}, & n &= 1 \cdot \binom{n}{1}, & n(n-1) &= 1 \cdot 2 \cdot \binom{n}{2}, \\ n(n-1)(n-2) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \binom{n}{3}, \dots, \\ n(n-1) \dots (n-k+1) &= 1 \cdot 2 \dots k \binom{n}{k}, \dots, \\ n(n-1)(n-2) \dots 2 &= 1 \cdot 2 \dots (n-3)(n-2)(n-1) \cdot \binom{n}{n-1}, \\ n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)(n-1) n \cdot \binom{n}{n}. \end{aligned}$$

Diese können wir nach den Binomialkoeffizienten auflösen, für die sich die Werte ergeben:

$$\left. \begin{aligned} \binom{n}{0} &= 1, & \binom{n}{1} &= \frac{n}{1}, & \binom{n}{2} &= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, & \binom{n}{3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots, \\ \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}, \dots, \\ \binom{n}{n-1} &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}, \\ \binom{n}{n} &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n} = 1. \end{aligned} \right\} 70)$$

Damit ist unsere Aufgabe in der gewünschten Form gelöst. Wir können den Ausdruck für $\binom{n}{k}$ noch etwas einfacher gestalten, indem wir das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis k , also den Ausdruck $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-2)(k-1)k$ kurz in der Form $k!$ schreiben und $k!$ als „ k ausgerufen“ lesen. Macht man hiervon Gebrauch, so kann man schreiben:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}.$$

Erweitern wir mit $(n-k)!$, so wird

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) \cdot (n-k)(n-k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-k)}$$

oder, da der Zähler gleich $n!$ ist,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad 70a)$$

Zwischen den Binomialkoeffizienten besteht nun eine Fülle von Beziehungen, auf die einzugehen hier nicht der Ort ist. Erwähnt seien nur die folgenden: Gleichung 68) stellt eine solche dar; und

aus Gleichung 70 a) folgt sofort eine andere: Nach ihr ist nämlich, wenn wir statt k den Wert $n - k$ setzen:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad \text{also} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Nun steht aber in der Entwicklung $(1+x)^n$ das Glied mit dem Koeffizienten $\binom{n}{n-k}$ ebenso weit vom Ende entfernt wie das Glied mit dem Koeffizienten $\binom{n}{k}$ vom Anfange; also sind die Binomialkoeffizienten jeder Reihe symmetrisch angeordnet, eine Eigenschaft, die man schon aus den Formeln 69) vermuten konnte, die hiermit für jedes n streng bewiesen ist.

Wir wollen schließlich die gewonnenen Ergebnisse auf ein Beispiel anwenden; wir wählen hierzu den Ausdruck $(a+b)^9$. Wir können schreiben:

$$(a+b)^9 = a^9 \left(1 + \frac{b}{a}\right)^9 = a^9 (1+x)^9,$$

wenn $\frac{b}{a} = x$ gesetzt wird. Es ist

$$(1+x)^9 = 1 + \binom{9}{1}x + \binom{9}{2}x^2 + \binom{9}{3}x^3 + \binom{9}{4}x^4 + \binom{9}{5}x^5 + \binom{9}{6}x^6 \\ + \binom{9}{7}x^7 + \binom{9}{8}x^8 + \binom{9}{9}x^9,$$

und wir finden nach 70)

$$\binom{9}{1} = \frac{9}{1} = 9, \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36, \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84, \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

usf. Demnach ist

$$(a+b)^9 = a^9 \left(1 + 9 \frac{b}{a} + 36 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 84 \left(\frac{b}{a}\right)^3 + 126 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + 126 \left(\frac{b}{a}\right)^5 \\ + 84 \left(\frac{b}{a}\right)^6 + 36 \left(\frac{b}{a}\right)^7 + 9 \left(\frac{b}{a}\right)^8 + \left(\frac{b}{a}\right)^9\right)$$

oder

$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 \\ + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9.$$

§ 8. Die irrationalen Funktionen.

(37) Wendet man auf eine Veränderliche x und eine Anzahl von Konstanten außer den Grundrechnungsarten auch noch das Wurzelziehen an, so erhält man die **irrationalen Funktionen**; sie unterscheiden sich rein äußerlich von der bisher betrachteten rationalen Funktion durch das Auftreten des Wurzelzeichens.

Der einfachste Fall der irrationalen Funktion ist natürlich die Funktion

$$y = \sqrt{x}. \quad (71)$$

Sie ist nach (35) die zu $y = x^2$ inverse Funktion. Doch hier begegnen wir einer neuen Sachlage: Die Quadratwurzel aus einer Zahl ist nur dann reell, wenn der Radikand x positiv ist. Wir lernen demnach in 71) eine Funktion kennen, die nicht für jeden Wert von x einen — für uns allein in Betracht kommenden — reellen Wert hat, sondern nur für $x \geq 0$, ein Verhalten, das bei den rationalen Funktionen völlig ausgeschlossen war. Ferner wissen wir aus der Algebra, daß die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl stets zwei entgegengesetzt gleiche Werte hat. Die Funktion $y = \sqrt{x}$ ist eine zweideutige Funktion. Um den Differentialquotienten von $y = \sqrt{x}$ zu bilden, benutzen wir den in (35) gewonnenen Satz: Wir lösen nach x auf und erhalten $x = y^2$. Daher ist $\frac{dx}{dy} = 2y$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$, oder $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; demnach ist $\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Wir sehen, daß auch der Differentialquotient nur für $x \geq 0$ reell ist und ebenfalls zwei entgegengesetzt gleiche Werte hat. Besonders hervorzuheben ist aber der Wert $x = 0$; für ihn hat y den Wert 0, ist also — im Gegensatz zu allen anderen Werten von \sqrt{x} — eindeutig. Dagegen ist der Differentialquotient an dieser Stelle gleich ∞ ; es kann also für $\frac{dy}{dx}$ der Wert ∞ auch an Stellen eintreten, an denen der Funktionswert y selbst endlich ist.

Das Schaubild der Funktion $y = \sqrt{x}$ bestätigt die Ergebnisse der Rechnung. Es hat folgende Eigenschaften: Da sich nur für positive x reelle y ergeben, verläuft die Kurve nur auf derjenigen Halbebene, welche die positive x -Achse enthält, und da zu jedem positiven x zwei entgegengesetzt gleiche y gehören, ist die x -Achse Symmetrieachse der Kurve. Ferner geht die Kurve durch den Anfangspunkt und berührt in diesem die y -Achse (s. Abb. 46); man findet am bequemsten und raschesten die Punkte

$$0|0, +1|\pm 1, +4|\pm 2, +9|\pm 3, +\frac{1}{4}|\pm \frac{1}{2}, \\ +\frac{9}{4}|\pm \frac{3}{2}, +\frac{25}{4}|\pm \frac{5}{2} \dots).$$

Da uns auch der Differentialquotient $\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ bekannt ist, sind wir in der Lage, in den einzelnen Punkten an die Kurve die Tangenten zu legen, wobei nur zu beachten ist, daß das Vorzeichen der Wurzel mit dem jeweiligen Vorzeichen von y übereinzustimmen hat. So hat die Tangente im Punkte $P (+\frac{9}{4} | +\frac{3}{2})$ die Richtung $+\frac{1}{3}$, dagegen im Kurvenpunkte $P' (+\frac{9}{4} | -\frac{3}{2})$ die Richtung $-\frac{1}{3}$. Auch das Verhalten

der Funktion $y = \sqrt{x}$ für $x = 0$ erhellt aus der Kurve; denn da diese in O die y -Achse zur Tangente hat, so nähert sich Δy wesentlich langsamer dem Werte Null als Δx ; und das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wächst mit abnehmendem Δx über alle Grenzen hinaus. In Abb. 46 a ist der Kurventeil in der Scheitelnähe vergrößert gezeichnet; es ist für

$$\begin{array}{cccccc} \Delta x = & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} & \cdots & 0, \\ \Delta y = & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots & 0, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = & 2 & 4 & 8 & 16 & \cdots & \infty. \end{array}$$

Da nach (35) die Bilder zweier zueinander inversen Funktionen zueinander bezüglich der 45° -Linie symmetrisch sind, so muß dies auch

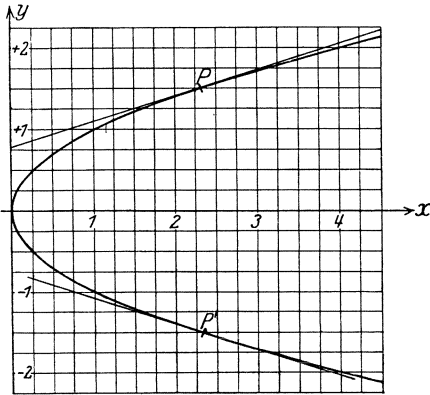


Abb. 46.

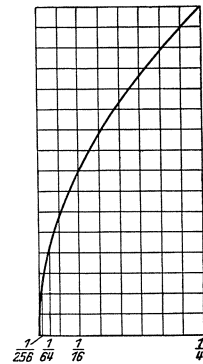


Abb. 46 a.

für die Bilder der Funktionen $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$ gelten. Hiernach ist das Bild der Funktion $y = \sqrt{x}$ eine Parabel, deren Scheitel in O liegt, deren Achse die positive x -Achse und deren Scheiteltangente die y -Achse ist.

(38) Am häufigsten tritt die einfachste irrationale Funktion in der etwas allgemeineren Form auf

$$y = \sqrt{2px} \quad \text{oder} \quad y^2 = 2px; \quad (72)$$

aus ihr ergibt sich Gleichung 71), wenn man $2p = 1$ setzt. Die inverse Funktion ist $y = \frac{x^2}{2p}$; die zu ihr gehörige Kurve ist nach (16) eine Parabel, deren Scheitel in O liegt, deren Achse die y -Achse und deren Scheiteltangente die x -Achse ist. Daher ist die zu 72) gehörige Kurve ebenfalls eine Parabel, deren Scheitel in O liegt, deren Achse aber die x -Achse und deren Scheiteltangente die y -Achse ist. Die hier auftretende

Konstante p , welche die Gestalt der Parabel bestimmt, heißt der Parameter der Parabel, die Gleichung $y = \sqrt{2px}$ bzw. $y^2 = 2px$ heißt die Scheitelgleichung der Parabel; diese Form wird den Parabeluntersuchungen zumeist zugrunde gelegt. Wir wollen aus ihr einige weitere Eigenschaften der Parabel ableiten:

Für $p > 0$ ist die positive x -Achse, für $p < 0$ die negative x -Achse die Parabelachse (warum?).

Zur Konstruktion der Parabel verfährt man zweckmäßig derart, daß man die Abszissen der Punkte als Vielfache von p darstellt; dann ergeben sich auch die Ordinaten nach 72) als Vielfache von p :

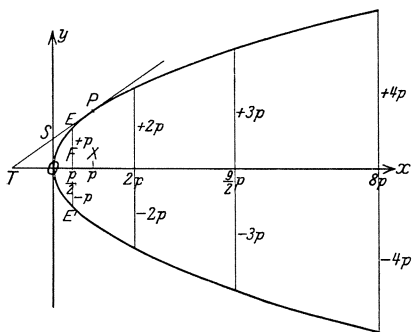


Abb. 47.

$$x = \frac{p}{2} \quad 2p \quad \frac{9}{2}p \quad 8p \dots$$

$$y = \pm p \quad \pm 2p \quad \pm 3p \quad \pm 4p \dots$$

Besondere Bedeutung hat der Punkt F auf der Parabelachse, dessen Abszisse gleich $\frac{p}{2}$ ist, er heißt der Brennpunkt der Parabel; der zu ihm gehörende Parabelpunkt E hat eine Ordinate, die gerade gleich dem Parameter p ist (Abb. 47).

Zur Konstruktion der Tangenten an die Parabel bilden wir den Differentialquotienten von 72). Es ist $x = \frac{y^2}{2p}$, also $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$ und nach (35)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} \quad \text{oder} \quad \frac{d\sqrt{2px}}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

Demnach sind die Tangentenrichtungen in den Punkten

$$\frac{p}{2} \mid \pm p, \quad 2p \mid \pm 2p, \quad \frac{9}{2}p \mid \pm 3p, \quad 8p \mid \pm 4p, \dots$$

$$\pm 1, \quad \pm \frac{1}{2}, \quad \pm \frac{1}{3}, \quad \pm \frac{1}{4}, \dots$$

Wir merken uns hiervon, daß in dem zum Brennpunkte F gehörigen Parabelpunkte E die Tangente gerade unter 45° geneigt ist. Ferner folgt aus dem Dreieck TXP (Abb. 47)

$$TX : XP = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \quad \text{oder} \quad TX : y = \frac{y}{p}, \quad TX = \frac{y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x.$$

Da $OX = x$ ist, muß also auch $TO = x$ sein. Dann muß aber infolge der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $TOS \sim TXP$ die Proportion gelten: $OS : XP = TO : TX$ oder $OS : y = x : 2x$, woraus $OS = \frac{y}{2}$ folgt. Das heißt aber:

Jede Parabeltangente schneidet auf der Parabelachse ein Stück TO ab, das gleich der Abszisse des Berührungspunktes, und auf der Scheiteltangente ein Stück OS ab, das gleich der halben Ordinate des Berührungspunktes ist. Um also die zu P gehörige Parabeltangente zu konstruieren, brauchen wir nur auf der Achse einen Punkt T derart zu suchen, daß O der Mittelpunkt von TX ist, oder auf der Scheiteltangente vom Scheitel O aus die Strecke OS gleich der halben Ordinate von P aufzutragen und T bzw. S mit P zu verbinden [s. a. (114) S. 311].

(39) Wir gehen nach diesen Sonderbetrachtungen jetzt zur allgemeinen irrationalen Funktion über; vorher aber wollen wir die Funktion $y = \sqrt[n]{x}$ differenzieren, wobei n eine ganze Zahl sein soll. Ihren Differentialquotienten gewinnen wir auf folgende Weise: Es ist $x = y^n$, also $\frac{dx}{dy} = n \cdot y^{n-1}$, demnach $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n y^{n-1}}$; und da $y = \sqrt[n]{x}$ ist, so wird

$$\frac{d\sqrt[n]{x}}{dx} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}. \quad (73)$$

Mittels der Kettenregel läßt sich nun auch der Differentialquotient der Funktion $y = \sqrt[r]{x^s}$ bilden, wobei r und s ganze Zahlen sein sollen. Wir setzen $y = \sqrt[r]{z}$, $z = x^s$; es ist nach 73)

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{r \cdot \sqrt[r]{z^{r-1}}} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = s x^{s-1}.$$

Also wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{r} \cdot \frac{x^{s-1}}{\sqrt[r]{z^{r-1}}} = \frac{s}{r} \cdot \frac{x^{s-1}}{\sqrt[r]{x^{s(r-1)}}}.$$

Bei Einführung der Bruchexponenten $\left(\sqrt[r]{x} = x^{\frac{1}{r}}\right)$ geht der Differentialquotient über in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{r} \cdot \frac{x^{s-1}}{x^{\frac{s}{r}(r-1)}} = \frac{s}{r} \frac{x^{s-1}}{x^{\frac{s}{r} - \frac{s}{r}}} = \frac{s}{r} x^{\frac{s}{r} - 1}.$$

Da wir aber auch y in der Form $y = x^{\frac{s}{r}}$ schreiben können, so erhalten wir schließlich die Formel

$$\frac{dx^{\frac{s}{r}}}{dx} = \frac{s}{r} x^{\frac{s}{r} - 1}. \quad (74)$$

Setzen wir in ihr $\frac{s}{r} = n$, so kommen wir auf die Grundformel

$$\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}. \quad (35)$$

Die Formel $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ gilt daher für jeden beliebigen rationalen Exponenten n .

Es wird sich später zeigen, daß die Formel 35) auch für Werte von n gilt, die nicht rational sind.

Nun sind wir in der Lage, jede beliebige irrationale Funktion zu differenzieren; an einer Reihe von Beispielen soll das Verfahren erläutert werden (Übungen!). Wir beginnen mit der Einübung der Formel 35) für gebrochene Werte von n :

1. $y = \sqrt{x}$; $n = \frac{1}{2}$, also $\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
2. $y = \sqrt[5]{x^9}$; $n = \frac{9}{5}$, also $\frac{d\sqrt[5]{x^9}}{dx} = \frac{9}{5} x^{\frac{9}{5}-1} = \frac{9}{5} x^{\frac{4}{5}} = \frac{9}{5} \sqrt[5]{x^4}$;
3. $y = \sqrt[5]{x^3}$; $n = \frac{3}{5}$, also $\frac{d\sqrt[5]{x^3}}{dx} = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5 \cdot \sqrt[5]{x^2}}$;
4. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = x^{-\frac{3}{4}}$; $n = -\frac{3}{4}$,

also

$$\frac{d\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}}{dx} = -\frac{3}{4} x^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{4} x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x^7}}.$$

Durch Anwendung der Fundamentalformel 35) auf gebrochene Exponenten gestaltet sich demnach die Differentiation dieser Funktionen sehr einfach. Auch für die Funktion $y = \sqrt{2px}$ ergibt sich leicht, wenn wir $2px = z$ und daher $y = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$ setzen,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \cdot 2p = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \sqrt{\frac{p}{2x}} \quad \text{wie oben.}$$

Weitere Beispiele:

5. $y = a\sqrt[r]{x^s}$; nach der Konstantenregel ist:

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{s}{r} \cdot x^{\frac{s}{r}-1} = a \cdot \frac{s}{r} \sqrt[r]{x^{s-r}}.$$

6. $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^7}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{3} \cdot \sqrt[3]{x^4} = \frac{7}{3} x \sqrt[3]{x}$.

Man differenziere unter Zuhilfenahme der Summenregel die Funktion

$$y = 2x^2 - \frac{2}{7} x \sqrt[6]{x} + 3 \sqrt[3]{x} - 5$$

und überzeuge sich, daß der Differentialquotient lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} \right)^2.$$

7. $y = \sqrt[3]{3 - 2x}$. Man setze $y = z^{\frac{1}{3}}$, $z = 3 - 2x$; dann ist

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(3-2x)^2}},$$

$$\frac{dz}{dx} = -2, \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(3-2x)^2}}.$$

8. $y = \frac{1}{\sqrt{2ax - x^2}}$; $y = z^{-\frac{1}{2}}$, $z = 2ax - x^2$;

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{(2ax - x^2)^3}}, \quad \frac{dz}{dx} = 2a - 2x;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 \cdot 2(a-x)}{2\sqrt{(2ax - x^2)^3}} = \frac{x-a}{\sqrt{(2ax - x^2)^3}}.$$

9. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$. Verwendung der Produktregel: $y = u \cdot v$, wobei $u = x$ und $v = \sqrt{a^2 - x^2}$ ist. Es ist $\frac{du}{dx} = 1$ und $\frac{dv}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($v = z^{\frac{1}{2}}$ und $z = a^2 - x^2$). Also ist

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2} \cdot 1 = \frac{-x^2 + a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Beweise unter Verwendung der Produktregel, daß der Differentialquotient von $y = (5 + 3x)\sqrt{6x - 5}$ lautet: $\frac{dy}{dx} = \frac{27x}{\sqrt{6x - 5}}$; ebenso daß der von

$$y = \left(\frac{10}{3} - 2x + x^2\right)\sqrt{(5 + 2x)^3} \quad \text{lautet} \quad \frac{dy}{dx} = 7x^2 \cdot \sqrt{5 + 2x}.$$

10. $y = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}}$; Kettenregel:

$$y = z^{\frac{1}{2}}, \quad z = \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}; \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}.$$

Nach der Quotientenregel ist weiter

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(a^2 - x^2) \cdot 2x - (a^2 + x^2) \cdot (-2x)}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{4a^2 x}{(a^2 - x^2)^2};$$

also ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2 - x^2} \cdot 4a^2 x}{\sqrt{a^2 + x^2} (a^2 - x^2)^2} = \frac{2a^2 x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

11. $y = \frac{a + \sqrt{x}}{b + \sqrt[3]{x}} = \frac{u}{v}$, wobei $u = a + \sqrt{x}$, $v = b + \sqrt[3]{x}$; Quotientenregel:

also

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(b + \sqrt[3]{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - (a + \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{(b + \sqrt[3]{x})^2} = \frac{\frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt[6]{x}} - \frac{a}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3\sqrt[6]{x}}}{(b + \sqrt[3]{x})^2} \\ &= \frac{3b \cdot \sqrt[6]{x} - 2a + \sqrt{x}}{6 \cdot \sqrt[3]{x^2} (b + \sqrt[3]{x})^2}. \end{aligned}$$

12. $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 + a^2}}$; Kettenregel: $y = z^{\frac{1}{3}}$, $z = x + v$, $v = u^{\frac{1}{2}}$,
 $u = x^2 + a^2$,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{(x + \sqrt{x^2 + a^2})^2}}, \quad \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dv}{dx},$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \frac{du}{dx} = 2x,$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}};$$

also ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{3 \sqrt[3]{(x + \sqrt{x^2 + a^2})^2} \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 + a^2}}}{3 \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

(40) Anwendung der irrationalen Funktion: Das **Ponceletsche Theorem**, das dem rechnenden Techniker ein praktisches Mittel in die Hand gibt, um annäherungsweise Quadratwurzeln zu ziehen. Sind z. B. P und Q (Abb. 48) zwei aufeinander senkrecht stehende auf denselben Massenpunkt wirkende Kräfte, so ist ihre Mittelkraft $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$. Wir wollen R möglichst bequem — unter Umgehung des Wurzelzeichens — berechnen. Es sei Q die kleinere

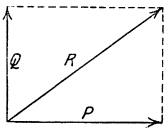


Abb. 48.

der beiden gegebenen Kräfte, wir wollen den echten Bruch $\frac{Q}{P}$ gleich x setzen. Dann ist $R = P \cdot \sqrt{1 + x^2}$. Am bequemsten wäre R zu ermitteln, wenn es sich als lineare Funktion von x ausdrücken ließe, etwa in der Form $R = P \cdot (\mu + \nu x)$. Gegenüber dem richtigen Werte $P \cdot \sqrt{1 + x^2}$ ist der absolute Fehler, den wir begehen, wenn wir $R = P(\mu + \nu x)$ setzen, $F = P \cdot \sqrt{1 + x^2} - P \cdot (\mu + \nu x)$, und demnach der relative Fehler (Quotient aus dem absoluten Fehler und dem wahren Werte)

$$y = \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{1 + x^2} - \mu - \nu x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{oder} \quad y = 1 - \frac{\mu + \nu x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Die Frage ist nun: Welche Werte haben wir den Größen μ und ν zu

Wir untersuchen zur Beantwortung der Frage die Funktion $y = \frac{\mu + vx}{\sqrt{1+x^2}}$ in dem uns allein angehenden Bereiche $0 \leq x \leq 1$.
 = 0 wird $y_0 = 1 - \mu$; für $x = 1$ wird $y_1 = 1 - \frac{\mu + v}{\sqrt{2}}$. Damit $y = 0$
 muß $1 - \frac{\mu + vx}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ sein oder $1 = \frac{(\mu + vx)^2}{1+x^2}$ oder

$$(1 - v^2)x^2 - 2\mu vx + (1 - \mu^2) = 0.$$

Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$x_1 = \frac{\mu v - \sqrt{\mu^2 + v^2 - 1}}{1 - v^2}, \quad x_2 = \frac{\mu v + \sqrt{\mu^2 + v^2 - 1}}{1 - v^2}.$$

wenn nur $\mu^2 + v^2 > 1$ ist, gibt es stets zwei Schnittpunkte mit der Achse. Da ferner die Funktion y und also auch die Kurve stetig sein muß zwischen diesen beiden Punkten ein Maximum bzw. Minimum der Funktion liegen. Wenn wir weiter annehmen, daß die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 1 - \mu > 0, \\ 1 - \frac{\mu + v}{\sqrt{2}} > 0 \\ 0 < x_1 < x_2 < 1 \end{aligned}$$

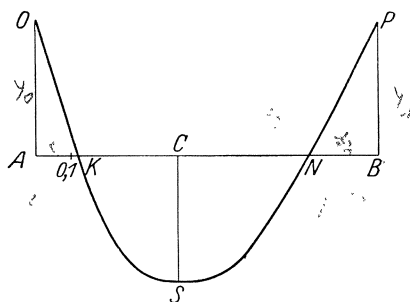


Abb. 49.

erfüllt sind — Voraussetzungen, die in den späteren Werten von μ und v erfüllt werden —, so hat die Kurve den in Abb. 49 angegebenen Verlauf, wobei

$$\begin{aligned} AO = 1 - \mu = y_0, \quad AB = 1, \quad BP = 1 - \frac{\mu + v}{\sqrt{2}} = y_1, \\ AK = x_1, \quad AN = x_2 \end{aligned}$$

In diesem Falle besitzt die Kurve zwischen K und N ein Minimum, durch die Strecke CS dargestellt wird. Um CS zu ermitteln, setzen wir

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(1+x^2)v - (\mu + vx)x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Um der Differentialquotient gleich Null werden, so muß

$$(1+x^2)v - (\mu + vx)x = 0, \quad \text{d. h.} \quad x = AC = \frac{v}{\mu}$$

hierzu gehört

$$\mu + \frac{v^2}{\mu}$$

nach obigen Voraussetzungen. Folglich ist der absolute Betrag

$$|CS| = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} - 1.$$

Poncelet legt nun seiner Fehlerfunktion

$$y = 1 - \frac{\mu + \nu x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

die Bedingung auf, daß die absoluten Beträge von AO , BP und CS inander gleich sein, d. h. also, daß die beiden größten positiven Fehler und ebenso der größte negative Fehler denselben Betrag haben sollen. Er setzt demnach

$$1 - \mu = 1 - \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}} = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} - 1.$$

Hierdurch erhält er zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten μ und ν , die wir nun auflösen wollen: Wir bekommen

$$\nu = \mu(\sqrt{2} - 1) \quad \text{und} \quad 2 - \mu = \sqrt{\mu^2 + \nu^2},$$

also

$$2 - \mu = \mu\sqrt{1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1};$$

hieraus folgt

$$\mu = \frac{2}{1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} = 0,960$$

und weiter $\nu = 0,398$. Man überzeuge sich, daß in der Tat

$$1 - \mu = 0,040 > 0, \quad 1 - \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}} = 0,040 > 0, \quad \mu^2 + \nu^2 = 1,080 > 1, \\ x_1 = 0,12 < 1, \quad x_2 = 0,79 < 1 \quad \text{ist.}$$

Hiernach ist der relative Fehler, den wir begehen, wenn wir statt des Ausdruckes $\sqrt{P^2 + Q^2}$ den Ausdruck

$$P(0,960 + 0,398x) = 0,960P + 0,398Q$$

setzen,

$$y = 1 - \frac{0,960 + 0,398x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Dieser ist höchstens 0,04. D. h. die Ponceletsche Formel

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = 0,960P + 0,398Q$$

liefert uns einen Wert, der vom wirklichen Werte um höchstens 4% abweicht.

Falls man nicht von vornherein weiß, welche von beiden Kräften die kleinere ist, so setzt man $\sqrt{1 + x^2} = \mu(1 + x)$; löst man den

te positive Fehler gleich dem größten negativer sein soll, so ergibt sich $\mu = 0,828$, also $\sqrt{2} = 0,828(P + Q)$, der größte Fehler beträgt . Die Durchrechnung nehme der Leser selbst vor. so sei ihm überlassen, nachzuweisen, daß der ur ungefähr 2% beträgt, wenn man für $x > 0,2$

$$\sqrt{P^2 + Q^2} \approx 0,888P + 0,490Q$$

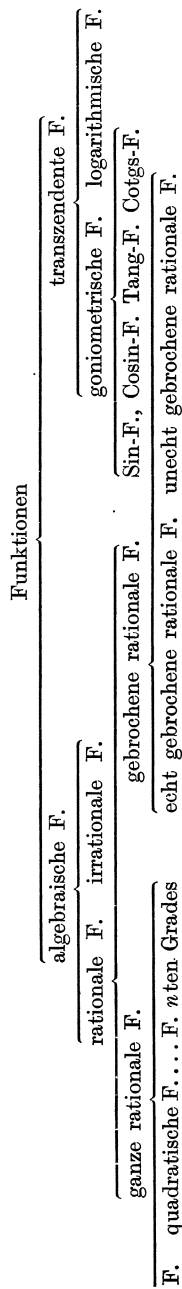
d wenn man für $x \leq 0,2$ einfach

$$\sqrt{P^2 + Q^2} \approx P$$

olytechnische Mitteilungen Bd. 1).

Wir fassen in einem Überblick die bisher behauptungen von Funktionen kurz zusammen: Wir begannen mit der linearen Funktion, daran schließend die quadratische Funktion untersucht; und Sonderfälle der allgemeinen ganzen rationalen Funktion, die wir dann behandelt haben. In dem Gegensatz hierzu stehen die gebrochenen rationalen Funktionen, die wir in die echt gebrochenen und die unecht gebrochenen rationalen eingeteilt haben. Beide, die ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen, bilden die zwei Hauptgruppen der rationalen Funktionen. Ihnen gegenüber die irrationalen Funktionen. Alle behandelten Funktionen lassen sich auf einem allgemeinen Wege aus einer Veränderlichen und einer von Konstanten bilden; man bezeichnet sie als algebraische Funktionen.

Wichtig ist jedoch das große Gebiet der Funktionen, dem wir noch nicht erschöpft; wir können uns vorstellen denken, die eine Abhängigkeit ausdrücken, nicht durch algebraische Operationen aus einer Veränderlichen und aus Konstanten entsteht; man nennt die Sinus-, die Logarithmenfunktion usw. diese Funktionen, die nicht algebraisch sind, werden als transzendente Funktionen bezeichnet. Die Funktionen sind uns aus der niederen Mathematik bekannt die goniometrischen Funktionen (Sinus. Kosinus. Tangens.



Umkehrfunktionen noch dazunehmen, so haben wir alle in der niederen Mathematik wichtigen transzendenten Funktionen aufgezählt. Wir können durch Verbindung dieser Funktionen untereinander und mit algebraischen Funktionen eine unendliche Fülle zusammengesetzter Funktionen schaffen. Und da auch hiermit die gesamte Menge der transzendenten Funktionen noch nicht erschöpft ist, lassen sich weitere Funktionen in beliebiger Zahl mathematisch definieren. Doch davon später!

In den nächsten Paragraphen wollen wir die aus der elementaren Mathematik bekannten transzendenten Funktionen im Sinne der Infinitesimalrechnung behandeln und damit vorläufig die Lehre von den Funktionen und die Differentialrechnung abschließen. Die umstehende Übersicht (s. S. 97) stellt die Funktionen schematisch zusammen.

§ 9. Die goniometrischen Funktionen.

(42) Anschließend an die elementare Mathematik definieren wir die goniometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ als Funktionen eines Winkels x , wobei wir allerdings jetzt den Grundbegriffen der Goniometrie hier und da eine andere Fassung zu geben haben. So haben wir in der Elementarmathematik den rechten Winkel in 90 gleiche Teile geteilt, einen solchen Teil als 1 Grad (1°) bezeichnet, weiter 1 Grad in 60 Minuten ($1^\circ = 60'$) und 1 Minute in 60 Sekunden ($1' = 60''$) geteilt. In der Wahl dieser Winkeleinheiten liegt nun aber eine im Wesen des Winkels durchaus nicht begründete, wenn auch für die Elementarmathematik praktisch recht wertvolle Willkür. Andererseits würde die Übernahme dieser Art von Winkelmessung in die Infinitesimalrechnung die Behandlung der Winkelfunktionen überaus schwerfällig gestalten. Nun läßt sich aber leicht ein Winkelmaß finden, das die Größe des Winkels

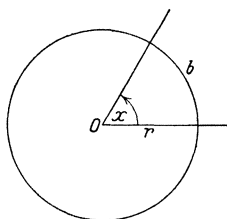


Abb. 50.

einzig aus seiner Eigenschaft heraus definiert, das also ein natürliches Winkelmaß darstellt; es ist dies das Bogenmaß des Winkels.

Schlagen wir nämlich (Abb. 50) um den Scheitel O eines Winkels x einen Kreis mit beliebigem Radius r , dessen zwischen den Schenkeln von x liegender Bogen die Länge b habe, so hat das Verhältnis $\frac{b}{r}$ einen nur von der Größe des Winkels x abhängigen Wert. Man nennt $\frac{b}{r}$ das Bogenmaß von x , und wir werden späterhin einfach schreiben $x = \frac{b}{r}$. In diesem Abschnitte (42) indessen, der die Beziehungen zwischen dem neu zu wählenden und dem bisherigen Winkelmaß aus-

dius $r = 1$ den Einheitskreis; mit seiner Hilfe kann man das Maß etwas anschaulicher auch dadurch definieren, daß man sagt:

Bogenmaß eines Winkels ist der zu ihm als Mittelwinkeln gehörige Bogen im Einheitskreise.

Die Beziehung besteht zwischen der Maßzahl eines Winkels im Gradmaß und derjenigen im Bogenmaß? Wir stellen die Proportion auf: $x^\circ : 360^\circ$, um zu erhalten:

$$\begin{aligned} \text{arc } x &= \frac{b}{r} = 2\pi \frac{x^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot x^\circ. \\ \text{arc } x &= \frac{\pi}{180^\circ} \cdot x^\circ, \quad x^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \text{arc } x. \end{aligned} \tag{75}$$

Die Formel (75) sagt aus, daß wir die Gradangabe eines Winkels mit $\frac{\pi}{180}$ multiplizieren haben, um das Bogenmaß zu erhalten, und umgekehrt aus diesem das Gradmaß durch Multiplikation mit $\frac{180}{\pi}$ bekommen.

Wir berechnen beispielsweise das Bogenmaß zu $x = 112^\circ 32' 54'' = 112,548$

$$\text{arc } x = 112,548 \cdot \frac{\pi}{180} = 112,548 \cdot 0,0174533 = 1,96433;$$

das Gradmaß zu $\text{arc } x = 2,34567$,

$$\begin{aligned} x &= 2^\circ, 34567 : \frac{\pi}{180} = 2^\circ, 34567 : 0,0174533 = 134^\circ, 397 \\ &= 134^\circ 23' 49''. \end{aligned}$$

In der Praxis bedarf es dieser Rechnung nicht, da jedes Ingenieurbuch¹⁾ diesbezügliche Umrechnungstabellen enthält. Im folgenden ist eine Zusammenstellung der wichtigsten Winkel in Gradmaß und Bogenmaß gegeben:

x°	$\text{arc } x$	x°	$\text{arc } x$
30°	$\frac{\pi}{6} = 0,52360$	150°	$\frac{5}{6}\pi = 2,61799$
45°	$\frac{\pi}{4} = 0,78540$	180°	$\pi = 3,14159$
60°	$\frac{\pi}{3} = 1,04720$	225°	$\frac{5}{4}\pi = 3,92699$
90°	$\frac{\pi}{2} = 1,57080$	240°	$\frac{4}{3}\pi = 4,18879$
120°	$\frac{2}{3}\pi = 2,09440$	270°	$\frac{3}{2}\pi = 4,71239$
135°	$\frac{3}{4}\pi = 2,35620$	360°	$2\pi = 6,28319$
		$57^\circ 17' 44'', 8$	1

(43) Um die Funktionen eines Winkels x zu definieren, wählen wir, wie aus der elementaren Mathematik bekannt ist, seinen Scheitel O

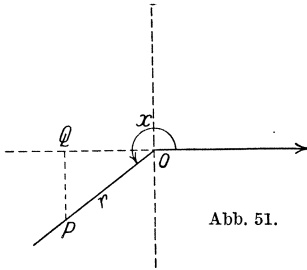


Abb. 51.

als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und legen die x -Achse in die Richtung seines Anfangsschenkels. Wir wählen ferner auf dem freien Schenkel einen beliebigen Punkt P ; $OP = r$ heiÙe der Leitstrahl des Punktes P [s. a. (105)], und bestimmen die Abszisse und die Ordinate von P , man definiert

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\text{Ordinate}}{\text{Leitstrahl}} = \frac{QP}{OP}, & \cos x &= \frac{\text{Abszisse}}{\text{Leitstrahl}} = \frac{OQ}{OP}, \\ \operatorname{tg} x &= \frac{\text{Ordinate}}{\text{Abszisse}} = \frac{QP}{OQ}, & \operatorname{ctg} x &= \frac{\text{Abszisse}}{\text{Ordinate}} = \frac{OQ}{QP}, \\ \left(\sec x &= \frac{\text{Leitstrahl}}{\text{Abszisse}} = \frac{OP}{OQ}, \right. & \operatorname{cosec} x &= \frac{\text{Leitstrahl}}{\text{Ordinate}} = \frac{OP}{QP} \left. \right). \end{aligned}$$

Unter Benutzung des BogenmaÙes ist also beispielsweise:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} = 0,50000, & \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} \sqrt{3} = 0,86603, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{3} \sqrt{3} = 0,57735, & \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} &= \sqrt{3} = 1,7321; \\ \sin \frac{3}{4} \pi &= \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0,70711, & \cos \frac{3}{4} \pi &= -\frac{1}{2} \sqrt{2} = -0,70711, \\ \operatorname{tg} \frac{3}{4} \pi &= -1, & \operatorname{ctg} \frac{3}{4} \pi &= -1; \\ \sin \frac{4}{3} \pi &= -\frac{1}{2} \sqrt{3} = -0,86603, & \cos \frac{4}{3} \pi &= -\frac{1}{2} = -0,50000, \\ \operatorname{tg} \frac{4}{3} \pi &= +\sqrt{3} = +1,7321, & \operatorname{ctg} \frac{4}{3} \pi &= +\frac{1}{3} \sqrt{3} = +0,57735, \\ \sin 2\pi &= 0, & \cos 2\pi &= +1, & \operatorname{tg} 2\pi &= 0, & \operatorname{ctg} 2\pi &= \infty. \end{aligned}$$

Die Periodizität der Winkelfunktionen spricht sich in den Formeln aus:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2k\pi) &= \sin x, & \cos(x + 2k\pi) &= \cos x, \\ \operatorname{tg}(x + k\pi) &= \operatorname{tg} x, & \operatorname{ctg}(x + k\pi) &= \operatorname{ctg} x, \end{aligned}$$

wobei k eine ganze Zahl ist.

Unter Benutzung des BogenmaÙes gelten ferner u. a. die Formeln:

$$\begin{aligned} \sin x &= +\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = +\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= +\sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(x - \pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos x &= +\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = +\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = -\cos(x - \pi) \\
 &= -\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = +\sin\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) \\
 &= +\cos(2\pi - x) = +\cos(2\pi + x) = +\cos(x - 2\pi); \\
 \operatorname{tg} x &= +\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= -\operatorname{tg}(\pi - x) = +\operatorname{tg}(\pi + x) = +\operatorname{tg}(x - \pi) \\
 &= +\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\operatorname{ctg}\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) \\
 &= -\operatorname{tg}(2\pi - x) = +\operatorname{tg}(2\pi + x) = +\operatorname{tg}(x - 2\pi); \\
 \operatorname{ctg} x &= +\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= -\operatorname{ctg}(\pi - x) = +\operatorname{ctg}(\pi + x) = +\operatorname{ctg}(x - \pi) \\
 &= +\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) \\
 &= -\operatorname{ctg}(2\pi - x) = +\operatorname{ctg}(2\pi + x) = +\operatorname{ctg}(x - 2\pi).
 \end{aligned}$$

(44) Wir wenden uns nun zunächst der Sinusfunktion zu. Wenn wir uns ein möglichst anschauliches Bild von ihrem Verlaufe bei veränderlichem Winkel x verschaffen wollen, so tun wir gut, auf dem freien Schenkel von x den Punkt P (Abb. 52) so zu wählen, daß sein Leitstrahl gleich der Längeneinheit wird: $r = OP = 1$; dann ist nach der obigen Definition in (43) einfach $\sin x = QP$, d. h. die Ordinate. Ändert sich der Winkel x , so beschreibt P den um O geschlagenen Einheitskreis, und die Ordinaten seiner Punkte liefern die Sinuswerte der zugeordneten Winkel. Wir lesen so aus Abb. 52 ohne weiteres die folgenden Eigenschaften der Sinusfunktion ab: Wächst der Winkel von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, so wächst sein Sinus von 0 bis 1; wächst der Winkel von $\frac{1}{2}\pi$ bis π , so fällt sein Sinus von 1 bis 0; wächst der Winkel von π bis $\frac{3}{2}\pi$, so fällt sein Sinus von 0 bis -1 ; wächst der Winkel von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π , so wächst sein Sinus von -1 bis 0. Nun wiederholen sich die Werte für jeden Umlauf. Hierbei ist der freie Schenkel so zu bewegen, wie es die Pfeilrichtung in Abb. 52 andeutet, also in dem dem Uhrzeiger entgegengesetzten Drehsinn, im Gegenzeigersinne, den man den positiven Drehsinn nennt. Die Drehung im Uhrzeigersinne heißt dann entsprechend negativer Drehsinn; die in diesem Sinne beschriebenen Winkel sind negative Winkel. Für zwei entgegengesetzt gleiche

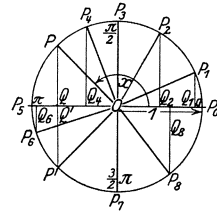


Abb. 52.

Winkel liegen die zugehörigen Punkte P und P' des Einheitskreises symmetrisch zur Abszissenachse; ihre Ordinaten und damit ihre Sinuswerte sind folglich entgegengesetzt gleich; d. h. es ist

$$\sin x = -\sin(-x).$$

Um das Schaubild der Funktion $y = \sin x$ zu erhalten, tragen wir auf der Abszissenachse die Winkel x im Bogenmaß ab. Da $r = 1$ ist, ist der zu einem Winkel x gehörige Bogen des Einheitskreises bereits die Abszisse x . Im Endpunkte Q der Abszisse tragen wir sodann als Ordinate QP den Sinuswert von x ab, den wir wiederum aus Abb. 52 entnehmen können. In Abb. 53 ist die Konstruktion durch-

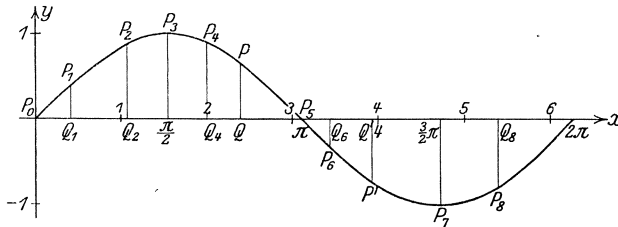


Abb. 53.

geführt; sie stellt den Bereich des ersten Umlaufes dar. Will man das Schaubild für noch größere Winkel und für negative Winkel herstellen, so braucht man nur den in Abb. 53 gefundenen Linienzug wiederholt nach rechts und nach links anzusetzen; Abb. 54 gibt das

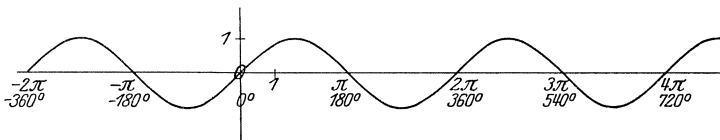


Abb. 54.

entsprechende Bild in verkleinertem Maßstabe; zugleich sind die Winkel auch im Gradmaß angegeben. Das Bild der Sinusfunktion ist also eine Wellenlinie; sie heißt die Sinuslinie.

Wenn wir den Differentialquotienten der Sinusfunktion $y = \sin x$ bilden wollen, so benutzen wir die in § 4 gegebene Vorschrift: Wir erteilen der unabhängigen Veränderlichen x einen Zuwachs Δx , so daß der neue Wert der unabhängigen Veränderlichen $x + \Delta x$ ist; der zugehörige Funktionswert ist dann von dem ursprünglichen um die Größe Δy verschieden, so daß die Gleichung besteht:

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x).$$

Hieraus ergibt sich für den Zuwachs der abhängigen Veränderlichen:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Da

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ist, so erhalten wir für Δy den Ausdruck

$$\Delta y = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

Daraus ergibt sich der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Der Differenzenquotient geht in den Differentialquotient über, wenn Δx sich dem Werte Null unbegrenzt nähert. Um den Grenzübergang vorzunehmen, schreiben wir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}. \quad (76)$$

Lassen wir nun Δx beliebig klein werden, so nähert sich der erste Faktor dem Werte $\cos x$, d. h.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \Delta x \right) = \cos x$. Der zweite Faktor dagegen strebt mit ab-

nehmendem Δx einem Grenzwerte zu, den wir folgendermaßen bestimmen können.

Ist (Abb. 55) α irgendein spitzer Winkel, so wollen wir um seinen Scheitel O den Einheitskreis schlagen; der zu α gehörige Bogen AB hat dann die Länge $AB = \alpha$ und der Kreisabschnitt AOB den Inhalt $J_1 = \frac{1}{2} \alpha$. Füllen wir von B auf OA das Lot BC , so ist $BC = \sin \alpha$ und $OC = \cos \alpha$, also der Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks OCB $J_2 = \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha$. Errichten wir schließlich in A auf OA das Lot, das OB in D schneiden möge, so ist OAD ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Kathete $OA = 1$ und dessen Kathete $AD = \operatorname{tg} \alpha$, dessen Inhalt also $J_3 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$ ist. Da nun für jeden beliebigen spitzen Winkel stets $J_2 < J_1 < J_3$ sein muß, so besteht die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha < \frac{1}{2} \alpha < \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha;$$

sie bleibt bestehen, wenn jeder der drei Ausdrücke mit demselben Faktor $\frac{2}{\sin \alpha}$ multipliziert wird; es ist also

$$\cos \alpha < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}.$$

D. h. der Quotient $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$ ist für spitze Winkel α stets in die Grenzen $\cos \alpha$ und $\frac{1}{\cos \alpha}$ eingeschlossen, so klein auch α sein möge. Nun

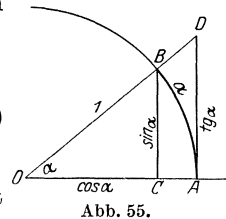


Abb. 55.

nähert sich aber, wenn α sich dem Werte Null nähert, sowohl $\cos \alpha$ als auch $\frac{1}{\cos \alpha}$ dem Werte 1; die Grenzen, zwischen denen $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$ liegt, werden demnach immer enger und fallen schließlich für $\lim \alpha = 0$ zusammen in den Wert 1. Folglich muß dann auch $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$ diesen Wert annehmen. Wir haben damit die wichtige Formel gewonnen:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1. \quad (77)$$

Da nun $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$ und $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ zueinander reziprok sind, muß auch

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \quad (77')$$

sein, und das ist gerade der Grenzwert, den wir suchten. Setzen wir nämlich $\alpha = \frac{\Delta x}{2}$, so erhalten wir

$$\lim_{\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \quad \text{oder auch} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

Aus 76) folgt dann:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

oder

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x. \quad (78)$$

Da der Differentialquotient gleich der Richtung der an das Schaubild gelegten Tangente ist, sind wir in der Lage, an die Sinuslinie Tangenten zu konstatieren. Für $x = 0$ ist

$$\sin x = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x = 1;$$

folglich schneidet die Sinuslinie die Abszissenachse im Nullpunkte wie überhaupt in den Punkten $x = 2k\pi$ unter 45° . Für $x = \pi$ ist

$$\sin x = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x = -1;$$

die Sinuslinie schneidet die Abszissenachse in den Punkten $x = (2k+1)\pi$ unter 135° . Man bestimme die Tangentenrichtungen für

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \dots$$

Da $\cos x = 0$ ist für $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, so hat die Sinuslinie und die Sinusfunktion für diese Werte Höchst- und Tiefstwerte, und zwar

entsprechen den Stellen $x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi$ Höchstpunkte ($y = 1$) und den Stellen $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ Tiefstpunkte ($y = -1$). Will man mit wenigen Punkten eine Sinuslinie möglichst genau zeichnen, so genügt es, die Punkte

$$0 \mid 0, \quad \frac{\pi}{3} \mid \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,866, \quad \frac{\pi}{2} \mid 1$$

und im ersten Punkte die Tangente unter 45° und im letzten die Tangente horizontal zu zeichnen; aus diesen Angaben läßt sich das erste Viertel der Sinuslinie mit einer Genauigkeit zeichnen, die in den meisten Fällen ausreicht (Abb. 56).

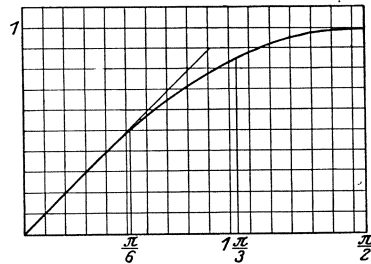


Abb. 56.

(45) Bei den übrigen Funktionen können wir uns wesentlich kürzer fassen. Da der Kosinus das Verhältnis der Abszisse zum Leitstrahl ist, so ist (s. Abb. 52) der Kosinus gleich der Abszisse des zugeordneten Punktes auf dem Einheitskreise. Für den Verlauf der Kosinusfunktion ergibt sich hieraus folgendes Gesetz:

Wächst der Winkel von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, so fällt sein Kosinus von $+1$ bis 0 ;
 „ „ „ „ $\frac{1}{2}\pi$ „ π , „ „ „ „ „ „ „ „ 0 „ -1 ;
 „ „ „ „ π „ $\frac{3}{2}\pi$, „ wächst „ „ „ „ -1 „ 0 ;
 „ „ „ „ $\frac{3}{2}\pi$ „ 2π , „ „ „ „ „ „ „ „ 0 „ $+1$.

Darüber hinaus wiederholt sich der Verlauf. Abb. 57 zeigt die Kosinuslinie; sie ist kongruent der Sinuslinie und um die Strecke $\frac{1}{2}\pi$ nach links verschoben. Man sagt: Die Kosinusfunktion eilt der Sinusfunktion um $\frac{1}{2}\pi$ voraus.

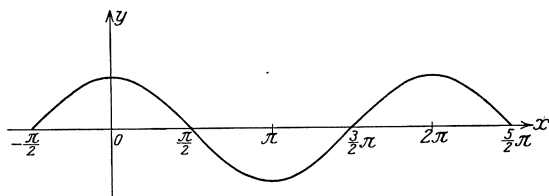


Abb. 57.

Da die Tangensfunktion das Verhältnis von Ordinate zu Abszisse ist, erhalten wir am schnellsten einen Einblick in ihren Verlauf, wenn wir die Abszisse des auf dem freien Schenkel von x liegenden Punktes P gleich der Längeneinheit wählen; dann ist die Ordinate gleich dem Tangenswert von x . Abb. 58 erläutert die Verhältnisse. Für Winkel, deren freie Schenkel die Senkrechte im Punkte E_1 nicht schneiden, muß man den Schenkel rückwärts verlängern (s. x_4 und x_5 in Abb. 58). Über den Verlauf der Tangensfunktion ergibt sich hieraus folgendes:

Wächst x von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, so wächst sein Tangens von 0 bis $+\infty$;
 „ „ „ „ $\frac{1}{2}\pi$ „ π , „ „ „ „ „ „ „ „ $-\infty$ „ 0 ,

worauf sich der Vorgang wiederholt. Das Bild der Tangensfunktion zeigt Abb. 59. Die Tangenslinie hat unendlich viele Asymptoten; es sind die in den Punkten $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ auf der Abszissenachse errichteten Lote.

Um zur Darstellung der Kotangensfunktion zu gelangen, wähle man den Punkt P auf

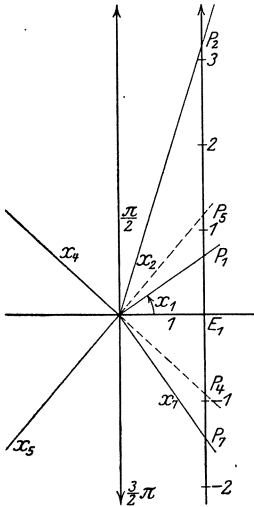


Abb. 58.

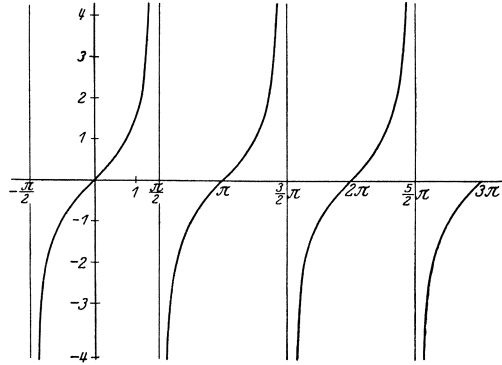


Abb. 59.

dem freien Schenkel oder seiner Verlängerung so, daß seine Ordinate gleich 1 ist; die Abszisse gibt dann den Kotangens des betreffenden Winkels.

Es gilt für den Verlauf der Kotangensfunktion:

Wächst der Winkel von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, so fällt sein Kotangens von $+\infty$ bis 0, wächst der Winkel von $\frac{1}{2}\pi$ bis π , so fällt sein Kotangens von 0 bis $-\infty$ usw.

Abb. 60 zeigt die Kotangenslinie.

Zur Bildung des Differentialquotienten der Funktion $y = \cos x$ können wir verschiedene Wege einschlagen.

Erstens können wir ähnlich verfahren wie bei der Funktion $y = \sin x$. Wir geben x einen Zuwachs Δx ; dann erhält y einen Zuwachs Δy , so daß $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$, also

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

ist. Dann ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x. \quad (79)$$

Zweitens können wir schreiben:

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin z, \quad \text{wobei} \quad z = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{ist.}$$

$$\text{Es ist} \quad \frac{dy}{dz} = \cos z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \frac{dz}{dx} = -1,$$

also

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \quad \text{wie oben.}$$

Drittens können wir schreiben:

$$y = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = z^{\frac{1}{2}}, \quad \text{wobei} \quad z = 1 - u^2 \quad \text{und} \quad u = \sin x \quad \text{ist.}$$

Es ist

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{2 \cos x}, \quad \frac{dz}{du} = -2u = -2 \sin x$$

und

$$\frac{du}{dx} = \cos x.$$

Also ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cos x}{dx} = \frac{1}{2 \cos x} \cdot (-2 \sin x) \cdot \cos x = -\sin x, \quad \text{w. o.}$$

Aus dem Differentialquotienten der Kosinusfunktion Tangentenkonstruktionen für die Kosinuslinie abzuleiten, sei dem Leser überlassen.

Um die Funktion $y = \operatorname{tg} x$ zu differenzieren, verfahren wir wie oben. Es ist

$$y + \Delta y = \operatorname{tg}(x + \Delta x),$$

$$\Delta y = \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin(x + \Delta x) \cos x - \cos(x + \Delta x) \sin x}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x} = \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cos x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x};$$

für $\lim \Delta x = 0$ wird $\cos(x + \Delta x) = \cos x$ und nach 77')

$$\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1, \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (80)$$

Ein anderer Weg ist der folgende: Es ist $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; nach der Quotientenregel ist:

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{w. O.}$$

Man überzeuge sich, daß auch die Tangenslinie die x -Achse unter 45° schneidet; ferner bestimme man für

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2}$$

die Richtung der Tangente. Warum muß die Tangenslinie beständig steigen? ($\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0!$)

Zum Differentialquotienten der Funktion $y = \operatorname{ctg} x$ wollen wir durch die Beziehung $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ gelangen: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} &= \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \\ \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} &= -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned} \quad (81)$$

Der Leser suche andere Wege, um $\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx}$ zu bilden ($\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$), und führe für die Kotangenslinie die gleichen Betrachtungen durch wie oben.

Es blieben noch die weniger wichtigen goniometrischen Funktionen $y = \sec x$ und $y = \operatorname{cosec} x$ zu behandeln; der Leser versuche sich selbstständig an ihnen, stelle ihren Verlauf fest, zeichne ihre Kurven und beweise mit Hilfe der Formeln

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{und} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

daß

$$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \text{und} \quad \frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad \text{ist.}$$

Für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen sollen nun einige Musterbeispiele folgen:

a) $y = \cos(px + q)$; Kettenregel: $y = \cos z$, $z = px + q$;
 $\frac{dy}{dz} = -\sin z = -\sin(px + q)$, $\frac{dz}{dx} = p$; also $\frac{dy}{dx} = -p \sin(px + q)$.

b) $y = x^3 \sin x$; Produktregel: $\frac{dy}{dx} = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x$.

$$c) \quad y = \operatorname{ctg}^n x; \quad y = z^n, \quad z = \operatorname{ctg} x; \quad \frac{dy}{dz} = n z^{n-1} = n \cdot \operatorname{ctg} x^{n-1} x;$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{n \operatorname{ctg}^{n-1} x}{\sin^2 x} = -n \operatorname{ctg}^{n-1} x (1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

$$d) \quad y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x; \quad \text{Summenregel: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ + \frac{1}{3} \cdot 3 \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} (1 + \operatorname{tg}^2 x) = \frac{1}{\cos^4 x}.$$

$$e) \quad y = \sin x \cdot \cos(\alpha - x);$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \cos(\alpha - x) + \sin x \cdot \sin(\alpha - x) = \cos(\alpha - 2x)$$

oder
$$y = \frac{1}{2} [\sin \alpha + \sin(2x - \alpha)];$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \cos(2x - \alpha) \cdot 2 = \cos(2x - \alpha) = \cos(\alpha - 2x) \text{ w. o.}$$

(46) Anwendungen der goniometrischen Funktionen: a) Ein Massenpunkt Q bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einem Kreise vom Halbmesser a und Mittelpunkt O ; er brauche zu einem Umlaufe, d. h. zum Wege $2\pi a$, die Zeit T^{sec} . Dann ist seine Geschwindigkeit $c = \frac{2\pi a}{T}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{c}{a} = \frac{2\pi}{T}$. Da er in T^{sec} einen Umlauf macht, legt er in 1^{sec} $n = \frac{1}{T}$ Umläufe zurück; n ist die Umlaufszahl oder Frequenz. Da $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ist, so ist $n = \frac{\omega}{2\pi}$. Der Massenpunkt Q beginne seine Bewegung an der Stelle A (Abb. 61); nach Verlauf von t^{sec} hat er einen Bogen AQ beschrieben, der sich aus der Proportion ergibt:

$$AQ : 2\pi a = t : T, \quad \text{so daß} \quad AQ = \frac{2\pi a}{T} \cdot t$$

ist. Der zugehörige Mittelpunktswinkel ϑ ergibt sich zu

$$\vartheta = \frac{AQ}{a} = \frac{2\pi}{T} \cdot t = \omega t.$$

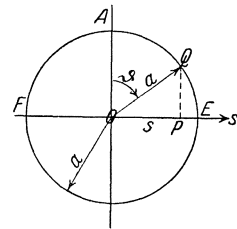


Abb. 61.

Wir wollen uns nun mit Q durch irgendeine mechanische Vorrichtung einen Punkt P auf folgende Weise verbunden denken: P bewege sich auf dem zu OA senkrechten Durchmesser EF , und PQ sei parallel zu OA , also senkrecht zu diesem Durchmesser. Dann beschreibt P , während Q gleichförmig auf dem Kreise läuft, eine hin- und hergehende Bewegung, die man als harmonische Bewegung bezeichnet, und zwar ist $OP = s = a \sin \vartheta$.

$$s = a \sin \frac{2\pi}{T} t = a \sin \omega t$$

ist die Gleichung der harmonischen Bewegung; sie gibt uns

an, welchen Abstand s der Punkt P zur Zeit t vom Mittelpunkte O hat. Nach T Sekunden kehrt der Bewegungszustand wieder; T heißt die Periode der harmonischen Bewegung. Die harmonische Bewegung wird also mathematisch durch eine Sinusfunktion beschrieben: Für $t = 0$ geht P durch den Mittelpunkt O ; für $t = \frac{1}{4} T$ ist $s = a$, P hat seine äußerste rechte Lage E erreicht und kehrt um; für $t = \frac{1}{2} T$ ist $s = 0$, P geht wieder durch O , aber in der entgegengesetzten Richtung wie zur Zeit $t = 0$; für $t = \frac{3}{4} T$ ist $s = -a$, P hat seine äußerste linke Lage F erreicht und kehrt nun um; für $t = T$ ist wiederum $s = a$, P befindet sich wieder in O , worauf sich der Vorgang wiederholt. — Wir wollen nun die Weg-Zeit-Kurve entwerfen (Abb. 62).

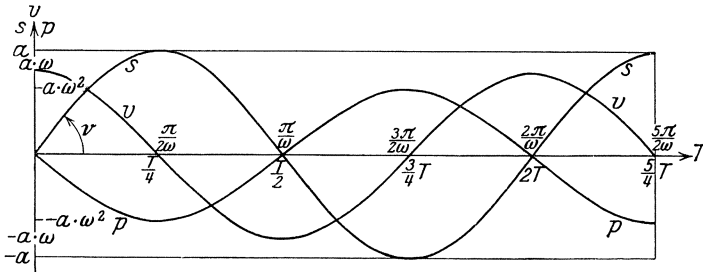


Abb. 62.

Sie ist eine Sinuslinie, allerdings nicht in dem strengen in (44) entwickelten Sinne; denn die reine Sinuslinie muß ja die Abszissenachse in O unter 45° schneiden. Das wird jetzt im allgemeinen nicht der Fall sein, da wir den Maßstab für T willkürlich wählen können, und infolgedessen die Kurve in O steil oder flach verlaufen kann. Um in O den Neigungswinkel ν zu berechnen, müssen wir $\frac{ds}{dt}$ bilden; es ist

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2\pi}{T} a \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

also, da in O $t = 0$ ist, $\operatorname{tg} \nu = \frac{2\pi}{T} a$. Nun ist in Abb. 62 $a = 5$ Längeneinheiten und $T = 24$ Längeneinheiten gewählt; also ist für diesen Fall

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{2\pi \cdot 5}{24} \approx 1,31,$$

woraus folgt $\nu \approx 53^\circ$.

Der Punkt P bewegt sich mit wechselnder Geschwindigkeit v ; um ihre Abhängigkeit von der Zeit zu erhalten, müssen wir uns erinnern, daß $v = \frac{ds}{dt}$ ist. Es ergibt sich

$$v = \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t = a \omega \cdot \cos \omega t.$$

Zur Zeit $t = 0$, zu der sich P in O befindet, ist $v = a\omega$ am größten; dann nimmt v ab, bis es zur Zeit $t = \frac{1}{4}T$ (P an der Stelle E) den Wert Null erreicht; nun wird v negativ, d. h. die Bewegung erfolgt in entgegengesetzter Richtung, und für $t = \frac{1}{2}T$ (P wieder in O) wird $v = -a\omega$; weiterhin verlangsamt sich die Bewegung wieder, und für $t = \frac{3}{4}T$ (P in F) wird wiederum $v = 0$, die Bewegung kehrt in die ursprüngliche Richtung um; und für $t = T$ (P in O) erreicht v wieder den Wert $a\omega$. In Abb. 62 ist zugleich das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eingezeichnet.

Zur Beschleunigung-Zeit-Beziehung gelangen wir dadurch, daß wir die Geschwindigkeit nach der Zeit differenzieren; es ist $p = \frac{dv}{dt}$, also in unserem Falle

$$p = -a \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin \frac{2\pi}{T} t = -a\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 s.$$

Für die harmonische Bewegung ist also die Beschleunigung und damit auch die sie verursachende Kraft, in jedem Augenblick proportional dem Ausschlage s aus der Ruhelage O , und zwar ist p stets nach O hin gerichtet (Beschleunigung-Zeit-Kurve s. Abb. 62).

Da $p = -\omega^2 s$ ist, ist die Beschleunigung-Weg-Kurve eine durch O (Abb. 63) und durch den zweiten und vierten Quadranten gehende Gerade, von der hier allerdings nur das zwischen $s = -a$ und $s = +a$ liegende Streckenstück praktische Bedeutung hat. Den größten Betrag hat die Beschleunigung für $s = \pm a$, wenn also P den größten Ausschlag hat; es ist dann

$$p_{\min}^{\max} = \mp a\omega^2.$$

Wir können auch die Beziehungen zwischen Geschwindigkeit und Weg und zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit aufstellen. Da nämlich $s = a \sin \omega t$, $v = a\omega \cos \omega t$ und $p = a\omega^2 \sin \omega t$ ist, so folgt unter Benutzung der Formel

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \frac{s^2}{a^2} + \frac{v^2}{(a\omega)^2} = 1.$$

für die Geschwindigkeit-Weg-Beziehung und

$$\frac{v^2}{(a\omega)^2} + \frac{p^2}{(a\omega^2)^2} = 1$$

für die Beschleunigung-Geschwindigkeits-Beziehung. Die zugehörigen Diagramme sind in beiden Fällen Ellipsen [s. (136) S. 374]. Im übrigen vgl. (235) S. 835 f.

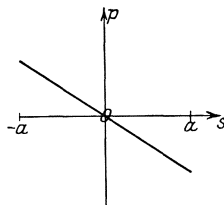


Abb. 63.

b) Die vorangehenden Abschnitte, insbesondere (44) und S. 109, zeigen: Wir können die Funktion $y = a \sin x$ auf doppelte Art zeichnerisch darstellen: Entweder im rechtwinkligen Koordinatensystem; dann ist das Bild eine Sinuslinie mit dem größten Ausschlage a (für $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$) bzw. $-a$ (für $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$); man nennt a die Amplitude der Sinuslinie oder in Anlehnung an die Entwicklungen v. S. 109 die Schwingungsweite; die Periode ist 2π . Oder man

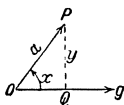


Abb. 64.

zeichnet (Abb. 64) einfach einen Pfeil $OP = a$, der mit einem durch O gehenden festen Strahle g den Winkel x einschließt; das von P auf g gefällte Lot QP gibt dann die Größe $y = a \sin x$. Denkt man sich den Pfeil OP umlaufend, so erhält man zu jedem Winkel x das zugehörige y . OP ist eine gerichtete Größe; d. h. zu ihrer völligen Bestimmung muß man außer ihrer Länge $OP = a$ auch ihre Richtung, die durch den Winkel x festgelegt ist, kennen; eine solche Größe heißt ein Vektor. Man kann sich in diesem Sinne also die Funktion $y = a \sin x$ durch Umlauf des Vektors a veranschaulichen; der jeweilige Winkel x , den a mit dem Anfangsstrahle g einschließt, wird die Phase genannt. Diese überaus einfache Darstellung findet in der Elektrotechnik weitgehende Anwendung.

Wir wollen uns zwei Sinusfunktionen denken $y_1 = a \sin x$ und $y_2 = b \sin(x - \varphi)$. Beide haben die gleiche Periode 2π ; dagegen hat y_1 die Amplitude a , während y_2 die Amplitude b hat. Auch haben beide nicht zu gleicher Zeit dieselbe Phase; die Phase von y_2 ist nämlich stets um die konstanten Winkel φ kleiner als die von y_1 . Der Vektor OP_1

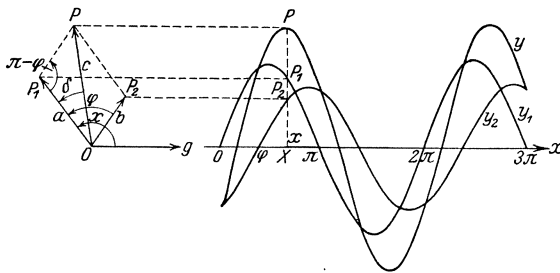


Abb. 65 a und b.

eilt dem Vektor OP_2 um diesen Winkel φ voraus (Abb. 65 a); φ heißt die Phasendifferenz der beiden Sinusfunktionen. Abb. 65 b zeigt die zugehörigen beiden Sinuslinien, die in einfachem Zusammenhang mit Abb. 65 a

stehen. Denkt man sich nämlich die beiden Vektoren so umlaufend, daß sie stets den Winkel φ miteinander einschließen, so geben sie bei einer bestimmten, durch den Winkel x zwischen OP_1 und g gekennzeichneten Stellung ein y_1 und ein y_2 , die wir nur in Abb. 65 b über der zugehörigen Abszisse x abzutragen haben, um je einen Punkt der beiden Sinuslinien zu erhalten.

Nun bilden wir durch Summieren beider Sinusfunktionen eine neue Funktion:

$$y = y_1 + y_2 = a \sin x + b \sin(x - \varphi).$$

Von der Funktion y können wir jetzt schon aussagen, daß sie ebenfalls periodisch ist und die Periode 2π haben muß, da dies von den Summanden gilt. Wir gewinnen in Abb. 65 b Punkte dieser Kurve, indem wir die zu einem bestimmten x gehörigen Werte von y_1 und y_2 addieren;

$$XP = XP_1 + XP_2.$$

Um uns über die Art der Kurve $y = a \sin x + b \sin(x - \varphi)$ klarzuwerden, nehmen wir einige Umformungen vor. Es ist nämlich aus der Periodizität und ihrem Bilde in Abb. 65 b zu vermuten, daß die Summenkurve wieder eine Sinuslinie ist; als solche müßte sie eine Gleichung von der Form haben

$$y = c \sin(x - \delta),$$

wobei die Amplitude c und die Phasendifferenz δ sich durch die Größen a , b , φ ausdrücken lassen müssen. Unter Anwendung der Formel

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

können wir für y schreiben

$a \sin x + b \sin x \cos \varphi - b \cos x \sin \varphi = (a + b \cos \varphi) \cdot \sin x - b \sin \varphi \cos x$; andererseits ist:

$$y = c \sin(x - \delta) = c \cos \delta \cdot \sin x - c \sin \delta \cdot \cos x.$$

Sollen beide Ausdrücke für jedes beliebige x denselben Wert ergeben, also identisch gleich sein, so müssen die Beiwerte von $\sin x$ und ebenso die von $\cos x$ übereinstimmen; d. h. es müssen die beiden Gleichungen bestehen:

$$c \cos \delta = a + b \cos \varphi \quad \text{und} \quad c \sin \delta = b \sin \varphi.$$

Damit haben wir aber zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten c und δ erhalten, die wir noch aufzulösen haben: Wir quadrieren und addieren sie und bekommen unter Verwendung der Formel

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

das Ergebnis

$$c^2 (\sin^2 \delta + \cos^2 \delta) = (a + b \cos \varphi)^2 + (b \sin \varphi)^2 = a^2 + 2ab \cos \varphi + b^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi);$$

$$\text{a) } c^2 = a^2 + 2ab \cos \varphi + b^2;$$

andererseits ist

$$\text{b) } \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} = \frac{b}{c}.$$

Die beiden Formeln a) und b) lassen nun eine sehr einfache geometrische Deutung zu (Abb. 65 a). c ist nämlich (Kosinussatz) gleich der Mittelkraft OP aus den Vektoren a und b , die den Winkel φ miteinander bilden; δ ist (Sinussatz) der Winkel POP_1 zwischen c und a .

Durch Übereinanderlagerung zweier Sinuslinien (Summierung zweier Sinusfunktionen) von gleicher Periode erhält man also wieder eine Sinuslinie (Sinusfunktion), von derselben Periode. Ferner bekommt man die Schwingungsweite c der Summenlinie, wenn man die Schwingungsweiten a und b der Elementarfunktionen geometrisch addiert, d. h. nach Größe und Richtung aneinandersetzt, und der Phasenunterschied δ der Summenschwungung gegen die erste Schwungung ist der Winkel, den der Vektor c mit dem Vektor a einschließt. Mit anderen Worten: Sinusschwungungen von gleicher Periode lassen sich geometrisch addieren.

c) Die Theorie des elektrischen Wechselstromes lehrt, daß die Stromstärke i und die elektromotorische Kraft p Funktionen von gleicher Periode sind. Befolgen beide das reine Sinusgesetz, so ist

$$i = \Im \cdot \sin x \quad \text{und} \quad p = \mathfrak{P} \sin(x + \varphi),$$

wobei φ den Voreilungswinkel (Phasenunterschied) der elektromotorischen Kraft gegen die Stromstärke bedeutet. Abb. 66 zeigt die

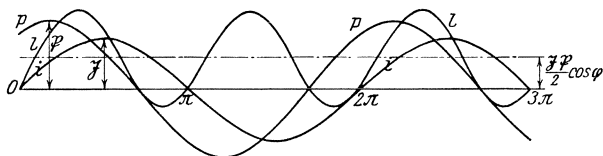


Abb. 66.

entsprechenden Kurven. Ferner lehrt die Theorie, daß die Augenblicksleistung des Wechselstromes sich durch die Gleichung $l = i \cdot p$ berechnet. Wir wollen die Abhängigkeit der Leistung l von der Größe x und das Schaubild dieser Beziehung ermitteln. Zu diesem Zwecke schreiben wir unter Verwendung der Formel

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \\ l &= \Im \cdot \mathfrak{P} \cdot \sin x \cdot \sin(x + \varphi) = \frac{\Im \mathfrak{P}}{2} [\cos \varphi - \cos(2x + \varphi)] \\ &= \frac{\Im \mathfrak{P}}{2} \cos \varphi - \frac{\Im \mathfrak{P}}{2} \cdot \cos(2x + \varphi). \end{aligned}$$

Das erste Glied $\frac{\Im \mathfrak{P}}{2} \cos \varphi$ ist eine Konstante, das zweite Glied $\frac{\Im \mathfrak{P}}{2} \cdot \cos(2x + \varphi)$ ist das Produkt aus der Konstanten $\frac{\Im \mathfrak{P}}{2}$ und der Kosinusfunktion $\cos(2x + \varphi)$. Man erhält also die Leistung, indem

man von dem konstanten Werte $\frac{\mathfrak{S}\mathfrak{P}}{2} \cos \varphi$ jedesmal den Wert der Sinusfunktion $\frac{\mathfrak{S}\mathfrak{P}}{2} \cos(2x + \varphi)$ subtrahiert. Die Leistungskurve selbst ergibt sich dadurch, daß man die Sinuslinie $y = \frac{1}{2} \mathfrak{S}\mathfrak{P} \cos(2x + \varphi)$ um die x -Achse umlegt und die so erhaltene Kurve um das Stück $\frac{\mathfrak{S}\mathfrak{P}}{2} \cos \varphi$ im Sinne der positiven y -Achse verschiebt. Hervorzuheben ist, daß die Periode der Leistungsfunktion nicht dieselbe ist wie die von Stromstärke und elektromotorischer Kraft, sondern nur halb so groß, bei uns also $= \pi$, da infolge des Faktors 2 vor x sich der Vorgang schon nach einer Vermehrung von x um π wiederholt. Die Frequenz der Leistungskurve ist also das Doppelte der Strom- bzw. Spannungsfrequenz. — Für die Konstruktion der Kurve sei noch bemerkt, daß sie durch die Schnittpunkte sowohl der i - als auch der p -Kurve mit der x -Achse gehen muß, da je ein Produkt verschwindet, wenn wenigstens ein Faktor gleich Null wird.

(47) d) Eine Walze von 0,5 m Halbmesser, 2 m Länge und 1 t Gewicht schwimmt so auf Wasser, daß ihre Achse wagerecht liegt; wie tief taucht sie ein? Abb. 67 stelle den Querschnitt der Walze dar, a möge die Wasseroberfläche andeuten. Die Eintauchtiefe h ist durch den Mittelpunktswinkel x des eintauchenden Kreisabschnittes be-

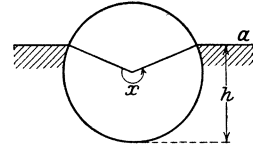


Abb. 67.

stimmt; denn es ist $h = 0,5(1 - \cos \frac{x}{2})$. Wir werden daher erst x bestimmen. Nach dem Archimedischen Prinzip ist das Gewicht des schwimmenden Körpers gleich dem Gewichte der verdrängten Wassermenge; letztere ist aber ein zylindrischer Körper, dessen Höhe 2 m und dessen Grundfläche ein Kreisabschnitt vom Halbmesser 0,5 m und dem Mittelpunktswinkel x ist. Die Grundfläche hat also unter Benutzung des Bogenmaßes für x den Inhalt $\frac{(0,5)^2}{2} (x - \sin x) m^2$, demnach ist das Volumen des verdrängten Wassers

$$2 \cdot \frac{(0,5)^2}{2} (x - \sin x) m^3 = 0,25(x - \sin x) m^3,$$

und folglich das Gewicht $0,25(x - \sin x) t$. Zur Bestimmung von x erhalten wir nun die Gleichung

$$0,25(x - \sin x) = 1 \quad \text{oder} \quad x - \sin x = 4.$$

Das ist eine transzendente Gleichung, die keine exakte Auflösung zuläßt; wir müssen ein Annäherungsverfahren einschlagen. Zuvor wollen wir uns indes einen Überschlagswert der Lösung x verschaffen; wir schreiben zu diesem Zwecke die obige Gleichung in der Form $\sin x = x - 4$. Wir setzen $y_1 = \sin x$ und $y_2 = x - 4$ und suchen

denjenigen Wert von x , für den $y_1 = y_2$ ist; das Bild der ersten Funktion ist die Sinuslinie, das der zweiten eine unter 45° geneigte Gerade, die auf der y -Achse das Stück -4 abschneidet (Abb. 67 a).

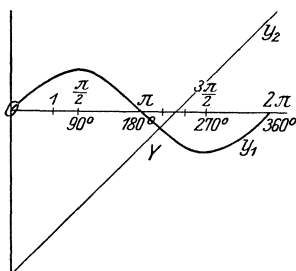


Abb. 67 a.

Beide Kurven schneiden sich im Punkte Y ; also ist seine Abszisse ungefähr $3,5$, oder im Gradmaß 200° . Zur Durchführung der Regula falsi (27), die wir zuerst verwenden wollen, formen wir die Gleichung um in

$$f(x) = x - \sin x - 4 = 0.$$

Setzen wir

$$x_1 = 200^\circ = 3,491,$$

so ergibt sich

$$f(x_1) = 3,491 + 0,342 - 4 = -0,167.$$

Da $f(x)$ an dieser Stelle mit wachsendem x wachsen muß (weshalb?), setzen wir weiter

$$x_2 = 210^\circ = 3,665$$

und bekommen

$$f(x_2) = 3,665 + 0,500 - 4 = 0,165.$$

Während x_2 zu groß ist, ist x_1 zu klein, und zwar sind in unserem Falle die Abweichungen der Werte $f(x)$ von 0 ihrem absoluten Betrage nach fast gleich. Wir wählen daher als neues x $x_3 = 205^\circ = 3,57793$; hieraus folgt:

$$f(x_3) = 3,57793 + 0,42262 - 4 = +0,00055.$$

Zwar ist x_3 zu groß; aber die Abweichung ist überaus gering. Für

$$x_4 = 204^\circ = 3,56047$$

ergibt sich

$$f(x_4) = 3,56047 + 0,40674 - 4 = -0,03279.$$

Nach der Regula falsi bekommen wir die Verbesserung durch Ansetzen der Proportion

$$\delta : 1^\circ = 0,03279 : 0,03334 = 0,975,$$

also

$$\delta = 0,975^\circ = 59'.$$

Versuchen wir jetzt mit

$$x_5 = 204^\circ 59' = 3,57764,$$

so bekommen wir

$$f(x_5) = 3,57764 + 0,42236 - 4 = 0,00000.$$

Demnach ist der mit fünfstelligen Tafeln zu erreichende genaueste Wert

$$x = 204^\circ 59'$$

und die zugehörige Eintauchtiefe

$$h = 0,769 \text{ m.}$$

Nach der Newtonschen Methode (27) gestaltet sich die Lösung folgendermaßen: Wir gehen von dem Werte $x_1 = 200^\circ = 3,491$ aus; die abzuziehende Korrektur ist:

$$h_1 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{x_1 - \sin x_1 - 4}{1 - \cos x_1} = \frac{3,491 + 0,342 - 4}{1 + 0,940} = -\frac{0,167}{0,940} = -0,081.$$

Wir wählen demnach

$$x_2 = 3,57200 = 204^\circ 40';$$

hierzu gehört

$$h_2 = \frac{3,57200 + 0,41734 - 4}{1 + 0,90875} = -\frac{0,01066}{1,90875} = -0,00561$$

und hieraus $x_3 = 3,57761 = 204^\circ 59'$ wie oben.

e) Als weiteres Beispiel wollen wir die Bewegung des Kreuzkopfes beim zentrischen Schubkurbelgetriebe behandeln (Abb. 68). O sei die linke Totlage, so daß also $OM = l + r$ ist, wobei r der Kurbelradius und l die Länge der Schubstange ist. Der Kurbelradius bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω , so daß der Kurbelwinkel $\vartheta = \omega \cdot t$ ist, wobei die Zeit t vom Augenblicke der linken Totlage an gemessen ist. Zur Zeit t beträgt die Entfernung des Kreuzkopfes K von O :

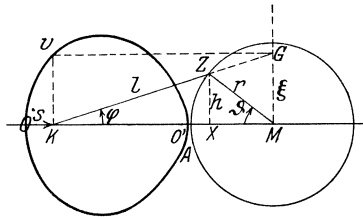


Abb. 68.

$$s = OA + AM - KX - XM = l + r - l \cos \varphi - r \cos \vartheta,$$

wobei φ der Winkel ist, den in diesem Augenblicke die Pleuelstange KZ mit OM bildet. Er ist von ϑ abhängig, und zwar ist, da

$$h = XZ = l \sin \varphi = r \sin \vartheta \quad \text{ist,} \quad \sin \varphi = \frac{r}{l} \sin \vartheta.$$

Der Weg, den der Kreuzkopf in der Zeit t zurückgelegt hat, ist also

$$\begin{aligned} s &= r(1 - \cos \vartheta) + l \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^2 \vartheta} \right) \\ &= l \left[q(1 - \cos \vartheta) + 1 - \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \vartheta} \right], \end{aligned}$$

worin $\frac{r}{l} = q$ und $\vartheta = \omega t$ ist. Die Bewegung des Kreuzkopfes ist naturgemäß eine ungleichförmige; sie ist wie die harmonische Bewegung [Beispiel a)] eine hin und her gehende Bewegung; der Kreuzkopf bewegt sich zwischen den beiden Totlagen O ($s = 0$) und O' ($s = 2r$). Auch die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes ist dauernd veränderlich; wir finden sie, indem wir $v = \frac{ds}{dt}$ bilden,

$$v = \frac{ds}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega, \quad \frac{ds}{d\vartheta} = l \left[q \sin \vartheta - \frac{-2q^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{2\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \vartheta}} \right];$$

also

$$v = \omega \cdot \left[r \sin \vartheta + \frac{r \cdot r \sin \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \vartheta}} \right] = \omega \left[h + \frac{h \cdot (l + r - s')}{s' - s} \right],$$

wenn zur Abkürzung $OX = s'$ gesetzt wird. Da der Klammerausdruck $= \frac{h(l+r-s)}{s'-s}$ ist, wird schließlich

$$\frac{ds}{d\vartheta} = \omega h \frac{l+r-s}{s'-s} = \omega \xi,$$

wobei $\xi = MG$ (Abb. 68) ist; letzteres folgt aus der Proportion

$$\xi : h = KM : KX = (l + r - s) : (s' - s).$$

Wir können somit auf sehr einfache Weise uns ein Geschwindigkeit-Weg-Diagramm entwerfen: Wir brauchen nur in K auf OO' das Lot $KV = MG = \xi$ abzutragen; dann ist V ein Punkt dieser Kurve. Die Geschwindigkeit erreicht nach ihr einmal ein Maximum; es tritt ein, wenn die Beschleunigung $p = \frac{dv}{dt} = 0$ wird. Aus

$$v = \omega l q \left[\sin \vartheta + \frac{q \sin \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \vartheta}} \right]$$

folgt durch Differenzieren

$$\begin{aligned} p &= \omega^2 l q \left[\cos \vartheta - q \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta (-2q^2 \sin \vartheta \cos \vartheta)}{2\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \vartheta}^3} + \frac{q(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \vartheta}} \right] \\ &= \omega^2 l q \left[\cos \vartheta + q \frac{q^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + (1 - q^2 \sin^2 \vartheta)(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \vartheta}^3} \right] \\ &= \omega^2 l q \left[\cos \vartheta + q \frac{q^2 \sin^4 \vartheta + \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \vartheta}^3} \right]. \end{aligned}$$

Die Beschleunigung p wird gleich Null, wenn $[\]$ verschwindet; das ergibt:

$$\cos \vartheta = - \frac{q^3 \sin^4 \vartheta - 2q \sin^2 \vartheta + q}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \vartheta}^3}.$$

Durch Quadrieren erhält man

$$\begin{aligned} (1 - \sin^2 \vartheta) (1 - q^2 \sin^2 \vartheta)^3 &= (q^3 \sin^4 \vartheta - 2q \sin^2 \vartheta + q)^2, \\ 1 - 3q^2 \sin^2 \vartheta + 3q^4 \sin^4 \vartheta - q^6 \sin^6 \vartheta - \sin^2 \vartheta + 3q^2 \sin^4 \vartheta - 3q^4 \sin^6 \vartheta \\ &\quad + q^6 \sin^8 \vartheta \\ &= q^6 \sin^8 \vartheta - 4q^4 \sin^6 \vartheta + 2q^4 \sin^4 \vartheta + 4q^2 \sin^4 \vartheta - 4q^2 \sin^2 \vartheta + q^2 \end{aligned}$$

und durch Zusammenfassen

$$q^4(1 - q^2) \sin^6 \vartheta - q^2(1 - q^2) \sin^4 \vartheta - (1 - q^2) \sin^2 \vartheta + (1 - q^2) = 0$$

oder

$$q^4 \sin^6 \vartheta - q^2 \sin^4 \vartheta - \sin^2 \vartheta + 1 = 0.$$

[s. a. S. 58, Gleichung a); $\lambda = \frac{1}{q}$].

f) Auf einer schiefen Ebene E vom Neigungswinkel α liegt eine Last Q ; sie soll durch eine Kraft K aufwärts bewegt werden, welche mit der Normalen zu E einen Winkel β einschließt. Wie groß muß K mindestens sein, damit eine Bewegung stattfindet, wenn der Reibungsfaktor längs der schiefen Ebene $=\mu$ ist? Wie muß man β wählen, damit K möglichst klein wird? (Abb. 69.)

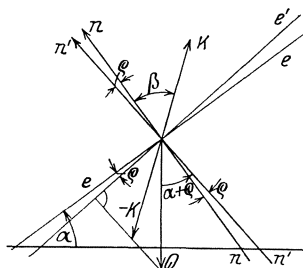


Abb. 69.

Wäre keine Reibung vorhanden, so müßte K so beschaffen sein, daß seine Komponente in der schiefen Ebene entgegengesetzt gerichtet und mindestens gleich ist der Komponente von Q in der schiefen Ebene, also $K \sin \beta = Q \sin \alpha$. Infolge der Reibung muß aber K noch einen Widerstand überwinden, der proportional ist dem Normaldruck, den das Kräftesystem (QK) auf die Ebene ausübt. Der Normaldruck von Q auf die Ebene ist $Q \cdot \cos \alpha$; er muß indessen vermindert werden um einen Betrag, der gleich der Normalkomponente von K zur Ebene ist, also um $K \cos \beta$, so daß der wirkliche Normaldruck des Kräftesystems auf die Ebene $Q \cos \alpha - K \cos \beta$ beträgt. Diese Größe ergibt, mit dem Reibungsfaktor μ multipliziert, die Reibungskraft

$$R = \mu(Q \cos \alpha - K \cos \beta).$$

Damit eine Aufwärtsbewegung stattfindet, muß demnach K mindestens gleich dem Werte sein, der sich aus der Gleichung ergibt:

$$K \cdot \sin \beta = Q \cdot \sin \alpha + \mu(Q \cos \alpha - K \cos \beta)$$

oder

$$K = Q \cdot \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sin \beta + \mu \cos \beta}. \quad \text{a)}$$

Damit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst. Um die Frage nach dem günstigsten Winkel β zu beantworten, wollen wir bedenken, daß K am kleinsten wird, wenn der Nenner in (a) möglichst groß wird [β kommt nur im Nenner vor]. Damit nun aber der Ausdruck $\sin \beta + \mu \cos \beta$ ein Maximum wird, muß sein Differentialquotient nach β verschwinden; zur Bestimmung des günstigsten Winkels β erhalten wir demnach die Gleichung

$$\cos \beta - \mu \sin \beta = 0;$$

aus ihr folgt

$$\operatorname{ctg} \beta = \mu. \quad \text{b)}$$

Aus (b) ergibt sich

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}},$$

und demnach durch Einsetzen in (a):

$$K_{\min} = Q \cdot \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Führt man den Reibungswinkel ϱ ein, der durch die Gleichung $\mu = \operatorname{tg} \varrho$ definiert ist, so gestaltet sich die Entwicklung wesentlich übersichtlicher; außerdem liefert sie eine einfache Konstruktion für K . Es wird dann

$$K = Q \cdot \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \varrho \cos \alpha}{\sin \beta + \operatorname{tg} \varrho \cos \beta},$$

woraus man durch Erweitern mit $\cos \varrho$ erhält:

$$K = Q \cdot \frac{\sin \alpha \cos \varrho + \cos \alpha \sin \varrho}{\sin \beta \cos \varrho + \cos \beta \sin \varrho}$$

oder

$$K = Q \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\sin(\beta + \varrho)}. \quad a')$$

Nun läßt sich K sehr bequem zeichnerisch ermitteln. Dreht man nämlich das rechtwinklige Kreuz en in Abb. 69 um den Winkel ϱ in die Lage $e'n'$ und fällt vom Endpunkt von Q das Lot auf e' , so schneidet es die Verlängerung des freien Schenkels von β in einem Punkte, dessen Abstand von O die Kraft K liefert, denn Q schließt mit n' den Winkel $\alpha + \varrho$ und K mit n' den Winkel $\beta + \varrho$ ein, woraus sich mit Leichtigkeit die Beziehung (a') ergibt. Ohne daß wir zu differenzieren brauchten, läßt dieser Ausdruck erkennen, daß sein Kleinstwert eintritt, wenn $\beta + \varrho = \frac{\pi}{2}$ ist. Also wird K am kleinsten, wenn $\beta = \frac{\pi}{2} - \varrho$ ist, wenn also K in die Richtung e' fällt, und zwar ist der Minimalwert

$$K_{\min} = Q \cdot \sin(\alpha + \varrho). \quad b')$$

Die Anordnung ist also am günstigsten, wenn die bewegende Kraft mit der schiefen Ebene den Reibungswinkel einschließt.

Die Reibung hat auf die Aufwärtsbewegung denselben Einfluß, als ob die Ebene um den Reibungswinkel stärker geneigt wäre.

Zur selbständigen Behandlung seien die folgenden Fragen vorgeschlagen: Wie groß muß K mindestens sein, damit Q unter Überwindung der Reibung sich auf der schiefen Ebene abwärts bewegt? Welches ist hier der günstigste Winkel β ?

Wie sind die entsprechenden Verhältnisse auf der horizontalen Ebene? Zahlenbeispiel: Beim langsamen Schleifen von Gußeisen auf nasser Eichenholzunterlage ist $\mu = 0,65$. Für Fuhrwerke auf schlechten Straßen sei $\mu = 0,07$; unter welchem Winkel ist die Wagendeichsel zu neigen?

g) Eine flachgängige Schraube habe den Neigungswinkel α ; auf ihr möge eine Last Q befördert werden; wie groß muß die in Q

angreifende, die Schraube drehende Kraft K mindestens sein, wenn eine Aufwärtsbewegung von Q stattfinden soll? Der Reibungsfaktor sei μ .

Der Normaldruck des Systems ist $Q \cos \alpha + K \sin \alpha$, folglich ist die Reibung $\mu(Q \cos \alpha + K \sin \alpha)$, und es ist bei der Aufwärtsbewegung eine

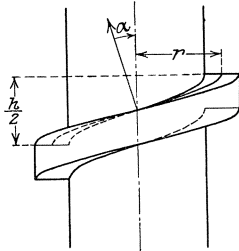


Abb. 70 a.

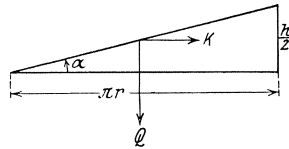


Abb. 70 b.

Gesamtkraft $Q \sin \alpha + \mu(Q \cos \alpha + K \sin \alpha)$ zu überwinden. Andererseits beträgt die in die Schraubenfläche fallende Komponente von K $K \cos \alpha$; diese muß bei Gleichgewicht gleich der obigen Gesamtkraft sein. Wir erhalten also die Gleichung

$$K \cos \alpha = Q \sin \alpha + \mu(Q \cos \alpha + K \sin \alpha),$$

aus welcher sich ergibt

$$K = Q \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}.$$

Führen wir wieder den Reibungswinkel ϱ durch die Gleichung $\operatorname{tg} \varrho = \mu$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} K &= Q \cdot \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \varrho \cos \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{tg} \varrho \sin \alpha} = Q \frac{\sin \alpha \cos \varrho + \cos \alpha \sin \varrho}{\cos \alpha \cos \varrho - \sin \alpha \sin \varrho} = Q \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos(\alpha + \varrho)} \\ &= Q \operatorname{tg}(\alpha + \varrho). \end{aligned}$$

Also auch bei der Schraube hat die Reibung die Wirkung, als ob der Neigungswinkel der Schraube um den Reibungswinkel vergrößert worden wäre.

Bei einer vollen Umdrehung hat die Kraft K den Weg $2\pi r$ zurückgelegt, wobei r der mittlere Schraubenradius ist, es ist also die Arbeit $2\pi r K$ aufgewendet worden. Dabei ist Q um die Ganghöhe $h = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha$ gehoben, also die Arbeit $Q \cdot h = 2\pi r Q \operatorname{tg} \alpha$ verbraucht worden. Folglich ist der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\text{gewonnene Arbeit}}{\text{aufgewendete Arbeit}} = \frac{h \cdot Q}{2\pi r K} = \frac{2\pi r \operatorname{tg} \alpha \cdot Q}{2\pi r \cdot Q \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)}$$

oder

$$\eta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \varrho).$$

Der Wirkungsgrad wird um so günstiger, je größer η ist. Ist $\varrho = 0$, ist also keine Reibung vorhanden, so ist $\eta = 1$, d. h. es wird ebensoviel

Arbeit gewonnen, als aufgewendet worden ist. Bei Vorhandensein der Reibung ist die Frage von Bedeutung: Wie hat man den Neigungswinkel α der Schraube zu wählen, damit der Wirkungsgrad η möglichst groß wird, und wie groß ist η im günstigsten Falle? Um diese Fragen zu beantworten, bilden wir den Differentialquotienten

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \varrho)}{\cos^2 \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin^2(\alpha + \varrho)}$$

und setzen ihn gleich Null. Wir erhalten

$$\frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \varrho)}{\cos^2 \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin^2(\alpha + \varrho)} = 0, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \varrho) \sin^2(\alpha + \varrho) = \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha,$$

$$\sin(\alpha + \varrho) \cos(\alpha + \varrho) = \sin \alpha \cos \alpha, \quad \sin 2(\alpha + \varrho) = \sin 2\alpha.$$

Es ist also entweder

$$2(\alpha + \varrho) = 2\alpha \quad \text{oder} \quad 2(\alpha + \varrho) = \pi - 2\alpha.$$

Der erste Fall widerspricht der Voraussetzung, da er $\varrho = 0$ zur Folge hat. Im zweiten Falle ergibt sich die Lösung

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}.$$

Für diesen Neigungswinkel α ist also der Wirkungsgrad am größten; er berechnet sich zu

$$\eta_{\max} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}\right).$$

(48) h) In einem künstlichen Wasserlaufe (Graben) fließe das Wasser allenthalben mit konstanter Geschwindigkeit c ; der Wasserquerschnitt $F = \frac{Q}{c}$ ist dann ebenfalls konstant; Q ist hierbei die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt fließende Wassermenge; der Wasserspiegel ist der Grabensohle parallel.

Das Wasserspiegel- (Sohlen-) Gefälle ist abhängig von dem Bewegungs- (Reibungs-) Widerstand w , der berechnet wird mittels der Beziehung

$$w = \varrho \frac{U}{F} L \frac{c^2}{2g};$$

hierin bedeuten:

U den benetzten Querschnittsumfang,

F den Wasserquerschnitt,

L die Länge der Wasserführung,

c die mittlere Wassergeschwindigkeit,

ϱ eine von den Abmessungen, der Geschwindigkeit und insbesondere von der Rauigkeit der umfassenden Wandungen abhängige Erfahrungsgröße.

Falls Q und c gegeben sind, folgen für $F = \frac{Q}{c}$ unzählig viele Lösungen; bei Wasserzuführungen für Kraftanlagen sind jene Querschnittsabmessungen die günstigsten, für die das Transportgefälle w (das Gefälle, das einzig dazu aufgebraucht wird, um den Widerstand zu überwinden) ein Minimum wird. Wird die an sich geringe Abhängigkeit der Reibungszahl ϱ von den Querschnittsabmessungen vernachlässigt, so tritt der Kleinstwert von w ein, wenn U ein Kleinstwert ist.

Wir wollen unter diesem Gesichtspunkte einige Querschnittsformen näher untersuchen:

a) Rechteckquerschnitt: Es ist $U = b + 2t$, wenn b die Breite und t die Tiefe bedeuten, wobei $b \cdot t = F$ ist. Damit wird $U = b + \frac{2F}{b}$ ein Minimum, wenn

$$\frac{dU}{db} = 1 - \frac{2F}{b^2} = 0, \quad \text{also} \quad b = \sqrt{2F} \quad \text{und} \quad t = \sqrt{\frac{F}{2}}$$

ist. Also

$$b = 2t; \quad U_{\min} = 2\sqrt{2F}.$$

b) Trapezquerschnitt (im Abtrag oder Auftrag liegend):

$$U = b + \frac{2t}{\sin \alpha}, \quad F = (b + t \operatorname{ctg} \alpha) t.$$

Daher

$$U = \frac{F}{t} - t \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2t}{\sin \alpha}.$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{F}{t^2} - \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2}{\sin \alpha} = 0, \quad t = \sqrt{\frac{F \sin \alpha}{2 - \cos \alpha}},$$

also

$$b = 2\sqrt{\frac{F}{\sin \alpha (2 - \cos \alpha)}} (1 - \cos \alpha).$$

$$U_{\min} = 2\sqrt{F \cdot \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha}}.$$

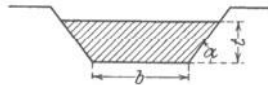


Abb. 71 a.

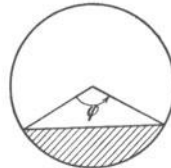


Abb. 71 b.

c) Teilweise gefüllter Kreisquerschnitt vom Halbmesser r :

$$U = r \cdot \varphi, \quad F = \frac{r^2}{2} (\varphi - \sin \varphi),$$

also

$$r = \sqrt{\frac{2F}{\varphi - \sin \varphi}}, \quad U = \sqrt{2F \cdot \frac{\varphi^2}{\varphi - \sin \varphi}}.$$

U wird ein Minimum, wenn $\frac{\varphi^2}{\varphi - \sin \varphi}$ ein Minimum wird; wir kommen durch Differenzieren zu der Gleichung

$$(\varphi - \sin \varphi) \cdot 2\varphi - \varphi^2(1 - \cos \varphi) = 0.$$

$\varphi = 0$ scheidet aus; also muß sein $\varphi(1 + \cos \varphi) = 2 \sin \varphi$. Setzt man $\varphi = 2\psi$, so geht die Gleichung über in die folgende

$$\cos \psi (\psi - \sin \psi) = 0,$$

aus der sich als einzig brauchbare Lösung $\cos \psi = 0$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$ ergibt. Der Halbkreis ist demnach der günstigste Kreisquerschnitt; für ihn ist

$$r = \sqrt{\frac{2F}{\pi}}, \quad U_{\min} = \sqrt{2\pi F}.$$

Wir gehen über zur Bestimmung des Transportgefälles w , und zwar möge sein $Q = 4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, $L = 500 \text{ m}$, $c = 1,25 \text{ ms}^{-1}$.

Der Kanal habe Rechtecksquerschnitt und sei in Backsteinmauerwerk ausgeführt; in diesem Falle gilt nach der älteren Bazinschen Formel:

$$\frac{Q}{2g} = 0,00024 + 0,0006 \frac{U}{F}.$$

In unserem Zahlenbeispiele ist

$$F = \frac{Q}{c} = 3,2 \text{ m}^2 = 2t^2, \quad \text{demnach} \quad t = \sqrt{1,6} \text{ m} = 1,2659 \text{ m},$$

$$b = 2,530 \text{ m} \quad \text{und} \quad \frac{Q}{2g} = 0,00024 + 0,00006 \cdot \frac{5,060}{3,2} = 0,000335.$$

Damit wird

$$w = 0,000335 \cdot \frac{5,060}{3,2} \cdot 500 \cdot 1,25^2 \approx 0,414 \text{ m}.$$

Bei einem Gesamtgefälle von 4 m würde also das Transportgefälle 10,4% ausmachen; das ist verhältnismäßig viel. Werden höchstens 5% zugelassen, so folgt aus

$$0,05 \cdot 4 = \frac{Q}{2g} \cdot \frac{b + 2t}{bt} \cdot 500 \cdot \left(\frac{4}{bt}\right)^2 = \frac{Q}{2g} \cdot \frac{4t}{2t^2} \cdot 500 \cdot \frac{16}{4t^4}$$

mit dem Schätzwerte $\frac{Q}{2g} = 0,000335$,

$$t^5 = \frac{0,000335 \cdot 2 \cdot 500 \cdot 4}{0,05 \cdot 4} = 6,7, \quad t = 1,46 \text{ m}, \quad b = 2,93 \text{ m}. \quad F = 4,28 \text{ m}^2.$$

Die Kontrolle liefert $\frac{U}{F} = \frac{5,85}{4,28} = 1,37$, gegenüber $\frac{5,06}{3,2} = 1,58$ vorher und

$$\frac{Q}{2g} = 0,00024 + 0,00006 \cdot 1,37 = 0,000322,$$

also $\frac{0,000335 - 0,000322}{0,000335} = 0,039$ oder 3,9% weniger, so daß genauer folgt

$$t^5 = 0,961 \cdot 6,7 = 6,44 \quad \text{und} \quad t = 1,45 \text{ m}, \quad b = 2,90 \text{ m}.$$

Ist die mittlere Geschwindigkeit nicht gegeben, so ist auch F unbekannt; die Auflösung nach c liefert

$$c = \sqrt{\frac{2g}{\varrho}} \cdot \sqrt{\frac{w}{L} \cdot \frac{F}{U}} = \sqrt{\frac{2g}{\varrho}} \cdot \sqrt{iR},$$

wobei $i = \frac{w}{L}$ das relative Transportgefälle, und

$$R = \frac{F}{U} \text{ den hydraulischen Radius}$$

bezeichnet. Hieran anschließend wollen wir nun die

Aufgabe lösen: Für welchen Mittelpunktswinkel φ wird bei bekanntem $i = \frac{w}{L}$ die Geschwindigkeit c am größten?

Der Größtwert von c tritt ein, wenn $R = \frac{F}{U}$ ein Maximum ist. Nun ist $R = \frac{r^2(\varphi - \sin \varphi)}{2 \cdot r \varphi}$ am größten, wenn $1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi}$ Maximum ist; wir kommen damit zu der Gleichung

$$\varphi \cos \varphi - \sin \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \varphi = \varphi, \quad f(\varphi) \equiv \operatorname{tg} \varphi - \varphi = 0,$$

einer transzendenten Gleichung, die sich nur durch Annäherung lösen läßt. Wir wollen die Regula falsi (27) anwenden. Da $\varphi = 0$ und $\varphi > 360$ praktisch nicht in Betracht kommen können, liegt die Lösung zwischen 180° und 270° (s. Abb. 71 c). Als ersten Annäherungswert wählen wir $\varphi_1 = 260^\circ$, $\operatorname{arc} \varphi_1 = 4,5379$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = 5,6713$; also ist $f(\varphi_1) = +1,1334$; φ_1 ist zu groß;

$$\varphi_2 = 257^\circ; \quad f(\varphi_2) = -0,1539;$$

$$\varphi_3 = 258^\circ; \quad f(\varphi_3) = +0,2017;$$

$$u^\circ : 1^\circ = 0,1539 : 0,3556 = 0,433, \quad u = 27',$$

$$\varphi_4 = 257^\circ 27'; \quad f(\varphi_4) = -0,0012;$$

$$\varphi_5 = 257^\circ 28'; \quad f(\varphi_5) = +0,0043, \quad \varphi = 257^\circ 27' 13''.$$

$$c_{\max} = \sqrt{\frac{2g}{\varrho}} \cdot \sqrt{i} \cdot 0,781.$$

Dagegen wird die Durchflußmenge ein Maximum, wenn

$$Q = F \cdot c = \sqrt{\frac{2g}{\varrho}} \cdot \sqrt{i} \cdot \frac{r^2}{2} (\varphi - \sin \varphi) \cdot \sqrt{\frac{r}{2} \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi}\right)},$$

d. h. also, wenn $\frac{(\varphi - \sin \varphi)^3}{\varphi}$ ein Maximum wird. Durch Differenzieren erhält man für den zugehörigen Winkel φ die Gleichung

$$\varphi \cdot 3(\varphi - \sin \varphi)^2 \cdot (1 - \cos \varphi) - (\varphi - \sin \varphi)^3 = 0.$$

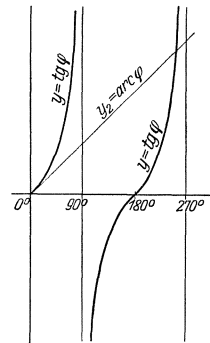


Abb. 71 c.

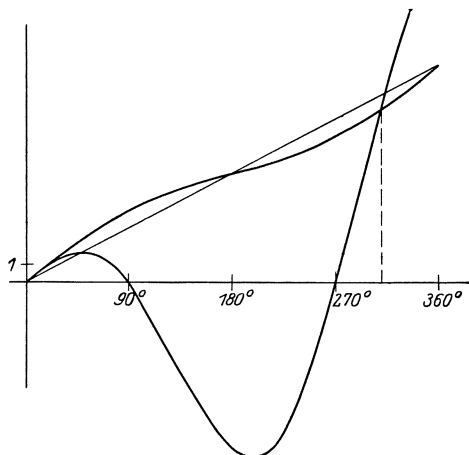


Abb. 71 d.

Die Lösung $\varphi = 0$ scheidet aus praktischen Gründen wiederum aus; es muß sein

$$3\varphi(1 - \cos \varphi) - (\varphi - \sin \varphi) = 0$$

oder

$$2\varphi - 3\varphi \cos \varphi + \sin \varphi = 0.$$

Wir setzen zur Auflösung

$$f(\varphi) \equiv 2\varphi - 3\varphi \cos \varphi + \sin \varphi = 0$$

und

$$y_1 = 2\varphi + \sin \varphi,$$

$$y_2 = 3\varphi \cos \varphi.$$

Abb. 71 d zeigt beide Kurven und läßt erkennen, daß sie sich

ungefähr bei $\varphi = 310^\circ$ überschneiden; diesen Wert benützen wir als ersten Näherungswert. Es ist

	arc φ	log arc φ	log cos φ	log (3 arc φ cos φ)	2 arc φ	sin φ	3 arc φ cos φ	$f(\varphi)$	
	5,410 52	0,733 24	9,808 07	1,018 43	10,821 04	-0,766 04	10,433 5	-0,378 5	} $u' : 60'$ } = 346 : 2075 } $u = 10'$
	5,393 07	0,731 84	9,798 87	1,007 83	10,786 14	-0,777 15	10,181 9	-0,172 9	
	5,375 62	0,730 43	9,789 34	0,996 89	10,751 24	-0,788 01	9,928 6	+0,034 6	
10'	5,378 53	0,730 66	9,790 95	0,998 73	10,757 06	-0,786 22	9,970 8	$\pm 0,000 0$	

Der genaue Wert von φ ist demnach $308^\circ 10' 0''$; also

$$Q_{\max} = 2,333 r^2 \sqrt{\frac{2g}{c}} i r.$$

§ 10. Die zyklometrischen Funktionen.

(49) Vertauschen wir in $y = \sin x$ x und y , so erhalten wir $x = \sin y$; Lösen wir diese Gleichung nach der Abhängigen y auf, so heißt dies wir suchen denjenigen Winkel y (in Bogenmaß) dessen Sinus den gegebenen Wert x hat. Wir schreiben dies folgendermaßen:

$$y = \arcsin x \tag{82}$$

und sprechen „ y ist gleich Arkussinus von x “, d. h. y ist derjenige Winkel im Bogenmaß, dessen Sinus gleich x ist. Einige Beispiele mögen dies erläutern:

1. Wir wollen $\arcsin \frac{1}{2}$ berechnen. Nach dem Obigen suchen wir das Bogenmaß desjenigen Winkels, dessen Sinus gleich $\frac{1}{2}$ ist; es ist der Winkel $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Folglich ist $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Nun gibt es aber

noch mehr Winkel, deren Sinus gleich $\frac{1}{2}$ ist; nämlich ein jeder, der sich von $\frac{\pi}{6}$ ($\equiv \text{arc } 30^\circ$) um ganze Vielfache von 2π ($\equiv \text{arc } 360^\circ$) unterscheidet. Folglich ist ganz allgemein $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, wobei k irgendeine ganze Zahl bedeutet. Aber auch damit ist die Menge der Winkel $\arcsin \frac{1}{2}$ nicht erschöpft; denn da auch $\sin \frac{5}{6}\pi$ ($\equiv \sin 150^\circ$) = $\frac{1}{2}$ ist, so bekommen wir unter Berücksichtigung der Periodizität als eine zweite Winkelgruppe $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.

2. Es ist zu zeigen, daß

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

bzw.

$$= \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \text{ ist.}$$

3. Wie groß sind

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right), \arcsin\left(+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \arcsin 0, \arcsin 1?$$

4. Wir wollen noch $\arcsin 0,7$ berechnen. Zu diesem Zwecke suchen wir erst einmal den spitzen Winkel in Gradmaß auf, dessen Sinus gleich 0,7 ist. Wir finden in der Tabelle $44^\circ 25' 37''$; sein Bogenmaß ist 0,77539. Folglich ist einerseits $\arcsin 0,7 = 0,77539 + 2k\pi$. Da aber $\sin(\pi - 0,77539) = \sin 2,36620$ ebenfalls gleich 0,7 ist, so ist vollständig $\arcsin 0,7 = 0,77539 + 2k\pi$ bzw. $= 2,36620 + 2k\pi$.

Wir erkennen also: Die Arkussinusfunktion ist eine unendlich vieldeutige Funktion, da sie, wenn ihr überhaupt ein Wert zukommt, unendlich viele Werte annehmen kann. Damit sie reelle Werte hat, muß die unabhängige Veränderliche x zwischen den Grenzen $-1 \leq x \leq +1$ liegen. [Vgl. hierzu die Verhältnisse bei der Funktion $y = \sqrt{x}$ (37) S. 87 ff.]

Um zur Arkussinuskurve zu gelangen, machen wir von dem Satze Gebrauch, daß die Bilder inverser Funktionen zueinander bezüglich der 45° -Linie symmetrisch sind, wonach die Kurve $y = \arcsin x$ also das Spiegelbild zur Kurve $y = \sin x$ bezüglich dieser Linie ist. Abb. 72 zeigt die Arkussinuslinie. Wir sehen, daß zu einem bestimmten x von der Eigenschaft $-1 < x < +1$ unendlich viele Kurvenpunkte gehören;

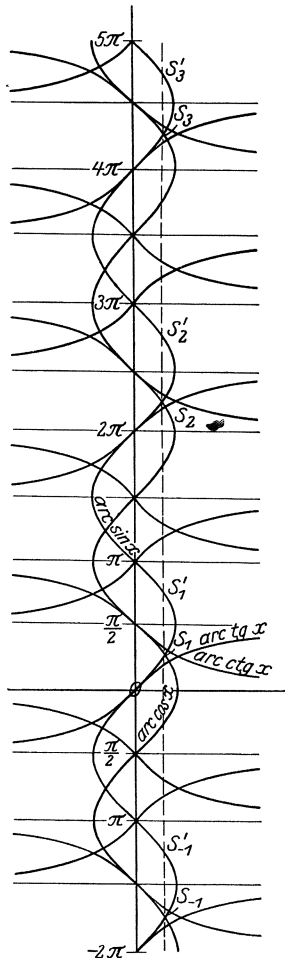


Abb. 72.

die Ordinaten der Punkte $\dots S_{-1}, S_1, S_2, \dots$ und ebenso die Ordinaten der Punkte $\dots S'_{-1}, S'_1, S'_2 \dots$ unterscheiden sich um je 2π . Zu Werten von x , deren absoluter Betrag >1 ist, gehören keine Kurvenpunkte. Die Vieldeutigkeit der Arkussinusfunktion kann zu Unklarheiten führen. Man hat sich daher, um Eindeutigkeit zu erzielen, geeinigt, denjenigen Funktionswert als Hauptwert zu wählen, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, falls nicht besondere Umstände zu einer anderen Festsetzung zwingen. Man nennt diesen Bereich den Bereich der Hauptwerte der Arkussinusfunktion.

Nach den Erörterungen über $y = \arcsin x$ dürften die Ausdrücke $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ und $y = \operatorname{arctctg} x$ (gesprochen „Arkuskosinus von x “, „Arkustangens von x “, „Arkuskotangens von x “) ohne weiteres verständlich sein. Wir können uns daher kurz fassen und sagen:

Unter $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arctctg} x$ versteht man das Bogenmaß desjenigen Winkels y , dessen Kosinus bzw. Tangens bzw. Kotangens den Wert x hat. Wegen der Periodizität der goniometrischen Funktionen $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ sind diese Funktionen unendlich vieldeutig. Während aber zur Arkuskosinusfunktion (ebenso wie zur Arkussinusfunktion) nur für Werte x von der Eigenschaft $-1 \leq x \leq +1$ reelle Funktionswerte gehören, sind bei der Arkustangens- und bei der Arkuskotangensfunktion jedem beliebigen x Funktionswerte zugeordnet. Die folgenden Beispiele wird der Leser hiernach ohne Mühe nachprüfen können:

1. $\arccos \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ bzw. $= \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$,
2. $\operatorname{arctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi + k\pi$,
3. $\operatorname{arctctg} 2 = 0,46365 + k\pi$.

Die Bilder der Arkuskosinus-, Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion sind mit dem der Arkussinusfunktion in Abb. 72 vereinigt. Die Hauptwerte liegen bei der Arkustangensfunktion zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, bei der Arkuskosinus- und bei der Arkuskotangensfunktion dagegen zwischen 0 und π .

(50) Die Differentialquotienten der zyklometrischen Funktionen werden auf folgendem Wege gefunden:

Wenn $y = \arcsin x$, so ist $x = \sin y$, also

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

dennach ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

oder

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (83)$$

Wenn $y = \arccos x$, so ist $x = \cos y$, also

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - x^2};$$

demnach

$$\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (84)$$

Wenn $y = \operatorname{arctg} x$, so ist $x = \operatorname{tg} y$, also

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2;$$

demnach

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}. \quad (85)$$

Wenn $y = \operatorname{arctg} x$, so ist $x = \operatorname{ctg} y$, also

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 y} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 y) = -(1 + x^2);$$

demnach

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (86)$$

Die Formeln 83) bis 86) sind in mehrfacher Hinsicht eigentümlich; auffällig ist zunächst, daß zwar die Funktionen transzendent, ihre Differentialquotienten aber algebraische Funktionen von x sind, und zwar die Differentialquotienten von $\arcsin x$ und $\arccos x$ irrationale, die Differentialquotienten von $\operatorname{arctg} x$ und $\operatorname{arctg} x$ sogar rationale Funktionen. Bisher mußten wir den Eindruck gewinnen, als ob die algebraischen und die transzendenten Funktionen zwei große Gruppen bildeten, zwischen denen keine Verbindung und kein Übergang bestünde; und das ist auch so, solange wir uns auf das Gebiet der elementaren Mathematik beschränken. Die Infinitesimalrechnung dagegen reißt in gewissem Sinne diese Schranke nieder und gliedert die zyklometrischen und dadurch mittelbar auch die goniometrischen Funktionen an die algebraischen Funktionen an; wir werden bald sehen, daß Ähnliches auch für die logarithmische Funktion zutrifft.

Eine zweite Eigentümlichkeit besteht darin, daß die Arkussinus- und die Arkuskosinusfunktion zwei Differentialquotienten haben, die einander entgegengesetzt gleich sind, d. h. daß

$$\frac{d \arcsin x}{dx} + \frac{d \arccos x}{dx} = 0.$$

ist, und daß das Gleiche für die Arkustangens- und die Arkuskotangensfunktion gilt:

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} + \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = 0.$$

Diese Merkwürdigkeit erklärt sich aber sofort, wenn wir bedenken, daß — bei Beschränkung auf die Hauptwerte — für ein bestimmtes x die Beziehungen bestehen:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad \text{arctg } x + \text{arcctg } x = \frac{\pi}{2}. \quad (87)$$

Sie folgen aus Abb. 72; man kann sie aber auch aus den goniometrischen Formeln

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{und} \quad \text{tg } \alpha = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

ableiten.

Differenziert man die Gleichungen 87) nach x , so erhält man unter Beachtung des Umstandes, daß die rechten Seiten Konstanten sind, die obigen Gleichungen

$$\frac{d \arcsin x}{dx} + \frac{d \arccos x}{dx} = 0, \quad \text{bzw.} \quad \frac{d \text{arctg } x}{dx} + \frac{d \text{arcctg } x}{dx} = 0,$$

siehe oben.

Einige Beispiele als Anleitung für Differentiation verwickelterer Funktionen:

1. $y = \arcsin \frac{x}{a}$; Kettenregel: $y = \arcsin z$, $z = \frac{x}{a}$;

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{a};$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

2. $y = \text{arctg } \frac{x}{a}$; auf gleichem Wege erhält man $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x^2+a^2}$.

3. $y = \arcsin \frac{5x-2}{3} = \arcsin z$, $z = \frac{5x-2}{3}$;

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{5x-2}{3}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5+20x-25x^2}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{5}{3};$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{5}{1+4x-5x^2}}.$$

4. $y = \arccos \frac{1}{x} = \arccos z$, $z = \frac{1}{x}$;

$$\frac{dy}{dz} = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}.$$

5. $y = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; durch Verwendung der Summen-, Produkt- und Kettenregel erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

6. $y = \arctg \frac{x+2}{3} = \arctg z, \quad z = \frac{x+2}{3};$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+2}{3}\right)^2} = \frac{9}{x^2 + 4x + 13}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{3},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^2 + 4x + 13}.$$

Die technische Bedeutung der zyklometrischen Funktionen tritt besonders in der Integralrechnung zutage; wir werden uns daher dort noch mit ihnen zu beschäftigen haben.

Erwähnt sei noch, daß man die goniometrischen und die zyklometrischen Funktionen unter dem gemeinsamen Namen Kreisfunktionen zusammenfaßt.

§ 11. Die logarithmische Funktion.

(51) Aus der elementaren Mathematik wissen wir, daß man unter dem a -Logarithmus von x diejenige Zahl y versteht, mit der man a potenzieren muß, um x zu erhalten, in Formeln

$${}^a\log x = y, \quad \text{wenn} \quad a^y = x \quad (88)$$

ist. a heißt hierbei die Grundzahl (Basis), und alle Logarithmen, die auf dieselbe Grundzahl bezogen sind, bilden ein Logarithmensystem; ferner ist x der Logarithmand oder Numerus und y der Logarithmus. Bei gegebener Grundzahl ist also der Logarithmus y eine Funktion des Numerus x .

Beispiele:

$$\begin{array}{llll} {}^2\log 128 & = 7; & \text{denn} & 2^7 = 128, \\ {}^4\log 128 & = \frac{7}{2}; & \text{,,} & 4^{\frac{7}{2}} = (\sqrt{4})^7 = 128, \\ {}^2\log 2 & = 1; & \text{,,} & 2^1 = 2, \\ {}^2\log 1 & = 0; & \text{,,} & 2^0 = 1, \\ {}^2\log \frac{1}{64} & = -6; & \text{,,} & 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}, \\ {}^2\log \sqrt[3]{16} & = \frac{4}{3}; & \text{,,} & 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}, \\ {}^{10}\log 1000 & = 3; & \text{,,} & 10^3 = 1000, \\ {}^{100}\log 1000 & = \frac{3}{2}; & \text{,,} & 100^{\frac{3}{2}} = 1000, \\ {}^{10}\log \frac{1}{10000} & = -4; & \text{,,} & 10^{-4} = \frac{1}{10000}, \\ {}^{10}\log 10 & = 1; & \text{,,} & 10^1 = 10, \\ {}^{10}\log 1 & = 0; & \text{,,} & 10^0 = 1, \\ {}^{10}\log \sqrt[3]{10000} & = \frac{4}{3}; & \text{,,} & 10^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{10000}. \end{array}$$

Die Logarithmen mit der Grundzahl 10 heißen die gemeinen oder Briggsschen Logarithmen; sie finden im praktischen Rechnen wegen ihrer hierfür besonders günstigen Eigenschaften ausschließlich Verwendung. Man schreibt sie unter Weglassung der Grundzahl 10 kurzweg $\log x$ statt ${}^{10}\log x$.

Um die Beziehungen zwischen den Logarithmen zweier Systeme aufzudecken, wollen wir folgenden Weg einschlagen: Es sei a die Grundzahl des einen, b die des anderen Systems, so daß $y_a = {}^a\log x$ und $y_b = {}^b\log x$ die Logarithmen desselben Numerus x in diesen beiden Systemen sind. Nach Definition ist dann

$$a^{y_a} = x \quad \text{und} \quad b^{y_b} = x, \quad \text{also} \quad a^{y_a} = b^{y_b}.$$

Nehmen wir erst von beiden Seiten den a -Logarithmus, so erhalten wir als neue Gleichung (unter Verwendung der Regel vom Logarithmus einer Potenz ${}^a\log u^n = n \cdot {}^a\log u$)

$$y_a = y_b \cdot {}^a\log b \quad \text{oder} \quad {}^a\log x = {}^b\log x \cdot {}^a\log b; \quad 89 a)$$

nehmen wir ferner von beiden Seiten den b -Logarithmus, so erhalten wir

$$y_a \cdot {}^b\log a = y_b \quad \text{oder} \quad {}^a\log x \cdot {}^b\log a = {}^b\log x. \quad 89 b)$$

Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen bekommen wir

$$y_a = y_b \cdot {}^a\log b = \frac{y_b}{{}^b\log a},$$

also die neue Beziehung ${}^a\log b \cdot {}^b\log a = 1$. Wir können unsere Ergebnisse in den Satz zusammenfassen:

Um aus dem a -Logarithmus einer Zahl ihren b -Logarithmus zu berechnen, muß man den a -Logarithmus dieser Zahl entweder mit dem b -Logarithmus von a multiplizieren oder durch den a -Logarithmus von b dividieren; der a -Logarithmus von b und der b -Logarithmus von a sind zueinander

reziprok. Die Logarithmen zweier Systeme sind zueinander proportional.

Beispiel: Es ist ${}^{10}\log 100 = 2$; folglich ist
 ${}^2\log 100 = 2 \cdot {}^2\log 10$
 $= 2 \cdot {}^{10}\log 2 = 2 \cdot 0,30103$
 $= 2 \cdot 3,32193 = 6,64386$.

Abb. 73 zeigt die zu $y = {}^{10}\log x$ und $y = {}^2\log x$ gehörigen Kurven; sie

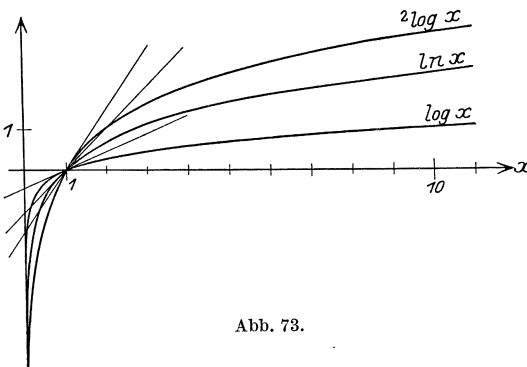


Abb. 73.

haben beide die negative y -Achse zu Asymptoten (warum?) und verlaufen gänzlich rechts von der y -Achse (warum?).

(52) Zur Bildung des Differentialquotienten der Funktion $y = {}^a\log x$ geben wir x einen Zuwachs Δx , so daß y einen Zuwachs Δy erhält, und zwar besteht die Gleichung $y + \Delta y = {}^a\log(x + \Delta x)$. Demnach ist $\Delta y = {}^a\log(x + \Delta x) - {}^a\log x$, und mit Hilfe der Formel

$${}^a\log u - {}^a\log v = {}^a\log \frac{u}{v}$$

können wir schreiben:

$$\Delta y = {}^a\log \frac{x + \Delta x}{x} = {}^a\log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Ist $x \neq 0$, so nähert sich mit unbegrenzt abnehmendem Δx die Klammer dem Werte 1, also die rechte Seite und damit auch Δy dem Werte Null. Wir bekommen demnach den Satz:

Die Logarithmenfunktion ist für jeden Wert der unabhängigen Veränderlichen mit Ausnahme von $x = 0$ eine stetige Funktion.

Durch Dividieren mit Δx bekommen wir den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot {}^a\log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Die rechte Seite formen wir in folgender Weise um:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot {}^a\log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot {}^a\log \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right];$$

die Richtigkeit dieses Schrittes folgt aus der Formel $n \cdot {}^a\log x = {}^a\log(x^n)$. Nehmen wir den Grenzübergang für $\Delta x \rightarrow 0$ vor, so bleibt der erste Faktor $\frac{1}{x}$ davon unberührt. Was wird aber aus dem Faktor

$${}^a\log \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]?$$

Diese Frage wird sich beantworten lassen, wenn wir den Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

bestimmt haben

Wenn wir setzen $\frac{x}{\Delta x} = n$, so wird $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} n = \infty$, und die Betrachtung läuft hinaus auf die Untersuchung des Ausdruckes $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Für bestimmte endliche Werte von n nimmt $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bestimmte endliche Werte an, wie die folgende Tabelle zeigt.

n	= 1	2	3	4	5
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	= 2	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2,37037$	$\left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2,44141$	$\left(\frac{6}{5}\right)^5 = 2,48832$
n	= 10	100	1000		
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	= 2,594	2,705	2,72		

Die letzten drei Werte sind mit Hilfe fünfstelliger Logarithmen berechnet worden, so genau, als es auf diesem Wege möglich ist. Die für $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ gefundenen Zahlen zeigen das Bestreben, sich einer Zahl zu nähern, die ungefähr bei 2,7 liegt. Während nämlich die ersten Zahlen verhältnismäßig rasch zunehmen, findet von $n = 5$ bis $n = 10$ nur eine Zunahme von 0,106, für das große Intervall von $n = 10$ bis $n = 100$ nur eine Zunahme von 0,101, und für das noch wesentlich größere Intervall von $n = 100$ bis $n = 1000$ sogar nur eine Zunahme von höchstens 0,02 statt. Eine mathematisch begründete Untersuchung von $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ wollen wir nun vornehmen.

Wir entwickeln — unter der Annahme, daß n eine natürliche Zahl sei — $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nach dem binomischen Satze (36):

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 \\ &+ \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-(n-2))(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \dots (n-1) \cdot n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Das allgemeine Glied der rechten Seite ist

$$\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k;$$

der Zähler enthält k Faktoren, $\left(\frac{1}{n}\right)^k$ desgleichen; wir können demnach, ohne den Wert des Gliedes zu ändern, jeden Faktor des Zählers durch n dividieren, und kommen für das k te Glied somit auf die Form

$$\frac{1}{k!} \cdot 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{1}{1!} \cdot 1 + \frac{1}{2!} \cdot 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \cdot 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-2}{n}\right) \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Wenn jetzt n über alle Grenzen hinauswächst, so nähert sich $\frac{r}{n}$, wobei $r < n$ irgendeine feste endliche Zahl ist, immer mehr dem Werte Null, also der Ausdruck $1 - \frac{r}{n}$ immer mehr dem Werte 1, und es wird

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \quad 90)$$

Um die unendliche Summe

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

wirklich zu berechnen, bilden wir

$$\begin{array}{l} 1 = 1,000\,0000, \\ \frac{1}{1!} = 1,000\,0000, \\ \frac{1}{2!} = 0,500\,0000, \\ \frac{1}{3!} = 0,166\,6667, \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{4!} = 0,041\,6667, \\ \frac{1}{5!} = 0,008\,3333, \\ \frac{1}{6!} = 0,001\,3889, \\ \frac{1}{7!} = 0,000\,1984, \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{1}{8!} = 0,000\,0248, \\ \frac{1}{9!} = 0,000\,0028, \\ \frac{1}{10!} = 0,000\,0003, \end{array}$$

also ist

$$1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{10!} = 2,718\,282;$$

ein genauerer Wert ist

$$e = 2,718\,281\,828\,459.$$

Man bezeichnet diese Zahl, die in der höheren Mathematik eine hervorragende Rolle spielt, mit dem Buchstaben e ; e ist eine transzendente Zahl, d. h. es gibt keine algebraische Gleichung mit rationalen Koeffizienten, welche e als Lösung hat; in dieser Beziehung gleicht sie der uns aus der Elementarmathematik bekannten Ludolphschen Zahl $\pi = 3,141\,59$.

Jetzt kehren wir zur Ableitung des Differentialquotienten der Funktion $y = {}^a\log x$ zurück. Wir hatten (S. 133) gefunden, daß

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot {}^a\log \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \text{ ist; folglich ist } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot {}^a\log e,$$

oder

$$\frac{d^a\log x}{dx} = \frac{1}{x} \cdot {}^a\log e. \quad 91)$$

Es ist also beispielsweise für den gemeinen Logarithmus, da

$$\log e = \log 2,71828 = 0,434294 \text{ ist,}$$

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log e = 0,434294 \cdot \frac{1}{x}$$

und entsprechend

$$\frac{d^2\log x}{dx} = \frac{1}{x} \cdot {}^2\log e = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log e}{\log 2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{0,434294}{0,301030} = 1,44269 \cdot \frac{1}{x}.$$

Diese beiden Formeln können wir benutzen, um an die Kurven in Abb. 73 die Tangenten zu legen; so hat z. B. im Punkte $1/0$ die Kurve $y = \log x$ die Neigung $0,434294$, die Kurve $y = {}^2\log x$ dagegen die Neigung $1,44269$.

(53) Wählt man die obige Zahl e als Grundzahl eines Logarithmensystems, so wird, da ${}^e\log e = 1$ (weil $e^1 = e$) ist, $\frac{d^e\log x}{dx} = \frac{1}{x}$, wodurch sich die

Gleichung 91) wesentlich vereinfacht. Aus diesem Grunde bezeichnet man das Logarithmensystem mit der Grundzahl $e = 2,7182818\dots$ als das natürlichen Logarithmensystem und nennt ${}^e\log x$ den natürlichen Logarithmus von x , kurz geschrieben $\lg x$ oder $\ln x$ (**logarithmus naturalis**); es ist also

$$\ln x = \lg x = {}^e\log x \quad 92)$$

und ferner

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}, \quad 93)$$

in Worten: Der Differentialquotient der Funktion $y = \ln x$ ist einfach der reziproke Wert der unabhängigen Veränderlichen.

Will man zu einer gegebenen Zahl den natürlichen Logarithmus bestimmen, so kann man etwa von den gemeinen Logarithmen ausgehen, von denen uns ja Tafeln zur Verfügung stehen, und nach 89) setzen:

$$\text{oder} \quad \left. \begin{array}{l} \ln x = \log x : \log e \quad \text{oder} \quad \ln x = \log x : 0,434294 \\ \ln x = 2,30259 \cdot \log x \end{array} \right\} 94a)$$

Andererseits ist für den Übergang von den natürlichen zu den gemeinen Logarithmen

$$\log x = \ln x \cdot \log e = \ln x : \ln 10 \quad \text{oder} \quad \log x = 0,434294 \cdot \ln x. \quad 94b)$$

Beispiele: 1. Es soll der natürliche Logarithmus von 7 berechnet werden:

$$\ln 7 = 2,30259 \cdot \log 7 = 2,30259 \cdot 0,84510 = 1,94591,$$

$$2. \ln \pi = 2,30259 \cdot \log \pi = 2,30259 \cdot 0,49715 = 1,14473,$$

$$3. \ln x = 3,45926, \log x = 3,45926 \cdot 0,434294 = 1,50234, x = 31,794.$$

Überdies enthalten die Ingenieurhilfsbücher und -taschenbücher zumeist auch Tafeln der natürlichen Logarithmen (s. u. a. Freytag, Hilfsbuch für den Maschinenbau, 7. Aufl.).

Abb. 73 enthält auch die Kurve der Funktion $y = \ln x$; bemerkenswert ist an ihr, daß die Tangentenrichtung in jedem Punkte reziprok zum Zahlenwert seiner Abszisse ist; daß also insbesondere im Punkte $(1/0)$ die Tangente genau unter 45° geneigt ist.

(54) Zur Einführung in das Differenzieren mit Logarithmenfunktionen mögen die folgenden Beispiele dienen:

$$1. y = \ln(x^3 + ax^2 + b): \quad y = \ln z, \quad z = x^3 + ax^2 + b;$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^3 + ax^2 + b}, \quad \frac{dz}{dx} = 3x^2 + 2ax;$$

$$\text{also} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2ax}{x^3 + ax^2 + b}.$$

$$2. \quad y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}), \quad y = \ln z, \quad z = x + \sqrt{a^2 + x^2};$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}};$$

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$3. \quad y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}; \text{ man forme erst um: } y = \ln(a^2 + x^2) - \ln(a^2 - x^2),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{a^2 + x^2} + \frac{2x}{a^2 - x^2} = \frac{4a^2 x}{a^4 - x^4}.$$

$$4. \quad y = \ln \sqrt[3]{a^2 + bx + x^2} = \frac{4}{3} \ln(a^2 + bx + x^2);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} \frac{b + 2x}{a^2 + bx + x^2}.$$

$$5. \quad y = x \ln x - x; \quad \frac{dy}{dx} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

$$6. \quad y = x \cdot \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{1 + x^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1 + x^2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x.$$

$$7. \quad y = \ln(x^2 + 4x + 5) - 8 \operatorname{arctg}(x + 2);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} - 8 \cdot \frac{1}{(x + 2)^2 + 1} = \frac{2x - 4}{x^2 + 4x + 5}$$

Hier ist die Gelegenheit, um auch die letzte Differentiationsregel, die Regel des logarithmischen Differenzierens, zu behandeln. Man benutzt sie, um Funktionen von der Form $y = u^v$, wobei u und v ihrerseits Funktionen von x sind, nach x zu differenzieren. Um den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zu bilden, helfen wir uns folgendermaßen: Wir logarithmieren beiderseits und erhalten $\ln y = v \cdot \ln u$, wodurch auch $\ln y$ als Funktion von x eingeführt ist. Wir differenzieren beide Ausdrücke nach x . Der erste ergibt (Kettenregel)

$$\frac{d \ln y}{dx} = \frac{d \ln y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx};$$

der zweite (Produktregel)

$$\begin{aligned} \frac{d(v \cdot \ln u)}{dx} &= v \cdot \frac{d \ln u}{dx} + \ln u \cdot \frac{dv}{dx} = v \cdot \frac{d \ln u}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \ln u \cdot \frac{dv}{dx} \\ &= v \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \ln u \cdot \frac{dv}{dx}. \end{aligned}$$

Setzen wir die beiden Differentialquotienten einander gleich, so bekommen wir

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \ln u \cdot \frac{dv}{dx},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \left[\frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \ln u \cdot \frac{dv}{dx} \right],$$

oder

$$\frac{d(u^v)}{dx} = u^v \left[\frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \ln u \cdot \frac{dv}{dx} \right]; \quad (95)$$

Regel von der logarithmischen Differentiation.

Beispiel:

$$y = x^x, \quad u = x, \quad v = x, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{dv}{dx} = 1,$$

also

$$\frac{d(x^x)}{dx} = x^x [1 + \ln x].$$

$$y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}, \quad u = \sin x, \quad v = \operatorname{arctg} x, \quad \frac{du}{dx} = \cos x, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

also

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin x)^{\operatorname{arctg} x}}{dx} &= (\sin x)^{\operatorname{arctg} x} \left[\frac{\operatorname{arctg} x}{\sin x} \cos x + \ln \sin x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \right] \\ &= (\sin x)^{\operatorname{arctg} x} \left[\frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\ln \sin x}{x^2 + 1} \right], \end{aligned}$$

Aus der Regel von der logarithmischen Differentiation wollen wir noch einen Satz ableiten. Setzen wir nämlich in Formel 95)

$$u = x \quad \text{und} \quad v = n,$$

wobei n irgendeine ganz beliebige Zahl ist, so ist

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dx^n}{dx} = x^n \left[\frac{n}{x} \cdot 1 + \ln x \cdot 0 \right]$$

oder

$$\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}.$$

Lehrsatz: Die Formel

$$\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

gilt für jeden beliebigen konstanten Exponenten n . [Vgl. (18), S. 36, u. (39), S. 92!]

In Ergänzung zu dem am Ende des vorigen Paragraphen Gesagten sei noch hervorgehoben, daß die transzendente Funktion $y = {}^a \log x$ und ihr Sonderfall $y = \ln x$ durch ihre Differentialquotienten

$$\frac{d {}^a \log}{dx} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \cdot {}^a \log e \quad \text{bzw.} \quad \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x},$$

— die einfachste echt gebrochene rationale Funktion von x (s. § 7) — aufs engste mit den algebraischen Funktionen verknüpft sind. Mittelbar gilt dies dann auch für ihre inverse Funktion, die Exponentialfunktion, zu deren Behandlung wir nunmehr übergehen wollen.

§ 12. Die Exponentialfunktion.

(55) Aus der zu Beginn von § 11 gegebenen Definition von $y = {}^a \log x$ folgt ohne weiteres, daß die Funktion $y = a^x$ die zur logarithmischen Funktion inverse ist. Die unabhängige Veränderliche tritt hier also im Exponenten auf; daher nennt man die Funktion $y = a^x$ die Exponentialfunktion. Je nach der Wahl der Grundzahl a variiert die Exponentialfunktion. Ihr Bild erhält man aus dem der Logarithmenfunktion durch Spiegelung an der 45° -Linie; man erhält also Kurven wie die in Abb. 74 dargestellten; sie heißen Exponentialkurven. Alle haben die x -Achse zur Asymptote und schneiden von der y -Achse die Längeneinheit ab.

Die für die höhere Mathematik wichtigste Exponentialfunktion ist — wie nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen verständlich ist — die Funktion

$y = e^x$. Auf sie lassen sich alle übrigen Exponentialfunktionen leicht zurückführen. Es ist nämlich

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a};$$

d. h. die Funktion a^x hat für x den gleichen Wert wie e^x für $x \cdot \ln a$. Die erste Kurve hat also für die Abszisse dieselbe Ordinate wie die letztere für die Abszisse $x \cdot \ln a$. Wenn man demnach die Abszissen der Kurve von der Gleichung e^x im Verhältnis $1 : \ln a$ verkürzt, unter Beibehaltung der Ordinaten, so stellt die neue Kurve das Bild der Gleichung $y = a^x$ dar.

Eine weitere geometrische Eigenschaft der Exponentialkurve ist die folgende: Wir legen der Betrachtung die allgemeinere Gleichung $y = c \cdot a^{bx}$ zugrunde, wobei b und c irgendwelche Konstanten sind; ist dabei $b < 0$, so fällt die Kurve beständig und hat die positive x -Achse zur Asymptote. Es sei $y_1 = c a^{bx_1}$ der zu x_1 gehörige Funktionswert; vermehrt man x_1 um die Größe d , so ergibt sich als zu $x_1 + d$ gehöriger Funktionswert:

$$y_2 = c a^{b(x_1+d)} = c a^{bd} \cdot a^{bx_1} \quad \text{oder} \quad y_2 = y_1 \cdot a^{bd}.$$

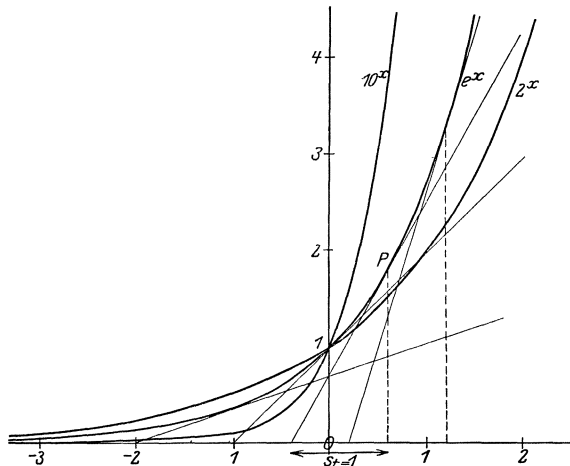


Abb. 74.

Das heißt aber: Eine fortgesetzte Vermehrung der unabhängigen Veränderlichen um einen konstanten Summanden d hat eine fortgesetzte Multiplikation der abhängigen Veränderlichen mit einem konstanten Faktor a^{bd} zur Folge. Anders ausgedrückt:

Durchläuft die unabhängige Veränderliche eine arithmetische Reihe, so durchläuft die Exponentialfunktion eine geometrische Reihe.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich aus zwei gegebenen Punkten der Exponentialkurve beliebig viele durch einfache geometrische Konstruktion finden. Es seien in Abb. 75 $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ zwei Punkte der Exponentialkurve; man ziehe $P_1Y_1 \parallel x$ -Achse und durch Y_1 eine Gerade unter einem beliebigen Winkel α (in Abb. $\alpha = 45^\circ$) gegen die y -Achse, welche $P_2Y_2 \parallel x$ -Achse in Q_2 schneiden möge. Nun

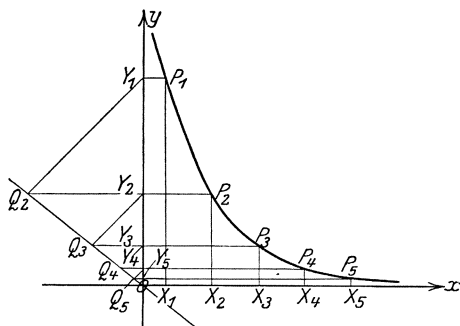


Abb. 75.

ziehe man OQ_2 . Durch Y_2 ziehe man $Y_2Q_3 \parallel Y_1Q_2$ (Q_3 auf OQ_2) und die Gerade $Q_3Y_3 \parallel x$ -Achse, welche die durch X_3 ($X_2X_3 = X_1X_2$) zur y -Achse gezogene Parallele in P_3 schneiden möge. Dann ist P_3 ein weiterer Punkt der Exponentialkurve. Aus P_2 und P_3 erhält man durch entsprechende Konstruktion P_4 usw. Es ist zu beachten, daß

$X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4 = \dots$ ist und daß die Dreiecke $Y_1Q_2Y_2$, $Y_2Q_3Y_3$, $Y_3Q_4Y_4 \dots$ ähnlich sind. Da nämlich

$$OY_1:OY_2 = OQ_2:OQ_3 = OY_2:OY_3 = OQ_3:OQ_4 = OY_3:OY_4 \dots,$$

also $OY_1:OY_2 = OY_2:OY_3 = OY_3:OY_4 = \dots$ ist, bilden die Ordinaten

$$y_1 = OY_1, \quad y_2 = OY_2, \quad y_3 = OY_3, \quad y_4 = OY_4, \dots$$

eine geometrische Reihe, während nach Konstruktion die Abszissen $x_1 = OX_1$, $x_2 = OX_2$, $x_3 = OX_3$, $x_4 = OX_4$, \dots eine arithmetische Reihe bilden, womit der Beweis erbracht ist, daß die Punkte P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , \dots auf der nämlichen Exponentialkurve liegen.

Diese technisch häufig verwendete Punktkonstruktion hat den Vorzug, daß sie die Exponentialkurve über die gegebenen Punkte hinaus zu verlängern gestattet; damit ist aber der Nachteil verknüpft, daß eine Ungenauigkeit in der Bestimmung eines Punktes notwendig auch Ungenauigkeiten in der Konstruktion der folgenden Punkte nach sich zieht, so daß infolge dieser Fehler die konstruierte Kurve immer stärker von der idealen abweicht. Dazu kommt, daß durch die angeführte

Methode keine Zwischenpunkte gefunden werden können. Aus diesen beiden Gründen empfiehlt sich die folgende Konstruktion: Sind $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ (Abb. 76) zwei Punkte, und sollen Zwischenpunkte ge-

zeichnet werden, so ermittelt man zuerst den Punkt P_3 , dessen Abszisse $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, für den also $X_1X_3 = X_3X_2$ ist, und zwar in folgender Weise: Es muß $y_1:y_3 = y_3:y_2$, also y_3 die mittlere Proportionale zu y_1 und y_2 sein: Man schlage zu y_1 und y_2 sein: Man schlage über OY_1 den Halbkreis, der von P_2Y_2 in Z_2 geschnitten werden möge; dann ist $y_3 = OY_3 = OZ_2$. Verfährt

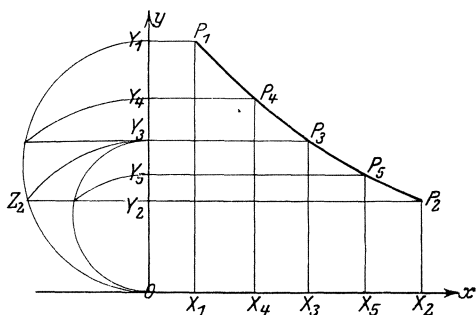


Abb. 76.

man mit den beiden Punkten P_1 und P_3 ebenso wie mit P_1 und P_2 , so erhält man einen weiteren Punkt P_4 , und durch Verwendung von P_3 und P_2 einen Punkt P_5 usw.

(56) Wir kommen nun zur Bildung des Differentialquotienten der Exponentialfunktion: Wenn $y = a^x$ ist, so ist $x = {}^a\log y$ und folglich

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y \ln a} = \frac{{}^a\log e}{y};$$

daher ist

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a = \frac{y}{{}^a\log e}.$$

Wir erhalten als Ergebnis

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \cdot \ln a = \frac{a^x}{{}^a\log e} \quad (96)$$

und als Sonderfall

$$\frac{de^x}{dx} = e^x. \quad (96')$$

Die Exponentialfunktion hat demnach die Eigentümlichkeit, daß sie mit ihrem Differentialquotienten identisch ist.

Beispiele: 1. $y = a^{\sin x}$; $y = a^z$, $z = \sin x$; $\frac{dy}{dz} = a^z \ln a = a^{\sin x} \ln a$,

$$\frac{dz}{dx} = \cos x; \text{ also } \frac{dy}{dx} = a^{\sin x} \cos x \ln a,$$

2. $y = e^{2x} \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$;

Produktregel: $\frac{dy}{dx} = e^{2x}(2x - 1) + 2e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = 2x^2 e^{2x}$.

(57) Anwendungen.

a) Die Strahlungsenergie J einer radioaktiven Substanz klingt nach einem Gesetze ab, das durch die Formel $J = J_0 e^{-\lambda t}$ beschrieben wird; hierbei ist J_0 die Energie zur Zeit $t = 0$ und λ eine Konstante, die der Substanz eigentümlich ist. Man mißt sie durch die Zeit T , in der die Energie J_0 auf den halben Wert sinkt; T heißt die Halbwertskonstante oder die Halbwertszeit. Um die Beziehung zwischen λ und T zu finden, gehen wir von der Formel aus:

$$\frac{J_0}{2} = J_0 e^{-\lambda T} \quad \text{oder} \quad e^{\lambda T} = 2.$$

Durch beiderseitiges Logarithmieren folgt hieraus:

$$\lambda T = \ln 2 = 0,6931, \quad \text{also} \quad \lambda = \frac{0,6931}{T}.$$

Für Radiumemanation ist

$$T = 4 \text{ Tage} = 4D, \quad \text{also} \quad \lambda = \frac{0,6931}{4} D^{-1} = 0,1733 D^{-1},$$

so daß die Abklingungsformel für Radiumemanation lautet

$$J = J_0 e^{-0,173 t},$$

wobei t in Tagen anzugeben ist. Das Schaubild ist zu entwerfen.

b) Wird ein Gleichstrom führender Kreis von der elektromotorischen Kraft E und dem Widerstande R plötzlich geschlossen, so steigt die Stromstärke infolge der Selbstinduktion des Kreises nicht sofort auf die nach dem Ohmschen Gesetze zu erwartende Stromstärke $i = \frac{E}{R}$, sondern schwillt an nach der Formel $i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t})$, wobei t die Zeit und L der Selbstinduktionskoeffizient (Induktivität) ist. Ist beispielsweise $E = 100 \text{ V}$, $R = 1 \Omega$ und $L = 0,1 \text{ Henry}$, so ist

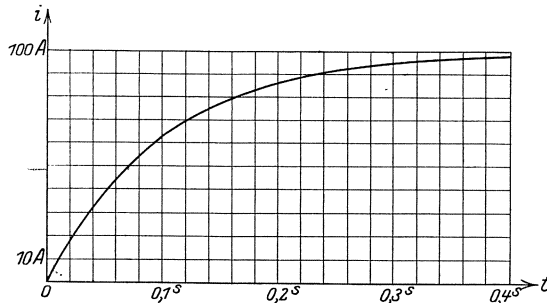


Abb. 77.

$i = 100(1 - e^{-10t})$ Ampere (Abb. 77). Die folgende Tabelle gibt die Werte für die Stromstärke zu verschiedenen Zeiten:

$t = 0,01$	$0,02$	$0,05$	$0,069$	$0,1$	$0,15$	$0,2$	$0,3$	$0,4^s$
$i = 9,52$	$18,1$	$39,3$	$50,0$	$63,2$	$77,7$	$86,5$	$95,0$	$98,1 \text{ Amp.}$

Wird der Stromkreis, der einen Gleichstrom führt, plötzlich unterbrochen, so sinkt die Stromstärke nach dem Gesetze

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t};$$

dieser Fall ist entsprechend zu untersuchen [vgl. (225) S. 776].

c) Schließt man plötzlich einen Stromkreis, dessen elektromotorische Kraft sich nach dem Sinusgesetz

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$$

ändert, so fließt in ihm nicht sofort ein reiner Wechselstrom, sondern ein Strom, dessen Stärke sich nach dem Gesetze ändert:

$$i = A e^{-\frac{R}{L}t} + B \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right),$$

wobei

$$A = \frac{2\pi E_0 L}{T\left(R^2 + \frac{4\pi^2 L^2}{T^2}\right)},$$

$$B = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{4\pi^2 L^2}{T^2}}}$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi L}{RT}$$

ist, und L , R dieselben Bedeutungen wie in b) haben (s. a. S. 776f.). Die Stromstärke i ist also die Summe aus einer Exponentialfunktion $A e^{-\frac{R}{L}t}$ und einer Sinusfunktion $B \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right)$.

d) Ein Massenpunkt, der in einem widerstandsfreien Mittel eine harmonische Bewegung [s. (46), S. 109] beschreiben würde, führt in einem Mittel, das ihm einen genügend großen Widerstand bietet, eine Bewegung aus, deren Gesetz durch die Formel wiedergegeben wird: $s = v_0 t e^{-\lambda t}$; hierbei bedeutet s die Entfernung aus der Gleichgewichtslage zur Zeit t , v_0 die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ und λ eine durch die physikalische Beschaffenheit des Mittels bestimmte Konstante. (Beispiel: Gewicht an einer Spiralfeder befestigt, sich in einer Flüssigkeit von bestimmtem Widerstand bewegend. Aperiodische gedämpfte Schwingung.) Abb. 78 zeigt die Weg-Zeit-Kurve für die Werte

$$\lambda = 0,2 \text{ sec}^{-1}, v_0 = 5 \text{ m sec}^{-1}.$$

Da für positive Werte von t $s = v_0 t e^{-\lambda t}$ stets positiv ist, kann der

Massenpunkt für endliche Werte von t niemals wieder in die Ruhelage zurückkehren. Er wird sich bei Beginn der Bewegung von ihr entfernen, einen größten Ausschlag s_{\max} erreichen und dann wieder nach der Ruhelage zurückstreben, der er sich asymptotisch nähert. Um den

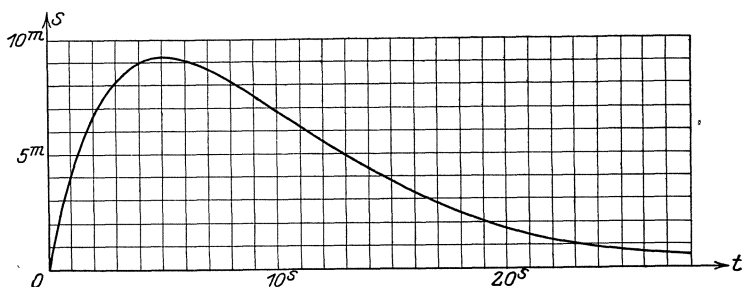


Abb. 78.

größten Ausschlag s_{\max} zu bestimmen, bedenken wir, daß für ihn die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ gleich Null sein muß. Nun ist

$$v = v_0 e^{-\lambda t} (1 - \lambda t).$$

Der zugehörige Zeitpunkt ist also $t = \frac{1}{\lambda}$, und demnach

$$s_{\max} = \frac{v_0}{\lambda} e^{-1} = \frac{v_0}{e\lambda}.$$

(Für unser Zahlenbeispiel ist $t = 5$ sec, $s_{\max} = 9,197$ m.)

e) Ist der Widerstand des Mittels weniger groß, so führt der Massenpunkt (an der Spiralfeder) eine schwingende Bewegung aus, deren Ausschläge aber allmählich abnehmen; diese Bewegung wird als gedämpfte Schwingung bezeichnet. Sie geht vor sich nach der Formel

$$s = a e^{-\lambda t} \sin \frac{2\pi}{T} t; \quad \text{a)}$$

hierbei bedeutet s die Entfernung, die der Massenpunkt von der Ruhelage zur Zeit t hat, während λ und die Periode T durch die physikalische Beschaffenheit des Systems (Spiralfeder, Massenpunkt) und den Widerstand des Mittels bestimmt sind. a ist eine Konstante, die sich, wie wir sehen werden, aus der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ergibt, welche man dem Massenpunkte bei der Bewegung aus der Ruhelage erteilt. Wir wollen die gedämpfte Schwingung näher untersuchen.

s wird gleich Null, wenn $\sin \frac{2\pi}{T} t = 0$, also $t = k \cdot \frac{T}{2}$ ist; der Punkt geht unendlich oft durch die Ruhelage, und zwar nach gleichen Zeiträumen, die gleich der halben Periode sind. Ist zur Zeit t_1 $s_1 = a e^{-\lambda t_1} \sin \frac{2\pi}{T} t_1$, so

ist nach einem weiteren Verlaufe der Periode T , also zur Zeit $t_1 + T$

$$s_2 = a e^{-\lambda(t_1 + T)} \sin \frac{2\pi}{T} (t_1 + T) = a e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda T} \sin \frac{2\pi}{T} t_1,$$

oder

$$s_2 = s_1 e^{-\lambda T}.$$

Das heißt aber: wenn man den Ausschlag zu einer bestimmten Zeit kennt, so erhält man denjenigen nach Verlauf einer Periode T durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor $h = e^{-\lambda T}$; man nennt h das Dämpfungsverhältnis. Die Ausschläge, deren Zeiten sich um eine Periode unterscheiden, bilden demnach eine geometrische Reihe. $\ln h = -\lambda T$ ist das logarithmische Dekrement der gedämpften Schwingung. Sind s_1 , s_2 und s_3 drei Ausschläge, die zu den Zeiten t , $t + T$, $t + 2T$ gehören, so daß also

$$s_2 = s_1 e^{-\lambda T} = h s_1 \quad \text{und} \quad s_3 = s_2 e^{-\lambda T} = h s_2 = h^2 s_1$$

ist, so ist

$$s_3 - s_2 = h s_1 (h - 1) \quad \text{und} \quad s_2 - s_1 = s_1 (h - 1),$$

also

$$h = \frac{s_3 - s_2}{s_2 - s_1}.$$

Wenn sich also die drei Ausschläge s_1 , s_2 , s_3 bequem und mit genügender Genauigkeit beobachten lassen, so kann man mit Hilfe der Formel

$$h = \frac{s_3 - s_2}{s_2 - s_1}$$

durch einfache Rechnung das Dämpfungsverhältnis ermitteln. Am besten sind der Beobachtung zugänglich drei aufeinanderfolgende größte Ausschläge. Um die größten Ausschläge der Hin- und Herbewegung des Massenpunktes rechnerisch zu erhalten, muß man bedenken, daß für sie die Bewegung umkehrt, d. h. die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ gleich Null sein muß. Wir haben also die Funktion $s = a e^{-\lambda t} \sin \frac{2\pi}{T} t$ zu differenzieren und erhalten:

$$v = \frac{ds}{dt} = a e^{-\lambda t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t - a \lambda e^{-\lambda t} \sin \frac{2\pi}{T} t. \quad \text{b)}$$

Soll $v = 0$ sein, so muß

$$\frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t - \lambda \sin \frac{2\pi}{T} t = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{T} t = \frac{2\pi}{\lambda T}$$

oder

$$t = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{\lambda T}$$

sein. Dann erhalten wir als den größten Ausschlag mittels der

Formel

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \sin \frac{2\pi}{T} t = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 T^2 + 4\pi^2}},$$

$$s_{\max} = a e^{-\frac{\lambda T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{\lambda T}} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 T^2 + 4\pi^2}}.$$

Weil $\operatorname{arctg} \frac{2\pi}{\lambda T}$ unendlich vieldeutig ist [s. (49) S. 128], so erhält man unendlich viele Werte für s_{\max} , deren Zeiten sich je um $\frac{T}{2}$ unterscheiden.

Wir wollen die Formel b) für die Geschwindigkeit benutzen, um das Gesetz von v zu untersuchen. Da die Anfangsgeschwindigkeit v_0 sein soll, so erhalten wir, wenn wir $t = 0$ setzen

$$v_0 = \frac{2\pi}{T} a \quad \text{oder} \quad a = \frac{T}{2\pi} v_0,$$

und damit ist der oben schon angedeutete Zusammenhang der Konstanten a mit v_0 gefunden. Gleichung a) geht nun über in:

$$s = \frac{T}{2\pi} v_0 e^{-\lambda t} \sin \frac{2\pi}{T} t. \quad a')$$

Die Gleichung b) gestattet noch eine Vereinfachung. Setzen wir

$$-a\lambda = v_1 \cos \frac{2\pi}{T} t_1 \quad \text{und} \quad a \cdot \frac{2\pi}{T} = v_1 \sin \frac{2\pi}{T} t_1,$$

so bestimmen sich die beiden neuen konstanten Größen v_1 und t_1 aus diesen Gleichungen zu

$$v_1 = a \sqrt{\lambda^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} = \frac{a}{T} \sqrt{\lambda^2 T^2 + 4\pi^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{2\pi}{-\lambda T}. \quad c)$$

Durch Einführen von v_1 und t_1 geht b) über in

$$v = v_1 e^{-\lambda t} \left[\sin \frac{2\pi}{T} t \cos \frac{2\pi}{T} t_1 + \cos \frac{2\pi}{T} t \sin \frac{2\pi}{T} t_1 \right]$$

oder

$$v = v_1 e^{-\lambda t} \sin \frac{2\pi}{T} (t + t_1). \quad b')$$

Der Winkel $\frac{2\pi}{T} t_1$ muß, da sein Sinus positiv und sein Kosinus negativ ist, im zweiten Quadranten, t_1 also zwischen $\frac{T}{4}$ und $\frac{T}{2}$ liegen. Der Vergleich von b') mit a) bzw. a') zeigt, daß v das gleiche Gesetz befolgt, wie s ; insbesondere ist v ebenso wie s eine periodische Funktion von der Periode T , v hat ferner das gleiche Dämpfungsverhältnis $h = e^{-\lambda T}$, wie man sich leicht überzeugt. Nur erreicht v stets um die Zeitspanne t_1 früher den entsprechenden Zustand; die Geschwindigkeit v eilt also um diese Zeitspanne dem Ausschlage voraus. So hat beispielsweise v zur Zeit $t = -t_1 + k \frac{T}{2}$ den Wert Null, während s ihn erst zur Zeit $t = k \cdot \frac{T}{2}$ erreicht; gleiches gilt natürlich auch von den Höchstwerten von v , die zu bestimmen dem Leser überlassen sei.

Wir gehen noch einen Schritt weiter und suchen das Gesetz der Beschleunigung p . Es ist $p = \frac{dv}{dt}$. Das Differenzieren von v nach t und das weitere Umformen lassen sich genau so ausführen wie oben; daher gelten auch hier die dort gezogenen Schlüsse. Insbesondere ist auch p eine periodische Funktion von t von der Periode T und dem

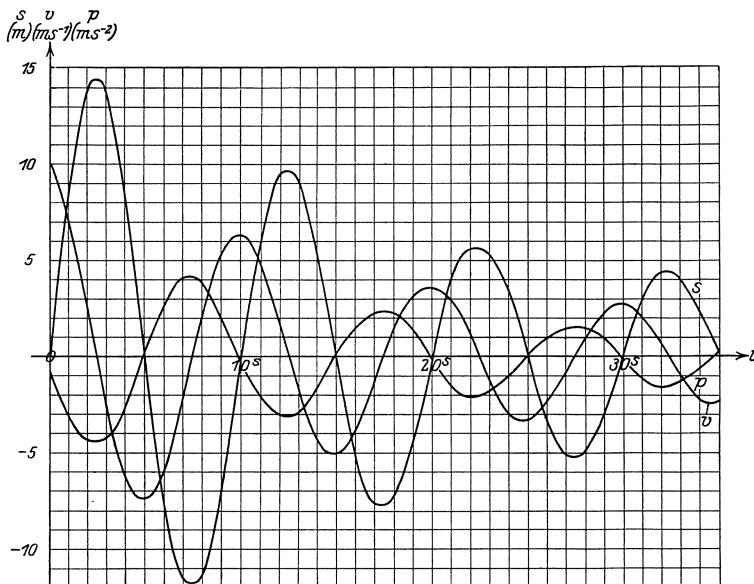


Abb. 79.

Dämpfungsverhältnis $h = e^{-\lambda T}$; ferner eilt die Beschleunigung der Geschwindigkeit um die Zeit t_1 , dem Wege also um die Zeit $2t_1$ voraus. In Formeln

$$p = p_1 e^{-\lambda t} \sin \frac{2\pi}{T} (t + 2t_1), \quad \text{d)}$$

wobei sich p bestimmt zu:

$$p_1 = \frac{v_0}{2\pi T} (\lambda^2 T^2 + 4\pi^2).$$

Zahlenbeispiel: Es sei $T = 10 \text{ sec}$, $\lambda = 0,04 \text{ sec}^{-1}$, $v_0 = 10 \text{ m sec}^{-1}$; dann ist das logarithmische Dekrement $-0,4$, das Dämpfungsverhältnis $h = 0,670$,

$$t_1 = \frac{10}{2\pi} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{-0,4} \text{ sec} = 1,591 \cdot 1,635 \text{ sec} = 2,60 \text{ sec},$$

$$v_1 = 10,02 \text{ msec}^{-1}, \quad p_1 = 6,308 \text{ msec}^{-2}, \quad a = 15,915 \text{ m},$$

$$s_{\max_1} = 14,43 \text{ m zur Zeit } 2,40 \text{ sec}, \quad s_{\min_1} = -11,81 \text{ m zur Zeit } 7,40 \text{ sec},$$

$$s_{\max_2} = 9,67 \text{ m zur Zeit } 12,40 \text{ msec} \dots;$$

die Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} s &= 15,92 \cdot e^{-0,04t} \cdot \sin 0,6283 t \text{ m}; \\ v &= 10,02 \cdot e^{-0,04t} \cdot \sin 0,6283 (t + 2,60) \text{ m sec}^{-1}, \\ p &= 6,308 \cdot e^{-0,04t} \cdot \sin 0,6283 (t + 5,20) \text{ m sec}^{-2}. \end{aligned}$$

Abb. 79 zeigt für unser Zahlenbeispiel die Kurven für Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit.

§ 13. Die hyperbolischen Funktionen.

(58) Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, für gewisse Funktionen, die sich in bestimmter Weise aus Exponentialfunktionen zusammensetzen, besondere Bezeichnungen einzuführen. Man hat ihnen die Namen hyperbolische Funktionen gegeben. Man unterscheidet im wesentlichen vier verschiedene: den Sinus hyperbolicus (hyperbolischen Sinus), den Cosinus hyperbolicus (hyperbolischen Kosinus), den Tangens hyperbolicus (hyperbolischen Tangens) und den Kotangens hyperbolicus (hyperbolischen Kotangens).

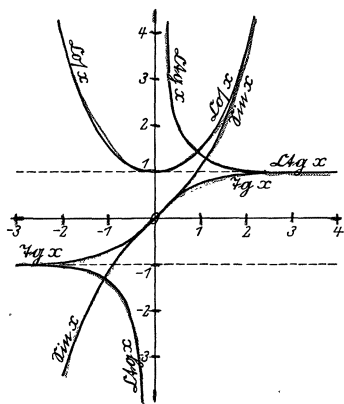


Abb. 80.

Wir wollen uns zunächst mit dem hyperbolischen Sinus einer Veränderlichen x oder, wie man abgekürzt schreibt, der Funktion $y = \text{Sin } x$ (oder auch $y = \text{sh } x$) beschäftigen; $\text{Sin } x$ ist definiert durch die Gleichung

$$\text{Sin } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad (97)$$

es ist also beispielsweise

$$\begin{aligned} \text{Sin } 3 &= \frac{e^3 - e^{-3}}{2} = \frac{20,085 - 0,050}{2} \\ &= 10,018; \end{aligned}$$

insbesondere ist

$$\text{Sin } 0 = 0. \quad (98)$$

Ferner gilt die Formel

$$\text{Sin}(-x) = -\text{Sin } x, \quad (99)$$

wie leicht aus Gleichung 97) folgt. Das Bild der Funktion erhält man am bequemsten, indem man die beiden Kurven $y_1 = e^x$ und $y_2 = e^{-x}$ zeichnet und die Differenz der zu einer bestimmten Abszisse x gehörigen beiden Ordinaten halbiert; $y = \frac{y_1 - y_2}{2}$ ist dann die Ordinate des für dieses x zur Kurve $y = \text{Sin } x$ gehörigen Punktes (Abb. 80).

Die drei anderen Funktionen werden durch die Gleichungen definiert:

$$\text{Cos } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{Tg } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \text{Ctg } x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}; \quad (97')$$

statt $\mathfrak{C}of x$, $\mathfrak{I}g x$, $\mathfrak{C}tg x$ werden auch die Bezeichnungen $ch x$, $tgh x$, $ctgh x$ benutzt. Man erkennt sofort, daß die Gleichungen gelten:

$$\mathfrak{C}of 0 = 1, \quad \mathfrak{I}g 0 = 0, \quad \mathfrak{C}tg 0 = \infty, \quad 98')$$

ferner

$$\mathfrak{C}of(-x) = \mathfrak{C}of x, \quad \mathfrak{I}g(-x) = -\mathfrak{I}g x, \quad \mathfrak{C}tg(-x) = -\mathfrak{C}tg x. \quad 99')$$

Die $\mathfrak{C}of$ -Kurve ergibt sich durch Halbieren der Summe der entsprechenden Ordinaten der beiden Kurven $y = e^x$ und $y = e^{-x}$; diese und die $\mathfrak{I}g$ - und die $\mathfrak{C}tg$ -Kurve sind ebenfalls in Abb. 80 eingezeichnet. Wir sehen aus ihr, wie sich auch durch Rechnung bestätigen läßt, daß die $\mathfrak{C}of$ -Kurve zur Ordinatenachse symmetrisch verläuft und mit wachsendem $|x|$ vom Werte 1 ($x = 0$) über alle Grenzen hinaus wächst; ferner wächst die $\mathfrak{S}in$ -Funktion für positive x von Null ($x = 0$) mit wachsendem x ebenfalls über alle Grenzen hinaus. Die $\mathfrak{I}g$ -Funktion nähert sich von Null ($x = 0$) für wachsende x asymptotisch dem Werte 1 wachsend, die $\mathfrak{C}tg$ -Funktion dagegen von ∞ (für $x = 0$) fallend dem Werte 1 asymptotisch. Wir sehen ferner, daß für sehr große positive Werte von x , da e^{-x} dann sehr klein wird, $\mathfrak{C}of x \approx \mathfrak{S}in x \approx \frac{e^x}{2}$ wird. So ist beispielsweise

$$\mathfrak{C}of 6 \approx \mathfrak{S}in 6 \approx \frac{e^6}{2} = 201,71.$$

Die Ingenieur-Hilfs- und -Taschenbücher (siehe u. a. Freytag, Hilfsbuch für den Maschinenbau, Berlin: Julius Springer) enthalten zu meist Tafeln der hyperbolischen Funktionen und ihrer Logarithmen. Aus diesen Tabellen kann man leicht die Werte der Exponentialfunktion finden; denn es ist nach den Formeln 97) und 97'):

$$e^x = \mathfrak{C}of x + \mathfrak{S}in x, \quad e^{-x} = \mathfrak{C}of x - \mathfrak{S}in x.$$

Da beispielsweise

$$\mathfrak{C}of 1,64 = 2,6746, \quad \mathfrak{S}in 1,64 = 2,4806,$$

so ist

$$e^{1,64} = 5,1552, \quad e^{-1,64} = 0,1940.$$

Die Benennung der hyperbolischen Funktionen läßt schon auf eine innere Verwandtschaft mit den goniometrischen schließen. Nun fehlt allerdings den hyperbolischen Funktionen das hervorstechendste Merkmal der goniometrischen, die Periodizität, wenigstens für reelle Werte der unabhängigen Veränderlichen. Indessen erinnern schon die Formeln 98), 98'), 99), 99') an die gleichlautenden Beziehungen zwischen den goniometrischen Funktionen; weitere sollen jetzt abgeleitet werden.

Da die hyperbolischen Funktionen in gesetzmäßiger Weise von der Exponentialfunktion abhängen, müssen zwischen ihnen selbst be-

stimmt Zusammenhänge bestehen. Zunächst erkennen wir ohne weiteres aus den Formeln 97) und 97'), daß

$$\mathfrak{I}g x = \frac{\mathfrak{S}in x}{\mathfrak{C}of x} \quad \text{und} \quad \mathfrak{I}g x \cdot \mathfrak{C}tg x = 1 \quad 100)$$

ist. Da ferner

$$\mathfrak{C}of^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}in^2 x = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

ist, so folgt weiter:

$$\mathfrak{C}of^2 x - \mathfrak{S}in^2 x = 1. \quad 100')$$

Die Formeln 100) entsprechen genau den bekannten goniometrischen, nur steht in 100') statt der Summe die Differenz.

Auch die hyperbolischen Funktionen haben Additionstheoreme. Es ist

$$\frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

wovon man sich durch Ausrechnen leicht überzeugen kann; folglich ist

$$\mathfrak{S}in(x+y) = \mathfrak{S}in x \mathfrak{C}of y + \mathfrak{C}of x \mathfrak{S}in y. \quad 101)$$

Ferner ist

$$\frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2};$$

also

$$\mathfrak{C}of(x+y) = \mathfrak{C}of x \mathfrak{C}of y - \mathfrak{S}in x \mathfrak{S}in y. \quad 101')$$

Setzt man $y = x$, so folgen die weiteren Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}in 2x &= 2 \mathfrak{S}in x \mathfrak{C}of x, & \mathfrak{C}of 2x &= \mathfrak{C}of^2 x - \mathfrak{S}in^2 x \\ & \text{(vgl. } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x). \end{aligned} \right\} \quad 102)$$

Aus letzterer ergibt sich in Verbindung mit Formel 100')

$$\mathfrak{C}of 2x = 1 - 2 \mathfrak{S}in^2 x \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}of 2x = 2 \mathfrak{C}of^2 x - 1,$$

also für $x = \frac{u}{2}$,

$$\mathfrak{S}in \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{\mathfrak{C}of u - 1}{2}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}of \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{\mathfrak{C}of u + 1}{2}} \quad \text{usw.} \quad 103)$$

Man beachte bei allen diesen Formeln die Ähnlichkeit mit den entsprechenden der goniometrischen Funktionen, aber auch den Vorzeichenunterschied in gewissen Formeln; beides setzt sich auch in die Differentialrechnung hinein fort, wie nun gezeigt werden soll.

Es ist

$$\mathfrak{S}in x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{also} \quad \frac{d \mathfrak{S}in x}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathfrak{C}of x,$$

ferner

$$\frac{d \mathfrak{C}of x}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathfrak{S}in x.$$

Weiter ist nach der Quotientenregel

$$\frac{d \operatorname{Zg} x}{dx} = \frac{d \operatorname{Sin} x}{d \operatorname{Cos} x} = \frac{\operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x} \quad \text{und ebenso} \quad \frac{d \operatorname{Ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 x}.$$

Wir stellen diese Formeln nochmals zusammen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \operatorname{Sin} x}{dx} &= \operatorname{Cos} x, & \frac{d \operatorname{Cos} x}{dx} &= \operatorname{Sin} x, \\ \frac{d \operatorname{Zg} x}{dx} &= \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x}, & \frac{d \operatorname{Ctg} x}{dx} &= -\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 x}. \end{aligned} \right\} \quad 104)$$

(59) Die inversen Funktionen zu den hyperbolischen Funktionen sind die sog. Area-Funktionen. Man versteht unter Area-Sinus von x eine Zahl y , deren hyperbolischer Sinus den Wert x hat, in Formeln

$$y = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x, \quad \text{wenn} \quad \operatorname{Sin} y = x \quad 105)$$

ist; ebenso ist

$$\left. \begin{aligned} y &= \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} x, & \text{wenn} \quad \operatorname{Cos} y &= x \quad \text{ist;} \\ y &= \operatorname{Ar} \operatorname{Zg} x, & \text{wenn} \quad \operatorname{Zg} y &= x \quad \text{ist;} \\ y &= \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x, & \text{wenn} \quad \operatorname{Ctg} y &= x \quad \text{ist.} \end{aligned} \right\} \quad 105')$$

Zum Aufschlagen der Werte der Areafunktionen für ein bestimmtes x dienen dieselben Tabellen wie zum Aufschlagen der hyperbolischen Funktionen; nur sind jetzt abhängige und unabhängige Veränderliche zu vertauschen (vgl. trigonometrische Funktionen und Winkel; Numerus und Logarithmus).

Theoretisch sind weder die hyperbolischen Funktionen noch ihre Umkehrfunktionen nötig; wie jene sich durch die Exponentialfunktion ausdrücken lassen, so diese durch die natürlichen Logarithmen. Da nämlich nach Definition $y = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x$ ist, wenn $x = \operatorname{Sin} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ ist, so muß die Gleichung bestehen

$$e^y - e^{-y} = 2x$$

oder nach Multiplizieren mit e^y

$$(e^y)^2 - 2x e^y - 1 = 0.$$

Die Lösung dieser in e^y quadratischen Gleichung ist

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1};$$

da $e^y > 0$ sein muß, gilt nur das obere Vorzeichen. Es ist also

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad \text{hieraus} \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

also läßt sich $\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x$ ersetzen durch

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \quad 106)$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß

$$\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad 106')$$

ist. Da weiter $y = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}x$ ist, wenn

$$x = \mathfrak{Tg}y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

ist, so ist nach Erweitern mit e^y

$$\frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x, \quad e^{2y}(1 - x) = 1 + x, \quad e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x},$$

$$2y = \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \quad y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x};$$

$$\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}. \quad 106'')$$

Ebenso ergibt sich

$$\mathfrak{Ar}\mathfrak{Ctg}x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}. \quad 106''')$$

Ist $y = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}x$, also $x = \mathfrak{Sin}y$, so folgt

$$\frac{dx}{dy} = \mathfrak{Cof}y = \sqrt{\mathfrak{Sin}^2y + 1} = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Daher ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Ebenso findet man, daß für $y = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}x$ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ist.

$y = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}x, \quad x = \mathfrak{Tg}y, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2y} = 1 - \mathfrak{Tg}^2y = 1 - x^2,$
also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}, \quad \frac{d\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}x}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Das gleiche Ergebnis erhält man auch für $y = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Ctg}x$.

Wir haben sonach die Formeln gefunden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, & \frac{d\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \\ \frac{d\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}x}{dx} &= \frac{d\mathfrak{Ar}\mathfrak{Ctg}x}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}. \end{aligned} \right\} \quad 107)$$

Daß die unmittelbare Differentiation der Formeln 106) zum gleichen Ziele führt, davon möge sich der Leser selbst überzeugen. Vergleiche hierzu auch (54), Differentiationsbeispiel 2). Man beachte auch hier die enge Verwandtschaft der Formeln 107) mit den Formeln für die Differentialquotienten der zyklometrischen Funktionen [Formeln 83) bis 86)].

(60) Ein Beispiel aus der Bewegungslehre möge dazu beitragen, das Verständnis für die hyperbolischen Funktionen zu vertiefen: der Fall im luftgefüllten Raume. Wird der Luftwiderstand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit angenommen, so wird die Abhängigkeit des durchfallenen Weges s von der dazu benötigten Zeit t durch die Formel wiedergegeben:

$$s = \frac{v_1^2}{g} \cdot \ln \mathfrak{Cof} \frac{gt}{v_1}; \quad \text{a)}$$

hierbei ist v_1 die sog. stationäre Geschwindigkeit und $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ die Schwerkbeschleunigung. Beispielsweise ist für eine gußeiserne Kugel vom Halbmesser 10 cm $v_1 = 171,3 \text{ ms}^{-1}$ und demnach

$$s = 2990 \text{ m} \cdot \ln \mathfrak{Cof} 0,0572 t = 6894 \text{ m} \cdot \log \mathfrak{Cof} 0,0572 t.$$

(Übergang von den natürlichen Logarithmen zu den gemeinen Logarithmen.) Benutzt man die Tafeln der gemeinen Logarithmen des hyperbolischen Kosinus, so erhält man

	für $t = 0$	1	2	3	4	5 sec
die Werte	$s = 0$	4,83	19,31	43,44	77,90	120,7 m
	für $t = 10$	20	30	40	50	100 sec
die Werte	$s = 465,2$	1639	3158	4806	6498	15049 m.

Für höhere Werte von t können wir von der S. 149 abgeleiteten Formel

$$\mathfrak{Cof} x \approx \frac{e^x}{2}$$

Gebrauch machen; Gleichung a) geht dann über in

$$s = \frac{v_1^2}{g} \cdot \ln \frac{e^{\frac{gt}{v_1}}}{2} = \frac{v_1^2}{g} \cdot \left(\frac{gt}{v_1} - \ln 2 \right). \quad \text{a')}$$

Also wird für unser Zahlenbeispiel

$$s = 2990 \text{ m} \cdot (0,0572 t - 0,6931) \quad \text{oder} \quad s = 171,3 t - 2072,$$

demnach für

$t =$	100	200	300	400	500	600 sec
$s =$	15060	32190	49320	66450	83580	100710 m.

Um andererseits die Zeit zu ermitteln, die der Körper braucht, um eine bestimmte Höhe s zu durchfallen, muß man Gleichung a) nach t auflösen. Man erhält nacheinander:

$$\ln \mathfrak{Cof} \frac{gt}{v_1} = \frac{g}{v_1^2} s, \quad \mathfrak{Cof} \frac{gt}{v_1} = e^{\frac{g}{v_1^2} s}, \quad \frac{gt}{v_1} = \mathfrak{Ar} \mathfrak{Cof} e^{\frac{g}{v_1^2} s},$$

$$\text{also} \quad t = \frac{v_1}{g} \cdot \mathfrak{Ar} \mathfrak{Cof} e^{\frac{g}{v_1^2} s}. \quad \text{b)}$$

Für unser Zahlenbeispiel wird also $t = 17,46 \cdot \text{ArCo}f e^{0,000334s}$ sec und bei sehr großen Werten von s $t \approx 17,46 \cdot (0,000334s + \ln 2)$ oder $t \approx (0,00584s + 12,09)$ sec. Eine Höhe, wie sie die Zugspitze hat, würde — gleichen Luftwiderstand in allen Schichten vorausgesetzt — von unserer Kugel in der Zeit

$$t = 17,46 \cdot \text{ArCo}f e^{0,000334 \cdot 2960} \approx 17,46 \cdot \text{ArCo}f e^{0,989} \approx 17,46 \cdot \text{ArCo}f 2,69 \\ \approx 17,46 \cdot 1,65 \approx 29 \text{ sec}$$

durchfallen, eine Höhe von 20 km in

$$t \approx 0,00584 \cdot 20000 + 12,09 \approx 116,8 + 12,1 \approx 129 \text{ sec.}$$

Abb. 81 zeigt die Zeit-Weg-Kurve unseres Zahlenbeispiels nach Formel a) (Kurve s) und Formel a') (Kurve s_0); s_0 ist eine Gerade, an die sich s

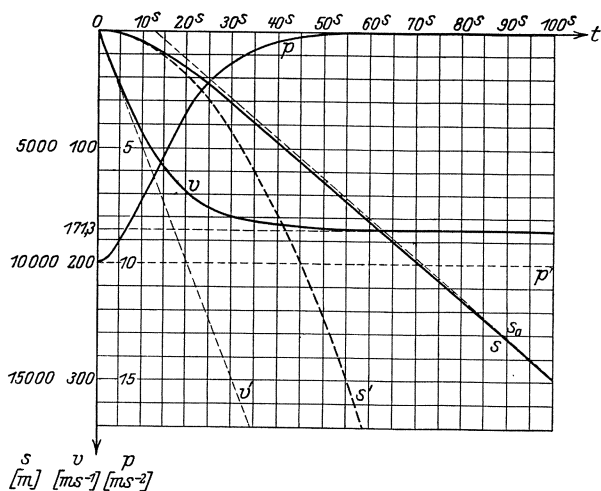


Abb. 81.

asymptotisch anschmiegt. Zugleich ist die Weg-Zeit-Kurve s' eingezeichnet für den Fall im luftleeren Raume; die Differenz der Ordinaten von s und s_0 gibt die Strecke, um welche die Kugel infolge des Luftwiderstandes zurückbleibt.

Um den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t beim Falle im luftgefüllten Raume zu finden, müssen wir $s = \frac{v_1^2}{g} \cdot \ln \text{Co}f \frac{gt}{v_1}$ nach t differenzieren. Wir setzen:

$$s = \frac{v_1^2}{g} \cdot \ln u, \quad u = \text{Co}f z, \quad z = \frac{g}{v_1} t;$$

es ist

$$\frac{ds}{du} = \frac{v_1^2}{g} \cdot \frac{1}{u} = \frac{v_1^2}{g \text{Co}f \frac{g}{v_1} t},$$

$$\frac{du}{dz} = \text{Sin} z = \text{Sin} \frac{g}{v_1} t, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{g}{v_1},$$

also

$$\frac{ds}{dt} = \frac{v_1^2}{g \cdot \mathfrak{Cof} \frac{g}{v_1} t} \cdot \mathfrak{Sin} \frac{g}{v_1} t \cdot \frac{g}{v_1} = v_1 \cdot \mathfrak{I}g \frac{g}{v_1} t;$$

$$v = v_1 \cdot \mathfrak{I}g \frac{g}{v_1} t \quad \text{und} \quad t = \frac{v_1}{g} \cdot \mathfrak{Ar} \mathfrak{I}g \frac{v}{v_1}. \quad \text{c)}$$

Jetzt können wir auch die Größe v_1 deuten; wächst nämlich t über alle Grenzen hinaus, so wird auch $\frac{g}{v_1} t$ unendlich groß, und damit nähert sich $\mathfrak{I}g \frac{g}{v_1} t$ dem Grenzwerte 1, v also der Grenze v_1 :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = v_1.$$

Die Geschwindigkeit nähert sich also einem bestimmten Grenzwerte, eben der stationären Geschwindigkeit, und zwar kommt sie schon in verhältnismäßig kurzer Zeit dieser sehr nahe, wie der Verlauf der $\mathfrak{I}g$ -Funktion lehrt. Praktisch geht demnach der Fall im luftgefüllten Raume sehr bald in die gleichförmige Bewegung über. In unserem Zahlenbeispiele ist

$$v = 171,3 \cdot \mathfrak{I}g 0,0572 t \text{ m sec}^{-1};$$

und hieraus ergeben sich mit Hilfe einer Tabelle der $\mathfrak{I}g$ -Funktion

für $t = 0$	5	10	20	30	40	50	60 sec
die Werte $v = 0$	47,7	88,5	139,8	160,6	167,8	170,2	170,9 m sec ⁻¹ .

(Abb. 81: v -Kurve, im Vergleich dazu v' -Kurve für den Fall im luftleeren Raume.)

Die Beschleunigung-Zeit-Beziehung stellt sich folgendermaßen dar: Es ist die Beschleunigung $p = \frac{dv}{dt}$; also nach der Kettenregel

$$p = v_1 \cdot \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 \frac{g}{v_1} t} \cdot \frac{g}{v_1}$$

oder

$$p = \frac{g}{\mathfrak{Cof}^2 \frac{g}{v_1} t} \quad \text{und} \quad t = \frac{v_1}{g} \mathfrak{Ar} \mathfrak{Cof} \sqrt{\frac{g}{p}}. \quad \text{d)}$$

Die Beschleunigung nähert sich demnach sehr rasch dem Werte Null. In unserem Zahlenbeispiele ist

$$p = \frac{9,81}{\mathfrak{Cof}^2 0,0572 t} \text{ m sec}^{-2};$$

für $t = 0$	5	10	20	30	40	50	60	70	80 sec
wird $p = 9,81$	9,05	7,19	3,28	1,19	0,396	0,128	0,041	0,013	0,004 m sec ⁻² .

(Abb. 81: p -Kurve, im Vergleich dazu p' -Kurve im luftleeren Raume.)

Zur Abrundung des Beispiels wollen wir noch kurz auf die Weg-Geschwindigkeits-, Weg-Beschleunigungs- und Geschwindigkeits-Be-

schleunigungs-Beziehungen und ihre Schaubilder eingehen. Aus a) folgt

$$\mathfrak{Cof} \frac{gt}{v_1} = e^{\frac{g}{v_1^2} s};$$

da nun

$$\mathfrak{Sg} x = \frac{\mathfrak{S} \sin x}{\mathfrak{Cof} x} = \frac{\sqrt{\mathfrak{Cof}^2 x - 1}}{\mathfrak{Cof} x} = \sqrt{1 - \mathfrak{Cof}^{-2} x}$$

ist, so ist

$$\mathfrak{Sg} \frac{g}{v_1} t = \sqrt{1 - \mathfrak{Cof}^{-2} \frac{g}{v_1} t} = \sqrt{1 - e^{-2 \frac{g}{v_1^2} s}}$$

also mit Hilfe von c)

$$v = v_1 \cdot \sqrt{1 - e^{-2 \frac{g}{v_1^2} s}} \quad \text{oder} \quad s = \frac{v_1^2}{2g} \cdot \ln \frac{v_1^2}{v_1^2 - v^2} \quad \text{e)}$$

und mit Hilfe von d)

$$p = g \cdot e^{-2 \frac{g}{v_1^2} s} \quad \text{oder} \quad s = \frac{v_1^2}{2g} \cdot \ln \frac{g}{p}. \quad \text{f)}$$

Schließlich folgt durch Verbindung der beiden Formeln c) und d) die Geschwindigkeit-Beschleunigungs-Beziehung

$$p = g \left(1 - \mathfrak{Sg}^2 \frac{g}{v_1} t \right),$$

also

$$p = g \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2} \right) \quad \text{oder} \quad v = v_1 \sqrt{1 - \frac{p}{g}}. \quad \text{g)}$$

Formel g) bestätigt die anfangs über den Fall im luftgefüllten Raume gemachte Annahme, daß der Luftwiderstand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit sein soll; denn es ist $p = g - \frac{g}{v_1^2} v^2$, d. h. die Schwerebeschleunigung g wird in jedem Augenblicke vermindert um eine Größe $\frac{g}{v_1^2} v^2$; diese Verzögerung ist in der Tat dem Quadrate der augenblicklichen Geschwindigkeit proportional. Für unser Zahlenbeispiel gestalten sich die Formeln folgendermaßen:

$$v = 171,3 \cdot \sqrt{1 - e^{-0,000668 s}} \text{ msec}^{-1}$$

oder

$$s = 1495 \cdot \ln \frac{29340}{29340 - v^2} \text{ m} = 3442 \cdot \log \frac{29340}{29340 - v^2} \text{ m} \quad (\text{s. Abb. 82}),$$

$$p = 9,81 \cdot e^{-0,000668 s} \text{ msec}^{-2}$$

oder

$$s = 1495 \cdot \ln \frac{9,81}{p} \text{ m} = 3442 \cdot \log \frac{9,81}{p} \text{ m} \quad (\text{s. Abb. 82}),$$

$$p = 9,81 \cdot \left(\frac{v^2}{29340} \right) \text{ msec}^{-2}$$

oder

$$v = 171,3 \cdot \sqrt{1 - \frac{p}{9,81}} \text{ msec}^{-2} \text{ (s. Abb. 83).}$$

Folgende Fragen mögen zur rechnerischen Einübung im Gebrauche der hyperbolischen Funktionen beantwortet werden:

a) Wie groß sind nach 8, 35, 100 Sekunden die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und die Fallhöhe? ($p = 8,011; 0,6930; 0,0004 \text{ msec}^{-2}$. $v = 75,84; 165,2; 141,3 \text{ msec}^{-1}$. $s = 303,4; 3967; 1,5049 \text{ m}$.)

b) Wann hat der Körper eine Strecke von 10, 100, 1000, 10000 m durchfallen und wie groß sind die zu diesen Strecken gehörigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen? ($t = 1,414; 4,532; 15,07; 70,41 \text{ sec}$. $v = 13,97; 43,54; 119,6; 171,2 \text{ msec}^{-1}$. $p = 9,745; 9,176; 5,030; 0,012 \text{ msec}^{-2}$.)

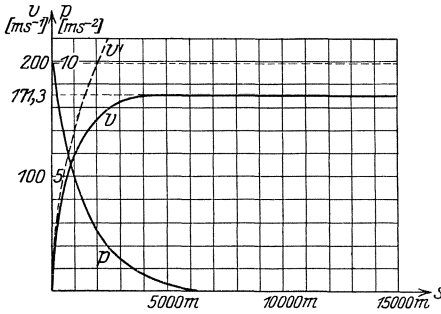


Abb. 82.

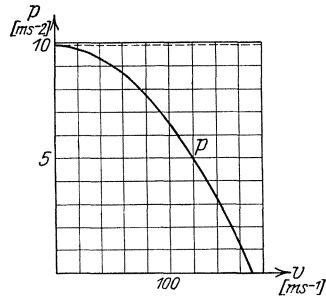


Abb. 83.

Wir sind hiermit ans Ende des ersten Abschnittes gelangt. Die bisherigen Erörterungen galten der Klarlegung des Begriffes der Funktion, ihrer rechnerischen Untersuchung und zeichnerischen Darstellung, insbesondere der Entwicklung ihres (ersten) Differentialquotienten und der mit ihm zusammenhängenden Eigenschaften (Kurventangente, Höchst- und Tiefstwerte usw.) der Funktion bzw. Kurve. Theorie und Praxis führen aber auf zahlreiche Aufgaben, die nicht durch die Differentiation, sondern nur durch die Umkehroperation — die sog. Integration — gelöst werden können. Begriff, Verfahren und Anwendung dieser neuen Rechenoperation sind der wesentliche Inhalt des folgenden Abschnittes.

Das Integrieren.

§ 1. Das Problem und die Grundformeln.

(61) Wir beginnen mit einem Beispiele: Ein in voller Fahrt befindlicher Wagen habe eine Geschwindigkeit c ($= 20 \text{ msec}^{-1}$); infolge der Reibung und anderer Einflüsse vermindere sich diese von einem Augenblicke $t = 0$ an in jeder Sekunde um p ($= 0,2 \text{ msec}^{-2}$), so daß sie nach t Sekunden noch

$$v = c - pt \quad (v = (20 - 0,2t) \text{ msec}^{-1}) \quad 1)$$

beträgt. Welchen Weg hat der Wagen bis zu diesem Zeitpunkte zurückgelegt?

Es ist nach dem Wege s gefragt, den der Wagen zurückgelegt hat; unsere früheren Betrachtungen lehren uns nun, daß der Differentialquotient des Weges nach der Zeit die Geschwindigkeit ergibt; folglich besteht die Gleichung $\frac{ds}{dt} = c - pt$. Es ist selbstverständlich, daß s ebenfalls eine Funktion von t sein muß. Allerdings kennen wir sie noch nicht, wohl aber ihren Differentialquotienten; die Aufgabe läuft also darauf hinaus, s so als Funktion von t zu bestimmen, daß $\frac{ds}{dt} = c - pt$ wird. Wenn wir auf Grund der in der Differentialrechnung gewonnenen Ergebnisse diese Funktion aufstellen wollen, so können wir so vorgehen: $c - pt$ ist eine algebraische Summe; demnach muß die gesuchte Funktion, deren Differentialquotient ja diese Summe sein soll, ebenfalls eine Summe sein (Summenregel!). Das erste Glied der gesuchten Summe muß $c \cdot t$ heißen; denn nur dann ergibt sich als Differentialquotient nach t die Konstante c . Ebenso sieht man leicht, besonders wenn man pt in der Form $\frac{p}{2} \cdot 2t$ schreibt, daß das zweite Glied der gesuchten Summe nur $\frac{p}{2} \cdot t^2$ heißen kann; denn $\frac{p}{2} \cdot t^2$ gibt nach t differenziert $\frac{p}{2} \cdot 2t = p \cdot t$. Die gesuchte Funktion muß also sicher die beiden Glieder $ct - \frac{p}{2} t^2$ enthalten. Es fragt sich nun weiter, ob sie vielleicht

noch andere Glieder enthalten kann. Daß sie keine weiteren Glieder zu enthalten braucht, sehen wir daran, daß

$$\frac{d\left(ct - \frac{p}{2}t^2\right)}{dt} = c - pt,$$

also gleich der gegebenen Funktion ist. Hieraus ergibt sich aber sofort, daß die Funktion höchstens noch Glieder enthalten kann, die, nach t differenziert, verschwinden. Solche Glieder sind aber nur Konstante, die man natürlich in eine zusammenzieht. Fügen wir demnach zu dem obigen Ausdrucke noch irgendein von t unabhängiges Glied C hinzu, so erhalten wir die allgemeinste Funktion, deren Differentialquotient gleich $c - pt$ ist; sie heißt $s = C + ct - \frac{1}{2}pt^2$. Man nennt s das Integral der Funktion $c - pt$ und schreibt

$$s = \int (c - pt) \cdot dt = C + ct - \frac{1}{2}pt^2.$$

Die Konstante C heißt Integrationskonstante; über sie ist dabei nichts Näheres ausgesagt; sie kann beliebige Werte haben. Insofern liegt in dem Integrale noch eine Unbestimmtheit, und man nennt daher ein solches Integral ein unbestimmtes Integral. Die Aufgabe, s aus $\frac{ds}{dt}$ zu finden, hat hiernach zunächst unendlich viele Lösungen. Es ist also festzustellen, welche von ihnen die tatsächliche Bewegung des Wagens darstellt.

Wir haben gefunden, daß der Wagen bis zum Zeitpunkte t den Weg

$$s = C + ct - \frac{1}{2}pt^2 \quad 2)$$

zurückgelegt hat. Die Frage nach dem Weg des Wagens hat aber nur dann einen bestimmten Sinn, wenn der Anfangspunkt des Weges gegeben ist. Da die Bremswirkung im Augenblicke $t = 0$ einsetzt, der Wagen sich aber schon vorher mit der Geschwindigkeit c bewegte, so hat er bereits einen bekannten Weg zurückgelegt, für den aus der Formel 2) der Betrag ($t = 0$) $s = C$ folgt. Damit hat die Integrationskonstante in unserem Beispiele eine bestimmte Bedeutung gewonnen: sie ist gleichbedeutend mit dem Wege, den der Wagen vor Beginn der Verzögerung schon zurückgelegt hatte, oder auch die Entfernung des Ausgangspunktes seiner Bahn von dem Punkte, wo die Bremswirkung anhebt. Man sieht auch leicht ein, daß die Kenntnis der Geschwindigkeit allein nicht ausreichen kann, um die Bewegung vollständig zu beschreiben. Will man insbesondere durch die Formeln nur den Weg darstellen, auf dem die Bremsung wirkt, so hat man $C = 0$ zu setzen, und die Formel lautet dann $s = ct - \frac{1}{2}pt^2$, in unserem Zahlenbeispiele $s = (20t - 0,1t^2)$ m. Nach ihr ist

nach $t = 0$	1	2	3	4	5	6	7 sec
$s = 0$	19,9	39,6	59,1	78,4	97,5	116,4	135,1 m.

Da die Geschwindigkeit immer kleiner wird, muß sie schließlich $= 0$ werden. Nach 1) tritt dies ein zur Zeit $t = 10$ sec. Also beträgt der Weg, den der Wagen zurücklegt, um von der Geschwindigkeit $a = 20 \text{ msec}^{-1}$ bis zum Stillstand zu kommen, der Bremsweg

$$s = (20 \cdot 100 - 0,1 \cdot 100^2) \text{ m} = (2000 - 1000) \text{ m} = 1 \text{ km}.$$

Wäre uns bekannt, daß der Wagen bis zum Beginne des Bremsens schon 17 km gefahren ist, so könnten wir jetzt die ganze Wegstrecke des Wagens bis zum Stillstande angeben: sie betrüge 18 km.

(62) Wir wollen nun verallgemeinern: Ist uns irgendeine Funktion von x $f(x)$ gegeben, so nennen wir diejenige Funktion $F(x)$, von welcher $f(x)$ der Differentialquotient nach der Veränderlichen x ist, das Integral von $f(x)$ über die Veränderliche x und schreiben

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx \quad 3)$$

(gesprochen: „Groß F von x ist gleich Integral über klein f von x mal dx “). Der Sinn dieser Ausdrucksweise und der Grund für diese Schreibweise wird uns im weiteren Verlaufe klar werden; jetzt sei nur gesagt, daß das Zeichen \int , das Integralzeichen, aus einem gestreckten großen lateinischen S entstanden ist. Die Veränderliche x heißt Integrationsveränderliche (Integrationsvariable), die Funktion $f(x)$ der Integrand, die Funktion $F(x)$ das Integral. Die Probe darauf, ob $F(x)$ wirklich das Integral von $f(x)$ ist, besteht naturgemäß darin, daß

$$\frac{dF(x)}{dx} \equiv f(x) \quad 4)$$

ist; durch Einsetzen von 3) in 4) folgt die identische Gleichung:

$$\frac{d[\int f(x) dx]}{dx} \equiv f(x). \quad 5)$$

Es ist leicht einzusehen, daß auch jetzt, wenn $F(x)$ ein Integral von $f(x)$ ist, jede Funktion $F(x) + C$, wobei C irgendeine von der Integrationsveränderlichen x unabhängige Größe, eine Integrationskonstante ist, ebenfalls ein Integral von $f(x)$ ist. Folglich hat $f(x)$ unendlich viele Integrale. Daß sie außer den in dem Ausdrucke $F(x) + C$ enthaltenen keine weiteren Integrale haben kann, wollen wir nun beweisen.

Sind nämlich zwei Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ Integrale von $f(x)$, so daß also $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ und $\frac{dG(x)}{dx} = f(x)$ ist, so muß die Gleichung gelten

$$\frac{dG(x)}{dx} - \frac{dF(x)}{dx} = 0;$$

nach der Summenregel ist aber

$$\frac{dG(x)}{dx} - \frac{dF(x)}{dx} \equiv \frac{d[G(x) - F(x)]}{dx}.$$

Also muß auch

$$\frac{d[G(x) - F(x)]}{dx} = 0$$

sein, d. h. der Differentialquotient der neuen Funktion $G(x) - F(x)$ muß den Wert Null haben. Nun gibt es aber keine Funktion von x , deren Differentialquotient für jeden Wert von x gleich Null ist; dies trifft nur für eine von x unabhängige, für eine konstante Größe zu. Also muß $G(x) - F(x) = C$ sein oder $G(x) = F(x) + C$; d. h. alle Integrale desselben Integranden unterscheiden sich nur um eine Integrationskonstante. Damit ist der Beweis erbracht.

Wir können uns diesen Satz auch geometrisch veranschaulichen: Sind nämlich $F(x)$ und $G(x)$ zwei Funktionen, die für jedes beliebige x denselben Differentialquotienten haben, so müssen ihre Kurven für gleiche Abszissen x auch stets die gleiche Tangentenrichtung besitzen.

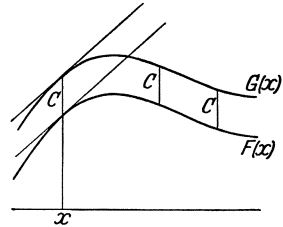


Abb. 84.

Das ist, wie die Anschauung lehrt, nur dann möglich, wenn die Differenz C der zu einer und derselben Abszisse gehörigen Ordinaten stets die gleiche, d. h. $G(x) - F(x) = C$ oder $G(x) = F(x) + C$ ist. Die Kurve $y = G(x)$ geht aus der Kurve $y = F(x)$ dadurch hervor, daß man diese um das Stück C im Sinne der y -Achse verschiebt.

(63) Kennt man demnach ein Integral einer Funktion, so kann man aus ihm beliebig viele neue zu der gleichen Funktion gehörige Integrale bilden, indem man beliebige Konstanten hinzufügt.

Die Kernfrage der Integration lautet daher: Wie findet man irgend ein Integral der gegebenen Funktion? Offenbar ist diese Aufgabe für alle die Funktionen bereits gelöst, die als Differentialquotienten beim Differenzieren entstanden sind. Wie die anderen Umkehroperationen (Dividieren, Radizieren usw.) setzt also das Integrieren eine völlige Sicherheit und Gewandtheit in der Ausgangsoperation, hier also im Differenzieren, voraus, insbesondere ist unbedingt eine sichere Kenntnis der Differentialquotienten der einfachen Funktionen notwendig. Ferner liegt es nahe zu versuchen, Integrationsregeln durch Umkehrung der Differentiationsregeln abzuleiten.

Aber die so gefundenen Verfahren genügen nicht, um jede beliebige Funktion zu integrieren, sondern es bleiben noch unzählig viele Funktionen übrig, die wir nicht integrieren können. Dabei ist mit dem

Ausdrücke „eine Funktion nicht integrieren können“ gemeint, daß sich keine der uns bisher geläufigen, im 1. Abschnitt behandelten Funktionen und keine Verknüpfung aus ihnen finden läßt, deren Differentialquotient die gegebene Funktion ist. Da der einfachste Weg zur Gewinnung von Integralen der ist, Gleichungen, die durch Differenzieren entstanden sind, umzukehren, so beginnen wir mit einer Zusammenstellung der Grundformeln der Differentiation.

Die Differentiation der algebraischen Funktion ließ sich stets auf die Grundformel

$$\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

zurückführen, wobei n eine beliebige Zahl sein kann. Die Differentiation der goniometrischen Funktionen lieferte die Grundformeln

$$\begin{aligned} \frac{d \sin x}{dx} &= \cos x, & \frac{d \cos x}{dx} &= -\sin x, \\ \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} &= \frac{1}{\cos^2 x}, & \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

und die der zyklometrischen Funktionen die Grundformeln

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{arcsin} x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \frac{d \operatorname{arccos} x}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} &= \frac{1}{1+x^2}, & \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Die logarithmische Funktion führte zu der Formel

$$\frac{d {}^a \log x}{dx} = \frac{1}{x} {}^a \log e = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad \text{insbes.} \quad \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x},$$

und die Exponentialfunktion zu der Formel

$$\frac{d a^x}{dx} = a^x \cdot \ln a \quad \text{bzw.} \quad \frac{d e^x}{dx} = e^x.$$

Schließlich erhielten wir aus den hyperbolischen und den dazu inversen Funktionen die Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{Sh} x}{dx} &= \operatorname{Co} x, & \frac{d \operatorname{Co} x}{dx} &= \operatorname{Sh} x, \\ \frac{d \operatorname{Th} x}{dx} &= \frac{1}{\operatorname{Co}^2 x}, & \frac{d \operatorname{Ct} x}{dx} &= -\frac{1}{\operatorname{Sh}^2 x}; \\ \frac{d \operatorname{Ar} \operatorname{Sh} x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, & \frac{d \operatorname{Ar} \operatorname{Co} x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \\ \frac{d \operatorname{Ar} \operatorname{Th} x}{dx} &= \frac{1}{1-x^2}, & \frac{d \operatorname{Ar} \operatorname{Ct} x}{dx} &= \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Durch Umkehrung dieser Formeln erhalten wir die grundlegenden Integralformeln. Da $\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ ist, so ist nach Definition $\int n \cdot x^{n-1} dx = x^n$. Der Integrand ist $n \cdot x^{n-1}$. Wir können ihn einfacher gestalten; es ist nämlich

$$\frac{d\left(\frac{1}{n} x^n\right)}{dx} = x^{n-1}, \quad \text{also} \quad \int x^{n-1} dx = \frac{1}{n} x^n.$$

Setzen wir hierin $n + 1$ statt n , so folgt als erste Grundformel

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (6)$$

wobei C die stets hinzuzufügende bzw. zu ergänzende Integrationskonstante ist. Formel 6) gilt für jedes beliebige n , ob es nun positiv, negativ, rational oder irrational ist, mit der einzigen Ausnahme $n = -1$! Denn für diesen Fall würde sich aus Formel 6) der unsinnige Ausdruck ergeben:

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{x^0}{0} + C = \frac{1}{0} + C = \infty + C.$$

Die Frage nach $\int x^{-1} dx$ wird durch Formel 93) S. 136 beantwortet, nach welcher $\frac{1}{x} = \frac{d \ln x}{dx}$ ist, und aus der sich ergibt:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \quad (6a)$$

Man versäume nicht, zur Einübung von Formel 6) genügend Übungsbeispiele zu bilden. So ist

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2} = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C, \quad \int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

[man setze in 6) $-n$ statt n !],

$$\int \sqrt[3]{x^4} dx = \frac{3}{7} \cdot \sqrt[3]{x^7} + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3 \cdot \sqrt[3]{x} + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{3}{2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + C.$$

Auch die übrigen Formeln lassen sich leicht umkehren. Aus den Formeln 78) bis 81) S. 104ff. erhalten wir

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Aus den Formeln 83) bis 86) S. 129

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C',$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctg x + C = -\operatorname{arccotg} x + C'.$$

[Warum widersprechen die beiden letzten Gleichungen nicht dem oben bewiesenen Satze, daß alle Integrale derselben Funktion sich nur um eine Konstante unterscheiden? Vgl. (50) S. 129.]

Weiter folgen aus den Formeln 96) S. 141 die Formeln

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C$$

und aus den Formeln 104) S. 151 und 107) S. 152 die folgenden:

$$\int \mathfrak{C}o|x dx = \mathfrak{S}in x + C, \quad \int \mathfrak{S}in x dx = \mathfrak{C}o|x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\mathfrak{C}o|x^2} = \mathfrak{I}g x + C, \quad \int \frac{dx}{\mathfrak{S}in^2 x} = -\mathfrak{C}t g x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathfrak{A}r \mathfrak{S}in x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathfrak{A}r \mathfrak{C}o|x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C,$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathfrak{A}r \mathfrak{I}g x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C \text{ für } |x| < 1,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\mathfrak{A}r \mathfrak{C}t g x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C \text{ für } |x| > 1.$$

In den letzten vier Formeln sind zugleich die Logarithmenfunktionen mit angegeben, durch welche sich nach (59) S. 151f. die Areafunktionen ersetzen lassen.

Zur besseren Übersicht wollen wir die jetzt aufgestellten Grundformeln und die späteren Formeln in gewisse Gruppen einteilen. Maßgebend für diese Einteilung kann nur der Integrand sein; denn dieser ist das Gegebene. Es ergeben sich ungezwungen drei große Gruppen, je nachdem der Integrand I) eine rationale, II) eine irrationale oder III) eine transzendente Funktion ist. So wissen wir jederzeit, in welcher Gruppe wir ein Integral zu suchen haben. Unter diesem Gesichtspunkte wollen wir die Grundintegrale (unter Weglassung der jedesmal zu ergänzenden Integrationskonstanten) nochmals zusammenstellen:

$$\begin{array}{l}
 \text{I. a) } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1; \\
 \text{b) } \int \frac{dx}{x} = \ln x; \\
 \text{c) } \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x; \\
 \text{d) } \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar} \mathfrak{I}g x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}; \\
 \text{e) } \int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{Ar} \mathfrak{C}tg x = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}; \\
 \text{II. f) } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x = -\operatorname{arccos} x; \\
 \text{g) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Ar} \mathfrak{S}in x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}); \\
 \text{h) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Ar} \mathfrak{C}os x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}); \\
 \text{III. i) } \int \sin x dx = -\cos x; \quad \text{k) } \int \cos x dx = +\sin x; \\
 \text{l) } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x; \quad \text{m) } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x; \\
 \text{n) } \int \mathfrak{S}in x dx = \mathfrak{C}os x; \quad \text{o) } \int \mathfrak{C}os x dx = \mathfrak{S}in x; \\
 \text{p) } \int \frac{dx}{\mathfrak{S}in^2 x} = -\mathfrak{C}tg x; \quad \text{q) } \int \frac{dx}{\mathfrak{C}os^2 x} = \mathfrak{I}g x; \\
 \text{r) } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}; \quad \text{s) } \int e^x dx = e^x.
 \end{array}
 \tag{7}$$

Man gewöhne sich von Anfang an daran, die Differential- und die Integralformeln scharf auseinanderzuhalten! So beachte man, daß zwar $\frac{d \sin x}{dx} = +\cos x$, aber $\int \sin x dx = -\cos x$ ist usw., und daß wir zwar $\operatorname{tg} x$ differenzieren können, daß aber $\int \operatorname{tg} x dx$ unter den Grundformeln nicht zu finden ist. [Über dieses s. (66) S. 170.]

Die Formelgruppe 7) bildet den Ausgang für alle Integrationen; die Kunst des Integrierens besteht einzig darin, den Integranden nach Möglichkeit so umzuformen, daß man nur noch die Formeln 7) anzuwenden braucht. Ist eine solche Umformung nicht möglich, so ist dies ein Zeichen dafür, daß das Integral eine bisher unbekannte Funktion ist.

Im nächsten Paragraphen wollen wir die wichtigsten Integrationsregeln aufstellen, die in erster Linie geeignet sind, ein Integral auf ein Grundintegral zurückzuführen.

§ 2. Die wichtigsten Integrationsregeln.

(64) Wir gehen von den Differentiationsregeln aus. Die erste war die Konstantenregel (s. S. 41); nach ihr ist

$$\frac{d[aF(x)]}{dx} = a \cdot \frac{dF(x)}{dx}.$$

Die entsprechende Formel der Integralrechnung lautet

$$\int a \cdot f(x) \cdot dx = a \cdot \int f(x) dx; \quad 8)$$

in Worten: Ein konstanter Faktor des Integranden kann vor das Integralzeichen gesetzt werden (Konstantenregel). Beweis: Differenziert man die linke Seite von 8) nach x , so erhält man den Integranden $a \cdot f(x)$; die rechte Seite ergibt, nach x differenziert, nach der Konstantenregel der Differentialrechnung $a \cdot \frac{d \int f(x) dx}{dx}$, also ebenfalls $a \cdot f(x)$.

Beispiel:

$$\int 2\pi x \cdot dx = 2\pi \int x dx = 2\pi \cdot \frac{x^2}{2} = \pi x^2.$$

Eine weitere Differentiationsregel ist die Summenregel [s. (21) S. 43], nach der

$$\frac{d(F_1(x) + F_2(x))}{dx} = \frac{dF_1(x)}{dx} + \frac{dF_2(x)}{dx}$$

ist. Die entsprechende Integrationsformel lautet:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] \cdot dx = \int f_1(x) \cdot dx + \int f_2(x) \cdot dx. \quad 9)$$

Eine Summe aus einer endlichen Anzahl von Funktionen wird gliedweise integriert (Summenregel).

Beweis: Differenzieren wir die linke Seite von 9), so erhalten wir $f_1(x) + f_2(x)$; wenden wir auf die rechte Seite die Summenregel der Differentiation an, so erhalten wir ebenfalls $f_1(x) + f_2(x)$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int (a \sin x + b \cos x) dx &= -a \cos x + b \sin x + C. \\ \int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx &= \int \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^3} dx = \int \left[x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2 \ln x - \frac{1}{2x^2} + C. \end{aligned}$$

(65) Zum leichteren Verständnis der nächsten Regel wollen wir zuvor ein Beispiel behandeln. Es soll das Integral $\int (a + bx)^n dx$ ausgewertet werden. Ist n eine natürliche Zahl, so könnte man sich dadurch helfen, daß man $(a + bx)^n$ nach dem binomischen Satze [s. (36) S. 82 ff.] nach steigenden Potenzen von x entwickelt und dann gliedweise integriert. Doch führt dieses Verfahren bei nur einigermaßen größeren Werten

von n praktisch zu Schwierigkeiten und ist für Werte von n , die keine natürlichen Zahlen sind, überhaupt undurchführbar. Wir greifen hier auf die Kettenregel der Differentialrechnung zurück. Setzen wir nämlich $a + bx = z$, indem wir also statt x die neue Veränderliche z einführen, so können wir schreiben

$$\int (a + bx)^n dx = \int z^n dx.$$

Nun darf aber, damit wir die Grundformel 7) Ia anwenden können, nur eine Veränderliche unter dem Integrale auftreten. Aus $z = a + bx$ folgt aber

$$x = \frac{z - a}{b}, \quad \text{daher} \quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{b}, \quad dx = \frac{dz}{b}.$$

Setzen wir dies oben ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int (a + bx)^n dx &= \int z^n \cdot \frac{dz}{b} = \frac{1}{b} \int z^n dz \\ &= \int (a + bx)^n dx = \frac{1}{b} \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C. \end{aligned}$$

Durch Differenzieren können wir uns leicht von der Richtigkeit der Integration überzeugen. Der Weg der Integration ist genau entgegengesetzt zu dem bei der Differentiation eingeschlagenen. Wir haben — und das ist der Kern der Methode — durch Einführung (Substitution) einer neuen Integrationsveränderlichen das ursprüngliche Integral auf ein Grundintegral zurückgeführt. Das Verfahren, von dem wir hier ein Beispiel durchgeführt haben, heißt daher die Substitutionsmethode; sie soll jetzt allgemein entwickelt werden.

Ist ein Integral $\int f(x) dx$ gegeben und wollen wir durch die Gleichung $x = \varphi(z)$ eine neue Integrationsveränderliche z einführen, so müssen wir bedenken, daß $\frac{dx}{dz} = \varphi'(z)$, also $dx = \varphi'(z) \cdot dz$ ist. Wir erhalten also:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) \cdot dz, \quad \text{Substitutionsregel. } 10)$$

Beweis: Differenziert man die linke Seite nach x , so erhält man $f(x)$. Die rechte Seite ist eine Funktion von z ; um sie nach x zu differenzieren, verwenden wir die Kettenregel. Die Differentiation nach z ergibt $f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)$. Da $x = \varphi(z)$ ist, so ist

$$\frac{dx}{dz} = \varphi'(z), \quad \text{also} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\varphi'(z)}$$

[s. (35)]; mit diesem Ausdrucke muß man $f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)$ nach der Kettenregel noch multiplizieren, um die rechte Seite auch nach x zu differenzieren. Der Differentialquotient der rechten Seite nach x ist demnach

$$f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) \cdot \frac{1}{\varphi'(z)} = f(\varphi(z)) = f(x),$$

also gleich dem oben für die linke Seite erhaltenen.

Man lasse sich durch die dem Anscheine nach verwickelte Gestalt der Formel 10) nicht täuschen. Man wendet dieses Verfahren eben nur dort an, wo die Einführung einer neuen Integrationsveränderlichen auf ein Grundintegral führt. Allerdings lassen sich allgemeingültige Vorschriften über die Wahl der Funktion $x = \varphi(z)$, durch welche das gegebene Integral eine möglichst günstige Form annimmt, nicht geben. Oft werden mehrere Wege gangbar sein. Erfahrung und Übung müssen hier viel tun. Die folgenden Erörterungen sollen zeigen, wie man die bekanntesten Fälle behandelt. Dabei werden wir einige wichtige neue Integrationsformeln gewinnen. Am Ende des Buches sind die häufig vorkommenden Integralformen zusammengestellt, und zwar eingeteilt nach der Art des Integranden in die drei oben (S. 164) angegebenen Gruppen I, II, III. Auf diese Tafel werden wir uns künftig häufig beziehen müssen; das wird abkürzend geschehen durch einen Hinweis, z. B. TII 3, der ohne weiteres verständlich sein dürfte.

a) $J = \int (3x + 7)^2 dx$; wir setzen $3x + 7 = z$ oder $x = \frac{z}{3} - \frac{7}{3}$, also $dx = \frac{1}{3} dz$ und erhalten

$$J = \int z^2 \cdot \frac{1}{3} dz = \frac{1}{3} \int z^2 dz = \frac{1}{9} z^3 = \frac{1}{9} (3x + 7)^3.$$

Es ist demnach

$$\int (3x + 7)^3 dx = \frac{1}{9} (3x + 7)^3.$$

Ein anderer Weg, um dieses Integral auszuwerten, ist folgender:

$$\int (3x + 7)^2 dx = \int (9x^2 + 42x + 49) dx = 3x^3 + 21x^2 + 49x.$$

(Zeige, daß beide Ergebnisse sich nur um die konstante Größe $\frac{343}{9}$ unterscheiden!)

$$\text{b) } J = \int \frac{dx}{ax + b}; \quad ax + b = z, \quad x = \frac{z}{a} - \frac{b}{a}, \quad dx = \frac{1}{a} dz;$$

$$J = \int \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a} dz = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{a} \ln z = \frac{1}{a} \ln(ax + b);$$

$$\text{also} \quad \int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln(ax + b). \quad [\text{TI 6}]$$

$$\text{c) } J = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \arcsin x = z, \quad dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad dx = \sqrt{1-x^2} \cdot dz;$$

$$J = \int \frac{z}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} dz = \int z dz = \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2} (\arcsin x)^2,$$

$$\text{also} \quad \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} (\arcsin x)^2.$$

$$\text{d) } J = \int \sin(ax + b) dx, \quad ax + b = z, \quad x = \frac{z}{a} - \frac{b}{a}, \quad dx = \frac{1}{a} dz;$$

$$J = \int \sin z \cdot \frac{1}{a} dz = \frac{1}{a} \int \sin z dz = -\frac{1}{a} \cos z = -\frac{1}{a} \cos(ax + b);$$

also
$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b).$$

e) $J = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$; wir setzen hier $x = az$, $dx = a \cdot dz$;

$$J = \int \frac{a dz}{a^2 z^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} z = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a},$$

also
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}. \quad [\text{TI 7}]$$

f) $J = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$; die gleiche Substitution wie e) führt zu

$$J = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z^2 - 1} = \frac{1}{2a} \ln \frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{2a} \ln \frac{\frac{x}{a} - 1}{\frac{x}{a} + 1} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$$

oder $J = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} z = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} \frac{x}{a}$;

also ist
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} \frac{x}{a}. \quad [\text{TI 8}]$$

g) $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; wir setzen wieder $x = az$, $dx = a \cdot dz$ und erhalten

$$J = \int \frac{a dz}{\sqrt{a^2 - a^2 z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \operatorname{arcsin} z = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a};$$

also
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a}. \quad [\text{TI I 4}]$$

h) $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$; mit der gleichen Substitution wie in g) ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{a dz}{\sqrt{a^2 z^2 - a^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Cov} z = \operatorname{Ar} \operatorname{Cov} \frac{x}{a} \\ &= \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right) = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}); \end{aligned} \quad [\text{TI I 5}]$$

letztere Formel, wenn man zur Integrationskonstanten $\ln a$ addiert. Probe durch Differenzieren. Leite auf gleichem Wege ab:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}). \quad [\text{TI I 6}]$$

Beide Formeln lassen sich auch vereinigen in der Formel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a}); \quad [\text{TI I 7}]$$

aus ihr ergibt sich [TI I 5] für $a > 0$ und [TI I 6] für $a < 0$.

(66) Eine besonders wertvolle Formel entsteht, wenn der Integrand ein Bruch ist, dessen Zähler der Differentialquotient des Nenners ist,

wenn also der Nenner $f(x)$ und der Zähler $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ist. Das Integral lautet dann $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx$. Setzen wir hier $f(x) = z$, dann ist $f'(x) = \frac{dz}{dx}$, also $f'(x) \cdot dx = dz$, und das ursprüngliche Integral geht über in

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \int \frac{dz}{z} = \ln z = \ln f(x);$$

also ist

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x). \quad (11)$$

Ist der Integrand ein Bruch, dessen Zähler der Differentialquotient des Nenners ist, so ist das Integral der natürliche Logarithmus des Nenners.

Von diesem Satze sollen ebenfalls einige Anwendungen folgen, die sich später als wertvoll erweisen werden.

a) $\int \frac{dx}{ax+b}$ kann geschrieben werden $= \frac{1}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx$; in dieser Form ist der Zähler a der Differentialquotient des Nenners $ax+b$. Folglich ist

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) \quad [\text{T I 6}]$$

in Übereinstimmung mit Beispiel (65) b).

b) $J = \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$; da $-\sin x$ der Differentialquotient von $\cos x$ ist, folgt $J = -\ln \cos x$, also

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x. \quad [\text{T III 11}]$$

Leite ab:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x! \quad [\text{T III 12}]$$

Dieses Integral bildet den Ausgangspunkt einer Reihe anderer Integrale, von denen anschließend die wesentlichsten abgeleitet werden mögen. Es ist unter Verwendung der geometrischen Formeln:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos x = \sin \left(\frac{x}{2} + x \right).$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx = \int [\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x] dx$$

$$= \int \operatorname{tg} x dx + \int \operatorname{ctg} x dx = -\ln \cos x + \ln \sin x = \ln \operatorname{tg} x,$$

also

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x. \quad [\text{T III 13}]$$

Folglich ist

$$\int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{dx}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x.$$

Hieraus berechnet sich $J = \int \frac{dx}{\sin x}$ mit Hilfe der Substitutin $x = 2z$ $dx = 2 dz$:

$$J = \int \frac{2 dz}{\sin 2z} = 2 \int \frac{dz}{\sin 2z} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

also

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \quad [\text{T III 14}]$$

Aus diesem folgt weiter

$$J = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)},$$

wenn wir setzen $\frac{\pi}{2} + x = z$, $dx = dz$:

$$J = \int \frac{dz}{\sin z} = \ln \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right),$$

also

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right). \quad [\text{T III 15}]$$

$$\text{e) } J = \int \frac{x+a}{x^2+2ax+b} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2a}{x^2+2ax+b} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2ax + b). \quad [\text{T I 9}]$$

Dieses Integral wird uns unten (67) gute Dienste leisten.

(67) Nachdem wir bisher nur Einzelfälle behandelt haben, wollen wir jetzt das Integrationsverfahren für zwei große Gruppen von Funktionen herleiten: für die rationalen gebrochenen Funktionen mit linearem bzw. mit quadratischem Nenner. Wir befassen uns zunächst mit der Integration einer beliebigen gebrochenen rationalen Funktion, deren Nenner vom ersten Grade ist. Der Integrand möge die Gestalt haben:

$$F = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}.$$

Nun wissen wir aus (30), daß sich jede unecht gebrochene rationale Funktion als Summe einer ganzen rationalen Funktion und einer echt gebrochenen rationalen Funktion schreiben läßt, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert. Der Integrand läßt sich also in der Form schreiben:

$$F = c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 + \frac{k}{b_1 x + b_0}.$$

Unter Verwendung der Summen- und der Konstantenregel werden die einzelnen Glieder nach [TI 1] integriert, während das letzte Glied nach Formel [TI 6] ergibt:

$$\int \frac{k}{b_1 x + b_0} dx = \frac{k}{b_1} \ln(b_1 x + b_0).$$

Wir erhalten also den Satz: Jede gebrochene rationale Funktion, deren Nenner vom ersten Grade ist, läßt sich integrieren, d. h. ihr Integral läßt sich aus uns bekannten Funktionen, nämlich einer ganzen rationalen Funktion und einer logarithmischen Funktion, zusammensetzen.

Ein Beispiel möge das Verfahren erläutern: Es sei $\int \frac{x^2 + x - 3}{2x - 5} dx$ auszuwerten. Wir schreiben

$$(x^2 + x - 3) : (2x - 5) = \frac{x}{2} + \frac{7}{4} + \frac{23}{4} \cdot \frac{1}{2x - 5},$$

so daß das Integral die Form annimmt:

$$\int \left(\frac{x}{2} + \frac{7}{4} + \frac{23}{4} \cdot \frac{1}{2x - 5} \right) dx.$$

Durch gliedweise Integration ergibt sich

$$\frac{x^2}{4} + \frac{7}{4}x + \frac{23}{8} \ln(2x - 5);$$

es ist also

$$\int \frac{x^2 + x - 3}{2x - 5} dx = \frac{x^2}{4} + \frac{7}{4}x + \frac{23}{8} \cdot \ln(2x - 5).$$

Wir gehen nun zu dem Falle über, daß der Integrand eine beliebige gebrochene rationale Funktion ist, deren Nenner vom zweiten Grade ist; er hat also die Gestalt

$$F = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}.$$

Man kann ihn — wiederum durch Division — verwandeln in eine Summe aus einer ganzen rationalen Funktion und einer echt gebrochenen rationalen Funktion, deren Nenner vom zweiten Grade ist. Die erstere läßt sich wieder gliedweise unter Verwendung der Konstantenregel (64) in Verbindung mit Formel [TI 1] integrieren; wir brauchen uns also nur mit der echt gebrochenen Funktion zu befassen, die die allgemeine Form hat: $\frac{c_1 x + c_0}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$. Wir kürzen den Bruch mit b_2 , damit das höchste Glied des Nenners den Beiwert +1 erhält; dann nimmt der Bruch die Gestalt an:

$$\frac{\alpha_1 x + \alpha_0}{x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0},$$

wenn man

$$\frac{c_1}{b_2} = \alpha_1, \quad \frac{c_0}{b_2} = \alpha_0, \quad \frac{b_1}{b_2} = 2\beta_1, \quad \frac{b_0}{b_2} = \beta_0$$

setzt. Zum besseren Verständnisse möge ein Zahlenbeispiel die allgemeine Entwicklung begleiten. Der Integrand sei $\frac{x^3}{2x^2 + 5x - 3}$, durch Ausdividieren geht er über in $\frac{x}{2} - \frac{5}{4} + \frac{31x - 15}{8x^2 + 20x - 12}$. Den letzten Bruch schreiben wir: $\frac{\frac{31}{8}x - \frac{15}{8}}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}}$. Der Zähler enthält zwei Glieder, ein lineares Glied $\alpha_1 x$ und ein Absolutglied α_0 . Wir formen nun den Integranden so um, daß wir einen Teil von ihm nach Formel 11) behandeln können. Der Differentialquotient des Nenners ist nämlich $2x + 2\beta_1$; schreiben wir also den Zähler

$$\alpha_1 x + \alpha_0 = \frac{\alpha_1}{2}(2x + 2\beta_1) + (\alpha_0 - \alpha_1\beta_1),$$

so können wir den Integranden spalten in zwei Brüche:

$$\frac{\alpha_1 x + \alpha_0}{x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0} = \frac{\alpha_1}{2} \cdot \frac{2x + 2\beta_1}{x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0} + \frac{\alpha_0 - \alpha_1\beta_1}{x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0}.$$

Das Integral über den ersten Bruch ist nach 11)

$$\frac{\alpha_1}{2} \ln(x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0);$$

es bleibt demnach nur noch das Integral auszuwerten

$$\int \frac{\alpha_0 - \alpha_1\beta_1}{x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0} dx = (\alpha_0 - \alpha_1\beta_1) \int \frac{dx}{x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0},$$

also ein Integral, dessen Zähler eine Konstante, die Zahl 1 ist. In unserem Zahlenbeispiele würde sich die Umformung so gestalten: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\frac{31}{8}x - \frac{15}{8}}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}} &= \frac{\frac{31}{16}(2x + \frac{5}{2}) + (-\frac{15}{8} - \frac{15 \cdot \frac{5}{2}}{8})}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}} \\ &= \frac{31}{16} \cdot \frac{2x + \frac{5}{2}}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}} - \frac{215}{32} \cdot \frac{1}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

also

$$\int \frac{\frac{31}{8}x - \frac{15}{8}}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}} dx = \frac{31}{16} \cdot \ln\left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) - \frac{215}{32} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}}.$$

Um nun noch das Integral

$$J = \int \frac{dx}{x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0}$$

auszuwerten, ergänzen wir die ersten beiden Glieder des Nenners des Integranden zu einem vollständigen Quadrat, formen also den Nenner um in

$$x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0 = (x + \beta_1)^2 - \beta_1^2 + \beta_0.$$

Nun müssen wir die beiden Fälle $\beta_1 > \beta_0$ und $\beta_1^2 < \beta_0$ getrennt behandeln.

a) Ist $\beta_1^2 > \beta_0$, so ist $\beta_1^2 - \beta_0$ positiv; man kann also setzen $\beta_1^2 - \beta_0 = \gamma^2$, wobei γ eine reelle Größe ist; das Integral geht dann über in

$$J = \int \frac{dx}{x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0} = \int \frac{dx}{(x + \beta_1)^2 - \gamma^2}.$$

Setzen wir jetzt $x + \beta_1 = z$, $dx = dz$, so ergibt sich weiter:

$$J = \int \frac{dz}{z^2 - \gamma^2} = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{z - \gamma}{z + \gamma} = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{x + \beta_1 - \gamma}{x + \beta_1 + \gamma},$$

also

$$\int \frac{dx}{(x + \beta_1)^2 - \gamma^2} = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{x + \beta_1 - \gamma}{x + \beta_1 + \gamma} \quad [\text{s. Formel TI 8}]. \quad 12)$$

Unser Zahlenbeispiel ist von dieser Art; denn es ist

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}} &= \int \frac{dx}{(x + \frac{5}{4})^2 - \frac{49}{16}} = \int \frac{dz}{z^2 - (\frac{7}{4})^2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{7}{4}} \ln \frac{z - \frac{7}{4}}{z + \frac{7}{4}} = \frac{2}{7} \ln \frac{x + \frac{5}{4} - \frac{7}{4}}{x + \frac{5}{4} + \frac{7}{4}} \\ &= \frac{2}{7} \ln \frac{2x - 1}{2x + 6}. \end{aligned}$$

Das betrachtete Zahlenbeispiel ergibt also vollständig ausgewertet

$$\begin{aligned} J = \int \frac{x^3}{2x^2 + 5x - 3} dx &= \frac{x^2}{4} - \frac{5}{4}x + \frac{31}{16} \ln \left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \right) \\ &\quad - \frac{215}{112} \ln \frac{2x - 1}{2x + 6}. \end{aligned}$$

b) Ist $\beta_1^2 < \beta_0$, so ist $\beta_0 - \beta_1^2 = \gamma^2$ positiv (γ eine reelle Größe), und das Integral geht über in

$$J = \int \frac{dx}{x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0} = \int \frac{dx}{(x + \beta_1)^2 + \gamma^2};$$

die Substitution $x + \beta_1 = z$, $dx = dz$ leitet über zu

$$J = \int \frac{dz}{z^2 + \gamma^2} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{x + \beta_1}{\gamma},$$

also

$$\int \frac{dx}{(x + \beta_1)^2 + \gamma^2} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{x + \beta_1}{\gamma} \quad [\text{s. Formel TI 7}]. \quad 13)$$

Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + x + \frac{1}{2}} &= \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \int \frac{dz}{z^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \operatorname{arctg} 2z = 2 \operatorname{arctg}(2x + 1). \end{aligned}$$

c) Den Übergang zwischen den beiden Fällen a) und b) bildet der Fall, daß $\beta_1^2 = \beta_0$ ist; dann gestaltet sich die Integration sehr einfach.

Es wird nämlich $J = \int \frac{dx}{(x + \beta_1)^2}$, und die Substitution $x + \beta_1 = z$,

$dx = dz$ führt zu

$$J = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x + \beta_1},$$

also

$$\int \frac{dx}{(x + \beta_1)^2} = -\frac{1}{x + \beta_1}. \quad (14)$$

Zusammenfassend können wir sagen: Jede gebrochene rationale Funktion, deren Nenner vom zweiten Grade ist, läßt sich integrieren, d. h. ihr Integral läßt sich aus uns bekannten Funktionen, und zwar rationalen Funktionen, der logarithmischen und der Arkustangensfunktion, zusammensetzen. Die dabei einzuschlagenden Schritte sind:

Erstens verwandelt man die Funktion, falls sie unecht gebrochen ist, in die Summe aus einer ganzen rationalen Funktion und einer echt gebrochenen rationalen Funktion.

Zweitens zerlegt man das Integral über die echt gebrochene rationale Funktion, deren Zähler linear ist, in die Summe zweier Integrale, von denen der Zähler des ersten Integranden — von einem konstanten Faktor abgesehen — der Differentialquotient des Nenners ist, während der Zähler des zweiten Integranden eine Konstante ist. Das erste Integral läßt sich leicht auswerten.

Drittens bringt man das zweite Integral durch quadratische Ergänzung im Nenner des Integranden und durch geeignete Substitutionen auf eine der drei Formen

$$\int \frac{dz}{z^2 - \gamma^2}, \quad \int \frac{dz}{z^2 + \gamma^2}, \quad \int \frac{dz}{z^2},$$

die nach den Formeln [TI 8], [TI 7], [TI 1] auszuwerten sind.

Zur Erläuterung des Verfahrens möge noch das Beispiel durchgeführt werden:

$$J = \int \frac{2x - 1}{3x^2 + x + 2} dx.$$

Der Integrand ist hier schon echt gebrochen; wir schreiben also sofort:

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2 + \frac{x}{3} + \frac{2}{3}} dx = \int \frac{\frac{1}{3}(2x + \frac{1}{3}) - \frac{4}{9}}{x^2 + \frac{x}{3} + \frac{2}{3}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{2x + \frac{1}{3}}{x^2 + \frac{x}{3} + \frac{2}{3}} dx - \frac{4}{9} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{x}{3} + \frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \right) - \frac{4}{9} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{x}{3} + \frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Weiter wird das Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{x}{3} + \frac{2}{3}} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36}} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{6}\right)^2} \\ &= \frac{6}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{23}}{6}} = \frac{6}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{6x + 1}{\sqrt{23}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also schließlich

$$\int \frac{2x - 1}{3x^2 + x + 2} dx = \frac{1}{3} \ln \left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \right) - \frac{8}{3\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{6x + 1}{\sqrt{23}};$$

fügen wir noch die konstante Größe $\frac{1}{3} \ln 3$ hinzu, so kommen wir zu dem etwas einfacheren Ergebnis

$$\int \frac{2x - 1}{3x^2 + x + 2} dx = \frac{1}{3} \ln(3x^2 + x + 2) - \frac{8}{3\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{6x + 1}{\sqrt{23}},$$

von dessen Richtigkeit man sich durch nachträgliches Differenzieren überzeuge.

Übungen!

(68) Wir wollen die Anwendung der Substitutionsregel nicht abschließen, ohne auch die wichtigsten und einfachsten Integrale mit irrationalem Integranden für spätere Verwendung abgeleitet zu haben. Es soll jetzt gezeigt werden, daß wir mit unseren bisherigen Mitteln jedes Integral von der Form

$$J = \int \frac{a_1 x + a_0}{\sqrt{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}} dx$$

auswerten können. Wir führen zuerst die Substitution

$$z = b_2 x^2 + b_1 x + b_0, \quad dz = (2b_2 x + b_1) dz$$

aus, indem wir schreiben:

$$\begin{aligned} J &= \frac{a_1}{2b_2} \int \frac{2b_2 x + b_1}{\sqrt{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}} dx + \left(a_0 - \frac{a_1 b_1}{2b_2} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}} \\ &= \frac{a_1}{2b_2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} + \left(a_0 - \frac{a_1 b_1}{2b_2} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}}. \end{aligned}$$

Das erste Integral ist nach [T I 1]

$$\frac{a_1}{2b_2} \cdot 2\sqrt{z} = \frac{a_1}{b_2} \sqrt{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}.$$

Das zweite Integral unterscheidet sich von J dadurch, daß der Zähler des Integranden nicht wie dort eine lineare Funktion, sondern eine Konstante ist. Es handelt sich also jetzt darum, ein Integral von der Form

$$J_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}}$$

auszuwerten. Hier sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden: a) $b_2 > 0$ und b) $b_2 < 0$.

a) Ist $b_2 > 0$, so schreiben wir

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0}},$$

wobei $\sqrt{b_2}$ reell ist und zur Abkürzung $2\beta_1 = \frac{b_1}{b_2}$ und $\beta_0 = \frac{b_0}{b_2}$ gesetzt sind. Nun erfolgt wiederum die quadratische Ergänzung:

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \beta_1)^2 + \beta_0 - \beta_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{b_2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \beta_1)^2 + c}},$$

wobei zur Abkürzung $c = \beta_0 - \beta_1^2$ gesetzt ist. Die Substitution $x + \beta_1 = z$, $dx = dz$ führt dieses Integral weiterhin über in

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + c}} = \frac{1}{\sqrt{b_2}} \ln(z + \sqrt{z^2 + c}) \quad [\text{T II 7}]$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0}} = \ln(x + \beta_1 + \sqrt{x^2 + 2\beta_1 x + \beta_0}). \quad (15)$$

Ist die Größe $c = \beta_0 - \beta_1^2 > 0$, so läßt sich nach Formel [TII6] statt der Logarithmenfunktion auch die Arcasinusfunktion, für $c < 0$ nach Formel [TII5] die Areakosinusfunktion verwenden.

b) Ist $b_2 < 0$, so schreiben wir

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{-b_2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\beta_0 + 2\beta_1 x - x^2}},$$

wobei $\sqrt{-b_2}$ reell ist und zur Abkürzung $2\beta_1 = -\frac{b_1}{b_2}$ und $\beta_0 = -\frac{b_0}{b_2}$ gesetzt sind. Die quadratische Ergänzung ergibt mit der Abkürzung

$$c^2 = \beta_1^2 + \beta_0,$$

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{-b_2}} \int \frac{dx}{\sqrt{c^2 - (x - \beta_1)^2}},$$

woraus mit Hilfe der Substitution $x - \beta_1 = z$, $dx = dz$ weiter folgt:

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{-b_2}} \int \frac{dz}{\sqrt{c^2 - z^2}} = \frac{1}{\sqrt{-b_2}} \arcsin \frac{z}{c} \quad [\text{T II 1}]$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\beta_0 + 2\beta_1 x - x^2}} = \arcsin \frac{x - \beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_0}}. \quad (16)$$

c) Im Falle $b_2 = 0$ ist der Radikand nur eine lineare Funktion, und das Integral

$$J_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{b_1 x + b_0}}$$

wird durch die Substitution $b_1 x + b_0 = z$ übergeführt in das Integral

$$J_1 = \frac{1}{b_1} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2}{b_1} \sqrt{z}$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b_1 x + b_0}} = \frac{2}{b_1} \sqrt{b_1 x + b_0}. \quad (17)$$

Hiermit ist gezeigt, daß wir in der Tat jedes Integral von der Form

$$\int \frac{a_1 x + a_0}{\sqrt{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}} dx$$

auswerten können. Eine Anzahl von Beispielen soll das Verfahren erläutern.

a) $J = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a}}$; Substitution $x^2 + a = z$, $2x dx = dz$, also

$$J = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{z} = \sqrt{x^2 + a}, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \sqrt{x^2 + a}. \quad [\text{T II 8}]$$

Zeige auf gleichem Wege, daß

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a - x^2}} = -\sqrt{a - x^2} \quad \text{ist.} \quad [\text{T II 9}]$$

$$\text{b) } J = \int \frac{dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x - r)^2}};$$

Substitution $x - r = z$, $dx = dz$:

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \arcsin \frac{z}{r} \quad [\text{T II 4}] = \arcsin \frac{x - r}{r},$$

also

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = \arcsin \frac{x - r}{r}. \quad [\text{T II 10}]$$

Leite ebenso ab:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 2rx}} = \Re \Im \left| \frac{x \pm r}{r} \right| = \ln(x \pm r + \sqrt{x^2 \pm 2rx}). \quad [\text{T II 11}]$$

$$\text{c) } J = \int \frac{2x - 3}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx = - \int \frac{-2 - 2x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx^1) - 5 \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x + 1)^2}};$$

im ersten Integrale setzen wir $3 - 2x - x^2 = z$, also $(-2 - 2x) dx = dz$, und erhalten

$$\int \frac{-2 - 2x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} = 2\sqrt{3 - 2x - x^2};$$

im zweiten Integrale setzen wir $x + 1 = z$, also $dx = dz$, und erhalten:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x + 1)^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{2^2 - z^2}} = \arcsin \frac{z}{2} = \arcsin \frac{x + 1}{2}.$$

Daher ist

$$\int \frac{2x - 3}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx = -2\sqrt{3 - 2x - x^2} - 5 \arcsin \frac{x + 1}{2}.$$

1) Der Zähler ist der Differentialquotient des Radikanden.

$$d) J = \int \frac{5x - 4}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} dx = \frac{5}{6} \int \frac{6x - 2}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} dx - \frac{7}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}};$$

das erste Integral ergibt vermittelt der Substitution $3x^2 - 2x + 1 = z$, $(6x - 2)dx = dz$:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} = 2\sqrt{3x^2 - 2x + 1};$$

im zweiten Integrale heben wir im Nenner den Faktor 3 aus, den wir als $\frac{1}{\sqrt{3}}$ vor das Integral setzen, und bekommen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{9}}}.$$

Wir setzen $x - \frac{1}{3} = z$, $dx = dz$, dann wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{3z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{3x - 1}{\sqrt{2}}.$$

Demnach ist

$$\int \frac{5x - 4}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} dx = \frac{5}{3} \sqrt{3x^2 - 2x + 1} - \frac{7}{3\sqrt{3}} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{3x - 1}{\sqrt{2}}.$$

(69) Die letzte der wichtigen Integrationsregeln ist die Regel von der teilweisen (partiellen) Integration. Wir knüpfen zu ihrer Ableitung an den Produktsatz der Differentialrechnung [s. (21)] an, nach ihm ist

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

oder kürzer

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \cdot v' + v \cdot u'.$$

Integriert man beide Seiten der Gleichung nach x , so erhält man unter Verwendung der Summenregel

$$uv = \int uv' \cdot dx + \int v \cdot u' dx$$

oder

$$\int u \cdot v' \cdot dx = u \cdot v - \int v \cdot u' dx, \quad (18)$$

Formel der teilweisen (partiellen) Integration.

Scheinbar ist mit Formel 18) nichts gebessert, da ein Integralzeichen durch ein anderes ersetzt wird, während wir doch bestrebt sein müssen, das Integralzeichen ganz zu beseitigen. In der Tat hat die Umformung auch nur dann Wert, wenn das neue Integral einfacher ist bzw. bereits bekannt ist. Dies aber hängt von der Art ab, wie man den ursprünglichen Integranden in Faktoren zerlegt. Auch hierfür lassen sich keine allgemeine Vorschriften geben; Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

a) $J = \int \ln x \, dx$; wir setzen $\ln x = \ln x \cdot 1$, und zwar $u = \ln x$, $v' = 1$; dann ist $u' = \frac{1}{x}$, $v = \int 1 \cdot dx = x$; führen wir dies in Formel 18) ein, so erhalten wir

$$J = \int \ln x \cdot 1 \cdot dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x,$$

also
$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x. \quad (\text{Probe!}) \quad [\text{T III 16}]$$

b) $J = \int x^m \cdot \ln x \cdot dx$; $u = \ln x$, $v' = x^m$,
demnach $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$.

$$J = \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \ln x - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln x - \frac{1}{m+1} \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}.$$

Also

$$\int x^m \ln x \, dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} [(m+1) \ln x - 1]. \quad [\text{T III 17}]$$

c) $J = \int \arcsin x \, dx$; $u = \arcsin x$, $v' = 1$, demnach

$$u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x.$$

$$J = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

unter Benutzung der Formel [T II 9] ergibt sich

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}. \quad [\text{T III 18}]$$

Beweis:

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}. \quad [\text{T III 19}]$$

d) $J = \int \arctg x \, dx$; $u = \arctg x$, $v' = 1$, $u' = \frac{1}{1+x^2}$, $v = x$.

$$J = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2), \quad [\text{s. T I 9}]$$

$$\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad [\text{T III 20}]$$

Beweis:

$$\int \text{arctg} x \, dx = x \text{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad [\text{T III 21}]$$

e) $J = \int \ln(1+x^2) dx$; $u = \ln(1+x^2)$, $v' = 1$, $u' = \frac{2x}{1+x^2}$, $v = x$.

$$J = x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= x \ln(1+x^2) - 2 \int dx + 2 \int \frac{dx}{1+x^2},$$

also

$$\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x.$$

f) $S = \int \sin^2 x dx$. Wir setzen $\sin x = u$, $v' = \sin x$; dann ist $u' = \cos x$ und $v = -\cos x$, und wir erhalten

$$S = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx$$

oder

$$S = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx.$$

Hier tritt rechts das gesuchte Integral mit auf; es ist

$$S = -\sin x \cos x + x - S;$$

diese Gleichung für S können wir auflösen:

$$2S = x - \sin x \cos x, \quad S = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x.$$

Daher

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x. \quad [\text{T III 22}]$$

(Probe!) Beweise die Formel

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x. \quad [\text{T III 23}]$$

[T III 22] läßt sich auch ohne teilweise Integration auf folgendem Wege finden. Es ist $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, also

$$S = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx;$$

in diesem Integral setzen wir $2x = z$, $dx = \frac{1}{2} dz$ und erhalten

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos z dz = \frac{1}{2} \sin z = \frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cos x,$$

und es ergibt sich wie oben

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x.$$

g) Setzen wir zur Abkürzung

$$S = \int e^{ax} \sin bx dx, \quad C = \int e^{ax} \cos bx dx,$$

so erhalten wir, wenn wir im ersten Integrale einführen

$$u = e^{ax}, \quad v' = \sin bx, \quad \text{also} \quad u' = a e^{ax}, \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx;$$

$$S = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx$$

oder als erste Gleichung

$$bS - aC = -e^{ax} \cos bx. \quad \text{a)}$$

Führen wir im zweiten Integrale ein

$$u = e^{ax}, \quad v' = \cos bx, \quad \text{also} \quad u' = a e^{ax}, \quad v = \frac{1}{b} \sin bx,$$

so erhalten wir

$$C = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx$$

oder als zweite Gleichung

$$aS + bC = e^{ax} \sin bx. \quad \text{b)}$$

Aus den beiden linearen Gleichungen a) und b) lassen sich die beiden Unbekannten S und C berechnen.

Es ergibt sich schließlich

$$S = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}. \quad [\text{T III 24}]$$

$$C = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}. \quad (\text{Probe!}) \quad [\text{T III 25}]$$

h) Es sei

$$J_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx \quad \text{und} \quad J_2 = \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

Wir schreiben

$$J_1 = \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$$

und setzen

$$u = x, \quad v' = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

dann ist $u' = 1$ und nach Formel [T II 9] $v = -\sqrt{a^2 - x^2}$. Wir erhalten demnach

$$J_1 = -x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

oder als erste Gleichung

$$J_1 - J_2 = -x \sqrt{a^2 - x^2}. \quad \text{a)}$$

Wir schreiben weiter

$$J_2 = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$$

und mit Verwendung von Formel [T II 4] $J_2 = a^2 \arcsin \frac{x}{a} - J_1$; daraus folgt die zweite Gleichung

$$J_1 + J_2 = a^2 \arcsin \frac{x}{a}. \quad \text{b)}$$

Aus a) und b) folgt:

$$J_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \left. \vphantom{J_1} \right\} \text{Probe!} \quad [\text{T II 12}]$$

$$\text{und} \quad J_2 = \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad \left. \vphantom{J_2} \right\} \quad [\text{T II 13}]$$

i) Es sei

$$J_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx, \quad J_2 = \int \sqrt{x^2 + a} dx.$$

Wir verfahren entsprechend Beispiel h) und setzen

$$u = x, \quad v' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}},$$

also $u' = 1$ und nach [T II 8] $v = \sqrt{x^2 + a}$. Wir erhalten demnach:

$$J_1 = x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx$$

oder

$$J_1 + J_2 = x\sqrt{x^2 + a}. \quad \text{a)}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx + a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} \\ &= J_1 + a \ln(x + \sqrt{x^2 + a}), \quad \text{nach [T II 7]}, \end{aligned}$$

also

$$J_2 - J_1 = a \ln(x + \sqrt{x^2 + a}). \quad \text{b)}$$

Durch Addition und Subtraktion von a) und b) bekommen wir schließlich

$$2J_1 = x\sqrt{x^2 + a} - a \ln(x + \sqrt{x^2 + a})$$

und

$$2J_2 = x\sqrt{x^2 + a} + a \ln(x + \sqrt{x^2 + a})$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} - \frac{a}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a}), & \text{[T II 14]} \\ \int \sqrt{x^2 + a} dz &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a}). & \text{[T II 15]} \end{aligned} \right\} \quad \text{(Probe!)}$$

Ist a eine positive Größe, $a = b^2$, so kann man auch schreiben:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + b^2} - \frac{b^2}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{x}{b}, \quad \text{[T II 14']}$$

$$\int \sqrt{x^2 + b^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + b^2} + \frac{b^2}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{x}{b}. \quad \text{[T II 15']}$$

Ist a negativ, $a = -b^2$, so erhält man:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - b^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - b^2} + \frac{b^2}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{x}{b}, \quad \text{[T II 14''}]$$

$$\int \sqrt{x^2 - b^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - b^2} - \frac{b^2}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{x}{b}. \quad \text{[T II 15''}]$$

In diesem Paragraphen haben wir die Hauptregeln für die Integration behandelt: die Konstantenregel, die Summenregel, die Substitutions-

regel und die Regel der teilweisen Integration. Gleichzeitig haben wir uns die für den Ingenieur wichtigsten Integralformeln abgeleitet und zusammengestellt. Ehe wir uns mit den Anwendungen und den damit zusammenhängenden bestimmten Integralen befassen, sollen noch einige schwierigere Integrationsverfahren behandelt werden, die der Anfänger zunächst ruhig überschlagen darf.

§ 3. Integration der gebrochenen rationalen Funktion.

(70) Die Aufgabe lautet, das Integral

$$J = \int \frac{a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} dx \quad (19)$$

auszuwerten, d. h. eine Funktion von x zu finden, die sich aus den uns geläufigen Funktionen zusammensetzt, und deren Differentialquotient die allgemeine gebrochene rationale Funktion

$$f(x) \equiv \frac{a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \text{ ist.}$$

Ohne die Allgemeinheit des Problems einzuschränken, können wir stets annehmen, daß $r < n$ ist, d. h. daß der Integrand eine echt gebrochene rationale Funktion ist; im anderen Falle läßt er sich [s. (30) S. 67] darstellen als die Summe einer ganzen rationalen und einer echt gebrochenen rationalen Funktion, die nach der Summenregel einzeln integriert werden können. Ferner bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir von vornherein $b_n = 1$ setzten; durch Kürzen von $f(x)$ mit b_n läßt sich das stets erreichen. Unser Integral lautet demnach:

$$\int \frac{a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} dx. \quad (19')$$

Der Zähler des Integranden kann höchstens vom Grade $(n - 1)$ sein.

Die Auswertung soll aufgebaut werden auf dem Verfahren der Teilbruchzerlegung (Partialbruchzerlegung). Ein einfaches Beispiel möge den allgemeinen Fall vorbereiten. Wir wollen

$$\int \frac{2x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x} dx$$

auswerten. Der Integrand ist $\frac{2x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$; der Nenner $x^3 + x^2 - 6x$ läßt sich in unserem Beispiele leicht in Faktoren zerlegen: $x^3 + x^2 - 6x \equiv x(x + 3)(x - 2)$; also kann der Integrand geschrieben werden: $\frac{2x^2 - 1}{x(x + 3)(x - 2)}$. Wir fragen: Läßt sich dieser Bruch so als Summe dreier Brüche schreiben, daß ihre Nenner der Reihe nach x , $x + 3$, $x - 2$, und daß ihre Zähler Konstante A , B , C sind, und

wie bestimmt man diese Konstanten? Gelingt diese Zerlegung, dann besteht für jeden beliebigen Wert von x die Gleichung:

$$\frac{2x^2 - 1}{x(x+3)(x-2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2}.$$

Das Integral kann dann als Summe dreier Integrale von der Form $\int \frac{dx}{x-x_0}$ leicht berechnet werden. Eine solche Zerlegung des Integranden nennt man Teilbruchzerlegung und die einzelnen Brüche die Teilbrüche. Wir führen diese Teilbruchzerlegung für unser Beispiel durch. Es handelt sich dabei nur um Anwendung bekannter Regeln der Arithmetik. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2} &= \frac{A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3)}{x(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A-2B+3C)x - 6A}{x(x+3)(x-2)}. \end{aligned}$$

Der letzte Bruch muß nun identisch gleich dem Integranden sein; da die Nenner übereinstimmen, gilt das auch für die Zähler. Die Zähler können aber nur dann identisch gleich sein, wenn die Beiwerte gleich hoher Potenzen von x einander gleich sind. Durch die Gleichsetzung dieser Beiwerte [Beiwerte- (Koeffizienten-) Vergleichung] gelangen wir in unserem Beispiele zu den drei Gleichungen

$$A + B + C = 2, \quad A - 2B + 3C = 0, \quad -6A = -1.$$

Wir stellen zunächst fest, daß wir eben so viele Gleichungen erhalten, als unbekannte Beiwerte A , B , C zu berechnen sind; die Unbekannten können demnach wirklich berechnet werden. Zweitens zeigt sich, daß die drei Gleichungen linear sind; die Lösungen sind also eindeutig. In unserem Beispiele läßt sich demnach die Teilbruchentwicklung wirklich durchführen, und zwar nur auf eine einzige Weise; die Teilbruchentwicklung ist eindeutig. Wir erhalten

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{15}, \quad C = \frac{7}{10}.$$

Es ist also

$$\frac{2x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} + \frac{17}{15} \cdot \frac{1}{x+3} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{x-2}$$

und folglich

$$\int \frac{2x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x} dx = \frac{1}{6} \ln x + \frac{17}{15} \ln(x+3) + \frac{7}{10} \ln(x-2).$$

Wir erkennen an diesem Beispiele, daß für das Integrieren selbst keinerlei Schwierigkeiten bestehen, wenn uns die Verwandlung des Integranden in Teilbrüche gelingt. Zu diesem Zwecke müssen wir aber den Nenner des Integranden in Faktoren zerlegt haben. Die Kernfrage lautet also: Ist es stets möglich, eine ganze rationale Funktion

n ten Grades in Faktoren zu zerlegen, und wie wird die Zerlegung ausgeführt? Die Antwort auf diese rein algebraische Frage ist: Die ganze rationale Funktion n^{ten} Grades

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

läßt sich stets in n lineare Faktoren $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ zerlegen; hierbei sind die Konstanten x_1, x_2, \dots, x_n die Lösungen der Gleichung n ten Grades

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0.$$

Wie wir nun die algebraische Schwierigkeit überwinden, eine Gleichung n ten Grades aufzulösen, ist nicht Sache der Infinitesimalrechnung. Hier seien nur noch einige für unsere Zwecke wichtige Eigenschaften der Lösungen einer Gleichung n ten Grades hervorgehoben. Wir setzen selbstverständlich voraus, daß die Beiwerte $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_2, b_1, b_0$ sämtlich reelle Zahlen sind; die Gleichung n ten Grades hat dann stets n Lösungen x_1, x_2, \dots, x_n (Grundsatz der Algebra). Es kann aber der Fall eintreten, daß einige von den n Lösungen x_1, x_2, \dots, x_n einander gleich sind; man spricht dann von einer mehrfachen (zweifachen, dreifachen, ...) Lösung der Gleichung. Es kann ferner vorkommen, daß eine dieser Lösungen eine komplexe Zahl ist; nun können aber komplexe Zahlen, also Zahlen von der Form $p + iq$, ($i^2 = -1$), wie die Algebra weiter lehrt, als Lösungen immer nur paarweise auftreten, und zwar als konjugiert komplexe Zahlen $p + iq$ und $p - iq$. Durch Multiplizieren der beiden zugehörigen Faktoren $x - p - iq$ und $x - p + iq$ läßt sich die imaginäre Einheit leicht beseitigen. Dadurch entsteht der quadratische Faktor $(x - p)^2 + q^2$, der ein Ersatz für zwei lineare Faktoren ist. Auch solche Paare von komplexen Lösungen können mehrfach auftreten. Es ergeben sich demnach vier verschiedene Gruppen, die getrennt voneinander behandelt werden sollen.

I. Die Gleichung n ten Grades, die man durch Nullsetzen des Nenners des Integranden erhält, hat nur reelle Lösungen;

- a) diese Lösungen sind alle voneinander verschieden,
- b) einige dieser Lösungen sind einander gleich.

II. Die Gleichung hat konjugiert komplexe Lösungen;

- a) diese sind alle voneinander verschieden,
- b) einige von ihnen sind einander gleich.

Unser oben durchgeführtes Beispiel gehört der Gruppe Ia) an, deren allgemeinen Fall wir nun betrachten.

(71) Ia) Die Gleichung

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$$

hat n voneinander verschiedene reelle Lösungen x_1, x_2, \dots, x_n ;

es ist also

$$x^n + \bar{b}_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \bar{b}_2x^2 + \bar{b}_1x + \bar{b}_0 \equiv (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

wobei jeder Faktor nur einmal auftritt. Wir setzen für den Integranden die Teilbruchentwicklung an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)} &\equiv \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \\ &+ \frac{C}{x - x_3} + \cdots + \frac{N}{x - x_n}. \end{aligned} \right\} \quad 20)$$

Schließlich bringen wir die Teilbrüche wieder auf einen Nenner und ordnen den Zähler nach fallenden Potenzen von x ; die höchste Potenz ist x^{n-1} . Der so gewonnene Bruch muß mit dem Integranden identisch sein; da die Nenner gleich sind, muß dies auch für die Zähler gelten; d. h. die Beiwerte gleich hoher Potenzen von x müssen einander gleich sein. Durch die Beiwerte-Vergleichung erhalten wir nunmehr n lineare Gleichungen mit den n Unbekannten A_1, A_2, \dots, A_n . Es sind in der Tat n Gleichungen, da jeder der beiden Zähler n Glieder mit den Potenzen $x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x^2, x^1, x^0$ hat. Damit ist gezeigt, daß die nötige Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung der n Größen A, B, \dots, N wirklich vorhanden ist. Da diese Gleichungen linear sind (warum?), ergibt sich für jede Größe stets ein und nur ein Wert, d. h. die Teilbruchzerlegung ist eindeutig. Es sind demnach nur Integrale von der Form $\int \frac{dx}{x - x_k} = \ln(x - x_k)$ auszuwerten; der Fall Ia) führt also einzig auf logarithmische Funktionen.

Beispiel: $J = \int \frac{x^6}{x^4 - 5x^2 + 4} dx$. Der Integrand ist eine unecht gebrochene rationale Funktion; wir dividieren aus und erhalten:

$$\frac{x^6}{x^4 - 5x^2 + 4} = x^2 + 5 + \frac{21x^2 - 20}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

Der Nenner läßt sich in das Produkt verwandeln

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2);$$

wir haben demnach den Bruch

$$\frac{21x^2 - 20}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)}$$

in Teilbrüche zu zerlegen. Wir setzen an

$$\begin{aligned} \frac{21x^2 - 20}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2} + \frac{D}{x - 2} \\ &= \frac{(A + B + C + D)x^3 + (-A + B - 2C + 2D)x^2 + (-4A - 4B - C - D)x + (4A - 4B + 2C - 2D)}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)} \end{aligned}$$

Die Vergleichung der Beiwerte ergibt die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0, & -A + B - 2C + 2D &= 21, \\ -4A - 4B - C - D &= 0, & 4A - 4B + 2C - 2D &= -20, \end{aligned}$$

woraus die Lösungen folgen:

$$A = +\frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{6}, \quad C = -\frac{2}{3}, \quad D = +\frac{2}{3}.$$

Hiernach ist

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6}{x^4 - 5x^2 + 4} dx &= \frac{x^3}{3} + 5x + \frac{41}{6} \ln(x+1) - \frac{41}{6} \ln(x-1) \\ &\quad - \frac{26}{3} \ln(x+2) + \frac{26}{3} \ln(x-2) \\ &= \frac{x^3}{3} + 5x + \ln \sqrt[6]{\frac{(x+1)^{41}}{(x-1)} \cdot \frac{(x-2)^{52}}{(x+2)}}. \end{aligned}$$

Hierher gehören übrigens die als Sonderfall in § 2, Formel 12) betrachteten Beispiele, in denen der Nenner des Integranden eine Funktion zweiten Grades ist, die sich in zwei reelle lineare Faktoren zerlegen läßt. Das dort angeführte Zahlenbeispiel lautete, von dem unwesentlichen Faktor $\frac{1}{8}$ abgesehen (s. S. 173): $\int \frac{31x - 15}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}} dx$; wir wollen es jetzt durch Teilbruchzerlegung behandeln. Wir setzen

$$\frac{31x - 15}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}} = \frac{31x - 15}{(x - \frac{1}{2})(x + 3)} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{x + 3} = \frac{(A + B)x + (3A - \frac{1}{2}B)}{(x - \frac{1}{2})(x + 3)},$$

$$A + B = 31, \quad 3A - \frac{1}{2}B = -15; \quad A = \frac{1}{7}, \quad B = \frac{216}{7}.$$

Demnach ist

$$\frac{1}{8} \int \frac{31x - 15}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}} dx = \frac{1}{56} \left[\ln \left(x - \frac{1}{2} \right) + 216 \ln(x + 3) \right].$$

Daß dieses Ergebnis dem auf S. 174 angeführten

$$\frac{31}{16} \ln \left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \right) - \frac{215}{112} \ln \frac{x - \frac{1}{2}}{x + 3}$$

nicht widerspricht, ist leicht zu zeigen. Da nämlich

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{1}{2} \right) \cdot (x + 3)$$

ist, so ist

$$\begin{aligned} &\frac{31}{16} \ln \left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \right) - \frac{215}{112} \ln \frac{x - \frac{1}{2}}{x + 3} = \frac{31}{16} \ln \left(x - \frac{1}{2} \right) \\ &+ \frac{31}{16} \ln(x + 3) - \frac{215}{112} \ln \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{215}{112} \ln(x + 3) \\ &= \frac{1}{112} \left[(217 - 215) \ln \left(x - \frac{1}{2} \right) + (217 + 215) \ln(x + 3) \right] \\ &= \frac{1}{112} \left[2 \cdot \ln \left(x - \frac{1}{2} \right) + 432 \cdot \ln(x + 3) \right] \\ &= \frac{1}{56} \left[\ln \left(x - \frac{1}{2} \right) + 216 \ln(x + 3) \right] \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit oben.

(72) Ib) Die Gleichung

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$$

habe wieder nur reelle Lösungen, aber einige von ihnen mögen untereinander gleich sein; so möge beispielsweise die Lösung $x = x_k$ \varkappa mal auftreten. Wir setzen in diesem Falle die folgende Teilbruchentwicklung an:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0}{x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0} = \\ & \dots + \frac{K_{\varkappa-1}x^{\varkappa-1} + K_{\varkappa-2}x^{\varkappa-2} + \dots + K_1x + K_0}{(x-x_k)^\varkappa} + \dots \end{aligned} \right\} \quad 21)$$

Es sind \varkappa Teilbrüche von der Form $\frac{L}{x-x_i}$ in Fortfall gekommen, und an ihre Stelle ist in 21) eine echt gebrochene rationale Funktion, deren Nenner vom Grade \varkappa ist, getreten. Dadurch sind zwar auch \varkappa Zähler L verlorengegangen; diese haben aber Ersatz gefunden durch die \varkappa zu bestimmenden Beiwerte $K_{\varkappa-1}, K_{\varkappa-2}, \dots, K_1, K_0$, so daß auch jetzt durch Beiwerte-Vergleichung \varkappa lineare Gleichungen mit \varkappa Unbekannten erhalten werden, aus denen sich diese stets eindeutig bestimmen lassen. [Die Punkte vor und hinter dem Bruche in Gleichung 21) sollen andeuten, daß außerdem noch andere Teilbrüche auftreten können, die von der früheren Form $\frac{L}{x-x_i}$ sind oder von der Form des obenstehenden, je nach der Art des ursprünglichen Nenners.] Zusammengefaßt läßt sich sagen, daß sich der Integrand, dessen Nenner nur lineare Faktoren in irgendwelcher Potenz enthält, stets in Teilbrüche zerlegen läßt, deren Nenner betr. Potenz des entsprechenden linearen Faktors ist.

Wir haben es also mit Integralen von der Form

$$\int \frac{K_{\varkappa-1}x^{\varkappa-1} + \dots + K_1x + K_0}{(x-x_k)^\varkappa} dx$$

zu tun. Die Integration geschieht nach der Methode der Integration durch Differentiation, indem man ansetzt:

$$\left. \begin{aligned} & \int \frac{K_{\varkappa-1}x^{\varkappa-1} + \dots + K_1x + K_0}{(x-x_k)^\varkappa} dx \\ & = \frac{K_{\varkappa-2}x^{\varkappa-2} + K_{\varkappa-3}x^{\varkappa-3} + \dots + K_1x + K_0}{(x-x_k)^{\varkappa-1}} + \mathfrak{R} \int \frac{dx}{x-x_k}. \end{aligned} \right\} \quad 22)$$

Differenziert man beide Seiten und bringt danach die rechte Seite auf den Hauptnenner $(x-x_k)^\varkappa$, so erhält man beiderseits eine echt gebrochene rationale Funktion, deren Nenner $(x-x_k)^\varkappa$ ist. Da beide Funktionen einander identisch gleich sein sollen, so gilt dies für ihre Zähler; d. h. die Beiwerte gleich hoher Potenzen von x müssen einander gleich sein. Wir wenden demnach nochmals die Beiwerte-Verglei-

ziehung an und erhalten dadurch \varkappa lineare Gleichungen zur Bestimmung der \varkappa Größen $K_{\varkappa-2}, K_{\varkappa-3}, \dots, K_1, K_0, \mathfrak{R}$.

Beispiele:

$$\text{a) } J = \int \frac{x^4 + 1}{(x+2)^2(x-1)^3} dx.$$

Teilbruchentwicklung nach 21)

$$\frac{x^4 + 1}{(x+2)^2(x-1)^3} = \frac{A_1x + A_0}{(x+2)^2} + \frac{B_2x^2 + B_1x + B_0}{(x-1)^3} = \\ = \frac{+(A_0 - 3A_1 + B_1 + 4B_2)x^3 + (-3A_0 + 3A_1 + B_0 + 4B_1 + 4B_2)x^2 + (3A_0 - A_1 + 4B_0 + 4B_1)x + (-A_0 + 4B_0)}{(x+2)^2(x-1)^3}$$

Vergleichung der Beiwerte: Fünf lineare Gleichungen für A_1, A_0, B_2, B_1, B_0 :

$$\begin{aligned} A_1 + B_2 &= 1, & A_0 - 3A_1 + B_1 + 4B_2 &= 0, \\ -3A_0 + 3A_1 + B_0 + 4B_1 + 4B_2 &= 0, & 3A_0 - A_1 + 4B_0 + 4B_1 &= 0, \\ -A_0 + 4B_0 &= 1. \end{aligned}$$

Hieraus

$$A_1 = \frac{5}{9}, \quad A_0 = \frac{1}{7}, \quad B_2 = \frac{4}{9}, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_0 = \frac{1}{7}.$$

Es ist demnach

$$\frac{x^4 + 1}{(x+2)^2(x-1)^3} = \frac{1}{27} \left[\frac{15x + 13}{(x+2)^2} + \frac{12x^2 - 16x + 10}{(x-1)^3} \right].$$

Es sind also zwei Integrale auszuwerten. Das erste ist $\int \frac{15x + 13}{(x+2)^2} dx$; wir setzen an:

$$\int \frac{15x + 13}{(x+2)^2} dx = \frac{A_0}{x+2} + \mathfrak{U} \int \frac{dx}{x+2};$$

wir differenzieren beide Seiten und erhalten

$$\frac{15x + 13}{(x+2)^2} = -\frac{A_0}{(x+2)^2} + \frac{\mathfrak{U}}{x+2} = \frac{\mathfrak{U}x + (2\mathfrak{U} - A_0)}{(x+2)^2};$$

durch Vergleichung der Beiwerte folgt:

$$\mathfrak{U} = 15, \quad 2\mathfrak{U} - A_0 = 13; \quad \text{hieraus } \mathfrak{U} = 15, \quad A_0 = 17.$$

Also ist

$$\int \frac{15x + 13}{(x+2)^2} dx = \frac{17}{x+2} + 15 \int \frac{dx}{x+2} = \frac{17}{x+2} + 15 \ln(x+2).$$

Das zweite Integral ist

$$\int \frac{12x^2 - 16x + 10}{(x-1)^3} dx = \frac{B_1x + B_0}{(x-1)^2} + \mathfrak{B} \int \frac{dx}{x-1};$$

differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{12x^2 - 16x + 10}{(x-1)^3} &= \frac{B_1}{(x-1)^2} - \frac{2(B_1x + B_0)}{(x-1)^3} + \frac{\mathfrak{B}}{x-1} \\ &= \frac{B_1(x-1) - 2(B_1x + B_0) + \mathfrak{B}(x-1)^2}{(x-1)^3}; \end{aligned}$$

Vergleichung der Beiwerte:

$$\mathfrak{B} = 12, \quad -B_1 - 2\mathfrak{B} = -16, \quad -B_1 - 2B_0 + \mathfrak{B} = 10;$$

hieraus $\mathfrak{B} = 12, \quad B_1 = -8, \quad B_0 = 5.$

$$\int \frac{12x^2 - 16x + 10}{(x-1)^3} dx = \frac{-8x+5}{(x-1)^2} + 12 \ln(x-1).$$

Wir erhalten demnach:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 1}{(x+2)^2(x-1)^3} dx &= \frac{1}{27} \left[\frac{17}{x+2} + 15 \ln(x+2) - \frac{8x-5}{(x-1)^2} + 12 \ln(x-1) \right] \\ &= \frac{1}{3} \frac{x^2 - 5x + 3}{(x+2)(x-1)^2} + \frac{1}{9} \ln[(x+2)^5(x-1)^4]. \end{aligned}$$

b) $J = \int \frac{dx}{x(x+1)(x-2)^2};$

Teilbruchentwicklung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)(x-2)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C_1x + C_0}{(x-2)^2} \\ &= \frac{A(x+1)(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + (C_1x + C_0)x(x+1)}{x(x+1)(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Vergleichung der Beiwerte gleich hoher Potenzen des Zählers:

$$A + B + C_1 = 0, \quad -3A - 4B + C_1 + C_0 = 0, \quad 4B + C_0 = 0, \quad 4A = 1;$$

hieraus

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{9}, \quad C_1 = -\frac{5}{36}, \quad C_0 = \frac{4}{9}.$$

Demnach ist

$$\frac{1}{x(x+1)(x-2)^2} = \frac{1}{36} \left[\frac{9}{x} - \frac{4}{x+1} - \frac{5x-16}{(x-2)^2} \right].$$

Nun kann man mittels der Summenregel integrieren; unser Augenmerk richtet sich auf das Integral

$$\int \frac{5x-16}{(x-2)^2} dx = \frac{\Gamma_0}{x-2} + \mathfrak{G} \int \frac{dx}{x-2};$$

Integration durch Differentiation:

$$\frac{5x-16}{(x-2)^2} = -\frac{\Gamma_0}{(x-2)^2} + \frac{\mathfrak{G}}{x-2} = \frac{\mathfrak{G}(x-2) - \Gamma_0}{(x-2)^2};$$

Vergleichung der Beiwerte:

$$\mathfrak{G} = 5, \quad -2\mathfrak{G} - \Gamma_0 = -16; \quad \text{hieraus} \quad \mathfrak{G} = 5, \quad \Gamma_0 = 6.$$

Folglich

$$\int \frac{5x-16}{(x-2)^2} dx = \frac{6}{x-2} + 5 \ln(x-2).$$

Wir erhalten also:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x-2)^2} = \frac{1}{6(x-2)} + \frac{1}{36} [9 \ln x - 4 \ln(x+1) - 5 \ln(x-2)].$$

(73) IIa) Die Gleichung

$$x_n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0$$

habe konjugiert komplexe Lösungen; diese mögen aber alle voneinander verschieden sein. Sind x'_k und x''_k zwei zueinander konjugiert komplexe Lösungen, so ist das Produkt

$$(x - x'_k)(x - x''_k) = x^2 + px + q,$$

eine rationale Funktion, in der p und q reelle Größen sind, und der Integrand läßt sich in Teilbrüche zerlegen nach der Form:

$$\frac{a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \dots + \frac{Px + Q}{x^2 + px + q} + \dots \quad (23)$$

Die Punkte in 23) sollen wiederum andeuten, daß außerdem noch andere Teilbrüche vorhanden sind, deren Nenner entweder Potenzen linearer Funktionen von x oder, beim Auftreten weiterer konjugiert komplexer Lösungen, ebenfalls quadratisch sind. Da der Bruch $\frac{Px + Q}{x^2 + px + q}$ für zwei Teilbrüche mit linearem Nenner steht, so treten für deren Zähler die beiden neuen Konstanten P und Q auf, und daher ist die Anzahl der zu bestimmenden Konstanten wie vorher gleich n . Für ihre Ermittlung stehen auch wieder n lineare Gleichungen zur Verfügung. Die Größen P und Q lassen sich also stets, und zwar eindeutig berechnen. Das in dieser Entwicklung neu auftretende Integral

$$\int \frac{Px + Q}{x^2 + px + q} dx$$

ist aber schon in (67) behandelt worden.

Beispiele:

$$a) J = \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} dx.$$

Teilbruchzerlegung des Integranden:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} &= \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Px + Q}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{A(x^2 + x + 1) + (Px + Q)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}. \end{aligned}$$

Beiwerte-Vergleichung: $A + P = 1$, $A - P + Q = 0$, $A - Q = 1$, hieraus

$$A = \frac{2}{3}, \quad P = \frac{1}{3}, \quad Q = -\frac{1}{3},$$

also

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{x - 1} + \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} \right].$$

Da

$$\int \frac{dx}{x - 1} = \ln(x - 1)$$

und

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ist, so ist schließlich

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-1} dx = \frac{2}{3} \ln(x-1) + \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{b) } J = \int \frac{x^3-2x}{(x^2+4)(x^2-4x+5)} dx.$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3-2x}{(x^2+4)(x^2-4x+5)} &= \frac{P_1x+Q_1}{x^2+4} + \frac{P_2x+Q_2}{x^2-4x+5} \\ &= \frac{(P_1x+Q_1)(x^2-4x+5) + (P_2x+Q_2)(x^2+4)}{(x^2+4)(x^2-4x+5)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= 1, & -4P_1 + Q_1 + Q_2 &= 0, & 5P_1 - 4Q_1 + 4P_2 &= -2, \\ & & 5Q_1 + 4Q_2 &= 0; \end{aligned}$$

hieraus

$$P_1 = -\frac{6}{65}, \quad P_2 = \frac{71}{65}, \quad Q_1 = \frac{96}{65}, \quad Q_2 = -\frac{24}{13},$$

also ist

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+4)(x^2-4x+5)} = \frac{1}{65} \left[\frac{-6x+96}{x^2+4} + \frac{71x-120}{x^2-4x+5} \right].$$

Da

$$\begin{aligned} \int \frac{-6x+96}{x^2+4} dx &= -3 \int \frac{2x}{x^2+4} dx + 96 \int \frac{dx}{x^2+4} \\ &= -3 \ln(x^2+4) + 48 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int \frac{71x-120}{x^2-4x+5} dx &= \frac{71}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx + 22 \int \frac{dx}{(x-2)^2+1^2} \\ &= \frac{71}{2} \ln(x^2-4x+5) + 22 \operatorname{arctg}(x-2) \end{aligned}$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3-2x}{(x^2+4)(x^2-4x+5)} dx &= \frac{1}{130} \left[71 \ln(x^2-4x+5) - 6 \ln(x^2+4) \right. \\ &\quad \left. + 44 \operatorname{arctg}(x-2) + 96 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right]. \end{aligned}$$

(74) IIb) Ein Paar konjugiert komplexer Lösungen der Gleichung

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0 = 0,$$

trete mehrmals auf; dann muß der Nenner des Integranden den zu diesem Paare konjugiert komplexer Lösungen gehörigen quadra-

tischen Faktor $x^2 + px + q$ auch mehrmals haben. Wir zerlegen den Integranden in eine Summe von Teilbrüchen:

$$= \dots + \left. \frac{\frac{a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0}{x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0}}{(x^2 + px + q)^r} + \dots \right\} 24)$$

Der auf der rechten Seite von 24) angeführte Teilbruch steht für $2r$ Teilbrüche in 20), deren Nenner linear sind; die $2r$ Beiwerte R_{2r-1}, \dots, R_0 treten demnach für die zu diesen gehörigen konstanten $2r$ Zähler ein, so daß sich durch Beiwerte-Vergleichung auch hier n lineare Gleichungen für die n unbekanntenen Beiwerte ergeben, und Eindeutigkeit gesichert ist. Als neu treten dann nur noch Integrale auf von der Form

$$\int \frac{R_{2r-1}x^{2r-1} + \dots + R_2x^2 + R_1x + R_0}{(x^2 + px + q)^r} dx,$$

für die wir den Ansatz machen

$$= \left. \frac{\int \frac{R_{2r-1}x^{2r-1} + \dots + R_2x^2 + R_1x + R_0}{(x^2 + px + q)^r} dx}{(x^2 + px + q)^{r-1}} + \int \frac{\mathfrak{P}x + \mathfrak{Q}}{x^2 + px + q} dx \right\} 25)$$

Die $2r$ Beiwerte $P_{2r-3}, P_{2r-4}, \dots, P_2, P_1, P_0, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ werden wie in Ib mittelst der Methode der Integration durch Differentiation bestimmt; differenziert man nämlich beide Seiten von 25) nach x , und bringt man die rechte Seite auf einen Hauptnenner, der sich wie links zu $(x^2 + px + q)^r$ ergibt, so erhält man beiderseits einen Zähler vom $(2r - 1)$ ten Grade in x . Hierdurch werden $2r$ Beiwerte-Vergleichungen für die $2r$ gesuchten Beiwerte ermöglicht; wir erhalten demnach $2r$ lineare Gleichungen und aus ihnen wiederum für jeden gesuchten Beiwert $P_{2r-3}, \dots, P_1, P_0, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ stets einen, aber auch nur einen Wert. Das dann auftretende Integral ist das gleiche wie in IIa.

Beispiele: a) $J = \int \frac{x+1}{(x^2+1)^3(x^2+4)} dx$;

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^3(x^2+4)} = \frac{A_5x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0}{(x^2+1)^3} + \frac{B_1x + B_0}{x^2+4}$$

$$= \frac{(A_5x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0)(x^2+4) + (B_1x + B_0)(x^2+1)^3}{(x^2+1)^3(x^2+4)};$$

hieraus durch Beiwerte-Vergleichung:

$$\begin{aligned} A_5 + B_1 &= 0, & A_4 + B_0 &= 0, & 4A_5 + A_3 + 3B_1 &= 0, \\ 4A_4 + A_2 + 3B_0 &= 0, & 4A_3 + A_1 + 3B_1 &= 0, \\ 4A_2 + A_0 + 3B_0 &= 0, & 4A_1 + B_1 &= 1, & 4A_0 + B_0 &= 1; \end{aligned}$$

folglich:

$$A_5 = A_4 = \frac{1}{2^7}, \quad A_3 = A_2 = B_1 = B_0 = -\frac{1}{2^7}, \quad A_1 = A_0 = \frac{7}{2^7}.$$

Demnach ist

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^3(x^2+4)} = \frac{1}{27} \left[\frac{x^5+x^4-x^3-x^2+7x+7}{(x^2+1)^3} - \frac{x+1}{x^2+4} \right].$$

Wir setzen an:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5+x^4-x^3-x^2+7x+7}{(x^2+1)^3} dx &= \frac{A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0}{(x^2+1)^2} + \int \frac{\mathfrak{P}x+\mathfrak{Q}}{x^2+1} dx; \\ &= \frac{x^5+x^4-x^3-x^2+7x+7}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{(3A_3x^2+2A_2x+A_1)(x^2+1)-4x(A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0)+(\mathfrak{P}x+\mathfrak{Q})(x^2+1)^2}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Vergleichung der Beiwerte ergibt die Gleichungen

$$\mathfrak{P} = 1, \quad -A_3 + \mathfrak{Q} = 1, \quad -2A_2 + 2\mathfrak{P} = -1,$$

$$3A_3 - 3A_1 + 2\mathfrak{Q} = -1, \quad 2A_2 - 4A_0 + \mathfrak{P} = 7, \quad A_1 + \mathfrak{Q} = 7,$$

deren Lösungen sind

$$A_3 = \frac{15}{8}, \quad A_2 = \frac{3}{2}, \quad A_1 = \frac{33}{8}, \quad A_0 = -\frac{3}{4}, \quad \mathfrak{P} = 1, \quad \mathfrak{Q} = \frac{23}{8}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^5+x^4-x^3-x^2+7x+7}{(x^2+1)^3} dx \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{15x^3+12x^2+33x-6}{(x^2+1)^2} + \int \frac{8x+23}{x^2+1} dx \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{15x^3+12x^2+33x-6}{(x^2+1)^2} + 4 \ln(x^2+1) + 23 \operatorname{arctg} x \right]. \end{aligned}$$

Da weiter

$$\int \frac{x+1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$$

ist, so ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} &\int \frac{x+1}{(x^2+1)^3(x^2+4)} dx \\ &= \frac{1}{216} \left\{ \frac{15x^3+12x^2+33x+6}{(x^2+1)^2} + \ln[(x^2+4)(x^2+1)]^4 + 23 \operatorname{arctg} x + 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } J = \int \frac{3x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} &= \frac{A_1x+A_0}{(x+1)^2} + \frac{B_3x^3+B_2x^2+B_1x+B_0}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{(A_1x+A_0)(x^2+x+1)^2+(B_3x^3+B_2x^2+B_1x+B_0)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}. \end{aligned}$$

$$A_1 + B_3 = 0, \quad 2A_1 + A_0 + 2B_3 + B_2 = 0,$$

$$3A_1 + 2A_0 + B_3 + 2B_2 + B_1 = 0, \quad 2A_1 + 3A_0 + B_2 + 2B_1 + B_0 = 3,$$

$$A_1 + 2A_0 + B_1 + 2B_0 = 4, \quad A_0 + B_0 = 2;$$

hieraus

$$A_1 = 0, \quad A_0 = 1, \quad B_3 = 0, \quad B_2 = -1, \quad B_1 = 0, \quad B_0 = 1.$$

Es ist also

$$\frac{x^3 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Nach I b) ist

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}.$$

Für das zweite Integral setzen wir an:

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{B_1x+B_0}{x^2+x+1} + \int \frac{\mathfrak{P}x+\mathfrak{Q}}{x^2+x+1} dx;$$

$$\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{B_1(x^2+x+1) - (B_1x+B_0)(2x+1) + (\mathfrak{P}x+\mathfrak{Q})(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2};$$

$$\mathfrak{P}=0, \quad -B_1+\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}=1, \quad -2B_0+\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}=0, \quad B_1-B_0+\mathfrak{Q}=-1.$$

Hieraus

$$B_1 = -1, \quad B_0 = 0, \quad \mathfrak{P} = 0, \quad \mathfrak{Q} = 0;$$

also ist

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} dx = -\frac{x}{x^2+x+1};$$

und wir erhalten

$$\int \frac{3x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+x+1} = -\frac{2x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

§ 4. Die wichtigsten Integrale mit irrationalem oder transzendentelem Integranden.

(75) Da die Integration irrationaler Funktionen in voller Allgemeinheit undurchführbar ist, seien hier nur einige wichtige integrable Sonderfälle behandelt.

Als ersten wollen wir den Fall herausgreifen, daß der Integrand von der Form ist

$$f(x, \sqrt[n]{ax+b}); \tag{26}$$

hierbei soll f eine rationale Funktion der beiden Größen x und $\sqrt[n]{ax+b}$ sein. Die Irrationalität tritt also nur als n te Wurzel aus einer linearen Funktion der Integrationsveränderlichen auf. Das hiermit gebildete Integral 26) läßt sich stets mit unseren Hilfsmitteln auswerten. Wir verwenden die Einsetzungsmethode und setzen

$$\sqrt[n]{ax+b} = z, \quad ax+b = z^n, \quad x = \frac{z^n}{a} - \frac{b}{a}, \quad dx = \frac{n}{a} z^{n-1} dz,$$

also

$$J = \int f\left(\frac{z^n - b}{a}, z\right) \cdot \frac{n}{a} z^{n-1} \cdot dz.$$

Der neue Integrand

$$\frac{n}{a} z^{n-1} \cdot f\left(\frac{z^n - b}{a}, z\right)$$

ist eine rationale Funktion von z , und damit ist die Aufgabe auf die im vorigen Paragraphen behandelte zurückgeführt.

Beispiele.

a) $J = \int \frac{x}{\sqrt[3]{x+a}} dx$. Wir setzen

$$\sqrt[3]{x+a} = z, \quad x+a = z^3, \quad dx = 3z^2 dz$$

und erhalten

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{z^3 - a}{z} \cdot 3z^2 dz = 3 \int (z^4 - az) dz = 3 \left(\frac{z^5}{5} - a \frac{z^2}{2} \right) = \frac{3}{10} z^2 (2z^2 - 5a) \\ &= \frac{3}{10} (2(x+a) - 5a) \sqrt[3]{(x+a)^2} = \frac{3}{10} (2x - 3a) \sqrt[3]{(x+a)^2}, \end{aligned}$$

also

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+a}} dx = \frac{3}{10} (2x - 3a) \sqrt[3]{(x+a)^2}. \quad \text{Probe!}$$

b) $J = \int \frac{2 - \sqrt{x+5}}{2x - \sqrt{x+5}} dx$; $\sqrt{x+5} = z$, $x = z^2 - 5$, $dx = 2z dz$,

$$J = \int \frac{(2-z)2z}{2z^2 - 10 - z} dz = \int \left(-1 + \frac{3z - 10}{2z^2 - z - 10} \right) dz$$

$$= \int \left(-1 + \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{z+2} - \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{z-\frac{5}{2}} \right) dz$$

$$= -z + \frac{16}{9} \ln(z+2) - \frac{5}{18} \ln(2z-5)$$

oder

$$\int \frac{2 - \sqrt{x+5}}{2x - \sqrt{x+5}} dx = -\sqrt{x+5} + \frac{16}{9} \ln(\sqrt{x+5} + 2) - \frac{5}{18} \ln(2\sqrt{x+5} - 5).$$

c) $J = \int \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt[3]{x-1}} dx$; $\sqrt[6]{x-1} = z$, $x = z^6 + 1$, $dx = 6z^5 dz$.

$$J = \int \frac{(z^3 + 2) \cdot 6z^5}{z^2} dz = 6 \int (z^6 + 2z^3) dz = \frac{6}{7} z^7 + 3z^4$$

oder

$$\int \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \frac{6}{7} (x-1) \sqrt[6]{x-1} + 3 \sqrt[3]{(x-1)^2}. \quad \text{Probe!}$$

Hierher gehören auch die Integrale von der Form

$$J = \int f\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right) dx, \quad (26')$$

wobei f eine rationale Funktion von x und $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$ ist. Sie werden durch die Substitution $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}} = z$ in Integrale mit rationalem Integranden übergeführt; denn es ist $\frac{ax+b}{\alpha x+\beta} = z^n$ oder

$$x = -\frac{\beta z^n - b}{\alpha z^n - a}, \quad dx = \frac{n(\beta a - \alpha b)z^{n-1}}{(\alpha z^n - a)^2} dz;$$

also

$$J = \int f\left(-\frac{\beta z^n - b}{\alpha z^n - a}, z\right) \cdot \frac{n(\beta a - \alpha b)z^{n-1}}{(\alpha z^n - a)^2} dz.$$

Beispiel:

$$J = \int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx; \quad \sqrt{\frac{x}{a-x}} = z, \quad x = a \frac{z^2}{z^2+1}, \quad dx = \frac{2az}{(z^2+1)^2} dz:$$

$$J = \int z \cdot \frac{2az}{(z^2+1)^2} dz = 2a \int \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz = a \left(-\frac{z}{z^2+1} + \arctg z \right),$$

also

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = a \arctg \sqrt{\frac{x}{a-x}} - \sqrt{x(a-x)}. \quad \text{Probe!}$$

(76) Auch die Integrale

$$J = \int f(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c}) dx, \quad (27)$$

in welchen

$$f(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c})$$

eine rationale Funktion von x und $\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ ist, lassen sich sämtlich mit den bisherigen Mitteln auswerten. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Es sei $a = \alpha^2 > 0$; dann läßt sich die Wurzel

$$w = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$$

in der Form schreiben

$$w = \alpha \sqrt{\gamma + 2\beta x + x^2},$$

wobei zur Abkürzung $\gamma = \frac{c}{\alpha}$ und $\beta = \frac{b}{\alpha}$ gesetzt sind. Jetzt setzen wir

$$w = \alpha(z-x) = \alpha \sqrt{\gamma + 2\beta x + x^2}, \quad (28)$$

woraus sich ergibt

$$\left. \begin{aligned} z^2 - 2zx + x^2 &= \gamma + 2\beta x + x^2, & x &= \frac{z^2 - \gamma}{2(z + \beta)}, \\ dx &= \frac{z^2 + 2\beta z + \gamma}{2(z + \beta)^2} dz, \end{aligned} \right\} \quad (28')$$

während die Wurzel

$$w = \alpha \left(z - \frac{z^2 - \gamma}{2(\beta + z)} \right) = \alpha \frac{z^2 + 2\beta z + \gamma}{2(z + \beta)} = w \quad (28'')$$

wird. Das Integral geht hierdurch über in:

$$J = \int f\left(\frac{z^2 - \gamma}{2(z + \beta)}, \alpha \frac{z^2 + 2\beta z + \gamma}{2(z + \beta)}\right) \cdot \frac{z^2 + 2\beta z + \gamma}{2(z + \beta)^2} dz. \quad (29)$$

Sein Integrand ist eine rationale Funktion von z ; das Integral läßt sich also nach den Methoden von § 3 auswerten. Zuletzt hat man noch die Veränderliche z durch x zu ersetzen durch die aus 28) sich ergebende Gleichung:

$$\text{oder } \left. \begin{aligned} z &= x + \frac{w}{\alpha} & \text{oder } z &= x + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\gamma + 2\beta x + x^2} \\ z &= x + \sqrt{ax^2 + 2bx + c}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

b) Es sei $-a = \alpha^2 > 0$, d. h. a negativ. Man kann jetzt schreiben

$$w = \alpha \sqrt{\gamma + 2\beta x - x^2},$$

wobei zur Abkürzung

$$\gamma = -\frac{c}{a} \quad \text{und} \quad \beta = -\frac{c}{b}$$

gesetzt sind. Sind nun x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2\beta x - \gamma = 0,$$

so ist

$$w^2 = \alpha^2 (x_2 - x)(x - x_1). \quad (31)$$

Man setze

$$w = \alpha (x - x_1) z;$$

dann folgt

$$\left. \begin{aligned} w^2 &= \alpha^2 (x_2 - x)(x - x_1) = \alpha^2 (x - x_1)^2 z^2, \\ x_2 - x &= (x - x_1) z^2, \quad x = \frac{x_2 + x_1 z^2}{1 + z^2}, \quad dx = \frac{2z(x_1 - x_2)}{(1 + z^2)^2} dz, \end{aligned} \right\} \quad (31')$$

während

$$w = \alpha (x - x_1) z = \alpha \frac{z(x_2 - x_1)}{1 + z^2} \quad (31'')$$

wird. Das Integral geht hierdurch über in

$$J = \int f\left(\frac{x_2 + x_1 z^2}{1 + z^2}, \alpha \frac{(x_2 - x_1)z}{1 + z^2}\right) \cdot 2 \frac{(x_1 - x_2)z}{(1 + z^2)^2} dz. \quad (32)$$

Sein Integrand ist wiederum eine rationale Funktion von z . Am Schlusse hat man noch z durch

$$z = \sqrt{\frac{x_2 - x}{x - x_1}}$$

zu ersetzen.

Beispiele:

a) $J = \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + a^2}}$; wir setzen $\sqrt{x^2 + a^2} = z - x$, also

$$x = \frac{z^2 - a^2}{2z}, \quad dx = \frac{z^2 + a^2}{2z^2} dz, \quad \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{z^2 + a^2}{2z};$$

demnach

$$J = \int \frac{(z^2 + a^2) 2z \cdot 2z}{2z^2(z^2 - a^2) \cdot (z^2 + a^2)} dz = 2 \int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{a} \ln \frac{z - a}{z + a};$$

nun ist

$$z = x + \sqrt{x^2 + a^2},$$

also wird

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{x - a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x + a + \sqrt{x^2 + a^2}}. \quad \text{Probe!}$$

$$\text{b) } J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad \sqrt{x^2 - a^2} = z - x, \quad x = \frac{z^2 + a^2}{2z},$$

$$dx = \frac{z^2 - a^2}{2z^2} dz, \quad \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{z^2 - a^2}{2z},$$

$$\begin{aligned} J &= 2 \int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{2}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} = \frac{2}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x} + \frac{\pi}{2a}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } J = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \text{man setze } a^2 - x^2 = (a - x)(x + a) = (x + a)^2 z^2,$$

also

$$x = a \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad dx = a \frac{-4z}{(1 + z^2)^2} dz.$$

Nun wird

$$\sqrt{a^2 - x^2} = 2a \frac{z}{1 + z^2},$$

daher

$$J = -4 \int \frac{z dz}{(1 + z^2)^2} \cdot \frac{1 + z^2}{1 - z^2} \cdot \frac{1 + z^2}{2az} = -\frac{2}{a} \int \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{1}{a} \ln \frac{1 - z}{z + 1};$$

da nun

$$z = \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$$

ist, so ergibt sich

$$J = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}.$$

Hiermit ist gezeigt, daß und auf welchem Wege sich alle rationalen Funktionen einer Veränderlichen x und der Quadratwurzel aus einer quadratischen Funktion von x integrieren lassen; zuweilen läßt sich eine bestimmte Funktion dieser Art auf einem anderen Wege bequemer integrieren. So läßt sich beispielsweise das unter b) angeführte Integral

$J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$ viel leichter mit der Substitution

$$\frac{a}{x} = \cos z, \quad x = \frac{a}{\cos z}, \quad z = \arccos \frac{a}{x}, \quad dx = + \frac{a \sin z}{\cos^2 z} dz$$

auswerten; wir erhalten dadurch:

$$J = \int \frac{a \sin z \cdot \cos z}{\cos^2 z \cdot a \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 z} - a^2}} dz = \frac{1}{a} \int dz = \frac{1}{a} z = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x}.$$

(77) Eine besondere Hervorhebung verdient das Integral

$$J = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{\sqrt{a x^2 + 2b x + c}} dx, \quad (33)$$

das häufig in der Praxis vorkommt und eine bemerkenswert einfache Auswertung gestattet. Wir machen den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} & \int \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{\sqrt{a x^2 + 2b x + c}} dx \\ & = (\alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \sqrt{a x^2 + 2b x + c} \\ & + \beta \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{a x^2 + 2b x + c}}. \end{aligned} \right\} (34)$$

Die Aufgabe läßt sich hierdurch zurückführen auf die Auswertung des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{a x^2 + 2b x + c}}$, das sich aber mit Hilfe der in T II angeführten Formeln, besonders T II 4, 5, 6, 7, mittels einer linearen Substitution leicht erledigen läßt. Differenzieren wir nämlich beide Seiten von 34) und multiplizieren dann mit $\sqrt{a x^2 + 2b x + c}$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ & = ((n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + (n-2)\alpha_{n-2} x^{n-3} + \dots + \alpha_1) (a x^2 + 2b x + c) \\ & + (\alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \dots + \alpha x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) (a x + b) + \beta. \end{aligned}$$

Sollen die beiden ganzen rationalen Funktionen n ten Grades links und rechts identisch gleich sein, so müssen die Beiwerte gleich hoher Potenzen von x beiderseits gleich sein; hieraus ergeben sich aber $n+1$ Gleichungen zur Bestimmung der $n+1$ Beiwerte $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha, \beta$.

Beispiele: a) $J = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x-2x^2}} dx$. Wir setzen an

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x-2x^2}} dx = (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) \sqrt{1+x-2x^2} + \beta \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-2x^2}};$$

jetzt differenzieren wir beiderseits und erhalten nach Multiplikation mit $\sqrt{1+x-2x^2}$

$$x^3 = (2\alpha_2 x + \alpha_1)(1+x-2x^2) + (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)(\frac{1}{2} - 2x) + \beta.$$

Die Vergleichung der Beiwerte gleich hoher Potenzen von x ergibt die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} -6\alpha_2 &= 1, & \frac{5}{2}\alpha_2 - 4\alpha_1 &= 0, & 2\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_1 - 2\alpha_0 &= 0, \\ \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_0 + \beta &= 0; \end{aligned}$$

aus ihnen folgt:

$$\alpha_2 = -\frac{1}{6}, \quad \alpha_1 = -\frac{5}{48}, \quad \alpha_0 = -\frac{47}{192}, \quad \beta = \frac{29}{128}.$$

Also ist

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x-2x^2}} dx = \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{48}x - \frac{47}{192} \right) \sqrt{1+x-2x^2} + \frac{29}{128} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-2x^2}}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-2x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4}{3} z = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-1}{3}, \end{aligned}$$

unter Verwendung der Substitution $x - \frac{1}{4} = z$. So ist schließlich

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x-2x^2}} dx &= -\frac{1}{192} (32x^2 + 20x + 47) \sqrt{1+x-2x^2} \\ &\quad + \frac{29}{256} \sqrt{2} \cdot \arcsin \frac{4x-1}{3}. \quad \text{Probe!} \end{aligned}$$

b) $J = \int (x^2 - p^2) \sqrt{x^2 + p^2} dx$. Um den Integranden auf die Form 33) zu bringen, erweitern wir ihn mit $\sqrt{x^2 + p^2}$; wir erhalten dann

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{(x^2 - p^2)(x^2 + p^2)}{\sqrt{x^2 + p^2}} dx = \int \frac{x^4 - p^4}{\sqrt{x^2 + p^2}} dx \\ &= (\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) \sqrt{x^2 + p^2} + \beta \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p^2}}. \end{aligned}$$

Differenzieren und Multiplizieren mit $\sqrt{x^2 + p^2}$ ergibt

$$\begin{aligned} x^4 - p^4 &= (3\alpha_3 x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_1)(x^2 + p^2) \\ &\quad + (\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot x + \beta. \end{aligned}$$

Vergleichung der Beiwerte liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} 4\alpha_3 &= 1, \quad 3\alpha_2 = 0, \quad 3\alpha_3 p^2 + 2\alpha_1 = 0, \quad 2\alpha_2 p^2 + \alpha_0 = 0, \\ \alpha_1 p^2 + \beta &= -p^4; \end{aligned}$$

hieraus folgt:

$$\alpha_3 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = -\frac{3p^2}{8}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \beta = -\frac{5}{8} p^4.$$

Da nun $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} = \text{Ar} \sin \frac{x}{p}$ [s. III 6] ist, so ergibt sich

$$\int (x^2 - p^2) \sqrt{x^2 + p^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - 3p^2) \sqrt{x^2 + p^2} - \frac{5}{8} p^4 \text{Ar} \sin \frac{x}{p}.$$

Dieses und das folgende Integral stehen in enger Beziehung zur Parabel.

e) $J = \int x \sqrt{\frac{2x+2p}{2x+p}} dx$. Wir bringen das Integral auf die Form 33) durch Erweitern des Integranden mit $\sqrt{2x+2p}$; es wird dann

$$J = \int \frac{2x^2 + 2px}{\sqrt{4x^2 + 6px + 2p^2}} dx.$$

Verfahren wir weiter wie oben, so erhalten wir schließlich

$$\int x \sqrt{\frac{2x+2p}{2x+p}} dx = \frac{\sqrt{2}}{16} (4x-p) \sqrt{2x^2 + 3px + p^2} - \frac{5}{32} p^2 \operatorname{ArCo}\left[\frac{4x+3p}{p}\right].$$

(78) Noch weniger als im Falle des irrationalen Integranden lassen sich, wenn der Integrand eine transzendente Funktion ist, allgemeine Gesichtspunkte angeben, wie beim Auswerten des Integrals zu verfahren ist. Auch hier müssen wir uns auf einige integrable Sonderfälle beschränken, die die wichtigsten Integrale mit transzendenten Integranden darstellen.

I. $J = \int x^n e^{ax} dx$. Wir wenden die Methode der teilweisen Integration an und setzen $x^n = u$, $e^{ax} = v'$; dann ist $u' = nx^{n-1}$ und $v = \frac{e^{ax}}{a}$; es ergibt sich also:

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx. \quad [\text{T III 26}] \quad 35)$$

Hiermit ist, wenn n eine natürliche Zahl ist, das ursprüngliche Integral auf ein anderes zurückgeführt, in dessen Integranden x nur noch in der $(n-1)$ ten Potenz auftritt. Durch wiederholte Anwendung der Formel 35) gelangen wir schließlich zu dem Integral $\int e^{ax} dx$, das nach [T III 10] gleich

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

ist. Eine Formel wie 35), die zwar die gestellte Aufgabe nicht sofort löst, aber auf eine einfachere zurückführt und durch fortgesetzte Anwendung die Lösung bringt, heißt eine Reduktionsformel oder Rekursionsformel.

Ist beispielsweise $\int x^5 e^{ax} dx$ auszuwerten, so erhält man mittels 35)

$$\int x^5 e^{ax} dx = \frac{x^5 e^{ax}}{a} - \frac{5}{a} \int x^4 e^{ax} dx$$

und ebenso weiter

$$\int x^4 e^{ax} dx = \frac{x^4 e^{ax}}{a} - \frac{4}{a} \int x^3 e^{ax} dx.$$

Setzt man dies ein und fährt so fort, so ergibt sich:

$$\int x^5 e^{ax} dx = \frac{x^5 e^{ax}}{a} - \frac{5}{a} \left\{ \frac{x^4 e^{ax}}{a} - \frac{4}{a} \left[\frac{x^3 e^{ax}}{a} - \frac{3}{a} \left(\frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a} \left(\frac{x e^{ax}}{a} - \frac{1}{a} \frac{e^{ax}}{a} \right) \right) \right] \right\} \\ = e^{ax} \left\{ \frac{x^5}{a} - \frac{5}{a^2} x^4 + \frac{20}{a^3} x^3 - \frac{60}{a^4} x^2 + \frac{120}{a^5} x - \frac{120}{a^6} \right\}. \quad \text{Probe!}$$

Formel 35) läßt sich nach dem Integrale auf der rechten Seite auflösen:

$$\frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \int x^n e^{ax} dx;$$

ersetzt man hier $n - 1$ durch $-\nu$, so erhält man

$$-\frac{\nu-1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x^\nu} dx = \frac{e^{ax}}{a \cdot x^{\nu-1}} - \int \frac{e^{ax}}{x^{\nu-1}} dx.$$

Schreibt man schließlich wieder n statt ν , so erhält man die Formel

$$\int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = -\frac{e^{ax}}{(n-1) \cdot x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} dx. \quad [\text{T III 27}] \quad 35')$$

Diese Rekursionsformel vermindert den Exponenten der diesmal im Nenner stehenden Potenz von x wiederum um 1. Durch ihre wiederholte Anwendung gelangt man schließlich zu dem Integrale $\int \frac{e^{ax}}{x} dx$, das man durch die Substitution

$$e^{ax} = z, \quad x = \frac{1}{a} \ln z, \quad dx = \frac{dz}{az}$$

überführen kann in das Integral

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = a \int \frac{dz}{\ln z}.$$

Weder $\int \frac{e^{ax}}{x} dx$ noch $\int \frac{dz}{\ln z}$ lassen sich mit unseren bisherigen Mitteln auswerten; durch diese beiden Integrale sind vielmehr neue Funktionen definiert [s. (201) S. 661].

Beispiel:

$$J = \int \frac{e^{ax}}{x^4} dx = -\frac{e^{ax}}{3x^3} + \frac{a}{3} \left\{ -\frac{e^{ax}}{2x^2} + \frac{a}{2} \left[-\frac{e^{ax}}{x} + \frac{a}{1} \int \frac{e^{ax}}{x} dx \right] \right\}, \\ \int \frac{e^{ax}}{x^4} = -e^{ax} \left(\frac{1}{3x^3} + \frac{a}{6x^2} + \frac{a^2}{6x} \right) - \frac{a^3}{6} \int \frac{e^{ax}}{x} dx. \quad \text{Probe!}$$

II. $S_n = \int \sin^n x dx$. Wir benutzen wieder die Methode der teilweisen Integration

$u = \sin^{n-1} x, \quad v' = \sin x, \quad u' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x, \quad v = -\cos x$
und erhalten

$$S_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx.$$

Nun ersetzen wir $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$; dann wird

$$\begin{aligned} S_n &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx. \end{aligned}$$

Kürzt man $\int \sin^{n-2} x dx$ ab durch S_{n-2} , so ergibt sich

$$S_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) S_{n-2} - (n-1) S_n$$

oder durch Auflösen nach S_n

$$S_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} S_{n-2},$$

also

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx. \quad [\text{T III 28}] \quad 36)$$

Ist n eine natürliche Zahl, so stellt Formel 36) eine Rekursionsformel dar, durch deren wiederholte Anwendung man schließlich bei ungeradem n auf das Grundintegral $\int \sin x dx = -\cos x$ oder bei geradem n auf das Integral $\int dx = x$ gelangt. Das ursprüngliche Integral läßt sich demnach vollständig auswerten.

Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \sin^5 x dx &= -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x + \frac{4}{5} \int \sin^3 x dx = -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x \\ &\quad + \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} \int \sin x dx \right), \\ \int \sin^5 x dx &= -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x - \frac{4}{15} \sin^2 x \cos x - \frac{8}{15} \cos x. \quad \text{Probe!} \\ \text{b) } \int \sin^6 x dx &= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x \\ &\quad + \frac{5}{6} \left\{ -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \left[-\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x \right] \right\}, \\ \int \sin^6 x dx &= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x \\ &\quad - \frac{5}{24} \sin^3 x \cos x - \frac{5}{16} \sin x \cos x + \frac{5}{16} x. \quad \text{Probe!} \end{aligned}$$

Setzt man in 36) $n-2 = -\nu$, also $n = 2 - \nu$, so erhält man

$$\int \frac{dx}{\sin^{\nu-2} x} = \frac{1}{\nu-2} \frac{\cos x}{\sin^{\nu-1} x} + \frac{\nu-1}{\nu-2} \int \frac{dx}{\sin^{\nu} x}.$$

Ersetzen wir ν durch n und lösen nach dem Integrale der rechten Seite auf, so erhalten wir die neue Rekursionsformel

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}. \quad [\text{T III 29}]$$

Wir gelangen bei wiederholter Anwendung dieser Formel (ganzzahliges positives n vorausgesetzt) schließlich entweder zu dem Integral

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} \quad (\text{wenn } n \text{ eine gerade Zahl ist}) \quad \text{oder auf das Integral } \int \frac{dx}{\sin x} \quad (\text{wenn } n \text{ eine ungerade Zahl ist}).$$

Da nun nach [T III 3] $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x$ und nach [T III 14] $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \text{tg } \frac{x}{2}$ ist, so läßt sich $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ stets vollständig auswerten.

Beispiele:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{1} \frac{\cos x}{\sin x} + 0 \right) = -\frac{1}{3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{3} \operatorname{ctg} x .$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{dx}{\sin^5 x} &= -\frac{1}{4} \frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{3}{4} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\cos x}{\sin^4 x} - \frac{3}{8} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \operatorname{tg} x . \end{aligned}$$

Es sei ferner $C_n = \int \cos^n x \, dx$. Auf ganz entsprechendem Wege wie oben lassen sich hierfür die beiden Rekursionsformeln finden

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx \quad [\text{T III 30}]$$

und

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} . \quad [\text{T III 31}]$$

(79) III. Das Integral

$$T = \int f(\operatorname{tg} x) \, dx , \quad 37)$$

wobei $f(\operatorname{tg} x)$ eine rationale Funktion von $\operatorname{tg} x$ sein soll, wird durch die Substitution

$$\operatorname{tg} x = z , \quad x = \operatorname{arctg} z , \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

übergeführt in das Integral

$$\int \frac{f(z)}{1+z^2} \, dz .$$

Hier ist der Integrand $\frac{f(z)}{1+z^2}$ eine rationale Funktion von z , kann also nach den Methoden des § 3 behandelt werden.

Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \operatorname{tg}^4 x \, dx &= \int \frac{z^4}{1+z^2} \, dz = \int \left(z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1} \right) \, dz \\ &= \frac{z^3}{3} - z + \operatorname{arctg} z = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + 1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{dx}{1-\operatorname{tg}^2 x} &= -\int \frac{dz}{(z^2+1)(z^2-1)} = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{dz}{z^2-1} - \frac{dz}{z^2+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{z+1}{z-1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z = \frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} + \frac{1}{2} x \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) . \end{aligned}$$

IV. Wir sind nun auch imstande, jedes Integral von der Form

$$J = \int \sin^r x \cos^s x \, dx \quad 38)$$

auszuwerten, in welchem r und s irgendwelche ganze Zahlen sind. Wir wollen zum Nachweise mehrere Fälle gesondert betrachten.

a) Eine der beiden Zahlen r und s sei ungerade. Ist r ungerade, so führt die Substitution $\cos x = z$ den Integranden in eine rationale Funktion von z über; ist dagegen s ungerade, so hat die Substitution $\sin x = z$ den gleichen Erfolg.

b) Beide Exponenten sind gerade Zahlen $r = 2\rho$, $s = 2\sigma$. In diesem Falle ersetzt man die gegebenen Funktionen am bequemsten durch die Tangensfunktion mit Hilfe der Formeln $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ und $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, wodurch dieser Fall auf den Fall III zurückgeführt wird.

Beispiele:

a) $J = \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx$. Wir setzen $\sin x = z$, damit ist $\cos x dx = dz$, und es wird

$$J = \int \frac{\sin^4 x \cos x dx}{\cos^4 x} = \int \frac{z^4}{(1-z^2)^2} dz = \int \left(1 + \frac{2z^2-1}{(z^2-1)^2}\right) dz.$$

Nun ist

$$\int \frac{2z^2-1}{(z^2-1)^2} dz = -\frac{z}{2(z^2-1)} + \frac{3}{2} \int \frac{dz}{z^2-1};$$

daher ist

$$J = z - \frac{z}{2(z^2-1)} + \frac{3}{4} \ln \frac{z-1}{z+1} = \sin x + \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{3}{4} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$$

oder

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx = \sin x + \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{3}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{2} \right). \quad \text{Probe!}$$

b) $J = \int \sin^4 x \cos^6 x dx$. Wir setzen

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{und} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

und erhalten

$$J = \int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^5} dx$$

und durch die Substitution

$$\operatorname{tg} x = z, \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

$$J = \int \frac{z^4}{(z^2+1)^6} dz = \frac{1}{1280} \cdot \frac{15z^9 + 70z^7 + 128z^5 - 70z^3 - 15z}{(z^2+1)^5} + \frac{3}{256} \operatorname{arctg} z,$$

$$\int \sin^4 x \cos^6 x dx = \frac{\sin z \cos z}{1280} (15 \sin^8 x + 70 \sin^6 x \cos^2 x + 128 \sin^4 x \cos^4 x - 70 \sin^2 x \cos^6 x - 15 \cos^8 x) + \frac{3}{256} x.$$

$$V. S_n = \int x^n \sin ax dx \quad \text{und} \quad C_n = \int x^n \cos ax dx.$$

Wir wenden die Methode der Integration nach Teilen an $x^n = u$, $\sin ax = v'$, $u' = n x^{n-1}$, $v = -\frac{\cos ax}{a}$ und erhalten für S_n

$$S_n = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} C_{n-1};$$

ebenso erhalten wir für C_n , wenn wir setzen

$$x^n = u, \quad \cos ax = v', \quad u' = n x^{n-1}, \quad v = \frac{\sin ax}{a},$$

$$C_n = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} S_{n-1}.$$

Hieraus ergeben sich die beiden Rekursionsformeln:

$$\left. \begin{aligned} \int x^n \sin ax \, dx &= -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx, \\ \int x^n \cos ax \, dx &= \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx. \end{aligned} \right\} \quad [\text{TIII 32}] \quad 39)$$

Sie führen — positives ganzzahliges n vorausgesetzt — schließlich auf

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad \text{oder} \quad \int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax;$$

S_n und C_n lassen sich also stets auswerten.

Beispiel:

$$\begin{aligned} J &= \int t^3 \sin \frac{2\pi}{T} t \cdot dt = -\frac{T}{2\pi} t^3 \cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{3T}{2\pi} \left[\frac{T}{2\pi} t^2 \sin \frac{2\pi}{T} t \right. \\ &\quad \left. - \frac{2T}{2\pi} \left(-\frac{T}{2\pi} t \cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T} t \right) \right] \\ &= -\frac{T}{2\pi} t^3 \cos \frac{2\pi}{T} t + 3 \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 t^2 \sin \frac{2\pi}{T} t + 6 \left(\frac{T}{2\pi} \right)^3 t \cos \frac{2\pi}{T} t \\ &\quad - 6 \left(\frac{T}{2\pi} \right)^4 \sin \frac{2\pi}{T} t. \end{aligned}$$

Beweise die Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin ax}{x^n} dx &= -\frac{1}{n-1} \frac{\sin ax}{x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}} dx \\ \text{und} \quad \int \frac{\cos ax}{x^n} dx &= -\frac{1}{n-1} \frac{\cos ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax}{x^{n-1}} dx. \end{aligned}$$

Durch sie werden die Integrale

$$\int \frac{\sin ax}{x^n} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos ax}{x^n} dx$$

zurückgeführt auf die beiden Integrale

$$\int \frac{\sin ax}{x} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos ax}{x} dx,$$

deren Auswertung mit elementaren Hilfsmitteln nicht möglich ist.

§ 5. Die geometrische Deutung des Integrals.

Das bestimmte Integral.

(80) Das geometrische Bild der Funktion $y = f(x)$ ist, wie wir im Abschnitt I erfahren haben, in einem rechtwinkligen Koordinatensystem eine Kurve; wir nennen $y = f(x)$ die Gleichung dieser Kurve. Es ist zu erwarten, daß das Bild der Funktion $F(x) = \int f(x)dx$ einen ähnlich engen Zusammenhang mit dem Bilde von $f(x)$ haben wird, wie ihn die beiden Funktionen selbst aufweisen.

Wir wollen nun zeigen, daß $F(x) = \int f(x)dx$ als eine Fläche gedeutet werden kann (s. Abb. 85), und zwar stellt es die Fläche dar, die begrenzt wird von der x -Achse, der Kurve $y = f(x)$ und zwei Ordinaten, der zu einer beliebigen, aber konstanten Abszisse c gehörigen und der zur veränderlichen Abszisse x gehörigen.

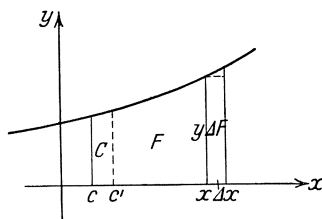


Abb. 85.

Mit der Änderung von x ändert sich auch der Inhalt F des betrachteten Flächenstückes, d. h. der Flächeninhalt ist eine Funktion der Endabszisse x . Es bleibt nun noch nachzuweisen, daß der Differentialquotient dieser Funktion für jedes beliebige x gleich $f(x)$ ist. Zu diesem Zwecke erinnern wir uns der Definition des Differentialquotienten [vgl. Abschnitt I (18) S. 35]. Wir erteilen x einen Zuwachs Δx ; dadurch nimmt F (Abb. 85) um einen Flächenstreifen ΔF zu, der sich zusammensetzt aus einem Rechteck mit den Seiten Δx und $y = f(x)$ und einem rechtwinkligen Dreieck mit den beiden Katheten Δx und Δy , dessen Hypotenuse allerdings nicht geradlinig, sondern ein Stück der Kurve $y = f(x)$ ist. Wir können aber ΔF um so besser durch das Rechteck ersetzen, je kleiner wir Δx wählen; denn dann wird zwar der Inhalt des Rechtecks sich der Null nähern, da eine seiner Seiten es tut, in höherem Grade aber der des rechtwinkligen Dreiecks, da dessen beide Katheten gegen Null konvergieren, so daß wir seinen Inhalt gegen denjenigen des Rechtecks vernachlässigen können. Wählen wir also Δx klein genug, so können wir setzen $\Delta F \approx f(x) \cdot \Delta x$, und zwar um so unbedenklicher, je kleiner wir Δx nehmen. Der Differenzenquotient ist also $\frac{\Delta F}{\Delta x} \approx f(x)$, und kommt dem Werte $f(x)$ um so näher, je mehr sich Δx dem Werte Null nähert; das Zeichen \approx läßt sich durch das Zeichen $=$ ersetzen für $\lim \Delta x = 0$. Dann wird aber aus $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ der Differentialquotient $\frac{dF}{dx}$, und wir haben damit gezeigt, daß $\frac{dF}{dx} = f(x)$ ist.

Wählen wir statt der Anfangsabszisse c irgendeine andere c' , so ist der bis zu der veränderlichen Endordinate y reichende Flächeninhalt G wieder eine Funktion von x , deren Differentialquotient ebenfalls $f(x)$ ist, da für sie der obige Beweis genau ebenso gilt. Die beiden Flächen F und G sind aber nicht dieselben, sie unterscheiden sich vielmehr um ein Flächenstück C , das von der Abszissenachse, der Kurve $y = f(x)$ und den zu den Abszissen c und c' gehörigen Ordinaten begrenzt wird, so daß also $F(x) = G(x) + C$ ist. Da C von der Veränderlichen x unabhängig ist, so finden wir in C die geometrische Deutung der Integrationskonstanten wieder.

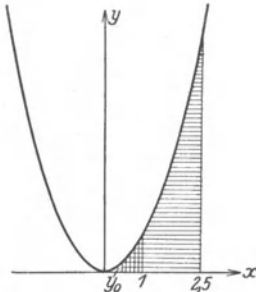


Abb. 86.

Wie man die Eigenschaft, daß $\int f(x)dx$ einen Flächeninhalt darstellt, zur Ermittlung des Inhaltes einer Fläche benutzen kann, sei an einem einfachen Beispiele gezeigt. In Abb. 86 ist die Parabel von der Gleichung $y = x^2$ dargestellt, und es sei die Aufgabe gestellt, den Inhalt der Fläche zu ermitteln, die von der x -Achse, der Parabel und den zu $x = 1$ und $x = 2,5$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird. Nach obigen Erörterungen stellt $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ die Fläche dar, die bis zu der einem veränderlichen x zugehörigen Endordinate reicht. C ergibt sich aus der willkürlich gewählten Anfangsordinate y_0 . Nimmt man als Endordinate die zu $x = 2,5$ gehörige, so wird die Fläche

$$F^{2,5} = \frac{2,5^3}{3} + C = 5,208 + C,$$

dagegen diejenige, die bis zu der zu $x = 1$ gehörigen Ordinate reicht:

$$F^1 = \frac{1^3}{3} + C = 0,333 + C.$$

(In Abb. 86 ist die wagerecht schraffierte Fläche gleich $F^{2,5}$, die senkrecht schraffierte dagegen F^1 .) Da als Anfangsordinate in beiden Fällen dieselbe Ordinate y_0 gewählt worden ist, hat auch C in beiden Fällen den gleichen Wert. Andererseits stellt dann die Differenz $F^{2,5} - F^1$ den Inhalt des gesuchten Flächenstückes dar; sie beträgt

$$F_1^{2,5} = F^{2,5} - F^1 = (5,208 + C) - (0,333 + C) = 4,875.$$

Das Bemerkenswerte an dem Resultate ist, daß durch die Differenzbildung die Integrationskonstante weggefallen ist; das Integral hat jetzt seine Unbestimmtheit verloren, es ist ein bestimmtes Integral geworden.

Ganz allgemein versteht man unter dem bestimmten Integrale $\int_a^b f(x) dx$ einen Ausdruck, zu dem man auf folgendem Wege gelangt:
Man ermittelt zunächst das unbestimmte Integral

$$\int f(x) dx = F(x),$$

bildet dann durch Einsetzen der bestimmten Werte a und b für die Veränderliche x die beiden Werte $F(a)$ und $F(b)$ und subtrahiert schließlich $F(a)$ von $F(b)$. Der Ausdruck $F(b) - F(a)$ ist das gesuchte bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$. a heißt die untere, b die obere Grenze des bestimmten Integrals. Aus dieser Definition folgt sofort die Gleichung

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad (40)$$

d. h. eine Vertauschung der Grenzen führt ein Integral in den entgegengesetzten Wert über.

Ferner ist

$$F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a),$$

also

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (40')$$

Einige bestimmte Integrale sollen ermittelt werden:

$$a) \int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21,$$

$$b) \int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a},$$

$$c) \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$d) \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \left[\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right]_0^a = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} 0 \\ = \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4a}.$$

$$e) \int_a^\infty \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \infty - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4a},$$

$$f) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 0 + 1 = 1.$$

Weise die Richtigkeit der folgenden bestimmten Integrale nach:

$$\int_1^4 x \sqrt{x} \, dx = 12,4, \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x^2} = 0,5, \quad \int_0^{\frac{1}{5}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln 5 = 1,6094,$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos x \, dx = 0,2072.$$

(81) Mit Hilfe der in (80) erworbenen Kenntnisse können wir jetzt auch dem bestimmten Integrale eine geometrische Deutung geben. Es ist nämlich

$$F = \int_a^b f(x) \, dx \tag{41}$$

die Fläche, welche von der x -Achse, der Kurve $y = f(x)$ und den zu den Abszissen $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird; eines

Beweises bedarf es nicht mehr. Aber gerade diese geometrische Deutung eröffnet uns einen noch tieferen Blick in das Wesen des bestimmten Integrals. Wir können (Abb. 87) den Inhalt dieser Fläche auch auf folgendem Wege ermitteln. Wir setzen zunächst voraus, daß $y = f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ stetig verlaufe und beständig wachse. Nun teilen

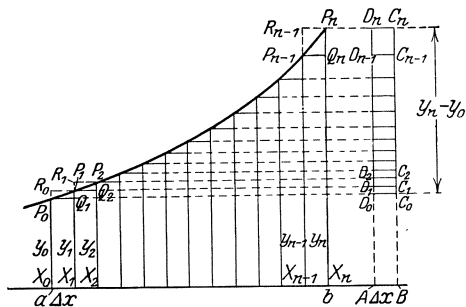


Abb. 87.

wir das Stück der Abszissenachse von $x = a$ bis $x = b$ in n gleiche Teile, so daß jedes Teilstück die Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ hat. Ferner ziehen wir durch diese Teilpunkte $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ die Ordinaten $X_0 P_0 = y_0, X_1 P_1 = y_1, X_2 P_2 = y_2 \dots, X_{n-1} P_{n-1} = y_{n-1}, X_n P_n = y_n$. Dadurch wird die Fläche F in n Parallelstreifen zerlegt.

Jetzt wollen wir durch die Kurvenpunkte $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ die Parallelen zur Abszissenachse ziehen, welche die jeweils folgenden Nachbarordinaten in $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ schneiden mögen. Es entsteht dann eine Anzahl von Rechtecken, deren jedes infolge der obigen Annahme, daß die Kurve nirgends fallen soll, kleiner ist als der zugehörige Streifen; folglich ist auch die Summe dieser Rechtecke kleiner als F . Die Inhalte der Rechtecke sind aber der Reihe nach $y_0 \cdot \Delta x, y_1 \cdot \Delta x, y_2 \cdot \Delta x, \dots, y_{n-1} \Delta x$; wir erhalten also, wenn wir für das Summenzeichen den Buchstaben S wählen, die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \Delta x < F.$$

Ziehen wir dagegen durch $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ die Parallelen zur Abszissenachse, welche die jeweils vorangehenden Ordinaten in $R_0, R_1, \dots, R_{n-2}, R_{n-1}$ schneiden mögen, so erhalten wir wiederum eine Anzahl von Rechtecken, deren jedes infolge der oben angeführten Voraussetzung über $y = f(x)$ größer ist als die zugehörige Lamelle von F , so daß also

$$\sum_{k=1}^n y_k \cdot \Delta x > F$$

ist. Nun haben aber beide Summen die gleichen Glieder, ausgenommen das Glied $y_n \Delta x$, das nicht in der ersten Summe, und das Glied $y_0 \cdot \Delta x$, das nicht in der letzten Summe vorkommt; folglich ist ihr Unterschied:

$$\sum_{k=1}^n y_k \cdot \Delta x - \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \Delta x = y_n \cdot \Delta x - y_0 \cdot \Delta x = (y_n - y_0) \cdot \Delta x.$$

Wir finden dies auch in Abb. 87 bestätigt: dort ist auf der Abszissenachse die Strecke $AB = \Delta x$ abgetragen, in den Punkten A und B sind Parallelen zur Ordinatenachse gezogen, und der dadurch entstandene Streifen ist durch die Verlängerungen von $R_0 Q_1, R_1 Q_2, \dots, R_{n-1} Q_n, R_{n-1} P_n$ in Rechtecke

$$D_0 C_0 C_1 D_1 = P_0 Q_1 P_1 R_0, \quad D_1 C_1 C_2 D_2 = P_1 Q_2 P_2 R_1, \dots, \\ D_{n-1} C_{n-1} C_n D_n = P_{n-1} Q_n P_n Q_{n-1}$$

zerlegt worden, deren Inhalt also gleich der Differenz der Inhalte je zweier entsprechender Rechtecke der beiden Summen

$$\sum_{k=1}^n y_k \Delta x \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta x$$

ist. Somit hat der Streifen $D_0 C_0 E_n D_n$ einen Inhalt, der gleich der Differenz der beiden Summen ist. Da nun $D_0 D_n = C_0 C_n = y_n - y_0$ ist,

so beträgt diese Differenz wie oben

$$(y_n - y_0) \cdot \Delta x.$$

Jetzt wollen wir die Anzahl n der Streifen, in die wir F zerlegt haben, vermehren. Hiervon unberührt bleibt die Tatsache, daß

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta x < F < \sum_{k=1}^n y_k \Delta x$$

ist. Andererseits wird aber $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ sich in dem Maße dem Grenzwerte Null nähern, als die Zahl n selbst über alle Grenzen hinaus wächst. Das Rechteck $D_0 C_0 C_n D_n$ behält zwar seine Höhe $D_0 D_n = y_n - y_0$, die von der Wahl der Größe n unabhängig ist, unverändert bei; aber die Breite Δx und damit der Flächeninhalt konvergiert mit Δx gegen Null. Das heißt aber, daß die Differenz der beiden Summen

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta x \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n y_k \Delta x$$

sich mit wachsendem n der Null nähert, daß also die beiden Summen mehr und mehr einander gleich werden:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta x = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n y_k \Delta x.$$

Weil aber der Wert von F stets zwischen diesen beiden Werten liegt, ist der gemeinsame Grenzwert dieser beiden Summen gleich F :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta x = F.$$

Wir können uns nun auch von der oben gemachten Annahme, daß $f(x)$ von a bis b nicht abnehmen solle, freimachen. Würde nämlich $f(x)$ in diesem Intervalle abnehmen, so würden die gleichen Schlüsse wie oben gelten, nur daß jetzt

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta x > F > \sum_{k=1}^n y_k \Delta x$$

wäre. Würde dagegen ein abwechselndes Steigen und Fallen von $f(x)$ im betrachteten Intervalle stattfinden, so brauchte man nur dieses so in kleinere Intervalle zu teilen, daß in jedem $f(x)$ entweder nur steigt oder nur fällt, und auf jedes dieser Intervalle die angeführte Schlußfolgerung anzuwenden. Wir können das bestimmte Integral

$F = \int_a^b f(x) dx$, wenn wir von der geometrischen Betrachtung abstra-

hieren, auch folgendermaßen deuten. Man teilt das Intervall von $x = a$ bis $x = b$ in eine endliche Anzahl n gleicher Teile, deren jeder den Wert $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ hat, und multipliziert dieses Δx mit dem zu dem betreffenden x gehörigen Funktionswerte $y = f(x)$. Alle diese Produkte werden addiert. Von dieser Summe bestimmt man den Grenzwert für den Fall, daß n über alle Grenzen hinaus wächst, oder — was dasselbe ist — daß Δx sich dem Grenzwerte Null nähert. Durch diesen Grenzübergang wird zwar die Anzahl der Summanden unendlich groß, dafür aber jeder einzelne Summand unendlich klein, in der Weise, daß die Summe selbst endlich wird. Man drückt diese Tatsache gern kurz, wenn auch unscharf, dadurch aus, daß man sagt: „Ein bestimmtes Integral kann aufgefaßt werden als eine Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen.“

Ein paar Worte noch über die Bezeichnung. Bedenken wir, daß in der Summe

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta x$$

die unabhängige Veränderliche x für $k = 0$ den Wert a , für $k = n$ den Wert b annimmt, für $k = n - 1$ einen Wert, der um so näher dem Werte b kommt, je kleiner Δx ist, und daß die abhängige Veränderliche $y = f(x)$ ist, so können wir diese Summe auch schreiben

$$\sum_{x=a}^b f(x) \Delta x ;$$

drücken wir schließlich den Grenzübergang dadurch aus, daß wir statt Δx schreiben dx , und daß wir das Summenzeichen \mathbf{S} zum Integralzeichen \int strecken, so ergibt sich für den Grenzwert der Summe die Schreibweise

$$\int_{x=a}^b f(x) dx ;$$

die Schreibweise, die wir in § 1 für das Integral kennengelernt haben, findet hierdurch ihre Begründung.

Fassen wir nochmals das Wesentlichste zusammen. Wir haben zwei ganz verschiedene Deutungen für das Symbol

$$\int_a^b f(x) dx$$

gefunden. Einmal gelangen wir zu ihm, indem wir die Funktion $F(x)$ suchen, deren Differentialquotient $f(x)$ ist, ferner $F(b)$ und $F(a)$ und

schließlich die Differenz $F(b) - F(a)$ bilden:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Der andere Weg ist der: Wir teilen das Intervall $x = a$ bis $x = b$ in eine Anzahl gleicher Teile, multiplizieren den zu einem bestimmten x gehörigen Funktionswert $f(x)$ mit dem zugehörigen Teilintervalle Δx und addieren alle diese Produkte; schließlich lassen wir Δx sich dem Werte Null nähern, wodurch sich zwar jedes Produkt ebenfalls der Null nähert, die Anzahl der Produkte jedoch über alle Grenzen wächst; der Grenzwert dieser „Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen“ ist derselbe Wert wie vorher. Häufig wird man vor die Aufgabe gestellt, eine solche „Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen“ zu bilden, eine schon in den einfachsten Fällen recht schwierige und verwickelte Aufgabe, die aber sehr vereinfacht wird, wenn man den anderen Weg einschlägt. Zwei Beispiele mögen dies erläutern:

1. Es soll $F = \int_a^b x^2 dx$ ermittelt werden. Wir teilen das Intervall von $x = a$ bis $x = b$ in n gleiche Teile $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; die unabhängige Veränderliche erhält der Reihe nach die Werte

$$a, \quad a + \Delta x, \quad a + 2\Delta x, \quad a + 3\Delta x, \quad \dots, \quad a + (n-1)\Delta x = b,$$

also die abhängige Veränderliche die Werte

$$a^2, \quad (a + \Delta x)^2, \quad (a + 2\Delta x)^2, \quad (a + 3\Delta x)^2, \quad \dots, \quad (a + (n-1)\Delta x)^2.$$

Diese sind mit Δx zu multiplizieren, und über die Produkte ist zu summieren. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_a^b x^2 \Delta x &= a^2 \Delta x + (a + \Delta x)^2 \Delta x + (a + 2\Delta x)^2 \Delta x \\ &\quad + (a + 3\Delta x)^2 \Delta x + \dots + (a + (n-1)\Delta x)^2 \Delta x. \end{aligned}$$

Wir heben Δx aus, führen die Quadrate aus und fassen zusammen; wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_a^b x^2 \Delta x &= \Delta x [n a^2 + 2a \Delta x (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) \\ &\quad + (\Delta x)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2)]. \end{aligned}$$

Aus der elementaren Mathematik ist bekannt, daß

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

und

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

ist. Hierdurch wird

$$\sum_a^b x^2 \Delta x = \Delta x \left[na^2 + n(n-1)a\Delta x + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} (\Delta x)^2 \right]$$

und, wenn wir $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ einsetzen,

$$\begin{aligned} \sum_a^b x^2 \Delta x &= \frac{b-a}{n} \left[na^2 + \frac{n(n-1)a(b-a)}{n} + \frac{(n-1)n(2n-1)(b-a)^2}{6n^2} \right] \\ &= (b-a) \left[a^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) (ab - a^2) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{b^2}{6} - \frac{ab}{3} + \frac{a^2}{6}\right) \right] \\ &= (b-a) \left[a^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + ab \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3n^2}\right) + b^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Wächst n über alle Grenzen hinaus, so bekommen wir

$$\int_a^b x^2 dx = (b-a) \left[\frac{a^2}{3} + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{3} \right] = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir auf wesentlich kürzerem Wege, wenn wir unbestimmt integrieren $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$, hierin die obere Grenze b und die untere Grenze a setzen, $\frac{b^3}{3}$ bzw. $\frac{a^3}{3}$, und beide Werte voneinander abziehen:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

2. $F = \int_{\alpha}^{\beta} \cos x dx$. Wir teilen in gleicher Weise ein wie vorhin und erhalten als Summe

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha}^{\beta} \cos x \Delta x &= \cos \alpha \cdot \Delta x + \cos(\alpha + \Delta x) \cdot \Delta x + \cos(\alpha + 2\Delta x) \cdot \Delta x + \dots \\ &\quad + \cos(\alpha + (n-1)\Delta x) \cdot \Delta x \\ &= \Delta x [\cos \alpha + \cos(\alpha + \Delta x) + \cos(\alpha + 2\Delta x) \\ &\quad + \cos(\alpha + 3\Delta x) + \dots + \cos(\alpha + (n-1)\Delta x)], \end{aligned}$$

wobei $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{n}$ ist. Da nun nach einer goniometrischen Formel

$$\begin{aligned} &\cos \alpha + \cos(\alpha + \Delta x) + \cos(\alpha + 2\Delta x) + \cos(\alpha + 3\Delta x) + \dots \\ &\quad + \cos(\alpha + (n-1)\Delta x) = \frac{\sin \frac{n}{2} \Delta x \cdot \cos \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \Delta x \right)}{\sin \frac{\Delta x}{2}} \end{aligned}$$

ist, so ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \cos x \Delta x &= \Delta x \cdot \frac{\sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} - \frac{\Delta x}{2} \right)}{\sin \frac{\Delta x}{2}} \\ &= 2 \frac{\sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \left(\frac{\beta + \alpha}{2} - \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}. \end{aligned}$$

Gehen wir zur Grenze $\Delta x \rightarrow 0$ über, so wird

$$\int_{\alpha}^{\beta} \cos x dx = 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} = \sin \beta - \sin \alpha.$$

Wesentlich einfacher ist der zweite Weg:

$$\int \cos x dx = \sin x, \quad \text{also} \quad \int_{\alpha}^{\beta} \cos x dx = [\sin x]_{\alpha}^{\beta} = \sin \beta - \sin \alpha.$$

Wir sind am Ende unserer theoretischen Betrachtungen über das bestimmte Integral und können nun dazu übergehen, das bestimmte Integral zur Lösung von Aufgaben zu verwenden.

§ 6. Berechnung des Inhaltes ebener Figuren (Quadratur); Näherungsformeln.

(82) Wir beginnen damit, das bestimmte Integral auf die Ermittlung des Inhaltes ebener Flächen anzuwenden. Zuerst wollen wir uns mit solchen ebenen Flächen befassen, deren Begrenzungskurve durch eine Gleichung im rechtwinkligen Koordinatensysteme gegeben ist.

Gegeben sei die Kurve von der Gleichung

$$y = \frac{x^3}{10} - \frac{x^2}{5} - \frac{3}{2}x,$$

deren Verlauf Abb. 88 zeigt. Das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{x^3}{10} - \frac{x^2}{5} - \frac{3}{2}x \right) dx$$

gibt uns nach dem vorigen Paragraphen den Inhalt des Flächenstückes, das von der x -Achse, der Kurve und den zu $x = x_1$ und $x = x_2$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird. Führen wir die Integration aus, so erhalten wir

$$F_{x_1}^{x_2} = \left[\frac{x^4}{40} - \frac{x^3}{15} - \frac{3}{4}x^2 \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Also ist

$$F_6^7 = \frac{4 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 0} - (-9) = 9 \frac{4 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 0}$$

Flächeneinheiten, wobei die Flächeneinheit gleich dem Quadrate ist, dessen Seite die bei Zeichnung der Kurve zugrunde gelegte Längeneinheit ist (s. Abb. 88).

Bilden wir dagegen F_{-5}^{-4} , so erhalten wir

$$F_{-5}^{-4} = -\frac{4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 4} = -\frac{1 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4} = -6 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4},$$

d. h. einen negativen Wert. Wie erklärt sich das?

Wir wissen aus § 5, daß F die Summe von Produkten $y \cdot \Delta x$ ist. Ist nun $y < 0$, $\Delta x > 0$, so muß auch das Produkt $y \cdot \Delta x$ — man nennt es auch das „Flächenelement“ — < 0 sein. In dem Bereiche von $x_1 = -5$ bis $x_2 = -4$ ist nun wirklich y überall negativ. Andererseits ist Δx positiv, da die untere Grenze $x_1 = -5$, die obere Grenze $x_2 = -4$, d. h. $x_2 > x_1$ ist, die Abszissenachse also in der positiven Richtung, d. h. im Sinne wachsender x durchlaufen wird. Folglich ist in diesem Bereiche jedes Flächenelement, und damit auch die ganze Fläche $F_{-5}^{-4} < 0$. Auch Δx selbst kann negativ werden, wenn nämlich $x_2 < x_1$; ist in diesem Falle y beständig positiv, so muß $F_{x_1}^{x_2} < 0$ sein, ist dagegen y beständig negativ, so muß $F_{x_1}^{x_2} > 0$ sein. So ist bei unserem Beispiele

$$F_{-1}^{-2} = -2 \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 5} - (-\frac{7 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 0}) = -1 \frac{4 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 0},$$

dagegen

$$F_4^1 = -\frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 4} - (-9 \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 5}) = +9 \frac{3}{4 \cdot 0}.$$

Auf das Vorzeichen der Flächeninhalte ist bei jeder Flächenberechnung Rücksicht zu nehmen. Will man beispielsweise den Gesamthalt der beiden von der Kurve und der x -Achse begrenzten Schleifen in Abb. 88, von denen die eine von $x = -3$ bis $x = 0$, die andere von $x = 0$ bis $x = +5$ reicht, wissen, so wird man beide für sich berechnen und ihre absoluten Werte addieren.

$$F_{-3}^0 = 0 - (-\frac{1 \cdot 1 \cdot 7}{4 \cdot 0}) = 2 \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 0}, \quad F_0^5 = -11 \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} - 0 = -11 \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}.$$

Die Summe der absoluten Beträge ist demnach

$$2 \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 0} + 11 \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = 14 \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 0}$$

Flächeneinheiten. Würde man dagegen ohne diese Unterteilung F_{-3}^{+5} gebildet haben, so hätte man erhalten

$$F_{-3}^5 = -11 \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} - (-2 \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 0}) = -8 \frac{8}{1 \cdot 5}$$

Flächeneinheiten.

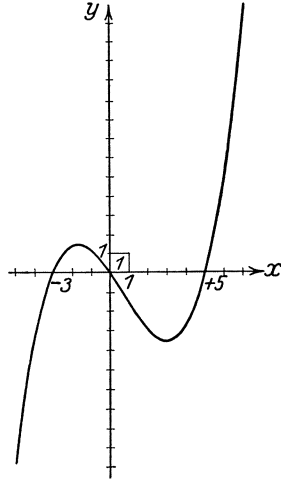


Abb. 88.

(83) Wir wollen jetzt den Inhalt einer Fläche berechnen, die von der Abszissenachse, einer beliebigen Parabel dritter Ordnung und zwei Ordinaten begrenzt wird (Abb. 89). Die Parabel habe die Gleichung

$$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

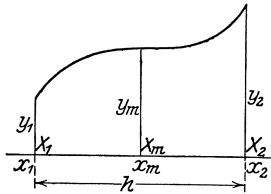


Abb. 89.

die Grenzabszissen seien x_1 und x_2 , die zu ihnen gehörigen Ordinaten

$$y_1 = a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0$$

bzw.

$$y_2 = a_3 x_2^3 + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0.$$

Es ist

$$\begin{aligned} F_{x_1}^{x_2} &= \int_{x_1}^{x_2} (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) dx = \left[\frac{a_3}{4} x^4 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{a_3}{4} (x_2^4 - x_1^4) + \frac{a_2}{3} (x_2^3 - x_1^3) + \frac{a_1}{2} (x_2^2 - x_1^2) + a_0 (x_2 - x_1) \\ &= \frac{x_2 - x_1}{12} [3 a_3 (x_2^3 + x_2^2 x_1 + x_2 x_1^2 + x_1^3) + 4 a_2 (x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) \\ &\quad + 6 a_1 (x_2 + x_1) + 12 a_0]. \end{aligned}$$

Halbieren wir den Bereich X_1 bis X_2 durch den Punkt X_m , dessen Abszisse also $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ist, so ist die zu x_m gehörige Ordinate

$$y_m = a_3 \left(\frac{x_2 + x_1}{2} \right)^3 + a_2 \left(\frac{x_2 + x_1}{2} \right)^2 + a_1 \frac{x_2 + x_1}{2} + a_0.$$

Wir bilden jetzt den Ausdruck:

$$\begin{aligned} 2(y_1 + 4y_m + y_2) &= 2 a_3 \left(x_1^3 + \frac{(x_2 + x_1)^3}{2} + x_2^3 \right) + 2 a_2 (x_1^2 + (x_2 + x_1)^2 + x_2^2) \\ &\quad + 2 a_1 (x_1 + 2(x_2 + x_1) + x_2) + 2 a_0 (1 + 4 + 1) \\ &= a_3 (3 x_2^3 + 3 x_2^2 x_1 + 3 x_2 x_1^2 + 3 x_1^3) + 2 a_2 (2 x_2^2 + 2 x_2 x_1 + 2 x_1^2) \\ &\quad + 2 a_1 (3 x_2 + 3 x_1) + 12 a_0 \\ &= [3 a_3 (x_2^3 + x_2^2 x_1 + x_2 x_1^2 + x_1^3) + 4 a_2 (x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) \\ &\quad + 6 a_1 (x_2 + x_1) + 12 a_0]. \end{aligned}$$

Der Inhalt der eckigen Klammer stimmt genau mit dem der in $F_{x_1}^{x_2}$ enthaltenen überein. Bezeichnen wir noch die Strecke $X_1 X_2 = x_2 - x_1$ mit h , so erhalten wir die Formel:

$$F_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) dx = \frac{h}{6} (y_1 + 4 y_m + y_2). \quad (42)$$

Diese unter dem Namen **Simpsonsche Regel** bekannte Formel hat eine große praktische Bedeutung; sie lehrt: Um den Inhalt der Fläche zu

erhalten, multipliziert man den sechsten Teil der Breite der Fläche mit der Summe aus den Endordinaten und der vierfachen Mittelordinate. Die Simpsonsche Regel gilt genau, solange der Integrand eine ganze rationale Funktion von höchstens drittem Grade ist; daß man sie mit Erfolg auch zur angenäherten Berechnung verwenden kann, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, wird bald gezeigt werden. Zur Bestätigung der Simpsonschen Regel mögen mit ihr die in (82) berechneten Flächeninhalte der Abb. 88 nochmals ermittelt werden: Es ist

$$\begin{aligned}
 & y_6 = 5\frac{2}{5}, \quad y_7 = 14, \quad y_{6,5} = 7\frac{4}{8}1, \quad h = 1, \\
 \text{also} & F_6^7 = \frac{1}{6} (5,4 + 37,05 + 14) = 9\frac{4}{12}9_0; \\
 & y_{-5} = -10, \quad y_{-4} = -3\frac{3}{5}, \quad y_{-4,5} = -6\frac{3}{8}3_0, \quad h = 1, \\
 \text{also} & F_{-5}^{-4} = \frac{1}{6} (-10 - 25\frac{1}{2}3_0 - 3\frac{3}{5}) = -6\frac{1}{2}3_4; \\
 & y_{-1} = 1\frac{1}{5}, \quad y_{-2} = 1\frac{2}{5}, \quad y_{-1,5} = 1\frac{7}{8}7_0, \quad h = -1, \\
 \text{also} & F_{-1}^{-2} = -\frac{1}{6} (1\frac{1}{5} + 5\frac{1}{2}7_0 + 1\frac{2}{5}) = -1\frac{4}{12}9_0; \\
 & y_4 = -2,8, \quad y_1 = -1,6, \quad y_{2,5} = -3\frac{7}{16}, \quad h = -3, \\
 \text{also} & F_4^1 = -\frac{1}{2} (-2,8 - 13,75 - 1,6) = +9\frac{3}{4}0; \\
 & y_{-3} = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_{-1,5} = 1\frac{3}{8}7_0, \quad h = 3, \\
 \text{also} & F_{-3}^0 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1\frac{1}{8}7_0 = 2\frac{3}{4}7_0; \\
 & y_0 = 0, \quad y_5 = 0, \quad y_{2,5} = -3\frac{7}{16}, \quad h = 5, \\
 \text{also} & F_0^5 = \frac{5}{8} \cdot 4 \cdot (-\frac{5}{16}) = -11\frac{1}{2}4; \\
 & y_{-3} = 0, \quad y_5 = 0, \quad y_1 = -1,6, \quad h = 8, \\
 \text{also} & F_{-3}^5 = \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot (-1,6) = -8\frac{8}{15}.
 \end{aligned}$$

(84) Wir zeigen an einigen Beispielen die Anwendung des oben besprochenen Verfahrens.

a) Die Scheitelgleichung der Parabel lautet $y^2 = 2px$ [vgl. (38)]; um den Inhalt eines von dieser Parabel und einer Normalen zur Parabelachse begrenzten Parabelabschnittes zu bestimmen (Abb. 90), bedenken wir, daß die Achse diese Fläche in zwei kongruente Hälften OX_0P_0 bzw. $OX_0P'_0$ teilt. Der Inhalt von OX_0P_0 ist

$$F = \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \, dx = [\sqrt{2p} \cdot \frac{2}{3} x \sqrt{x}]_0^{x_0} = \frac{2}{3} x_0 \sqrt{2px_0},$$

wobei x_0 die Abszisse des Punktes P_0 , des Endpunktes des Parabelbogens, ist; führen wir seine Ordinate $y_0 = \sqrt{2px_0}$ ein, so erhalten

wir für die Fläche OX_0P_0 den Ausdruck

$$F = \frac{2}{3} x_0 y_0.$$

Wir erhalten demnach das Ergebnis, daß das Rechteck $OX_0P_0Y_0$ durch die Parabel in zwei Teile zerlegt wird, deren Flächen sich wie 1:2 verhalten. Der Inhalt des Parabelabschnittes $OP_0P'_0$ ist also $= \frac{2}{3} x_0 s_0$, wenn $s_0 = 2y_0 = P'_0P_0$ die Länge der Sehne ist.

Will man die Parabelfläche OX_0P_0 in ein Rechteck verwandeln, das dieselbe Breite $x_0 = OX_0$ hat, so muß man ihm die Höhe $y_m = \frac{2}{3} y_0$ geben; die Höhe y_m nennt man den Mittelwert der Ordinaten der Parabel $y = \sqrt{2px}$ im Bereiche von $x = 0$ bis $x = x_0$. Allgemein versteht man unter dem Mittelwert der Ordinaten einer Kurve

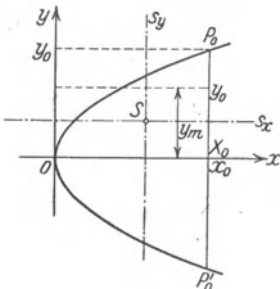


Abb. 90.

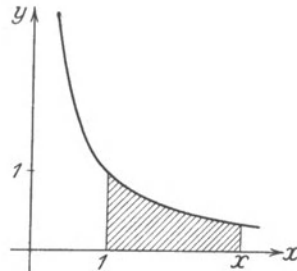


Abb. 91.

von der Gleichung $y = f(x)$ in einem Bereiche von $x = x_1$ bis $x = x_2$ diejenige Ordinate y_m , mit der man die Differenz $x_2 - x_1$ multipliziert, um den Inhalt der von der x -Achse, der Kurve und den zu $x = x_1$ und $x = x_2$ gehörenden Ordinaten begrenzten Fläche zu erhalten. Es ist also:

$$y_m = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y dx}{x_2 - x_1}. \quad (43)$$

Sieht man von der geometrischen Deutung ab, so kann man festsetzen: Der Mittelwert y_m aller Werte, die die Funktion $y = f(x)$ im Bereiche von $x = x_1$ bis $x = x_2$ annimmt, ist

$$\frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx}{x_2 - x_1}.$$

b) In (31) haben wir die gleichseitige Hyperbel behandelt. Wenn wir den Inhalt der von ihr, der Abszissenachse und zwei Ordinaten eingeschlossenen Fläche berechnen wollen, so müssen wir die Unstetigkeit unserer Funktion für $x = 0$ beachten; dieser Wert darf weder innerhalb des Bereiches noch auf der Grenze auftreten. Wählen

wir daher als untere Grenze $x_1 = 1$, während die obere Grenze x (veränderlich) sei! Es ist

$$F_1^x = \int_1^x \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^x = \ln x.$$

Die Anzahl der Flächeneinheiten ist also gleich dem natürlichen Logarithmus der Maßzahl der Endabszisse. Wenn wir demnach die gleichseitige Hyperbel genau zeichnen, so können wir den natürlichen Logarithmus der oberen Grenze dadurch finden, daß wir den Flächeninhalt von $x = 1$ ab auf irgendeinem Wege ermitteln.

Würde man $x = 0$ als untere Grenze nehmen, so würde, da $\ln 0 = -\infty$ ist, jede von dort aus gezählte Fläche ∞ werden. Warum darf natürlich auch nicht als obere Grenze $x = \infty$ auftreten? Daß es nicht immer

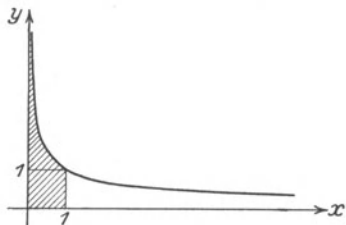


Abb. 92.

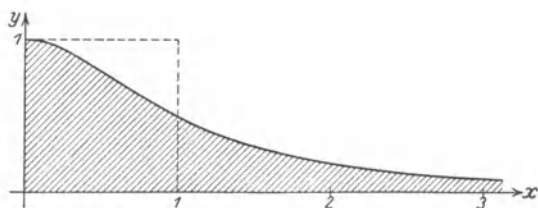


Abb. 93.

nötig ist, Werte von x zu meiden, für die y unendlich groß wird, zeigt uns das Beispiel $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Zwar ist (vgl. Abb. 92) für $x = 0$ $y = \infty$; aber die Ermittlung des Flächeninhaltes ergibt

$$F_0^x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^x = 2\sqrt{x}.$$

Demnach ist beispielsweise der Inhalt der Fläche, welche von der x -Achse, der y -Achse, der Kurve und der zu $x = 1$ gehörigen Ordinate begrenzt wird, gleich zwei Flächeneinheiten, also endlich, obwohl die Fläche selbst sich längs der y -Achse ins Unendliche erstreckt. Andererseits läßt sich bei manchen Integralen als obere Grenze auch $x = \infty$ verwenden, ohne daß das Integral selbst unendlich groß wird. So zeigt Abb. 93 die Kurve von der Gleichung $y = \frac{1}{1+x^2}$; die Fläche die von ihr, der x -Achse, der y -Achse und der zu einem beliebigen x gehörigen Ordinate begrenzt wird, ist, so groß man auch x wählen möge,

$$F_0^x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^x = \operatorname{arctg} x.$$

Läßt man x über alle Grenzen wachsen, so wird $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$, und die Fläche selbst hat, obgleich auch sie sich ins Unendliche erstreckt, den endlichen Inhalt von $\frac{\pi}{2} = 1,5758$ Flächeneinheiten.

c) Die Fläche, die von der x -Achse und einem Bogen der Sinuslinie $y = a \sin \omega x$ begrenzt wird, ergibt sich zu

$$F_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} a \sin \omega x dx = \left[\frac{-a}{\omega} \cos \omega x \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \left[\frac{a}{\omega} - \left(-\frac{a}{\omega} \right) \right] = 2 \frac{a}{\omega}.$$

Der Mittelwert der Ordinaten ist demnach in diesem Bereiche

$$y_m = \frac{2 \frac{a}{\omega}}{\frac{\pi}{\omega}} = 2 \frac{a}{\pi} \quad (\text{s. Abb. 94}).$$

Weitere Aufgaben erhält der Leser, wenn er die logarithmische Linie $y = \ln x$, die Exponentiallinie $y = e^x$, die Tangenslinie $y = \operatorname{tg} x$ usw. zugrunde legt und die zu diesen Kurven gehörigen Flächen berechnet.

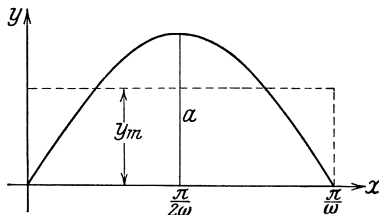


Abb. 94.

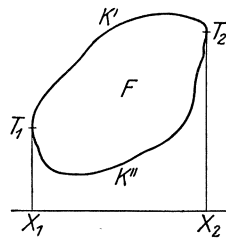


Abb. 95.

(85) Bisher unterlag die Inhaltsbestimmung der Beschränkung, daß zur Begrenzung die x -Achse und zwei Ordinaten gehören. Von dieser Einschränkung können wir uns jedoch leicht befreien. Um die in Abb. 95 dargestellte Fläche auszumessen, deren Begrenzungskurve durch irgendeine Gleichung gegeben sei, legen wir an diese die beiden zur Abszissenachse senkrechten Tangenten $X_1 T_1$ und $X_2 T_2$. F ist dann die Differenz zweier Flächen der früheren Art. Die eine (der Minuend) wird begrenzt von der Abszissenachse, den beiden Ordinaten $X_1 T_1$ und $X_2 T_2$ und dem oberen Kurventeile k' , die andere (der Subtrahend) von denselben geraden Linien, aber von dem unteren Kurventeile k'' .

Zur Erläuterung mögen die beiden folgenden Beispiele dienen.

a) Es sei $(y - 5)^2 - 4x = 0$. Diese Gleichung ist nicht nach der abhängigen Veränderlichen y aufgelöst; sie ist in unentwickelter (impliziter) Form gegeben. Lösen wir nach y auf, so erhalten wir

$y = 5 \pm 2\sqrt{x}$. y nimmt für jedes positive x zwei Werte an; die Kurve besteht also aus zwei Zweigen, die im Punkte $(0|5)$ zusammenstoßen und sich von da nach rechts erstrecken (Abb. 96). Wir wollen jetzt den Inhalt der von dieser Kurve und der zu $x = 9$ gehörigen Ordinate begrenzten Fläche berechnen. Wir zerlegen zu diesem Zwecke die Kurve in die obenerwähnten beiden Zweige, deren oberer die Gleichung $y = 5 + 2\sqrt{x}$ hat, während zum unteren die Gleichung $y = 5 - 2\sqrt{x}$ gehört. Die vom oberen Zweige, der x -Achse, der y -Achse und der zu $x = 9$ gehörigen Ordinate begrenzte Fläche hat den Inhalt

$$F' = \int_0^9 (5 + 2\sqrt{x}) dx = \left[5x + \frac{4}{3}x\sqrt{x} \right]_0^9 = 45 + 36 = 81.$$

Die vom unteren Zweige und den gleichen Geraden wie oben begrenzte Fläche hat den Inhalt

$$F'' = \int_0^9 (5 - 2\sqrt{x}) dx = \left[5x - \frac{3}{4}x\sqrt{x} \right]_0^9 = 45 - 36 = 9.$$

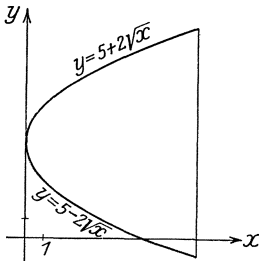


Abb. 96.

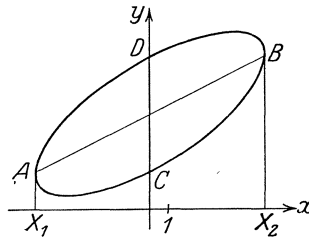


Abb. 97.

Folglich hat die zu bestimmende Fläche den Inhalt

$$F = F' - F'' = 72.$$

b) Die Gleichung

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 10x - 20y + 32 = 0$$

ist die unentwickelte Gleichung einer Ellipse; ihre nach y aufgelöste Gleichung ist

$$y = \frac{1}{2}(x + 10 \pm \sqrt{36 - x^2}).$$

Da $\sqrt{36 - x^2}$ nur so lange reell ist, als $-6 \leq x \leq +6$ ist, zu einem Werte von x aber, der diese Bedingung erfüllt, stets zwei Werte y gehören, wird die Ellipse von den beiden zu $x = -6$ und $x = +6$ gehörigen Parallelen zur y -Achse berührt (der Berührungspunkt ist $-6|2$ bzw. $+6|8$) (s. Abb. 97). Zur Ermittlung des Flächeninhaltes

F der Ellipse zerlegen wir diese wieder in die Differenz der beiden Flächen $X_1ADB X_2 - X_1ACB X_2$. Die Koordinaten der Punkte des Bogens ADB erfüllen die Gleichung

$$y = \frac{1}{2}(x + 10 + \sqrt{36 - x^2}),$$

die der Punkte des Bogens ACB dagegen die Gleichung

$$y = \frac{1}{2}(x + 10 - \sqrt{36 - x^2}).$$

Für den Inhalt des Flächenstückes $X_1ADB X_2$ erhalten wir, wenn wir Formel TIII3 zu Hilfe nehmen:

$$\begin{aligned} F' &= \int_{-6}^{+6} \frac{1}{2}(x + 10 + \sqrt{36 - x^2}) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 10x + \frac{36}{2} \arcsin \frac{x}{6} + \frac{x}{2} \sqrt{36 - x^2} \right) \right]_{-6}^{+6} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(18 + 60 + 18 \cdot \frac{\pi}{2} + 0 \right) - \left(18 - 60 - 18 \cdot \frac{\pi}{2} + 0 \right) \right] = 60 + 9\pi; \end{aligned}$$

für den Inhalt des Flächenstückes $X_1ACB X_2$ ergibt sich ebenso:

$$\begin{aligned} F'' &= \int_{-6}^{+6} \frac{1}{2}(x + 10 - \sqrt{36 - x^2}) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 10x - \frac{36}{2} \arcsin \frac{x}{6} - \frac{x}{2} \sqrt{36 - x^2} \right) \right]_{-6}^{+6} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(18 + 60 - 18 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 \right) - \left(18 - 60 + 18 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 \right) \right] = 60 - 9\pi, \end{aligned}$$

so daß $F = F' - F'' = 18\pi$ ist.

(86) Bisher haben wir im wesentlichen den Inhalt von solchen Flächen berechnet, die von einer Kurve, der Abszissenachse und zwei Ordinaten begrenzt waren; wir können uns aber von dieser Beschränkung freimachen. Denn da

$$\int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} y_k \Delta x$$

ist, so ist die Integralformel überall verwendbar, wo eine Zerlegung in Parallelstreifen möglich ist und wir die Länge dieser Streifen finden können. Die folgenden Beispiele: Dreieck, Trapez, Kreis, sollen, wenn auch ihre Inhaltsformeln aus der Planimetrie bekannt sind, zur Erläuterung des Verfahrens dienen und zugleich auf spätere Untersuchungen vorbereiten [s. (93) S. 249 f. und (96) S. 261 f.].

Dreieck von der Grundlinie g und der Höhe h : Wir zerlegen das Dreieck durch Parallelen zur Grundlinie im Abstände Δx in eine

Anzahl von Streifen; die Parallele im Abstände x von der Spitze hat eine Länge y , die sich aus der Proportion ergibt: $y:g = x:h$; daher ist $y = \frac{g}{h}x$. Ersetzen wir jeden Streifen durch ein Rechteck von der Breite y und der Höhe Δx , so ist die Summe dieser Rechtecke

$$\sum_{x=0}^h y \cdot \Delta x = \sum_0^h \frac{g}{h} x \Delta x.$$

Nach (81) erhalten wir durch den Grenzübergang $\lim \Delta x = 0$ den Inhalt des Dreiecks, der sich also ergibt zu

$$F = \int_0^h \frac{g}{h} x dx = \left[\frac{g}{h} \frac{x^2}{2} \right]_0^h = \frac{1}{2} g h,$$

wie bekannt.

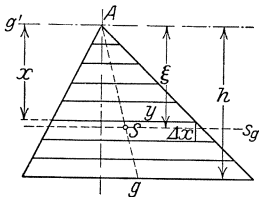


Abb. 98.

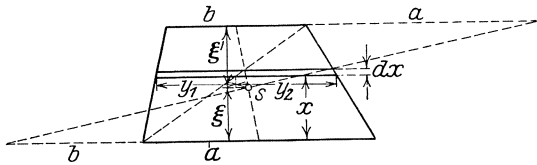


Abb. 99.

Trapez mit der Höhe h und den beiden Parallelen a und b (Abb. 99): Die im Abstände x von a gezogene Parallele zu a hat, wie man durch Einzeichnen der Diagonale leicht erkennt, die Länge

$$y = y_1 + y_2 = \frac{x}{h} b + \frac{h-x}{h} a;$$

also ist der Flächeninhalt des angrenzenden Streifens von der Höhe dx :

$$dF = y \cdot dx \text{ oder } dF = \frac{1}{h} ((b-a)x + ah) \cdot dx,$$

demnach der Inhalt des Trapezes:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{h} \int_0^h [(b-a)x + ah] dx = \frac{1}{h} \left[(b-a) \frac{x^2}{2} + ahx \right]_0^h \\ &= \frac{1}{h} \left[(b-a) \frac{h^2}{2} + ah^2 \right] = \frac{a+b}{2} h. \end{aligned}$$

Der Kreis: Um den Flächeninhalt des Abschnittes ABC von der Pfeilhöhe h (Abb.100) zu ermitteln, zerlegen wir die Fläche durch Parallele zur Sehne AB in Streifen von der Breite dx . Der Streifen, der vom Mittel-

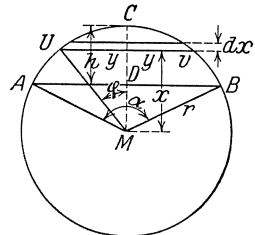


Abb.100.

punkte M den Abstand x hat, hat eine Länge $UV = 2y$, wobei $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ist. Der Inhalt des Streifens ist demnach

$$dF = 2y dx = 2\sqrt{r^2 - x^2} dx,$$

daher der Inhalt des ganzen Abschnittes

$$F = 2 \int_{r-h}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

[Warum ist die untere Grenze $r - h$?]

Nach Formel TIII13 erhalten wir:

$$\begin{aligned} F &= \left[-r^2 \arccos \frac{x}{r} + x \sqrt{r^2 - x^2} \right]_{r-h}^r \\ &= \left[(-0 + 0) - \left(-r^2 \arccos \frac{r-h}{r} + (r-h) \sqrt{2rh - h^2} \right) \right] \end{aligned}$$

oder

$$\text{a) } F = r^2 \arccos \frac{r-h}{r} - (r-h) \sqrt{2rh - h^2}.$$

Als Sonderfälle ergeben sich hieraus für

$$h = r \text{ der Inhalt des Halbkreises } F = r^2 \arccos 0 - 0 = \frac{\pi}{2} r^2, \text{ für}$$

$$h = 2r \text{ der Inhalt des Vollkreises } F = r^2 \arccos(-1) + r \cdot 0 = \pi r^2.$$

Formel a) erlaubt noch eine Umgestaltung. Führt man nämlich den zur Sehne AB gehörigen Mittelpunktswinkel $AMB = \alpha$ ein, so ist

$$\frac{r-h}{r} = \frac{MD}{MA} = \cos \frac{\alpha}{2};$$

ferner ist, da der Umfangswinkel über Bogen ACB gleich $\frac{\alpha}{2}$ ist, $\sphericalangle CAB = \frac{\alpha}{4}$, als Umfangswinkel über Bogen CB , also

$$\text{tg } \frac{\alpha}{4} = \frac{h}{AD}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AD}{r};$$

demnach

$$\frac{h}{r} = \text{tg } \frac{\alpha}{4} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4};$$

schließlich ist

$$\frac{2r-h}{r} = 1 + \frac{r-h}{r} = 1 + \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{4}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} F &= r^2 \left[\arccos \frac{r-h}{r} - \frac{r-h}{r} \sqrt{\frac{h}{r} \left(1 + \frac{r-h}{r} \right)} \right] \\ &= r^2 \left[\frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 \sin^2 \frac{\alpha}{4} \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{4}} \right] = r^2 \left[\frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \right], \\ F &= r^2 \left[\frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right] = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha) = F; \end{aligned}$$

das ist die bekannte Formel für den Inhalt des Kreisabschnittes.

Zu diesem Ergebnis können wir einfacher gelangen, wenn wir bedenken, daß $x = r \cos \varphi$, also $dx = -r \sin \varphi d\varphi$ ist. Da weiter $y = r \sin \varphi$ ist, so wird der Inhalt eines Elementarstreifens

$$dF = 2y dx = -2r^2 \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Durch Einführen der neuen Integrationsveränderlichen ändern sich natürlich auch die Grenzen. Zu $x = r - h$ gehört $\varphi = \frac{\alpha}{2}$, zu $x = r$ $\varphi = 0$; also wird mit Formel TIII 22:

$$\begin{aligned} F &= -2r^2 \int_{+\frac{\alpha}{2}}^0 \sin^2 \varphi d\varphi = -2r^2 \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi \right]_{\frac{\alpha}{2}}^0 \\ &= -2r^2 \left[\left(+\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} \sin \left(+\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(+\frac{\alpha}{2} \right) \right) \right] \\ &= -2r^2 \left[\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} \sin \alpha \right] = -\frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha). \end{aligned}$$

(87) Kann man den Inhalt einer Fläche mit dem bisherigen Verfahren nicht genau ermitteln (z. B. wenn die Begrenzungskurve nur empirisch festliegt), so greift man zu Näherungsverfahren. Mit jedem Näherungsverfahren gewinnt man zugleich eine Möglichkeit, ein bestimmtes Integral angenähert auszuwerten. Wir gehen dazu über, die wichtigsten dieser Näherungsformeln zu entwickeln.

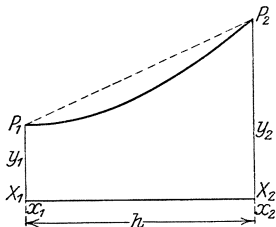


Abb. 101.

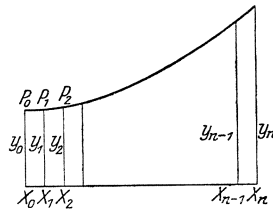


Abb. 102.

Der Inhalt der in Abb. 101 gezeichneten Fläche $X_1 X_2 P_2 P_1$ ist gesucht. In roher Annäherung können wir die Fläche ersetzen durch das Trapez $X_1 X_2 P_2 P_1$. Dann ist

$$F \approx \frac{h}{2} (y_1 + y_2). \quad (44)$$

Einen besseren Näherungswert erhalten wir, wenn wir die Fläche in Parallelstreifen von gleicher Breite $X_0 X_1 = X_1 X_2 = \dots = X_{n-1} X_n = h$ zerlegen. Ersetzen wir die Flächenstreifen durch Trapeze, so ist angenähert

$$F = \frac{h}{2} [(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + \dots + (y_{n-1} + y_n)]$$

oder

$$F = h \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} \right]. \quad (45)$$

Die **Trapezformel** (45) wird den Inhalt um so genauer geben, je größer n ist, da sich der geradlinige Linienzug dann um so enger an die Kurve anschmiegt.

Ein anderer Weg ist folgender (Abb. 103): Man halbiert die Strecke $X_1 X_2 = x_2 - x_1 = h$ durch X_m , so daß $X_1 X_m = X_m X_2 = \frac{h}{2}$ ist. Dann mißt man die Ordinaten $X_1 P_1 = y_1$, $X_2 P_2 = y_2$, $X_m P_m = y_m$ und findet nach der **Simpsonschen Regel** [s. (83) S. 220]

$$F = \frac{h}{6} (y_1 + 4y_m + y_2) \quad (42)$$

den Inhalt der Fläche, wenn auch für ein beliebiges $y = f(x)$ nur angenähert. Genauere Werte erhält man, wenn man (Abb. 104) die Fläche

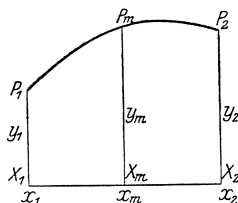


Abb. 103.

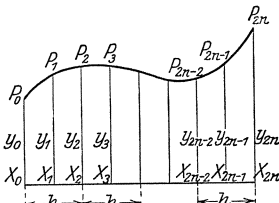


Abb. 104.

in eine gerade Anzahl ($2n$) gleich breiter Parallelstreifen zerlegt; die Breite bezeichnen wir mit $\frac{h}{2}$. Sind die zugehörigen Ordinaten der Reihe nach $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$, so ergibt sich, wenn man auf je zwei aufeinanderfolgende Streifen die Simpsonsche Formel (42) anwendet,

$$F = \frac{h}{6} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})],$$

$$F = \frac{h}{6} \left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) \right. \\ \left. + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) \right], \quad (46)$$

die verallgemeinerte Simpsonsche Regel.

Es gibt noch andere Näherungsverfahren; die angeführten sind aber die in der Praxis am meisten verwendeten. Wir wollen sie an einigen Beispielen erläutern und werden dadurch zugleich Wege aufzeigen können, wie man einige bekannte Zahlen (π , die Logarithmen) finden kann.

a) Wir haben S. 222f. gesehen, daß die von der x -Achse, der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$, der zu $x = 1$ und der zu einem beliebigen x

gehörigen Ordinate begrenzte Fläche den Wert $\ln x$ hat. Daher sind wir in der Lage, mit einer der Näherungsformeln den natürlichen Logarithmus einer Zahl beliebig genau zu berechnen. Wir wollen $\ln 3$ nach den verschiedenen Methoden berechnen, um ihre Güte gegeneinander abwägen zu können. Es ist

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{dx}{x}.$$

Nach der einfachen Trapezregel [s. Gleichung 44)] haben wir zu wählen

$$y_1 = \frac{1}{1}, \quad y_2 = \frac{1}{3}, \quad h = 2;$$

wir erhalten demnach

$$\ln 3 \approx \frac{2}{2} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 1,333,$$

ein nur wenig befriedigendes Ergebnis; der Fehler beträgt etwa 22%. Eine Unterteilung des Intervalles von 1 bis 3 in 10 gleiche Teile muß mittels der allgemeinen Trapezformel 45) ein besseres Ergebnis liefern. Die Ordinaten lauten jetzt:

$$\begin{array}{lll} y_0 = \frac{1}{1} = 1,000; & y_1 = \frac{1}{1,2} = 0,833; & y_2 = \frac{1}{1,4} = 0,714; \\ y_3 = \frac{1}{1,6} = 0,625; & y_4 = \frac{1}{1,8} = 0,556; & y_5 = \frac{1}{2,0} = 0,500; \\ y_6 = \frac{1}{2,2} = 0,455; & y_7 = \frac{1}{2,4} = 0,417; & y_8 = \frac{1}{2,6} = 0,385; \\ y_9 = \frac{1}{2,8} = 0,357; & y_{10} = \frac{1}{3} = 0,333; & \end{array}$$

ferner ist $h = 0,2$. Somit wird

$$\ln 3 \approx 0,2 \cdot [0,667 + 4,841] = 1,102.$$

Auch dieses Ergebnis ist noch um etwa $3^0/_{00}$ zu groß, trotz der verhältnismäßig starken Unterteilung; die Trapezregel wird sich nur dann empfehlen, wenn das Kurvenstück sehr wenig von einer Geraden abweicht, wie wir weiter unten an einem Beispiele sehen werden. Erproben wir die einfache Simpsonsche Regel 42)! Es ist

$$y_1 = \frac{1}{1} = 1,000, \quad y_2 = \frac{1}{3} = 0,333, \quad y_m = \frac{1}{2} = 0,500, \quad h = 2;$$

dann wird

$$\ln 3 \approx \frac{2}{6} (1 + 2 + 0,333) = 1,111$$

mit einem Fehler von 1%, ein bei Berücksichtigung der aufgewendeten geringen Mühe recht befriedigendes Ergebnis. Die verallgemeinerte Simpsonsche Regel endlich liefert für $n = 5$ nach Formel 46)

$$\begin{aligned} \ln 3 &\approx \frac{2}{5 \cdot 6} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + 4 \left(\frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,6} + \frac{1}{2,0} + \frac{1}{2,4} + \frac{1}{2,8} \right) + 2 \left(\frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,8} + \frac{1}{2,2} + \frac{1}{2,6} \right) \right] \\ &\approx \frac{1}{15} [1,333333 + 10,928572 + 4,218004] = 1,098661, \end{aligned}$$

was einem Fehler von nur $0,04^0/_{00}$ entspricht, da der genaue Wert $\ln 3 = 1,0986155$ ist.

b) S. 223 haben wir gefunden, daß

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$$

ist; wählen wir als obere Grenze $x = 1$, so erhalten wir

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

also

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

eine Formel, die sich gut zur Berechnung von π eignet. Wir verwenden die verallgemeinerte Simpsonsche Regel 46) und setzen $n = 2$; es ist dann

$$\begin{aligned} \pi &\approx 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 6} \left[\frac{1}{1+0^2} + \frac{1}{1+1^2} + 4 \left(\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} \right) + 2 \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{3})^2} \right] \\ &\approx \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(\frac{16}{17} + \frac{16}{25} \right) + 2 \cdot \frac{4}{5} \right], \\ \pi &\approx \frac{1}{2} [1,5 + 4 \cdot 1,5811765 + 1,6] \approx \frac{1}{3} \cdot 9,4247060 = 3,141569; \end{aligned}$$

Fehler $0,0070/_{00}$. Für $n = 3$ würde sich ergeben $\pi = 3,1415928$; also mit einfachen Mitteln eine ganz ausgezeichnete Übereinstimmung.

c) Daß auch die Trapezformel 45) gute Dienste leisten kann, möge an dem Integrale

$$J = \int_{50}^{60} \log x \, dx$$

gezeigt werden; wir wählen $n = 10$ und erhalten

$$J \approx \frac{\log 50 + \log 60}{2} + \log 51 + \log 52 + \dots + \log 59 = 17,39750.$$

Wir können dieses Ergebnis leicht nachprüfen; denn es ist

$$\log x = 0,434294 \cdot \ln x$$

[s. (53) Formel 94 b)], ferner nach Formel T III 16

$$\begin{aligned} \int_{50}^{60} \log x \, dx &= 0,434294 \cdot \int_{50}^{60} \ln x \, dx = 0,434294 [x \ln x - x]_{50}^{60} \\ &= 0,4344294 \cdot (60 \ln 60 - 50 \ln 50) - 0,434294 \cdot (60 - 50) \\ &= 60 \cdot \log 60 - 50 \cdot \log 50 - 4,34294 = 17,3975. \end{aligned}$$

d) In der Elektrotechnik wird das bestimmte Integral

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$$

benötigt; unsere Verfahren reichen nicht aus, um das Integral exakt auszuwerten; wir müssen also zu einem Näherungsverfahren greifen. Wählen wir die einfache Simpsonsche Regel, so erhalten wir

$$J \approx \frac{\pi}{12} \left(\frac{\sin 0}{0} + 4 \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \right) = 1,3713. \quad (\text{Beachte } \frac{\sin 0}{0} = 1!)$$

Fehler 0,40/100.

Mit der verallgemeinerten Simpsonschen Regel ergibt sich

$$\text{für } n = 3: J \approx 1,37077, \quad \text{für } n = 6: J \approx 1,370764.$$

Die Nachprüfung sei dem Leser überlassen. [Vgl. (201) S. 661.]

Als weitere Beispiele zur Bearbeitung seien vorgeschlagen:

$$\int_1^2 \mathfrak{L}g x dx, \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx, \quad \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx, \quad \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx.$$

(88) Es wird erwünscht sein, wenn wir an dieser Stelle die Theorie des Polarplanimeters entwickeln, das der Ingenieur gern benutzt, um den Inhalt einer graphisch gegebenen ebenen Fläche (Indikatordiagramm) zu bestimmen. Sind (Abb. 105) zwei Kurven a und b und außerdem eine Strecke von der Länge l gegeben, so kann man, falls die beiden Kurven nirgends weiter als um l voneinander entfernt sind, die Strecke l so bewegen, daß der eine Endpunkt stets auf a , der andere stets auf b gleitet. Wenn die Strecke auf diese Weise aus der Lage AB in die Lage A_1B_1 gebracht worden ist, so hat sie die von a , b , AB und A_1B_1 eingeschlossene Fläche F überstrichen. Dabei hat l eine verwickelte Bewegung ausgeführt. Wir können l aus der Lage AB in die Lage A_1B_1 noch auf unendlich mannigfaltige Art bringen, am einfachsten so, daß wir l erst parallel so verschieben, daß der eine Endpunkt auf der Geraden AA_1 bis A_1 gleitet — l wird dann die Lage A_1D_1 annehmen —, und dann um

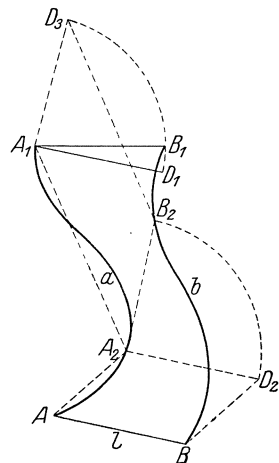


Abb. 105.

den Punkt A_1 drehen, bis der andere Endpunkt schließlich auf B_1 fällt. Wir haben jetzt die beiden Lagen AB und A_1B_1 durch zwei einfache Bewegungen: eine Parallelverschiebung und eine Drehung ineinander übergeführt. Allerdings hat die Strecke l hierbei nicht die Fläche F überstrichen; doch können wir dies immer vollkommener erreichen, wenn wir Zwischenstufen einschalten. Wir verschieben erst die Strecke l in die Lage A_2D_2 (A_2 auf a gelegen) und drehen sie dann um A_2 in die Lage A_2B_2 (B_2 auf b gelegen), sodann verschieben wir sie in die Lage A_1D_3 und drehen sie um A_1 in der Lage A_1B_1 . Wir können noch weitere Zwischenstufen einschalten, wobei wir nur darauf zu achten haben, daß die Punkte A_k auf der Kurve a und die Punkte B_k auf der Kurve b liegen. Je enger wir diese Zwischenstufen aufeinander folgen lassen, um so weniger wird sich die von der Strecke l überstrichene Fläche von der Fläche F unterscheiden, und wir erkennen, daß die so verwickelt erscheinende ursprüngliche Bewegung von l sich auflöst in eine lückenlose Folge von unendlich kleinen Parallelverschiebungen und unendlich kleinen Drehungen, derart, daß beide stets abwechseln. Sobald es nun gelingt, die ausgeführten Bewegungen des Stabes abzulesen, kann man eine Fläche mittels des Stabes ausmessen. Dieses Ziel wird durch folgende Überlegung bzw. Konstruktion erreicht:

Wir denken uns an einem Stabe AB von der Länge l ein möglichst reibungslos um AB drehbares Rädchen R in der Entfernung a von A

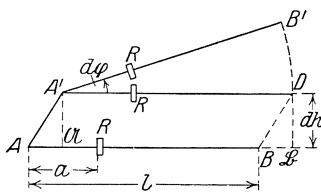


Abb. 106.

angebracht und mit einem Zählerwerk versehen, das den vom Rädchen abgerollten Weg abzulesen gestattet. An der in Abb. 106 dargestellten Elementarbewegung aus der Lage AB in die Lage $A'B'$ durch die Parallelverschiebung in die Lage $A'D$ und die nachfolgende Drehung um A' nimmt nun auch das Rädchen teil, und zwar in folgender Weise:

Die Parallelverschiebung von AB nach $A'D$ läßt sich zerlegen in eine Verschiebung nach $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, die in der Stabrichtung erfolgt — hierbei gleitet das Rädchen, ohne eine Drehung um seine Achse auszuführen —, und eine Verschiebung von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nach $A'D$ senkrecht zur Stabrichtung — hierbei dreht sich das Rädchen so, daß sein Umfang die Strecke dh , den Abstand der beiden Parallelen AB und $A'D$, abwälzt. Um genau dieselbe Strecke wälzt sich das Rädchen ab, wenn der Stab AB unmittelbar in die Lage $A'D$ verschoben wird. Bei der Drehung aus der Lage $A'D$ in die Lage $A'B'$ um den Winkel $d\varphi$ dagegen beträgt der abgerollte Rädchenumfang $a \cdot d\varphi$, so daß bei der gesamten Elementarbewegung der Umfang des Rädchens sich um die Gesamtstrecke

$du = dh + a \cdot d\varphi$ abgerollt hat. Die dabei vom Stabe l überstrichene Fläche ist aber

$$dF = l \cdot dh + \frac{l^2}{2} d\varphi.$$

Eliminiert man aus beiden Gleichungen das Differential dh , so ergibt sich

$$dF = l \cdot du + \frac{l}{2}(l - 2a) \cdot d\varphi.$$

Der Inhalt der in Abb. 105 dargestellten Fläche wird demnach

$$F = \int \left[l du + \frac{l}{2}(l - 2a) d\varphi \right] = l \int du + \frac{l}{2}(l - 2a) \int d\varphi.$$

$\int du = u$ ist dabei die Länge der Strecke, die bei der Gesamtbewegung der Umfang des Rädchens zurückgelegt hat. $\int d\varphi = \varphi$ andererseits ist der Winkel, den die Anfangslage AB mit der Endlage A_1B_1 einschließt. Kann man es nun so einrichten, daß $\varphi = 0$ ist, so ist der Inhalt der überstrichenen Fläche einfach $l \cdot u$, meist ist sogar die Ablesevorrichtung so beschaffen, daß man ohne weiteres dieses Produkt, mithin den Inhalt der Fläche abliest. Abb. 107 zeigt die Form des Polarplanimeters, die die gestellte Forderung erfüllt. Ein Stab von der Länge s ist um einen seiner Endpunkte P , den Pol, drehbar angebracht, so daß sein anderer Endpunkt A sich auf einem Kreise k bewegt. In A ist an s gelenkig der Stab l befestigt, dessen anderes Ende auf dem Umfange g der zu messenden Fläche F herangeführt wird.

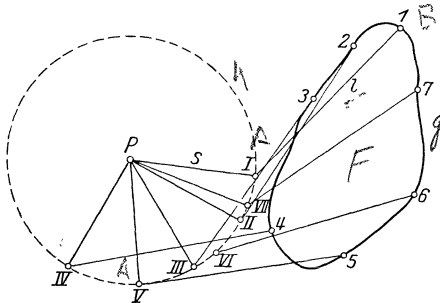


Abb. 107.

Richtet man es so ein, daß A nicht den ganzen Kreis k durchläuft, sondern sich zwischen zwei äußersten Lagen I und IV bewegt, während B

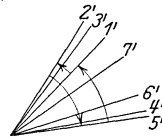


Abb. 107'.

g durchläuft — dies läßt sich durch passende Wahl von P stets erreichen —, so wird A wieder an demselben Punkte von k angelangt sein, wenn B gerade einmal F umlaufen hat, also die Endlage von l sich mit seiner Anfangslage decken. Während des Umlaufes hat l die verschiedensten Richtungen innegehabt, doch so, daß schließlich die Drehung in dem einen Sinne wieder durch die im entgegengesetzten Sinne aufgehoben wird, wie in Abb. 107' angedeutet ist; es ist also in der Tat $\int d\varphi = 0$.

§ 7. Weitere Anwendungen des bestimmten Integrales in der Geometrie.

(89) **A. Berechnungen der Länge ebener Kurven (Rektifikation).** Gegeben sei eine Kurve von der Gleichung $y = f(x)$; gesucht ist die Länge des von P_1 bis P_2 reichenden Kurvenstückes (Abb. 108), wobei die Endpunkte durch ihre Abszissen x_1 bzw. x_2

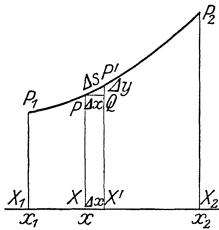


Abb. 108.

festgelegt sind. Wir lösen die Aufgabe folgendermaßen: Wir teilen das Intervall X_1X_2 in n gleiche Teile $\Delta x = \frac{x_2 - x_1}{n}$; durch die benachbarten Teilpunkte X und X' legen wir die Ordinaten, die die Kurve in den Punkten P und P' schneiden mögen. Dadurch wird die Kurve in lauter Kurvenstücke $\Delta s = PP'$ zerlegt, die wir um so besser durch die entsprechenden Sehnen PP' ersetzen können,

je näher Δx dem Grenzwerte Null kommt. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke PQP' , in dem die Katheten $PQ = \Delta x$, $QP' = \Delta y$ und die Hypotenuse $PP' = \Delta s$ sind, folgt nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Daher ist

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Also wird, da

$$s = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{dx} \cdot dx \quad \text{ist,}$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (47)$$

a) Als erstes Beispiel wählen wir die Gerade von der Gleichung

$$y = Ax + b; \quad \text{es ist } \frac{dy}{dx} = A, \quad \text{also}$$

$$ds = \sqrt{1 + A^2} dx \quad \text{und}$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + A^2} dx = \sqrt{1 + A^2} [x]_{x_1}^{x_2}$$

$$= (x_2 - x_1) \sqrt{1 + A^2}.$$

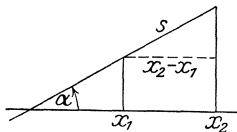


Abb. 109.

Da $A = \operatorname{tg} \alpha$ ist, so ist $s = \frac{x_2 - x_1}{\cos \alpha}$, ein Ergebnis, das man ohne Mühe auch aus Abb. 109 abliest.

b) Für die Parabel von der Gleichung $y = \frac{x^2}{2p}$ [s. (14)] erhalten wir $y' = \frac{x}{p}$, also

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2} dx.$$

Rechnen wir den Parabelbogen vom Scheitel aus, so wird $x_1 = 0$; zugleich wollen wir die obere Grenze $x_2 = x$ setzen. Wir bekommen nach Formel III 15'

$$s_0^x = \frac{1}{p} \int_0^x \sqrt{p^2 + x^2} dx = \left[\frac{x}{2p} \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2p} \mathfrak{A}r \mathfrak{C}in \frac{x}{p} \right]_0^x,$$

$$s_0^x = \frac{p}{2} \left[\frac{x}{p} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2} + \mathfrak{A}r \mathfrak{C}in \frac{x}{p} \right].$$

Zahlenbeispiele (Abb. 110): Für P_1 ist $x = p$; daher ist der Bogen OP_1 ,

$$s_0^p = \frac{p}{2} [\sqrt{2} + \mathfrak{A}r \mathfrak{C}in 1] = \frac{p}{2} [1,4142 + 0,8814] = 1,1478p;$$

$$OP_2: s_0^{4/3 p} = \frac{p}{2} \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{3} + \mathfrak{A}r \mathfrak{C}in \frac{4}{3} \right] = \frac{p}{2} [2,2222 + 1,0986] = 1,6604p.$$

Zeige, daß

$$s_0^{2p} = 2,9579p,$$

$$s_0^{3p} = 5,6526p,$$

$$s_0^{4p} = 3,9247p \text{ ist!}$$

Die Fragestellung läßt sich auch umkehren in die folgende: Wie findet man auf der Parabel den Punkt P von der Eigenschaft, daß der von ihm und dem Scheitel O begrenzte Bogen die gegebene Länge s hat?

Damit sind wir vor die Aufgabe gestellt, die Gleichung

$$\frac{x}{p} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2} + \mathfrak{A}r \mathfrak{C}in \frac{x}{p} - 2 \frac{s}{p} = 0, \quad \text{a)}$$

die ohne weiteres aus der Formel für die Länge des Parabelbogens folgt, nach $\frac{x}{p}$ aufzulösen, um die Abszisse x des Endpunktes P zu erhalten. Gleichung a) ist transzendent, daher nur zu lösen, wenn $\frac{s}{p}$ zahlenmäßig gegeben ist; wir wenden eines der in (27) behandelten Näherungsverfahren an. Es sei $s = 2p$; setzen wir $\frac{x}{p} = z$, so ist die zu lösende Gleichung:

$$f(z) \equiv z \sqrt{1 + z^2} + \mathfrak{A}r \mathfrak{C}in z - 4 = 0.$$

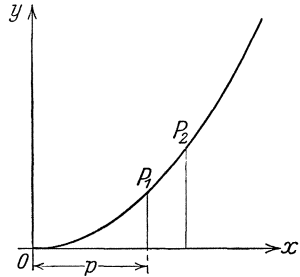


Abb. 110.

Wir wollen die Newtonsche Methode benutzen und bilden zu diesem Zwecke $f'(z) \equiv 2\sqrt{1+z^2}$. Als ersten Annäherungswert wählen wir $z = 2$, ein Wert, von dem wir im voraus wissen, daß er zu groß ist, da in unserem Falle die Abszisse des Endpunktes kleiner sein muß als die Bogenlänge. Es ist

$$\begin{aligned} f(2) &= 2\sqrt{5} + \text{Ar}\text{Sin } 2 - 4 = 4,47 + 1,44 - 4 = 1,91, \\ f'(2) &= 2\sqrt{5} = 4,47, \quad h = -0,43. \end{aligned}$$

Folglich wählen wir als zweiten Wert $z = 2 - 0,43 = 1,57$, und es ist

$$\begin{aligned} f(1,57) &= 2,9225 + 1,2330 - 4 = 0,1555; \\ f'(1,57) &= 3,7229, \quad h = -0,0418, \quad z = 1,5282; \\ f(1,5282) &= 2,7910 + 1,2103 - 4 = 0,0013, \\ f'(1,5282) &= 3,6527, \quad h = -0,0004, \quad z = 1,5278; \\ f(1,5278) &= 2,7900 + 1,2101 - 4 = 0,0001. \end{aligned}$$

Die Lösung lautet $z = 1,5278$; also ist $x = 1,5278p$.

Wesentlich bequemer ist das folgende Verfahren: Man setze in

a) $\frac{x}{p} = \text{Sin } \frac{u}{2}$; dann geht a) über in

$$f(u) \equiv u + \text{Sin } u - 4\frac{s}{p} = 0; \quad \text{b)}$$

also für $s = 2p$ in

$$f(u) \equiv u + \text{Sin } u - 8 = 0.$$

Mit einer Tafel der Sin-Funktion finden wir

$$f(2,42) = -0,0015, \quad f(2,43) = +0,0654;$$

mittels der Regula falsi folgt hieraus $u = 2,4202$, also

$$x = p \cdot \text{Sin } 1,2101 \quad x = 1,5278p.$$

Zeige, daß der Endpunkt des Bogens, der gleich dem Parameter p ist, die Abszisse $x = 0,8927p$ hat!

c) Eine andere Kurve, deren Länge sich mit unseren Hilfsmitteln finden läßt, ist die Neilsche Parabel mit der Gleichung $y = x \cdot \sqrt{\frac{x}{a}}$ (konstruieren!); für sie ist

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{a}},$$

also

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}\frac{x}{a}} dx = a \left[\left(\frac{4}{9} + \frac{x}{a} \right) \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{x}{a}} - \frac{8}{27} \right].$$

Zeige, daß

$$s_0^a = 1,4397a, \quad \frac{a}{s_0^{\frac{4}{3}}} = 0,2824a$$

ist, berechne s_0^{5a} !

Weiterhin seien zur Behandlung empfohlen die Kurven mit den Gleichungen

$$y = \ln x \quad \text{und} \quad y = \ln \sin x.$$

So ist

$$[\text{bog } \ln x]_1^e = 3,0036, \quad [\text{bog } \ln \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = 0,5493.$$

(90) B. Berechnung des Rauminhaltes von Körpern (Kubatur).

Wir denken uns (Abb. 111) den Körper u. a. durch zwei parallele Ebenen begrenzt, deren Abstand h betrage; die übrige Begrenzungsfläche sei beliebig. Die in die beiden parallelen Ebenen fallenden Teile der Oberfläche, die Grundflächen, mögen den Inhalt g_1 und g_2

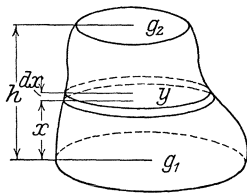


Abb. 111.

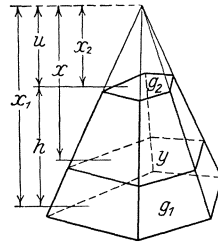


Abb. 112.

haben. Zur Ermittlung des Rauminhaltes zerlegen wir den Körper durch Ebenen, die parallel zu den Grundflächen sind, und die — im Grenzfalle — den unendlich kleinen Abstand dx voneinander haben mögen, in eine — über alle Grenzen hinaus wachsende — Anzahl von Schichten. Diejenige Schnittebene, die von g_1 den Abstand x hat, möge den Flächeninhalt y haben; die auf ihr lagernde Schicht nähert sich dann mehr und mehr der Prismenform und hat deshalb um so genauer den Rauminhalt $y \cdot dx$, je dichter die Schnittebenen aufeinanderfolgen. Die Summe der Inhalte aller dieser Schichten gibt um so besser den Inhalt des Körpers wieder, je mehr dx dem Grenzwerte Null zustrebt; wir erhalten demnach für den Rauminhalt V des Körpers die Formel

$$V = \int_0^h y \cdot dx. \quad (48)$$

Kennt man das Gesetz, nach dem sich der Flächeninhalt y mit der Schnitthöhe x ändert, so kann man durch Auswerten des Integrales den Rauminhalt wirklich bestimmen.

a) Wir beginnen mit dem Pyramidenstumpf (Abb. 112); er habe die Grundflächen g_1 und g_2 und die Höhe h . Wir führen die Ergänzungspyramide ein, d. h. diejenige Pyramide, die den Stumpf zur vollständigen

Pyramide ergänzt; ihre Höhe sei u , wobei u sich aus der Proportion bestimmt $u : (u + h) = \sqrt{g_2} : \sqrt{g_1}$; d. h.

$$u = h \frac{\sqrt{g_2}}{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}}.$$

Im Abstände x von der Spitze legen wir die Parallelebene, die den Stumpf in einer Fläche vom Inhalt y schneide; y erhalten wir aus der Proportion

$$y : g_2 = x^2 : u^2 \quad \text{zu} \quad y = \frac{g_2}{u^2} \cdot x^2.$$

Demnach ist der Rauminhalt:

$$\begin{aligned} V &= \int_{x_2}^{x_1} y \, dx = \frac{g_2}{u^2} \int_{x_2}^{x_1} x^2 \, dx = \frac{g_2}{3u^2} \cdot [x^3]_{x_2}^{x_1} = \frac{g_2}{3u^2} [x_1^3 - x_2^3] \\ &= \frac{g_2}{3u^2} (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Die untere Grenze x_2 ist gleich dem Abstände der Spitze von g_2 , also gleich

$$u = h \frac{\sqrt{g_2}}{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}},$$

die obere x_1 gleich dem Abstände der Spitze von g_1 , also gleich

$$u + h = h \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}}.$$

Setzen wir diese Werte in das Integral ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} V &= \frac{g_2}{3u^2} h(u^2 + u(u + h) + (u + h)^2) = \frac{g_2}{3u^2} h(3u^2 + 3uh + h^2) \\ &= \frac{g_2 h}{3} \left(3 + 3 \frac{h}{u} + \left(\frac{h}{u} \right)^2 \right) = \frac{g_2 h}{3} \left(3 + 3 \frac{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}}{\sqrt{g_2}} + \left(\frac{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}}{\sqrt{g_2}} \right)^2 \right) \\ &= \frac{g_2 h}{3} \left(3 \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_2}} + \frac{g_1}{g_2} - 2 \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_2}} + 1 \right) \end{aligned}$$

oder

$$V = \frac{h}{3} (g_1 + \sqrt{g_1 g_2} + g_2).$$

Für $g_2 = 0$ ergibt sich hieraus der Inhalt der Vollpyramide zu $V = \frac{1}{3} g_1 h$.

Da $y = \frac{g_2}{u^2} x^2$ eine ganze rationale Funktion zweiten Grades von x ist, hätten wir V auch mit Hilfe der Simpsonschen Regel (83), Formel 42) ermitteln können. Der Leser schlage diesen Weg ein; wir wollen jetzt die Simpsonsche Regel bei Berechnung des Inhaltes eines Obeliskens verwenden, wobei wir unter einem Obeliskens einen Körper verstehen, dessen Grundflächen zwei Rechtecke mit paarweise

parallelen Seiten, dessen Seitenflächen also Trapeze sind. Sind a_1, b_1 bzw. a_2, b_2 die Seiten der Rechtecke, und ist h die Höhe des Obeliskens (Abb. 113), so ist jeder Parallelschnitt wiederum ein Rechteck, dessen Seiten u und v sich leicht bestimmen zu

$$u = a_1 - \frac{a_1 - a_2}{h} x, \quad v = b_1 - \frac{b_1 - b_2}{h} x,$$

wenn x der Abstand der Schnittfläche von dem Rechtecke (a_1, b_1) ist. Der Inhalt der Schnittfläche ist demnach

$$y = \left(a_1 - \frac{a_1 - a_2}{h} x \right) \left(b_1 - \frac{b_1 - b_2}{h} x \right),$$

also eine Funktion zweiten Grades. Die Verwendung der Simpson'schen Regel führt also zu einem exakten Ergebnis. Der Mittelschnitt hat nun die Seiten

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \quad \text{und} \quad \frac{b_1 + b_2}{2};$$

daher ist

$$y_m = \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}{4}.$$

Da ferner $y_1 = a_1 b_1$ und $y_2 = a_2 b_2$ ist, so folgt

$$V = \frac{h}{6} [a_1 b_1 + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) + a_2 b_2]$$

oder

$$V = \frac{h}{6} [(2a_1 + a_2)b_1 + (a_1 + 2a_2)b_2].$$

Ist $b_2 = 0$, so wird aus dem Obeliskens ein Keil; sein Inhalt ist

$$V = \frac{b_1 h}{6} (2a_1 + a_2).$$

b) Von den krummflächig begrenzten Körpern erhalten wir den Rauminhalt des Kreiskegelstumpfes aus demjenigen des Pyramidenstumpfes, indem wir $g_1 = \pi r_1^2$, $g_2 = \pi r_2^2$ setzen, wobei r_1 und r_2 die Halbmesser der Grundkreise sind.

Es ergibt sich

$$V = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2),$$

also für den Kreiskegel ($r_2 = 0$)

$$V = \frac{\pi}{3} r_1^2 h.$$

Wir kommen zur Kugel. Schneiden wir sie (Abb. 114) durch eine Ebene im Abstände x vom Mittelpunkte, so erhalten wir als Schnittfigur einen Kreis vom Halbmesser $\sqrt{r^2 - x^2}$, also vom Inhalte $\pi(r^2 - x^2)$. Demnach ist der Inhalt einer Kugelschicht, welche aus der Kugel

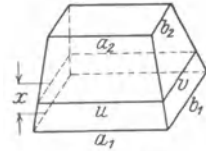


Abb. 113.

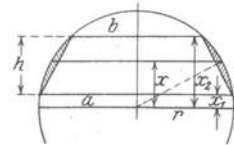


Abb. 114.

durch zwei Parallelebenen mit den Abständen x_1 bzw. x_2 vom Mittelpunkte ausgeschnitten wird,

$$\begin{aligned} V &= \int_{x_1}^{x_2} \pi (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{\pi}{3} (x_2 - x_1) (3r^2 - (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)), \\ &= \frac{\pi}{6} h (6r^2 + h^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2) \\ &= \frac{\pi}{6} h (h^2 + 3(r^2 - x_1^2) + 3(r^2 - x_2^2)), \\ V &= \frac{\pi}{6} h (3a^2 + 3b^2 + h^2), \end{aligned}$$

wobei $h = x_2 - x_1$ die Höhe und $a = \sqrt{r^2 - x_1^2}$ und $b = \sqrt{r^2 - x_2^2}$ die Halbmesser der Grundkreise sind. Setzen wir $x_2 = r$, also $b = 0$, so erhalten wir den Rauminhalt des Kugelabschnittes

$$V = \frac{\pi}{6} h (3a^2 + h^2),$$

eine Formel, die wir, da $a^2 = h(2r - h)$ ist, noch umgestalten können zu

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h).$$

Fügen wir zu dem Kugelabschnitte noch den Kegel, dessen Grundkreis der Kreis vom Halbmesser a ist und dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, dessen Höhe also $r - h$, dessen Inhalt demnach $\frac{\pi}{3} (r - h) h (2r - h)$ ist, so erhalten wir den Rauminhalt des Kugelausschnittes

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) + \frac{\pi}{3} (r - h) h (2r - h) \\ &= \frac{\pi}{3} h (3rh - h^2 + 2r^2 - 3rh + h^2) \end{aligned}$$

oder

$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h.$$

Setzen wir schließlich in der Formel für den Kugelabschnitt bzw. Kugelausschnitt $a = h = r$, so ergibt sich die Formel für den Inhalt der Halbkugel, aus der durch Verdoppeln für den Rauminhalt der Vollkugel folgt:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Man zeige, daß der Rauminhalt für die Kugelschicht (schraffierte Fläche, Abb. 114) ist

$$V = \frac{\pi}{6} h s^2$$

(Kugelschicht vermindert um den zugehörigen Kegelstumpf).

c) Die Kugel leitet über zu den Umdrehungskörpern. Ist $y = f(x)$ die Gleichung der Meridiankurve (in Abb. 115 ist die x -Achse vertikal, die y -Achse horizontal gezeichnet), und ist die x -Achse Drehachse, so zerlegen wir den Körper durch Parallelebenen normal zur Drehachse in Schichten, deren Grundflächen Kreise vom Halbmesser y ,

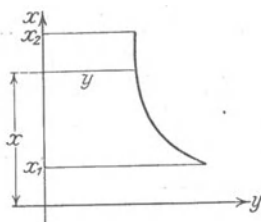


Abb. 115.

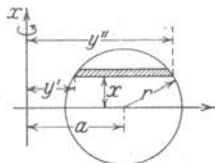


Abb. 116.

deren Höhe dx ist. Es ist demnach der Inhalt einer solchen Schicht $\pi y^2 dx$ und daher der Rauminhalt des Umdrehungskörpers

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx. \quad (49)$$

Im Falle des Kreisringkörpers (Abb. 116) ist jede Schicht ein Hohlzylinder, dessen innerer Halbmesser $y' = a - \sqrt{r^2 - x^2}$, dessen äußerer $y'' = a + \sqrt{r^2 - x^2}$, dessen Grundfläche daher

$$\pi(y''^2 - y'^2) = \pi(y'' + y')(y'' - y') = 4\pi a \sqrt{r^2 - x^2},$$

dessen Rauminhalt folglich $4\pi a \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$ ist. Für den Inhalt des Ringes bekommen wir also mittels Formel TII 13

$$\begin{aligned} V &= 4\pi a \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4\pi a \left[\frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} \right]_{-r}^{+r} \\ &= 4\pi a \cdot \left[\frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + 0 \right], \\ V &= 2\pi^2 a r^2. \end{aligned}$$

Unter einem Umdrehungsparaboloid versteht man eine Fläche, die durch Drehung einer Parabel um ihre Achse entsteht. Der Inhalt des Körpers, gerechnet vom Scheitel bis zu einer zur Drehachse senkrechten Ebene ist, da $y = \sqrt{2px}$ die Gleichung der Parabel ist:

$$V = \pi \int_0^{x_0} y^2 dx = \pi \int_0^{x_0} 2px dx = \pi p x_0^2 = \frac{\pi}{2} \cdot x_0 \cdot 2px_0 = \frac{\pi}{2} x_0 y_0^2.$$

Konstruiert man über dem Grundkreise vom Halbmesser y_0 einen geraden Kreiszyylinder von der gleichen Höhe x_0 , so ist sein Inhalt $V = \pi x_0 y_0^2$.

Das Umdrehungsparaboloid halbiert demnach den Kreiszyylinder von gleicher Grundfläche und Höhe. — Der Leser zeige, daß der durch Drehung der Parabel um die Scheiteltangente entstehende Körper (Abb. 117) den Rauminhalt $V = \frac{\pi}{5} x_0^2 y_0$ hat.

Die Umdrehung einer Parabel kann auch auf folgende Weise zur Begrenzung eines Körpers dienen: Wir denken uns ein Faß von der Höhe h (Abb. 118), dessen Dauben parabolisch gekrümmt sind, derart, daß der Scheitel mit dem Mittelpunkte der Daube zusammenfällt. Ist der Spundhalbmesser r_2 und der Bodenhalbmesser r_1 , so hat bei der aus der Abbildung ersichtlichen Wahl des Koordinatensystems der Punkt A die Koordinaten

$$x = \frac{h}{2}, \quad y = r_2 - r_1.$$

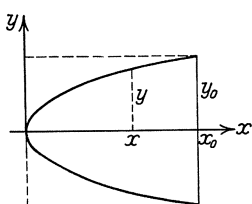


Abb. 117.

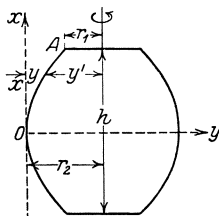


Abb. 118.

Da die Parabel die Gleichung $y = \frac{x^2}{2p}$ haben und A auf ihr liegen muß, so ergibt sich für p die Gleichung

$$2p \cdot (r_2 - r_1) = \frac{h^2}{4};$$

also lautet die Gleichung der Parabel

$$y = 4 \frac{r_2 - r_1}{h^2} x^2.$$

Der der Abszisse x entsprechende Parallelkreis des Fasses hat daher den Halbmesser

$$y' = r_2 - y = r_2 - 4 \frac{r_2 - r_1}{h^2} x^2.$$

Mithin ergibt sich der Inhalt des Fasses zu

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{h}{2}} \left(r_2 - 4 \frac{r_2 - r_1}{h^2} x^2 \right)^2 dx \\ &= 2\pi \left[r_2^2 x - \frac{8}{3} r_2 \frac{r_2 - r_1}{h^2} x^3 + \frac{16}{5} \frac{(r_2 - r_1)^2}{h^4} x^5 \right]_0^{\frac{h}{2}} \\ &= \frac{\pi}{15} h (8 r_2^2 + 4 r_1 r_2 + 3 r_1^2). \end{aligned}$$

Nun werden im allgemeinen die Dauben eines Fasses nicht Parabelgestalt haben; dann greift man, um den Inhalt zu ermitteln, am zweckmäßigsten zur Simpsonschen Regel. Setzen wir in Gleichung 42) für $y_1 = y_2$ den Flächeninhalt des Bodens, also πr_1^2 und für y_m denjenigen des Spundquerschnittes, also πr_2^2 , so bekommen wir

$$V \approx \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + 2r_2^2).$$

Als Anregung zu weiteren Berechnungen seien die folgenden Beispiele gegeben. Die Kurven

$$y = a \sin 2\pi \frac{x}{b}, \quad y = a \operatorname{tg} 2\pi \frac{x}{b}, \quad y = a \ln \frac{x}{b}, \dots$$

mögen um die x - bzw. um die y -Achse rotieren; der Rauminhalt der entstehenden Drehkörper ist zu ermitteln.

(91) C. Berechnung der Oberfläche von Drehkörpern (Komplanation). Rotiert eine Kurve $y = f(x)$ (Abb. 119) um die x -Achse, so beschreibt ein Kurvenelement $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ einen Kegelmantel, dessen Flächeninhalt nach den Lehren der Stereometrie

$$dO = \pi(y + y + dy) \cdot ds$$

ist. Vernachlässigen wir die unendlich kleine Größe dy gegenüber den endlichen Summanden y , so ist

$$dO = 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

daher

$$O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad 50)$$

Anwendungen: a) Im Kreise vom Halbmesser r ist $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; folglich ist

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und

$$ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx.$$

Also ist der Flächeninhalt der Kugelzone:

$$O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r [x]_{x_1}^{x_2} = 2\pi r(x_2 - x_1) = 2\pi r h.$$

Da diese Formel nur von der Differenz $x_2 - x_1 = h$ abhängig ist, gilt sie auch noch für $x_2 = r$, d. h. für die Kugelkappe. Setzen wir $h = 2r$, so erhalten wir für die Oberfläche der Vollkugel

$$O = 4\pi r^2.$$

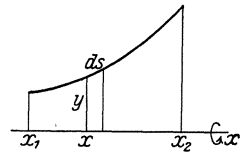


Abb. 119.

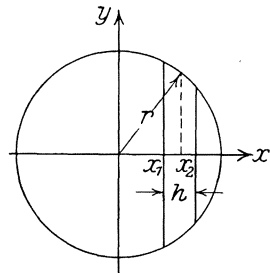


Abb. 120.

b) Die Parabel $y = \sqrt{2px}$ möge um ihre Achse rotieren; hier ist

$$y' = \sqrt{\frac{p}{2x}}, \quad \text{also} \quad ds = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx,$$

und demnach die Oberfläche des Umdrehungsparaboloides (Abb. 117):

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \cdot \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^{x_0} \sqrt{p + 2x} dx \\ &= 2\pi \sqrt{p} \cdot \left[\frac{1}{3} \sqrt{p + 2x}^3 \right]_0^{x_0} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{p} [\sqrt{p + 2x_0}^3 - \sqrt{p}^3] \end{aligned}$$

oder

$$O = \frac{\pi y_0}{6x_0^2} [\sqrt{y_0^2 + 4x_0^3} - y_0^3].$$

So ist die Oberfläche des Paraboloids, vom Scheitel bis zu einer durch den Brennpunkt senkrecht zur Achse gelegte Ebene gerechnet:

$$\left(x_0 = \frac{p}{2}, \quad y_0 = p\right), \quad O = \frac{2\pi}{3} p^2 [2\sqrt{2} - 1] = 3,8295 p^2.$$

Läßt man die Parabel um die Scheiteltangente rotieren (Abb. 117), so entsteht eine Drehfläche, für welche

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad \text{also} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}, \quad ds = \frac{1}{p} \sqrt{p^2 + y^2} dy$$

und

$$O = 2\pi \int_0^{y_0} \frac{y^2}{2p^2} \sqrt{p^2 + y^2} dy = \frac{\pi}{p^2} \int_0^{y_0} y^2 \sqrt{p^2 + y^2} dy = \frac{\pi}{p^2} \int_0^{y_0} \frac{y^4 + p^2 y^2}{\sqrt{p^2 + y^2}} dy$$

ist. Nun ist nach dem Verfahren von (77)

$$\int \frac{y^4 + p^2 y^2}{\sqrt{p^2 + y^2}} dy = \frac{1}{8} \left[(2y^3 + p^2 y) \sqrt{p^2 + y^2} - p^4 \operatorname{Ar} \sin \frac{y}{p} \right].$$

Also ist

$$O = \frac{\pi}{8p^2} \left[(2y_0^3 + p^2 y_0) \sqrt{y_0^2 + p^2} - p^4 \operatorname{Ar} \sin \frac{y_0}{p} \right].$$

Für $y_0 = p$ ergibt sich

$$O = \frac{\pi}{8} p^2 [3\sqrt{2} - \operatorname{Ar} \sin 1] = 1,3199 p^2.$$

c) Rotiert die Kurve $y = a \cos \frac{2\pi}{b} x$ um die x -Achse, so entsteht eine Drehfläche, deren Oberfläche den Inhalt hat:

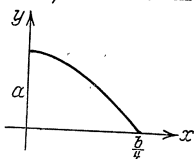


Abb. 121.

$$O_0^b = 2\pi \int_0^{\frac{b}{4}} a \cos \frac{2\pi}{b} x \cdot \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 a^2}{b^2} \sin^2 \frac{2\pi}{b} x} dx.$$

Um

$$J = \int \cos \frac{2\pi}{b} x \cdot \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 a^2}{b^2} \sin^2 \frac{2\pi}{b} x} dx$$

unbestimmt auszuwerten, setzen wir

$$\frac{2\pi a}{b} \sin \frac{2\pi}{b} x = z,$$

also

$$\frac{4\pi^2 a}{b^2} \cos \frac{2\pi}{b} x \cdot dx = dz,$$

und erhalten mittels Formel T II 15':

$$\begin{aligned} J &= \frac{b^2}{4\pi^2 a} \int \sqrt{1 + z^2} dz = \frac{b^2}{8\pi^2 a} (z\sqrt{z^2 + 1} + \mathfrak{Ar} \mathfrak{Cin} z) \\ &= \frac{b^2}{8\pi^2 a} \left[\frac{2\pi a}{b} \sin \frac{2\pi}{b} x \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 a^2}{b^2} \sin^2 \frac{2\pi}{b} x} + 1 + \mathfrak{Ar} \mathfrak{Cin} \left(\frac{2\pi a}{b} \sin \frac{2\pi}{b} x \right) \right]. \end{aligned}$$

Daher ist

$$O_0^b = \frac{b^2}{4\pi} \left[\frac{2\pi a}{b} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 a^2}{b^2}} + \mathfrak{Ar} \mathfrak{Cin} \frac{2\pi a}{b} \right] = \frac{a}{2} \sqrt{b^2 + (2\pi a)^2} + \frac{b^2}{4\pi} \mathfrak{Ar} \mathfrak{Cin} \frac{2\pi a}{b}.$$

Weitere Aufgaben entsprechend den unter B aufgeführten.

§ 8. Anwendung des bestimmten Integrales auf technische Probleme.

(92) **A. Das statische Moment und der Schwerpunkt.** Wir denken uns eine punktförmige Masse m , welche von einer festen Geraden g den Abstand a haben möge; dann versteht man unter dem statischen Momente dieser Masse m bezüglich der Geraden g das Produkt aus m und dem Abstände a : $M_g = m \cdot a$; g heißt die Momentenachse.

Sind im Raume eine endliche Anzahl solcher Massenpunkte vorhanden, so versteht man unter dem statischen Momente des Systems dieser Massenpunkte bezüglich g die Summe der statischen Momente der einzelnen Massenpunkte:

$$M_g = \sum m_k a_k,$$

wobei m_k die Masse irgendeines dieser Massenpunkte und a_k seinen Abstand von g bedeutet. Ändert man die Momentenachse, so wird auch das statische Moment ein anderes. — Wir wollen uns nun vorstellen, daß die Gesamtmasse aller dieser getrennt liegenden Massenpunkte in einem einzigen Punkte S vereinigt werden könne, so daß also S der Träger der Masse $\sum m_k$ ist. Ferner wollen wir S einen solchen Abstand α von g geben, daß das statische Moment von S bezüglich g

gleich dem statischen Momente des Systems der einzelnen Massenpunkte ist, so daß also die Gleichung besteht:

$$\alpha \cdot \sum m_k = \sum a_k m_k, \quad \alpha = \frac{\sum a_k m_k}{\sum m_k}.$$

Nun lehrt die Mechanik, wie später bewiesen werden soll [s. (117) S. 319], daß es für jedes starre Massensystem stets einen und nur einen solchen festen Punkt S gibt, für welchen diese Gleichung erfüllt ist, welche Lage auch die Momentenachse g haben möge. Diesen Punkt bezeichnet man als den Massenmittelpunkt oder den Schwerpunkt des Systems.

Der Massenpunkt ist ein abstrakter Begriff; in Wirklichkeit ist die Masse räumlich verteilt. Wir können jedoch dem Massenpunkte gedanklich näherkommen, wenn wir die räumlich verteilte Masse m in Teile zerlegen; diese Teile werden dem Begriffe des Massenpunktes um so mehr entsprechen, je kleiner die Massenteilchen dm gewählt werden. Bestimmen wir von jedem dieser Massenteilchen dm den Abstand a von der Momentenachse g , wobei a für die verschiedenen Massenteile im allgemeinen verschiedene Werte annimmt, so können wir für jedes dm das statische Moment $a \cdot dm$ berechnen; durch Summieren ergibt sich dann das Moment der Gesamtmasse m bezüglich der Momentenachse g

$$M_g = \int_m a \cdot dm, \quad (51)$$

wobei \int_m andeuten soll, daß das Integral über alle Teilchen der Masse m erstreckt werden soll. Der Abstand α des Schwerpunktes der Masse m von der Momentenachse ergibt sich dann zu

$$\alpha = \frac{\int a dm}{m}.$$

Da für jede durch S gehende Achse g $\alpha = 0$ ist, folgt für eine solche, Schwerachse genannte Gerade

$$M_g = 0.$$

Das statische Moment, bezogen auf eine Schwerachse, ist Null.

In den folgenden Erörterungen, die sich auf ebene Flächen und ebene Kurven erstrecken — Körper werden später behandelt —, wollen wir die Annahme machen, daß die Masse homogen, d. h. überall gleich dicht sei, und wollen ferner die Dichte der Masse $\mu = 1$ setzen, so daß also die Masse des betreffenden Gebildes gleich seinem Flächeninhalt oder gleich seiner Länge ist, je nachdem das Gebilde eine Fläche oder eine Kurve ist.

(93) **I. Statisches Moment und Schwerpunkt ebener Flächen.** Ist g (Abb. 122) die Momentenachse und F die zu untersuchende Fläche, so zerlegen wir T in Streifen parallel zur Achse g ; ist der Inhalt eines solchen Streifens dF und sein Abstand von g gleich x , so ist sein Moment

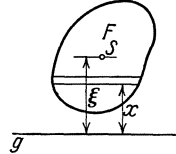


Abb. 122.

$$dM_g = x \cdot dF, \text{ daher das Moment der ganzen Fläche:}$$

$$M_g = \int_F x \cdot dF.$$

Der Schwerpunkt S von F hat von g einen Abstand ξ , der sich ergibt zu

$$\xi = \frac{\int_F x dF}{F}. \quad (52)$$

a) Um das statische Moment des Rechtecks mit den Seiten a und b , bezogen auf die Seite a als Achse (Abb. 123), zu ermitteln, zerlegen wir das Rechteck durch Parallelen zur Seite a in Streifen von der Breite a und der Höhe dx ; der Inhalt eines solchen Streifens ist $a \cdot dx$; ist x sein Abstand von a , so ist sein Moment $a \cdot x \cdot dx$ und demnach das Moment des ganzen Rechtecks

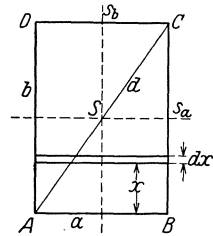


Abb. 123.

$$M_a = \int_0^b a x dx = a \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \frac{1}{2} a b^2.$$

Ist ξ der Abstand des Schwerpunktes von a , so ist

$$a b \cdot \xi = \frac{1}{2} a b^2 \quad \text{oder} \quad \xi = \frac{\frac{1}{2} a b^2}{a b} = \frac{1}{2} b$$

in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß der Schwerpunkt des Rechtecks mit seinem Mittelpunkt zusammenfällt.

Für das Dreieck bekommen wir unter Benutzung von Abb. 98 das statische Moment eines Streifens bezüglich der zur Grundlinie durch die Spitze gezogenen Parallelen g'

$$dM_{g'} = x \cdot \frac{g}{h} x \cdot dx;$$

demnach ist

$$M_{g'} = \frac{g}{h} \int_0^h x^2 dx = \frac{g}{h} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} g h^2.$$

Hieraus berechnet sich der Abstand des Schwerpunktes ξ von g' zu

$$\xi = \frac{\frac{1}{3} g h^2}{\frac{1}{2} g h}, \quad \xi = \frac{2}{3} h,$$

woraus sich S als Schnittpunkt der drei Mittellinien des Dreiecks ergibt.

Im Trapez (Abb. 99) ist das Moment des Flächenstreifens bezüglich der Parallelen a

$$dM_a = x \cdot \frac{1}{h} ((b-a)x + ah) dx,$$

also

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{1}{h} \int_0^h ((b-a)x^2 + ahx) dx = \frac{1}{h} \left[(b-a) \frac{x^3}{3} + ah \frac{x^2}{2} \right]_0^h \\ &= \frac{1}{6 \cdot h} [2(b-a)h^3 + 3ah^2] = \frac{h^2}{6} (a+2b); \\ \xi \cdot \frac{a+b}{2} h &= \frac{h^2}{6} (a+2b) \quad \text{oder} \quad \xi = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b}. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von a und b bekommen wir den Abstand ξ' des Schwerpunktes S von der Parallelen b zu

$$\xi' = \frac{h}{3} \cdot \frac{b+2a}{b+a}. \quad (\text{Probe: } \xi + \xi' = h.)$$

Es verhält sich also

$$\xi : \xi' = (a+2b) : (b+2a) = \left(\frac{a}{2} + b\right) : \left(\frac{b}{2} + a\right).$$

Hieraus ergibt sich, wenn man bedenkt, daß S auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte von a und b liegen muß, die in Abb. 99 ausgeführte Konstruktion von S .

Um den Schwerpunkt des Kreisbogens (Abb. 124) zu finden, zerlegen wir den Ausschnitt in unendlich schmale Kreisbogenschnitte,

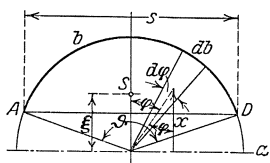


Abb. 124.

deren Mittelpunktswinkel $d\varphi$ sei. Einen solchen Ausschnitt können wir als ein Dreieck ansehen; sein Inhalt ist also $\frac{1}{2} r^2 \cdot d\varphi$, und sein Schwerpunkt liegt auf der durch M gehenden Mittellinie, die er im Verhältnis 2:1 teilt. Wir bestimmen das statische Moment des Ausschnittes bezüglich des Kreisdurchmessers a ,

der senkrecht auf der Symmetrielinie des Ausschnittes steht. Schließt die Mittellinie eines elementaren Ausschnittes mit dieser Symmetrielinie den Winkel φ ein, so hat der Schwerpunkt dieses Ausschnittes von a den Abstand $x = \frac{2}{3} r \cos \varphi$; demnach ist das statische Moment

$$dM_a = \frac{2}{3} r \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{r^3}{3} \cos \varphi d\varphi,$$

also das statische Moment des ganzen Kreisbogens:

$$M_a = \frac{r^3}{3} \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{+\frac{\varphi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{r^3}{3} [\sin \varphi]_{-\frac{\varphi}{2}}^{+\frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Der Schwerpunkt S muß auf der Symmetrielinie des Ausschnittes liegen; sein Abstand ξ von a ergibt sich aus der Gleichung:

$$\xi \cdot \frac{r^2}{2} \vartheta = \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\vartheta}{2} \quad \text{zu} \quad \xi = \frac{4}{3} r \frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\vartheta}.$$

Nun ist

$$2r \sin \frac{\vartheta}{2} = s \quad \text{und} \quad r \cdot \vartheta = b,$$

wenn s und b die Sehne und den Bogen bedeuten, die zum Kreisabschnitt gehören; wir können daher ξ in der einfacheren Form schreiben:

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{rs}{b}.$$

Das statische Moment des Kreisabschnittes ergibt sich, wenn wir von dem des Ausschnittes das des Dreiecks ABM abziehen; dieses ist aber

$$M_A = \frac{2}{3} r \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot r^2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} = \frac{2r^3}{3} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2};$$

folglich ist das Moment des Abschnittes

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\vartheta}{2} - \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \frac{\vartheta}{2} = \frac{s^3}{12}, \end{aligned}$$

und folglich ist der Schwerpunktsabstand ξ des Kreisabschnittes von a

$$\xi = \frac{s^3}{12F},$$

wenn F der Flächeninhalt des Abschnittes ist.

b) Die Fläche, deren statisches Moment berechnet werden soll, möge begrenzt sein von der zur Gleichung $y = f(x)$ gehörigen Kurve, der x -Achse und zwei Ordinaten (Abb. 125). Wir zerlegen die Fläche durch die Ordinaten in Streifen von der Höhe y und der Breite dx . Einen solchen Streifen können wir als ein Rechteck ansehen; sein Moment bezüglich der x -Achse ist, da sein Schwerpunkt von ihr den Abstand $\frac{y}{2}$ hat,

$$dM_x = \frac{y}{2} \cdot y dx = \frac{y^2}{2} dx.$$

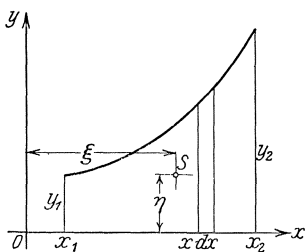


Abb. 125.

Das Moment der ganzen Fläche, bezogen auf die x -Achse, ist daher

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx. \quad 53a)$$

Derselbe Streifen hat von der y -Achse den Abstand x ; folglich ist sein statisches Moment bezüglich dieser Achse $dM_y = x \cdot y \, dx$, und daher das statische Moment der ganzen Fläche, bezogen auf die y -Achse,

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} xy \, dx. \quad (53b)$$

Der Schwerpunkt S möge die Koordinaten ξ und η haben; in ihm haben wir uns die gesamte Masse der Fläche

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y \, dx.$$

vereinigt zu denken. Es muß demnach sein:

$$\xi \cdot F = M_y \quad \text{und} \quad \eta \cdot F = M_x,$$

woraus sich für die Koordinaten von S die beiden Werte ergeben:

$$\xi = \frac{\int_{x_1}^{x_2} xy \, dx}{\int_{x_1}^{x_2} y \, dx} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1}{2} \frac{\int_{x_1}^{x_2} y^2 \, dx}{\int_{x_1}^{x_2} y \, dx}. \quad (54)$$

Beispiele: Das von der Parabel $y = \sqrt{2px}$, der x -Achse und der zu $x = x_0$ gehörigen Ordinate begrenzte Flächenstück (Abb. 90) hat die statischen Momente

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} 2px \cdot dx = \frac{p}{2} [x^2]_0^{x_0} = \frac{p}{2} x_0^2 = \frac{1}{4} x_0 y_0^2,$$

$$M_y = \int_0^{x_0} x \sqrt{2px} \, dx = \sqrt{2p} \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^{x_0} = \frac{2}{5} x_0^2 \sqrt{2px_0} = \frac{2}{5} x_0^2 y_0.$$

Demnach sind, da nach S. 222 der Flächeninhalt $\frac{2}{3} x_0 y_0$ beträgt, die Koordinaten des Schwerpunktes dieser Fläche

$$\xi = \frac{3}{5} x_0, \quad \eta = \frac{3}{8} y_0.$$

Für die von der Kurve $y = a \cdot \cos \frac{2\pi}{b} x$, der x - und der y -Achse begrenzte Fläche (Abb. 121) ist [s. TIII 23 und 32]:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{4}} a^2 \cos^2 \frac{2\pi}{b} x \, dx = \frac{b a^2}{8\pi} \left[\frac{2\pi}{b} x + \sin \frac{2\pi}{b} x \cos \frac{2\pi}{b} x \right]_0^{\frac{b}{4}} = \frac{a^2 b}{16}$$

und

$$M_y = \int_0^{\frac{b}{4}} x \cdot a \cos \frac{2\pi}{b} x dx = \frac{a b^2}{4\pi^2} \left[\frac{2\pi}{b} x \sin \frac{2\pi}{b} x + \cos \frac{2\pi}{b} x \right]_0^{\frac{b}{4}} = \frac{a b^2}{4\pi^2} \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right].$$

Da

$$F = a \int_0^{\frac{b}{4}} \cos \frac{2\pi}{b} x dx = \frac{a b}{2\pi}$$

ist, so folgt für die Koordinaten des Schwerpunktes der Fläche

$$\xi = \frac{b}{4\pi} (\pi - 2), \quad \eta = \frac{\pi}{8} a.$$

Weitere Beispiele: $y = \operatorname{tg} x$, $y = e^x$ usw.

Lassen wir die Fläche (Abb. 125) um die x -Achse rotieren, so beschreibt sie einen Drehkörper, dessen Inhalt nach 49) in (90)

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

ist. Nun ist nach 53 a)

$$\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = 2 M_x = 2 \eta \cdot F.$$

Es wird also

$$V = 2\pi \eta \cdot F, \quad (55)$$

Da $2\pi \eta$ der Weg ist, den der Schwerpunkt S der Fläche F bei einmaliger Umdrehung zurücklegt, ergibt sich hieraus die

Erste Guldinsche Regel: Der Rauminhalt eines Drehkörpers ist das Produkt aus dem Inhalt der Meridianfläche und dem Wege, den ihr Schwerpunkt bei der Umdrehung beschreibt. Die Formel liefert eine der Größen V , F , η , wenn die beiden anderen bekannt sind.

Um beispielsweise die Lage des Schwerpunktes der Fläche zu bestimmen, die durch Halbieren eines Kreisabschnittes mittels seiner Symmetrielinie gebildet wird (Abb. 126), bedenken wir zu-

nächst, daß (s. S. 251) $\xi = \frac{1}{3} \frac{\rho^3}{F}$ sein muß, da der Schwerpunkt der Hälfte des Abschnittes infolge der symmetrischen Anordnung denselben Abstand von dem zur Sehne parallelen Durchmesser haben muß wie derjenige des ganzen Abschnittes, und daß $\rho = \frac{s}{2}$ ist und außerdem unsere Fläche gleich der Hälfte derjenigen des Abschnittes ist. Um die Ordinate η

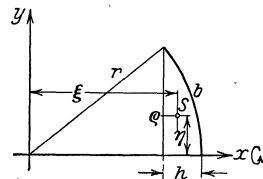


Abb. 126.

von S zu suchen, lassen wir die Fläche um die x -Achse rotieren; sie beschreibt dabei einen Kugelabschnitt von der Höhe h und dem Grenzkreishalbmesser ϱ , dessen Rauminhalt folglich nach (90) S. 242 ist

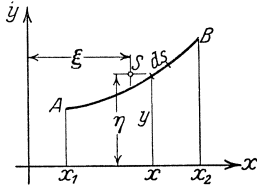


Abb. 127.

$$V = \frac{\pi}{6} h (3 \varrho^2 + h^2) = 2 \pi \eta \cdot F;$$

also ist

$$\eta = \frac{h (3 \varrho^2 + h^2)}{12 F}.$$

(94) II. Statisches Moment und Schwerpunkt ebener Kurven. Soll das statische Moment des Kurventeiles $AB = s$ (Abb. 127) bezüglich der x -Achse berechnet werden, so zerlegen wir AB in eine Anzahl von Kurventeilen ds ; und bestimmen von jedem Kurventeile das statische Moment

$$dM_x = y \cdot ds = y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Dann ist

$$M_x = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx}. \quad 56a)$$

Entsprechend ist

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \text{und} \quad \xi = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx}. \quad 56b)$$

ξ und η sind wieder die Koordinaten des Schwerpunktes.

Beispiele. Kreisbogen (Abb. 124). Es ist

$$db = r \cdot d\varphi, \quad y = r \cos \varphi,$$

also

$$dM_a = r^2 \cos \varphi d\varphi, \quad M_a = r^2 \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{+\frac{\varphi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2r^2 \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$\eta = \frac{2r^2 \sin \frac{\varphi}{2}}{r\varphi} = \frac{r \cdot s}{b}.$$

Für den Halbkreis ist demnach

$$\eta = \frac{2}{\pi} r = 0,637 r \approx \frac{7}{11} r.$$

Parabel (Abb. 90):

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \sqrt{\frac{p}{2x}}, \quad ds = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx,$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \cdot \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = \sqrt{p} \int_0^{x_0} \sqrt{2x + p} dx \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{p} [\sqrt{2x + p}^3]_0^{x_0} = \frac{1}{3} \sqrt{p} [\sqrt{2x_0 + p}^3 - p\sqrt{p}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^{x_0} x \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = \int_0^{x_0} \sqrt{x^2 + \frac{px}{2}} dx = \int_0^{x_0} \sqrt{\left(x + \frac{p}{4}\right)^2 - \left(\frac{p}{4}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(x + \frac{p}{4}\right) \sqrt{x^2 + \frac{px}{2}} - \frac{p^2}{16} \operatorname{ArCot} \left| \frac{x + \frac{p}{4}}{\frac{p}{4}} \right| \right]_0^{x_0}. \quad [\text{s. T III 15}''] \end{aligned}$$

$$M_y = \frac{1}{2} \left[\left(x_0 + \frac{p}{4}\right) \sqrt{x_0^2 + \frac{px_0}{2}} - \frac{p^2}{16} \operatorname{ArCot} \left| \frac{4x_0 + p}{p} \right| \right].$$

Setzen wir $x_0 = \frac{p}{2}$, so erhalten wir

$$M_x = \frac{p^2}{3} (2\sqrt{2} - 1) = 0,6095p^2,$$

$$M_y = \frac{p^2}{32} (6\sqrt{2} - \operatorname{ArCot} 3) = \frac{p^2}{32} (8,4853 - 1,7627) = 0,2101p^2.$$

Da der zugehörige Bogen [(s. (89) S. 237)] $b = 1,1478p$ ist, so ergibt sich für die Koordinaten des Schwerpunktes

$$\xi = 0,1831p, \quad \eta = 0,5311p.$$

Tangenslinie:

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad M_x = \int_0^{x_0} \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx.$$

Wir setzen:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = z, \quad \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx = dz, \quad 2 \operatorname{tg} x dx = \frac{dz}{z};$$

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \int_0^{z_0} \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z} dz = \frac{1}{2} \int_0^{z_0} \frac{z^2 + 1}{z \sqrt{z^2 + 1}} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{z_0} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} + \frac{1}{z \sqrt{z^2 + 1}} \right] dz = \frac{1}{2} \left[\int \frac{z dx}{\sqrt{z^2 + 1}} + \int \frac{dz}{z \sqrt{z^2 + 1}} \right]_0^{z_0}. \end{aligned}$$

Man setzt im ersten Integrale $z^2 = u$, im zweiten $z = \frac{1}{u}$ und erhält

$$M_x = \frac{1}{2} \left[\sqrt{z^2 + 1} - \operatorname{ArCot} \left| \frac{1}{z} \right| \right]_0^{z_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1 + \cos^4 x}}{\cos^2 x} - \operatorname{ArCot} \left| \sin \cos^2 x \right| \right]_0^{x_0}.$$

Ist $x_0 = \frac{\pi}{4}$, so ist

$$M_x = \frac{1}{2} [\sqrt{5} - \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{1}{2} - \sqrt{2} + \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} 1] = 0,6110.$$

Berechne ebenso das statische Moment der Sinuslinie bezüglich der x -Achse, der Logarithmenlinie bezüglich der y -Achse, der gleichseitigen Hyberbel usw.

Die in Abb. 127 gezeichnete Kurve möge um die x -Achse rotieren; in diesem Falle beschreibt sie eine Drehfläche, deren Inhalt nach 50)

$$O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

also nach 56 a)

$$O = 2\pi M_x = 2\pi \cdot \eta \cdot s$$

ist, wenn s die Länge des Bogens AB bedeutet.

$$O = 2\pi \eta \cdot s. \quad (57)$$

Formel 57) gibt die **zweite Guldinsche Regel**, welche besagt:

Die Oberfläche eines Umdrehungskörpers ist das Produkt aus der Länge der Meridiankurve und dem Wege, den ihr Schwerpunkt bei einer Umdrehung beschreibt.

Wir wollen die zweite Guldinsche Regel verwenden und die Oberfläche des in Abb. 116 angedeuteten Kreisringes berechnen: Die Länge der Meridiankurve ist $2\pi r$, der Schwerpunktsweg ist $2\pi a$, also ist $O = 4\pi^2 r a$.

(95) B. Das Trägheitsmoment. Unter dem axialen Trägheitsmoment J_g eines Massenpunktes von der Masse m bezüglich einer Achse g versteht man das Produkt aus dieser Masse und dem Quadrate ihres Abstandes a von g :

$$J_g = m \cdot a^2.$$

Unter dem Trägheitsmoment eines Systems von Massenpunkten bezüglich der Achse g versteht man die Summe der Trägheitsmomente dieser Massenpunkte bezüglich g :

$$J_g = \sum m_k a_k^2.$$

Ist die Masse nicht punktförmig, sondern stetig (in einer Kurve, einer Fläche, einem Körper) verteilt, so zerlegt man, um das Trägheitsmoment zu ermitteln, das Gebilde in unendlich kleine Teile und bestimmt das Trägheitsmoment dieser Teile; durch Summierung erhält man das Trägheitsmoment des Gebildes:

$$J_g = \int_m a^2 dm.$$

Über die Masse und ihre Dichte machen wir hier die gleichen Voraussetzungen wie oben [vgl. (92) S. 248].

Wir beschränken uns hier auf ebene Gebilde und schicken noch die folgenden Betrachtungen vor: Es sei (Abb. 128) S der Schwerpunkt des Gebildes, g die Achse, auf die das Trägheitsmoment bezogen werden soll, und s die zu g parallele Schwerachse; der Abstand zwischen beiden sei e . dm sei ein Massenelement; sein Trägheitsmoment bezüglich g ist $dJ_g = a^2 dm$. Bezeichnen wir den Abstand von dm von der Schwerachse s mit a_s , so ist $a = a_s - e$, also $dJ_g = (a_s - e)^2 \cdot dm$. Demnach wird

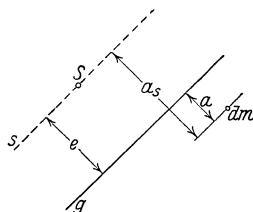


Abb. 128.

$$J_g = \int_m (a_s - e)^2 dm = \int_m (a_s^2 - 2a_s e + e^2) dm.$$

Da e von der Lage der Massenteilchen unabhängig ist, demnach bei der Integration als Konstante zu behandeln ist, so ist

$$J_g = \int_m a_s^2 dm - 2e \int_m a_s dm + e^2 \int_m dm.$$

Nun ist $\int_m a_s^2 dm = J_s$ das Trägheitsmoment des Gebildes bezüglich der Schwerachse s . Ferner ist $\int_m a_s dm = M_s$ nach (92) das statische Moment des Gebildes bezüglich der Schwerachse s , folglich ist $\int_m a_s dm = 0$. Schließlich ist $\int_m dm$ die Summe aller Massenteilchen, demnach gleich der Gesamtmasse m des Gebildes. Wir erhalten daher die wichtige Gleichung:

$$J_g = e^2 \cdot m + J_s. \quad (58)$$

Formel 58) sagt aus, daß man das Trägheitsmoment eines Gebildes bezüglich einer Achse g erhält, indem man zum Trägheitsmomente bezüglich der zu dieser parallelen Schwerachse s das Trägheitsmoment der im Schwerpunkte vereinigten Gesamtmasse m bezüglich der Achse g hinzufügt.

Da $dJ_g = a^2 dm$ — unter der Annahme, daß die Masse eine absolute (vorzeichenfreie) Größe ist — positiv sein muß, ist auch $J_g = \int dJ_g$ positiv. Dann folgt aber aus 58), daß unter allen parallelen Achsen der Schwerachse das kleinste Trägheitsmoment eines Gebildes zukommt.

Außer dem bisher behandelten axialen Trägheitsmomente führt die Rechnung noch auf das polare Trägheitsmoment. Ihm sind die folgenden Betrachtungen gewidmet:

Gegeben sei ein Punkt P und eine Punktmasse m , welche von P den Abstand a habe; dann versteht man unter dem polaren Trägheitsmomente J_P der Masse m bezüglich des Poles P den Ausdruck

$$J_P = a^2 \cdot m.$$

Das polare Trägheitsmoment eines Systems von Massenpunkten ist die Summe der polaren Trägheitsmomente der einzelnen Massenpunkte. Das polare Trägheitsmoment eines stetigen Massengebildes erhält man, indem man das Gebilde in unendlich kleine Massen zerlegt und die Summe der polaren Trägheitsmomente dieser Massenelemente bestimmt:

$$J_P = \int_m r^2 dm.$$

Zieht man durch P zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen x und y und bestimmt bezüglich dieser die Trägheitsmomente J_x und J_y , so erhält man (Abb. 129)

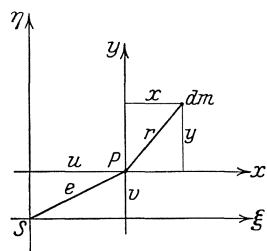


Abb. 129.

$$J_x = \int_m y^2 dm, \quad J_y = \int_m x^2 dm,$$

also

$$J_x + J_y = \int_m (x^2 + y^2) dm = \int_m r^2 dm,$$

also

$$J_P = J_x + J_y. \quad (59)$$

Das polare Trägheitsmoment eines Gebildes ist gleich der Summe irgendzweier axialer Trägheitsmomente dieses Gebildes, wenn die Achsen durch den Pol gehen und aufeinander senkrecht stehen.

Ist S (Abb. 129) der Schwerpunkt des Gebildes und ξ und η die zu x und y parallelen Schwerachsen derart, daß x und ξ den Abstand v , y und η den Abstand u voneinander haben, so ist nach 58)

$$J_x = J_\xi + v^2 m, \quad J_y = J_\eta + u^2 m$$

und nach 59)

$$J_P = J_\xi + J_\eta + (u^2 + v^2) m = J_S + e^2 m,$$

wenn e der Abstand des Poles P vom Schwerpunkte S ist. Die Formel

$$J_P = J_S + e^2 m \quad (60)$$

enthält den Satz:

Das polare Trägheitsmoment eines Gebildes bezüglich eines Poles P erhält man, indem man zum polaren Trägheitsmoment des Gebildes bezüglich des Schwerpunktes das polare Trägheitsmoment der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse bezüglich des Poles P hinzufügt.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen über das Trägheitsmoment wollen wir die Trägheitsmomente bestimmter Gebilde ermitteln.

(96) a) Das Trägheitsmoment einer Strecke l : Die Momentenachse sei eine Schwerachse s , die mit l den Winkel α einschlieÙe. Es ist das Moment des Streckenelementes du (Abb. 130)

$$dJ_s = u^2 \sin^2 \alpha \cdot du.$$

Also ist

$$J_s = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} u^2 \sin^2 \alpha \cdot du = \left[\frac{u^3}{3} \sin^2 \alpha \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{l^3}{12} \sin^2 \alpha.$$

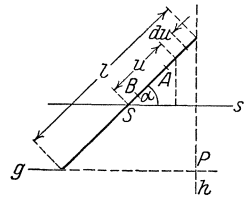


Abb. 130.

Für $\alpha = 0^\circ$ ist $J_s = 0$, ein Ergebnis, das sich von selbst versteht, wenn man bedenkt, daß in diesem Falle alle Streckenelemente den Abstand Null von der Momentenachse haben. Für $\alpha = 90^\circ$ ist $J_s = \frac{l^3}{12}$. Wählt man zur Achse die durch einen Endpunkt der Strecke zu s gezogene Parallele g , so erhält man nach 58)

$$J_g = J_s + l \cdot \left(\frac{l}{2} \sin \alpha \right)^2 = \frac{l^3}{3} \sin^2 \alpha.$$

Zieht man durch den anderen Endpunkt die Normale h zu g , so ist $J_h = \frac{l^3}{3} \cos^2 \alpha$; folglich ist das polare Trägheitsmoment bezüglich des Schnittpunktes P von g und h $J_P = \frac{l^3}{3}$, also unabhängig von α . Das ergibt den Satz: Alle Punkte, bezüglich deren die Strecke das gleiche polare Trägheitsmoment hat, liegen auf einem um S geschlagenen Kreise. Der Beweis hierfür möge vom Leser vervollständigt werden.

Unter dem Trägheitshalbmesser ϱ versteht man den Abstand von der Achse bzw. von dem Pole, in dem man sich die Gesamtmasse in einem Punkte vereinigt denken muß, damit sie das gleiche Trägheitsmoment hat wie das Gebilde.

So ist der Trägheitshalbmesser der Strecke l für die Achse s durch die Gleichung bestimmt

$$l \cdot \varrho_s^2 = \frac{l^3}{12} \sin^2 \alpha, \quad \text{also} \quad \varrho_s = \frac{l}{6} \sqrt{3} \cdot \sin \alpha;$$

ferner ist

$$l \cdot \varrho_g = \frac{l^3}{3} \sin^2 \alpha, \quad \text{also} \quad \varrho_g = \frac{l}{3} \sqrt{3} \sin \alpha.$$

Schon aus dieser Zusammenstellung erkennt man, daß der Punkt, in dem die Gesamtmasse vereinigt sein müÙte, sich mit der Lage der Achse ändert. So liegt er beispielsweise für s in A und für g in B bzw. auf einer durch diese Punkte zu s bzw. g gezogenen Parallelen. Das Träg-

heitsmoment kennt demnach keinen festen Mittelpunkt, wie wir ihn beim statischen Moment im Schwerpunkte kennengelernt haben.

Für den Pol P ergibt sich der Trägheitshalbmesser aus der Gleichung

$$l \cdot \varrho_P^2 = \frac{l^3}{3} \quad \text{zu} \quad \varrho_P = \frac{l}{3} \sqrt{3}.$$

b) Trägheitsmoment des Kreisbogens, bezogen auf den zur zugehörigen Sehne parallelen Durchmesser (Abb. 124). Es ist

$$dm = db = r \cdot d\varphi, \quad x = r \cos \varphi, \quad \text{also} \quad dJ_a = r^2 \cos^2 \varphi \cdot r d\varphi$$

und

$$\begin{aligned} J_a &= \int_{-\frac{\vartheta}{2}}^{+\frac{\vartheta}{2}} r^3 \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} r^3 [\varphi + \sin \varphi \cos \varphi]_{-\frac{\vartheta}{2}}^{+\frac{\vartheta}{2}} = \frac{r^3}{2} [\vartheta + \sin \vartheta] \\ &= m \cdot \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \right), \end{aligned}$$

wenn $m = r \cdot \vartheta = b$ gesetzt wird.

Bezüglich der Symmetrielinie l ist das Trägheitsmoment des Kreisbogens

$$\begin{aligned} J_l &= \int_{-\frac{\vartheta}{2}}^{+\frac{\vartheta}{2}} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r d\varphi = \frac{r^3}{2} [\varphi - \sin \varphi \cos \varphi]_{-\frac{\vartheta}{2}}^{+\frac{\vartheta}{2}} = \frac{r^3}{2} [\vartheta - \sin \vartheta] \\ &= m \cdot \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \right). \end{aligned}$$

Folglich ist das polare Trägheitsmoment des Kreisbogens, bezogen auf den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises $J_m = m \cdot r^2$, ein Ergebnis, das zu erwarten war, weil alle Massenteilchen vom Pole den Abstand r haben.

c) Trägheitsmoment des Parabelbogens (Abb. 90). Es ist

$$dm = db = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx,$$

also

$$\begin{aligned} J_x &= \int_0^{x_0} y^2 dm = \int_0^{x_0} 2px \cdot \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = 2p \int_0^{x_0} \sqrt{x^2 + \frac{p}{2}} x dx \\ &= p \left[\left(x_0 + \frac{p}{4} \right) \sqrt{x_0^2 + \frac{p}{2}} x_0 - \frac{p^2}{16} \operatorname{ArCo} \left| \frac{4x_0 + p}{p} \right| \right] \quad (\text{s. S. 255}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= \int_0^{x_0} x^2 dm = \int_0^{x_0} x^2 \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = \int_0^{x_0} x \sqrt{x^2 + \frac{p}{2}} dx \\ &= \frac{1}{384} \left[(128x_0^2 + 16px_0 - 12p^2) \sqrt{x_0^2 + \frac{p}{2}} x_0 + 3p^3 \operatorname{ArCo} \left| \frac{4x_0 + p}{p} \right| \right], \end{aligned}$$

wie sich durch Benutzung des in (77) angeführten Verfahrens ergibt.

$$J_O = J_x + J_y \\ = \frac{1}{384} \left[(128x_0^2 + 400px_0 + 84p^2) \sqrt{x_0^2 + \frac{p}{2}x_0} - 21p^3 \operatorname{ArCo} \left| \frac{4x_0 + p}{p} \right| \right].$$

Für $x_0 = \frac{p}{2}$ ergibt sich

$$J_x = \frac{p^3}{16} (6\sqrt{2} - \operatorname{ArCo} 3) = 0,4202 p^3, \\ J_y = \frac{p^3}{384} (14\sqrt{2} + 3 \operatorname{ArCo} 3) = \frac{p^3}{384} (19,7990 + 5,2883) = 0,0653 p^3, \\ J_O = 0,4855 p^3.$$

d) Trägheitsmoment des Rechtecks (Abb. 123). Die Seite a werde zur Trägheitsachse gewählt; dann ist

$$dm = a \cdot dx, \quad \text{also} \quad dJ_a = x^2 \cdot a dx$$

und

$$J_a = \int_0^b a x^2 dx = \frac{a b^3}{3} = a b \cdot \frac{b^2}{3} = \frac{1}{3} m b^2.$$

Der zugehörige Trägheitshalbmesser ist $\varrho = \frac{b}{3} \sqrt{3}$. Entsprechend ist $J_b = \frac{1}{3} m a^2$. Folglich ist das polare Trägheitsmoment des Rechtecks, bezogen auf eine Ecke A : $J_A = \frac{1}{3} m d^2$, wenn d die Länge der Diagonale ist.

Legen wir durch den Schwerpunkt die Parallelen s_a und s_b zu a bzw. zu b , so ist nach 58)

$$J_{s_a} = \frac{1}{3} m b^2 - m \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m b^2;$$

entsprechend ist

$$J_{s_b} = \frac{1}{12} m a^2 \quad \text{und} \quad J_S = \frac{1}{12} m d^2.$$

e) Trägheitsmoment des Dreiecks (Abb. 98). Es ist

$$J_{g'} = \int_0^h y \cdot dx \cdot x^2 = \frac{g}{h} \int_0^h x^3 dx = \frac{g}{4h} [x^4]_0^h = \frac{1}{4} g h^3 = \frac{1}{2} m h^2; \quad \varrho = \frac{h}{2} \sqrt{2}.$$

Nach 58) ist

$$J_{s_g} = J_{g'} - m \cdot \xi^2 = J_{g'} - \frac{4}{9} m h^2 = \frac{1}{18} m h^2$$

und

$$J_g = J_{s_g} + m \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} m h^2 + \frac{1}{9} m h^2 = \frac{1}{6} m h^2.$$

Man berechne das Trägheitsmoment bezüglich der zu g gehörigen Höhe, ferner das polare Trägheitsmoment bezüglich der Ecke A und bezüglich des Schwerpunktes S .

f) Trägheitsmoment zusammengesetzter Flächen¹⁾: 1. Gleichschenkliges Trapez (Abb. 131). Das Trapez ist die Summe eines Rechtecks mit den Seiten b und h und zweier Dreiecke mit der Seite $\frac{b_1}{2}$ und der Höhe h . Das Trägheitsmoment ist gleich der Summe der Trägheitsmomente der Einzelflächen. Mit Hilfe von Fall d) und e) erhalten wir also:

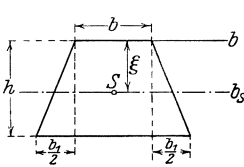


Abb. 131.

$$J_b = \frac{1}{3} b h^3 + 2 \cdot \frac{1}{4} \frac{b_1}{2} h^3 = \frac{h^3}{12} (4b + 3b_1).$$

Nun hat nach (93) S. 250 der Schwerpunkt S von b den Abstand

$$\xi = \frac{h}{3} \frac{b + 2(b + b_1)}{b + (b + b_1)} = \frac{h}{3} \frac{3b + 2b_1}{2b + b_1}.$$

Demnach ist nach 58)

$$J_{b_s} = \frac{h^3}{12} (4b + 3b_1) - \frac{h^2}{9} \frac{(3b + 2b_1)^2}{(2b + b_1)^2} \cdot \frac{b + (b + b_1)}{2} h = \frac{h^3}{36} \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{(2b + b_1)}.$$

2. Profil von den Abmessungen der Abb. 132. Das Profil wird durch s in zwei kongruente Hälften zerlegt; jede von ihnen ist aus zwei Rechtecken zusammengesetzt: Das eine hat die Seiten $(B - b)$ und $\frac{h}{2}$, von denen die erste auf s fällt; sein Trägheitsmoment ist nach d)

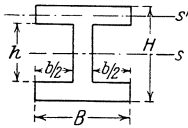


Abb. 132.

$$J'_s = \frac{1}{3} (B - b) \frac{h^3}{8} = \frac{h^3}{24} (B - b).$$

Das andere Rechteck hat die Seiten B und $\frac{H - h}{2}$, von denen die erste parallel zu s ist und von s den Abstand $\frac{h}{2}$ hat. Das auf seine Schwerachse s' bezogene Trägheitsmoment ist

$$J''_s = \frac{1}{12} B \cdot \frac{(H - h)^3}{8}.$$

Da der Abstand zwischen s und s' den Betrag $\frac{H + h}{4}$ hat, so ist das auf s bezogene Trägheitsmoment dieses Rechtecks

$$\begin{aligned} J''_s &= J''_{s'} + m \cdot \frac{(H + h)^2}{16} = \frac{1}{96} B (H - h)^3 + \frac{(H + h)^2}{16} \cdot B \cdot \frac{H - h}{2} \\ &= \frac{B(H - h)}{96} [(H - h)^2 + 3(H + h)^2], \\ J''_s &= \frac{B(H - h)}{96} (4H^2 + 4Hh + 4h^2) = \frac{1}{24} \cdot B (H^3 - h^3). \end{aligned}$$

¹⁾ Siehe Freytags Hilfsbuch für den Maschinenbau. 7. Aufl., S. 238. Berlin: Julius Springer.

Folglich ist das Trägheitsmoment des Profiles

$$J_s = 2(J'_s + J''_s) = \frac{1}{12} [B h^3 - b h^3 + B H^3 - B h^3] = \frac{1}{12} (B H^3 - b h^3).$$

Auf wesentlich kürzerem Wege wären wir zu diesem Ergebnis gelangt, wenn wir das Profil als die Differenz zweier Rechtecke behandelt hätten, von denen das eine die Seiten B und H , das andere die Seiten b und h hat. Für beide ist s die zur Seite B bzw. b parallele Schwerachse. Folglich ist nach d) $J_s = \frac{1}{12} (B H^3 - b h^3)$.

g) Trägheitsmoment der Kreisfläche. Wir zerlegen die Kreisfläche in unendlich viele schmale Ringflächen (Abb. 133); der Inhalt einer einzelnen ist $2\pi x dx$. Da alle Teile einer solchen den gleichen Abstand x von M haben, ist ihr Trägheitsmoment bezüglich M $dJ_M = x^2 \cdot 2\pi x dx$, also das Trägheitsmoment der ganzen Fläche

dar

$$J_M = 2\pi \int_0^r x^3 dx = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{1}{2} m r^2.$$

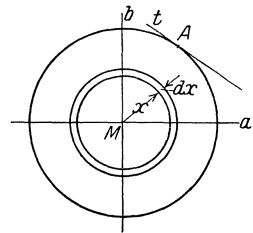


Abb. 133.

Nun ist nach 59) $J_M = J_a + J_b$. Da aber aus Symmetriegründen $J_a = J_b$ sein muß, so ist das auf einen Durchmesser bezogene Trägheitsmoment der Kreisfläche

$$J_a = \frac{m}{4} r^2 = \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{64} d^4;$$

der Trägheitshalbmesser für diesen Fall ist

$$\rho_a = \frac{r}{2}.$$

Das polare Trägheitsmoment der Kreisfläche bezüglich eines Punktes A des Umfanges ist nach 60)

$$J_A = \frac{1}{2} m r^2 + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2,$$

das axiale Trägheitsmoment bezüglich einer Tangente nach 58)

$$J_t = \frac{1}{4} m r^2 + m r^2 = \frac{5}{4} m r^2.$$

Man suche das Trägheitsmoment des Kreisabschnittes und des Kreis-ausschnittes zu bestimmen.

h) Um das Trägheitsmoment einer durch die x -Achse, die Kurve $y = f(x)$ und die zu $x = x_1$ und $x = x_2$ gehörigen Ordinaten begrenzten Fläche (Abb. 125) zu ermitteln, zerlegen wir diese Fläche wiederum durch Parallelen zur Ordinatenachse in Parallelstreifen, die wir als Rechtecke mit den Seiten dx und y ansehen können. Das Trägheitsmoment eines solchen Rechtecks ist nach Beispiel d) bezüglich der x -Achse

$$dJ_x = \frac{1}{3} y^3 dx,$$

bezüglich der y -Achse

$$dJ_y = x^2 \cdot y \, dx,$$

so daß wir die Formeln erhalten:

$$J_x = \frac{1}{3} \int_{x_1}^{x_2} y^3 \, dx \quad \text{und} \quad J_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 y \, dx. \tag{61}$$

Für die Parabelfläche (Abb. 90) bekommen wir also, da nach (84), S. 222 $m = \frac{2}{3} x_0 y_0$ ist,

$$J_x = \frac{1}{3} \int_0^{x_0} \sqrt{2px}^3 \, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} p \sqrt{p} \cdot \frac{2}{5} [x^{\frac{5}{2}}]_0^{x_0} = \frac{4}{15} p x_0^2 \sqrt{2px_0} = \frac{2}{15} x_0 y_0^3 = \frac{1}{5} m y_0^2$$

und

$$J_y = \int_0^{x_0} x^2 \sqrt{2px} \, dx = \sqrt{2p} \cdot \frac{2}{7} [x^{\frac{7}{2}}]_0^{x_0} = \frac{2}{7} x_0^3 \sqrt{2px_0} = \frac{2}{7} x_0^3 y_0 = \frac{3}{7} m x_0^2.$$

Da nach (93) S. 252 die Koordinaten des Schwerpunktes S dieser Fläche $\xi = \frac{2}{3} x_0$, $\eta = \frac{2}{3} y_0$ sind, sind nach 58) die Trägheitsmomente bezüglich der Schwerachsen s_x bzw. s_y

$$J_{s_x} = \frac{1}{5} m y_0^2 - \frac{9}{64} m y_0^2 = \frac{1}{32} m y_0^2 \quad \text{und} \quad J_{s_y} = \frac{3}{7} m x_0^2 - \frac{9}{25} m x_0^2 = \frac{1}{175} m x_0^2.$$

Man behandle ebenso die durch die Sinus-, die Tangens-, die Logarithmenlinie und die gleichseitige Hyperbel bestimmte Fläche.

(97) C. Ermittlung von resultierenden Kräften. Diese und die folgenden Anwendungen sollen nicht allgemein durchgeführt werden, sondern es soll an bestimmten Beispielen gezeigt werden, wie sich die Anwendung des bestimmten Integrals in diesen technischen Wissensgebieten gestaltet.

Es sei (Abb. 134) AB ein Stab von der Länge l ; wir wollen uns ihn mit Elektrizität von der Menge $-\varepsilon$ gleichmäßig be-

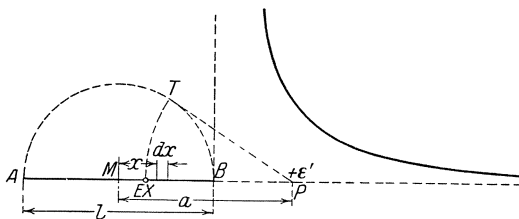


Abb. 134.

legt denken, so daß die elektrische Dichte $\frac{-\varepsilon}{l}$ betrage. Ferner befinde sich in der Verlängerung von AB über B hinaus in der Entfernung $a = MP$ vom Mittelpunkte M der Strecke AB ein Punkt P ,

der Träger der Elektrizitätsmenge $+\varepsilon'$ sein möge. Wir wollen die Größe der Anziehung ermitteln, die der Stab AB infolgedessen auf P ausübt. Wir zerlegen uns zu diesem Zwecke AB in kleine Teile dx ;

ein solches Teilchen trägt die Elektrizitätsmenge $\frac{\varepsilon}{l} dx$. Das Teilchen, das von M den Abstand $MX = x$ hat, ist von P um die Strecke $XP = a - x$ entfernt: es übt also auf ε' eine Anziehung aus, die nach dem Coulombschen Gesetze

$$dK = k \cdot \frac{\varepsilon' \cdot \frac{\varepsilon}{l} dx}{(a-x)^2}$$

beträgt. Wir erhalten demnach für die Gesamtanziehung des Stabes den Wert

$$K = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} k \cdot \frac{\varepsilon' \cdot \frac{\varepsilon}{l} dx}{(a-x)^2} = k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{dx}{(a-x)^2} = k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \left[\frac{1}{a-x} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \left[\frac{1}{a-\frac{l}{2}} - \frac{1}{a+\frac{l}{2}} \right],$$

$$K = k \cdot \frac{\varepsilon \varepsilon'}{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

Konstruiert man den Punkt E auf AB so, daß

$$EP = \sqrt{\left(a + \frac{l}{2}\right)\left(a - \frac{l}{2}\right)}$$

wird (Halbkreis über AB , Tangente PT , $PE = PT$), und denkt man sich in E die gesamte Elektrizitätsmenge des Stabes vereinigt, so ist die Wirkung gleich der von dem Stabe ausgeübten. Die in Abb. 134 gezeichnete Kurve gibt ein Bild vom Verlaufe der Funktion K .

Befindet sich P nicht in der Verlängerung von AB , sondern zwischen A und B (was man praktisch annähernd dadurch verwirklichen kann, daß man sich AB in der Gestalt einer Röhre denkt, in der sich P verschieben kann), so können wir die resultierende Kraft K durch die folgende Erwägung ermitteln. Befindet sich P näher an B als an A , so machen wir $PQ = BP$ (Abb. 135). Die Anziehung, die ε' durch QP erfährt, ist die gleiche wie die von PB stammende; da beide entgegengesetzt gerichtet sind, heben sie sich auf. Es kommt daher für die Wirkung nur der Stabteil AQ in Betracht. Da A von M die Entfernung $-\frac{l}{2}$ und Q von M die Entfernung $2a - \frac{l}{2}$ hat, ergibt sich für die Gesamtkraft

$$K = \int_{-\frac{l}{2}}^{2a - \frac{l}{2}} k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \frac{dx}{(a-x)^2} = k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \left[\frac{1}{a-x} \right]_{-\frac{l}{2}}^{2a - \frac{l}{2}} = k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \left[\frac{1}{\frac{l}{2} - a} - \frac{1}{\frac{l}{2} + a} \right]$$

$$= 2k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \frac{a}{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - a^2}.$$

Die Kraft K ist wieder eine Funktion von a ; ihr Verlauf wird durch die in Abb. 135 gezeichnete Kurve wiedergegeben.

Befindet sich P schließlich außerhalb des Stabes AB und seiner Verlängerung, so verfahren wir in folgender Weise (Abb. 136). Wir

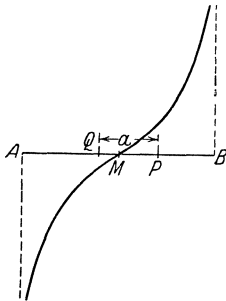


Abb. 135.

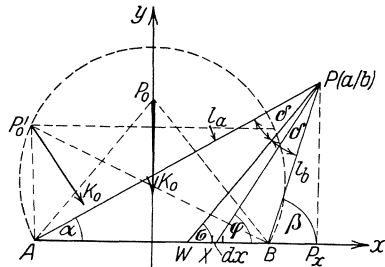


Abb. 136.

wählen AB als Abszissenachse und die Mittelsenkrechte von AB als Ordinatenachse. P habe dann die Koordinaten a und b . Der Punkt X auf AB als Träger der Elektrizitätsmenge $\frac{\varepsilon}{l} dx$ habe von M den Abstand x ; dann beträgt seine Entfernung von P , wie man aus dem rechtwinkligen Dreieck XP_xP erkennt, $\sqrt{(a-x)^2 + b^2}$. Folglich zieht die in X befindliche Elektrizitätsmenge $\frac{\varepsilon}{l} dx$ die Elektrizitätsmenge ε' von P mit einer Kraft

$$dK = k \cdot \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \cdot \frac{dx}{(a-x)^2 + b^2}$$

an. Da aber die unendlich vielen Kraftwirkungen dK verschiedene Richtungen haben (beispielsweise schließt die Richtung AP mit der x -Achse den Winkel α , die Richtung BP mit ihr den Winkel β ein), so dürfen wir sie nicht ohne weiteres summieren, um die resultierende Kraft zu erhalten. Wir zerlegen vielmehr dK erst in zwei Seitenkräfte dX und dY , deren Richtungen die der x - bzw. der y -Achse sind, indem wir dK mit dem Kosinus bzw. mit dem Sinus des Winkels $PXB = \varphi$ multiplizieren. Da

$$\cos \varphi = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}$$

ist, so erhalten wir

$$dX = k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}^3} dx, \quad dY = k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \frac{b}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}^3} dx.$$

Da alle Teilkräfte dX in dieselbe Richtung fallen und ebenso alle Teilkräfte dY , können wir sie summieren. Es ergibt sich

$$X = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} dx = k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} dx$$

Die Substitution

$$(a-x)^2 + b^2 = z, \quad -2(a-x)dx = dz$$

führt das Integral

$$\int \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} dx \quad \text{über in} \quad -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{z}},$$

so daß wir erhalten

$$\begin{aligned} X &= k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \left[\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(a - \frac{l}{2}\right)^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(a + \frac{l}{2}\right)^2 + b^2}} \right] \\ &= k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} \left(\frac{1}{l_b} - \frac{1}{l_a} \right), \end{aligned}$$

wenn wir AP mit l_a und BP mit l_b bezeichnen. Ferner ergibt sich

$$Y = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} b \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} = k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l} b \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}.$$

Zur Auswertung des Integrals

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}$$

verwenden wir das in (76) 28) S. 198 angegebene Verfahren. Wir setzen $a-x = u$, $dx = -du$ und erhalten

$$J = - \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + b^2}}.$$

Nun setzen wir $\sqrt{u^2 + b^2} = z - u$, also

$$u = \frac{z^2 - b^2}{2z}, \quad \sqrt{u^2 + b^2} = \frac{z^2 + b^2}{2z}, \quad du = \frac{z^2 + b^2}{2z^2} dz, \quad z = \sqrt{u^2 + b^2} + u$$

und erhalten

$$J = - \int \frac{(z^2 + b^2) \cdot 8z^3}{2z^2(z^2 + b^2)^3} dz = -4 \int \frac{z dz}{(z^2 + b^2)^2}.$$

Die Substitution $z^2 + b^2 = v$, $2z dz = dv$ führt J über in

$$\begin{aligned} J &= -2 \int \frac{dv}{v^2} = \frac{2}{v} = \frac{2}{z^2 + b^2} = \frac{1}{(u + \sqrt{u^2 + b^2}) \sqrt{u^2 + b^2}} \\ &= \frac{\sqrt{u^2 + b^2} - u}{b^2 \sqrt{u^2 + b^2}} = \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 + b^2}} \right) = \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \right). \end{aligned}$$

(Zu dem gleichen Ergebnisse gelangt man auf wesentlich kürzerem Wege durch die einzige Substitution $\frac{a-x}{b} = \operatorname{ctg} \vartheta$). Daher wird

$$\begin{aligned} Y &= k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{b l} \left[1 - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \\ &= k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{b l} \left[\frac{a + \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(a + \frac{l}{2}\right)^2 + b^2}} - \frac{a - \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(a - \frac{l}{2}\right)^2 + b^2}} \right]. \end{aligned}$$

Wir können die Ausdrücke für X und Y noch etwas umformen, wenn wir die Winkel α und β verwenden. Es ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a + \frac{l}{2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a - \frac{l}{2}},$$

also

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sqrt{\left(a + \frac{l}{2}\right)^2 + b^2}} &= \sin \alpha, & \frac{b}{\sqrt{\left(a - \frac{l}{2}\right)^2 + b^2}} &= \sin \beta, \\ \frac{a + \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(a + \frac{l}{2}\right)^2 + b^2}} &= \cos \alpha, & \frac{a - \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(a - \frac{l}{2}\right)^2 + b^2}} &= \cos \beta \end{aligned}$$

und demnach, da weiter $b = \frac{l}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$ ist:

$$X = k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l b} (\sin \beta - \sin \alpha) = 2k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l b} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2}$$

und

$$Y = k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l b} (\cos \alpha - \cos \beta) = 2k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l b} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Nun ist $2\delta = \beta - \alpha$ der Winkel APB , ferner $\sigma = \sphericalangle PWB$, wenn PW die Halbierende des Winkels APB ist. Da

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} \frac{\beta + \alpha}{2} = \operatorname{tg} \sigma$$

ist, folgt, daß die Richtung der Resultierenden K die der Winkelhalbierenden von APB ist. Die Größe von K ergibt sich durch die Beziehung

$$K = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{zu} \quad K = 2k \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l b} \sin \delta.$$

setzen wir $K_0 = 2k \cdot \frac{\varepsilon \varepsilon'}{l^2}$, wobei K_0 nur von den gegebenen Größen, nicht aber von der Lage des Punktes P abhängt, so ist

$$K = K_0 \frac{l}{b} \sin \delta.$$

Wenn also P gegeben, so konstruiert man $s = l \sin \delta$ und findet K einfacher Weise durch die Proportion $K:K_0 = s:b$. s wird gleich $l \sin \delta$ für alle Punkte P , die auf dem über AB den Umfangswinkel 2δ einschließenden Kreisbogen liegen. Die Richtung von K findet man, wie oben schon erwähnt, durch Halbieren des Winkels APB .

K_0 ist selbst eine Kraft, und zwar findet man den Punkt P_0 , für welchen $K = K_0$ ist, auf der Mittelsenkrechten von AB durch die Beziehungen

$$\sin \delta = \frac{b}{l} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{l}{2b};$$

aus ihnen folgt

$$\sin \delta = \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1), \quad \delta = 38^\circ 40', \quad b = \frac{l}{4}\sqrt{2(\sqrt{17} - 1)} = 0,6247l.$$

Etwas einfacher bekommt man einen anderen Punkt P'_0 , für den ebenfalls $K = K_0$ ist, dadurch, daß man über AB den Bogen schlägt, der den Winkel 60° faßt und zu AB im Abstände $b = \frac{l}{2}$ die Parallele zieht; der Schnittpunkt von Kreisbogen und Parallele ist P'_0 ; der Beweis ergibt sich durch die Überlegung, daß in diesem Falle $\delta = 30^\circ$ ist.

Wir sehen, daß in unserer Aufgabe jedem Punkte der Ebene eine Kraft von ganz bestimmter Größe und Richtung zugeordnet ist. Man sagt: Durch unser Problem ist ein Kraftfeld definiert. In Abb. 137

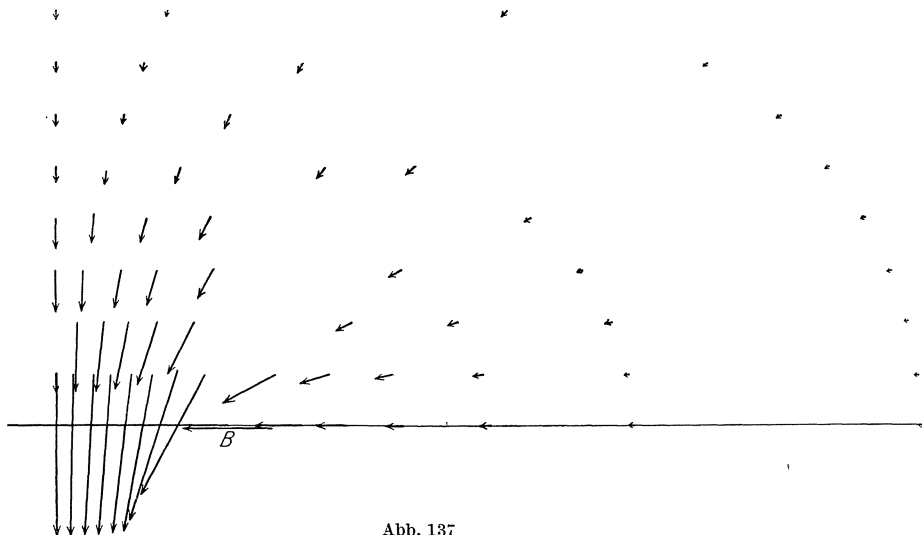


Abb. 137

sind an einigen Punkten der Ebene die zugehörigen Kräfte nach Größe und Richtung eingetragen; wir erhalten so ein immerhin anschauliches Bild von der Anziehungswirkung des Stabes l in ihrer Abhängigkeit von der Lage des Punktes P .

(98) D. [Siehe auch (46) c) S. 114ff.] Unter der wirksamen (effektiven) Stromstärke J eines Wechselstromes versteht man den Ausdruck

$$J = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt};$$

hierbei ist T die Periode, i die augenblickliche Stromstärke. Befolgt der Strom das reine Sinusgesetz $i = \Im \sin \omega t$, so wird, da $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ist:

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{\frac{1}{T} \Im^2 \int_0^T \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{\Im^2}{2T\omega} [\omega t - \sin \omega t \cos \omega t]_0^T} \\ &= \sqrt{\frac{\Im^2}{2 \cdot 2\pi} \cdot 2\pi} = \frac{\Im}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

In gleicher Weise berechnet sich die wirksame Spannung dieses Wechselstromes zu $P = \frac{\Re}{\sqrt{2}}$.

Während einer Periode wird die Arbeit $A = \int_0^T i p dt$ vollbracht; folglich ist die (mittlere) Leistung des Stromes während der Zeit T

$$L = \frac{A}{T} = \frac{1}{T} \Im \cdot \Re \int_0^T \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) dt;$$

hierbei ist $p = \Re \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ gesetzt, wobei φ die Phasenverschiebung [vgl. (46) S. 114] bedeutet. Die Auswertung des Integrals ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t \cos \varphi - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + \varphi) \right]_0^T = \frac{T}{2} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Demnach ist die mittlere Leistung

$$L = \frac{\Im \Re}{T} \cdot \frac{T}{2} \cos \varphi = \frac{\Im \Re}{2} \cos \varphi = JP \cos \varphi.$$

E. Ein magnetischer Fluß durchsetze einen Teil einer Kraftröhre von der Gestalt eines Obelisken (Abb. 138) (Luft Raum zwischen Polschuh und Anker); welches ist der Widerstand dieses Rohrteils? Da der Widerstand dem Querschnitt umgekehrt, der Länge direkt proportional ist, erleidet der Fluß beim Durchfließen der Schicht von der Höhe dx , die wir als einen Quader ansehen können, dessen rechteckige Grundfläche die Seiten $a_1 - \frac{a_1 - a}{h} x$ und $b_1 - \frac{b_1 - b}{h} x$ hat, einen Widerstand

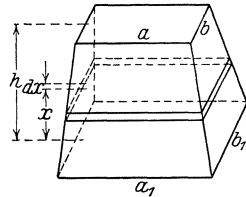


Abb. 138.

(ϱ ist ein von dem Stoffe abhängiger Proportionalitätsfaktor, der z. B. für Luft = 1 ist). Folglich ist der gesamte zu überwindende Widerstand

$$\begin{aligned}
 R &= \varrho \int_0^h \frac{dx}{\left(a_1 - \frac{a_1 - a}{h} x\right) \left(b_1 - \frac{b_1 - b}{h} x\right)} \\
 &= \frac{h^2 \varrho}{(a_1 - a)(b_1 - b)} \int_0^h \frac{dx}{\left(x - \frac{a_1 - a}{h}\right) \left(x - \frac{b_1 - b}{h}\right)} \\
 &= \frac{h^2 \varrho}{(a_1 - a)(b_1 - b)} \cdot \frac{(a_1 - a)(b_1 - b)}{h(a_1 b_1 - a_1 b)} \int_0^h \left[\frac{1}{x - \frac{a_1 - a}{h}} - \frac{1}{x - \frac{b_1 - b}{h}} \right] dx \\
 &= \frac{h \varrho}{a b_1 - a_1 b} \left[\ln \frac{x - \frac{a_1 - a}{h}}{x - \frac{b_1 - b}{h}} \right]_0^h = \frac{h \varrho}{a b_1 - a_1 b} \left[\ln \frac{a(b_1 - b)}{b(a_1 - a)} - \ln \frac{a_1(b_1 - b)}{b_1(a_1 - a)} \right], \\
 R &= \frac{h \varrho}{a b_1 - a_1 b} \ln \frac{a b_1}{a_1 b}.
 \end{aligned}$$

Sind die Grundflächen des Obelisken Quadrate ($b_1 = a_1$, $b = a$), so versagt die abgeleitete Formel; in diesem Falle wird

$$\begin{aligned}
 R &= \varrho \int_0^h \frac{dx}{\left(a_1 - \frac{a_1 - a}{h} x\right)^2} = \frac{h^2 \varrho}{(a_1 - a)^2} \int_0^h \frac{dx}{\left(x - \frac{a_1 - a}{h}\right)^2} \\
 &= \frac{h^2 \varrho}{(a_1 - a)^2} \left[\frac{1}{x - \frac{a_1 - a}{h}} \right]_0^h = \frac{h^2 \varrho}{(a_1 - a)^2} \left[-\frac{a_1 - a}{a_1 h} + \frac{a_1 - a}{a h} \right] = \frac{h^2 \varrho}{(a_1 - a)} \cdot \frac{a_1 - a}{a_1 a h}, \\
 R &= \frac{h \varrho}{a a_1}.
 \end{aligned}$$

(99) **F. Einige Anwendungen des bestimmten Integrals auf die Mechanik der Flüssigkeiten.** Wir denken uns¹⁾ (s. Abb. 139), die Flüssigkeit, deren

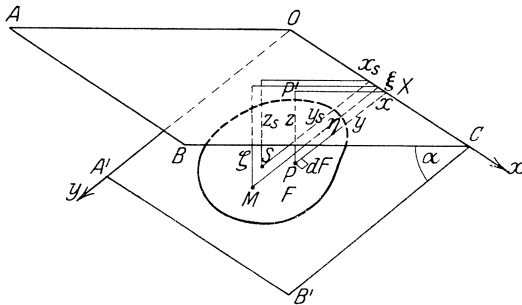


Abb. 139.

wagerechte Oberfläche $OABC$ sei, übe auf eine mit $OABC$ den Winkel α einschließende Ebene $OA'B'C$ einen Druck aus; unsere Aufgabe soll sein, den Gesamtdruck der Flüssigkeit auf das Flächenstück F der Ebene $OA'B'C$ zu ermitteln. Wir legen in

der Ebene $OA'B'C$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem fest, dessen x -Achse mit OC und dessen y -Achse mit OA' zusammenfallen; irgendein Punkt P dieser Ebene mit den Koordinaten $OX = x$ und $XP = y$ hat von der horizontalen Ebene $OABC$ einen Abstand $P'P = z$, und zwar ist, wie aus dem rechtwinkligen Dreieck $XP'P$ ohne weiteres folgt, $z = y \sin \alpha$. Ist γ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so wird auf das Flächenelement dF von ihr ein Druck ausgeübt von der Größe $dD = \gamma \cdot z \cdot dF$, so daß der Gesamtdruck auf die Fläche beträgt

$$D = \gamma \int_F z \cdot dF = \gamma \int_F y \sin \alpha \cdot dF = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \int_F y \cdot dF.$$

Nun ist aber $\int_F y \cdot dF$ das statische Moment der Fläche F bezüglich der x -Achse; ist also y_s der Abstand ihres Schwerpunktes S von der x -Achse, so ist

$$\int_F y \cdot dF = y_s \cdot F,$$

mithin

$$D = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot y_s \cdot F$$

oder

$$D = \gamma \cdot F \cdot z_s, \quad \text{a)}$$

wobei z_s der Abstand des Schwerpunktes S von der Oberfläche ist.

Der Druck auf F ist also gleich dem einer wagerecht liegenden Fläche F , deren Abstand von der Oberfläche gleich dem ihres Schwerpunktes S ist.

Wir wollen uns weiter die folgende Aufgabe stellen. Der durch Gleichung a) gefundene Gesamtdruck D sei nicht über die ganze Fläche F

¹⁾ Siehe Wittenbauer: Aufgaben aus der technischen Mechanik 3. Bd. Berlin: Julius Springer.

verbreitet, sondern greife nur in einem bestimmten Punkte M an; wo liegt dieser Punkt, wenn die Wirkung auf die Fläche F die gleiche sein soll wie vorher? Der Punkt M heißt der Druckmittelpunkt; seine Koordinaten seien ξ , η , sein Abstand von der Flüssigkeitsoberfläche ζ .

Zur Ermittlung von M müssen wir bedenken, daß das statische Moment der Kraft D , die wir uns in M angreifend denken, gleich ist der Summe der statischen Momente der Elementarkräfte dD . Wählen wir als Momentenachse die y -Achse, so muß sein

$$\xi \cdot D = \int_D x \cdot dD = \gamma \int_F xz dF = \gamma \sin \alpha \int_F xy \cdot dF = \gamma \sin \alpha \cdot C_{xy};$$

$C_{xy} = \int_F xy dF$ heißt das Zentrifugalmoment der Fläche F bezüglich der x - und y -Achse [s. (178) S. 568]. Da nun nach a)

$$D = \gamma F y_s \sin \alpha$$

ist, so folgt

$$\xi = \frac{C_{xy}}{F \cdot y_s}. \quad \text{b)}$$

Durch entsprechende Erwägungen bekommen wir, wenn wir die x -Achse zur Momentenachse machen,

$$\eta \cdot D = \int_D y \cdot dD = \gamma \int_F yz dF = \gamma \sin \alpha \cdot \int y^2 dF = J_x \cdot \gamma \sin \alpha,$$

wobei J_x das uns aus (95) bekannte Trägheitsmoment von F bezüglich der x -Achse ist. Nun ist

$$J_x = J_{s_x} + y_s^2 F = \varrho^2 F + y_s^2 F,$$

wobei J_{s_x} das Trägheitsmoment bezüglich der zur x -Achse parallelen Schwerachse s_x und ϱ der Trägheitshalbmesser von F bezüglich s_x ist. Wir bekommen daher

$$\eta = \frac{J_x}{F \cdot y_s} = y_s + \frac{\varrho^2}{y_s}. \quad \text{c)}$$

Schließlich folgt

$$\zeta = \eta \cdot \sin \alpha = z_s + \frac{\varrho^2}{z_s} \sin^2 \alpha. \quad \text{d)}$$

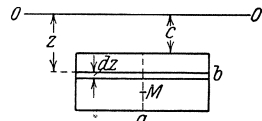


Abb. 140.

Beispiel: Ein Rechteck liege in einer vertikalen Ebene (siehe Abb. 140). Welchen Flüssigkeitsdruck erleidet es und wo liegt der Druckmittelpunkt?

$$dD = \gamma \cdot z \cdot a dz,$$

$$D = \int_c^{c+b} a z \gamma dz = a \gamma \left[\frac{z^2}{2} \right]_c^{c+b} = \frac{a \gamma}{2} [2cb + b^2] = \frac{1}{2} \gamma a b (2c + b).$$

$$\zeta \cdot D = \int_c^{c+b} a \gamma z^2 dz = \frac{a \gamma}{3} [z^3]_c^{c+b} = \frac{\gamma}{3} ab(3c^2 + 3bc + b^2),$$

$$\zeta = \frac{2}{3} \frac{3c^2 + 3bc + b^2}{2c + b}.$$

Der Druckmittelpunkt liegt auf der zur Seite b parallelen Mittellinie des Rechtecks. In diesem Beispiele haben wir die Integration, um das Verständnis zu erleichtern, nochmals durchgeführt; wir hätten das Ergebnis auch unmittelbar mit Hilfe der Formeln c) und d) finden können.

Zur Erläuterung diene das Beispiel: Ein auf der Spitze stehendes Quadrat liege in einer vertikalen Ebene (Abb. 141). Nach a) ist

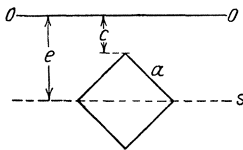


Abb. 141.

$$D = \gamma \cdot a^2 \left(c + \frac{a}{2} \sqrt{2} \right).$$

Zerlegt man das Quadrat durch die horizontale Diagonale in zwei Dreiecke, so erhält man für das Trägheitsmoment des Quadrats mit Hilfe von Beispiel e) S. 261

$$J_s = \gamma \cdot \frac{1}{6} a^2 \cdot \frac{a^2}{2} = \gamma \frac{a^4}{12} = \gamma a^2 \cdot \varrho^2.$$

Folglich ist $\varrho = \frac{a}{6} \sqrt{3}$, und demnach der Abstand ζ des Druckmittelpunktes von der Oberfläche OO nach d)

$$\zeta = c + \frac{a}{2} \sqrt{2} + \frac{a^2}{12 \left(c + \frac{a}{2} \sqrt{2} \right)} = \frac{12c^2 + 12ac\sqrt{2} + 7a^2}{6(2c + a\sqrt{2})} = \frac{a^2 + 12e^2}{12e}.$$

Einige Anwendungen. a) Zwischen einer vertikalen Wand (Abb. 142) OV und einer Wand OA , die um eine durch O gehende horizontale Achse drehbar ist, ist eine Flüssigkeit vom Gewicht G und dem spezifischen Gewicht γ eingeschlossen; die Länge des durch diese beiden

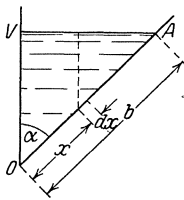


Abb. 142.

Wände und zwei zur Achse senkrechte Wände gebildeten Gefäßes sei a . Mit der Größe von α wird sich der Druck D auf die Wand OA und das auf sie ausgeübte Moment M bezüglich der durch O gehenden Achse ändern; der Zusammenhang zwischen D und α bzw. zwischen M und α soll aufgesucht werden. Bezeichnen wir mit $b = OA$ die Breite der Seitenwand, so ist der Rauminhalt des Gefäßes

$$V = a \cdot \frac{1}{2} b \sin \alpha \cdot b \cos \alpha, \quad V = \frac{ab^2}{4} \sin 2\alpha = \frac{G}{\gamma};$$

also ist

$$b = 2 \sqrt{\frac{G}{\gamma a \sin 2\alpha}}.$$

Nun ist nach Formel a)

$$D = \gamma \cdot a b \cdot \frac{b}{2} = \frac{\gamma}{2} a b^2 = \frac{2G}{\sin 2\alpha}.$$

Der Druck ist also dann am kleinsten, wenn $\alpha = 45^\circ$ ist; $D_{\min} = 2G$.

Um das Moment zu bestimmen, bedenken wir, daß der im Abstände x von O befindliche Flächenstreifen $dF = a \cdot dx$ das Moment

$$dM = \gamma \cdot a \cdot dx \cdot (b - x) \cos \alpha \cdot x,$$

also die ganze Wand das Moment

$$M = \int_0^b \gamma a x (b - x) \cos \alpha dx$$

auszuhalten hat. Es ist demnach

$$\begin{aligned} M &= \gamma a \cos \alpha \left[\frac{b}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^b = \gamma \frac{a b^3}{6} \cos \alpha \\ &= \frac{\gamma a}{6} \cdot \frac{8G \sqrt{G}}{\gamma a \cdot \sqrt{\gamma a}} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^3 2\alpha}} = \frac{G}{3} \sqrt{\frac{2G}{\gamma a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin^3 \alpha \cos \alpha}}. \end{aligned}$$

Wir sehen, daß dieses Moment am kleinsten wird für einen Winkel α , für welchen $\sin^3 \alpha \cos \alpha$ ein Maximum ist. Um dieses zu bestimmen, bilden wir

$$\frac{d(\sin^3 \alpha \cos \alpha)}{d\alpha} = 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^4 \alpha = 0;$$

aus dieser Gleichung folgt $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[4]{3}$, also $\alpha = 60^\circ$. Das kleinste Moment, das die Flüssigkeitsmenge G überhaupt ausüben kann, ist demnach

$$M_{\min} = \frac{4}{27} G \cdot \sqrt{\frac{6G}{\gamma a}} \cdot \sqrt[4]{3}.$$

b) Hat der Querschnitt des Gefäßes die Gestalt eines Trapezes von den Abmessungen der Abb. 143, und ist z die Tiefe der in ihm enthaltenen Wassermenge vom Gewichte G , so ist nach a) der Druck auf die schräge Seitenfläche

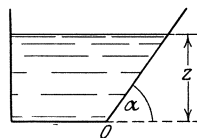


Abb. 143.

$$D = \frac{1}{2} \gamma \cdot a \cdot \frac{z^2}{\sin \alpha},$$

wobei sich α aus der Gleichung bestimmt:

$$G = \gamma a \cdot \frac{z}{2} (2b + z \operatorname{ctg} \alpha).$$

Eliminiert man α , so ergibt sich

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 a^2 z^4 + 4(G - \gamma a b z)^2}.$$

Der Druck hängt also, wie schon vorauszusehen war, von der durch den Neigungswinkel α bestimmten Wassertiefe z ab; er ist am kleinsten für den Wert z , den man aus der Gleichung $\frac{dD}{dz} = 0$ erhält. Er ist bestimmt durch die Gleichung

$$z^3 + 2b^2 z - 2\frac{Gb}{\gamma a} = 0. \quad (\text{Ableiten!})$$

Das Druckmoment um O ist

$$M = \frac{1}{3} D \frac{z}{\sin \alpha} = \frac{1}{6} \gamma a \frac{z^3}{\sin^2 \alpha},$$

wie der Leser durch Integration selbst finden möge.

$$M = \frac{1}{6\gamma a z} [\gamma^2 a^2 z^4 + 4(G - \gamma a b z)^2].$$

M wird am kleinsten, wenn $\frac{dM}{dz} = 0$, also

$$z^4 + \frac{4}{3} b^2 z^2 + \frac{4G^2}{3\gamma^2 a^2} = 0, \quad z = \sqrt{\frac{2}{3} \left[\sqrt{b^4 + \frac{3G^2}{\gamma^2 a^2} - b^2} \right]} \text{ ist.}$$

c) In ein halbkugelförmiges, mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß wird eine Zwischenwand OA eingefügt; der auf sie ausgeübte Druck ist zu ermitteln. Nach a) ist

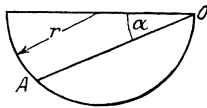


Abb. 144.

$$D = \gamma \cdot \pi r^2 \cos^2 \alpha \cdot r \cos \alpha \sin \alpha = \gamma \pi r^3 \cos^3 \alpha \sin \alpha.$$

D wird ein Maximum für

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{3}, \quad \text{also} \quad \alpha = 30^\circ;$$

$$D_{\max} = \frac{2}{15} \gamma \pi r^3 \sqrt{3}.$$

Die Tiefe ζ des Druckmittelpunktes berechnet sich nach d), da $z_s = r \cos \alpha \sin \alpha$ und nach (96) Beispiel g) S. 263 $\varrho = \frac{r}{2} \cos \alpha$ ist, zu

$$\zeta = r \cos \alpha \sin \alpha + \frac{r^2 \cos^2 \alpha}{4 r \cos \alpha \sin \alpha} \sin^2 \alpha = \frac{5}{4} r \cos \alpha \sin \alpha;$$

also liegt der Druckmittelpunkt am tiefsten, wenn $\alpha = 45^\circ$ ist,

$$\zeta_{\max} = \frac{5}{8} r.$$

(100) G. Ermittlung der Ausflußzeiten. Ein Gefäß sei bis zu einer bestimmten Höhe h mit Wasser gefüllt; es besitze am Boden eine Öffnung A vom Flächeninhalte f , durch welche das Wasser ausfließt. Die Zeit t , die das Wasser braucht, bis der Wasserspiegel eine Höhe x erreicht hat, ist — bei Zugrundelegung des Torricellischen Gesetzes $v = \sqrt{2gx}$ — wesentlich abhängig von der Gestalt des Gefäßes. Hat der in der Höhe x durch das Gefäß gelegte wagerechte Querschnitt den Flächeninhalt y , so vermindert sich der Wassergehalt J des Gefäßes

bei einer Senkung des Spiegels um dx um den Betrag $y \cdot dx$; dieser fließt durch die Öffnung A ab. Da das Wasser durch diese mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gx}$ strömt, also im Zeitelement dt durch A die Wassermenge

$$f \cdot v \cdot dt = f \cdot \sqrt{2gx} dt$$

abfließt, welche entgegengesetzt gleich der oben gefundenen Wassermenge $y \cdot dx$ sein muß, so ist

$$dt = - \frac{y}{f\sqrt{2gx}} dx \quad (1)$$

Folglich liefert die Formel

$$t = - \frac{1}{f\sqrt{2g}} \int_h^x \frac{y}{\sqrt{x}} dx \quad a)$$

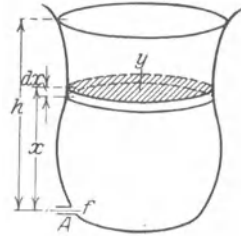


Abb. 145.

die Zeit, welche benötigt wird, damit der Spiegel von der Höhe h auf die Höhe x sinkt, und demnach ist

$$T = - \frac{1}{f\sqrt{2g}} \int_h^0 \frac{y}{\sqrt{x}} dx \quad b)$$

die Ausflußzeit des Wassers aus dem Gefäße.

Beispiele. a) Ist das Gefäß zylindrisch, also $y = \pi a^2$, wenn a der Grundkreishalbmesser des Zylinders ist, so ist

$$t = - \frac{\pi a^2}{f\sqrt{2g}} [2\sqrt{x}]_h^0$$

oder

$$t = \frac{2\pi a^2}{f\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{x}) = \frac{2J}{hf\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{x}),$$

wobei J der ursprüngliche Wasserinhalt des Gefäßes ist. Demnach ist nach Verlauf der Zeit t der Wasserspiegel auf die Höhe

$$x = \left(\sqrt{h} - \frac{hf\sqrt{2g}}{2J} t \right)^2$$

gesunken; die Ausflußzeit beträgt

$$T = \frac{2J}{hf\sqrt{2gh}}$$

b) Hat das Gefäß die Gestalt eines Kreis-
kegelstumpfes, wie ihn Abb. 146 im Achsen-
schnitt darstellt, so ist

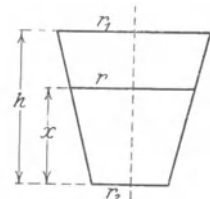


Abb. 146.

$$r = r_2 + \frac{r_1 - r_2}{h} x, \quad \text{also} \quad y = \pi \left(r_2 + \frac{r_1 - r_2}{h} x \right)^2.$$

1) Das Minuszeichen ist in dem Umstande begründet, daß die Wassermenge $y dx$ eine Verminderung des Inhaltes des Gefäßes, dagegen die Wassermenge $f \cdot \sqrt{2gx} dt$ eine Vermehrung des ausgeflossenen Wassers bedeutet,

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} t &= -\frac{\pi}{f\sqrt{2g}} \int_h^x \left(\frac{r_2^2}{\sqrt{x}} + 2 \frac{r_2(r_1-r_2)}{h} \sqrt{x} + \left(\frac{r_1-r_2}{h} \right)^2 x \sqrt{x} \right) dx \\ &= -\frac{\pi}{f\sqrt{2g}} \left[2r_2^2 \sqrt{x} + \frac{4}{3} \frac{r_2(r_1-r_2)}{h} x \sqrt{x} + \frac{2}{5} \left(\frac{r_1-r_2}{h} \right)^2 x^2 \sqrt{x} \right]_h^x \\ &= \frac{2\pi}{15f\sqrt{2g}} \left[\sqrt{h} (3r_1^2 + 4r_1r_2 + 8r_2^2) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{x} \left(15r_2^2 + 10r_2(r_1-r_2) \frac{x}{h} + 3(r_1-r_2)^2 \frac{x^2}{h^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mithin ist

$$T = \frac{2\pi\sqrt{h}}{15f\sqrt{2g}} (3r_1^2 + 4r_1r_2 + 8r_2^2).$$

Ist $r_2 = 0$, also das Gefäß ein gerader Kreiskegel, dessen Spitze nach unten gerichtet ist, so beträgt die Ausflußzeit

$$T = \frac{2\pi\sqrt{h}}{5f\sqrt{2g}} r_1^2 = \frac{6J}{5f\sqrt{2gh}}.$$

Ist dagegen die Spitze nach oben gekehrt ($r_1 = 0$), so ist

$$T = \frac{16\pi\sqrt{h}}{15f\sqrt{2g}} r_2^2 = \frac{16}{5} \frac{J}{f\sqrt{2gh}};$$

sie ist also größer als im ersten Falle, nämlich das $\frac{8}{3}$ fache.

c) Man zeige, daß die Ausflußzeit aus einem kugelförmigen Gefäße, dessen Halbmesser r ist,

$$T = \frac{4}{5} \frac{J}{f\sqrt{gr}}$$

beträgt, ferner, daß sie sich für ein zylindrisches Gefäß vom Grundkreisradius r , wobei aber die Zylinderachse horizontal liegt, auf

$$T = \frac{4}{3} \frac{J}{f\sqrt{\pi qr}}$$

beläuft.

Sowohl die hier behandelte Integralrechnung als auch die Differentialrechnung erlauben noch viele fruchtbare Anwendungen, besonders auf Kurven und Flächen. Hierzu müssen wir aber erst Wesen und Verfahren der **analytischen Geometrie** auseinandersetzen und diese in Verbindung mit der Infinitesimalrechnung auf Kurven und Flächen im allgemeinen anwenden, wobei wir besonders den technisch wichtigen unser Augenmerk zuwenden wollen.

Analytische Geometrie der Ebene.

§ 1. Die Koordinatensysteme.

(101) Die analytische Geometrie hat es zu tun mit der Darstellung geometrischer Gebilde und Beziehungen durch algebraische Mittel und der Lösung geometrischer Aufgaben auf rechnerischem Wege. Zu diesem Zwecke sind in erster Linie die geometrischen Grundgebilde, die Punkte, durch Zahlen eindeutig darzustellen. Wir wollen zunächst den einfachsten Fall betrachten, daß die Punkte sämtlich auf einer Geraden angeordnet sind.

A. Punkte auf einer Geraden. Um einen Punkt P auf der Geraden g (Abb. 147) festzulegen, wählt man auf g einen festen Punkt O , den Anfangspunkt, Ursprung, Nullpunkt. O teilt g in zwei Strahlen, die zwei entgegengesetzte Richtungen bestimmen. Diese beiden Richtungen sollen durch Vorzeichen unterschieden werden, und zwar wollen wir den nach rechts gerichteten Strahl in Abb. 147 als den positiven, den nach links gerichteten als den negativen Strahl bezeichnen. Schließlich

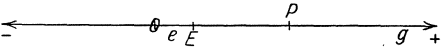


Abb. 147.

wählen wir eine bestimmte Strecke $OE = e$ als die Einheitsstrecke. Jetzt können wir jedem Punkte P der Geraden eine Zahl zuordnen, nämlich die Zahl, die angibt, wie oft sich die Einheitsstrecke e auf OP auftragen läßt. Enthält OP x Einheiten, so nennt man x die Abszisse des Punktes P . x kann alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, und zwar ist x positiv, sobald P auf dem positiven Strahle, dagegen negativ, wenn P auf dem negativen Strahle liegt, oder wenn man von O nach P in positiver bzw. negativer Bewegungsrichtung gelangt. Praktische Anwendung finden diese Festsetzungen an vielen Apparaten, z. B. bei den Thermometern. Hier hat man ebenfalls einen festen gewählten Nullpunkt, eine positive und eine negative Richtung und eine feste Einheit, die als ein Temperaturgrad bezeichnet wird.

Zu jedem Punkte P gehört somit stets ein, aber auch nur ein Zahlenwert x , die Abszisse, und umgekehrt gehört zu jeder beliebigen Zahl x stets ein, aber auch nur ein Punkt P , dessen Abszisse gleich x ist.

Wir können nun leicht die Länge von Strecken, die sich auf g befinden, bestimmen. Sind nämlich die Abszissen x_1 und x_2 zweier Punkte P_1 und P_2 gegeben, so ist auch ihre Entfernung P_1P_2 bestimmt und muß sich aus x_1 und x_2 berechnen lassen. Da nun die Abszissenachse eine bestimmte Richtung hat, kommt jeder Strecke auf ihr ebenfalls eine solche zu. Versteht man bei der Strecke P_1P_2 ein Durchlaufen von P_1 (Anfangspunkt) nach P_2 (Endpunkt), so folgt sofort, daß P_1P_2 und P_2P_1 nicht identisch, sondern entgegengesetzt gleich sind: $P_2P_1 = -P_1P_2$. Aus diesem Grunde ist auch, wenn P_1 die Abszisse x_1 hat, $OP_1 = x_1$, dagegen $P_1O = -(OP_1) = -x_1$. Wie auch die Punkte P_1 und P_2 auf g liegen mögen, stets wird der Abstand P_1P_2 dargestellt durch $x_2 - x_1$. So ist in Abb. 148

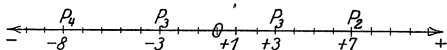


Abb. 148.

$$\begin{array}{ll}
 P_1P_2 = +7 - (+3) = +4, & P_3P_1 = +3 - (-3) = +6, \\
 P_1P_3 = -3 - (+3) = -6, & P_3P_2 = +7 - (-3) = +10, \\
 P_1P_4 = -8 - (+3) = -11, & P_3P_4 = -8 - (-3) = -5, \\
 P_2P_1 = +3 - (+7) = -4, & P_4P_1 = +3 - (-8) = +11, \\
 P_2P_3 = -3 - (+7) = -10, & P_4P_2 = +7 - (-8) = +15, \\
 P_2P_4 = -8 - (+7) = -15, & P_4P_3 = -3 - (-8) = +5.
 \end{array}$$

Wir erkennen, daß das Ergebnis stets die Strecke nach Vorzeichen und Größe richtig angibt.

Die Länge einer Strecke erhält man, indem man von der Abszisse des Endpunktes die Abszisse des Anfangspunktes abzieht.

Weiter ist

$$P_1P_2 + P_2P_3 = x_2 - x_1 + x_3 - x_2 = x_3 - x_1$$

oder

$$P_1P_2 + P_2P_3 = P_1P_3. \quad 2)$$

Die Länge eines zusammenhängenden Streckenzuges auf einer Geraden erhält man, wenn man von der Abszisse des Endpunktes die Abszisse des Anfangspunktes subtrahiert.

Wählt man einen neuen Nullpunkt O' , der bezüglich des alten Nullpunktes O die Abszisse $OO' = a$ hat (Abb. 149), so gehören zu einem bestimmten Punkte P zwei Abszissen x und x' ; x beziehe sich auf den Nullpunkt O , x' auf O' . Es ist also $OP = x$, $O'P = x'$. Nun ist für jede Lage der drei

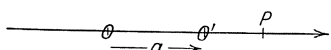


Abb. 149.

Punkte O, O', P nach 2)

$$OP = OO' + O'P$$

oder

$$x = a + x' \quad \text{und} \quad x' = x - a. \quad 3)$$

Verschiebt man den Nullpunkt um die Strecke a , so ist die alte Abszisse eines beliebigen Punktes gleich der Summe aus der Abszisse a des neuen Nullpunktes und der neuen Abszisse des betreffenden Punktes.

(102) Eine zweite Möglichkeit, einen Punkt P auf der Geraden g durch eine Zahl festzulegen, eröffnet folgender Weg (Abb. 150). Man

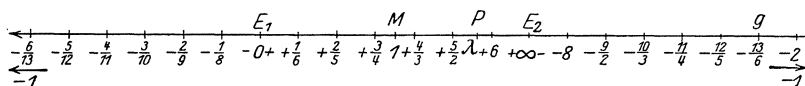


Abb. 150.

wählt auf g zwei feste Punkte E_1 und E_2 , die sog. Festpunkte. Dann soll zu dem Punkte P das Verhältnis

$$\lambda = \frac{E_1 P}{P E_2} \quad 4)$$

gehören; λ heißt das **Teilverhältnis** des Punktes P . In Abb. 150 sind an eine Anzahl von Punkten die Teilverhältnisse angeschrieben, und man erkennt, daß zu jedem Punkte ein und nur ein solches Teilverhältnis λ gehört, und daß umgekehrt zu jeder Zahl λ ein und nur ein Punkt gehört, dessen Teilverhältnis gleich λ ist. Wandert P von E_1 bis zum Mittelpunkt M von $E_1 E_2$, so ist λ beständig positiv und ein echter Bruch, wächst also von 0 bis 1; wandert P von M bis E_2 , so ist λ beständig positiv und ein unechter Bruch, wächst also von 1 bis $+\infty$; wandert P über E_2 hinaus, so ist λ stets negativ (da $P E_2$ negativ ist) und ein unechter Bruch, wächst also von $-\infty$ bis -1 ; nähert sich dagegen P aus unendlicher Ferne von links dem Punkte E_1 , so ist λ stets negativ (da $E_1 P$ negativ ist) und ein echter Bruch, wächst also von -1 bis 0. Dem Punkte E_1 kommt das Teilverhältnis $\lambda = 0$, dem Punkte M das Teilverhältnis $\lambda = 1$ zu. Der Punkt E_2 scheint zwei Teilverhältnisse zu besitzen, nämlich $\lambda = +\infty$, wenn man sich ihm von E_1 aus, und $\lambda = -\infty$, wenn man sich ihm von der anderen Seite her nähert. Das würde aber mit der Forderung im Widerspruche stehen, daß zu jedem Punkte nur ein einziges Teilverhältnis λ gehört. Wir vermeiden diesen Widerspruch dadurch, daß wir $+\infty$ mit $-\infty$ identifizieren [vgl. (45) S.105; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \pm \infty$]. Ebenso scheint es zwei Punkte zu geben, die das Teilverhältnis -1 besitzen, nämlich der linke und der rechte unendlich ferne Punkt von g . Auch dieses würde im Widerspruche zu der Forderung stehen, daß zu jedem Teilverhältnis nur ein Punkt gehört. Diesen

Widerspruch vermeiden wir dadurch, daß wir festsetzen: Die Gerade hat nur einen (uneigentlichen) unendlich fernen Punkt, eine Vorstellung, die uns verständlich wird, wenn wir g als den Grenzfall eines Kreises, der ja eine geschlossene Linie ist, auffassen, dessen Halbmesser über alle Grenzen hinaus wächst.

Erwähnt werden möge, daß dieser Begriff des Teilverhältnisses praktische Bedeutung gewinnt bei Messung des elektrischen Widerstandes eines Leiters durch die Wheatstonesche Brücke.

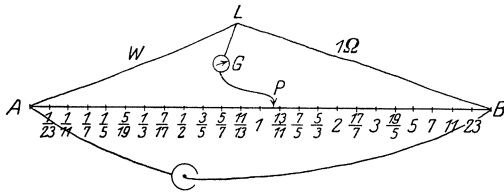


Abb. 151.

Um nämlich den Widerstand w des Leitungsstückes AL mit dem des Leitungsstückes LB , der 1Ω betragen möge, zu vergleichen, gleitet man mit dem Ende P der Leitung LP , in die ein Galvanometer G eingeschaltet ist, so lange auf

der Leitungsschiene AB entlang, bis das Galvanometer auf Null weist, d. h. die Leitung LP stromlos ist. Dann ist $w:1\Omega = AP:PB$.

Da $\lambda = \frac{AP}{PB}$ das Teilverhältnis des Punktes P auf der Strecke AB ist, so ist $w = \lambda \cdot \Omega$. Schreibt man also an die einzelnen Punkte die Teilverhältnisse an, so kann man ohne weiteres den Widerstand von AL auf der Brücke ablesen.

(103) Wir haben somit zwei Verfahren kennengelernt, um einen Punkt P auf der Geraden durch eine Zahl eindeutig festzulegen: das Abszissenverfahren und das Verfahren des Teilverhältnisses λ . Hieraus folgt, daß man aus der Abszisse eines Punktes auch sein Teil-

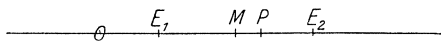


Abb. 152.

verhältnis berechnen kann und umgekehrt. Ist in Abb. 152 O der Nullpunkt, und sind x_1 und x_2 die Abszissen der beiden

Festpunkte E_1 und E_2 , ferner $OP = x$ die Abszisse des beliebigen Punktes P und λ sein Teilverhältnis, so muß gelten

$$\frac{E_1P}{PE_2} = \frac{E_1O + OP}{PO + OE_2} = \frac{-x_1 + x}{-x + x_2},$$

also

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}. \tag{5 a)}$$

Formel 5 a) berechnet das Teilverhältnis λ von P aus der Abszisse x von P . Lösen wir 5 a) nach x auf, so erhalten wir

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{5 b)}$$

5 b) berechnet umgekehrt aus dem Teilverhältnis λ die Abszisse x .

Da für den Mittelpunkt M der Strecke E_1E_2 das Teilverhältnis gleich 1 ist, so ist die Abszisse von M nach 5 b)

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{1 + 1}, \quad x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Die Abszisse des Mittelpunktes einer Strecke ist das arithmetische Mittel aus den Abszissen ihrer Endpunkte. (Leite dieses Ergebnis unmittelbar aus der Abbildung ab!)

Aufgabe: Es sei

- a) $x_1 = 7, \quad x_2 = 20;$ b) $x_1 = -5, \quad x_2 = 8;$
 c) $x_1 = 5, \quad x_2 = -7;$ d) $x_1 = 18, \quad x_2 = 8;$
 e) $x_1 = -3, \quad x_2 = -15.$

Suche durch Rechnung und Zeichnung die Teilverhältnisse der Punkte mit den Abszissen

$$x = 0, \quad 4, \quad 10, \quad 25, \quad -1, \quad -7, \quad -13, \quad -24.$$

Suche durch Rechnung und Zeichnung die Abszissen der Punkte, deren Teilverhältnis

$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1, \quad 2, \quad 7, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -0,4, \quad -2, \quad -4, \quad -6$ ist. (100 Aufgaben.)

(104) **B. Der Punkt in der Ebene.** Um einen Punkt in der Ebene festzulegen, kann man ebenfalls verschiedene Wege einschlagen; die zwei wichtigsten sollen hier behandelt werden. Man wählt (Abb. 153) einen festen Punkt O , den Koordinatenanfangspunkt, Ursprung, Nullpunkt, und zieht durch ihn zwei Geraden, die Koordinatenachsen, die einen Winkel ω , den Koordinatenwinkel, miteinander einschließen mögen. Die eine Achse, die meist horizontal gelegt wird, wird als Abszissenachse, gewöhnlich x -Achse, die andere, deren Lage nun durch ω bestimmt ist, als die Ordinatenachse, gewöhnlich y -Achse, bezeichnet. Beide werden durch O in zwei Strahlen zerlegt, die man durch das Vorzeichen unterscheidet. Dabei wählt man im allgemeinen auf der Abszissenachse die nach rechts weisende, auf der Ordinatenachse die nach oben weisende als positive Richtung. Schließlich wählt man für beide Achsen eine bestimmte Längeneinheit.

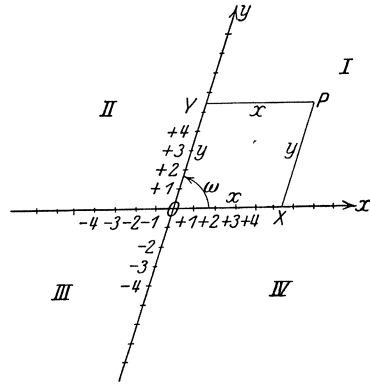


Abb. 153.

Um einen Punkt P festzulegen, zieht man durch ihn zu den beiden Achsen die Parallelen PX und PY ; man nennt die Strecke $OX = YP = x$ die Abszisse und die Strecke $OY = XP = y$ die Ordinate von P ; beide führen den gemeinsamen Namen Koordinaten des Punktes P . Die Beziehung zwischen Punktlage und Wertepaar der Koordinaten ist, wie man sich leicht überzeugt, eindeutig. Zu jedem Punkte P gehört ein und nur ein Wertepaar $x|y$; und zu jedem Wertepaare $x|y$ ein und nur ein Punkt P . Wie auf der Geraden eine Zuordnung zwischen Punkt und einer Zahl (Abszisse) besteht, so in der Ebene Zuordnung zwischen Punkt und einem Zahlenpaar. Ein System, das erlaubt, einen Punkt durch Koordinaten festzulegen, heißt ein Koordinatensystem. In unserem Falle bedarf es der durch den Punkt gehenden Parallelen, um seine Koordinaten zu finden; man nennt daher dieses System ein **Parallelkoordinatensystem**. Der gebräuchlichste Sonderfall nimmt als Koordinatenwinkel ω den rechten Winkel; bei ihm stehen also die beiden Koordinatenachsen aufeinander senkrecht. In diesem Falle nennt man das Parallelkoordinatensystem rechtwinklig oder spricht kurzweg von einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Ist $\omega \neq 1R$, so heißt das System ein schiefwinkliges Parallelkoordinatensystem. Die beiden Koordinatenachsen zerlegen die Ebene in vier Teile, Quadranten genannt, die mit den Nummern I bis IV versehen werden. Und zwar wird der erste Quadrant von der positiven Abszissen- und positiven Ordinatenshalbachse begrenzt, der zweite von der positiven Ordinatens- und der negativen Abszissenhalbachse, der dritte von der negativen Abszissen- und der negativen Ordinatenshalbachse und der vierte von der negativen Ordinatens- und der positiven Abszissenhalbachse begrenzt. Über die Vorzeichen der Koordinaten eines beliebigen Punktes gibt für die einzelnen Quadranten die nachstehende Tafel Auskunft, deren

Richtigkeit durch einfache Überlegung bestätigt wird:

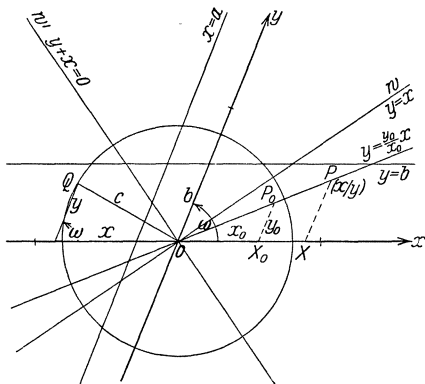


Abb. 154.

	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

Einige Anwendungen der Parallelkoordinaten mögen folgen (s. Abb. 154).

Jedem Punkte der x -Achse kommt die Eigenschaft zu, daß seine Ordinate den Wert Null hat; umgekehrt ist $y = 0$ die

Bedingung dafür, daß der Punkt auf der x -Achse liegt; $y = 0$ wird daher die Gleichung der x -Achse genannt. Entsprechend findet man als Gleichung der y -Achse $x = 0$. Man sieht weiter, daß die Gleichung $y = b$ von den Ordinaten aller derjenigen Punkte erfüllt wird, welche auf derjenigen Parallelen zur x -Achse liegen, die auf der y -Achse das Stück b abschneiden; man nennt daher $y = b$ die Gleichung dieser Parallelen. Man deute die Gleichung $x = a$.

Der Punkt P_0 habe die Koordinaten x_0 und y_0 ; irgendein Punkt P auf der Geraden OP_0 möge die Koordinaten x und y haben. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $OX P$ und $OX_0 P_0$ folgt ohne weiteres, daß $y : x = y_0 : x_0$ ist; folglich ist $y = \frac{y_0}{x_0} \cdot x$ die Gleichung der Geraden OP_0 , da sie von den Koordinaten eines jeden Punktes dieser Geraden erfüllt wird. Man beweise, daß $y - x = 0$ die Gleichung der Halbierenden w des Koordinatenwinkels ω und seines Scheitelwinkels, und daß $y + x = 0$ die Gleichung der Halbierenden w' des Nebenwinkels zu ω ist. Man überzeuge sich weiter, daß jede durch O gehende Gerade eine Gleichung von der Form $y = Ax$ hat; beispielsweise suche man Punkte, deren Koordinaten die Gleichung $y = \frac{3}{2}x$ oder die Gleichung $y + 2x = 0$ erfüllen. Diese Betrachtungen gelten für jedes Parallelkoordinatensystem, ob es nun schiefwinklig oder rechtwinklig ist. Im folgenden wollen wir uns auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem beschränken.

In Abb. 155 ist um O ein Kreis vom Halbmesser c geschlagen; auf ihm liege der Punkt $P(x|y)$. Welche Bedingung müssen seine Koordinaten erfüllen? Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $OX P$ folgt ohne weiteres

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

Diese Gleichung wird von den Koordinaten jedes Punktes dieser Kreislinie erfüllt, wie man sich leicht überzeugt; man nennt daher die Gleichung

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad 6)$$

die Gleichung des Kreises, und zwar, weil der Mittelpunkt des Kreises mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt, die Mittelpunktsgleichung des Kreises vom Halbmesser c .

Diese Mittelpunktsgleichung für den Kreis gilt nur im rechtwinkligen Koordinatensystem. Im schiefwinkligen Koordinatensystem lautet die Gleichung, wie leicht mittels des Kosinussatzes nachzuweisen ist (s. Abb. 154),

$$x^2 + 2xy \cos \omega + y^2 = c^2.$$

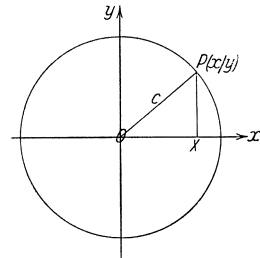


Abb. 155.

(Mittelpunktsgleichung des Kreises im schiefwinkligen Koordinatensystem.) Im Anschlusse hieran suche man durch punktweise Konstruktion die Gestalt der Kurve zu ermitteln, deren Gleichung im schiefwinkligen Koordinatensystem $x^2 + y^2 = c^2$ lautet.

Man konstruiere, sowohl im rechtwinkligen als auch im schiefwinkligen Koordinatensystem, punktweise die Kurven von der Gleichung

$$x^2 + 2y^2 = c^2, \quad x^2 - y^2 = c^2, \quad x^2 - 2y^2 = c^2, \quad y^2 - x^2 = c^2.$$

Dabei ist zu beachten, daß man unter der Gleichung einer Kurve eine Gleichung versteht, die von den Koordinaten aller Punkte der Kurve erfüllt wird.

(105) Einen anderen Weg, Punkte in der Ebene eindeutig festzulegen, eröffnet das **Polarkoordinatensystem**. Wir wählen in der Ebene einen festen Punkt O , den Nullpunkt, Ursprung, Pol, und von ihm ausgehend einen Strahl (im allgemeinen wagerecht nach rechts), den Anfangsstrahl. Um einen Punkt P der Ebene festzulegen, verbinden wir O mit P ; die Strecke $OP = r$ heißt der Leitstrahl, Radiusvektor, Fahrstrahl von P , und der Winkel ϑ , um den man den Anfangsstrahl drehen muß, bis er mit OP zusammenfällt, heißt die Amplitude oder Anomalie von P . Man hat die Drehung entgegen dem Uhrzeigersinne als positive Drehung festgelegt und bezeichnet daher umgekehrt die Uhrzeigerdrehung als negative. Die Amplitude ϑ kann also alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Der Leitstrahl dagegen wird, wenn nicht besonderer Anlaß vorhanden ist, ohne Vorzeichen eingeführt; er ist im allgemeinen eine absolute Größe.

Es ist ohne weiteres verständlich, daß zu einem gegebenen Wertepaare r und ϑ sich stets ein und auch nur ein Punkt P finden läßt; r und ϑ heißen seine Polarkoordinaten. Zur Übung suche man die Punkte mit den Polarkoordinaten

- a) $r = 3 \text{ cm}$, $\vartheta = 45^\circ$; b) $r = 12 \text{ cm}$, $\vartheta = 172^\circ$;
 c) $r = 7 \text{ cm}$, $\vartheta = 225^\circ$; d) $r = 8 \text{ cm}$, $\vartheta = 427^\circ$;
 e) $r = a$, $\vartheta = -53^\circ$; f) $r = b$, $\vartheta = 4$ (Bogenmaß!)...

Andererseits gehört zu einem bestimmten Punkte P zwar stets ein und auch nur ein Leitstrahl $r = OP$ (r absolut vorausgesetzt), aber unendlich viele Amplituden. Um beispielsweise in Abb. 156 den Anfangsstrahl mit OP zur Deckung zu bringen, können wir ihn um den Winkel ϑ drehen; wir können ihn aber auch um den Winkel ϑ' drehen, also eine volle Drehung mehr ausführen; ebenso können wir beliebig viele Volldrehungen hinzu-

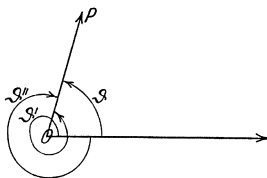


Abb. 156.

fügen. Auch durch Drehungen im negativen Sinne (s. ϑ'') läßt sich die Lage von OP erreichen. Alle diese unendlich vielen Drehwinkel sind Amplituden zu P ; sie stehen aber in engem Zusammenhang untereinander. Ist nämlich eine Amplitude ϑ bekannt, so ist jede andere Amplitude von P von der Form

$$\vartheta + k \cdot 360^\circ \quad \text{bzw.} \quad \vartheta + 2k\pi,$$

je nachdem ob man die Amplituden im Gradmaß oder im Bogenmaß mißt; k ist hierbei irgendeine positive oder negative ganze Zahl. In Abb. 156 ist

$$\vartheta = 75^\circ, \quad \vartheta' = 75^\circ + 1 \cdot 360^\circ = 435^\circ,$$

$$\vartheta'' = 75^\circ + (-1) \cdot 360^\circ = -285^\circ$$

oder im Bogenmaß

$$\vartheta = \frac{5}{12}\pi, \quad \vartheta' = \frac{5}{12}\pi + 1 \cdot 2\pi = 2\frac{5}{12}\pi = \frac{29}{6}\pi,$$

$$\vartheta'' = \frac{5}{12}\pi + (-1) \cdot 2\pi = -\frac{19}{6}\pi.$$

Jede Gleichung zwischen r und ϑ stellt die Gleichung einer Kurve dar; hierbei ist die Kurve die Gesamtheit aller Punkte, deren Polarkoordinaten r und ϑ diese Gleichung erfüllen. Einige einfache Beispiele mögen dies näher erläutern.

a) Die Gleichung $r = a$ wird von allen Punkten erfüllt, für welche der Leitstrahl, welches auch die Amplitude sei, die Länge a hat; alle diese Punkte liegen aber auf dem um O mit dem Halbmesser $r = a$ geschlagenen Kreise. Folglich ist $r = a$ die Gleichung dieses Kreises.

b) Der Gleichung $\vartheta = \alpha$ genügen alle Punkte, für welche, wie groß auch der Leitstrahl sein mag, die Amplitude die Größe α hat; diese Punkte liegen aber sämtlich auf dem von O ausgehenden Strahle, der mit dem Anfangsstrahle den Winkel α einschließt. Folglich ist $\vartheta = \alpha$ die Gleichung dieses Strahles.

c) Die einfachste Gleichung, die zwischen r und ϑ besteht, ist die lineare Gleichung

$$r = a \cdot \vartheta; \tag{7}$$

sie sagt aus, daß der Leitstrahl proportional der Amplitude zunimmt. Für $\vartheta = 0$ ist $r = 0$; d. h. der Nullpunkt ist selbst ein Punkt der Kurve. Mit wachsendem ϑ entfernt sich der zugehörige Punkt immer mehr vom Nullpunkt. Nach einem Umlauf, d. h. für $\vartheta = 2\pi$ ist $r = 2\pi a = b$. Die Kurve (Abb. 157) heißt die Archimedische Spirale; sie schneidet jeden Leitstrahl in unendlich vielen Punkten, die um die Strecke b voneinander absteht. Berücksichtigt man auch negative Amplituden, so muß man auch negative Leitstrahlen einführen; so ist für $\vartheta = -\frac{b}{3}$.

$$r = -\frac{1}{3}\pi a = -\frac{b}{6}.$$

Diese Strecke ist aber nicht auf dem zu $\vartheta = -\frac{\pi}{3}$ gehörigen Strahle, sondern auf seiner Rückwärtsverlängerung über O hinaus abzutragen; man gelangt so zu dem Punkte P' in Abb. 157. Auf diese Weise wird die Archimedische Spirale selbst über O hinaus verlängert; der zu negativen Amplituden gehörige Kurvenzweig ist in der Abbildung gestrichelt angedeutet. Man erkennt, daß sich die Archimedische Spirale unendlich oft selbst überschneidet; diese Schnittpunkte sind alle auf der durch O gehenden Normalen zum Anfangsstrahle verteilt. Weiteres über diese Kurve siehe später S. 405.

(106) Da sich ein bestimmter Punkt in der Ebene sowohl durch Parallelkoordinaten als auch durch Polarkoordinaten eindeutig festlegen läßt, muß es möglich sein, die einen aus den anderen abzuleiten. Besonders einfach werden diese Formeln, wenn wir ein recht-

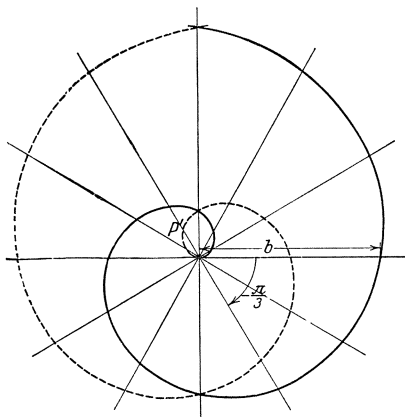


Abb. 157.

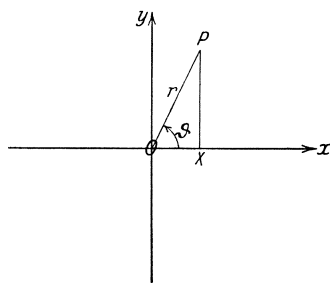


Abb. 158.

winkliges Parallelkoordinatensystem der Betrachtung zugrunde legen. Wir wählen dabei die gegenseitige Lage der beiden Koordinatensysteme so, daß ihre Nullpunkte aufeinanderfallen und der Anfangsstrahl des Polarkoordinatensystems sich mit der positiven Abszissenachse deckt (Abb. 158). Es ist dann für jede Lage des Punktes P

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta. \quad 8)$$

Die Formeln 8) lehren, aus den Polarkoordinaten r und ϑ die rechtwinkligen Koordinaten x und y zu finden. Ferner ist

$$r = \sqrt{y^2 + x^2}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}, \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad 9)$$

Die Formeln 9) lehren umgekehrt, aus den rechtwinkligen Koordinaten x und y die Polarkoordinaten r und ϑ zu finden, nur seien zu 9) noch einige Bemerkungen hinzugefügt.

Die Quadratwurzel ist — soweit sich nicht das Gegenteil als notwendig erweist — stets absolut (ohne Vorzeichen) zu nehmen. Bei

Bestimmung des Quadranten, in dem ϑ liegt, ist sowohl das Vorzeichen von x als auch das von y zu beachten, die folgende Tabelle zeigt den Zusammenhang:

x	+	-	-	+
y	+	+	-	-
ϑ	$0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$	$\pi < \vartheta < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < \vartheta < 2\pi$

Außerdem ist zu dem auf diese Weise gefundenen Winkel ϑ zwischen 0 und 2π nach (105) noch eine Größe $2\pi k$ zu addieren (k irgendeine ganze Zahl).

Die Überführung der Koordinaten eines Systems in die eines anderen wird Koordinatentransformation, die sie vermittelnden Formeln 8) und 9) werden Transformationsformeln genannt.

Aufgaben: Welches sind die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes, dessen Polarkoordinaten lauten:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	k)
$r =$	3	4	5	6	7	8	9	10	0	10
$\vartheta =$	$37^\circ 15'$	180°	2,00	$\frac{5}{3}\pi$	-119°	$\frac{3}{2}\pi$	-4,000	700°	-10	-10

Welches sind die Polarkoordinaten des Punktes, dessen rechtwinklige Koordinaten lauten:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
$x =$	3	-5	-8	7	6	-6	7	-8
$y =$	4	12	-15	-24	-5	-7	8	3

Zeichnung und Rechnung!

Mit Hilfe der Transformationsformeln 8) und 9) sind wir in die Lage versetzt, die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten aufzustellen, wenn uns ihre Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten gegeben ist, und umgekehrt. Einige Beispiele mögen dies zeigen.

a) Wir wissen, daß die Gerade, die zur y -Achse parallel ist und auf der x -Achse das Stück a abschneidet, die Gleichung hat $x = a$ [s. (104) S. 285]. Setzen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem voraus, so können wir jetzt leicht die Transformation in Polarkoordinaten vornehmen; nach Gleichung 8) ist nämlich

$$r \cos \vartheta = a; \quad \text{also ist} \quad r = \frac{a}{\cos \vartheta}$$

die Gleichung dieser Geraden in Polarkoordinaten. Wir finden diese Gleichung in Abb. 159 bestätigt.

b) Die Scheiteltgleichung der Parabel [s. (38)] lautet $y = \sqrt{2px}$; mittels der Formeln 8) ergibt sich hieraus

$$r \sin \vartheta = \sqrt{2pr \cos \vartheta} \quad \text{oder} \quad r = 2p \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} = 2p \frac{\text{ctg} \vartheta}{\sin \vartheta}.$$

Hieraus folgt eine einfache Konstruktion von Punkten der Parabel (s. Abb. 160): Man wähle auf der Parabelachse den Punkt C , der vom

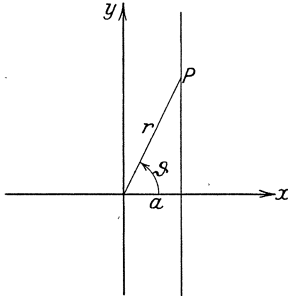


Abb. 159.

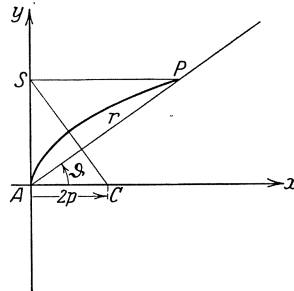


Abb. 160.

Scheitel A die Entfernung $AC = 2p$ hat, falle von ihm auf den freien Schenkel der Amplitude ϑ das Lot, das die Scheiteltangente in S schneidet, und ziehe durch S die Parallele zur Parabelachse, die den freien Schenkel von ϑ im Parabelpunkte P schneidet. Denn es ist

$$\sphericalangle ASC = \vartheta, \quad \text{also} \quad AS = 2p \text{ctg} \vartheta; \quad \sphericalangle SPA = \vartheta,$$

also

$$AP = r = \frac{AS}{\sin \vartheta} = 2p \frac{\text{ctg} \vartheta}{\sin \vartheta}.$$

§ 2. Strecken und Flächen im rechtwinkligen Koordinatensysteme. Transformation der Parallelkoordinatensysteme.

(107) Im ersten Teile dieses Paragraphen beschränken wir uns auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. In der Ebene seien zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ gegeben. Durch sie ist eine Strecke P_1P_2 bestimmt; hierbei ist mit „Strecke P_1P_2 “ die Strecke nach Größe und Richtung gemeint. Man nennt ein Gebilde, zu dessen völliger Bestimmung sowohl die Angabe seiner Größe als auch die seiner Richtung gehört, einen Vektor; eine Größe, der keine Richtung zukommt, heißt ein Skalar. In diesem Sinne ist die Strecke P_1P_2 also ein Vektor. Wir wollen sie vom Anfangspunkte P_1 nach dem Endpunkte P_2 hin durchlaufen; sie ist also durchaus verschieden von der Strecke P_2P_1 , die die entgegengesetzte Richtung hat [s. a. (101) S. 280]. Der

Richtungssinn wird (s. Abb. 161) durch einen angefügten Pfeil angedeutet.

Um die Richtung einer Strecke P_1P_2 eindeutig festzulegen, zieht man durch ihren Anfangspunkt P_1 eine Parallele zur positiven Hälfte der x -Achse und bestimmt den Winkel ϑ , um den man diese Parallele um P_1 drehen muß, damit sie mit P_1P_2 zusammenfällt. — Hieraus ergibt sich, daß die beiden Strecken P_1P_2 und P_2P_1 zwei um 180° bzw. π verschiedene Richtungswinkel ϑ und ϑ' haben; es ist $\vartheta' - \vartheta = \pi$.

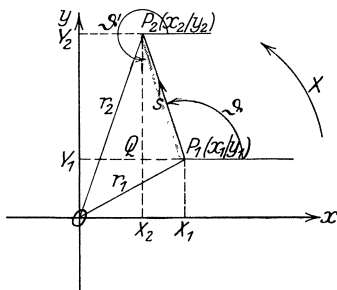


Abb. 161.

Die Strecke P_1P_2 ist durch ihren Anfangspunkt P_1 und ihren Endpunkt P_2 völlig bestimmt. Da nun diese beiden Punkte durch ihre Koordinaten $x_1|y_1$ bzw. $x_2|y_2$ ihrerseits völlig bestimmt sind, muß es möglich sein, sowohl die Größe s als auch den Richtungswinkel ϑ durch diese vier Koordinaten auszudrücken. Wir ziehen durch P_1 und P_2 die Parallelen P_1X_1 und P_2X_2 zur y -Achse und P_1Y_1 und P_2Y_2 zur x -Achse; P_1Y_1 und P_2X_2 mögen sich in Q schneiden; dann ist $P_1Q = X_1X_2$ und $QP_2 = Y_1Y_2$. Nach 1) ist aber $X_1X_2 = x_2 - x_1$ und $Y_1Y_2 = y_2 - y_1$, wie auch die beiden Punkte P_1 und P_2 zueinander liegen mögen. Daher ergibt sich für die Länge der Strecke P_1P_2 die Formel

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{10 a}$$

Weiterhin ist nach der Definition der Winkelfunktionen

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{QP_2}{P_1Q} = \frac{Y_1Y_2}{X_1X_2}, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{10 b}$$

10 b) liefert den Winkel ϑ ; hierbei ist nach dem Vorgange der Formel 9 b) zur Bestimmung des Quadranten von ϑ sowohl das Vorzeichen von $y_2 - y_1$ als auch das von $x_2 - x_1$ zu beachten.

Beispiele. Wir wollen unseren Betrachtungen das Dreieck ABC zugrunde legen, dessen Eckpunkte die Koordinaten haben:

$$A(-13|22), \quad B(23|7), \quad C(3|-8);$$

es möge, da es auch im folgenden immer wiederkehren wird, kurzweg als das Dreieck D bezeichnet werden (s. Abb. am Schluß dieses Bandes).

Es sind die Länge und die Richtung der Seiten AB , BC , CA des Dreiecks D zu berechnen.

$$(a = 25, \quad \vartheta_{BC} = 216^\circ 52' 11''; \quad b = 34, \quad \vartheta_{CA} = 118^\circ 4' 21''; \\ c = 39, \quad \vartheta_{AB} = 337^\circ 22' 48''.)$$

Es ist zu zeigen, daß der Richtungswinkel von P_2P_1 um π verschieden ist von dem Richtungswinkel P_1P_2 .

Umgekehrt kann man aus der Länge s und dem Richtungswinkel ϑ einer Strecke P_1P_2 zwar nicht die Koordinaten der beiden Punkte P_1 und P_2 , wohl aber die Differenz ihrer Abszissen und die ihrer Ordinaten berechnen nach den Formeln

$$x_2 - x_1 = s \cos \vartheta, \quad y_2 - y_1 = s \sin \vartheta. \quad (11)$$

Man addiert zwei Strecken (Vektoren), indem man sie nach Größe und Richtung aneinandersetzt, d. h. die zweite Strecke unter Beibehalten ihrer Richtung so in der Ebene verschiebt, daß ihr Anfangspunkt auf den Endpunkt der ersten Strecke fällt; die Strecke, deren Anfangspunkt der Anfangspunkt der ersten, und deren Endpunkt der Endpunkt der zweiten Strecke in ihrer neuen Lage ist, heißt die Summe der beiden ursprünglichen Strecken. Diesen Vorgang bezeichnet man als geometrische Addition. Hierbei ist die Lage der Anfangspunkte der Strecken unwesentlich, ebenso ist die Reihenfolge der Summanden ohne Belang. (S. Abb. 162: A_1B_1 die ursprüngliche

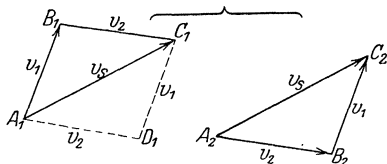


Abb. 162.

Lage des einen Summanden v_1 , A_2B_2 die ursprüngliche Lage des anderen Summanden v_2 ; es ist gleichgültig, ob man in B_1 nach Größe und Richtung $B_1C_1 = v_2$ oder in B_2 nach Größe und Richtung $B_2C_2 = v_1$ anfügt, da $A_1C_1 = A_2C_2 = v_s$ ist; man kann auch in A_1 erst $A_1D_1 = v_2$

und in D_1 dann $D_1C_1 = v_1$ anfügen. Anwendung bei Zusammensetzen von Kräften!)

In Abb. 161 heißt X_1X_2 die Projektion der Strecke (des Vektors) P_1P_2 auf die x -Achse; unter dem Neigungswinkel einer Strecke (eines Vektors) gegen einen Strahl versteht man den Winkel, um den man diesen Strahl drehen muß, bis er in die Richtung der Strecke (des Vektors) fällt oder parallel und gleichgerichtet mit ihr ist. Hiernach ist ϑ der Neigungswinkel des Vektors P_1P_2 gegen die x -Achse. Da $X_1X_2 = s \cdot \cos \vartheta$ ist [s. 11)], ergibt sich der Satz:

Man erhält die Projektion einer Strecke gegen einen Strahl, indem man die Länge der Strecke mit dem Kosinus ihres Neigungswinkels gegen diesen Strahl multipliziert.

Da man die positive y -Achse um den Winkel $\frac{3}{2}\pi$ drehen muß, bis sie mit der positiven x -Achse zusammenfällt, bedarf es der Drehung um den Winkel $\frac{3}{2}\pi + \vartheta$, bis sie parallel und gleichgerichtet mit P_1P_2

ist. Demnach ist die Projektion von $P_1 P_2$ auf die y -Achse

$$Y_1 Y_2 = s \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \vartheta\right) = s \cdot \sin \vartheta = y_2 - y_1,$$

in Übereinstimmung mit Formel 11 b).

Eine unmittelbare Folge dieser Entwicklungen ist der

Projektionssatz: Alle Linienzüge, die von einem bestimmten Anfangspunkte P_1 zu einem bestimmten Endpunkte P_2 führen, liefern auf eine beliebige Gerade dieselbe Projektion, nämlich die Projektion der Strecke $P_1 P_2$. — Die Projektion jedes geschlossenen Linienzuges auf eine beliebige Achse ist gleich Null.

Daß der Projektionssatz für einen aus Strecken bestehenden Linienzug gilt, leuchtet auf Grund der obigen Definition der Projektion einer Strecke ohne weiteres ein; da man sich einen krumm verlaufenden Linienzug, insbesondere eine Kurve, aus unendlich vielen unendlich kleinen Strecken entstanden denken kann, so gilt der Projektionssatz auch für diese.

Anwendung: Gegeben sei ein regelmäßiges n -Eck von der Seitenlänge s , dessen Mittelpunkt in O liege; die erste Seite bilde mit der x -Achse den Winkel α . Da man jede Seite um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ drehen muß, damit sie die Richtung der auf sie folgenden annimmt, bildet

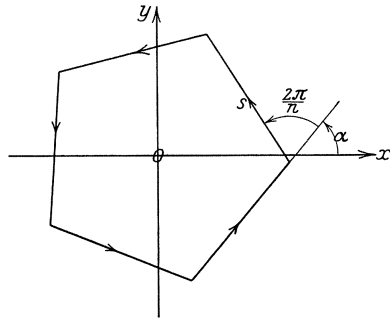


Abb. 163.

die zweite Seite mit der x -Achse den Winkel $\alpha + \frac{2\pi}{n}$, die dritte den Winkel $\alpha + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}$, ... die letzte den Winkel $\alpha + (n-1) \frac{2\pi}{n}$. Die Projektion des Umfanges des regelmäßigen n -Eckes auf die x -Achse ist also

$$s \cdot \cos \alpha + s \cdot \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + s \cdot \cos\left(\alpha + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + \dots \\ + s \cdot \cos\left(\alpha + (n-1) \frac{2\pi}{n}\right).$$

Der Linienzug ist aber geschlossen; folglich ist nach dem Projektionssatze die Projektion auf die x -Achse gleich Null, und es ergibt sich die wichtige goniometrische Formel

$$\cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = 0.$$

Aus der Projektion auf die y -Achse erhalten wir ebenso

$$\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\alpha + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\alpha + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = 0.$$

Ist $n = 3$, so folgt hieraus die in der Elektrotechnik verwendete Formel (Dreiphasenstrom):

$$\sin \alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha + 240^\circ) = 0.$$

(108) Durch die beiden Punkte P_1 und P_2 ist in Verbindung mit dem Nullpunkt O ein Dreieck (Abb. 161) OP_1P_2 bestimmt; wir wollen seinen Inhalt F berechnen. Sind ϑ_1 und r_1 die Polarkoordinaten des Punktes P_1 und ϑ_2 und r_2 die von P_2 , so ist nach dem Sinussatze

$$2F = r_1 r_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = r_1 \cos \vartheta_1 \cdot r_2 \sin \vartheta_2 - r_2 \cos \vartheta_2 \cdot r_1 \sin \vartheta_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1;$$

also

$$F = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (12)$$

Formel 12) berechnet den Flächeninhalt aus den Koordinaten der beiden Punkte P_1 und P_2 . Hierbei ist zu beachten, daß sich für F auch ein negativer Wert ergeben kann, wenn nämlich $\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) < 0$, d. h.

$$\pi < \vartheta_2 - \vartheta_1 < 2\pi \quad \text{oder} \quad 0 > \vartheta_2 - \vartheta_1 > -\pi$$

ist. Das ist dann der Fall, wenn die kürzeste Drehung, die den Vektor OP_1 in den Vektor OP_2 überführt, die negative ist. Damit erhalten wir aber ein sehr anschauliches Kennzeichen für die Entscheidung über das Vorzeichen der Fläche:

Folgen die Ecken O , P_1 , P_2 des Dreiecks OP_1P_2 so aufeinander, daß der Inhalt des Dreiecks zur linken Hand bleibt, so ist das Vorzeichen der Fläche positiv, im anderen Falle negativ.

Die tiefere Berechtigung dafür, der Dreiecksfläche ein Vorzeichen zu erteilen, wird klar, wenn wir den Vektor P_1P_2 als eine Kraft deuten. Der doppelte Inhalt des Dreiecks ist dann das Produkt aus der Grundlinie P_1P_2 und dem von O auf diese gefällten Lote, also das statische Moment oder Drehmoment der Kraft P_1P_2 bezüglich des Punktes O , und für dieses ist ein Vorzeichen sehr wohl berechtigt je nach dem Drehsinne der Kraft P_1P_2 ; sucht sie im Gegenzeigersinne zu drehen, so wird ihr Moment positiv, im anderen Falle negativ.

Wenden wir Formel 12) auf unser Dreieck D an, so finden wir für den Inhalt des Dreiecks OAB

$$F = \frac{1}{2}((-13) \cdot 7 - 22 \cdot 23) = -298,5.$$

Das negative Vorzeichen erklärt sich aus der Tatsache, daß beim Umlauf in der Reihenfolge O , A , B die Fläche zur Rechten bleibt. Dagegen würde der Inhalt die Fläche OBA den Inhalt $+298,5$ ergeben. Welches sind die Inhalte der Dreiecke OBC und OCA ?

Aus der Eigenschaft, daß Flächen mit Vorzeichen behaftet (relative Größen) sind, ergibt sich sehr bequem eine Möglichkeit, den Flächeninhalt irgendeiner geradlinigen Figur zu berechnen. Um den Inhalt

des in Abb. 164 gezeichneten Fünfecks $P_1P_2P_3P_4P_5$ zu bestimmen, verbinden wir jeden Eckpunkt mit O ; dadurch stellt sich das Fünfeck dar als die Summe der fünf Dreiecke

$$OP_1P_2 + OP_2P_3 + OP_3P_4 \\ + OP_4P_5 + OP_5P_1.$$

Von diesen haben die ersten vier positives Vorzeichen; ihre Summe ist also die Fläche $OP_1P_2P_3P_4P_5O$. Addiert man zu dieser Figur noch das Dreieck OP_5P_1 , das von selbst negativ wird (vgl. den Umlaufssinn in der Abbildung), so ergibt sich die Fläche des Fünfecks $P_1P_2P_3P_4P_5$.

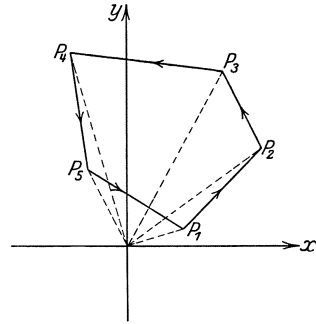


Abb. 164.

Hat man ganz allgemein ein n -Eck

$P_1P_2P_3 \dots P_{n-1}P_n$, dessen Eckpunkte die Koordinaten $x_1|y_1, x_2|y_2, x_3|y_3, \dots, x_{n-1}|y_{n-1}, x_n|y_n$ haben, so ist sein doppelter Inhalt, wie man durch Zerlegen in Dreiecke mit der gemeinsamen Ecke O bekommt,

$$2F = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + \dots$$

oder $+ x_{n-2}y_{n-1} - x_{n-1}y_{n-2} + x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1} + x_ny_1 - x_1y_n$

$$2F = y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + \dots + y_n(x_{n-1} - x_1) \left. \vphantom{2F} \right\} 13) \\ = x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \dots + x_n(y_1 - y_{n-1}). \left. \vphantom{2F} \right\}$$

Die Fläche hat das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem ihr Umlaufssinn mit dem positiven oder mit dem negativen Drehsinn übereinstimmt.

Berechne hiernach den Inhalt des Dreiecks D !

$$2F = 22(3 - 23) + 7(-13 - 3) + (-8)(23 + 13) = -840.$$

(109) Die Transformation des Parallelkoordinatensystems befaßt sich mit der Aufgabe, aus den Koordinaten, die ein bestimmter Punkt P der Ebene in irgendeinem Parallelkoordinatensystem hat, seine Koordinaten in irgendeinem anderen Parallelkoordinatensystem zu brechen.

Es sind also aus (Abb. 165) den Koordinaten $OX = x, XP = y$ des Punktes P im Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte O und den Achsen x und y seine Koordinaten $\Omega E = \xi$ und $EP = \eta$ im Koordinatensysteme mit dem Anfangspunkte Ω und den Achsen ξ und η zu ermitteln.

Wir werden diese Aufgabe in vier Schritten lösen. Zuerst werden wir eine Parallelverschiebung des Oxy -Systems nach Ω vornehmen, d. h. wir werden an Stelle des Oxy -Systems ein neues $\Omega\xi\eta$ einführen derart, daß die ξ -Achse parallel der x -Achse und die η -Achse parallel der y -Achse wird. Sodann werden wir das schiefwinklige $\Omega\xi\eta$ -

System in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ΩXY überführen, so, daß die X -Achse mit der \mathfrak{x} -Achse zusammenfällt. Drittens

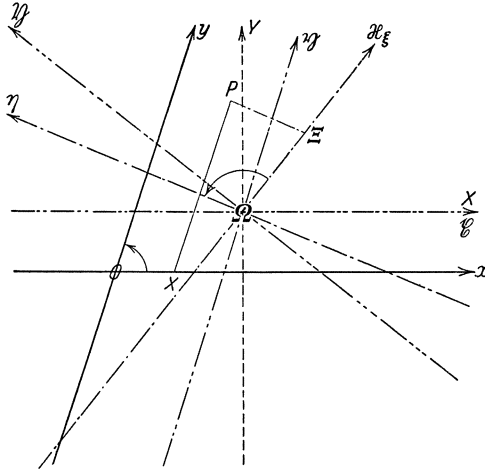


Abb. 165.

werden wir das rechtwinklige Koordinatensystem ΩXY so lange um Ω drehen, bis die X -Achse des neuen rechtwinkligen Systems $O\xi\eta$ mit der ξ -Achse zusammenfällt. Schließlich werden wir das rechtwinklige ΩXY -System in das schiefwinklige System $\Omega\xi\eta$ überführen. Damit ist die Aufgabe dann gelöst. Die Reihenfolge der Schritte kann abgeändert werden; man könnte beispielsweise auch erst aus dem schiefwinkligen in das rechtwinklige System über-

gehen, sodann die Parallelverschiebung, darauf die Drehung vornehmen und schließlich aus dem rechtwinkligen System in das gewünschte schiefwinklige System übergehen. Tatsache ist jedenfalls, daß diese vier Schritte — in welcher Reihenfolge auch immer — stets die Überführung aus einem beliebigen System in ein anderes beliebiges System ermöglichen. In vielen Sonderfällen genügt eine geringere Anzahl Schritte.

Wir erkennen, daß wir drei grundlegende Aufgaben zu lösen haben, nämlich:

1. Parallelverschiebung eines Koordinatensystems,
2. Überführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems in ein schiefwinkliges und umgekehrt,
3. Drehung eines rechtwinkligen Koordinatensystems um den Nullpunkt.

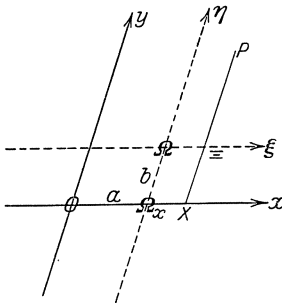


Abb. 166.

Wir beginnen mit der ersten Aufgabe.

(110) A. Parallelverschiebung des Koordinatensystems (Abb. 166). Die Koordinaten des neuen Nullpunktes Ω bezüglich des ursprünglichen Systems seien $O\Omega_x = a$, $\Omega_x\Omega = b$. Der Punkt P habe im ursprünglichen Systeme die Koordinaten $OX = x$, $XP = y$ und im neuen Systeme die Koordinaten $\Omega E = \xi$, $EP = \eta$. Nun ist nach Formel 2) S. 280, wie auch die Punkte O , Ω , P zueinander

liegen mögen,

$$OX = O\Omega_x + \Omega_x P, \quad XP = X\bar{E} + \bar{E}P = \Omega_x \Omega + \bar{E}P.$$

Führen wir die obigen Bezeichnungen ein, so erhalten wir die Formeln

$$x = a + \xi, \quad y = b + \eta, \quad 14a)$$

$$\xi = x - a, \quad \eta = y - b. \quad 14b)$$

Die Formeln 14 a) drücken die alten Koordinaten x und y durch die neuen ξ und η aus, 14 b) lehren aus den alten Koordinaten x und y die neuen ξ und η zu finden.

Eine Anwendung dieser Formeln haben wir schon in (15) S. 26 f. gemacht, wo wir durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems um x_s bzw. y_s nachwiesen, daß die Gleichung von der Form $y = ax^2 + bx + c$ stets eine Parabel zur Bildkurve hat. Eine weitere ist in (25) S. 53 f. erfolgt. Hieraus erhellt gleichzeitig die Wichtigkeit der Transformation der Koordinatensysteme; man kann nämlich häufig aus der Gleichung, die eine Kurve in einem anderen Koordinatensysteme hat, Eigenschaften derselben ablesen, die man sonst nur auf sehr umständlichem Wege gefunden hätte. Ein anderer Beleg dafür soll hier noch gebracht werden.

a) Die allgemeinste Gleichung zweiten Grades zwischen den beiden Veränderlichen x und y lautet

$$a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{01}y + a_{00} = 0. \quad a)$$

Hierbei sind a_{20} , a_{11} , a_{02} , a_{10} , a_{01} , a_{00} beliebige Konstanten. Die Kurve, die diese Gleichung hat, d. h. deren Punkte sämtlich der Art sind, daß ihre Koordinaten die Gleichung erfüllen, heißt eine Kurve zweiter Ordnung. Von dieser Kurve, deren Gestalt uns jetzt nicht weiter kümmern soll, wollen wir eine wichtige Eigenschaft ableiten: Wir verschieben das Koordinatensystem nach einem neuen Nullpunkt Ω , dessen Koordinaten a und b vorläufig noch unbestimmt bleiben mögen. Die Gleichung dieser Kurve im neuen System lautet unter Verwendung der Formeln 14 a)

$$a_{20}(\xi + a)^2 + 2a_{11}(\xi + a)(\eta + b) + a_{02}(\eta + b)^2 + 2a_{10}(\xi + a) + 2a_{01}(\eta + b) + a_{00} = 0$$

oder

$$\left. \begin{aligned} a_{20}\xi^2 + 2a_{11}\xi\eta + a_{02}\eta^2 + 2a_{10}(a_{20}\cdot a + a_{11}\cdot b + a_{10})\xi \\ + 2(a_{11}\cdot a + a_{02}\cdot b + a_{01})\eta \\ + (a_{20}\cdot a^2 + 2a_{11}\cdot ab + a_{02}\cdot b^2 + 2a_{10}\cdot a + 2a_{01}\cdot b + a_{00}) = 0. \end{aligned} \right\} b)$$

Bestimmen wir nun die beiden Größen a und b so, daß sie die linearen Gleichungen erfüllen

$$a_{20}\cdot a + a_{11}\cdot b + a_{10} = 0 \quad \text{und} \quad a_{11}\cdot a + a_{02}\cdot b + a_{01} = 0, \quad c)$$

so geht die Gleichung der Kurve über in die folgende:

$$a_{20} \xi^2 + 2a_{11} \xi \eta + a_{02} \eta^2 + C = 0 \quad \text{d)}$$

$$(C = a_{20} \cdot a^2 + 2a_{11} \cdot ab + a_{02} \cdot b^2 + 2a_{10} \cdot a + 2a_{01} \cdot b + a_{00}).$$

Nach der Theorie der linearen Gleichungen lassen sich die beiden Gleichungen c) stets auflösen, wenn $a_{20} \cdot a_{02} - a_{11}^2 \neq 0$ ist. Ist also diese Bedingung erfüllt, so läßt sich stets ein Punkt $\Omega(a|b)$ finden. Nun ist ohne weiteres ersichtlich, daß, falls ein Koordinatenpaar $\xi_0|\eta_0$ die Gleichung d) erfüllt, auch das Koordinatenpaar $(-\xi_0|-\eta_0)$ diese Gleichung erfüllt [s. a. (25) S. 54]. Die zugehörigen Punkte P_0 und P'_0 liegen dann so zueinander, daß ihre Verbindungsstrecke durch Ω geht und von Ω halbiert wird. Jede durch Ω gehende Sehne der Kurve wird demnach durch Ω halbiert, d. h. Ω ist ein Mittelpunkt der Kurve. Ist also $a_{20} \cdot a_{02} - a_{11}^2 \neq 0$, so besitzt die Kurve zweiter Ordnung a) einen Mittelpunkt; sie ist eine Mittelpunktskurve zweiter Ordnung.

b) Die Mittelpunktsgleichung des Kreises vom Halbmesser c lautet im rechtwinkligen Koordinatensystem [s. (104) S. 285]

$$x^2 + y^2 - c^2 = 0. \quad \text{6)}$$

Wir wollen das Koordinatensystem nach dem linken Schnittpunkte A des Kreises mit der x -Achse verlegen (s. Abb. 167). A hat die Koordinaten $x_a = -c$, $y_a = 0$. Werden die neuen Koordinatenachsen durch ξ und η bezeichnet, so sind die Transformationsformeln

$x = \eta - c$, $y = \eta$, und Gleichung 6) geht über in

$$(\eta - c)^2 + \eta^2 = c^2$$

oder

$$\eta^2 + \eta^2 - 2c\eta = 0.$$

Wählen wir A zum Pol eines Polarkoordinatensystems, dessen Anfangsstrahl die positive ξ -Achse ist, so ist $\xi = r \cos \vartheta$, $\eta = r \sin \vartheta$, und die Gleichung des Kreises

lautet in diesem Polarkoordinatensystem

$$r^2 \cos^2 \vartheta + r^2 \sin^2 \vartheta - 2cr \cos \vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad r = 2c \cos \vartheta.$$

Die Richtigkeit dieses Ergebnisses können wir leicht an Hand der Abb. 167 nachprüfen. Es ist

$$\sphericalangle APB = 1R \quad \text{und} \quad AP = AB \cos \vartheta, \quad \text{also} \quad r = 2c \cos \vartheta.$$

Wie lautet die Gleichung des Kreises, wenn der Nullpunkt nach dem Punkte B bzw. nach C , D , $E(c \cos \alpha | c \sin \alpha)$ verlegt wird?

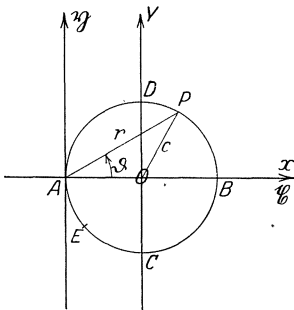


Abb. 167.

(111) B. Überführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems in ein schiefwinkliges und umgekehrt (Abb. 168). Es seien $OP_x = x$ und $P_x P = y$ die Koordinaten von P im rechtwinkligen xy -System und $OP_X = X$ und $P_X P = Y$ die Koordinaten von P im schiefwinkligen XY -Systeme, dessen Koordinatenwinkel ω sei. Nach dem Projektionssatze [s. (107) S. 293] hat jeder Linienzug, der von O nach P verläuft, auf irgendeine Gerade die gleiche Projektion. Von O nach P führt einmal der Linienzug $OP_x P$, zweitens der Linienzug $OP_X P$. Beide wollen wir zunächst auf die x -Achse projizieren. OP_x bildet mit der x -Achse den Winkel 0° , $P_x P$ den Winkel 90° ; es ist also die Projektion von $OP_x P$ auf die x -Achse:

$$OP_x \cos 0^\circ + P_x P \cos 90^\circ = x.$$

OP_X bildet mit der x -Achse den Winkel 0° , $P_X P$ den Winkel ω ; also ist die Projektion von $OP_X P$ auf die x -Achse:

$$OP_X \cos 0^\circ + P_X P \cdot \cos \omega = X + Y \cos \omega.$$

Wir erhalten demnach

$$x = X + Y \cos \omega.$$

Nun projizieren wir beide Linienzüge auf die y -Achse. Bedenken wir, daß die Strecken OP_x , $P_x P$, OP_X , $P_X P$ mit der y -Achse der Reihe nach die Winkel 270° , 0° , 270° , $270^\circ + \omega$ einschließen, da man die y -Achse um diese Winkel drehen muß, um sie mit diesen Strecken zur Deckung zu bringen, so ergibt sich aus dem Projektionssatze

$$OP_x \cos 270^\circ + P_x P \cos 0^\circ = OP_X \cos 270^\circ + P_X P \cos (270^\circ + \omega)$$

oder

$$y = Y \sin \omega.$$

Die beiden Formeln

$$x = X + Y \cos \omega, \quad y = Y \sin \omega \quad 15a)$$

lehren, aus den schiefwinkligen Koordinaten X und Y von P seine rechtwinkligen Koordinaten x und y zu finden. Wir lösen diese Gleichungen nach X und Y auf und erhalten

$$X = x - y \operatorname{ctg} \omega, \quad Y = \frac{y}{\sin \omega}, \quad 15b)$$

Formeln, die umgekehrt die schiefwinkligen Koordinaten von P durch die rechtwinkligen Koordinaten ausdrücken.

Als Anwendungsbeispiel möge das folgende dienen: Wir wissen, daß im rechtwinkligen Koordinatensystem $y^2 = 2px$ die Scheitel-

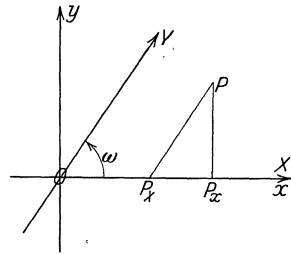


Abb. 168.

gleichung der Parabel ist [s. (38) S. 89]. Wir stellen uns jetzt die Frage: Welche Kurve wird im schiefwinkligen Koordinatensystem durch die Gleichung a) $y^2 = 2px$ beschrieben? Wir wollen uns zunächst ein Bild von der Gestalt der Kurve verschaffen. Sie geht durch den Anfangspunkt, da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist; zu jedem positiven Werte x gehören die zwei entgegengesetzt gleichen Werte von $y = \pm \sqrt{2px}$. Alle zur y -Achse parallelen Sehnen werden demnach von der x -Achse halbiert; es besteht eine Art von Symmetrie, nur daß die Verbindungssehnen entsprechender Punkte nicht auf der Symmetrielinie senkrecht stehen, sondern sämtlich unter dem Koordinatenwinkel ω gegen sie geneigt sind. Die y -Achse ist Tangente an die Kurve in O . Es macht ganz den Eindruck, als wäre die Kurve unsere bekannte Parabel; der Beweis ist erbracht, wenn wir durch Übergang zu

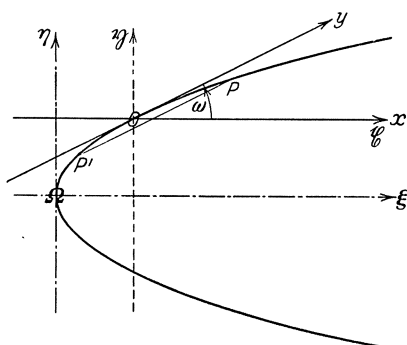


Abb. 169.

einem rechtwinkligen Koordinatensystem und Parallelverschiebung auf eine Gleichung von der Form $\eta^2 = 2\pi\xi$ für diese Kurve gelangen. Wir wollen zu diesem Zwecke zunächst aus dem schiefwinkligen xy -System in das rechtwinklige $\xi\eta$ -System durch die Gleichungen 15 b)

$$x = \xi - \eta \operatorname{ctg} \omega, \quad y = \frac{\eta}{\sin \omega}$$

übergehen. Aus der Gleichung $y^2 = 2px$ wird dann

$$\eta^2 = 2p\xi \sin^2 \omega - 2p\eta \sin \omega \cos \omega. \quad \text{b)}$$

Nun wollen wir das rechtwinklige $\xi\eta$ -System nach einem neuen Anfangspunkte Ω mit den Achsen ξ und η parallel verschieben; die Koordinaten von Ω seien im $\xi\eta$ -System $\xi = a$ und $\eta = b$ und vorläufig unbestimmt gelassen. Die Transformationsformeln lauten nach 14)

$$\xi = \xi + a, \quad \eta = \eta + b,$$

und Gleichung b) geht über in

$$(\eta + b)^2 = 2p(\xi + a) \sin^2 \omega - 2p(\eta + b) \sin \omega \cos \omega$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \eta^2 &= 2p \sin^2 \omega \cdot \xi - 2(b + \sin \omega \cos \omega) \cdot \eta \\ &+ (2pa \sin^2 \omega - 2pb \sin \omega \cos \omega - b^2). \end{aligned} \right\} \quad \text{c)}$$

Nun setzen wir

$$b + p \sin \omega \cos \omega = 0, \quad 2pa \sin^2 \omega - 2pb \sin \omega \cos \omega - b^2 = 0;$$

aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir

$$b = -p \sin \omega \cos \omega, \quad 2pa \sin^2 \omega = -2p^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega + p^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega$$

oder

$$a = -\frac{p}{2} \cos^2 \omega, \quad b = -p \sin \omega \cos \omega.$$

Führen wir diese Werte für a und b in c) ein, so geht die Gleichung unserer Kurve über in

$$\eta^2 = 2 \cdot p \sin^2 \omega \cdot \xi$$

oder, wenn wir zur Abkürzung $p \sin^2 \omega = \pi^1$) setzen,

$$\eta^2 = 2 \pi \xi. \quad \text{d)}$$

Dies ist, da das $\xi\eta$ -System rechtwinklig ist, in der Tat die Scheitelgleichung einer Parabel. Demnach stellt auch die ursprüngliche Gleichung $x^2 = 2px$ eine Parabel dar; die x -Achse ist parallel zur Parabelachse oder ein Durchmesser der Parabel, und die y -Achse ist die Tangente, die im Endpunkte dieses Durchmessers an die Parabel gelegt worden ist; die Tangente heißt konjugiert zu dem durch den Berührungspunkt gehenden Durchmesser.

(112) C. Drehung eines rechtwinkligen Koordinatensystems um einen Winkel α (Abb. 170). Es seien $OX = x$ und $XP = y$ die Koordinaten

von P im xy -System und $O\mathfrak{X} = \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}P = \mathfrak{y}$ die Koordinaten des nämlichen

Punktes in dem durch Drehung um α aus dem xy -System hervorgegangenen $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ -System. Zur Ableitung der Beziehungen zwischen x und y einerseits und \mathfrak{x} und \mathfrak{y} andererseits wenden wir wie in

B. auf die beiden von O nach P führenden Linienzüge OXP und $O\mathfrak{X}P$ den Projektionsatz [s. (107) S. 293] an. Bedenken wir, daß die Strecken OX , XP , $O\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}P$ mit der x -Achse nach unserer

Definition [s. (107) S. 291] der Reihe nach die Neigungswinkel 0° , 90° , α , $\alpha + 90^\circ$ einschließen, so bekommen wir die Beziehung

$$OX \cdot \cos 0^\circ + XP \cdot \cos 90^\circ = O\mathfrak{X} \cdot \cos \alpha + \mathfrak{X}P \cdot \cos(90^\circ + \alpha)$$

oder

$$x = \mathfrak{x} \cos \alpha - \mathfrak{y} \sin \alpha.$$

Die einzelnen Strecken der beiden Linienzüge haben gegen die y -Achse die Neigungswinkel 270° , 0° , $270^\circ + \alpha$, α ; also ergibt sich

$$OX \cdot \cos 270^\circ + XP \cdot \cos 0^\circ = O\mathfrak{X} \cdot \cos(270^\circ + \alpha) + \mathfrak{X}P \cdot \cos \alpha$$

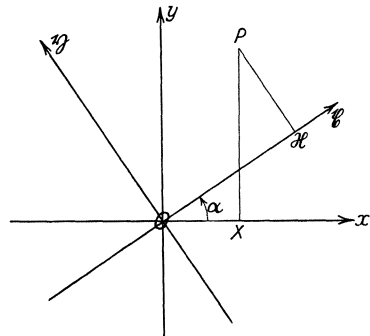


Abb. 170.

1) Unter π ist hier nicht die Ludolphsche Zahl 3,14159 zu verstehen!

oder

$$y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha .$$

Die beiden Formeln

$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \quad \text{und} \quad y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \quad 16 a)$$

lehren, die ursprünglichen Koordinaten x und y des Punktes P aus den um α „gedrehten“ Koordinaten ξ und η zu finden.

Projizieren wir jetzt beide Linienzüge auf die ξ -Achse und bedenken, daß die Strecken OX , XP , $O\xi$, ξP mit dieser der Reihe nach die Winkel $360^\circ - \alpha$, $90^\circ - \alpha$, 0° , 90° einschließen, und schließlich auf die η -Achse, wobei die Neigungswinkel $270^\circ - \alpha$, $360^\circ - \alpha$, 270° , 90° sind, so erhalten wir die Gleichungen

$$\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad \text{und} \quad \eta = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad 16 b)$$

welche die „gedrehten“ Koordinaten von P durch die ursprünglichen ausdrücken. Die Formeln 16 b) hätte man auch erhalten, wenn man die Formeln 16 a) nach ξ und η aufgelöst hätte, oder wenn man in den Formeln 16 a) α durch $-\alpha$, x durch ξ , y durch η ersetzt hätte, da das xy -System aus dem $\xi\eta$ -System dadurch hervorgeht, daß man letzteres um den Winkel $-\alpha$ dreht.

Die Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystems findet sehr häufige Verwendung; wir wollen sie uns daher durch Behandlung mehrerer Beispiele zu eigen machen.

a) Die Mittelpunktsgleichung des Kreises vom Halbmesser c lautet im rechtwinkligen Koordinatensystem [s. (104) S. 285] $x^2 + y^2 - c^2 = 0$; wie heißt sie im $\xi\eta$ -System? Durch die Formeln 16 a) geht die Gleichung über in

$$(\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha)^2 + (\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha)^2 - c^2 = 0$$

oder, wie man durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erkennt, $\xi^2 + \eta^2 - c^2 = 0$; sie hat also im $\xi\eta$ -System genau die gleiche Form wie im xy -System. Es folgt hieraus: Legt man durch den Koordinatenanfangspunkt irgendein rechtwinkliges Koordinatensystem, so hat die Kurve zu diesem genau die gleiche Lage wie zu einem anderen rechtwinkligen Koordinatensystem, das durch O geht; das ist aber die gerade für den Kreis bemerkenswerte Eigenschaft.

b) Wie ändert sich die Gleichung

$$x^3 - 3xy^2 - a^3 = 0, \quad a)$$

wenn das Koordinatensystem um -120° gedreht wird? Die Formeln 16 b) lauten in diesem Sonderfall

$$x = -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\eta, \quad y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\xi - \frac{1}{2}\eta,$$

und die ursprüngliche Gleichung geht über in

$$\left(-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\eta\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\eta\right)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\xi - \frac{1}{2}\eta\right)^2 - a^3 = 0$$

oder

$$-\frac{1}{8}\xi^3 + \frac{3}{8}\sqrt{3}\xi^2\eta - \frac{3}{8}\xi\eta^2 + \frac{3}{8}\sqrt{3}\eta^3 + \frac{9}{8}\xi^3 - \frac{9}{8}\sqrt{3}\xi^2\eta + \frac{3}{4}\sqrt{3}\xi^2\eta$$

$$-\frac{9}{4}\xi\eta^2 + \frac{3}{8}\xi\eta^2 - \frac{3}{8}\sqrt{3}\eta^3 - a^3 = 0$$

oder

$$\xi^3 - 3\xi\eta^2 - a^3 = 0;$$

im neuen Koordinatensystem ist also die Gleichung von derselben Form wie im ursprünglichen. Das heißt aber nichts anderes, als daß die zugehörige Kurve zu dem xy -System die gleiche Lage hat wie zu dem um -120° gegen dieses gedrehten $\xi\eta$ -Systeme. Daraus folgt weiter, daß die Kurve, wenn man sie um 120° um O dreht, wieder mit sich selbst zur Deckung kommt; sie muß demnach aus drei einander kongruenten Teilen bestehen. Eine Bestätigung für diesen Schluß erhalten wir, wenn wir in Polarkoordinaten umformen; mittels der Formeln 8) S. 288 ergibt sich aus der Ausgangsgleichung

$$r^3(\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta\sin^2\vartheta) - a^3 = 0.$$

Da nun aber, wie sich ohne Mühe nachweisen läßt,

$$\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta\sin^2\vartheta = \cos 3\vartheta$$

ist, so lautet die Gleichung $r^3 \cos 3\vartheta = a^3$

oder
$$r = \frac{a}{\sqrt[3]{\cos 3\vartheta}}; \quad \text{b)}$$

r ist also eine periodische Funktion von ϑ , und zwar folgt aus $3\vartheta = 360^\circ$

die Periode 120° ; $r_{\vartheta+120^\circ} = r_\vartheta$. Hiermit ist die oben abgeleitete Eigenschaft der Kurve bestätigt. Im übrigen ergibt sich aus Gleichung b) die in Abb. 171 dargestellte Form der Kurve.

c) Die Asymptotengleichung der gleichseitigen Hyperbel lautet

$$x \cdot y = c^2; \quad \text{a)}$$

[s. (31) S. 69]; wir wollen eine Drehung des Koordinatensystems um 45° vornehmen und die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in dem neuen System aufstellen. Nach den Formeln 16a) ist hier

also
$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\xi - \eta), \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\xi + \eta);$$

oder
$$\frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) = c^2$$

$$\xi^2 - \eta^2 = 2c^2. \quad \text{b)}$$

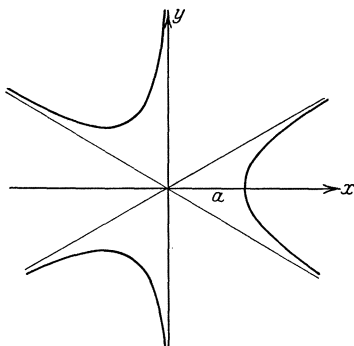


Abb. 171.

Man nennt diese Gleichung die Achsengleichung der gleichseitigen Hyperbel. Die x -Achse heißt die reelle Achse, da sie die Hyperbel in den reellen Punkten A_1 und A_2 , den sog. Scheiteln schneidet (s. Abb. 172), und die y -Achse die imaginäre Achse, da sie die Hyperbel in zwei „imaginären“ Punkten schneidet. Die Strecke $A_2A_1 = 2c\sqrt{2}$ heißt die Länge der reellen Achse, die Strecke $OA_1 = OA_2 = c\sqrt{2}$ die Länge der reellen Halbachse der gleichseitigen Hyperbel.

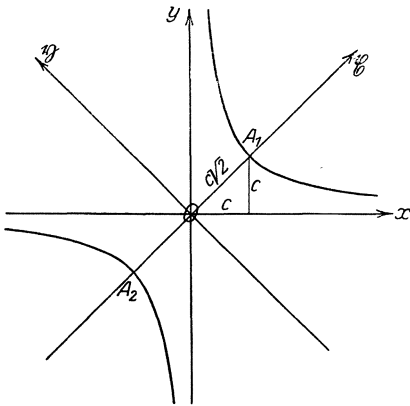


Abb. 172.

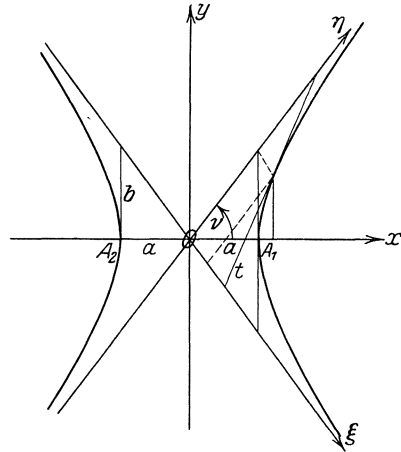


Abb. 173.

Wir verallgemeinern den Fall c) und wollen die Kurve untersuchen, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \text{c)}$$

Die durch diese Gleichung bestimmte Kurve wird Hyperbel genannt. Aus der Tatsache, daß in c) sowohl x als auch y nur im Quadrat auftreten, folgt, daß die Kurve zu beiden Koordinatenachsen symmetrisch liegt. Die Hyperbel hat also zwei Symmetrieachsen; man nennt sie die Achsen der Hyperbel, und die Gleichung c) Achsengleichung der Hyperbel. Die x -Achse schneidet die Hyperbel in zwei Punkten A_1 und A_2 (Abb. 173), deren Abszissen $+a$ bzw. $-a$ sind; sie heißt die reelle Achse, A_1, A_2 die Scheitel und a die Länge der reellen Halbachse. Für $x=0$ wird dagegen $y = \pm bi$; d. h. die y -Achse schneidet die Hyperbel nicht in reellen Punkten. Die y -Achse wird imaginäre Achse der Hyperbel genannt; b ist die Länge der imaginären Halbachse. Setzen wir zur weiteren Untersuchung $y = x \operatorname{tg} \vartheta$,

so geht c) über in

$$\frac{x^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{a^2} - \operatorname{tg}^2 \vartheta \right) = 1 \quad \text{oder} \quad x = \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \operatorname{tg}^2 \vartheta}} \quad \text{und} \quad y = \frac{b \operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \operatorname{tg}^2 \vartheta}}.$$

Es gibt also nur so lange reelle Abszissen und Ordinaten, als

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 \quad \text{oder} \quad -\frac{b}{a} \leq \operatorname{tg} \vartheta \leq +\frac{b}{a}$$

ist. Nur solche durch O gehende Geraden schneiden die Hyperbel, deren Neigungswinkel ϑ gegen die x -Achse diese Bedingung erfüllt. In den beiden Grenzfällen

$$\operatorname{tg} \nu = +\frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \nu' = -\frac{b}{a}$$

wird sowohl x als auch y unendlich groß; die beiden durch O gehenden Geraden, die diesen Winkel ν mit der x -Achse einschließen, schneiden also die Hyperbel erst im Unendlichen; sie sind Asymptoten an die Hyperbel. Diese Asymptoten wollen wir jetzt als neue Koordinatenachsen wählen und auf sie die Hyperbel beziehen. Wir könnten so vorgehen, daß wir das xy -System nach **C**. zuerst um den Winkel $-\nu$ drehen, wodurch die x -Achse mit der ξ -Achse zur Deckung käme, und dann aus dem rechtwinkligen Koordinatensystem nach **B**. in ein schiefwinkliges mit dem Achsenwinkel 2ν übergehen, wodurch die Ordinatenachse auf die andere Asymptote fiel. Wir können aber die Transformation auch mit einem Schritte erledigen. Den letzten Weg wollen wir jetzt einschlagen. Abb. 174 soll der Ableitung der zugehörigen Transformationsformeln dienen. Es ist

$$OX = x, \quad XP = y, \quad OE = \xi, \quad EP = \eta.$$

Die beiden Linienzüge OXP und OEP sollen einmal auf die x -Achse, das andere Mal auf die y -Achse projiziert werden; da die Strecken OX , XP , OE , EP mit der x -Achse bzw. der y -Achse der Reihe nach die Winkel 0° , 90° , $360^\circ - \nu$, ν bzw. 270° , 0° , $270^\circ - \nu$, $270^\circ + \nu$ einschließen, erhalten wir die Transformationsformeln

$$x = (\xi + \eta) \cos \nu, \quad y = (-\xi + \eta) \sin \nu.$$

Da ferner

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{b}{a}, \quad \text{also} \quad \cos \nu = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \nu = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

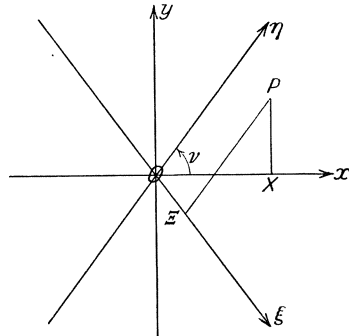


Abb. 174.

ist, so ist

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\xi + \eta), \quad \frac{y}{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-\xi + \eta)$$

und folglich

$$\frac{(\xi + \eta)^2}{a^2 + b^2} - \frac{(-\xi + \eta)^2}{a^2 + b^2} = 1$$

oder

$$\xi \eta = \frac{a^2 + b^2}{4} \quad \text{d)}$$

die Gleichung unserer Hyperbel, wenn die Asymptoten als Achsen gewählt werden; sie wird die Asymptotengleichung der Hyperbel genannt. Sie weist denselben Bau auf wie die Asymptotengleichung der gleichseitigen Hyperbel. Der Unterschied zwischen den beiden Hyperbeln besteht nur darin, daß die Asymptoten hier einen rechten, dort einen schiefen Winkel miteinander bilden.

Welche Transformation wir auch vornehmen, ob **A.** oder **B.** oder **C.**, stets wird der Übergang durch ein System linearer Gleichungen vermittelt, wie wir in den Gleichungen 14), 15) und 16) sehen. Es geht also stets eine algebraische Gleichung n ten Grades durch irgendeine dieser Transformationen wieder in eine algebraische Gleichung n ten Grades über. Der Grad der Gleichung bleibt erhalten beim Übergange von einem Parallelkoordinatensystem in ein anderes. — Um die Anzahl der Schnittpunkte einer Kurve, deren Gleichung vom n ten Grade ist, mit der x -Achse zu bestimmen, setzen wir $y = 0$; wir erhalten dadurch eine Gleichung von höchstens n tem Grade in x . Folglich hat diese Kurve höchstens n Schnittpunkte mit der x -Achse und damit auch mit jeder beliebigen Geraden, da man diese zur Abszissenachse machen könnte. Nun bezeichnet man als Ordnung einer algebraischen Kurve die Höchstzahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden, und damit finden wir den Satz:

Die Ordnung einer algebraischen Kurve stimmt mit dem Grade ihrer Gleichung in Parallelkoordinaten überein.

§ 3. Die Gerade.

(113) **A. Die gerade Linie.** In jedem Parallelkoordinatensystem hat die allgemeine lineare Funktion zwischen x und y

$$Ax + By + C = 0 \quad (17)$$

als Bild eine gerade Linie. Denn sind (Abb. 175) P_1 und P_2 zwei Punkte, deren Koordinaten $x_1|y_1$ bzw. $x_2|y_2$ die Gleichung 17) erfüllen, für welche also

$$Ax_1 + By_1 + C \equiv 0 \quad \text{und} \quad Ax_2 + By_2 + C \equiv 0$$

ist, so erhalten wir durch Subtrahieren der ersten von 17)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

und durch Subtrahieren beider

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0.$$

Wir lösen die zuletzt gefundenen Gleichungen nach $-\frac{A}{B}$ auf und erhalten durch Gleichsetzen

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{18}$$

18) ist eine Gleichung, die von den Koordinaten $x|y$ eines beliebigen Punktes P erfüllt werden muß, der auf der zu 17) gehörigen Kurve liegen soll. Da nun aber

$$\begin{aligned} y - y_1 &= QP, \\ x - x_1 &= X_1X = P_1Q, \\ y_2 - y_1 &= Q_2P_2, \\ x_2 - x_1 &= X_1X_2 = P_1Q_2 \end{aligned}$$

ist, so ist

$$\frac{QP}{P_1Q} = \frac{Q_2P_2}{P_1Q_2},$$

dann muß aber P auf der durch P_1 und P_2 bestimmten Geraden g liegen, womit der obige Satz bewiesen ist. Gleichzeitig ist auch seine Umkehrung bewiesen, daß die Koordinaten aller Punkte, die auf einer geraden Linie liegen, eine lineare Gleichung erfüllen müssen; denn damit $P(x|y)$ auf der durch $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ bestimmten Geraden liegt, muß Gleichung 18) bestehen. Beseitigen wir aus ihr die Nenner, so läßt sie sich auf die Form bringen:

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0. \tag{18'}$$

Dies ist eine lineare Gleichung in x und y ; vergleichen wir sie mit 17), so finden wir

$$A \equiv y_2 - y_1, \quad B \equiv x_1 - x_2, \quad C \equiv x_2y_1 - x_1y_2.$$

Wir sehen hieraus zugleich, daß jeder linearen Gleichung 17) stets nur eine Gerade entspricht, daß aber andererseits zu jeder Geraden unendlich viele Gleichungen gehören. Hat man nämlich eine Gleichung, so kann man durch Multiplizieren derselben mit irgendeiner Konstanten eine andere Gleichung herstellen, deren Bild aber dieselbe Gerade sein muß. Dies trifft übrigens für jede Kurve zu. Hiervon werden wir sofort Gebrauch machen, um verschiedene Gleichungsformen einer bestimmten Geraden abzuleiten.

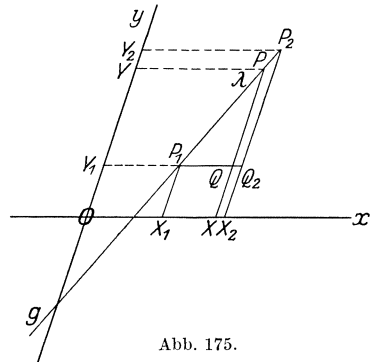


Abb. 175.

Dividieren wir 17) durch B und lösen nach y auf, so bekommen wir die Gleichungsform

$$y = Ax + b, \quad (19)$$

wobei

$$A = -\frac{A}{B}$$

und

$$b = -\frac{C}{B}$$

gesetzt ist. Gleichung 19) heißt die **Richtungsgleichung** der Geraden; denn

$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ist bestimmend für die Richtung der Geraden. A wird daher der Richtungsfaktor genannt [s. a. (6) S. 10f.].

Eine Gerade kann auf mannigfaltige Art festgelegt sein; der häufigste Fall ist der, daß von ihr zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ gegeben sind; welches ist dann die Gleichung der Geraden? Eine Lösung dieser Aufgabe wird uns durch Gleichung 18) gegeben; eine andere bekommen wir auf folgendem Wege. Ist (Abb. 175) $P(x|y)$ ein beliebiger Punkt auf g , und λ sein Teilverhältnis bezüglich der beiden Punkte P_1 und P_2 , so bestehen die Gleichungen

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{X_1X}{XX_2} = \frac{OX - OX_1}{OX_2 - OX} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

ebenso

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{Y_1Y}{YY_2} = \frac{OY - OY_1}{OY_2 - OY} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda.$$

Aus ihnen folgt

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (20)$$

Die Bedeutung der Formeln 20) liegt darin, daß sie die Koordinaten desjenigen Punktes P auf g liefern, der bezüglich der beiden Festpunkte P_1 und P_2 das Teilverhältnis λ hat. Wir können die beiden Gleichungen 20) zusammen ebenfalls als die Gleichung der Geraden g ansprechen; sie unterscheidet sich allerdings wesentlich von der uns bisher geläufigen Gleichung der Geraden. Während die Gleichungen 17) bis 19) eine unmittelbare Beziehung zwischen x und y darstellen, ist in 20) sowohl x als auch y als Funktion einer dritten Größe λ ausgedrückt; λ ist also gewissermaßen eine unabhängige Veränderliche, x und y sind die abhängigen Veränderlichen. Wir werden später noch häufig Darstellungen dieser Art begegnen, daß nämlich die Koordinaten eines Punktes von einer dritten Veränderlichen abhängen; man bezeichnet diese dritte Größe als einen Parameter, und diese Darstellungsweise der Kurve

als Parameterdarstellung. Gleichung 20) ist demnach eine Parameterdarstellung der Geraden. Natürlich kann man von der Parameterdarstellung einer Kurve wieder zur unmittelbaren Gleichung durch Elimination des Parameters gelangen, so aus Gleichung 20) zu Gleichung 18) oder 18').

Setzen wir in 20) $\lambda = 1$, so bekommen wir für die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke P_1P_2

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (21)$$

Anwendungen auf unser Dreieck D [s. (107) S. 291]. (Es ist zu beachten, daß wir für diese Berechnungen das Dreieck D nicht auf ein rechtwinkliges Parallelkoordinatensystem zu beziehen brauchen, sondern daß sie für ein beliebiges Parallelkoordinatensystem gelten.)

a) Wie lauten die Gleichungen der Seiten des Dreiecks?

$$AB) 5x + 12y - 199 = 0, \quad BC) 3x - 4y - 41 = 0,$$

$$CA) 15x + 8y + 19 = 0.$$

b) Welches sind die Mittelpunkte der Seiten?

$$M_a(13 | -\frac{1}{2}), \quad M_b(-5 | 7), \quad M_c(5 | \frac{29}{2}).$$

c) Wie lauten die Gleichungen der Mittellinien?

$$m_a) 45x + 52y - 559 = 0, \quad m_b) y - 7 = 0, \quad m_c) 45x - 4y - 167 = 0.$$

d) Welches sind die Teilverhältnisse der Schnittpunkte dieser Geraden mit den Achsen? ($AB: y = 0, \lambda = -\frac{2}{7}$; $x = 0, \lambda = +\frac{1}{2}$. $m_a: y = 0, \lambda = +44$; $x = 0, \lambda = +1$ usw.)

e) Suche auf allen diesen Geraden die Punkte mit den Teilverhältnissen $\lambda = 2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{4}{5}$. ($AB: \lambda = 2, x = 11, y = 12$; $m_a: x = \frac{1}{3}, y = 7$ usw.)

Als Festpunkte sind auf den Seiten jedesmal die Eckpunkte A, B bzw. B, C bzw. C, A in dieser Reihenfolge, auf den Mittellinien der Eckpunkt als erster, der Mittelpunkt der Gegenseite als zweiter zu wählen.

Die Gerade g möge auf der x -Achse den Abschnitt a , auf der y -Achse den Abschnitt b bilden; durch a und b ist die Lage der Geraden (mit Ausnahme des Falles, daß gleichzeitig $a = 0$ und $b = 0$ ist) bestimmt. Es ist die Gleichung der Geraden zu ermitteln. Es sei (Abb. 176) $OA = a, OB = b$; die Koordinaten von A sind dann $x_1 = a, y_1 = 0$, die von B $x_2 = 0, y_2 = b$. Setzen wir diese in Formel 18) ein, so erhalten wir $\frac{y-0}{x-a} = \frac{b-0}{0-a}$

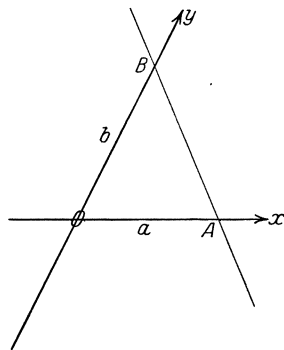


Abb. 176.

und nach einigen einfachen Umformungen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (22)$$

als Gleichung der Geraden, die auf den beiden Achsen die Abschnitte a bzw. b bildet; Gleichung 22) heißt daher die **Abschnittsgleichung** der Geraden. Diese hat praktisch dadurch eine große Bedeutung, daß sich die Gerade, falls ihre Achsenabschnitte bekannt sind, leicht zeichnen läßt; sie vermittelt also bequemer als jede andere Gleichung die Lage der Geraden. Die allgemeine Gleichung der Geraden 17) läßt sich in die Abschnittsgleichung 22) überführen, indem man das Absolutglied auf die rechte Seite schafft und durch dieses dividiert. Die reziproken Werte der Faktoren von x und y sind dann die Abschnitte auf den betreffenden Achsen. Die Rechnung ergibt

$$Ax + By = -C, \quad \frac{-A}{C}x + \frac{-B}{C}y = 1;$$

also ist

$$a = -\frac{C}{A} \quad \text{und} \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Dreieck D : Die Gleichung der Geraden BC lautet $3x - 4y - 41 = 0$; daraus folgt ihre Abschnittsgleichung

$$\frac{x}{\frac{41}{3}} + \frac{y}{-\frac{41}{4}} = 1.$$

Demnach sind die Abschnitte auf den Achsen

$$a = \frac{41}{3} = 13\frac{2}{3}, \quad b = -\frac{41}{4} = -10\frac{1}{4}.$$

Man prüfe das Ergebnis in der Abbildung nach! Bestimme die Achsenabschnitte der übrigen Seiten und der Mittellinien (an der Abbildung nachprüfen!); zeige insbesondere, daß der Abschnitt von m_b auf der x -Achse unendlich groß ist, daß also $m_b \parallel x$ -Achse ist!

(114) Schließlich möge die Aufgabe gelöst werden, die Gleichung einer Geraden aufzustellen, welche durch einen festen Punkt $P_0(x_0|y_0)$ geht und eine gegebene Richtung A hat (parallel zu einer Geraden mit dem Richtungsfaktor A ist). Da die Gerade den Richtungsfaktor A haben soll, muß ihre Gleichung nach 19) die Form haben $y = Ax + b$; da sie durch P_0 gehen soll, muß außerdem $y_0 = Ax_0 + b$ sein. Zieht man beide Gleichungen voneinander ab, so erhält man die gesuchte Gleichung

$$y - y_0 = A(x - x_0). \quad (23)$$

Dreieck D : Um die Gleichung der durch $A(-13|22)$ gehenden Parallelen zu BC zu ermitteln, bedenken wir, daß der Richtungsfaktor von BC $A = \frac{3}{4}$ ist; also lautet die gesuchte Gleichung

$$y - 22 = \frac{3}{4}(x + 13) \quad \text{oder} \quad 3x - 4y + 127 = 0.$$

Bestimme die Gleichung der durch die Ecken A, B, C , ebenso durch O und die Punkte M_a, M_b, M_c gehenden Parallelen zu den Seiten und Mittellinien; überzeuge dich durch Ermittlung der Achsenabschnitte an der Abbildung von der Richtigkeit der errechneten Gleichungen!

Eine geometrisch wichtige Anwendung dieser Aufgabe ist das Problem, die Gleichung einer an die Kurve $y = f(x)$ im Punkte $P_0(x_0|y_0)$ gelegten Tangente zu ermitteln. Da P_0 Berührungspunkt sein soll, also auf der Kurve selbst liegt, muß natürlich $y_0 = f(x_0)$ sein. Die Tangente ist eine Gerade, von der uns ein Punkt $P_0(x_0|y_0)$ und die Richtung $A = y'_0 = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$ gegeben sind; folglich lautet nach 23) die Gleichung dieser Tangente

$$y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0). \quad (24)$$

Beispiele. a) Die Parabel.

$$y = \sqrt{2px}, \quad y_0 = \sqrt{2px_0}, \quad y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}, \quad y'_0 = \frac{p}{y_0}.$$

Gleichung der Tangente

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \quad \text{oder} \quad px - px_0 = y_0y - y_0^2,$$

oder da $y_0^2 = 2px_0$:

$$y_0 \cdot y = p(x + x_0).$$

Abschnittsgleichung:

$$\frac{x}{-x_0} + \frac{y_0}{px_0}y = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{x}{-x_0} + \frac{y}{\frac{y_0}{2}} = 1;$$

d. h.: Jede Parabeltangente schneidet auf der Parabelachse ein Stück ab, das gleich der Abszisse, und auf der Scheiteltangente ein Stück, das gleich der halben Ordinate des Berührungspunktes ist. Da Formel 23) für ein beliebiges schiefwinkliges Koordinatensystem gilt, ist dieser Satz auch noch richtig in einem Tangenten-Durchmesser-System der Parabel (111): Jede Parabeltangente schneidet auf einem beliebigen Durchmesser ein Stück ab, das gleich der Abszisse ξ_0 und auf der zu diesem Durchmesser konjugierten Tangente ein Stück, das gleich der halben Ordinate η_0 des Berührungspunktes ist (Abb. 177) [s. a. (111)].

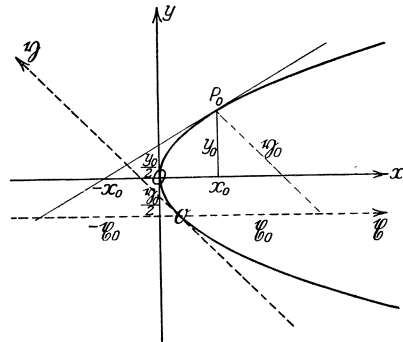


Abb. 177.

b) Die Asymptotengleichung der Hyperbel lautet $xy = c^2$ [s. (112)]; es ist also

$$y = \frac{c^2}{x}, \quad y' = -\frac{c^2}{x^2} = -\frac{y}{x}.$$

Für den Berührungspunkt P_0 ist

$$y_0 = \frac{c^2}{x_0}, \quad y'_0 = -\frac{y_0}{x_0}.$$

Also ist die Gleichung der Tangente

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0) \quad \text{oder} \quad y_0 x + x_0 y = 2x_0 y_0;$$

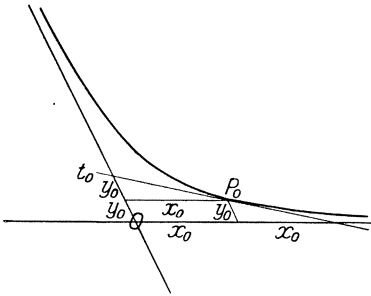


Abb. 178.

die Abschnittsgleichung ist

$$\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1.$$

Jede Hyperbeltangente schneidet auf den Asymptoten Stücke ab, die doppelt so groß sind wie die Stücke, welche die durch den Berührungspunkt gezogenen Parallelen abschneiden (Abb. 178).

c) Die Mittelpunktsgleichung eines Kreises vom Halbmesser c (rechtwinkliges Koordinatensystem) ist

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad y = \sqrt{c^2 - x^2}, \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{c^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

$$y_0 = \sqrt{c^2 - x_0^2}, \quad y'_0 = -\frac{x_0}{y_0}.$$

Gleichung der Tangente:

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \quad \text{oder} \quad x_0 x + y_0 y = x_0^2 + y_0^2$$

oder

$$x_0 x + y_0 y = c^2.$$

Man übe sich weiter an der Sinus-, Tangens-, Exponentialkurve usw.

Schwieriger ist die Aufgabe, von einem Punkte an eine Kurve die Tangente zu legen; wie man hierbei verfahren muß, soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

a) Es soll an den Kreis von der Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ vom Punkte $(-9|13)$ die Tangente gelegt werden. Nach obigem muß die Gleichung der Tangente lauten $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = 25$. Da die Tangente durch den Punkt $(-9|13)$ gehen soll, muß die Bedingung erfüllt werden $-9x_0 + 13y_0 = 25$. Da der Berührungspunkt P_0 auf dem Kreise liegen muß, ist ferner $x_0^2 + y_0^2 = 25$. Jetzt haben wir zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten x_0 und y_0 ; es gibt zwei Lösungspaare

$-\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}y = 25$ und $3x + 4y = 25$ und demnach auch zwei Tangenten mit den Gleichungen

$$-\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}y = 25 \quad \text{und} \quad 3x + 4y = 25$$

bzw.

$$24x + 7y + 125 = 0 \quad \text{und} \quad 3x + 4y - 25 = 0.$$

Bestimme die Achsenabschnitte und bestätige das Ergebnis durch die Zeichnung!

b) Es soll an die Kosinuslinie $y = \cos x$ vom Nullpunkt aus die Tangente gelegt werden. Gleichung 24) lautet in diesem Falle

$$y - \cos x_0 = -\sin x_0 \cdot (x - x_0).$$

Da die Tangente durch O gehen soll, muß ihre Gleichung durch das Wertepaar $0|0$ befriedigt werden; dieses gibt zur Bestimmung von x_0 die Gleichung

$$-\cos x_0 = x_0 \sin x_0 \quad \text{oder} \quad x_0 + \text{ctg} x_0 = 0,$$

die wir nach der Newtonschen Methode (27) lösen wollen. Wir setzen $f(x_0) \equiv x_0 + \text{ctg} x_0$; dann ist

$$f'(x_0) = 1 - \frac{1}{\sin^2 x_0} = -\text{ctg}^2 x_0.$$

Nun liegt ein Näherungswert, wie man an einer kleinen Skizze erkennt, bei $x_0 = 150^\circ$; von ihm wollen wir ausgehen. Die folgende Tabelle enthält den Rechnungsgang:

arc x_0	x_0	ctg x_0	$f(x_0)$	logctg x_0	log $f'(x_0)$	log $f(x_0)$	log h	h
2,61799	150°	-1,7321	+0,8859	0,23856	0,47712	0,94738-1	0,47026-1	-0,29530
2,9133	166° 55'	-4,3031	-1,3898	0,63376	1,26752	0,14295	0,87543-2	+0,07506
2,83824	162° 37' 9"	-3,1948	-0,3566	0,50444	1,00888	0,55218-1	0,54330-2	+0,03494
2,80330	160° 37' 2"	-2,8423	-0,0390	0,45368	0,90736	0,59106-2	0,68370-3	+0,00483
2,79847	160° 20' 25"	-2,7991	-0,0006	0,44702	0,89404	0,77815-4	0,88411-5	+0,00008
2,79839	160° 20' 9"	-2,7984	±0,0000	0,44691	0,89382			

Die Gleichung der Tangente lautet demnach, wie sich durch Einsetzen ergibt:

$$y + 0,33651x = 0.$$

(115) Im Anschluß an die Gleichung der in einem Punkte an eine Kurve gelegten Tangente mögen noch die folgenden für die Kurvenuntersuchung wichtigen Begriffe behandelt werden. Die in Abb. 179 dargestellte Kurve möge die Gleichung $y = f(x)$ haben. Im Punkte P mit der Abszisse x und der Ordinate $y = XP$ sei an sie die Tangente gelegt, welche die Abszissenachse in T schneide. Man bezeichnet das Stück $TP = t$ der Tan-

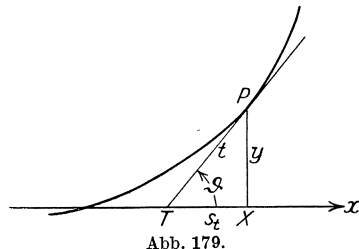


Abb. 179.

gente, welches vom Berührungspunkte P bis zu T reicht, als die Länge der Tangente, und ihre Projektion auf die x -Achse $TX = s_t$ als die Subtangente des Punktes P . Aus $\operatorname{tg} \vartheta = y'$ folgt

$$s_t = \frac{y}{y'} \quad \text{und weiter} \quad t = \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2}. \quad (25)$$

Man erhält hiermit für die Subtangente der Parabel $y = \sqrt{2px}$, da

$$y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}, \quad s_t = \frac{\sqrt{2px}}{p} \sqrt{2px} = 2x,$$

ein Ergebnis, das schon aus (114) S. 311 folgt. Für die Exponentiallinie $y = a \cdot e^{bx}$ [s. (56)] ergibt sich

$$y' = abe^{bx} = by, \quad s_t = \frac{1}{b};$$

d. h. für die Exponentiallinie ist die Subtangente in jedem Punkte von der gleichen Länge $\frac{1}{b}$. Dies vermittelt eine überaus einfache Tangentenkonstruktion an diese Kurve (s. Abb. 74).

Wir wollen weiter die Frage aufwerfen: Gibt es eine Kurve, für welche in jedem Punkte die Länge der Tangente den konstanten Wert a hat? Es müßte dann sein

$$\frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2} = a.$$

Wir sind hiermit auf eine Gleichung gestoßen, in der aus einer Beziehung zwischen der abhängigen Veränderlichen und ihrem Differentialquotienten die Funktion ermittelt werden soll; wir haben einen einfachen Fall einer Differentialgleichung vor uns. Um die Funktion zu bestimmen, beseitigen wir den Nenner und quadrieren; wir erhalten

$$y^2(1 + y'^2) = a^2 y'^2;$$

wir lösen nach y' auf:

$$y' = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{dy}{dx};$$

unter Verwendung von Differentialen können wir schreiben:

$$dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy.$$

Wir integrieren beiderseits; während das Integral der linken Seite $x - x_0$ ergibt, wobei unter x_0 die Integrationskonstante verstanden sein soll, verfahren wir rechts folgendermaßen. Wir setzen

$$\sqrt{a^2 - y^2} = z, \quad \text{also} \quad a^2 - y^2 = z^2, \quad -2y dy = 2z dz,$$

daher

$$\frac{dy}{y} = \frac{z dz}{z^2 - a^2},$$

und es wird [s. Formel T18]

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy &= \int \frac{z^2 dz}{z^2 - a^2} = \int dz + a^2 \int \frac{dz}{z^2 - a^2} = z - a \operatorname{Ar} \mathfrak{I} \mathfrak{G} \frac{z}{a} \\ &= \sqrt{a^2 - y^2} - a \operatorname{Ar} \mathfrak{I} \mathfrak{G} \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\operatorname{Ar} \mathfrak{I} \mathfrak{G} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2} = u, \quad \text{also} \quad \mathfrak{I} \mathfrak{G} u = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2},$$

so wird

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1 - \mathfrak{I} \mathfrak{G}^2 u = 1 - \frac{\mathfrak{C} \sin^2 u}{\mathfrak{C} \cos^2 u} = \frac{1}{\mathfrak{C} \cos^2 u}, \quad \frac{a}{y} = \mathfrak{C} \cos u, \quad u = \operatorname{Ar} \mathfrak{C} \cos \frac{a}{y}$$

[s. (58/59)]. Demnach ist

$$\operatorname{Ar} \mathfrak{I} \mathfrak{G} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2} = \operatorname{Ar} \mathfrak{C} \cos \frac{a}{y},$$

und die Gleichung derjenigen Kurve, für welche in jedem Punkte die Tangente die Länge a hat, lautet

$$x - x_0 = \sqrt{a^2 - y^2} - a \cdot \operatorname{Ar} \mathfrak{C} \cos \frac{a}{y}.$$

Wir werden auf diese Kurve, die Huyghenssche Traktrix, näher eingehen [s. (133)].

Einfacher ist die Frage nach denjenigen Kurven zu beantworten, für welche in jedem Punkte die Subtangente die Länge a hat; ihre Gleichung lautet — die Ableitung sei dem Leser überlassen — $y = ce^{\frac{x}{a}}$; die Exponentialkurve ist die einzige Kurve dieser Art.

(116) B. Die gerade Linie und der Punkt. Unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems möge die folgende Aufgabe behandelt werden.

Gegeben ist eine Gerade g durch ihren Abstand d von O und den Winkel α , den d mit der positiven x -Achse einschließt; gegeben ist außerdem ein Punkt P durch seine Koordinaten x und y ; zu berechnen ist der Abstand n , den P von g hat (Abb. 180).

Ist D der Fußpunkt von d , wobei d eine absolute Größe ist, und N der Fußpunkt von n , so hat der von O nach P führende Linienzug $ODNP$ die gleiche Projektion auf irgendeine Gerade wie der von O nach P führende Linienzug OXP [Projektionssatz (107)]. Wir wollen beide Linienzüge auf die Gerade OD

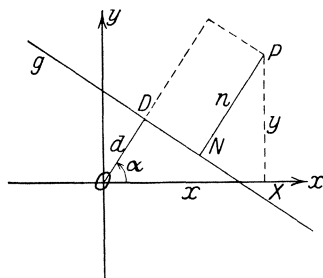


Abb. 180.

projizieren: Der erste Linienzug gibt $d + n$, der andere

$$x \cos \alpha + y \cos(90^\circ - \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

Also erhalten wir

$$d + n = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

oder

$$n = x \cos \alpha + y \sin \alpha - d. \quad (26)$$

Da $d + n$ nur dann größer ist als d , wenn P so liegt, daß die Gerade g zwischen O und P hindurchgeht, andererseits nur dann kleiner ist als d , wenn O und P auf derselben Seite von g liegen, so folgt, daß sich n aus Gleichung 26) positiv ergibt, wenn O und P voneinander durch g getrennt werden, und negativ, wenn sie beide auf derselben Seite von g liegen. Formel 26) gibt uns also einmal die Länge des Abstandes, den P von g hat, außerdem sagt sie uns auch, auf welcher Seite von g P zu suchen ist.

Liegt P auf g selbst, so ist $n = 0$, und die Koordinaten x und y von P müssen die Gleichung erfüllen:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = 0. \quad (27)$$

Besteht andererseits diese Gleichung, so muß P auf g liegen. Wir haben demnach in 27) eine neue Form der Gleichung einer Geraden gewonnen; man nennt diese Gleichung die **Hessesche Normalform** der Geraden.

Kennt man die Hessesche Normalform, so kann man leicht den Abstand eines beliebigen Punktes von der Geraden ermitteln: man braucht zu diesem Zwecke nur die Koordinaten dieses Punktes in die linke Seite von 27) einzusetzen. Sie nimmt einen im allgemeinen von Null verschiedenen Wert an, dessen absoluter Betrag gleich dem Abstände des Punktes von der Geraden ist, und dessen Vorzeichen angibt, ob der Punkt von O durch die Gerade getrennt liegt (+) oder ob er mit O auf der gleichen Seite der Geraden liegt (-).

Die allgemeine Gleichung 17) der Geraden läßt sich in die Hessesche Normalform überführen, indem man die gegebene Gleichung mit einer geeigneten Konstanten R , dem Reduktionsfaktor, multipliziert. Die allgemeine Gleichung 17) geht dadurch über in die Gleichung

$$RA \cdot x + RB \cdot y + RC = 0.$$

Damit diese mit 27) identisch ist, müssen die Beziehungen bestehen:

$$RA = \cos \alpha, \quad RB = \sin \alpha, \quad -RC = d. \quad (28)$$

Aus den ersten beiden folgt durch Quadrieren und nachheriges Addieren

$$R^2(A^2 + B^2) = 1,$$

also

$$R = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (29)$$

Hierbei ist das Vorzeichen der Quadratwurzel noch unbestimmt; bedenken wir jedoch, daß d eine absolute Größe ist, so erkennen wir, daß $-RC$ positiv sein, daß also das Vorzeichen von R dem von C entgegengesetzt sein muß. Unter diesen Voraussetzungen lautet die Hessesche Normalform

$$\pm \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) = 0,$$

wobei das obere Vorzeichen gilt, wenn C negativ, und das untere, wenn C positiv ist.

Was haben wir dadurch gewonnen? Da

$$\cos \alpha = A \cdot R \quad \text{und} \quad \sin \alpha = B \cdot R$$

ist, so ist der Winkel α , den das von O auf die Gerade gefällte Lot mit der x -Achse einschließt, gefunden, und zwar eindeutig im Bereiche von 0° bis 360° . Da ferner

$$d = -RC$$

ist, so kennen wir auch den Abstand d , den der Anfangspunkt von der Geraden hat. Und schließlich können wir, wie schon oben ausgeführt, jetzt den Abstand irgendeines beliebigen Punktes von der Geraden leicht errechnen. Einige Beispiele werden diese Tatsachen erläutern.

In unserem Dreieck D (jetzt gilt nur das rechtwinklige Koordinatensystem!) war die Gleichung der Seite BC $3x - 4y - 41 = 0$; wir wollen sie in die Hessesche Normalform bringen. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir die Gleichung $3x - 4y - 41 = 0$ mit R und erhalten $3Rx - 4Ry - 41R = 0$. Nun muß sein

$$\text{a) } \cos \alpha = +3R, \quad \text{b) } \sin \alpha = -4R, \quad \text{c) } d = +41R.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen a) und b) folgt durch Quadrieren und Addieren

$$25R^2 = 1, \quad \text{also} \quad R = \pm \frac{1}{5}.$$

Da C negativ ist (-41), muß R positiv sein, also $R = +\frac{1}{5}$. Mithin lautet die Hessesche Normalform unserer Geraden:

$$\text{d) } +\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{41}{5} = 0.$$

Ferner ist nach a) und b)

$$\cos \alpha = +\frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = -\frac{4}{5};$$

α liegt demnach im vierten Quadranten, und zwar ist $\alpha = 306^\circ 52' 12''$. Der Abstand d des Anfangspunktes von BC ergibt sich aus c) zu $d = \frac{41}{5}$. Um schließlich noch den Abstand der Ecke A von der Seite BC , also die Länge der Höhe h_a zu berechnen, setzen wir in d) die Koordinaten von $A(-13|22)$ ein. Wir erhalten

$$h_a = -\frac{39}{5} - \frac{88}{5} - \frac{41}{5} = -\frac{168}{5} = -33\frac{3}{5}.$$

Das negative Vorzeichen deutet an, daß A und O auf derselben Seite von BC liegen. Von der Richtigkeit aller dieser Ergebnisse überzeuge sich der Leser an der Hand der Abbildung. — Da wir (107) die Länge von BC zu $a = 25$ gefunden haben, erhalten wir als Flächeninhalt des Dreiecks ABC

$$F = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{168}{5} \cdot 25 = 420$$

in Übereinstimmung mit dem in (108) S. 295 gewonnenen Ergebnisse. (Da uns hier nur der absolute Betrag der Fläche angeht, ist auch nur der absolute Wert von h_a in Rechnung gesetzt worden.)

Der Leser ermittle die Hesseschen Normalformen der übrigen Seiten und der Mittellinien des Dreiecks D , bestimme die Abstände der Ecken und der Seitenmitten von den verschiedenen Geraden und bestätige die Ergebnisse an der Zeichnung.

(117) Wir kehren zu den allgemeinen Betrachtungen zurück und wollen sie auf zwei Gerade ausdehnen. Sind

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - d_1 = 0 \quad \text{und} \quad x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - d_2 = 0$$

die Hesseschen Normalformen von g_1 bzw. g_2 , und hat ein Punkt $P(x|y)$ von ihnen die Abstände n_1 bzw. n_2 , so muß sein

$$n_1 = x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - d_1, \quad n_2 = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - d_2.$$

Wir wollen P jetzt so wählen, daß er von beiden Geraden den gleichen Abstand hat; dies ist dann der Fall, wenn entweder $n_1 = n_2$ oder $n_1 = -n_2$ ist [warum? wann tritt der eine, wann der andere Fall ein?]. Damit also P von beiden Geraden gleichen Abstand hat, müssen seine Koordinaten entweder die Gleichung

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - d_1 = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - d_2$$

oder die Gleichung

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - d_1 = -(x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - d_2)$$

erfüllen. Nach einfacher Umformung ergeben sich hieraus die beiden Gleichungen

$$x(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + y(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) - (d_1 - d_2) = 0 \quad 30a)$$

und

$$x(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) + y(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) - (d_1 + d_2) = 0. \quad 30b$$

Beides sind in x und y lineare Gleichungen; ihre geometrischen Bilder sind infolgedessen Geraden w_1 bzw. w_2 . Damit P von g_1 und g_2 gleich weit entfernt ist, muß also P entweder auf w_1 oder auf w_2 liegen. Nun wissen wir aus der Planimetrie, daß alle Punkte, welche auf den beiden Halbierungsgeraden der von g_1 und g_2 gebildeten Winkel liegen, von g_1 und g_2 gleiche Entfernung haben; demnach sind die beiden Gleichungen 30a) und 30b) die Gleichungen der Halbierungsgeraden w_1 und w_2 der von g_1 und g_2 gebildeten Winkel.

Dreieck D : Die Normalformen der Seiten BC und CA lauten

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{41}{4} = 0 \quad \text{bzw.} \quad -\frac{15}{17}x - \frac{8}{17}y - \frac{9}{17} = 0;$$

demnach sind die Gleichungen der Winkelhalbierenden des Dreieckswinkels γ und seines Nebenwinkels

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{15}{17}\right)x + \left(-\frac{4}{5} + \frac{8}{17}\right)y - \left(\frac{41}{5} - \frac{9}{17}\right) = 0.$$

und

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{15}{17}\right)x + \left(-\frac{4}{5} - \frac{8}{17}\right)y - \left(\frac{41}{5} + \frac{9}{17}\right) = 0$$

oder zusammengefaßt

$$w_\gamma) \quad 9x - 2y - 43 = 0 \quad \text{und} \quad w'_\gamma) \quad 2x + 9y + 66 = 0.$$

(Nachprüfen in der Abbildung durch Achsenabschnitte!) Bestimme ebenso die Gleichungen der Halbierenden der übrigen Dreieckswinkel und der sonstigen von Mittellinien und Seiten usw. gebildeten Winkel!

Schließlich möge die Hessesche Normalform der Geraden noch Verwendung finden zum Beweise des in (92) S. 248 angeführten Satzes, daß die im Schwerpunkte eines Massensystems vereinigt gedachte Gesamtmasse dieses Systems bezüglich jeder beliebigen Momentenachse ein statisches Moment hat, das gleich der Summe der statischen Momente der Einzelmassen dieses Systems bezüglich der betreffenden Achse ist.

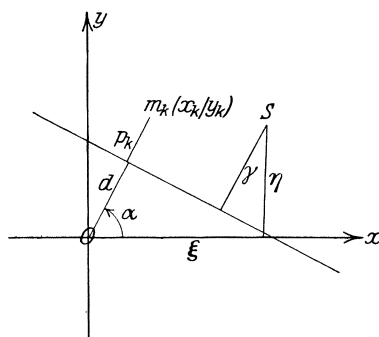


Abb. 181.

In Abb. 181 sei $m_k(x_k|y_k)$ ein Massenpunkt des Systems, ferner $S(\xi|\eta)$ der Schwerpunkt dieses Systems, wobei nach der Definition des Schwerpunktes

$$\text{a) } \xi = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}, \quad \text{b) } \eta = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k},$$

ist [s. (92) S. 248]. Als neue Momentenachse werde die Gerade g gewählt, deren Gleichung in der Hesseschen Normalform

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = 0$$

lauten möge. Die Masse m_k hat von g den Abstand p_k , der sich errechnet zu

$$p_k = x_k \cos \alpha + y_k \sin \alpha - d.$$

S besitzt von g den Abstand γ ; er ist

$$\gamma = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - d. \quad \text{c)}$$

Die Masse m_k hat bezüglich g das Moment

$$p_k m_k = m_k x_k \cos \alpha + m_k y_k \sin \alpha - m_k d;$$

folglich das Massensystem bezüglich g das Moment

$$\begin{aligned} M_g &= \sum (m_k x_k \cos \alpha + m_k y_k \sin \alpha - m_k d) \\ &= \cos \alpha \cdot \sum m_k x_k + \sin \alpha \cdot \sum m_k y_k - d \cdot \sum m_k. \end{aligned}$$

Da aber nach a) und b)

$$\begin{aligned} \text{ist, so ist} \quad \sum m_k x_k &= \xi \cdot \sum m_k, \quad \sum m_k y_k = \eta \cdot \sum m_k \\ M_g &= \sum m_k \cdot (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - d), \end{aligned}$$

also mit Hilfe von c)

$$M_g = \sum m_k \cdot \gamma;$$

d. h. die Summe der statischen Momente der Einzelmassen ist bezüglich der beliebigen Geraden g gleich dem statischen Momente der in S vereinigten Gesamtmasse.

(118) C. Mehrere Geraden. Unter den Fragen nach den Beziehungen, die zwischen zwei Geraden g_1 und g_2 bestehen, sind die wichtigsten die nach dem Schnittpunkt und dem Schnittwinkel der beiden Geraden. Bei Beantwortung der ersten Frage sei ein beliebiges schiefwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt.

Die Gleichungen der beiden Geraden seien

$$g_1) \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad g_2) \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Sind die Koordinaten des Schnittpunktes S x_s bzw. y_s , so müssen die beiden Gleichungen bestehen

$$A_1 x_s + B_1 y_s + C_1 = 0, \quad A_2 x_s + B_2 y_s + C_2 = 0.$$

Das sind zwei lineare Gleichungen mit den beiden Unbekannten x_s und y_s ; ihre Auflösung gibt

$$x_s = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{B_1 A_2 - B_2 A_1}. \quad (31)$$

Die Lösung ist eindeutig und stets möglich, solange $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$ ist. Ist dagegen

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}, \quad (32)$$

so ist

$$x_s = \infty \quad \text{bzw.} \quad y_s = \infty;$$

d. h. der Schnittpunkt liegt im Unendlichen, die Geraden sind zueinander parallel. Dieses Ergebnis deckt sich mit der Tatsache, daß nach 19) in **(113)**

$$A_1 \equiv -\frac{A_1}{B_1}, \quad A_2 \equiv -\frac{A_2}{B_2}, \quad \text{also} \quad A_1 = A_2$$

ist, d. h. die Richtungsfaktoren einander gleich sind.

Dreieck D liefert uns eine Fülle von Anwendungen.

a) Bestimme den Schnittpunkt S der Mittellinie m_a mit der Mittellinie m_b !

$$m_a) \quad 45x + 52y - 559 = 0, \quad m_b) \quad y - 7 = 0, \\ x_s = \frac{1}{3}^3, \quad y_s = 7.$$

b) Zeige, daß die drei Mittellinien sich in einem Punkte schneiden! Rechtwinkliges Koordinatensystem:

c) Bestimme den Schnittpunkt W der beiden Winkelhalbierenden w_γ und w_α !

$$w_\gamma) \quad 9x - 2x - 43 = 0, \quad w_\alpha) \quad 10x + 11x - 112 = 0, \\ x_w = \frac{4}{7}^1, \quad y_w = \frac{3}{7}^4.$$

d) Zeige, daß die sechs Winkelhalbierenden $w_\alpha, w'_\alpha, w_\beta, w'_\beta, w_\gamma, w'_\gamma$ sich zu je drei in einem Punkte schneiden, und bestimme die Koordinaten dieser Schnittpunkte, der Mittelpunkte des Inkreises und der Ankreise!

$$\left(\frac{5}{2} \mid -13\right); \quad (-33 \mid 0); \quad (17 \mid 55).$$

e) Bestimme mittels der Hesseschen Normalform der Seiten die Halbmesser des Inkreises und der Ankreise!

Beispiel:

$$x_w = \frac{4}{7}^1, \quad y_w = \frac{3}{7}^4; \\ AB) \quad \frac{5}{13}x + \frac{1}{13}y - \frac{1}{13}^2 = 0;$$

also:

$$\varrho = \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{7}^1 + \frac{1}{13} \cdot \frac{3}{7}^4 - \frac{1}{13}^2 = -\frac{7}{91}^0 = -\frac{6}{7}^0; \\ \varrho_a = \frac{3}{2}^5, \quad \varrho_b = 28, \quad \varrho_c = 42.$$

f) Welches sind die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Seiten und den Mittellinien?

Man prüfe alle Rechnungsergebnisse an der Abbildung nach!

(119) Bestimmung des Schnittwinkels zweier Geraden im rechtwinkligen Koordinatensystem.

Es ist in Abb. 182 der Winkel φ , den die beiden Geraden g_1 und g_2 miteinander bilden, gleich der Differenz der beiden Winkel ϑ_2 und ϑ_1 , den die Geraden mit der x -Achse einschließen, also

$$\varphi = \vartheta_2 - \vartheta_1.$$

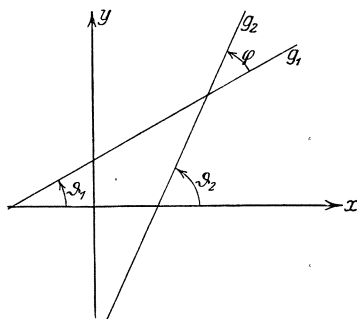


Abb. 182.

Nun ist nach den Entwicklungen von (6) S. 11

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = A_1 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \vartheta_2 = A_2,$$

wobei A_1 und A_2 die Richtungsfaktoren von g_1 bzw. g_2 sind und

$$A_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad A_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

ist. Es ist deshalb, da

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\operatorname{tg} \vartheta_2 - \operatorname{tg} \vartheta_1}{1 + \operatorname{tg} \vartheta_2 \operatorname{tg} \vartheta_1} \text{ ist,} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{A_2 - A_1}{1 + A_1 A_2} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Anwendung auf das Dreieck D (rechth. Koord.):

a) Bestimme die Dreieckswinkel! Anleitung: Die Gleichung der Seite AB lautet:

$$5x + 12y - 199 = 0,$$

die der Seite BC :

$$3x - 4y - 41 = 0;$$

folglich ist

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{5 \cdot (-4) - 12 \cdot 3}{5 \cdot 3 - 12 \cdot 4} = \frac{-56}{-33} = +1,69697, \quad \beta = 59^\circ 29' 23''.$$

b) Bestätige durch Rechnung, daß eine Winkelhalbierende mit den zu ihr gehörigen Seiten gleiche Winkel einschließt! Anleitung: Der Winkel φ zwischen

$$w_\gamma) \quad 9x - 2y - 43 = 0 \quad \text{und} \quad BC) \quad 3x - 4y - 41 = 0$$

ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 \cdot (-2) - 9 \cdot (-4)}{3 \cdot 9 + (-4) \cdot (-2)} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7};$$

der zwischen

$$CA) \quad 15x + 8y - 19 = 0 \quad \text{und} \quad w_\gamma) \quad 9x - 2y - 43 = 0$$

durch

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{9 \cdot 8 - (-2) \cdot 15}{9 \cdot 15 + (-2) \cdot 8} = \frac{102}{119} = \frac{6}{7}; \quad \text{also} \quad \operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \varphi.$$

c) Bestimme die anderen am Dreieck vorkommenden Winkel!

Wir wenden uns zwei Sonderfällen zu.

1. Ist $\varphi = 0^\circ$, so ist $\operatorname{tg} \varphi = 0$, also nach 33) $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$; wir kommen wieder auf Gleichung 32), die die Bedingung für das Parallellaufen von g_1 und g_2 darstellte, und in der Tat sind g_1 und g_2 zueinander parallel, wenn $\varphi = 0$ ist.

2. Ist $\varphi = 90^\circ$, so ist $\operatorname{tg} \varphi = \infty$, also nach 33)

$$A_1 A_2 + 1 = 0, \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (34)$$

Gleichung 34) enthält also die Bedingung für das Senkrechtstehen zweier Geraden: Zwei Geraden stehen aufeinander senkrecht, wenn ihre Richtungsfaktoren zueinander entgegengesetzt reziprok sind.

Dreieck **D**: Beweise, daß die beiden Halbierenden eines Dreieckswinkels und seines Außenwinkels aufeinander senkrecht stehen! Anleitung: Es ist

$$w_\gamma) \quad 9x - 2y - 43 = 0, \quad w'_\gamma) \quad 2x + 9y + 66 = 0;$$

da $9 \cdot 2 + (-2) \cdot 9 \equiv 0$ ist, ist der Beweis erbracht.

Aufgabe: Durch den Punkt $P_0(x_0|y_0)$ ist eine Gerade n zu legen, welche auf der Geraden

$$g) \quad Ax + By + C = 0$$

senkrecht steht. Der Richtungsfaktor von g ist

$$A_1 = -\frac{A}{B};$$

folglich ist der Richtungsfaktor von n nach 34)

$$A_2 = +\frac{B}{A}$$

und demnach nach 23) die Gleichung von n

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0) \quad \text{oder} \quad A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0. \quad 35)$$

Dreieck **D**: a) Es sind die Gleichungen der drei Höhen aufzustellen. Anleitung: Die Gerade CA hat die Gleichung $15x + 8y + 19 = 0$; die Ecke B die Koordinaten $x_B = +23$, $y_B = +7$. Demnach lautet die Gleichung der Höhe h_b

$$15(y - 7) - 8(x - 23) = 0 \quad \text{oder} \quad 8x - 15y - 79 = 0,$$

$$h_a) \quad 4x + 3y - 14 = 0, \quad h_c) \quad 12x - 5y - 76 = 0.$$

Bestimme die Achsenabschnitte und prüfe die Ergebnisse an der Abbildung nach!

b) Bestimme die Fußpunkte der Höhen! Anleitung: Die Seite CA und die Höhe h_b schneiden sich in einem Punkte H_b , dessen Koordinaten $\frac{347}{89}$ bzw. $-\frac{1337}{289}$ sind; $H_a(7\frac{4}{5} | -4\frac{2}{5})$, $H_c(11\frac{48}{9} | 11\frac{149}{69})$. Berechne ferner die Länge der Höhen! Anleitung:

$$h_b = \sqrt{(23 - \frac{347}{89})^2 + (7 + \frac{1337}{289})^2} = 24\frac{1}{2}$$

[s. (116) S. 317]. Der Schnittpunkt H der drei Höhen hat die Koordinaten

$$x_H = 5\frac{9}{8}, \quad y_H = -2\frac{3}{4}.$$

c) Stelle die Gleichungen der Mittelsenkrechten auf! Anleitung: BC hat die Gleichung $3x - 4y - 41 = 0$, der Mittelpunkt M_a von BC die Koordinaten

$$x_{M_a} = +13, \quad y_{M_a} = -\frac{1}{2};$$

folglich ist die Gleichung der Mittelsenkrechten n_a

$$3(y + \frac{1}{2}) + 4(x - 13) = 0 \quad \text{oder} \quad 8x + 6y - 101 = 0;$$

$$n_b) \quad 8x - 15y + 145 = 0, \quad n_c) \quad 24x - 10y + 25 = 0.$$

d) Welches sind die Koordinaten des Mittelpunktes M des Umkreises? Welches ist der Halbmesser r des Umkreises?

$$(x_M = 3\frac{4}{5}\frac{7}{6}, \quad y_M = 11\frac{5}{7}, \quad r = 19\frac{4}{5}\frac{1}{6}).$$

(120) Lehre von den Normalen der ebenen Kurven. Unter der Normalen an eine Kurve in einem ihrer Punkte versteht man die Gerade, die in diesem Punkte auf der zugehörigen Kurventangente senkrecht steht.

Ist (Abb. 183) $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve und $P_0(x_0|y_0)$ einer ihrer Punkte, wobei also $y_0 = f(x_0)$ ist, so hat die Tangente in P_0 den Richtungsfaktor $A_1 = y'_0$ [s. (114)], folglich die Normale den Richtungsfaktor $A_2 = -\frac{1}{y'_0}$. Demnach lautet die Gleichung der Normalen

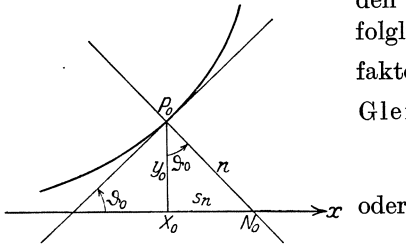


Abb. 183.

$$(y - y_0) = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0)$$

$$(x - x_0) + y'_0(y - y_0) = 0. \quad 36)$$

Beispiel: Zur Parabel $y = \sqrt{2px}$ soll im Punkte $P_0(x_0|y_0)$, wobei $y_0 = \sqrt{2px_0}$ ist, die Normale gelegt werden. Es ist

$$y'_0 = \frac{p}{\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0},$$

daher die Gleichung der Normalen

$$x - x_0 + \frac{p}{y_0}(y - y_0) = 0$$

oder, wenn wir — zur Vermeidung von Irrationalitäten — $x_0 = \frac{y_0^2}{2p}$ setzen:

$$x - \frac{y_0^2}{2p} + \frac{p}{y_0}(y - y_0) = 0$$

bzw.

$$2p y_0 \cdot x + 2p^2 \cdot y - (y_0^3 + 2p^2 y_0) = 0. \quad a)$$

Ist umgekehrt durch irgendeinen Punkt A mit den Koordinaten a und b die Normale zur Parabel zu legen, so müssen wir erst die Koordinaten $x_0|y_0$ des Fußpunktes der Normalen ermitteln; da $x = a$ und $y = b$ die Gleichung a) der Normalen erfüllen müssen, erhalten wir zur Bestimmung der Ordinaten y_0 des Fußpunktes die kubische Gleichung

$$y_0^3 - 2p(a - p)y_0 - 2bp^2 = 0.$$

Man kann also im allgemeinen von einem Punkte auf eine Parabel drei Lote fällen, von denen allerdings zwei imaginär sein können. Liegt beispielsweise A auf der Parabelachse ($b = 0$), so lautet die Gleichung

$$y_0^3 - 2p(a - p)y_0 = 0,$$

also ist

$$y_0 = 0 \quad \text{bzw.} \quad y_0 = \pm \sqrt{2p(a - p)},$$

und wir erkennen, daß jetzt — wie vorauszusehen war — das eine Lot die Parabelachse ist, während die Fußpunkte der beiden anderen Lote

$$x_0 = a - p, \quad y_0 = \pm \sqrt{2p(a - p)}$$

sind; es gibt demnach in diesem Falle nur so lange drei Lote, als $a > p$ ist.

In Ergänzung zu den in (115) S. 313f. gebrachten Ausführungen über die Tangente sei noch folgendes aus der Kurvenlehre hier erwähnt. Man nennt (s. Abb. 183) die Strecke $P_0N_0 = n$ der Normalen, die vom Kurvenpunkte P_0 bis zum Schnittpunkte N_0 der Normalen mit der Abszissenachse reicht, die Länge der Normalen, und ihre Projektion $X_0N_0 = s_n$ auf die Abszissenachse die Subnormale. Für sie ergeben sich aus Abb. 183, da $\operatorname{tg} \vartheta_0 = y'_0$ ist, die Formeln

$$s_n = y_0 \cdot y'_0, \quad n = y_0 \cdot \sqrt{1 + y_0'^2}. \quad (37)$$

So ist die Subnormale der obigen Parabel

$$s_n = y_0 \cdot \frac{p}{y_0} = p.$$

Die Subnormale der Parabel ist für alle Punkte gleich dem Parameter. Hieraus folgt für die Konstruktion der Parabelnormalen eine einfache Regel (Abb. 184): Man geht von der Achsenprojektion X des Parabelpunktes P um die Strecke $XN = p$ auf der Achse vorwärts; PN ist dann die Normale im Punkte P und folglich das in P hierauf errichtete Lot die Tangente.

Daß übrigens die Parabel die einzige Kurve ist, deren Subnormale konstant ist, läßt sich leicht ableiten. Soll nämlich $y \cdot \frac{dy}{dx} = p$ sein (Differentialgleichung!), so muß

$$y \cdot dy = p \cdot dx \quad \text{oder} \quad y^2 = 2p(x - a)$$

sein. Letzteres ist aber die Gleichung einer Parabel, deren Achse die x -Achse ist und deren Scheitel die Koordinaten $a|0$ hat.

Um auch die Kurve zu finden, deren Normale die für jeden Punkt konstante Länge c hat, müssen wir ansetzen

$$y \sqrt{1 + y'^2} = c;$$

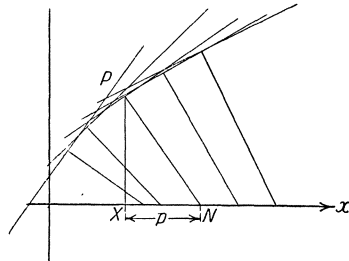


Abb. 184.

wir lösen nach y' auf und erhalten

$$\frac{dy}{dx} \equiv y' = \sqrt{\left(\frac{c}{y}\right)^2 - 1}.$$

Trennen wir die Veränderlichen, so ergibt sich

$$\frac{y \, dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = dx$$

und durch Integration

$$-\sqrt{c^2 - y^2} = x - a \quad \text{oder} \quad (x - a)^2 + y^2 = c^2.$$

Letzteres ist aber die Gleichung eines Kreises [s. (123) S. 330], dessen Halbmesser gleich c ist und dessen Mittelpunkt die Koordinaten $x|0$ hat. Dieses Ergebnis stimmt überein mit der Tatsache, daß die Normale für jeden Punkt eines Kreises vom Halbmesser c , durch dessen Mittelpunkt die Abszissenachse geht, in der Tat gleich dem Halbmesser ist.

(121) D. Geometrische Örter. Zu den wichtigsten Aufgaben, die die analytische Geometrie zu lösen hat, gehört die Ermittlung des geometrischen Ortes eines Punktes, der sich nach vorgeschriebenem Gesetze bewegt. Die hierbei einzuschlagenden Verfahren sollen an der Hand einiger Beispiele erörtert werden. Wir beginnen mit der folgenden

Aufgabe: Gegeben ist ein Winkel $BAC = \alpha$ und eine Strecke s ; ein Punkt P bewegt sich so, daß die Summe der beiden Lote, die man von ihm auf die Schenkel AB und AC von α fällt, stets gleich der gegebenen Strecke s ist.

Ist die Aufgabe in dieser Allgemeinheit gestellt, so muß man sich stets erst über das Koordinatensystem schlüssig werden. Daß man mit Erfolg verschiedene Wege einschlagen kann, wollen wir an diesem Beispiele zeigen.

Man kann von der Erwägung ausgehen, daß, solange keine triftigen Gegengründe vorliegen, man am besten ein rechtwinkliges Koordinatensystem wählt; dies wollen wir hier auch tun. Da (Abb. 185) der Punkt A als Scheitel von α eine bevorzugte Rolle spielt, wollen wir ihn als Nullpunkt wählen, und da die beiden Schenkel hervorgehobene Geraden sind, wollen wir den einen, nämlich AB , als positive x -Achse wählen;

die y -Achse ist dann das in A auf AB errichtete Lot. Wir konstruieren uns nun einen der unendlich vielen möglichen Punkte P , indem wir

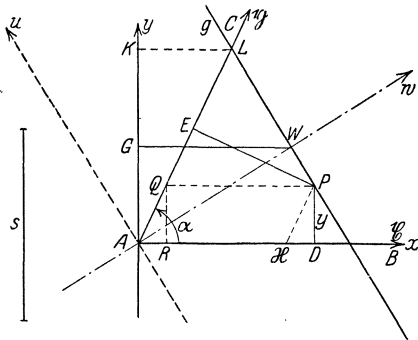


Abb. 185.

zu AB in einem beliebigen Abstände y und zu AC in dem Abstände $s - y$ die Parallelen ziehen; beide Parallelen mögen sich in P schneiden. Die Koordinaten von P seien $x = AD$ und $y = DP$. Die Parallele zu AB möge AC in Q schneiden, QR sei das von Q auf AB gefällte Lot. Dann ist

$$x = AD = AR + RD = AR + QP \quad \text{oder} \quad x = y \operatorname{ctg} \alpha + \frac{s - y}{\sin \alpha}.$$

Hiermit haben wir eine Gleichung gewonnen, welche die Koordinaten x und y des Punktes P erfüllen müssen; es ist dies also die Gleichung des geometrischen Ortes von P . Formen wir die Gleichung um, so erhalten wir

$$x \cdot \sin \alpha + y \cdot (1 - \cos \alpha) = s.$$

Die Gleichung ist in x und y linear; die Bahn des Punktes P ist also eine Gerade g . Wir können leicht die Hessesche Normalform dieser Geraden finden. Da nämlich

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

ist, so erhalten wir nach Division durch $2 \sin \frac{\alpha}{2}$

$$x \cos \frac{\alpha}{2} + y \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{s}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = 0.$$

Das von O auf die Gerade gefällte Lot hat also die Länge

$$d = \frac{s}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

und es schließt mit der x -Achse den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ ein; es fällt demnach auf die Winkelhalbierende w von α . Um die Gerade zu finden, brauchen wir nur auf der y -Achse die Strecke $AG = \frac{s}{2}$ abzutragen und durch G die Parallele zu AB zu ziehen, welche w in W schneidet; das in W auf w errichtete Lot ist die Gerade g (da $AW = \frac{s}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ ist).

Auf einen zweiten Lösungsweg kommt man durch folgende Erwägung. Die Kurve, die die Bahn des Punktes P ist, muß symmetrisch zur Winkelhalbierenden w von α liegen; denn der zu P bezüglich w symmetrisch liegende Punkt P' hat von AB einen Abstand, der gleich PE , und von AC einen solchen, der gleich PD ist; die Summe beider muß demnach wieder gleich s , P' daher ebenfalls ein Punkt des gesuchten Ortes sein. Man wählt nun gern eine solche Symmetrielinie als die eine Achse des zugrunde zu legenden Koordinatensystems, weil bei der mathematischen Behandlung meistens erhebliche Vereinfachungen

eintreten. Es sei also w die eine Koordinatenachse. Wollen wir bei einem rechtwinkligen Koordinatensystem bleiben, so muß die andere Koordinatenachse u in A auf w senkrecht stehen, und die Koordinaten von P sind im wu -System $AW = w$, $WP = u$. Wir projizieren den Linienzug AWP auf PD und erhalten (Projektionssatz!)

$$PD = AW \sin \frac{\alpha}{2} + WP \cos \frac{\alpha}{2} = w \sin \frac{\alpha}{2} + u \cos \frac{\alpha}{2};$$

nun projizieren wir AWP auf PE und erhalten

$$PE = +Aw \sin \frac{\alpha}{2} - WP \cos \frac{\alpha}{2} = w \sin \frac{\alpha}{2} - u \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Da $PD + PE = s$ sein soll, so ergibt sich als Gleichung des geometrischen Ortes:

$$2w \sin \frac{\alpha}{2} = s \quad \text{oder} \quad w = \frac{s}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

In dieser Gleichung tritt die Veränderliche u überhaupt nicht auf; der Ort ist folglich eine Gerade, die parallel zur u -Achse, also senkrecht zur Winkelhalbierenden w ist und auf ihr die Strecke $\frac{s}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ abschneidet

— ein Ergebnis, das mit dem obigen übereinstimmt.

Will man die Rechnung für ein schiefwinkliges Koordinatensystem durchführen, so liegt es nahe, als Achsen die Schenkel von α zu wählen, und zwar sei AB die ξ -Achse und AC die η -Achse. Die Koordinaten von P sind dann $A\xi = \xi$ und $\xi P = \eta$, und es ist

$$PD = \xi P \sin \alpha = \eta \sin \alpha$$

und

$$PE = QP \sin \alpha = A\xi \sin \alpha = \xi \sin \alpha,$$

folglich

$$\xi \sin \alpha + \eta \sin \alpha = s \quad \text{oder} \quad \xi + \eta = \frac{s}{\sin \alpha}.$$

Der Ort von P ist mithin eine Gerade, die auf beiden Schenkeln das gleiche Stück, nämlich $a = \frac{s}{\sin \alpha}$ abschneidet. Zur Konstruktion von a trägt man auf einem in A zu einem Schenkel errichteten Lote die Strecke $AK = s$ ab und zieht durch K die Parallele zu diesem Schenkel, welche den anderen Schenkel in L schneide; dann ist $AL = a$.

(122) Nicht immer liegen die Verhältnisse so einfach wie in der eben durchgeführten Aufgabe; häufig muß man eine veränderliche Hilfsgröße, einen Parameter, einführen, der zuletzt wieder zu eliminieren ist. Wir wollen dieses Verfahren an einer weiteren Aufgabe erläutern.

Aufgabe: In ein gegebenes Viereck $ABCD$ soll ein Parallelogramm $EFGH$ so eingezeichnet werden, daß seine Seiten parallel den

Diagonalen des Vierecks sind. Wo liegt der Mittelpunkt M des Parallelogramms?

Wir werden in diesem Falle am zweckmäßigsten die Achsen des zu wählenden Koordinatensystems in die Diagonalen des Vierecks legen, und zwar sei (Abb. 186)

AC die x -Achse, BD die y -Achse, und der Schnittpunkt O der Nullpunkt. Das Viereck werde dann so in dem Koordinatensystem festgelegt, daß wir uns die Strecken $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ und $OD = d$ geben. Die Koordinaten der Eckpunkte sind dann $A(a|0)$, $B(0|b)$, $C(c|0)$, $D(0|d)$. Kennen wir nun eine Ecke E des Parallelogramms, so sind die übrigen Ecken und damit das Parallelogramm selbst und sein Mittel-

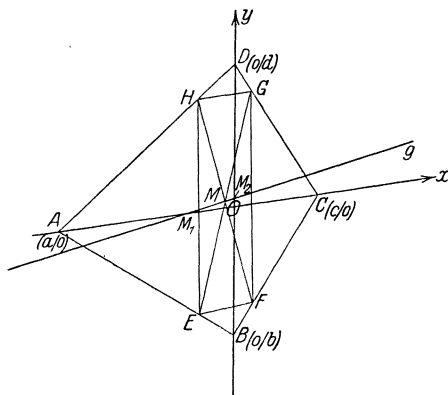


Abb. 186.

punkt M mitbestimmt. Nun können wir E auf AB durch sein Teilverhältnis λ bezüglich der Punkte A und B festlegen; dann ergeben sich seine Koordinaten mit Hilfe der Formeln 20) S. 308 zu

$$x_E = \frac{a + \lambda \cdot 0}{1 + \lambda} = \frac{a}{1 + \lambda}, \quad y_E = \frac{0 + \lambda b}{1 + \lambda} = \frac{\lambda b}{1 + \lambda}.$$

Da den Punkten F bezüglich C und B , G bezüglich C und D , X bezüglich A und D das gleiche Teilverhältnis λ zukommt, so sind die Koordinaten dieser Punkte

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{c}{1 + \lambda}, & y_F &= \frac{\lambda b}{1 + \lambda}; & x_G &= \frac{c}{1 + \lambda}, & y_G &= \frac{\lambda d}{1 + \lambda}; \\ x_H &= \frac{a}{1 + \lambda}, & y_H &= \frac{\lambda d}{1 + \lambda}. \end{aligned}$$

Die Koordinaten von M seien x und y ; da M der Mittelpunkt von EG ist, so ist nach 21) S. 309

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{1 + \lambda} + \frac{c}{1 + \lambda} \right) = \frac{a + c}{2(1 + \lambda)}, \quad y = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda b}{1 + \lambda} + \frac{\lambda d}{1 + \lambda} \right) = \frac{\lambda(b + d)}{2(1 + \lambda)}; \quad \text{a)}$$

zu den gleichen Ergebnissen führen die Koordinaten von F und H . a) gibt uns die Koordinaten von M in ihrer Abhängigkeit vom Parameter λ . λ selbst kann unendlich viele Werte annehmen, entsprechend der Tatsache, daß sich in das Viereck $ABCD$ unendlich viele Parallelogramme von der geforderten Eigenschaft zeichnen lassen, und zwar ist jedem Werte von λ ein solches Parallelogramm zugeordnet. Die Gesamtheit der Mittelpunkte aller dieser Parallelogramme erhalten

wir, wenn wir aus den beiden Gleichungen a) λ eliminieren. Das Ergebnis ist eine unmittelbare Beziehung zwischen den Koordinaten der Punkte M , folglich die Gleichung des geometrischen Ortes von M . Da

$$\frac{2x}{a+c} = \frac{1}{1+\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{2y}{b+d} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

ist, so ist

$$\frac{2x}{a+c} + \frac{2y}{b+d} = 1$$

die Gleichung des Ortes von M . Wir bekommen eine lineare Gleichung zwischen x und y ; folglich bewegt sich M auf einer Geraden, deren Achsenabschnitte

$$OM_1 = \frac{a+c}{2} \quad \text{bzw.} \quad OM_2 = \frac{b+d}{2}$$

sind. M_1 ist demnach der Mittelpunkt von AC , ebenso M_2 der Mittelpunkt von BD . Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller dem Viereck einbeschriebenen Parallelogramme, deren Seiten zu den Diagonalen des Vierecks parallel sind, ist die Verbindungsgerade der beiden Mittelpunkte dieser Diagonalen.

§ 4. Das Wichtigste aus der analytischen Geometrie des Kreises.

(123) Die Untersuchungen dieses Paragraphen beziehen sich, soweit ein Parallelkoordinatensystem in Betracht kommt, auf ein recht-

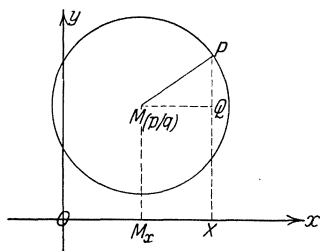


Abb. 187.

winkliges Koordinatensystem. Definieren wir die Kreislinie als den geometrischen Ort aller Punkte P , welche von einem festen Punkte M , dem Mittelpunkte, den gegebenen Abstand a (Radius, Halbmesser) haben, so müssen die Koordinaten x und y eines beliebigen Punktes P des Kreises eine Gleichung erfüllen, die sich folgendermaßen ergibt: Es ist nach (107) S. 291 (s. Abb. 187)

$$\overline{MP}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{QP}^2 = \overline{M_x X}^2 + \overline{QP}^2 = (OX - OM_x)^2 + (XP - XQ)^2.$$

Sind $p|q$ die Koordinaten von M , so folgt hieraus

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2 \quad (38)$$

als die Gleichung des Kreises.

Dreieck D : a) Der Umkreis hat den Mittelpunkt $(3\frac{4}{5} | 11\frac{1}{2})$ und den Halbmesser $19\frac{1}{6}$ [s. (119)]; stelle die Gleichung des Kreises auf!

$$(x - 3\frac{4}{5})^2 + (y - 11\frac{1}{2})^2 = (19\frac{1}{6})^2$$

oder

$$28x^2 + 28y^2 - 215x - 656y - 6647 = 0.$$

b) Der Inkreis hat den Mittelpunkt $(\frac{4}{7} | \frac{3}{7})$ und den Halbmesser $\frac{6}{7}$ [s. (118) S. 321]; wie lautet seine Gleichung?

$$7x^2 + 7y^2 - 82x - 68y - 109 = 0.$$

c) Bestimme ebenso die Gleichungen der Ankreise!

$$x^2 + y^2 - 51x + 26y + 513 = 0; \quad x^2 + y^2 + 66x + 305 = 0;$$

$$x^2 + y^2 - 34x - 110y + 1550 = 0.$$

Kehren wir zur Gleichung 38) zurück, die wir umformen in

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - a^2 = 0. \quad 38a)$$

Wir erkennen, daß die Kreisgleichung in x und y vom zweiten Grade ist; der Kreis ist eine Kurve zweiter Ordnung. Bemerkenswert an der Gleichung 38 a) ist, daß von den drei in einer Gleichung zweiten Grades möglichen quadratischen Gliedern x^2 , xy , y^2 das gemischt quadratische Glied, d. h. das Glied mit dem Faktor xy , fehlt, und daß die beiden rein quadratischen Glieder x^2 und y^2 denselben Beiwert, in 38 a) den Beiwert 1, haben. Wir wollen zeigen, daß jede quadratische Gleichung in x und y , welche diese beiden Eigenschaften hat, im rechtwinkligen Koordinatensystem einen Kreis als Bild hat. Die allgemeinste Gleichung dieser Art hat die Form

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0. \quad 39)$$

Wir dividieren durch A

$$x^2 + 2\frac{B}{A}x + y^2 + 2\frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0$$

und erhalten durch quadratische Ergänzungen

$$\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{A}\right)^2 = \frac{1}{A^2}(B^2 + C^2 - AD). \quad 39a)$$

Vergleichen wir die zuletzt gefundene Form mit der Gleichung 38), so erkennen wir, daß sie in der Tat die Gleichung eines Kreises darstellt; sein Mittelpunkt M hat die Koordinaten

$$p = -\frac{B}{A}, \quad q = -\frac{C}{A},$$

und sein Halbmesser ist

$$a = \frac{1}{A}\sqrt{B^2 + C^2 - AD}$$

ist. Ist der Ausdruck $B^2 + C^2 - AD = 0$, so ist der Halbmesser $a = 0$, und der einzige reelle Punkt, dessen Koordinaten die Gleichung 39) erfüllen, ist der Mittelpunkt; ist $B^2 + C^2 - AD < 0$, so ist der Halbmesser sogar imaginär, und es gibt keinen wirklichen Punkt,

dessen Koordinaten Gleichung 39) erfüllen; wir haben es mit einem sogenannten imaginären Kreise zu tun.

Zahlenbeispiel zu der obigen Ableitung: Die Kreisgleichung laute:

$$7x^2 + 7y^2 - 82x - 68y - 109 = 0;$$

wir können sie folgendermaßen schreiben:

$$(x - \frac{41}{7})^2 + (y - \frac{34}{7})^2 = \frac{1681}{49} + \frac{1156}{49} + \frac{763}{49}$$

oder

$$(x - \frac{41}{7})^2 + (y - \frac{34}{7})^2 = (\frac{60}{7})^2;$$

folglich hat der Mittelpunkt die Koordinaten $(\frac{41}{7} | \frac{34}{7})$, und der Halbmesser ist $\frac{60}{7}$.

Die vier Konstanten A, B, C, D bestimmen die Kreisgleichung und damit den Kreis völlig. Wenn wir jedoch Gleichung 39) durch irgendeine konstante Größe dividieren, so bekommen wir zwar eine neue Gleichung in x und y ; aber ihr geometrisches Bild ist der nämliche Kreis. Wir sehen hieraus, daß es nicht auf die vier Größen A, B, C, D , sondern nur auf ihr gegenseitiges Verhältnis ankommt, und daß der Kreis demnach schon durch drei voneinander unabhängige Bedingungen gegeben ist. Insbesondere folgt hieraus der Satz:

Durch drei Punkte läßt sich stets ein, aber auch nur ein Kreis legen.

Sind die drei Punkte durch ihre Koordinaten $x_1 | y_1, x_2 | y_2, x_3 | y_3$ gegeben, so müssen die drei Gleichungen bestehen:

$$A(x_1^2 + y_1^2) + 2Bx_1 + 2Cy_1 + D = 0,$$

$$A(x_2^2 + y_2^2) + 2Bx_2 + 2Cy_2 + D = 0,$$

$$A(x_3^2 + y_3^2) + 2Bx_3 + 2Cy_3 + D = 0.$$

Aus ihnen läßt sich das Verhältnis $A:B:C:D$ berechnen, und folglich, da sie in A, B, C, D linear sind, die Gleichung des Kreises aufstellen.

Anwendung auf das Dreieck **D**: a) Der Feuerbachsche Kreis enthält die Mittelpunkte der Seiten, die Fußpunkte der Höhen und die Mittelpunkte der an den Ecken liegenden Höhenabschnitte. Wie lautet seine Gleichung in unserem Falle? Wir legen ihn durch die drei Seitenmittelpunkte

$$M_a(13 | -\frac{1}{2}), \quad M_b(-5 | 7), \quad M_c(5 | \frac{39}{2}).$$

Es muß also sein

$$\frac{677}{4}A + 26B - C + D = 0,$$

$$74A - 10B + 14C + D = 0,$$

$$\frac{241}{4}A + 10B + 29C + D = 0,$$

woraus folgt

$$B = -\frac{513}{112}A, \quad C = -\frac{65}{14}A, \quad D = -\frac{3069}{56}A.$$

Die Gleichung des Feuerbachschen Kreises lautet demnach:

$$56(x^2 + y^2) - 513x - 520y - 3069 = 0.$$

Berechne die Lage seines Mittelpunktes und die Länge seines Halbmessers und zeige, daß er durch die Fußpunkte der Höhen und die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte geht!

b) Lege durch die Ecken des Dreiecks den Kreis und zeige, daß seine Gleichung mit der schon oben gefundenen Gleichung des umschriebenen Kreises übereinstimmt!

(124) Der Kreis als geometrischer Ort. Wir wollen den aus der Planimetrie bekannten Satz beweisen: Die Spitzen aller Dreiecke von festen Grundlinien, welche einen gegebenen Winkel an der Spitze haben, liegen auf dem über der Grundlinie als Sehne geschlagenen Kreisbogen, der den gegebenen Winkel als Umfangswinkel faßt.

Ist (Abb. 188) $AB = c$ die gegebene Grundlinie und γ der gegebene Winkel, so können wir eins von den unendlich vielen Dreiecken erhalten, indem wir durch A einen beliebigen Strahl ziehen und durch B eine Gerade, welche mit diesem den Winkel γ einschließt; der Schnittpunkt ist ein Eckpunkt C . Zur analytischen Lösung wählen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem, und zwar am zweckmäßigsten so, daß die x -Achse auf AB und der Nullpunkt auf den Mittelpunkt von AB fällt; dann sind die Koordinaten von $A\left(-\frac{c}{2} \mid 0\right)$ und von $B\left(+\frac{c}{2} \mid 0\right)$; C möge die Koordinaten $x \mid y$ haben. Die Gerade AC schließt mit der x -Achse einen Winkel ϑ_1 ein, der sich nach (107) S. 291 ergibt zu

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{y}{x + \frac{c}{2}};$$

der Winkel ϑ_2 , den BC mit der x -Achse einschließt, ergibt sich in gleicher Weise zu

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{y}{x - \frac{c}{2}}.$$

Nun ist $\gamma = \vartheta_2 - \vartheta_1$; folglich

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_2 - \operatorname{tg} \vartheta_1}{1 + \operatorname{tg} \vartheta_2 \operatorname{tg} \vartheta_1}$$

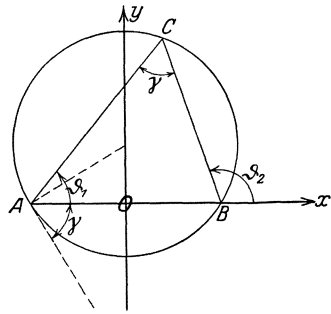


Abb. 188.

oder wenn wir einsetzen,

$$\frac{\frac{y}{x - \frac{c}{2}} - \frac{y}{x + \frac{c}{2}}}{1 + \frac{y^2}{x^2 - \frac{c^2}{4}}} = \operatorname{tg} \gamma, \quad \frac{cy}{x^2 + y^2 - \frac{c^2}{4}} = \operatorname{tg} \gamma,$$

$$x^2 + y^2 - cy \cdot \operatorname{ctg} \gamma - \frac{c^2}{4} = 0.$$

Der geometrische Ort von C ist also in der Tat ein Kreis; schreiben wir seine Gleichung in der Form

$$x^2 + \left(y - \frac{c}{2} \operatorname{ctg} \gamma\right)^2 = \frac{c^2}{4 \sin^2 \gamma},$$

so können wir ablesen, daß sein Mittelpunkt die Koordinaten $x = 0$, $y = \frac{c}{2} \operatorname{ctg} \gamma$ hat, während sein Halbmesser gleich $\frac{c}{2 \sin \gamma}$ ist, woraus die bekannte Konstruktion folgt.

Beweise den Apollonischen Satz: Der Ort der Spitzen aller über derselben Grundlinie AB errichteten Dreiecke, deren anderes Seitenpaar das konstante Verhältnis λ hat, ist der Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden AB liegt und der die Strecke AB innen und außen im Verhältnis λ teilt (Apollonischer Kreis).

(125) Der Kreis in Verbindung mit anderen geometrischen Gebilden.

a) Der Kreis und die Gerade: Hier kommt in erster Linie die Ermittlung der Schnittpunkte beider Gebilde in Frage. Die Koordinaten x_s und y_s eines solchen müssen sowohl die Gleichung des Kreises als auch die Gleichung der Geraden, also eine quadratische und eine lineare Gleichung erfüllen. Es gibt demnach im allgemeinen zwei Wertepaare $x_s|y_s$ und folglich zwei Schnittpunkte zwischen Kreis und Gerade. Allerdings sind hierbei drei Fälle zu berücksichtigen. Hat die quadratische Gleichung zwei reelle, voneinander verschiedene Lösungen, so sind die beiden Schnittpunkte reell, die Gerade ist Sekante des Kreises. Sind die beiden Lösungen reell und gleich, so fallen die beiden Schnittpunkte in einen zusammen, und die Gerade ist Tangente an den Kreis. Sind schließlich die beiden Lösungen komplex, so nennt man die Schnittpunkte imaginär, die Gerade meidet den Kreis.

Dreieck D : a) Bestätige durch Rechnung, daß der Umkreis die Seiten in den Eckpunkten schneidet.

b) In welchen Punkten schneidet der Feuerbachsche Kreis die Seiten, die Höhen, die Mittellinien, die Winkelhalbierenden, die Mittelsenkrechten? Anleitung: Die Seite BC hat die Gleichung

$$3x - 4y - 41 = 0;$$

wir setzen $4y = 3x - 41$ in die Gleichung des Feuerbachschen Kreises

$$56x^2 + 56y^2 - 513x - 520y - 3069 = 0$$

ein und erhalten für x die Gleichung

$$25x^2 - 504x + 2327 = 0.$$

Hieraus ergibt sich $x_1 = 13$, $x_2 = \frac{1}{2}\frac{79}{5}$, und daher $y_1 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{2}\frac{2}{5}$; folglich sind die Koordinaten der beiden Schnittpunkte

$$13 \mid -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad 7\frac{4}{5} \mid -4\frac{2}{5}.$$

c) Zeige durch Rechnung, daß die Seiten Tangenten an den Inkreis und die Ankreise sind, und bestimme die Berührungspunkte! Anleitung: $BC) 3x - 4y - 41 = 0$. Inkreis:

$$7x^2 + 7y^2 - 82x - 68y - 109 = 0.$$

Setzen wir wieder $4y = 3x - 41$ in die Gleichung des Kreises ein, so erhalten wir die quadratische Gleichung $x^2 - 22x + 121 = 0$, die die Doppellösung $x = 11$ hat. Demnach fallen die beiden Schnittpunkte in der Tat in einen Punkt zusammen, der die Koordinaten $11 \mid -2$ hat; die Gerade BC ist Tangente.

Für den Sonderfall, daß der Mittelpunkt des Kreises im Nullpunkt liegt, die Gleichung des Kreises also lautet $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, möge die Gleichung der Geraden in der Hesseschen Normalform vorliegen:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = 0.$$

Löst man die Gleichungen nach x und y auf, so ergibt sich

$$x = d \cos \alpha + \varepsilon \sqrt{a^2 - d^2} \sin \alpha \quad \text{und} \quad y = d \sin \alpha - \varepsilon \sqrt{a^2 - d^2} \cos \alpha,$$

wobei $\varepsilon^2 = 1$ ist. Man sieht in Übereinstimmung mit der Anschauung, daß es zwei reelle, getrennte Schnittpunkte gibt, wenn $a > d$, d. h. wenn der Halbmesser größer als der Abstand der Geraden vom Mittelpunkt ist; die Schnittpunkte fallen in einen Punkt zusammen, wenn $a = d$ ist; beide Kurven meiden sich, wenn $a < d$ ist. Im Falle $a = d$ sind die Koordinaten des Berührungspunktes

$$x_0 = a \cos \alpha, \quad y_0 = a \sin \alpha$$

oder

$$\cos \alpha = \frac{x_0}{a}, \quad \sin \alpha = \frac{y_0}{a};$$

setzen wir diese Werte in die Gleichung der Geraden ein, so erhalten wir als Gleichung der Tangente $xx_0 + yy_0 = a^2$ wie früher [s. (114) S. 312].

b) Mehrere Kreise. Sind

$$\text{und} \quad \begin{aligned} k_1 &\equiv x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0 \\ k_2 &\equiv x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der beiden Kreise k_1 und k_2 , so ist

$$k_1 + \lambda k_2 \equiv (1 + \lambda)(x^2 + y^2) + 2(a_1 + \lambda a_2)x + 2(b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2) = 0, \quad (40)$$

wie man sieht, ebenfalls die Gleichung eines Kreises, und zwar muß dieser durch die beiden Schnittpunkte von k_1 und k_2 gehen, mögen sie reell oder imaginär sein. Denn sind x_s und y_s die Koordinaten eines solchen Schnittpunktes, so müssen sie beide Gleichungen $k_1 = 0$ und $k_2 = 0$ und folglich auch die Gleichung $k_1 + \lambda k_2 = 0$ erfüllen. Da λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann und zu jedem Werte von λ ein solcher Kreis gehört, so lassen sich durch diese beiden Schnittpunkte unendlich viele Kreise legen. Die Gesamtheit aller dieser Kreise nennt man ein **Kreisbüschel**. Setzt man insbesondere $\lambda = -1$, so erhält man aus 40) die Gleichung

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0,$$

also eine lineare Gleichung. In diesem Sonderfalle artet der Kreis in eine Gerade aus; sie ist die Verbindungsgerade der Schnittpunkte aller Kreise des Büschels und heißt die **Potenzlinie** des Büschels.

Der Mittelpunkt des Kreises von Gleichung 40) hat die Koordinaten

$$x = -\frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda}, \quad y = -\frac{b_1 + \lambda b_2}{1 + \lambda};$$

er teilt folglich nach Formel 20) S. 308 die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von k_1 und k_2 im Verhältnis λ . Die Mittelpunkte aller Kreise des Büschels liegen demnach auf einer Geraden, deren Gleichung nach Elimination von λ sich ergibt zu

$$(b_1 - b_2)x - (a_1 - a_2)y + a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0.$$

Da ihr Richtungsfaktor

$$A_1 \equiv \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2},$$

der der Potenzlinie

$$A_2 \equiv -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

ist, demnach $A_1 \cdot A_2 = -1$ ist, so muß diese Mittelpunktslinie auf der Potenzlinie senkrecht stehen.

Dreieck D: Der der Seite BC anliegende Ankreis hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 51x + 26y + 513 = 0,$$

der der Seite CA anliegende die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 66x + 305 = 0.$$

Stelle die Gleichung des zugehörigen Büschels auf; suche insbesondere die Gleichung des durch C gehenden Kreises des Büschels und die Potenzlinie. Die Kreise haben keinen reellen Schnittpunkt. Zwei

Kreise des Büschels schrumpfen zu Punkten zusammen; welche sind dies?

Büschel: $(1 + \lambda)(x^2 + y^2) + (-51 + 66\lambda)x + 26y + (513 + 305\lambda) = 0$.

Soll der Kreis durch $(3 | -8)$ gehen, so muß sein

$$(1 + \lambda)(3^2 + 8^2) + (-51 + 66\lambda) \cdot 3 + 26 \cdot (-8) + (513 + 305\lambda) = 0;$$

hieraus ergibt sich $\lambda = -\frac{2}{6}\frac{5}{4}$, und demnach heißt die Gleichung des durch C gehenden Kreises

$$3(x^2 + y^2) - 378x + 128y + 1939 = 0.$$

Die Gleichung der Potenzlinie lautet

$$9x - 2y - 16 = 0.$$

Um die letzte Aufgabe zu lösen, formen wir zuerst die Büschelgleichung um in

$$\left[x + \frac{-51 + 66\lambda}{2(1 + \lambda)}\right]^2 + \left[y + \frac{13}{1 + \lambda}\right]^2 = \left[\frac{-51 + 66\lambda}{2(1 + \lambda)}\right]^2 + \left[\frac{13}{1 + \lambda}\right]^2 - \frac{513 + 305\lambda}{1 + \lambda}.$$

Soll der Halbmesser des Kreises gleich Null werden, so muß nach Formel 39 a) die rechte Seite verschwinden; hieraus ergibt sich für λ die quadratische Gleichung

$$3136\lambda^2 - 10004\lambda + 1225 = 0,$$

deren Lösungen sind

$$\lambda_1 = \frac{4}{1}\frac{9}{6} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{2}{1}\frac{5}{6}.$$

Die beiden Kreise schrumpfen demnach zusammen auf die beiden Punkte

$$\left(-\frac{9}{5} \mid -\frac{1}{5}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{3}{1}\frac{2}{1} \mid -\frac{1}{1}\frac{9}{7}\right).$$

— In ähnlicher Weise stelle man sich weitere hierher gehörige Aufgaben aus dem Dreieck D zusammen! Man beweise u. a., daß der Feuerbachsche Kreis sowohl den Inkreis, als auch die Ankreise berührt [Berührungspunkte: $(14 \frac{9}{2} \mid 6 \frac{8}{2})$; $(12 \frac{7}{6} \frac{5}{3} \mid -1 \frac{4}{6} \frac{4}{3})$; $(-5 \frac{8}{4} \frac{9}{4} \mid 3 \frac{1}{4} \frac{8}{4} \frac{7}{4})$; $(6 \frac{5}{8} \frac{4}{8} \frac{7}{8} \mid 14 \frac{1}{8} \frac{2}{8} \frac{8}{8} \frac{9}{8})$]. Nachprüfung an der Zeichnung!

(126) Der Kreis im Polarkoordinatensystem. Sind (Abb. 189) c und γ die Polarkoordinaten des Mittelpunktes M , und a der Halbmesser des Kreises, so folgt aus dem Kosinussatze für die Polarkoordinaten r und ϑ eines beliebigen Kreispunktes die Gleichung

$$r^2 - 2cr \cos(\vartheta - \gamma) + c^2 - a^2 = 0. \quad 41)$$

Ist insbesondere $c = a$, geht also der Kreis durch den Nullpunkt, so lautet die Gleichung

$$r = 2c \cos(\vartheta - \gamma). \quad 41 a)$$

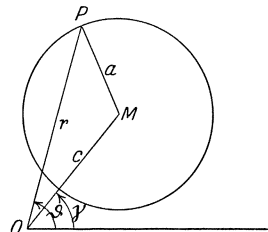


Abb. 189.

Da Gleichung 41) in r vom zweiten Grade ist, ergeben sich für eine gegebene Amplitude ϑ stets zwei Werte r_1 und r_2 ; d. h. jede durch einen festen Punkt O gehende Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten. Wohl können diese Punkte imaginär sein — dies tritt ein, wenn die Lösungen der quadratischen Gleichung komplex sind —; da andererseits das Absolutglied der quadratischen Gleichung gleich $c^2 - a^2$ ist, also von der Amplitude ϑ völlig unabhängig ist, erhalten wir den weiteren Satz:

Alle von einem Punkte O ausgehenden Strahlen schneiden den Kreis in zwei Punkten, für welche das Produkt ihrer Abstände von O konstant ist; es ist gleich der Differenz der Quadrate aus Mittelpunktsabstand von O und Kreishalbmesser.

Die Größe $c^2 - a^2$ nennt man die Potenz des Punktes O bezüglich des Kreises.

Kreisverwandtschaft. Zwei Punkte P und P' heißen zueinander kreisverwandt bezüglich des Kreises vom Halbmesser p , wenn sie auf dem gleichen vom Kreismittelpunkt O ausgehenden Strahle liegen, und das Produkt ihrer Mittelpunktsabstände r und r' gleich dem Quadrat des Kreishalbmessers ist, wenn also die Gleichung erfüllt ist

$$r \cdot r' = p^2.$$

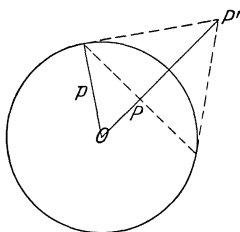


Abb. 190.

Liegt der eine Punkt P innerhalb des Kreises, so muß folglich der andere Punkt P' außerhalb liegen. Man kann zu einem Punkte P leicht den kreisverwandten P' konstruieren, wenn man die

durch ihn senkrecht zu OP gezogene Sehne mit dem Kreise zum Schnitt bringt und in den Schnittpunkten die Tangenten an den Kreis legt; sie schneiden sich in P' . Umgekehrt legt man von P' die Tangenten an den Kreis und bringt die Berührungssehne mit OP' zum Schnitt.

Der geometrische Ort aller zu den Punkten einer Kurve k kreisverwandten Punkte ist eine Kurve k' ; man nennt die beiden Kurven zueinander kreisverwandt.

Lehrsatz: Die zu einem Kreise kreisverwandte Kurve ist wiederum ein Kreis.

Hat nämlich der Kreis k die Gleichung

$$r^2 - 2cr \cos(\vartheta - \gamma) + c^2 - a^2 = 0,$$

so ist $r = \frac{p^2}{r'}$, wenn r der Leitstrahl von P und r' der von P' ist; die Amplitude ϑ ist nach Definition für beide Punkte die gleiche. Folglich lautet die Beziehung zwischen r' und ϑ

$$\frac{p^4}{r'^2} - 2c \frac{p^2}{r'} \cos(\vartheta - \gamma) + c^2 - a^2 = 0$$

oder

$$r'^2 - 2c \frac{p^2}{c^2 - a^2} r' \cos(\vartheta - \gamma) + \frac{p^4}{c^2 - a^2} = 0.$$

Dieses ist aber wiederum die Polargleichung eines Kreises, wie man durch Vergleich mit 41) feststellt, wenn man

$$c' = c \frac{p^2}{c^2 - a^2} \quad \text{und} \quad c'^2 - a'^2 = \frac{p^4}{c^2 - a^2}$$

setzt.

Geht insbesondere der ursprüngliche Kreis durch das Verwandtschaftszentrum O (Abb. 191), so lautet seine Gleichung nach 41 a)

$$r = 2a \cos(\vartheta - \gamma),$$

folglich die Gleichung der kreisverwandten Kurve

$$r' = \frac{p^2}{2a \cdot \cos(\vartheta - \gamma)};$$

das ist aber die Gleichung einer Geraden, wie man aus Abb. 191 erkennt, in der $OD = \frac{p^2}{2a}$, folglich

$$OP' = r' = \frac{p^2}{2a \cos(\vartheta - \gamma)} \quad \text{ist.}$$

Eine einfache Vorrichtung, die zu einer Kurve die kreisverwandte zeichnet, ist der Peaucelliersche Inversor (Abb. 192). Er besteht

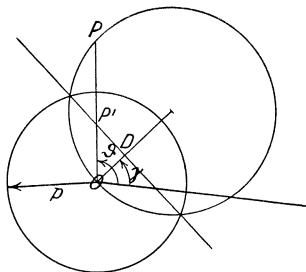


Abb. 191.

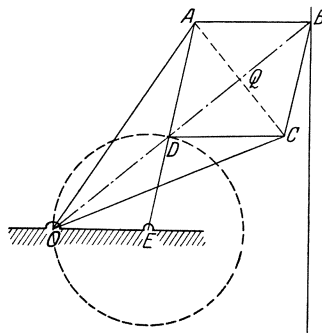


Abb. 192.

aus sechs miteinander gelenkig verbundenen Stäben, von denen die zwei Stäbe $OA = OC = a$ einander gleich und die vier Stäbe $AB = BC = CD = DA = b$ ebenfalls untereinander gleich sind. Die beiden Ecken B und D müssen stets auf einer durch O gehenden Geraden liegen, wie leicht einzusehen ist. Nun ist

$$\begin{aligned} OD \cdot OB &= (OQ - QD)(OQ + QD) \\ &= \overline{OQ^2} - \overline{QD^2} = (\overline{OA^2} - \overline{AQ^2}) - (\overline{AD^2} - \overline{AQ^2}) \\ &= \overline{OA^2} - \overline{AD^2} = a^2 - b^2 = p^2, \end{aligned}$$

also konstant. Folglich sind die beiden Punkte B und D zueinander kreisverwandt; beschreibt D eine Kurve, so muß B die zu ihr kreisverwandte Kurve beschreiben. Zwingt man demnach D durch Anbringen eines siebenten Stabes DE , wobei E in der Ebene festliegt, einen Bogen eines durch O gehenden Kreises zu beschreiben ($ED = EO$), so muß sich nach obigem B auf einer Geraden bewegen. In dieser Anordnung stellt also der Peaucelli'sche Inversor eine einfache Vorrichtung dar, um eine kreisförmige Bewegung in eine geradlinige überzuführen. Eine solche technisch wichtige Vorrichtung bezeichnet man als Geradföhrung.

Die vorangehenden Paragraphen zeigen, wie schon mit den Mitteln der elementaren Algebra die verschiedenartigsten Aufgaben der Geometrie rechnerisch gelöst werden können. Wesentlich ergänzt werden diese Hilfsmittel durch die Verwendung der Rechenmethoden der höheren Mathematik, insbesondere sind gewisse Fragen, die bei den Kurvenuntersuchungen auftauchen (Neigung, extreme Punkte, Krümmung, Fläche), nur mittels Differential- und Integralrechnung zu klären. Das soll im folgenden geschehen.

§ 5. Die Differentialquotienten höherer Ordnung.

(127) Ist $y = f(x)$ eine stetige Funktion von x , so ist

$$y' = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

ebenfalls eine Funktion von x , sie heißt die abgeleitete Funktion von $f(x)$ [s. auch (24) S. 51]. Ist sie stetig, so kann man auch von ihr einen Differentialquotient bilden; er heißt der zweite Differentialquotient oder die zweite abgeleitete Funktion der ursprünglichen Funktion. Man bezeichnet ihn, indem man schreibt

$$y'' = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}; \quad (42)$$

$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ liest man: „ y -Zweistrich ist gleich d zwei y nach dx -Quadrat“. So kann man fortfahren und einen dritten, vierten, . . . , n ten Differentialquotienten der gegebenen Funktion bilden. Im allgemeinen kann man sagen:

Der n te Differentialquotient oder die n te abgeleitete Funktion, die n te Ableitung einer Funktion $f(x)$ ist diejenige Funktion, die sich durch Differenzieren des $(n - 1)$ ten Differentialquotienten ergibt.

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}}{dx} = f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}. \quad (42')$$

Beispiele. a) Ist $y = x^n$, so ist $y' = n \cdot x^{n-1}$, also

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}, \quad y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

$$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \dots,$$

$$y^{(k)} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)x^{n-k} \dots,$$

$$y^{(n-1)} = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot x, \quad y^{(n)} = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

b) $\frac{d^n e^{ax}}{dx^n} = a^n e^{ax}$. Beweis!

c) $\frac{d^n \ln x}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{x^n}$. Beweis!

d) Ist $y = \sin x$, so ist

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \dots,$$

also ist

$$\frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Beweise: $\frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Nur in den seltensten Fällen kann man wie hier den n ten Differentialquotienten in geschlossener Form hinschreiben. Bisweilen kann man dieses Ziel durch geschickte Zerlegung der gegebenen Funktion erreichen. Zwei Beispiele hierfür:

e) Es sei $y = \frac{1}{1-x^2}$; wir zerlegen und schreiben

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right].$$

Differenzieren wir gliedweise, so erhalten wir

$$y^{(n)} = \frac{n!}{2} \left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} \right].$$

f) Es sei $y = \arctg x$; dann ist $x = \operatorname{tg} y$,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}, \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = y'.$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = y' \frac{dy'}{dy} = \cos^2 y \cdot 2 \cos y (-\sin y) = -\cos^2 y \sin 2y.$$

Schreibt man

$$y' = \cos y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right),$$

so kann man entsprechend schreiben

$$y'' = \cos^2 y \cdot \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Weiterhin ist

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = y' \cdot \frac{dy''}{dy}$$

$$= \cos^2 y \cdot \left[\cos^2 y \cdot 2 \cos 2 \left(y + \frac{\pi}{2} \right) - 2 \sin y \cos y \sin 2 \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

$$y''' = 2 \cos^3 y \cdot \left[\cos y \cdot \cos 2 \left(y + \frac{\pi}{2} \right) - \sin y \cdot \sin 2 \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 2 \cos^3 y \cdot \cos \left[y + 2 \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

$$y''' = 2 \cos^3 y \cdot \sin 3 \left(y + \frac{\pi}{2} \right).$$

Allgemein ist

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n \left(y + \frac{\pi}{2} \right).$$

Den Beweis erbringen wir durch den Schluß von n auf $n+1$; ist nämlich die Formel für $y^{(n)}$ richtig, so muß sein

$$y^{(n+1)} = \frac{dy^{(n)}}{dx} = \frac{d(y^{(n)})}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = y' \frac{d(y^{(n)})}{dy}$$

$$= \cos^2 y \cdot (n-1)! \left[n \cos^n y \cos n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) - n \cos^{n-1} y \sin y \sin n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$= n! \cos^{n+1} y \cdot \left[\cos y \cdot \cos n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) - \sin y \cdot \sin n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$= n! \cos^{n+1} y \cdot \cos \left[y + n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

$$y^{(n+1)} = n! \cos^{n+1} y \cdot \sin (n+1) \left(y + \frac{\pi}{2} \right).$$

Dies ist dieselbe Gleichung wie für $y^{(n)}$; nur steht $(n+1)$ an Stelle von n . Da die Formel für $y^{(n)}$ nun gilt für $n=3$, wie oben gezeigt worden ist, so gilt sie auch für $n=4$, folglich auch für $n=5$ usw. Setzen wir schließlich wieder für y den Wert $\operatorname{arctg} x$, so erhalten wir, da

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ ist,}$$

$$\frac{d^n(\operatorname{arctg} x)}{dx^n} = \frac{(n-1)!}{\sqrt{1+x^2}^n} \cdot \sin n \left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} \right).$$

(128) Die Differentialkurven. Wir wissen, daß im rechtwinkligen Koordinatensystem das Bild der Funktion $y = f(x)$ eine Kurve ist; daher muß auch das Bild der ersten abgeleiteten Funktion $y' = f'(x)$ eine Kurve sein; man nennt sie die (erste) Differentialkurve der ursprünglichen Kurve. Ebenso ist das Bild der zweiten abgeleiteten Funktion $y'' = f''(x)$ eine Kurve, die zweite Differentialkurve usw. Unter der n ten Differentialkurve einer Kurve von der Gleichung $y = f(x)$ versteht man das Bild ihrer n ten Ableitung

$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$. Es ist zu erwarten, daß zwischen diesen Kurven enge Beziehungen bestehen müssen, und daß sich aus der Ausgangskurve die Differentialkurven eindeutig auf zeichnerischem Wege ermitteln lassen müssen. Wir wollen dies näher untersuchen.

In Abb. 193 sei die mit y bezeichnete Kurve die Ausgangskurve als Bild der Funktion $y = f(x)$. Wir wollen jetzt zu einer bestimmten Abszisse die Ordinate y' der Differentialkurve $y' = f'(x)$ konstruieren. Da $y' = \text{tg}\varphi$ die Richtung der Ausgangskurve im Punkte P von der Abszisse x ist, können wir folgenden Weg einschlagen. Wir gehen vom Punkte X um die Einheit nach links bis zum Punkte Q und legen durch ihn die Parallele zu der in P an die Kurve y gezogenen Tangente, welche XP in P' schneiden möge; P' ist ein Punkt der Differentialkurve y' ; denn es ist $XP' = 1 \cdot \text{tg}\varphi = y'$.

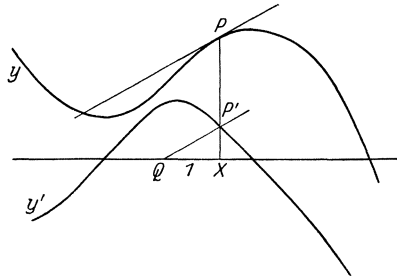


Abb. 193.

Wir können so die Differentialkurve y' punktweise konstruieren, und erkennen ohne weiteres die folgenden Gesetzmäßigkeiten. Durchlaufen wir die y -Kurve im Sinne wachsender x , so hat die y' -Kurve positive Ordinaten, solange die y -Kurve steigt, negative Ordinaten, solange die y -Kurve fällt. An denjenigen Stellen, wo die y -Kurve einen Höchst- oder Tiefstpunkt hat, schneidet die y' -Kurve die Abszissenachse.

Aus der y' -Kurve läßt sich in gleicher Weise die y'' -Kurve konstruieren usf.

Wir können nun folgende vier Typen des Verlaufs einer y -Kurve unterscheiden, wobei sehr wohl an einer Kurve mehrere dieser Typen auftreten können. [Vgl. die Abb. 194 unter a) bis d)]. Die Fälle a) und b)

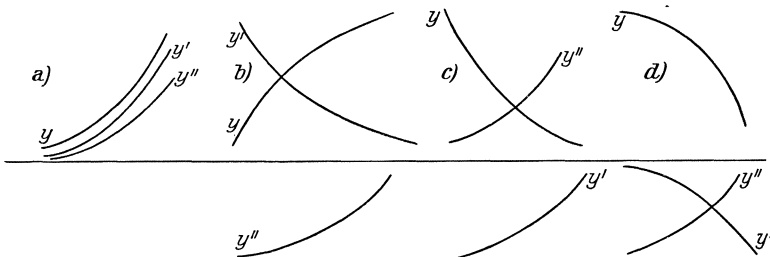


Abb. 194.

zeigen ansteigende y -Kurven, und zwar wächst bei a) das Ansteigen, während es bei b) abnimmt. Die y' -Kurven verlaufen daher, da die

Tangentenrichtungen der y -Kurven in beiden Fällen positiv sind, oberhalb der x -Achse, und zwar so, daß bei a) die y' -Kurve steigt, während sie bei b) fällt. c) und d) zeigen fallende y -Kurven; die Tangentenrichtungen sind überall negativ, folglich verlaufen die y' -Kurven vollständig unterhalb der x -Achse. Da bei c) der Fall schwächer wird, muß sich die y' -Kurve der x -Achse nähern, beim Typ d) dagegen von der x -Achse entfernen. Nun leiten wir aus der y' -Kurve in gleicher Weise die y'' -Kurve ab; sie muß bei Typ a) und c) oberhalb der x -Achse verlaufen, da die y' -Kurve hier positive Tangentenrichtungen hat, bei b) und d) dagegen unterhalb der x -Achse, da hier die y' -Kurve negative Tangentenrichtungen hat. Nun haben die y -Kurven im Falle a) und c) die Eigenschaft, daß ihre hohle (konkave) Seite in der Richtung der positiven y -Achse liegt, daß sie in der Richtung der positiven y -Achse geöffnet sind, während im Falle b) und d) in Richtung der positiven y -Achse die erhabene (konvexe) Seite liegt, die y -Kurven also in Richtung der negativen Seite geöffnet sind. Daraus ergibt sich der Satz:

Eine Kurve von der Gleichung $y = f(x)$ ist in Richtung der positiven Ordinatenachse geöffnet, wenn der zweite Differentialquotient von $f(x)$ positiv, dagegen in Richtung der negativen Ordinatenachse geöffnet, wenn dieser negativ ist.

Durch diesen Satz ist die Bedeutung des zweiten Differentialquotienten für den Verlauf der Kurve festgelegt. Bezeichnen wir Typ a) und c) als konkav, b) und d) als konvex, so können wir den Satz auch so aussprechen: Im konkaven Teile einer Kurve ist ihr zweiter Differentialquotient positiv, im konvexen Teile negativ. An einer Stelle, wo die Kurve aus ihrem konkaven Verlauf in den konvexen

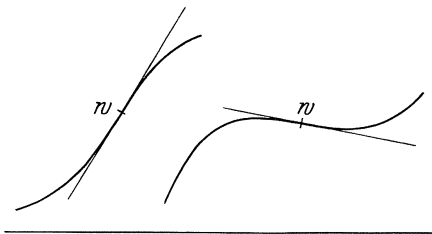


Abb. 195.

übergeht oder umgekehrt, wo die Kurve sich wendet, muß folglich der zweite Differentialquotient gleich Null werden; einen solchen Punkt nennt man Wendepunkt (Abb. 195). Er hat die Eigenschaft, daß die Tangente in ihm nicht wie gewöhnlich nur auf einer Seite der Kurve verläuft, sondern sie durchsetzt, von der einen Seite auf die andere übergeht; die Tangente in einem Wendepunkte heißt Wendetangente. Die Eigenschaften der Wendepunkte können wesentliche Dienste für die Festlegung der Gestalt einer Kurve leisten. Ein einfaches Beispiel möge dies erläutern.

läuft, sondern sie durchsetzt, von der einen Seite auf die andere übergeht; die Tangente in einem Wendepunkte heißt Wendetangente. Die Eigenschaften der Wendepunkte können wesentliche Dienste für die Festlegung der Gestalt einer Kurve leisten. Ein einfaches Beispiel möge dies erläutern.

Gegeben sei die Gleichung $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; die zugehörige Kurve ist zu zeichnen. Wir bilden den ersten und den zweiten Differentialquotienten:

$$y' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad y'' = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}.$$

Die Gleichung der Kurve ist eine echt gebrochene rationale Funktion von x ; folglich muß die Kurve die x -Achse als Asymptote haben [s. (32) S. 71]. Da y das Vorzeichen ändert, wenn x es tut, ist der Nullpunkt Mittelpunkt der Kurve, und die Kurve besteht aus zwei Teilen, von denen der eine aus dem anderen hervorgeht, wenn man ihn um den Nullpunkt um 180° dreht. Ihren Größt- bzw. Kleinstwert erreicht die Kurve, wenn $x^2 - 1 = 0$ ist, also für $x = \pm 1$; ihre Wendepunkte, wenn $2x(x^2 - 3) = 0$ ist, also für $x = 0, +\sqrt{3}, -\sqrt{3}$. Die folgende Tabelle stellt die Koordinaten dieser Punkte und die zugehörigen Kurvenrichtungen zusammen; Abb. 196 gibt den rechten Teil der Kurve:

x	y	y'	Bez.
0	0	1	O
1	$\frac{1}{2}$	0	P_1
-1	$-\frac{1}{2}$	0	
$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{8}$	P_2
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{8}$	

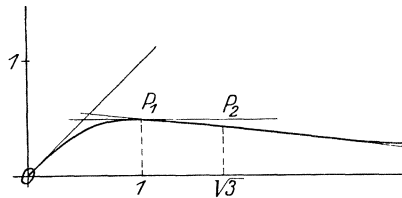


Abb. 196.

Der Leser untersuche noch die folgenden Kurven, besonders auf Wendepunkte und Maxima hin:

a) $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$, b) $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$,

c) $y = \sin x(1 + \frac{1}{2} \cos x)$.

a) Max bzw. Min:

$$\frac{\pi}{3} \left| \sqrt{3}; \frac{5}{3} \pi \left| -\sqrt{3}; \text{Wendep. } 0 \left| 0; \pi \left| 0; \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \left| \pm \frac{3}{16} \sqrt{15} \right. \right.$$

(129) Maxima und Minima. Bei unseren bisherigen Untersuchungen über Höchst- und Tiefstwerte einer Funktion hatten wir uns immer darauf beschränkt, diese Werte zu bestimmen, die Entscheidung darüber aber, ob der betreffende Wert ein Maximum oder Minimum ist, aus der Natur der einzelnen Aufgabe getroffen. Jetzt können wir in allen Fällen leicht und einwandfrei diese Fragen mathematisch beantworten.

Bedingung für das Eintreten eines Größt- oder Kleinstwertes ist zunächst, daß $f'(x)$ an der betreffenden Stelle gleich 0 ist [s. (19) S. 38]. Da nun an der Stelle eines Größt- oder Kleinstwertes die Kurve konvex oder konkav

ist, so muß $f''(x)$ an dieser Stelle $\begin{matrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{matrix}$ sein. Wir erhalten damit den wichtigen Satz:

Damit eine Funktion $y = f(x)$ für einen Wert $x = x_0$ einen Höchst- oder Tiefstwert hat, ist notwendig, daß $f'(x_0)$ gleich Null wird; und zwar liegt ein Höchstwert vor, wenn $f''(x_0) < 0$, ein Tiefstwert, wenn $f''(x_0) > 0$ ist.

Es fragt sich noch, was eintritt, wenn $f''(x_0) = 0$ wird; hierüber entscheidet der Wert von $f'''(x_0)$. Ist $f'''(x_0) \geq 0$, so muß nach dem obigen Satze $f'(x_0)$ an dieser Stelle einen $\begin{matrix} \text{Kleinst-} \\ \text{Größt-} \end{matrix}$ Wert besitzen. Daher muß $f(x_0)$ ein Terrassenwert der Funktion $y = f(x)$ sein; der zugehörige Punkt der Kurve $y = f(x)$ muß ein Terrassenpunkt sein [s. (25) S. 55]. Ist auch $f'''(x_0) = 0$, so muß man zur Entscheidung noch höhere Differentialquotienten heranziehen; und zwar gilt der Satz:

Eine Funktion $y = f(x)$ kann nur für einen solchen Wert x_0 einen Höchst- oder Tiefstwert haben, für den ihr erster Differentialquotient verschwindet. Um zu entscheiden, ob ein Höchst-, ein Tiefst- oder ein Terrassenwert vorliegt, berechnet man die höheren Differentialquotienten $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, ..., bis man auf einen stößt, der für $x = x_0$ von Null verschieden ist. Ist er von ungerader Ordnung, so ist $f(x_0)$ ein Terrassenwert der Funktion $y = f(x)$; ist er von gerader Ordnung, so liegt ein $\begin{matrix} \text{Größt-} \\ \text{Kleinst-} \end{matrix}$ Wert vor, je nachdem der betreffende Differentialquotient $\begin{matrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{matrix}$ ist (s. Abb. 197).

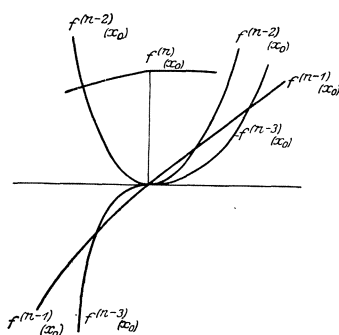


Abb. 197.

Beweis: Ist $f^{(n)}(x_0)$ der erste für $x = x_0$ von Null verschiedene Differentialquotient, so wollen wir annehmen, daß $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist. Dann muß $f^{(n-1)}(x_0)$ für $x = x_0$ eine steigende Funktion sein. Da $f^{(n-1)}(x_0) = 0$ sein soll, so muß $f^{(n-2)}(x_0)$ ein Kleinstwert der Funktion $f^{(n-2)}(x)$ sein. Da $f^{(n-2)}(x_0) = 0$ sein soll, so muß $f^{(n-3)}(x_0)$ ein Terrassenwert der Funktion $f^{(n-3)}(x)$ sein, so zwar, daß in $x = x_0$ die Funktion $f^{(n-3)}(x)$ steigt. Da außerdem $f^{(n-3)}(x_0) = 0$ ist, so muß $f^{(n-4)}(x_0)$ ein Kleinstwert der Funktion $f^{(n-4)}(x)$ sein, ebenso wie $f^{(n-2)}(x_0)$ (s. oben). Nun wiederholen sich die Schlußfolgerungen derart, daß $f^{(n-5)}(x_0)$, $f^{(n-7)}(x_0)$, ... Terrassenwerte, $f^{(n-6)}(x_0)$, $f^{(n-8)}(x_0)$ Kleinstwerte der zugehörigen Funktion sind. Ist n gerade, so muß also $f(x_0)$ ein Kleinstwert, ist dagegen n ungerade, so muß $f(x_0)$ ein Terrassenwert der ursprünglichen

Funktionen sein. Nehmen wir $f^{(n)}(x_0)$ negativ an, so bleiben die Schlußfolgerungen die gleichen, nur daß es statt Kleinstwert überall Größt wert heißt.

Beispiele. a) Die Funktion $y = x^2(1 - x)$ hat den Differentialquotienten $y' = 2x - 3x^2$; setzen wir ihn gleich Null, so erhalten wir $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$; hierzu $y_1 = 0, y_2 = \frac{4}{27}$. Der zweite Differentialquotient lautet $y'' = 2 - 6x$; also ist $y'_1 = 2, y'_2 = -2$. Demnach tritt für $x = 0, y = 0$ ein Kleinstwert und für $x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{27}$ ein Größt wert der Funktion ein. Bestätigung durch Zeichnung!

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= x^2 e^{-x}, & y' &= 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = 0, & x_1 &= 0, \\ & & & & x_2 &= 2, & y_1 &= 0, & y_2 &= \frac{4}{e^2}, & y'' &= e^{-x}(2 - 4x + x^2), \\ & & & & & & y'_1 &= +2 > 0, & & & y'_2 &= -\frac{2}{e^2} < 0; & \text{also ist} \\ & & & & & & & & & & & & y_1 = 0 \text{ ein Kleinstwert; } & y_2 = \frac{4}{e^2} \text{ ein Größt wert.} \end{aligned}$$

Untersuche auch die bisher behandelten Maxima-Aufgaben daraufhin, ob jeweils ein Höchst- oder Tiefstwert vorliegt!

c) $y = x^{2n}$ hat für $x = 0$ einen Tiefstwert, $y = x^{2n+1}$ hat für $x = 0$ einen Terrassenwert. Beweis!

d) $y = x^2 + 2 \cos x$; $y' = 2x - 2 \sin x = 0$ gibt $x = 0, y = 2$; für $x = 0$ wird aber $y'' = 2 - 2 \cos x = 0, y''' = +2 \sin x = 0, y'''' = 2 \cos x = 2$. Der erste nicht verschwindende Differentialquotient ist also von gerader Ordnung, außerdem positiv; folglich ist $y = 2$ ein Tiefstwert der Funktion. (Bild!)

e) Zeige, daß $y = x - \sin x$ für $x = 0$ einen Terrassenwert hat!

(130) Die Krümmung einer Kurve. Wir kehren zu der Untersuchung von Kurven zurück. Wir haben anfangs die Kurven punktweise konstruiert; einen wesentlichen Fortschritt bedeutete es, als wir lernten, Tangenten an die Kurven zu legen; wir tun jetzt einen weiteren wichtigen Schritt, indem wir in einem Punkte an eine Kurve den Krümmungskreis legen. Hat die Tangente mit der Kurve zwei unendlich benachbarte Punkte gemeinsam, so haben Kurve und Krümmungskreis miteinander sogar drei Nachbarpunkte gemeinsam; der Krümmungskreis schmiegt sich der Kurve also noch enger an als die Tangente, so daß durch seine Konstruktion die Gestalt der Kurve an der betreffenden Stelle wesentlich genauer wiedergegeben wird.

Durch drei Punkte ist stets ein Kreis bestimmt. Wählen wir also auf einer Kurve drei Punkte P, P', P'' , so können wir durch sie einen Kreis legen, der die Kurve in diesen Punkten schneidet. Da mit jedem Überschneiden ein Übertritt des Kreises von einer Seite der

Kurve auf die andere verbunden ist, so muß der Kreis beim Verlassen des dritten Punktes auf der anderen Kurvenseite laufen als vor Erreichen des ersten Punktes. Lassen wir die beiden Punkte P' und P'' näher und näher an P rücken, so ändert auch der Kreis seine Lage und Größe; er nimmt schließlich eine ganz bestimmte Lage und Größe an, wenn P' und P'' , auf der Kurve wandernd, in unendlich benachbarte Lage von P gelangt sind. Der Kreis, der sich in diesem Grenzfalle ergibt, heißt der Krümmungskreis der Kurve im Punkte P , sein Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt, sein Halbmesser der Krümmungshalbmesser; den reziproken Wert des Krümmungshalbmessers bezeichnet man als die Krümmung der Kurve im Punkte P . Aus den oben angeführten Gründen muß der Krümmungskreis die Kurve in P durchsetzen, d. h. er muß auf der einen Seite an sie herantreten, um sie auf der anderen Seite wieder zu verlassen. Ausgenommen hiervon ist der Fall, daß Krümmungskreis und Kurve noch einen

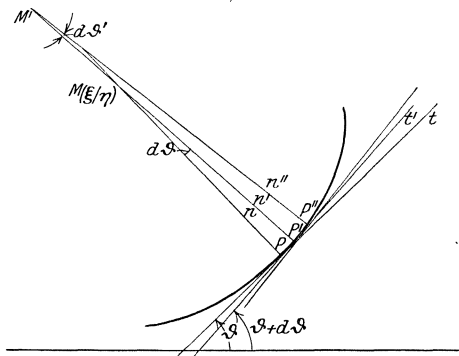


Abb. 198.

vierten Punkt miteinander gemeinsam haben; hiervon soll später die Rede sein.

Wie gelangen wir nun analytisch zu diesem Krümmungskreise? In Abb. 198 sei die Kurve $y = f(x)$ dargestellt; $P(x|y)$ sei ein Punkt auf ihr, $P'(x + dx|y + dy)$ sei sein Nachbarpunkt. Ein Kreis, der durch P und P' gehen soll, muß seinen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten von PP' haben. Die

Mittelsenkrechte von PP' geht aber, da P' unendlich nahe an P liegen soll, PP' also Tangente an die Kurve im Berührungspunkte P ist, in die zu P gehörige Normale der Kurve über. Nennen wir die Koordinaten des zum Kurvenpunkte P gehörigen Krümmungsmittelpunktes $M\xi$ und η , so müssen diese die Gleichung der Normalen erfüllen. Nach 36) S. 324 besteht also die Gleichung

$$\xi - x + (\eta - y) \cdot y' = 0. \tag{a)}$$

Da schließlich der Krümmungskreis auch durch die beiden Nachbarpunkte P' und P'' der Kurve $y = f(x)$ gehen muß, muß M auch auf der Mittelsenkrechten von $P'P''$, d. h. auf der Kurvennormalen in P' liegen. Nun hat P' die Koordinaten $x + dx$ und $y + dy$, wobei $y + dy = f(x + dx)$; ferner hat die Kurve in P' die Richtung $y' + dy'$, wobei $y' + dy' = f'(x)_{x+dx}$ ist. Folglich müssen die Koordinaten

von M auch die Gleichung der Nachbarnormalen n' zu n , d. h. die Gleichung

$$\xi - (x + dx) + (\eta - (y + dy)) \cdot (y' + dy') = 0 \quad \text{b)}$$

erfüllen.

In a) und b) haben wir zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten ξ und η erhalten; ziehen wir a) von b) ab, so fällt ξ weg, und es ergibt sich für η die Gleichung

$$-dx + \eta \cdot dy' - y \cdot dy' - y' dy - dy \cdot dy' = 0,$$

aus der nach Division durch dx folgt

$$-1 + \eta \cdot \frac{dy'}{dx} - y \cdot \frac{dy'}{dx} - y' \cdot \frac{dy}{dx} - dy \cdot \frac{dy'}{dx} = 0.$$

Das letzte Glied ist unendlich klein gegenüber den übrigen Gliedern. Da weiter

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y''$$

ist, so können wir diese Gleichung auch schreiben

$$-1 + (\eta - y) \cdot y'' - y'^2 = 0.$$

Aus ihr ergibt sich

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \quad \text{43 a)}$$

Setzen wir diesen Wert in a) ein, so erhalten wir

$$\xi - x + \frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y' = 0$$

und hieraus

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y'. \quad \text{43 b)}$$

43 a), b) geben die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes; wir sehen, daß bei ihrer Berechnung auch der zweite Differentialquotient eine wesentliche Rolle spielt. Zur Ermittlung des Krümmungshalbmessers ϱ erinnern wir uns der Formel 10 a) S. 291; nach ihr ist

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \left(-\frac{1 + y'^2}{y''} y'\right)^2 + \left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 (y'^2 + 1) = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}, \end{aligned}$$

also

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''}. \quad \text{44)}$$

Soll für die Wurzel nur der absolute Wert gelten, so erkennen wir, daß das Vorzeichen von ϱ mit dem von y'' übereinstimmt. Da wir

unter der Krümmung einer Kurve den reziproken Wert des Krümmungshalbmessers, also den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3} \quad (44')$$

verstehen wollen, haben wir jetzt gefunden, daß die Krümmung an allen Stellen positiv ist, wo die Kurve in der positiven Richtung der y -Achse konkav, dagegen an allen denjenigen Stellen negativ ist, wo sie in dieser Richtung konvex ist.

Zu dem Ausdrucke für den Krümmungshalbmesser können wir noch auf einem anderen Wege gelangen. Ist ϑ der Richtungswinkel der in P gezogenen Tangente t (s. Abb. 198), $\vartheta + d\vartheta$ derjenige der in P' gezogenen Tangente t' , so ist, wie man leicht erkennt, der Winkel $PMP' = d\vartheta$; er ist der Mittelpunktswinkel des Kreisausschnittes PMP' der den Halbmesser ϱ und den Bogen $PP' = ds$ hat, folglich ist

$$ds = \varrho d\vartheta \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{ds}{d\vartheta}.$$

Nun ist nach Formel 47) in (89) $ds = \sqrt{1+y'^2} \cdot dx$; ferner ist

$$\vartheta = \operatorname{arctg} y', \quad \text{also} \quad \frac{d\vartheta}{dy'} = \frac{1}{1+y'^2},$$

demnach

$$d\vartheta = \frac{dy'}{1+y'^2}$$

und folglich

$$\varrho = \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{\sqrt{1+y'^2}^3}{\frac{dy'}{dx}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}^3}{y''}$$

wie oben.

Die Anwendung des Krümmungskreises soll jetzt an dem Beispiele der Parabel gezeigt werden (Abb. 199). Ihre Gleichung sei $y^2 = 2px$; es ist also

$$y = \sqrt{2px}; \quad y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}; \quad y'' = -\frac{p}{y^3} \cdot y' = -\frac{p^2}{y^3}$$

(Kettenregel!). Also ist

$$\xi = \frac{y^2}{2p} - \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} \cdot \frac{p}{y} = p + 3 \frac{y^2}{2p}$$

$$= p + 3x,$$

$$\eta = y + \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2},$$

$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{\sqrt{(p^2 + y^2)^3}}{p^2}.$$

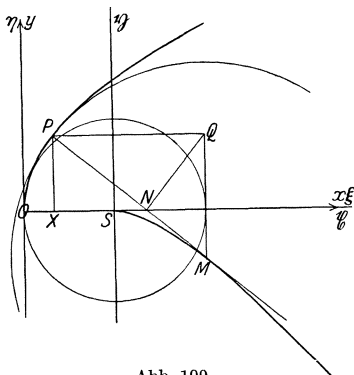


Abb. 199.

Da die Subnormale der Parabel nach (120) S. 325 $s_n = p$ ist, so ist $\sqrt{p^2 + y^2} = n$ gleich der Normalen, und es ist

$$\varrho = -\frac{n^3}{p^2}.$$

Diese Formel liefert für den zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkt der Parabel die folgende einfache Konstruktion. Man zeichnet in P die Normale $PN = n$ ($XN = p$), errichtet in N auf n das Lot, das den durch P gehenden Durchmesser in Q schneidet, und errichtet in Q auf diesem das Lot, das n im gesuchten Krümmungsmittelpunkte M schneidet; es ist nämlich $PM : PQ = PQ : PN = PN : XN$, also $PQ = \frac{n^2}{p}$ demnach

$$PM = \frac{n^4}{p^2 \cdot n} = \frac{n^3}{p^2} = \varrho.$$

Für den Scheitel der Parabel versagt diese Konstruktion; doch läßt sich für ihn der Krümmungsmittelpunkt viel einfacher finden. Für den Scheitel ist $x = 0$, $y = 0$, also $\xi = p$, $\eta = 0$, $\varrho = -p$; der zum Scheitel gehörige Krümmungsmittelpunkt S liegt folglich auf der Parabelachse und hat vom Scheitel den Abstand $OS = p$.

(131) Da zu jedem Kurvenpunkte ein Krümmungsmittelpunkt gehört, muß die Gesamtheit der Krümmungsmittelpunkte eine Kurve ergeben; sie heißt die **Evolute** zur gegebenen Kurve; umgekehrt nennt man die ursprüngliche Kurve eine **Evolvente** zum geometrischen Orte ihrer Krümmungsmittelpunkte. Zwischen Evolvente und Evolute müssen naturgemäß enge Beziehungen bestehen; wir wollen die wichtigsten unter ihnen ableiten.

Der Punkt M der Evolute (Abb. 198) ist der Schnittpunkt der beiden Nachbarnormalen n und n' der Evolvente; der Nachbarpunkt M' der Evolute ist dann der Schnittpunkt der beiden Nachbarnormalen n' und n'' der Evolvente. Folglich enthält die Normale n' der Evolvente die beiden Nachbarpunkte M und M' der Evolute; n' muß daher Tangente an die Evolute sein: Die Normalen der Evolvente sind zugleich Tangenten an die Evolute; die Normalen der Evolvente umhüllen die Evolute. Hieraus folgt sofort eine weitere Beziehung zwischen beiden Kurven: Man denke sich in M einen in der Normalen n liegenden straffgespannten Faden befestigt, dessen Endpunkt mit P zusammenfällt, und drehe diesen um M um den Winkel $d\vartheta$ in die Lage n' ; dann wird der Endpunkt mit P' zusammenfallen; außerdem wird der Faden jetzt durch M' gehen. Nun denke man wieder um M' eine Drehung um den Winkel $d\vartheta'$ ausgeführt in die Lage n'' , der Endpunkt wird jetzt nach P'' gelangen usw. Wir können daher die Evolvente aus der Evolute folgendermaßen ent-

stehen lassen: Wir wickeln auf der Evolute einen Faden auf; sein Endpunkt beschreibt hierbei die Evolvente. Wir können den Faden auch ersetzen durch eine Gerade, welche auf der Evolute, ohne zu gleiten, sich abwälzt; irgendein Punkt dieser Geraden beschreibt bei dieser Bewegung eine Evolvente. Wir sehen hieraus, daß, während es zu einer Evolvente stets nur eine Evolute gibt, eine Evolute unendlich viele Evolventen besitzt; denn jeder Punkt der sich auf der Evolute abwälzenden Geraden beschreibt eine Evolvente. Alle diese Evol-

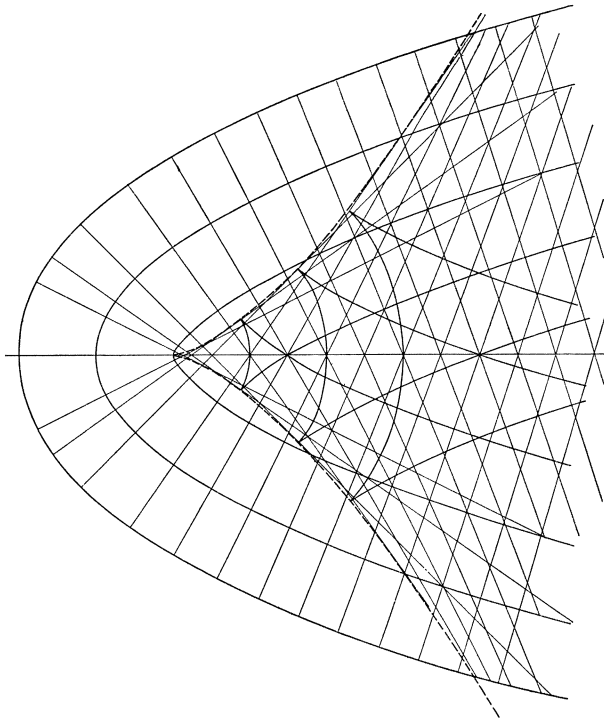


Abb. 200.

venten haben die Normalen gemeinsam; irgend zwei derselben schneiden auf jeder Normalen das gleiche Stück ab, das gleich dem Abstände der beiden sie beschreibenden Punkte der abgewälzten Geraden ist. Die unendlich vielen Evolventen einer Kurve bilden eine Schar von Parallelkurven (s. Abb. 200: Parallelkurven der Parabel).

Aus der Darstellung der bewegten Geraden folgt sofort eine weitere Eigenschaft der Evolvente. Trifft nämlich der diese beschreibende Punkt auf der Evolute auf, so daß er der augenblickliche Berührungspunkt der Geraden wird, so wird er im nächsten Augenblicke sich wieder von der Evolute entfernen, und zwar nach derselben Richtung,

von der er gekommen ist. Da seine Bewegungsrichtung an dieser Stelle senkrecht zur Evolute ist, so muß die Evolvente hier eine Spitze, einen Rückkehrpunkt besitzen: An den Stellen, wo die Evolvente senkrecht auf die Evolute auftrifft, besitzt die Evolvente eine Spitze.

Die angeführten Beziehungen zwischen Evolvente und Evolute, die wir auf Grund rein geometrischer Betrachtungen gefunden haben, lassen sich auch auf analytischem Wege finden, wenn man die Gleichung der Evolute einer Kurve kennt. Wir haben sie schon aufgestellt: es sind die beiden Gleichungen:

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y', \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \quad (43)$$

Die Form der Gleichungen erinnert an die Parameterdarstellung [s. (113) S. 308f.]. Bedenken wir, daß y , y' , y'' Funktionen von x sind, so kann man sagen: Die Gleichungen 43) stellen ξ und η durch den Parameter x dar. Es fragt sich nun, ob man an Stelle der beiden Gleichungen 43) durch Elimination des Parameters nicht auch eine einzige parameterfreie Gleichung für die Evolute finden kann. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Beantwortung dieser Frage in dieser allgemeinen Fassung Schwierigkeiten bereitet. In bestimmten, besonders einfachen Fällen läßt sich die Gleichung der Evolute auch ohne Parameter darstellen. Greifen wir beispielsweise die bezüglich ihrer Krümmungsverhältnisse in (130) S. 350 behandelte Parabel $y^2 = 2px$ heraus (Abb. 199). Für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes haben wir dort gefunden:

$$\xi = p + 3x = p + \frac{3y^2}{2p}, \quad \eta = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Das sind die Parametergleichungen der Evolute der Parabel; der Parameter ist allerdings nicht die Abszisse x , sondern die Ordinate y des Parabelpunktes, was aber unwesentlich ist. Wir eliminieren aus den beiden Gleichungen y , indem wir schreiben

$$y^2 = \frac{2}{3} p (\xi - p), \quad y^3 = -p^2 \eta$$

oder

$$y^6 = \frac{8}{27} p^3 (\xi - p)^3 = p^4 \eta^2,$$

woraus sich ergibt

$$\eta^2 = \frac{8}{27p} (\xi - p)^3.$$

Verlegen wir das Koordinatensystem (Parallelverschiebung!) nach dem Punkte S (Abb. 199) ($\xi = \xi + p$, $\eta = \eta$), so nimmt die Gleichung der Parabevolute die Form an

$$\eta^2 = \frac{8}{27p} \cdot \xi^3 \quad \text{oder} \quad \eta = \sqrt{\frac{8}{27p}} \cdot \xi^{\frac{3}{2}}.$$

Wegen des Exponenten $\frac{3}{2}$, den x trägt, nennt man die Kurve die semi-kubische (halbkubische) Parabel; sie trägt auch den Namen Neilsche Parabel [s. a. (89) S. 238].

Macht man die Achse der Parabel zur Ordinatenachse, ihre Scheiteltangente zur Abszissenachse, so lautet ihre Gleichung $y = \frac{x^2}{2p}$ und die Gleichung ihrer Evolute $8(\eta - p)^3 - 27px^2 = 0$, ein Ergebnis, das man durch einfaches Vertauschen der Abszissen und Ordinaten aus der obigen Gleichung erhält. Wesentlich verwickelter ist die Beantwortung der Frage nach der Evolute der allgemeinen Potenzkurve, deren Gleichung $y = a \cdot x^n$ lautet. Man kann zwar verhältnismäßig einfach den Krümmungsmittelpunkt auf zeichnerischem Wege finden¹⁾; doch bereitet die Aufstellung der parameterfreien Evolutengleichung elementar-mathematische Mühen, die um so größer sind, je höhere Werte n annimmt. Will man beispielsweise für die Kurve von der Gleichung $y = \frac{x^3}{p^2}$ die Evolute ermitteln, so gelangt man zu der Parameterdarstellung

$$\xi = \frac{x}{2p^4}(p^4 - 9x^4), \quad \eta = \frac{1}{6p^2x}(15x^4 + p^4),$$

aus der man durch Eliminieren von x die parameterfreie Gleichung gewinnt:

$$8748\xi\eta^5 + 9375p^2\xi^4 + 20250p^2\xi^2\eta^2 - 729p^2\eta^4 - 4800p^4\xi\eta + 256p^6 = 0.$$

Für die Kurve $y = \frac{x^4}{p^3}$ ist die Gleichung der Evolute in Parameterform

$$\xi = \frac{2}{3}x - \frac{16}{3}\frac{x^7}{p^6}, \quad \eta = \frac{28x^6 + p^6}{12p^3x^2}$$

und in parameterfreier Form:

$$2^{16} \cdot 3^3 \xi^2 \eta^7 - 7^7 p^3 \xi^6 - 2^6 \cdot 3 \cdot 7^5 p^3 \xi^4 \eta^2 - 2^{11} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 p^3 \xi^2 \eta^4 \\ - 2^{16} p^3 \eta^6 + 2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^3 p^6 \xi^2 \eta + 2^{11} \cdot 3^3 p^6 \eta^3 - 2^4 \cdot 3^6 p^9 = 0.$$

Wer Lust und Zeit hat, möge das Ergebnis nachprüfen. Abb. 201 a, b zeigt die beiden Kurven

$$y = \frac{x^3}{p^2} \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{x^4}{p^3}$$

mit ihren Evoluten.

(132) Unter dem Scheitel einer Kurve versteht man einen Punkt der Kurve, in welchem die Krümmung einen Höchst- oder Tiefstwert und damit auch der Krümmungshalbmesser einen Tiefst- oder Höchstwert annimmt. Besitzt die Kurve Symmetrieachsen, so muß wegen der Symmetrie jeder Schnittpunkt der Kurve mit diesen Achsen ein

¹⁾ S. u. a. E b n e r : Technische Infinitesimalrechnung.

solcher Scheitel sein. Daher heißt auch der Schnittpunkt der Parabel mit ihrer Achse ihr Scheitel. Indessen brauchen durchaus nicht alle Scheitel einer Kurve auf ihren Symmetrielinien zu liegen. Betrachten wir beispielsweise die soeben behandelte Kurve $y = \frac{x^3}{p^2}$ (Abb. 201 a)! In O ist die Krümmung gleich Null; sie nimmt mit wachsendem x zuerst zu, muß aber später wieder abnehmen, da, wie die Anschauung

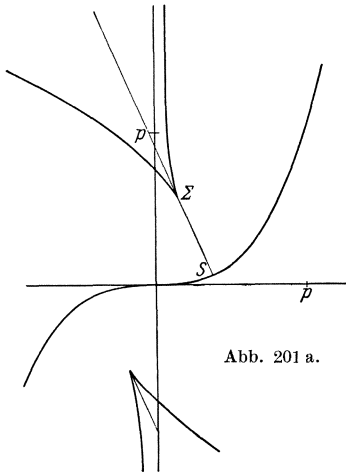


Abb. 201 a.

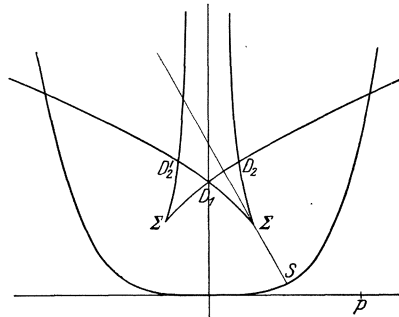


Abb. 201 b.

lehrt, für sehr großes x die Kurve wieder flacher verläuft, die Krümmung sich also wieder dem Werte Null nähert. Nun hat die Parabelevolute für den Parabelscheitel eine Spitze; ebenso zeigt die Evolute der Kurve $y = \frac{x^3}{p^2}$ eine Spitze. Dieser Umstand ist ganz allgemein das Merkmal für einen Scheitel der Evolvente: Einem Scheitel der Evolvente entspricht stets eine Spitze der Evolute. Dieser Satz beweist sich aus den beiden Tatsachen, daß die Tangenten der Evolute zugleich die Normalen der Evolvente sind, und daß im Scheitel der Krümmungshalbmesser entweder ein Maximum oder ein Minimum ist.

Welches sind nun die analytischen Bedingungen für den Scheitel? Wir haben gefunden, daß

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad (44)$$

sein muß; durch 44) ist ϱ mittelbar als Funktion von x dargestellt. Nimmt ϱ einen Höchst- oder Tiefstwert an, so tut es auch

$$\varrho^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}.$$

Es muß für einen Scheitel folglich

$$\frac{d\rho^2}{dx} = 0$$

sein. Differenzieren wir nun ρ^2 unter Berücksichtigung der Tatsache, daß

$$\frac{dy'}{dx} = y'', \quad \frac{dy''}{dx} = y'''$$

ist, nach x , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^2}{dx} &= (1 + y'^2)^3 \cdot (-2) y''^{-3} \cdot y''' + y''^{-2} \cdot 3 (1 + y'^2)^2 \cdot 2 y' \cdot y'' \\ &= \frac{2 (1 + y'^2)^2 (3 y' y''^2 - (1 + y'^2) \cdot y''')}{y''^3}. \end{aligned}$$

Damit der Differentialquotient $\frac{d\rho^2}{dx}$ verschwindet, muß die zweite Klammer des Zählers gleich Null werden, da $1 + y'^2$ für jeden Wert von $y' > 0$ ist. Wir bekommen demnach als Bedingung für den Scheitel der Kurve die Gleichung

$$3 y' y''^2 = (1 + y'^2) y'''. \quad (45)$$

In Weiterführung unseres Beispiels $y = \frac{x^3}{p^3}$ erhalten wir

$$y' = \frac{3x^2}{p^3}, \quad y'' = \frac{6x}{p^3}, \quad y''' = \frac{6}{p^3},$$

also für die Abszisse des Scheitels der Kurve Abb. 201 a die Gleichung

$$3 \cdot \frac{3x^2}{p^3} \cdot \frac{36x^2}{p^3} = \frac{p^4 + 9x^4}{p^3} \cdot \frac{6}{p^3}$$

und hieraus

$$x = \frac{p}{\sqrt[4]{45}}.$$

Folglich sind die Koordinaten des Scheitels

$$x_S = \frac{p}{\sqrt[4]{45}} \approx 0,386 p, \quad y_S = \frac{p}{45} \cdot \sqrt[4]{45} \approx 0,0576 p.$$

Hieraus ergeben sich die Koordinaten der dem Scheitel entsprechenden Spitze Σ der Evolute zu

$$\xi_\Sigma = \frac{2p}{5\sqrt[4]{45}} \approx 0,154 p, \quad \eta_\Sigma = \frac{2}{9} p \sqrt[4]{45} \approx 0,576 p.$$

Zeige, daß die Kurve $y = \frac{x^4}{p^3}$ den Scheitel

$$\frac{p}{\sqrt[6]{56}} \left| \frac{p}{4\sqrt[3]{49}} \right.$$

und seine Evolute die Spitze

$$\frac{2\sqrt{2}}{7\sqrt[6]{7}} p \left| \frac{\sqrt[3]{7}}{4} p \right.$$

hat! (Abb. 201 b.)

Wo liegt der Scheitel der Kurve $y = e^x$? $(-\frac{1}{2} \ln 2 | \frac{1}{2} \sqrt{2})$ ($Q_{\min} = \frac{2}{3} \sqrt{3}$).

Wo liegt der Scheitel der Kurve $y = \text{Sin} x$? $(0,8814 | 1)$ ($Q_{\min} = 3\sqrt{3}$).

Wo liegt der Scheitel der Kurve $y = \text{Tg} x$?

(Gleichung: $3 \text{tg}^6 x + 5 \text{tg}^4 x - 2 \text{tg}^2 x - 2 = 0$

oder $2 \sin^6 x - 3 \sin^4 x - 4 \sin^2 x + 2 = 0$),

$$0,69370 | 0,83158, \quad Q_{\min} = 5,3941.$$

(133) Stellen wir uns die Ergebnisse unserer Betrachtungen zusammen, so erhalten wir für eine Kurve, deren Gleichung im rechtwinkligen Koordinatensystem die Form hat $y = f(x)$, und für den Punkt $P_0(x_0 | y_0 = f(x_0))$ als Gleichung der Tangente:

$$y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0),$$

als Gleichung der Normalen:

$$x - x_0 + y'_0(y - y_0) = 0;$$

als Länge der Subtangente:

$$s_t = \frac{y_0}{y'_0},$$

$$\text{Subnormale: } s_n = y_0 \cdot y'_0,$$

$$\text{Tangente: } t = \frac{y_0}{y'_0} \sqrt{1 + y_0'^2},$$

$$\text{Normale: } n = y_0 \sqrt{1 + y_0'^2},$$

als Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\xi = x_0 - \frac{1 + y_0'^2}{y_0''} y'_0, \quad \eta = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''};$$

als Halbmesser des Krümmungskreises:

$$\rho = \frac{(1 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}.$$

Die Abszisse der Höchst- und Tiefstpunkte ist zu bestimmen aus der Gleichung $y' = 0$.

Die Abszisse der Wendepunkte ist zu bestimmen aus der Gleichung $y'' = 0$.

Der Inhalt der durch die Kurve, die Abszissenachse und die zu $x = x_1$ und $x = x_2$ gehörigen Ordinaten begrenzten Fläche

$$F_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx.$$

Die Länge des von den Punkten $P_1(x_1 | y_1)$ und $P_2(x_2 | y_2)$ begrenzten Kurvenstückes ist

$$s_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Hierzu kommen noch die Formeln, die das statische Moment, das Trägheitsmoment, den Schwerpunkt der Fläche $F_{x_1}^{x_2}$ oder der Kurve $s_{x_1}^{x_2}$, die Oberfläche oder den Inhalt des durch Rotation von $F_{x_1}^{x_2}$ oder $s_{x_1}^{x_2}$ entstehenden Drehkörpers liefern; hierüber s. u. II, § 8, S. 247 ff. Alle diese Betrachtungen sollen jetzt zusammenhängend an dem Beispiele der gemeinen Kettenlinien durchgeführt werden.

Die gemeine Kettenlinie hat die Gleichung

$$y = a \operatorname{Cof} \frac{x}{a} \quad \text{oder} \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Es ist die Kurve, in welcher ein homogenes, vollkommen elastisches und biegsames Seil von unendlich kleiner Dicke durchhängt, wenn

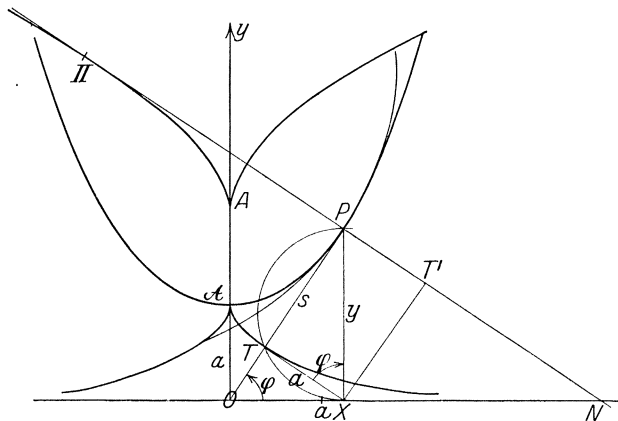


Abb. 202.

es an zwei seiner Punkte festgehalten wird. a ist der Parameter der Kettenlinie. Da $\operatorname{Cof}(-u) = \operatorname{Cof} u$ ist, so liegt die Kettenlinie symmetrisch zur y -Achse; diese Symmetrielinie heißt die Achse der Kettenlinie; sie schneidet die Kurve im Punkte $A(0|a)$, dem Scheitel der Kettenlinie. Abb. 202 zeigt einen Teil der Kurve; man erhält die Koordinaten von Punkten mit Hilfe einer Tafel der Cof -Funktion. Da

$$y' = \operatorname{Sin} \frac{x}{a} = \sqrt{\operatorname{Cof}^2 \frac{x}{a} - 1} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}$$

[s. (58) S. 150] ist, so ergibt sich für die Konstruktion der Tangente das folgende Verfahren: Wir schlagen über der Ordinate XP den nach dem Scheitel zu liegenden Halbkreis und um X mit a den Kreisbogen, der diesen in T schneide; dann ist TP die zum Berührungspunkte P gehörige Tangente. In der Tat ist $\sphericalangle TXP = \varphi$, wenn φ der Neigungs-

winkel der Tangente ist; denn nach Konstruktion ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{PT}{XT} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}.$$

Ferner ist

$$y'' = \frac{1}{a} \mathfrak{Cof} \frac{x}{a} = \frac{y}{a^2},$$

daher

$$\varrho = \frac{\left(1 + \mathfrak{Sin}^2 \frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} a}{\mathfrak{Cof} \frac{x}{a}} = \frac{y^2}{a}.$$

Da nun die Normale

$$n = PN = y \cdot \sqrt{1 + y'^2} = y \cdot \sqrt{1 + \mathfrak{Sin}^2 \frac{x}{a}} = y \mathfrak{Cof} \frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}$$

ist, so ist $\varrho = n$. Um also den Krümmungsmittelpunkt Π für den Kurvenpunkt P zu erhalten, brauchen wir nur die Länge $n = PN$ der Normalen von P aus nach der anderen Seite auf der Normalen abzutragen; ihr Endpunkt ist Π .

Die Gleichung der Evolute ergibt sich zu

$$\xi = x - \frac{\left(1 + \mathfrak{Sin}^2 \frac{x}{a}\right) a}{\mathfrak{Cof} \frac{x}{a}} \mathfrak{Sin} \frac{x}{a}, \quad \eta = a \mathfrak{Cof} \frac{x}{a} + \frac{\left(1 + \mathfrak{Sin}^2 \frac{x}{a}\right) a}{\mathfrak{Cof} \frac{x}{a}}$$

oder

$$\xi = x - \frac{a}{2} \mathfrak{Sin} 2 \frac{x}{a}, \quad \eta = 2a \mathfrak{Cof} \frac{x}{a}.$$

Der zum Scheitel A gehörige Krümmungshalbmesser ist $\varrho_a = a$; der Krümmungsmittelpunkt A also leicht zu finden.

Der Inhalt der von der x -Achse, der y -Achse, der Kettenlinie und der zur Abszisse x gehörigen Ordinate begrenzten Fläche $OXP A$ ist

$$\begin{aligned} F &= \int_0^x a \cdot \mathfrak{Cof} \frac{x}{a} dx = a^2 \left[\mathfrak{Sin} \frac{x}{a} \right]_0^x = a^2 \mathfrak{Sin} \frac{x}{a} \\ &= a^2 \sqrt{\mathfrak{Cof}^2 \frac{x}{a} - 1} = a \sqrt{y^2 - a^2}; \end{aligned}$$

er ist also doppelt so groß als der Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks PTX oder gleich dem Inhalte des Rechtecks $PTXT'$. Die Länge s des Kurvenstückes AP ist

$$\begin{aligned} s &= \int_0^x \sqrt{1 + \mathfrak{Sin}^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^x \mathfrak{Cof} \frac{x}{a} dx = a \left[\mathfrak{Sin} \frac{x}{a} \right]_0^x = a \mathfrak{Sin} \frac{x}{a} \\ &= a \sqrt{\mathfrak{Cof}^2 \frac{x}{a} - 1} = \sqrt{y^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Der Bogen ist also gleich der Strecke PT .

Der Punkt T liegt demnach auf der Kurve, die wir erhalten, wenn wir einen Faden derart an die Kettenlinie legen, daß sein Endpunkt in A liegt, und ihn — straff gespannt — von der Kettenlinie abwickeln; der Endpunkt beschreibt dabei diese Kurve. Dann muß aber nach den Ausführungen von (131) die Kettenlinie die Evolute dieser Kurve, also die Kurve eine Evolvente der Kettenlinie sein. Da TP Normale zu dieser Kurve in T , also XT Tangente an sie sein muß, da ferner $XT = a$ ist, so hat die Kurve die Eigenschaft, daß die Länge ihrer Tangente konstant ist. Es ist demnach die nämliche Kurve, die wir in (115) S. 315 behandelt haben: die Huyghenssche Traktrix. Hiernach kann man sich diese Kurve auch auf folgende Weise entstanden denken. Bewegen wir einen Stab von der Länge $XT = a$ so, daß der eine Endpunkt auf einer Geraden x gleitet, so wird der Stab nachgeschleppt, und der andere Endpunkt T beschreibt die Huyghenssche Traktrix; aus dieser Bewegung heraus erklärt sich auch ihr Name (Traktrix = Schleppkurve). Sind die Koordinaten von T ξ und η , so ist

$$\xi = x - a \sin \varphi, \quad \eta = a \cos \varphi;$$

nun ist $\cos \varphi = \frac{a}{y}$; also ist

$$\xi = x - \frac{a}{y} \sqrt{y^2 - a^2}, \quad \eta = \frac{a^2}{y}$$

oder

$$\xi = x - a \Im g \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{a}{\mathfrak{C}o\} \frac{x}{a};$$

Parametergleichung der Traktrix. Es ist demnach

$$\mathfrak{C}o\} \frac{x}{a} = \frac{a}{\eta}, \quad \Im g \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - \eta^2}}{a}, \quad x = a \mathfrak{A}r\mathfrak{C}o\} \frac{a}{\eta};$$

folglich ist die parameterfreie Gleichung der Traktrix

$$\xi = a \cdot \mathfrak{A}r\mathfrak{C}o\} \frac{a}{\eta} - \sqrt{a^2 - \eta^2};$$

das ist, vom Vorzeichen abgesehen, die nämliche Gleichung wie die in (115) auf S. 315 gefundene.

Lange Zeit war man der Meinung, daß ein Seil in der Gestalt einer Parabel durchhänge; die wahre Gestalt der Kettenlinie wurde erst ziemlich spät erkannt; es dürfte daher wertvoll sein zu untersuchen, wie groß der Fehler ist, den man begeht, wenn man die Kettenlinie durch die Parabel ersetzt, welche sich ihr am engsten anschmiegt. Wir müssen zu diesem Zwecke von den beiden Kurven fordern, daß sie die Achse, den Scheitel und die Krümmung im Scheitel gemeinsam haben. Die Parabelgleichung muß demnach von der Form sein

$$y = c_0 + c_2 x^2;$$

da für $x = 0$ $y = a$ sein soll, ist $c_0 = a$. Die Parabel $y = a + c_2 x^2$ hat nun im Scheitel den Krümmungsradius

$$\rho = \left[\frac{(1 + (2c_2 x)^2)^{\frac{3}{2}}}{2c_2} \right]_{x=0} = \frac{1}{2c_2};$$

daher muß

$$\frac{1}{2c_2} = a \quad \text{oder} \quad c_2 = \frac{1}{2a}$$

sein, und die Gleichung der Ersatzparabel lautet

$$y = a + \frac{x^2}{2a}.$$

Zum Vergleiche sind in der folgenden Tabelle für eine Reihe von Abszissen die zugehörigen Ordinaten der Kettenlinie und der Ersatzparabel berechnet und der ermittelte Fehler sowohl absolut als auch verhältnismäßig angegeben:

$x =$	0	0,2 a	0,4 a	0,6 a	0,8 a	1,0 a	1,2 a	1,4 a
y-Kettenlinie	a	1,0201 a	1,0811 a	1,1855 a	1,3374 a	1,5431 a	1,8107 a	2,1509 a
y-Parabel . . .	a	1,0200 a	1,0800 a	1,1800 a	1,3200 a	1,5000 a	1,7200 a	1,9800 a
Fehler . . .	0	0,0001 a	0,0011 a	0,0055 a	0,0174 a	0,0431 a	0,0907 a	0,1709 a
Fehler in Proz.	0	0,008	0,102	0,466	1,31	2,80	5,28	7,96

$x =$	1,6 a	1,8 a	2,0 a	2,2 a	2,4 a	2,6 a	2,8 a
y-Kettenlinie . . .	2,5775 a	3,1075 a	3,7622 a	4,5679 a	5,5570 a	6,7690 a	8,2527 a
y-Parabel	2,2800 a	2,6200 a	3,0000 a	3,4200 a	3,8800 a	4,3800 a	4,9200 a
Fehler	0,2975 a	0,4875 a	0,7622 a	1,1479 a	1,6770 a	2,3890 a	3,3327 a
Fehler in Proz. . .	11,7	15,7	20,3	25,1	30,2	35,3	40,4

Von praktischer Bedeutung ist die folgende Aufgabe¹⁾: Ein Seil habe die Länge $2s$ und sei an zwei Punkten P_1 und P_2 aufgehängt, deren Höhenunterschied $2h$ und deren wagerechter Abstand $2b$ betrage; das Seil hängt in einer Kettenlinie durch, deren Parameter a und deren Scheitel A ermittelt werden sollen (Abb. 203). Als y -Achse sei eine Parallele zur Achse der Kettenlinie, als x -Achse eine Senkrechte zu ihr genommen; die Lage des Koordinatenanfangspunktes möge noch unbestimmt gelassen werden. $M(x_m|y_m)$ sei der Mittelpunkt der Strecke $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$. Dann gelten die Beziehungen:

$$x_1 = x_m - b, \quad y_1 = y_m - h, \quad x_2 = x_m + b, \quad y_2 = y_m + h.$$

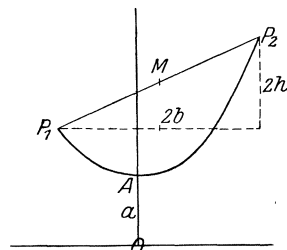


Abb. 203.

¹⁾ Siehe Freytags Hilfsbuch f. d. Maschinenbau, 7. Aufl., S. 127 f. Berlin: Julius Springer 1924.

Ist $y = a \mathfrak{Cof} \frac{x}{a}$ die Gleichung der Kettenlinie, so ist mithin

$$y_m - h = a \mathfrak{Cof} \frac{x_m - b}{a}, \quad y_m + h = a \mathfrak{Cof} \frac{x_m + b}{a}; \quad \text{a)}$$

außerdem muß sein

$$2s = a \left(\mathfrak{Sin} \frac{x_m + b}{a} - \mathfrak{Sin} \frac{x_m - b}{a} \right). \quad \text{b)}$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen a) erhält man

$$2h = a \left(\mathfrak{Cof} \frac{x_m + b}{a} - \mathfrak{Cof} \frac{x_m - b}{a} \right). \quad \text{c)}$$

b) und c) lassen sich umformen zu

$$a \mathfrak{Cof} \frac{x_m}{a} \mathfrak{Sin} \frac{b}{a} = s, \quad a \mathfrak{Sin} \frac{x_m}{a} \mathfrak{Sin} \frac{b}{a} = h \quad \text{d)}$$

[s. (58) S. 150], aus denen man durch Quadrieren und Subtrahieren erhält

$$a^2 \mathfrak{Sin}^2 \frac{b}{a} = s^2 - h^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{Sin} \frac{b}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{b}. \quad \text{e)}$$

e) ist eine in $\frac{b}{a}$ transzendente Gleichung, aus der sich durch Annäherung $\frac{b}{a}$ und damit a ermitteln läßt. Dividiert man die beiden Gleichungen d) durcheinander, so erhält man

$$\mathfrak{Tg} \frac{x_m}{a} = \frac{h}{s}$$

und daraus die Abszisse von M :

$$x_m = a \mathfrak{Ar} \mathfrak{Tg} \frac{h}{s}. \quad \text{f)}$$

Die Addition der beiden Gleichungen a) liefert

$$2y_m = a \left(\mathfrak{Cof} \frac{x_m - b}{a} + \mathfrak{Cof} \frac{x_m + b}{a} \right) = 2a \mathfrak{Cof} \frac{x_m}{a} \mathfrak{Cof} \frac{b}{a}$$

und in Verbindung mit der ersten Gleichung von d) die Gleichung

$$y_m = s \mathfrak{Ctg} \frac{b}{a}, \quad \text{g)}$$

wodurch auch die Ordinate von M und damit die Lage des Koordinatensystems festgelegt ist. Die gestellte Aufgabe wird demnach durch die Gleichungen e), f), g)

$$\frac{\mathfrak{Sin} \frac{b}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{b}, \quad x_m = a \mathfrak{Ar} \mathfrak{Tg} \frac{h}{s}, \quad y_m = s \mathfrak{Ctg} \frac{b}{a}$$

gelöst.

Zahlenbeispiel. Das Seil habe die Länge $2s = 34$ m; ferner sei $b = 14$ m, $h = 8$ m. Nach e) ist

$$f\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \text{Sin} \frac{b}{a} - \frac{15}{14} \cdot \frac{b}{a} = 0;$$

die Newtonsche Methode gibt

$$f'\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \text{Cos} \frac{b}{a} - 1,07143;$$

der Lösungsweg ist aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

$\frac{b}{a}$	1	0,78	0,676	0,641	0,6481
$f\left(\frac{b}{a}\right)$	0,1038	0,0258	0,0058	-0,0010	0,0000
$f'\left(\frac{b}{a}\right)$	0,4717	0,2485	0,1659	0,1412	
δ	0,22	0,104	0,035	-0,0071	

Es ist demnach

$$\frac{b}{a} = 0,6481, \quad \text{also} \quad a = 21,61 \text{ m};$$

folglich nach f)

$$x_m = 21,61 \text{ m} \cdot \text{Sin} 0,4706 = 21,61 \text{ m} \cdot 0,5108 = 11,04 \text{ m}$$

und nach g)

$$y_m = 17 \text{ m} \cdot \text{Cos} 0,6481 = 17 \text{ m} \cdot 0,5704; \quad y_m = 29,80 \text{ m}.$$

Abb. 204 zeigt die Lage des Seiles.

Ist $h = 0$, d. h. liegen die beiden Aufhängepunkte P_1 und P_2 gleich hoch, so geht e) über in

$$\frac{\text{Sin} \frac{b}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{s}{b}. \quad \text{e)'}$$

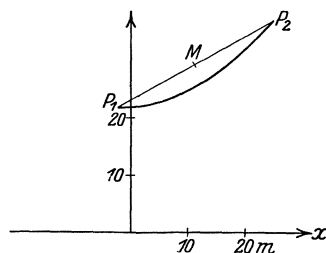


Abb. 204.

Außerdem läßt sich in diesem Falle der Aufhängewinkel α , d. h. der Winkel, unter welchem in den Aufhängepunkten das Seil gegen die x -Achse gerichtet ist, bequem bestimmen; es ist nämlich (s. Abb. 202), da hier $y_1 = y_m = y_2$,

$$\cos \alpha = \frac{a}{y_m} = \frac{a}{s} \text{Cos} \frac{b}{a} = \frac{a}{s} \frac{\text{Sin} \frac{b}{a}}{\text{Cos} \frac{b}{a}} = \frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} \cdot \frac{1}{\text{Cos} \frac{b}{a}} = \frac{1}{\text{Cos} \frac{b}{a}}.$$

Setzen wir wieder $s = 17 \text{ m}$, $b = 14 \text{ m}$, dagegen $h = 0$, so gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen:

$$f\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \mathfrak{S}in \frac{b}{a} - 1,2143 \cdot \frac{b}{a}, \quad f'\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \mathfrak{C}os \frac{b}{a} - 1,2143.$$

$\frac{b}{a}$	1	1,119	1,1006	1,1002	$\frac{b}{a} = 1,1002, \quad a = 12,73 \text{ m}$
$f\left(\frac{b}{a}\right)$	-0,0391	+0,0088	+0,0002	0,0000	$y_m = 21,24 \text{ m}$
$f'\left(\frac{b}{a}\right)$	0,3288	+0,4799	+0,4550		$\cos \alpha = \frac{1}{\mathfrak{C}os 1,1002} = \frac{1}{1,6688} = 0,5992$
δ	-0,119	+0,0184	+0,0004		$\alpha = 53^\circ 11'$ (Abb. 205)

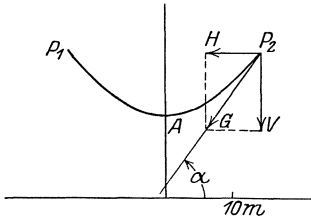


Abb. 205.

Hat das Seil das Gewicht $2s \cdot \gamma$, wobei γ das Gewicht der Längeneinheit bedeutet, so wird auf die beiden in gleicher Höhe liegenden Aufhängepunkte P_1 und P_2 vom gegenseitigen Abstand $2b$ eine Zugkraft G ausgeübt, die die Richtung des Seiles in P_1 bzw. P_2 hat und deren vertikale Komponente $V = s \cdot \gamma$ ist. Da G und V den Winkel

$90^\circ - \alpha$ einschließen, ist $G = \frac{V}{\sin \alpha}$ und die horizontale Komponente $H = V \cdot \text{ctg} \alpha$. Nun ist

$$s = a \mathfrak{S}in \frac{b}{a}, \quad \text{also} \quad V = \gamma a \mathfrak{S}in \frac{b}{a}, \quad \text{und} \quad \text{tg} \alpha = \mathfrak{S}in \frac{b}{a},$$

demnach $H = \gamma a$; die horizontale Komponente der Zugkraft eines Seiles ist an allen Stellen die gleiche. Wir erhalten somit für die gesamte Zugkraft, die das Seil auf den Aufhängepunkt ausübt, da

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}}{\text{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \mathfrak{S}in^2 \frac{b}{a}}}{\mathfrak{S}in \frac{b}{a}} = \mathfrak{C}tg \frac{b}{a} \quad \text{ist,}$$

$$G = \gamma a \mathfrak{S}in \frac{b}{a} \cdot \mathfrak{C}tg \frac{b}{a} = \gamma a \mathfrak{C}os \frac{b}{a}.$$

Die Beanspruchung des Aufhängepunktes ist also, wie schon einfache Überlegung lehrt, von der Länge $2s$ des Seiles und damit von dem Parameter a abhängig; sowohl für $a = 0$ (Seil unendlich lang) als auch für $a = \infty$ (Seil zwischen P_1 und P_2 straff gespannt, kürzeste mögliche Länge $2b$) wird $G = \infty$. Wir wollen die Seillänge ermitteln, für welche die Aufhängepunkte am geringsten beansprucht werden.

$G = \gamma a \mathfrak{Cof} \frac{b}{a}$ stellt G als Funktion von a dar; wir müssen demnach $\frac{dG}{da}$ bilden. Nach der Produktregel ist

$$\frac{dG}{da} = \gamma \left[\mathfrak{Cof} \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \mathfrak{Sin} \frac{b}{a} \right].$$

G wird also am kleinsten, wenn die Gleichung erfüllt ist:

$$\mathfrak{Cof} \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \mathfrak{Sin} \frac{b}{a} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{b}{a} \cdot \mathfrak{Tg} \frac{b}{a} = 1.$$

Diese Gleichung lösen wir unter Benutzung der $\log \mathfrak{Tg}$ -Tafeln durch Annäherung. Ist

$$f\left(\frac{b}{a}\right) = \log \frac{b}{a} + \log \mathfrak{Tg} \frac{b}{a} = 0,$$

so ist

für $\frac{b}{a} = 1,20$	1,19	1,199	1,1997
$\log \frac{b}{a} = 0,0792$	0,0756	0,0788	0,0791
$\log \mathfrak{Tg} \frac{b}{a} = 0,9210 - 1$	0,9194 - 1	0,9208 - 1	0,9209 - 1
$f\left(\frac{b}{a}\right) = 0,0002$	- 0,0050	- 0,0004	0,0000

Also ist $\frac{b}{a} = 1,1997$ und $a = 0,83354b$. Da

$$\frac{d^2G}{da^2} = \gamma \left[-\frac{b}{a^2} \mathfrak{Sin} \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} \mathfrak{Cof} \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^3} \mathfrak{Cof} \frac{b}{a} \right] = \gamma \frac{b^2}{a^3} \mathfrak{Cof} \frac{b}{a}$$

für jeden Wert von a , also auch für $a = 0,83354b$ positiv sein muß, ist G in der Tat ein Kleinstwert. Es ist ferner die Ordinate des Aufhängepunktes

$$y_b = a \mathfrak{Cof} \frac{b}{a} = 0,83354b \cdot \mathfrak{Cof} 1,1997 = 1,5087b$$

und demnach der Durchhang der günstigsten Kette

$$k = y_b - a = 0,6752b.$$

Der Aufhängewinkel α_b ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \alpha_b = \mathfrak{Sin} \frac{b}{a} = \mathfrak{Sin} 1,1997$$

zu $\alpha_b = 56^\circ 28'$ und die Seillänge zu

$$2s = 2 \cdot a \mathfrak{Sin} \frac{b}{a} = 2 \cdot 0,83354 \cdot \mathfrak{Sin} 1,1997b = 2,515b.$$

Die bisherigen Kurvenuntersuchungen schlossen sich an die Form $y = f(x)$ der Kurvengleichung an. Sie sind, da diese Form nicht immer möglich ist, noch auf andere Gleichungsformen auszudehnen. So wollen wir uns im nächsten Paragraphen mit Kurven befassen, deren Gleichung

in Parameterdarstellung gegeben ist, d. h. für welche sowohl die Abszisse als auch die Ordinate eines beliebigen Kurvenpunktes Funktionen einer dritten Veränderlichen, eben des Parameters, sind.

§ 6. Die Kurve in Parameterdarstellung.

(134) Wir haben schon einige Parameterdarstellungen von Kurven kennen gelernt; es sei nur erinnert an die Gleichung der Geraden (113), Formeln 20) S. 308, in der x und y als Funktionen des Teilverhältnisses λ gegeben waren, oder an die Gleichung der Evolute einer Kurve (130), Formeln 43), S. 353. Bezeichnen wir allgemein den Parameter mit t , so ist die Gleichung der Kurve

$$x = \varphi(t) \quad \text{und} \quad y = \psi(t), \tag{46}$$

wobei φ und ψ beliebige, stetige und eindeutige Funktionen von t sein sollen. Zu einem bestimmten Werte t gehört dann stets ein bestimmter Wert $x = \varphi(t)$ und ein bestimmter Wert $y = \psi(t)$, also ein bestimmter Punkt P , dessen Koordinaten diese bestimmten Werte von x und y sind. Um die folgenden Betrachtungen möglichst anschaulich zu gestalten, möge die allgemein theoretischen Erörterungen ein einfaches Anwendungsbeispiel begleiten. Wir wählen dazu die Kurve, deren Gleichung lautet:

$$x = t^2 - t, \quad y = t^3 + t^2.$$

Wir finden für

$t =$	0	0,5	1	1,5	2...	-0,5	-1	-1,5	-2...	die Werte
$x =$	0	-0,25	0	0,75	2...	+0,75	2	3,75	6...	
$y =$	0	+0,375	2	5,625	12...	+0,125	0	-1,125	-4...	



Nur für $t=0$ und $t=1$ wird die Abszisse $x=0$ und nur für $t=0$ und $t=-1$ die Ordinate $y=0$. In Abb. 206 sind die zugehörigen Punkte mit Angabe ihres Parameters t eingetragen.

Um die Richtung der Kurve in einem Punkte P zu ermitteln, bedürfen wir des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, und es fragt sich nun, wie wir zu ihm gelangen, wenn x und y Funktionen von t , und y nicht mehr unmittelbar eine Funktion von x ist. Nun ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

den Differentialquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ können wir aber auch in unserem Falle bilden: Wir erteilen der unab-

Abb. 206.

hängigen Veränderlichen t einen Zuwachs Δt ; dadurch erhalten sowohl x als auch y einen Zuwachs Δx bzw. Δy derart, daß

$$\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t), \quad \Delta y = \psi(t + \Delta t) - \psi(t)$$

ist. Demnach ist der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)},$$

den wir auch schreiben können

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} : \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}.$$

Folglich ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} : \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} : \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}.$$

Da nun

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad \text{und} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

ist, so ergibt sich für den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}. \quad (47)$$

Wir sehen aus Formel 47), daß formal die beiden Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dx}{dt}$ wie zwei wirkliche Brüche durcheinander dividiert werden können, daß man scheinbar durch das Differential dt kürzen kann.

Um also in unserem Beispiele den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zu bilden, ermitteln wir zunächst

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2t \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt} = 2t - 1.$$

und finden durch Dividieren

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 + 2t}{2t - 1}.$$

Der Differentialquotient erscheint demnach als Funktion des Parameters t . Nun können wir an unsere Kurve die Tangenten konstruieren; es ist nämlich für

$t =$	0	0,5	1	1,5	2 ...	- 0,5	- 1	- 1,5	- 2 ...
$\frac{dy}{dx} =$	0	∞	5	4,875	5,333 ...	+ 0,125	- 0,333	- 0,9375	- 1,6 ...

In Abb. 206 sind die Tangenten zum Teile eingetragen. Wir erkennen, daß für $t = 0$ der Punkt $(0|0)$ eine horizontale Tangente und für $t = 0,5$ der Punkt $(-0,25|+0,375)$ eine vertikale Tangente hat. Da taucht die Frage auf, ob die Kurve noch weitere derartige Punkte hat. Damit

ein Höchst- oder Tiefstpunkt vorhanden ist, muß $\frac{dy}{dx} = 0$ sein; folglich ist nach Formel 47) $\frac{dy}{dt} = 0$ die notwendige Bedingung für das Auftreten eines solchen Punktes. Allerdings müssen wir darauf achten, ob für den so gefundenen Wert nicht auch $\frac{dx}{dt} = 0$ ist; in diesem Falle würden wir für den Differentialquotienten den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ erhalten. In unserem Beispiele wird außer für $t = 0$ auch noch für $t = -\frac{2}{3}$ $\frac{dy}{dt} = 0$; da an dieser Stelle $\frac{dx}{dt} = -\frac{7}{3}$ ist, ist hier in der Tat $\frac{dy}{dx} = 0$; folglich hat auch der Punkt $\left(\frac{10}{9} \mid \frac{4}{27}\right)$ eine horizontale Tangente. Die Abbildung zeigt uns, daß $(0 \mid 0)$ ein Tiefst- und $\left(\frac{10}{9} \mid \frac{4}{27}\right)$ ein Höchstpunkt ist; die analytische Entscheidung können wir erst nach Ermittlung des zweiten Differentialquotienten treffen. Daß andererseits $(-0,25 \mid +0,375)$ der einzige Punkt ist, dessen Tangente vertikal läuft, sei der Untersuchung des Lesers überlassen.

Haben wir $\frac{dy}{dx}$ ermittelt, so sind wir in der Lage, mittelst der in (133) S. 357 zusammengestellten Formeln auch die Gleichungen der Tangenten und der Normalen aufzustellen, ebenso die Längen der Tangenten, Normalen, Subtangenten und Subnormalen zu berechnen. Der Leser möge dies für einige Punkte unserer Kurve wirklich durchführen.

Wir gehen zur Bildung des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ über. Da

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx}$$

ist und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

eine Funktion von t ist, so müssen wir nach der Kettenregel $\frac{dy}{dx}$ zuerst nach t differenzieren und diesen Differentialquotienten $\frac{d \frac{dy}{dx}}{dx}$ mit dem Differentialquotienten $\frac{dt}{dx}$ multiplizieren. Nach Formel 65) in (35) S. 82 ist daher

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{d \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}{dt} : \varphi'(t).$$

Die Differentiation $\frac{d \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}{dt}$ wird nach der Quotientenregel ausgeführt; sie ergibt

$$\frac{d \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}{dt} = \frac{\varphi'(t) \cdot \psi''(t) - \psi'(t) \cdot \varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2},$$

so daß wir schließlich erhalten

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t) \cdot \varphi''(t) - \varphi'(t) \cdot \varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}. \quad (48)$$

Da in unserem Beispiele $\frac{d^2 x}{dt^2} = 2$ und $\frac{d^2 y}{dt^2} = 6t + 2$ ist, erhalten wir hier

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(3t^2 - 3t - 1)}{(2t - 1)^3}.$$

So ist für

$t =$	0	0,5	1	1,5	2 ...	-0,5	-1	-1,5	-2 ...
$\frac{d^2 y}{dx^2} =$	2	∞	-2	$\frac{5}{16}$	$\frac{10}{27} \dots$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{10}{27}$	$-\frac{41}{128}$	$-\frac{34}{125} \dots$

Da für $t = 0$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 > 0$ ist, so ist durch Rechnung bewiesen, daß (0|0) in der Tat ein Tiefstpunkt ist; ebenso ist für $t = -\frac{2}{3}$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{18}{49}$, d. h. der Punkt $(\frac{1}{3} | \frac{4}{27})$ ist in Übereinstimmung mit der Abbildung ein Höchstpunkt.

Den zweiten Differentialquotienten können wir weiter verwerten, um die Krümmungsverhältnisse der Kurve zu untersuchen. Die allgemeine Berechnung der Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes und des Krümmungsradius irgendeines Kurvenpunktes nach den Formeln 43) und 44) — hier als Funktionen von t — ist einfach und bleibe dem Leser überlassen. Wir wollen nur die Krümmungshalbmesser für die Höchst- und Tiefstpunkte berechnen, da sich hier die Rechnung besonders einfach gestaltet. Da nämlich in diesen Punkten $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, wird hier $\rho = \frac{1}{y''}$, und somit ist in (0|0) $\rho = \frac{1}{2}$ und in $(\frac{10}{9} | \frac{4}{27})$ $\rho = \frac{49}{18}$. Im Punkte $(-0,25 | +0,375)$ versagt unsere Formel, da hier sowohl $\frac{dy}{dx}$, als auch $\frac{d^2 y}{dx^2}$ unendlich groß werden. Wir können uns aber hier durch die folgende Erwägung helfen. In der Formel für den Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

wird x als die unabhängige, y als die abhängige Veränderliche betrachtet, da die Differentialquotienten von y nach x auftreten. In Wirklichkeit ist aber die Größe des Krümmungshalbmessers einzig durch die Kurve und nicht auch (wie etwa die Länge der Tangente, Subtangente, Normalen, Subnormalen usw.) durch die Lage der Koordinatenachsen

bestimmt. Eine Vertauschung der beiden Veränderlichen kann daher auf die Größe des Krümmungshalbmessers überhaupt keinen Einfluß haben; folglich läßt sich der Krümmungshalbmesser auch durch die Formel

$$\varrho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

berechnen. Diese Formel können wir nun bei unserem Punkte $(-0,25 | +0,375)$ verwenden, mit besonders gutem Erfolge, weil für ihn

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{2t-1}{3t^2+2t}\right)_{t=0,5} = 0$$

wird, also einfach

$$\varrho = \frac{1}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

ist. Wir müssen zur Bestimmung von ϱ nur erst $\frac{d^2x}{dy^2}$ ausrechnen, indem wir $\frac{dx}{dy}$ nochmals nach y differenzieren. Es ist

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d \frac{dx}{dy}}{dy} = \frac{d \frac{dx}{dy}}{dt} : \frac{dy}{dt}.$$

Da

$$\frac{d \frac{dx}{dy}}{dt} = \frac{(3t^2+2t) \cdot 2 - (2t-1)(6t+2)}{(3t^2+2t)^2} = \frac{-6t^2+6t+2}{(3t^2+2t)^2}$$

ist, so wird

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{2(3t^2-3t-1)}{(3t^2+2t)^2} : (3t^2+2t) = -\frac{2(3t^2-3t-1)}{t^3(3t+2)^3}.$$

Demnach ist für $t = 0,5$ der gesuchte Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{4}{3} \frac{9}{2}$.

Wir wissen, daß an Stellen, wo der zweite Differentialquotient verschwindet, die Kurve einen Wendepunkt hat. Für unser Kurvenbeispiel tritt dies ein, wenn $3t^2 - 3t - 1 = 0$ ist; das gibt die beiden Lösungen

$$t = \frac{1}{6} (3 \pm \sqrt{21}), \quad \text{also} \quad t_1 = 1,2638, \quad t_2 = -0,2638.$$

Es gibt also zwei Wendepunkte; sie haben die Koordinaten

$$\frac{1}{3} | \frac{1}{18} (33 \pm 7\sqrt{21})$$

oder

$$W_1) (0,3333 | 3,6155) \quad \text{und} \quad W_2) (0,3333 | 0,0512);$$

die Wendetangenten haben die Neigung $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21})$, also

$$W_1) 4,7913 \quad \text{bzw.} \quad W_2) 0,2087.$$

(135) Damit wollen wir die Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung der in Parameterform gegebenen Kurve ab-

brechen. Wir überlassen dem Leser die weitere Ausführung, wie die Ermittlung der Scheitel der Kurve, und gehen jetzt zur Verwertung der Integralrechnung über. Da kommt in erster Linie in Frage die Ermittlung des Inhaltes einer von der Kurve, der Abszissenachse und zwei Grenzordinaten eingeschlossenen Fläche; aus (81) Formel 41)

S. 212 wissen wir, daß diese Fläche durch die Formel $\int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx$ wiedergegeben wird. Diese Formel läßt sich jedoch nur anwenden, wenn x die Integrationsveränderliche, d. h. die unabhängige Veränderliche ist. Diese Voraussetzung trifft für unseren Fall nicht zu, da $y(= \psi(t))$ und $x(= \varphi(t))$ Funktionen des Parameters t sind. Aus der Gleichung $x = \varphi(t)$ folgt aber

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \quad \text{also} \quad dx = \varphi'(t) \cdot dt.$$

Damit ist der Integrand $y \cdot dx$ übergeführt in den Integranden

$$\psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot dt,$$

d. h. in eine Funktion von t . Da unsere Integrationsveränderliche jetzt t ist, müssen die Integrationsgrenzen auch bestimmte Werte t_1 und t_2 von t sein, so daß sich für eine Fläche, welche begrenzt wird von der Abszissenachse, zwei zu $t = t_1$ und $t = t_2$ gehörigen Grenzordinaten und der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, die Inhaltsformel ergibt

$$F_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot dt, \quad (49)$$

Für die Kurve in Abb. 206 ist also

$$F_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (t^3 + t^2)(2t - 1) dt = \int_{t_1}^{t_2} (2t^4 + t^3 - t^2) dt = \left[\frac{2}{5} t^5 + \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{3} t^3 \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Wollen wir z. B. die von der Abszissenachse und der Kurve allein begrenzte Fläche, die also zwischen den beiden Schnittpunkten der Kurve mit der Abszissenachse liegt, berechnen, so müssen wir $t_1 = 0$ und $t_2 = -1$ setzen und erhalten $(F)_0^{-1} = \frac{1}{6}$ Flächeneinheiten.

Gleichung 49) gibt die Fläche, die von der Abszissenachse, zwei Grenzordinaten und der Kurve eingeschlossen wird. Durch Vertauschung von φ und ψ erhalten wir ohne weiteres eine Formel für den Inhalt der Fläche, welche von der Ordinatenachse, zwei Grenzabszissen und der Kurve eingeschlossen wird; sie lautet

$$F'_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \cdot \psi'(t) \cdot dt. \quad (49')$$

In unserem Beispiele:

$$\begin{aligned} F'_{t_1}{}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} (t^2 - t)(3t^2 + 2t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (3t^4 - t^3 - 2t^2) dt \\ &= \left[\frac{3}{5} t^5 - \frac{1}{4} t^4 - \frac{2}{3} t^3 \right]_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist der Inhalt der von der Ordinatenachse und der Kurve allein eingeschlossenen Fläche $(F')_0^1 = -\frac{1}{2} \frac{9}{5}$ Flächeneinheiten.

Die Länge der Kurve wird nach (89) S. 236 Formel 47) dargestellt durch das Integral

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Wir müssen diese Formel für den vorliegenden Fall folgendermaßen umgestalten. Es ist nach 47)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)};$$

außerdem $dx = \varphi'(t) \cdot dt$; daher lautet die Formel jetzt

$$s_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (50)$$

Unser Beispiel liefert

$$s_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(2t-1)^2 + (3t^2+2t)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{9t^4 + 12t^3 + 8t^2 - 4t + 1} dt.$$

Mit unseren bisherigen Hilfsmitteln läßt sich das erhaltene Integral nicht auswerten; wir wollen daher von einer zahlenmäßigen Berechnung Abstand nehmen.

Wie die Formeln für den Flächeninhalt und für die Kurvenlänge lassen sich auch die Formeln für statisches Moment, Trägheitsmoment, Schwerpunkt, Drehflächen und Drehkörper, die in Abschnitt II, § 8 abgeleitet sind, für die Parameterdarstellung umformen. So geht beispielsweise die Formel für das statische Moment der Fläche bezüglich der x -Achse

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

über in

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\psi(t))^2 \cdot \varphi'(t) dt;$$

$$\begin{aligned} \text{aus } M_y &= \int_{x_1}^{x_2} x y dx & \text{wird } M_y &= \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \cdot \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt, \\ \text{,, } J_x &= \frac{1}{3} \int_{x_1}^{x_2} y^3 dx & \text{,, } J_x &= \frac{1}{3} \int_{t_1}^{t_2} (\psi(t))^3 \varphi'(t) dt, \\ \text{,, } J_y &= \int_{x_1}^{x_2} x y^2 dx & \text{,, } J_y &= \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) (\psi(t))^2 \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

usw. Durch Vertauschen von φ und ψ erhält man hieraus die entsprechenden Formeln für die Fläche, welche von der y -Achse, der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ und den zu $t = t_1$ und $t = t_2$ gehörigen Abszissen begrenzt wird.

In unserem Beispiel $x = t^3 - t$, $y = t^3 + t^2$ ist für die von der x -Achse und der Kurve begrenzte Fläche

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \int_0^{-1} (t^3 + t^2)^2 \cdot (2t - 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{-1} (2t^7 + 3t^6 - t^4) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^8}{4} + \frac{3}{7} t^7 - \frac{t^5}{5} \right]_0^{-1} = \frac{3}{280}, \\ M_y &= \int_0^{-1} (t^2 - t) (t^3 + t^2) (2t - 1) dt \\ &= \int_0^{-1} (2t^6 - t^5 - 2t^4 + t^3) dt = \left[\frac{2}{7} t^7 - \frac{t^6}{6} - \frac{2}{5} t^5 + \frac{t^4}{4} \right]_0^{-1} = \frac{83}{420}; \end{aligned}$$

hieraus ergeben sich die Schwerpunktskoordinaten

$$\xi = \frac{8}{7} \frac{3}{7} = 1,0779, \quad \eta = \frac{9}{1} \frac{3}{4} = 0,05844.$$

Die weitere Behandlung sei dem Leser überlassen.

(136) Als Anwendung der Lehre von der ebenen Kurve in Parameterdarstellung wollen wir einige technisch besonders wichtige Kurven behandeln. Wir beginnen mit der

Ellipse. Wir definieren sie als die Kurve, deren Gleichung in Parameterform lautet

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad (51)$$

wobei a und b gegebene Strecken sind. Wir können in diesem Falle leicht eine parameterfreie Gleichung gewinnen, wenn wir beide Gleichungen nach $\cos t$ bzw. $\sin t$ auflösen und die gewonnenen Gleichungen

quadrieren und addieren. Es ergibt sich

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (52)$$

die Achsengleichung der Ellipse. Davon später mehr. Aus den Gleichungen 51) folgt eine einfache geometrische Konstruktion der Ellipse (Abb. 207). Wir schlagen um O die beiden Kreise mit den Halbmessern a und b ; ferner legen wir durch O einen Strahl unter dem Winkel t gegen die x -Achse, der die beiden Kreise in P_a bzw. P_b schneidet möge. Dann ziehen wir durch P_a die Parallele zur y -Achse und durch P_b die Parallele zur x -Achse; beide Parallelen mögen sich in P scheiden; P ist ein Punkt der Ellipse. Es ist in der Tat

$$OX = x = a \cos t, \quad OY = y = b \sin t.$$

Aus der Konstruktion folgt sofort weiter, daß sowohl die x -Achse als auch die y -Achse Symmetrielinien der Ellipse sind, eine Eigenschaft, die wir übrigens auch aus Gleichung 52), die sowohl in x als auch in y rein quadratisch ist, ablesen können. Man nennt daher diese beiden Geraden die Achsen der Ellipse, ihre Schnittpunkte mit der Ellipse die Scheitel der Ellipse. Diese Scheitel ergeben sich zu

$$A_1(a|0) (t=0), \quad B_1(0|b) \left(t = \frac{\pi}{2}\right), \quad A_2(-a|0) (t=\pi), \quad B_2(0|-b) \left(t = \frac{3}{2}\pi\right).$$

Ist $a > b$, so heißen a die Länge der großen Halbachse, b die Länge der kleinen Halbachse, A_1 und A_2 die Hauptscheitel, B_1 und B_2 die Nebenscheitel der Ellipse. Der Kreis um O mit dem Halbmesser a , der also durch A_1 und A_2 geht, heißt der Hauptscheitelkreis, der um O mit dem Halbmesser b , der B_1 und B_2 enthält, der Nebenscheitelkreis.

Aus dem Gleichungssystem 51) ergibt sich noch eine enge Beziehung zwischen Ellipse und Kreis. Bedenken wir nämlich, daß das Gleichungspaar $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ eine Parameterdarstellung des Kreises vom Halbmesser a , also des Hauptscheitelkreises, ist, so sehen wir, daß man die Ordinate des Ellipsenpunktes P aus der des entsprechenden Kreispunktes P_a erhält, indem man diese im Verhältnis $b:a$ verkürzt. Ellipse und Hauptscheitelkreis sind zueinander affin. Ebenso besteht Affinität zwischen Ellipse und Nebenscheitelkreis, nur mit dem Unterschied, daß man die Abszissen der Punkte des letzteren im Verhältnis $a:b$ strecken muß.

Zieht man durch P zu OP_bP_a die Parallele, welche auf den Achsen die Punkte Q_x bzw. Q_y ausschneidet, so sind OQ_xPP_b und OQ_yPP_a Parallelogramme; folglich ist $Q_yP = a$, $Q_xP = b$, also $Q_yQ_x = a - b$. Hieraus ergibt sich die folgende Entstehungsweise der Ellipse: Läßt man eine Gerade sich so bewegen, daß zwei ihrer Punkte Q_x

und Q_y , deren gegenseitiger Abstand gleich $a - b$ ist, auf zwei zueinander senkrechten Geraden gleiten, so beschreibt der Punkt P der Geraden, dessen Abstand von Q_y gleich a , von Q_x also gleich b ist, eine Ellipse mit den beiden Halbachsen a und b , für welche die zueinander senkrechten Geraden die Achsen sind.

— Zu einer anderen Ellipsenerzeugung gelangt man durch folgende Betrachtung. Ergänzt man die drei Punkte P_a , P , P_b zu dem Rechteck $P_a P P_b P'$, zieht man ferner die Diagonale $P P'$ dieses Rechtecks, welche die x -Achse

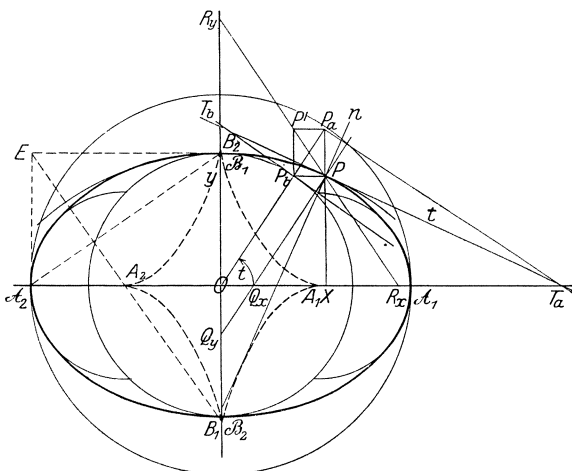


Abb. 207.

in R_x , die y -Achse in R_y schneiden möge, so ist

$$R_x P = O P_b = b, \quad P R_y = P P' + P' R_y = P_b P_a + O P_b = O P_a = a,$$

und daher $R_x R_y = a + b$. Hieraus ergibt sich: Bewegt sich eine Gerade so, daß zwei ihrer Punkte R_x und R_y , die den Abstand $a + b$ voneinander haben, auf zwei zueinander senkrechten Geraden gleiten, so beschreibt der zwischen R_x und R_y liegende Punkt P der Geraden, für welchen $R_x P = b$, $P R_y = a$ ist, eine Ellipse mit den Halbachsen a und b , deren Achsen die zueinander senkrechten Geraden sind. Man bezeichnet diese Erzeugungsweisen der Ellipse wohl auch als Papierstreifenkonstruktion, weil sie sich bequem mit einem Papierstreifen, von dem zwei Punkte auf zueinander senkrechten Geraden gleiten, ausführen lassen. Der Ellipsenzirkel, die Ellipsendrehbank, das Ovalwerk sind auf diesem Prinzip aufgebaut.

Da

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t$$

ist, so ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t,$$

und die Tangente in P hat die Gleichung

$$y - b \sin t = -\frac{b}{a} (x - a \cos t) \operatorname{ctg} t,$$

die sich durch Multiplizieren mit $a \sin t$ umformen läßt in

$$bx \cos t + ay \sin t = ab.$$

Die Abschnittsgleichung lautet demnach:

$$\frac{x}{a \cos t} + \frac{y}{b \sin t} = 1.$$

Also schneidet die Tangente auf der x -Achse das Stück $\frac{a}{\cos t}$, auf der y -Achse das Stück $\frac{b}{\sin t}$ ab. Diese Stücke kann man dadurch finden, daß man in P_a an den Hauptscheitelkreis und in P_b an den Nebenscheitelkreis die Tangenten legt; erstere schneide die x -Achse in T_a , letztere die y -Achse in T_b ; dann sind T_a und T_b Punkte der Tangente; denn es ist

$$OT_a = \frac{a}{\cos t} \quad \text{und} \quad OT_b = \frac{b}{\sin t}.$$

Hat man so die Tangente konstruiert, so läßt sich leicht die Normale zeichnen, auf der der Krümmungsmittelpunkt liegen muß. Aus Gründen der Symmetrie müssen selbstverständlich die Scheiteltangenten senkrecht zu den zugehörigen Achsen laufen, die Scheitelnormale folglich in die Achsen fallen. Die Subnormale s_n errechnet sich zu

$$s_n = y \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a} \cos t,$$

die sich ebenfalls einfach konstruieren läßt. (Wie?) Die Länge der Normalen ist dann

$$n = \sqrt{s_n^2 + y^2} = \frac{b}{a} \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}.$$

Aus dem zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{b}{a \sin^2 t} \cdot (-a \sin t) = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$$

ergibt sich für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \frac{dy}{dx} = a \cos t - \frac{1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{ctg}^2 t}{-\frac{b}{a^2 \sin^3 t}} \left(-\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t\right) \\ &= a \cos t - \frac{(\alpha^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) \alpha^2 \sin^3 t \cdot b \cos t}{\alpha^2 \sin^2 t \cdot a \cdot \sin t \cdot b} \\ &= a \cos t - \frac{(\alpha^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{a} \cos t = \frac{\cos t}{a} (\alpha^2 - \alpha^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t) \\ &= \frac{\cos t}{a} (\alpha^2 \cos^2 t - b^2 \cos^2 t), \\ \xi &= \frac{\alpha^2 - b^2}{a} \cos^3 t. \end{aligned}$$

Entsprechend findet man

$$\eta = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t.$$

Das Gleichungssystem

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t$$

stellt die Parameterform der *Evolute* der Ellipse dar; eliminiert man aus ihm den Parameter t , indem man schreibt

$$\cos t = \left(\frac{a\xi}{a^2 - b^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \sin t = \left(\frac{-b\eta}{a^2 - b^2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

quadriert und addiert, so erhält man die parameterfreie *Evoluten-*gleichung

$$\left(\frac{a\xi}{a^2 - b^2} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{a^2 - b^2} \right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Die *Evolute* selbst besteht aus vier symmetrischen Teilen und hat vier, den Ellipsenscheiteln entsprechende Spitzen A_1, B_1, A_2, B_2 , welche die zu diesen gehörigen Krümmungsmittelpunkte darstellen.

Die Länge des Krümmungshalbmessers in einem beliebigen Punkte P der Ellipse berechnen wir nach der Formel

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}};$$

wir erhalten

$$\rho = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{a^3 \sin^3 t} : \left(-\frac{b}{a^2 \sin^3 t} \right) = -\frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Da nun nach obigem

$$\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = \frac{a}{b} n$$

ist, so nimmt die Formel für den Krümmungshalbmesser die einfachere Gestalt an

$$\rho = -\frac{a^2 n^3}{b^4}.$$

Setzen wir $t = 0$ oder $t = \pi$, so erhalten wir den Krümmungshalbmesser für die Hauptscheitel

$$\rho_{A_1} = \rho_{A_2} = \frac{b^2}{a};$$

für

$$t = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad t = \frac{3}{2}\pi$$

ergibt sich

$$\rho_{B_1} = \rho_{B_2} = \frac{a^2}{b}$$

als Krümmungshalbmesser für die Nebenscheitel.

Zu den entsprechenden Mittelpunkten A_1, A_2, B_1, B_2 , den Spitzen der *Evolute*, gelangt man sehr einfach auf folgende Weise: Man ergänzt

die drei Punkte O, A_2, B_1 zum Rechteck OA_2EB_1 , zeichnet die Diagonale A_2B_1 und durch E das Lot zu dieser, welches die Hauptsache der Ellipse in A_2 , die Nebenachse in B_1 schneidet. Die Richtigkeit der Konstruktion folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke A_2B_1O und EA_2A_2 . A_1 und B_2 sind dann leicht zu finden.

Um den Inhalt der von der Ellipse eingeschlossenen Fläche zu berechnen, bedienen wir uns der Formel 49); bedenken wir, daß die beiden Achsen die Ellipse in vier kongruente Quadranten teilen, so genügt es, den Inhalt eines Quadranten zu berechnen. Im ersten Quadranten ist die untere Integrationsgrenze $t = 0$, die obere $t = \frac{\pi}{2}$. Wir erhalten sonach

$$\begin{aligned} F &= 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \cdot \sin t \cdot (-a \sin t) dt = -2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt \\ &= -2ab \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi ab. \end{aligned}$$

Das Minuszeichen erklärt sich daraus, daß zur unteren Grenze $t = 0$ die Abszisse $x = a$ und zur oberen Grenze $t = \frac{\pi}{2}$ die Abszisse $x = 0$ gehört; bei der Integration haben wir also die Abszissenachse in der negativen Richtung durchlaufen, während die Ordinaten sämtlich positiv sind; folglich muß sich nach den Auseinandersetzungen in (82) S. 219 der Inhalt negativ ergeben. Überdies hätten wir den Inhalt der Ellipse aus dem Inhalt des Hauptscheitelkreises auf Grund der Affinitätsbeziehungen von S. 374 erhalten können durch Multiplikation von πa^2 mit dem Verkürzungsfaktor $\frac{b}{a}$.

Die Länge des Ellipsenumfanges berechnen wir mittels der Formel 50) zu

$$s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

Zwar sind wir vorläufig nicht in der Lage, dieses Integral auszuwerten; doch wollen wir — für spätere Zwecke — eine Umformung des Integrals vornehmen. Wir führen durch die Gleichung $t = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ eine neue Integrationsveränderliche ein und erhalten

$$\begin{aligned} s &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \vartheta} d\vartheta \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ die numerische Exzentrizität der Ellipse genannt wird. Wie dem unbestimmten Integrale

$$\int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta,$$

einem sog. elliptischen Integrale, praktisch beizukommen ist, werden wir später sehen [s. (201) S. 664 f.].

Der Rauminhalt des durch Umdrehung der Ellipse um eine Achse entstehenden Umdrehungsellipsoids läßt sich folgendermaßen berechnen. Wählen wir als Drehachse die x -Achse, so ist nach Formel 49) auf S. 243

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} b^2 \sin^2 t \cdot (-a \sin t) dt = -2\pi a b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt \\ &= -2\pi a b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \sin t dt = 2\pi a b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) \\ &= 2\pi a b^2 \left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{3} \pi a b^2; \end{aligned}$$

wobei sich der Umstand, daß der Rauminhalt negativ wird, aus der gleichen Ursache erklärt wie beim Flächeninhalt [s. (82) S. 219].

Um die Oberfläche des Umdrehungsellipsoids zu berechnen, wollen wir als Drehachse die y -Achse wählen; wir erhalten unter der Voraussetzung $a > b$ das abgeplattete Umdrehungsellipsoid. Wir bedienen uns zur Ermittlung der Oberfläche der Formel 50) S. 245, aus welcher die für unseren Fall geltende Formel folgt

$$O = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

die für das Umdrehungsellipsoid ergibt

$$\begin{aligned} O &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t} \cos t dt \\ &= 4\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 + a^2 \varepsilon^2 \sin^2 t} \cdot \cos t \cdot dt \quad \left(\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \text{s. o.} \right), \\ O &= 4\pi a^2 \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{b}{a\varepsilon}\right)^2 + \sin^2 t} \cos t dt = 4\pi a^2 \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{b}{a\varepsilon}\right)^2 + \sin^2 t} d(\sin t) \end{aligned}$$

und unter Verwendung der Formel [TII 15]

$$O = 4\pi \varepsilon a^2 \left[\frac{1}{2} \sin t \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{\varepsilon a}\right)^2 + \sin^2 t} + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{\varepsilon a}\right)^2 \ln \left\{ \sin t + \sqrt{\left(\frac{b}{\varepsilon a}\right)^2 + \sin^2 t} \right\} \right]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

$$O = 2\pi \varepsilon a^2 \left[\sqrt{\left(\frac{b}{\varepsilon a}\right)^2 + 1} + \left(\frac{b}{\varepsilon a}\right)^2 \ln \left\{ 1 + \sqrt{\left(\frac{b}{\varepsilon a}\right)^2 + 1} \right\} - \left(\frac{b}{\varepsilon a}\right)^2 \ln \frac{b}{\varepsilon a} \right].$$

Da

$$\left(\frac{b}{\varepsilon a}\right)^2 + 1 = \frac{b^2}{a^2 - b^2} + 1 = \frac{a^2}{a^2 - b^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

ist, so läßt sich dieser Ausdruck zusammenziehen zu

$$O = 2\pi \varepsilon a^2 \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{b^2}{\varepsilon^2 a^2} \cdot \ln \frac{\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \varepsilon a}{b} \right]$$

oder

$$O = 2\pi \left[a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon} \ln \left\{ (1 + \varepsilon) \frac{a}{b} \right\} \right] = 2\pi \left[a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon} \mathfrak{A}r \mathfrak{C}h \left[\frac{a}{b} \right] \right].$$

Der Erdkörper ist ein abgeplattetes Umdrehungsellipsoid, und zwar ist $a = 6377,397$ km, $b = 6356,079$ km; hieraus folgt $\varepsilon = 0,081698$ und damit die Oberfläche des Erdsphäroids zu $O = 509,95 \cdot 10^6$ km².

Lassen wir die Ellipse sich um die große Achse drehen, so wird

$$\begin{aligned} O &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} \sin t dt \\ &= -\frac{2\pi}{\varepsilon} ab \left[\arcsin(\varepsilon \cos t) + \varepsilon \cos t \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad [\text{s. Formel TII 13}], \end{aligned}$$

$$O = \frac{2\pi}{\varepsilon} ab \left[\arcsin \varepsilon + \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right].$$

Da

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{b}{a}$$

ist, so erhält man schließlich

$$O = 2\pi \left[b^2 + ab \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right]$$

Im Zusammenhang mit der Ellipse wollen wir kurz auf die **Hyperbel** eingehen. Legten wir bei der Parameterdarstellung der Ellipse die Kreisfunktionen in der Form $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ zugrunde, so führt, wie wir gleich sehen werden, die Verwendung der entsprechenden hyperbolischen Funktionen auf eine Parameterdarstellung der Hyperbel; die Gleichungen lauten

$$x = a \mathfrak{C}h t, \quad y = b \mathfrak{S}h t. \quad (51')$$

Da nach Formel 100') S. 150 $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}^2 t - \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 t = 1$ ist, so folgt aus 51') die parameterfreie Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (52')$$

in Übereinstimmung mit der auf S. 304 behandelten Achsengleichung der Hyperbel. Unter Verwendung der Tafeln der Hyperbelfunktionen kann man die Hyperbel auf Grund der Gleichungen 51') punktweise konstruieren (s. Abb. 208). Für $t = 0$ ist $x = a$, $y = 0$; der zugehörige

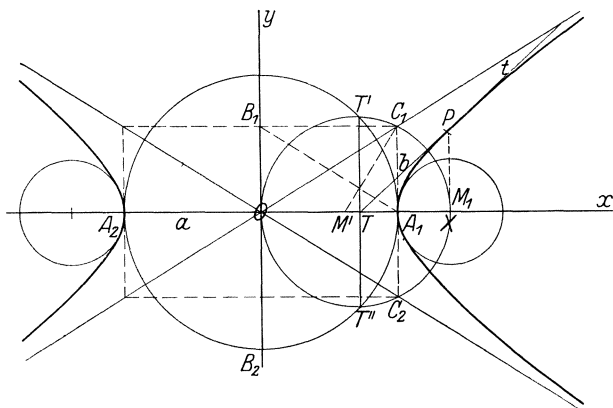


Abb. 208.

Punkt A_1 ist ein Scheitel der Hyperbel; da stets $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} t > 1$ ist, kann niemals $x = 0$ sein; die Hyperbel schneidet demnach die y -Achse nicht; diese heißt die imaginäre Achse der Hyperbel, während die x -Achse ihre reelle Achse ist. Formelpaar 51') gibt nur den einen Hyperbelzweig; der andere wird durch das Gleichungspaar

$$x = -a \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} t, \quad y = -b \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} t$$

wiedergegeben; er trägt den anderen Hyperbelscheitel $A_2(-a|0)$. a ist die Länge der reellen, b die der imaginären Halbachse. Da

$$\frac{dx}{dt} = a \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} t, \quad \frac{dy}{dt} = b \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} t,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \mathfrak{C}\mathfrak{t}\mathfrak{g} t.$$

Die Tangente im Punkte P hat folglich die Gleichung

$$(y - b \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} t) = \frac{b}{a} \mathfrak{C}\mathfrak{t}\mathfrak{g} t \cdot (x - a \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} t)$$

oder in Abschnittsform

$$\frac{x}{a : \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} t} - \frac{y}{b : \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} t} = 1.$$

Die Abschnitte auf den Achsen sind demnach

$$\frac{a}{\mathfrak{C}\vartheta t} = \frac{a^2}{x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{b}{\mathfrak{S}\text{int} t} = \frac{-b^2}{y}.$$

Schlägt man den Scheitelkreis und über OX als Durchmesser den Halbkreis, so schneiden sich beide in zwei Punkten T' und T'' , deren Verbindungssehne die reelle Achse im Schnittpunkte T der Tangente mit der Achse trifft. Der Richtungsfaktor der Tangente ist

$$\text{tg } \vartheta = \frac{b}{a} \mathfrak{C}\text{tg} t.$$

Der Abschnitt der Tangente auf der x -Achse wird gleich Null, wenn $t = \infty$ ist; in diesem Falle geht die Tangente durch den Nullpunkt. Da P selbst für $t = \infty$ ins Unendliche wandert, so ist diese Tangente Asymptote; ihr Richtungsfaktor ist $\text{tg } \varepsilon = \pm \frac{b}{a}$, je nachdem t die positiven oder die negativen Werte durchlaufend über alle Grenzen hinaus wächst. Um die Asymptoten zu konstruieren, errichte man in A_1 auf der reellen Achse nach beiden Seiten die Lote $A_1C_1 = A_1C_2 = b$; dann sind die Geraden OC_1 und OC_2 die Asymptoten. — Der Leser bewaise selbständig, daß man die Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 der Scheitelkrümmungskreise durch die folgende Konstruktion erhält: Man fällt von C_1 auf A_1B_1 das Lot, welches OA_1 in M' scheidet; $\varrho_a = A_1M'$ ist die Länge des Krümmungshalbmessers, also erhält man M_1 , indem man auf der x -Achse von A_1 aus nach der anderen Seite ϱ_a abträgt.

Ist $b = a$, so geht die Hyperbel, da $\text{tg } \varepsilon = 1$, also $\varepsilon = 45^\circ$ ist, folglich die Asymptoten aufeinander senkrecht stehen, in die gleichseitige Hyperbel über; ihre Gleichung ist demnach

$$x = a \mathfrak{C}\vartheta t, \quad y = a \mathfrak{S}\text{int} t \quad \text{bzw.} \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Die gleichseitige Hyperbel nimmt somit unter den Hyperbeln eine ähnliche Sonderstellung ein wie der Kreis unter den Ellipsen. Wenden wir uns der gleichseitigen Hyperbel von der Halbachse $a = 1$ zu! In ihr können wir dem Parameter t eine einfache geometrische Deutung geben. In Abb. 209 ist

$$OA = 1, \quad OX = \mathfrak{C}\vartheta t,$$

$$XP = \mathfrak{S}\text{int} t, \quad AQ = \mathfrak{I}g t,$$

denn es ist $AQ:OA = XP:OX$. Wir wollen den Inhalt der in Abb. 209 schraffierten Fläche des Hyperbelausschnittes $OP'APO$ berechnen. Es

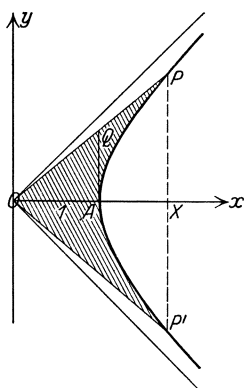


Abb. 209.

ist $\triangle O P' P = \mathfrak{C}os t \cdot \mathfrak{S}int$; andererseits ist nach 49) S. 371 Fläche

$$\begin{aligned} P A P' P &= 2 \int_0^t \mathfrak{S}int \cdot \mathfrak{S}int \cdot dt = 2x \int_0^t \mathfrak{S}in^2 t \, dt = 2 \left[\frac{1}{2} \mathfrak{S}int \mathfrak{C}os t - \frac{t}{2} \right]_0^t \\ &= [\mathfrak{S}int \mathfrak{C}os t - t]. \end{aligned}$$

Daher ist Fläche

$$O P A P' O = \mathfrak{C}os t \mathfrak{S}int - (\mathfrak{C}os t \mathfrak{S}int - t) = t.$$

Der Parameter ist demnach gleich dem Flächeninhalt des bezeichneten Hyperbelausschnittes. Zur Würdigung dieses Ergebnisses mögen die entsprechenden Eigenschaften am Kreise vom Halbmesser 1 angeführt werden. (Abb. 210.) Bezeichnen wir den Inhalt des Kreisausschnittes $OP'AP$ mit t , so ist auch der zugehörige halbe Mittelpunktswinkel

folglich

$$AOP = P'OA = t,$$

$$OX = \cos t, \quad XP = \sin t, \quad AQ = \operatorname{tg} t.$$

Die Hyperbelfunktionen stehen demnach mit dem Inhalt des Hyperbelausschnittes der gleichseitigen Hyperbel in demselben Zusammenhange wie die Kreisfunktionen mit dem Inhalte des Kreisausschnittes. In dieser Tatsache ist einerseits die innige Verwandtschaft der beiden Funktionsgruppen, andererseits die Bezeichnung „Hyperbelfunktionen“ begründet.

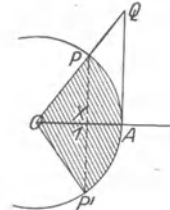


Abb. 210.

(137) Die **Rollkurven**. Ist k in Abb. 211 eine in der Ebene festliegende Kurve und c eine Kurve, welche auf k , ohne zu gleiten, abrollt, so beschreibt irgendein mit c festverbundener Punkt P

eine Kurve, welche man Rollkurve nennt. Wir wollen zunächst rein geometrisch eine allen Rollkurven gemeinsame Eigenschaft ableiten. B möge der Punkt sein, in dem in der Anfangslage von c die beiden Kurven sich berühren. In einer späteren Lage sei der Punkt D der ersten Lage zum Berührungspunkte B' geworden. Der frühere Berührungspunkt B mag jetzt in die Lage C' gekommen sein. Da ein Gleiten ausgeschlossen sein soll, besteht die Bedingung, daß $\widehat{BD} = \widehat{BB'} = \widehat{B'C'}$ ist. Weiter-

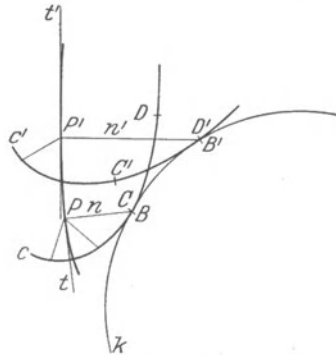


Abb. 211.

hin kann man, wie die Kinematik lehrt, die Bewegung von c in die unendlich benachbarte Lage stets auffassen als eine augenblickliche Drehung

um den jeweiligen Berührungspunkt B . An dieser Drehung nehmen alle mit c starr verbundenen Punkte, also auch der Punkt P teil, seine Momentanbewegung ist also ein unendlich kleiner Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in B liegt. Die Tangente seiner Bahn ist demnach senkrecht zu dem Momentanradius BP , oder BP ist die Normale n der Rollkurve im Punkte P . Wir erhalten hiermit den Satz:

Die Normale einer Rollkurve geht stets durch den augenblicklichen Berührungspunkt zwischen der festen und der auf dieser abrollenden Kurve.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wenden wir uns bestimmten Sonderfällen zu. Ist die feste Kurve k eine Gerade, und die auf ihr rollende Kurve c ein Kreis, so ist die Bahn, die ein mit c starr verbundener Punkt P bei der Bewegung beschreibt, eine **Zykloide**. Der Kreis c möge den Halbmesser a haben und P vom Mittelpunkte von c um die Strecke b entfernt sein; ist $b \leq a$, so heißt die

Rollkurve $\left\{ \begin{array}{l} \text{gestreckte} \\ \text{gespitzte} \\ \text{verschlungene} \end{array} \right\}$ Zykloide nach der Gestalt, welche die Kurve annimmt.

Man kommt zu Punkten der Zykloide auf folgendem Wege. Wir wählen als Anfangslage die Lage c_0 des rollenden Kreises, in welcher

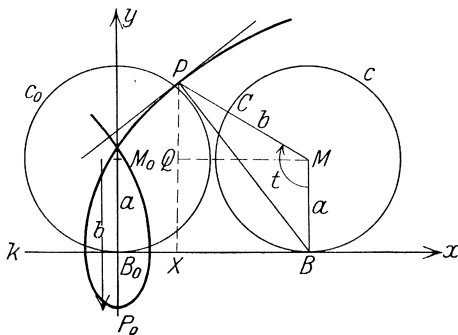


Abb. 212.

der zu $P = P_0$ gehörige Halbmesser $M_0P_0 \perp k$ ist; der Berührungspunkt von c_0 heiße B_0 . Ist B der Berührungspunkt in einer beliebigen Lage des rollenden Kreises, so brauchen wir auf c nur von B aus den Bogen BC gleich der Strecke B_0B und auf dem Halbmesser MC die Strecke $MP = b$ abzutragen, um einen Punkt P der Zykloide zu erhalten. [Am zweckmäßigsten

teilt man den Umfang von c in eine bequeme Anzahl (12, 16, 24) gleicher Teile und trägt diese von B_0 aus auf k ab, um dann in einfacher Weise Punkte der Zykloide zu erhalten.]

Wir wollen nun die Zykloide analytisch behandeln. Wir wählen zu diesem Zwecke die Gerade k zur Abszissenachse und den Punkt B_0 zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Die Lage des allgemeinen Punktes P der Zykloide ist durch den Winkel $BMP = t$ festgelegt; t ist hierbei der Winkel, um den sich die Gerade MP aus der Anfangslage gedreht hat, oder um welchen sich der Kreis c auf k

abgewälzt hat; wir wollen ihn deshalb als den Wälzungswinkel bezeichnen. Die Strecke B_0B ist gleich dem Bogen $BC = a \cdot t$; ferner ist die Abszisse von P

$$B_0X = B_0B - XB = a \cdot t - b \sin t,$$

die Ordinate

$$XP = XQ + QP = a + b \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = a - b \cos t.$$

Die Parametergleichung der Zykloide lautet also

$$x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t^1). \quad 53)$$

Für $t =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π ist also
$x =$	0	$\frac{\pi}{2}a - b$	a	$3\frac{\pi}{2}a + b$	$2\pi a$
$y =$	$a - b$	a	$a + b$	a	$a - b$.

Hierauf wiederholt sich der Verlauf; die Zykloide ist also eine periodische Kurve; sie setzt sich aus lauter kongruenten Teilen von der Länge $2\pi a$ zusammen.

Aus 53) erhalten wir durch Differenzieren

$$\frac{dx}{dt} = a - b \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = b \sin t,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \sin t}{a - b \cos t}. \quad a)$$

Folglich ist die Gleichung der Normalen

$$x - (at - b \sin t) + (y - (a - b \cos t)) \frac{b \sin t}{a - b \cos t} = 0,$$

die man umformen kann in

$$x = at - \frac{y}{a - b \cos t}.$$

Für $y = 0$ ergibt sich als Abszisse des Schnittpunktes der Normalen mit der Abszissenachse $x = at$; der Schnittpunkt der Normalen mit der Geraden k ist also in der Tat der jeweilige Berührungspunkt von c mit k , in Übereinstimmung mit dem oben allgemein abgeleiteten Satze.

¹⁾ Diese Ableitung der Zykloidengleichung ist auf die Abb. 212 zugeschnitten; will man sie mit Hilfe des Projektionssatzes [s. (107) S. 293] theoretisch einwandfrei gewinnen, so muß man bedenken, daß $\sphericalangle BMP$, weil im Uhrzeigersinne durchlaufen, negativ ist, also zweckmäßig als $-t$ bezeichnet wird; dann ist, welches auch der Wälzungswinkel sein mag, allgemein gültig

$$\begin{aligned} x &= B_0X = B_0B + BX = a \cdot t + b \sin(-t) = at - b \sin t, \\ y &= XP = XQ + QP = a + b \cos(\pi - (-t)) = a - b \cos t \quad \text{w. o.} \end{aligned}$$

Von nun an wollen wir uns auf die Betrachtung der gespitzten Zykloide beschränken; wir setzen $b = a$ und erhalten als ihre Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t). \end{aligned} \right\} 53'$$

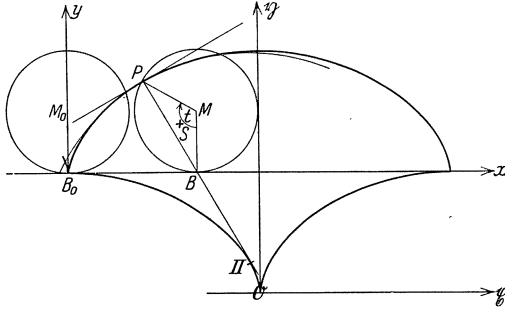


Abb. 213.

Ferner ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}; \quad \text{b)}$$

die Tangente schließt also mit der x -Achse den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ ein; sie ist parallel zur Halbierenden

den des Wälzungswinkels. Die Länge der Normalen ist

$$n = y \sqrt{1 + y'^2} = 2a \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

Weiter ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} : \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} : a(1 - \cos t) = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}. \quad \text{c)}$$

Demnach erhalten wir für den Krümmungshalbmesser:

$$\rho = \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}} : \left(-\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}\right) = -\frac{4a \sin^4 \frac{t}{2}}{\sin^3 \frac{t}{2}} = -4a \sin \frac{t}{2} = -2n. \quad \text{d)}$$

Der Krümmungsmittelpunkt II liegt also auf der Verlängerung der Normalen über B hinaus, und zwar so, daß B der Mittelpunkt der Strecke PII ist.

Die Gleichung der Evolute gestaltet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \xi &= a(t - \sin t) - \frac{1 \cdot \left(-4a \sin^4 \frac{t}{2}\right)}{\sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \\ &= a \left[t - \sin t + 4 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right] = a[t + \sin t], \\ \eta &= a(1 - \cos t) + \frac{-4a \sin^4 \frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} = a \left[1 - \cos t - 4 \sin^2 \frac{t}{2} \right] \\ &= a[1 - \cos t - 2(1 - \cos t)] = -a[1 - \cos t]. \end{aligned}$$

Ersetzt man den Parameter t durch einen neuen Parameter τ , der mit t durch die Gleichung $t = \pi + \tau$ zusammenhängt, so lautet die Gleichung der Evolüte

$$\xi = a\pi + a(\tau - \sin \tau), \quad \eta = a(1 - \cos \tau) - 2a.$$

Verschieben wir schließlich das Koordinatensystem nach einem Punkte \mathfrak{D} , dessen Koordinaten $\pi a | -2a$ sind, mittels der Transformationsgleichungen

$$\xi = \xi + \pi a, \quad \eta = \eta - 2a,$$

so geht die Gleichung der Evolüte über in

$$\xi = a(\tau - \sin \tau), \quad \eta = a(1 - \cos \tau).$$

Damit haben wir eine völlige Übereinstimmung zwischen der Gleichung der Zykloide und ihrer Evolüte erreicht und sind zu dem Ergebnis gelangt:

Die gespitzte Zykloide ist mit ihrer Evolüte kongruent.

Der Inhalt der von der Abszissenachse, der Zykloide und der zu t gehörigen Ordinate begrenzten Fläche ist [s. Formel TIII 23)]

$$\begin{aligned} F_0^t &= \int_0^t a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^t (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt \\ &= a^2 [t - 2 \sin t + \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t)]_0^t, \\ F_0^t &= a^2 [\frac{3}{2}t - 2 \sin t + \frac{1}{2} \sin t \cos t]. \end{aligned}$$

Demnach ist der von einem ganzen Zykloidenbogen und der Abszissenachse begrenzte Flächeninhalt

$$F_0^{2\pi} = 3\pi a^2,$$

also das Dreifache des Inhaltes des rollenden Kreises.

Die Länge des Kurvenbogens, der von $t = 0$ bis $t = t$ reicht, ergibt sich zu

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^t a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt \\ &= 2a \int_0^t \sin \frac{t}{2} dt = -4a \left[\cos \frac{t}{2} \right]_0^t = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right) = 8a \sin^2 \frac{t}{4}. \end{aligned}$$

Demnach ist die Länge eines ganzen Bogens ($t = 2\pi$): $l = 8a$.

Statische Momente. a) Halbe Fläche ($t = 0$ bis $t = \pi$)

1. bezüglich der x -Achse:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} a^3 \int_0^\pi (1 - \cos t)^3 dt = 4a^3 \int_0^\pi \sin^6 \frac{t}{2} dt = 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \frac{t}{2} \cdot d \frac{t}{2} \\ &= 8a^3 \left[-\frac{1}{6} \sin^5 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + \frac{5}{6} \left\{ -\frac{1}{4} \sin^3 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{2} \right) \right\} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{4} \pi a^3; \\ &[\text{T III 28}]. \end{aligned}$$

2. bezüglich der y -Achse:

$$\begin{aligned} M_y &= a^3 \int_0^\pi (t - \sin t) (1 - \cos t)^2 dt \\ &= a^3 \int_0^\pi [t - 2t \cos t + t \cos^2 t - \sin t + 2 \sin t \cos t - \sin t \cos^2 t] dt \\ &= a^3 \left[\frac{t^2}{2} - 2t \sin t - 2 \cos t + \frac{t^2}{4} + \frac{1}{8} (2t \sin 2t + \cos 2t) \right. \\ &\quad \left. + \cos t - \cos^3 t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^\pi = \frac{a^3}{12} (9\pi^2 + 16) \quad [\text{TIII 28) 30) 32)]. \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt S dieser Fläche hat also die Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{a^3}{12} (9\pi^2 + 16) : \frac{3}{2} \pi a^2 = \frac{9\pi^2 + 16}{18\pi} \cdot a \approx 1,854a, \\ y_s &= \frac{5}{4} \pi a^3 : \frac{3}{2} \pi a^2 = \frac{5}{6} a \approx 0,833a \quad (\text{s. Abb. 213}). \end{aligned}$$

b) Ganze Fläche: $t = 0$ bis $t = 2\pi$,

$$M_x = \frac{5}{2} \pi a^3, \quad M_y = 3\pi^2 a^3, \quad x'_s = \pi a, \quad y'_s = \frac{5}{6} a.$$

c) Halber Bogen:

$$M_x = 8a^2 \int_0^\pi \sin^3 \frac{t}{2} \cdot d \frac{t}{2} = \frac{16}{3} a^2, \quad M_y = 2a^2 \int_0^\pi (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{16}{3} a^2.$$

Schwerpunkt $\left(\frac{4}{3} a \mid \frac{4}{3} a \right)$.

d) Ganzer Bogen:

$$M_x = \frac{32}{3} a^2, \quad M_y = 8\pi a^2.$$

Schwerpunkt $\left(\pi a \mid \frac{4}{3} a \right)$.

Trägheitsmomente. a) Halbe Fläche:

$$J_x = \frac{1}{3} a^4 \int_0^\pi (1 - \cos t)^4 dt = \frac{35}{24} \pi a^4;$$

kleinstes Trägheitsmoment (Achse $\parallel x$ -Achse): $\frac{5}{12} \pi a^4$;

$$J_y = a^4 \int_0^\pi (t - \sin t)^2 (1 - \cos t)^2 dt = \frac{\pi}{24} a^4 (12\pi^2 + 29);$$

kleinstes (Achse $\parallel y$ -Achse): $\frac{a^4}{216\pi} (27\pi^4 - 27\pi^2 - 256)$.

b) Ganze Fläche:

$$J_x = \frac{35}{12} \pi a^4; \quad \text{kleinstes:} \quad \frac{5}{6} \pi a^4;$$

$$J_y = \frac{\pi}{12} a^4 (48\pi^2 - 35); \quad \text{kleinstes:} \quad \frac{\pi}{12} a^4 (12\pi^2 - 35).$$

c) Halber Bogen:

$$J_x = 2a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^2 \sin \frac{t}{2} dt = \frac{128}{15} a^3; \quad \text{kleinstes:} \quad \frac{64}{65} a^3;$$

$$J_y = 2a^3 \int_0^{\pi} (t - \sin t)^2 \sin \frac{t}{2} dt = \frac{32}{45} a^3 (15\pi - 32);$$

$$\text{kleinstes:} \quad \frac{32}{45} a^3 (15\pi - 42).$$

d) Ganzer Bogen:

$$J_x = \frac{256}{15} a^3; \quad \text{kleinstes:} \quad \frac{128}{65} a^3;$$

$$J_y = \frac{16}{45} a^3 (45\pi^2 - 128); \quad \text{kleinstes:} \quad \frac{8}{45} a^3 (45\pi^2 - 256).$$

Die Achsen der kleinsten Trägheitsmomente gehen dabei durch den Schwerpunkt des betreffenden Gebildes.

Umdrehungskörper. Rotiert die Zykloide um die

a) x -Achse, b) y -Achse, c) Symmetrielinie,

so ist für den entstehenden Umdrehungskörper

das Volumen

$$V = \quad \text{a) } 5\pi^2 a^3, \quad \text{b) } \frac{\pi}{6} a^3 (9\pi^2 + 16), \quad \text{b') } 6\pi^3 a^3,$$

$$\text{c) } \frac{\pi}{6} a^3 (9\pi^2 - 16);$$

die krumme Oberfläche

$$O = \quad \text{a) } \frac{64}{3} \pi a^2, \quad \text{b) } \frac{32}{3} \pi a^2, \quad \text{b') } 16\pi^2 a^2, \quad \text{c) } \frac{8}{3} \pi a^2 (3\pi - 4).$$

Hierbei beziehen sich a) und b') auf das ganze, b) und c) auf das halbe Gebilde.

Das Zykloidenpendel: Ein Faden von der Länge $4a$, der an seinem unteren Ende die punktförmige Masse m trägt, werde, wie aus Abb. 214 ersichtlich, mit dem anderen Ende an der Spitze S einer von S aus sich nach unten verzweigenden Zykloide c befestigt; die Masse m pendle um S derart, daß sich der Faden an die Zykloide c anlegen muß. Dann beschreibt nach den Ausführungen von

S. 351 der Massenpunkt m eine Evolute der Zyklode c , und zwar, da die Länge des Fadens gerade $4a$ ist, die zu c kongruente

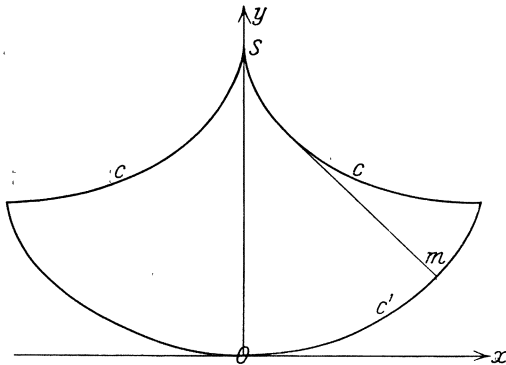


Abb. 214.

Zyklode c' . Legen wir in den Scheitel von c' den Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so lautet, wie man sich leicht überzeugt, die Gleichung von c :

$$x = a(t + \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t).$$

Um zu untersuchen, nach welchen Gesetzen sich m bewegt, legen wir unseren Betrachtungen das Ge-

setz von der Erhaltung der Energie zugrunde, welches besagt, daß die Summe aus potentieller und kinetischer Energie in jedem Augenblicke der Bewegung konstant ist. Da die kinetische Energie gleich $\frac{1}{2}mv^2$ und die potentielle Energie im homogenen Schwerfeld der Erde gleich $m \cdot g \cdot y$ ist, so ist

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = C.$$

Es sei für $y = 0$, also beim Durchgang der Masse m durch den Scheitel O von c' die Geschwindigkeit gleich v_0 ; hieraus folgt $C = \frac{1}{2}mv_0^2$, und die Formel für die Erhaltung der Energie können wir schreiben:

$$v_0^2 - v^2 = 2gy \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}.$$

Im Falle unserer Zyklode ist

$$y = a(1 - \cos t) \quad \text{oder} \quad \cos t = 1 - \frac{y}{a}.$$

Um v zu bestimmen, bedenken wir, daß $v = \frac{ds}{dz}$ ist, wenn die Zeit mit z bezeichnet wird (weil t hier den Parameter bedeutet). Nun ist

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = a \sqrt{(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2a \cos \frac{t}{2} dt;$$

also ist

$$v = 2a \cos \frac{t}{2} \cdot \frac{dt}{dz}.$$

Da nun $\cos t = 1 - \frac{y}{a}$ ist, so ist

$$\sin \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos t)} = \sqrt{\frac{y}{2a}},$$

also

$$\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} dt = \frac{dy}{2\sqrt{2ay}},$$

und daher ist

$$v = \sqrt{\frac{2a}{y}} \cdot \frac{dy}{dz}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die oben gewonnene Formel für v ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\sqrt{\frac{2a}{y}} \cdot \frac{dy}{dz} = \sqrt{v_0^2 - 2gy},$$

die wir nach dem Zeitelement dz auflösen:

$$dz = \sqrt{2a} \frac{dy}{\sqrt{v_0^2 y - 2gy^2}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2 - \left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2}}.$$

Die Integration ergibt

$$z = \left[\sqrt{\frac{a}{g}} \arcsin \left(\frac{4g}{v_0^2} y - 1 \right) \right]_0^y = \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\arcsin \left(\frac{4g}{v_0^2} y - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right].$$

Der Massenpunkt m hat seine Höchstlage erreicht, und das Pendel schlägt zurück, wenn $v = 0$ ist; hierzu gehört also

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Da y_{\max} nicht größer sein kann als $2a$, so tritt nur so lange ein wirkliches Pendeln ein, als $v_0 \leq 2\sqrt{ag}$ ist. Nun besteht eine vollständige Pendelschwingung aus vier Teilen, die sich in gleich langen Zeiten abspielen: die Bewegung vom Tiefstpunkt bis zum rechten Höchstpunkt, von diesem zurück zum Tiefstpunkt, von hier zum linken Höchstpunkt und wieder zurück zum Tiefstpunkt. Nennen wir die ganze Schwingungsdauer T , so ergibt sich $\frac{T}{4}$ aus z , wenn wir $y = \frac{v_0^2}{2g}$ setzen; es ist also, wenn mit $l = 4a$ die Länge des Pendels bezeichnet wird,

$$T = 4 \cdot \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\arcsin 1 + \frac{\pi}{2} \right] = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Bemerkenswert ist bei diesem Ergebnisse, daß die Schwingungsdauer unabhängig ist von der Höchstgeschwindigkeit v_0 und der Schwingungshöhe y_{\max} , daß sie nur abhängt von der Länge $l = 4a$ des Zyklidenpendels, ein Ergebnis, das bekanntlich bei dem gewöhnlichen Pendel nur bei kleinen Ausschlägen und auch dann nur annähernd erreicht wird; man nennt das Zyklidenpendel aus diesem Grunde ein *tautochrones* Pendel [tautochron (griechisch) = von gleicher Zeit].

(138) Ist die feste Kurve k selbst ein Kreis vom Halbmesser l und die rollende Kurve c ebenfalls ein Kreis vom Halbmesser a , so beschreibt ein mit c fest verbundener Punkt P eine **Trochoide**; es sind hierbei drei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1. c rollt außerhalb des Kreises k ab: **Epizykloide**;
2. c rollt innerhalb von k ab; $a < l$: **Hypozykloide**;
3. c rollt auf k derart ab, daß k von c eingeschlossen wird; $a > l$:

Perizykloide.

Alle drei Fälle können wir analytisch in einem einzigen behandeln, wenn wir bedenken, daß für die Hypo- und Perizykloide a zu l die entgegengesetzte Lage hat wie bei der Epizykloide, also für die Epizykloide $a > 0$, für die Hypo- und die Perizykloide $a < 0$ ansetzen. Der die Kurve beschreibende Punkt P habe vom Mittelpunkte von c

den Abstand b ; ist $b \cong a$, so ist die erzeugte Kurve eine

}	verschlungene
	gespitzte
	gestreckte

Trochoide. Wählen wir als Anfangslage diejenige, in welcher der zu P gehörige Halbmesser von c gerade durch den Berührungspunkt B_0

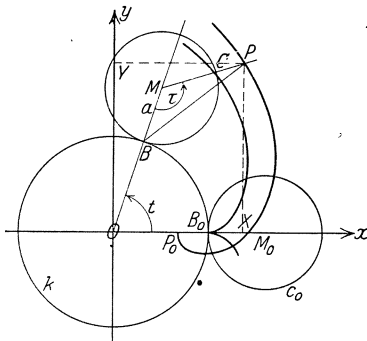


Abb. 215.

von c und k geht, und legen wir den Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Mittelpunkt von k , die x -Achse durch B_0 , so ist (vgl. Abb. 215) Bogen $BC =$ Bogen $BB_0 = l \cdot t$, wobei t der Winkel B_0OB ist. Folglich ist der Wälzungswinkel

$$CMB = \tau = \frac{\text{Bogen } BC}{a} = \frac{l}{a} t,$$

und es ist

$$x = OX = OM \cos t - MP \cos(t + \tau),$$

$$y = OY = OM \sin t - MP \sin(t + \tau)$$

oder, wenn wir die oben gefundenen Werte einsetzen:

$$x = (l + a) \cos t - b \cos \frac{l+a}{a} t, \quad y = (l + a) \sin t - b \sin \frac{l+a}{a} t. \quad 54)$$

54) ist die Parametergleichung der Trochoide. Versteht man unter a eine absolute Größe, dann gilt 54) nur für die Epizykloide, während wir für die Hypo- und Perizykloide in 54) a durch $-a$ ersetzen müssen; die Gleichung dieser Kurve lautet demnach in diesem Falle:

$$x = (l - a) \cos t - b \cos \frac{l-a}{a} t, \quad y = (l - a) \sin t + b \sin \frac{l-a}{a} t. \quad 54')$$

Beschränken wir uns auf gespitzte Trochoiden ($b = a$) und führen wir einen neuen Parameter v durch die Gleichung $t = av$ ein, so lautet die Gleichung

$$x = (l + a) \cos av - a \cos (l + a)v, \quad y = (l + a) \sin av - a \sin (l + a)v. \quad 54'')$$

Ersetzt man hier a durch $a' = -(l + a)$, so geht x in sich selbst über, während y nur sein Vorzeichen ändert; der neue Punkt P liegt also

spiegelbildlich zum ursprünglichen bezüglich der x -Achse. Da die x -Achse Symmetrieachse ist, so ist die Trochoide, die durch Abwälzen des Kreises c vom Halbmesser $-(l+a)$ auf dem Kreise k vom Halbmesser l von einem Punkte des Umfanges von c beschrieben wird, identisch mit derjenigen, die durch Abwälzen des Kreises c vom Halbmesser a auf dem gleichen Kreise k von einem Punkte des Umfanges von c beschrieben wird. Ist $a < 0$ und $l+a > 0$ (Fall der Hypozykloide), so ist $a' = -(l+a) < 0$; demnach die zweite Kurve ebenfalls eine Hypozykloide. Führen wir für a den absoluten Betrag ein, den wir als $|a| = -a$ bezeichnen wollen, so bekommen wir den Satz:

Die gespitzte Hypozykloide, welche durch Abrollen des Kreises vom Halbmesser $l - |a|$ im Kreise vom Halbmesser l beschrieben wird, ist identisch mit derjenigen, welche durch Abrollen des Kreises vom Halbmesser $|a|$ im gleichen Kreise beschrieben wird.

Ist $-|a| = a < 0$ und $l+a < 0$,

Fall der Perizykloide, so ist

$$a' = -(l+a) = |a| - l > 0,$$

die zweite Kurve demnach eine Epizykloide.

Die gespitzte Perizykloide, die durch Abrollen des Kreises vom Halbmesser a um den festen Kreis vom Halbmesser l beschrieben wird, ist identisch mit der Epizykloide, die durch Abrollen des Kreises vom Halbmesser $a - l$ auf dem gleichen Kreise beschrieben wird.

Für jede solche Trochoide gibt es demnach zwei Entstehungsmöglichkeiten.

Setzen wir $l+a = s$, so gehen die Gleichungen 54'') über in die Gleichungen

$$x = s \cos av - a \cos sv, \quad y = s \sin av - a \sin sv, \quad 54''')$$

mit denen wir jetzt weiterarbeiten wollen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dv} &= as(-\sin av + \sin sv) = 2as \sin \frac{s-a}{2} v \cdot \cos \frac{s+a}{2} v, \\ \frac{dy}{dv} &= 2as \sin \frac{s-a}{2} v \cdot \sin \frac{s+a}{2} v, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{s+a}{2} v. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Normalen lautet:

$$(y - s \sin av + a \sin sv) \operatorname{tg} \frac{s+a}{2} v + (x - s \cos av + a \cos sv) = 0,$$

die man umformen kann zu

$$x \cos \frac{s+a}{2} v + y \sin \frac{s+a}{2} v = (s-a) \cos \frac{s-a}{2} v.$$

Nun hat der jeweilige Berührungspunkt B zwischen c und k die Koordinaten

$$x_B = l \cos t \quad \text{und} \quad y_B = l \sin t,$$

oder, da

$$l = s - a \quad \text{und} \quad t = av \quad \text{ist,}$$

$$x_B = (s - a) \cos av \quad \text{und} \quad y_B = (s - a) \sin av;$$

setzt man diese in die linke Seite der Normalengleichung ein, so erhält man

$$(s - a) \cos \frac{s - a}{2} v$$

in Übereinstimmung mit der rechten Seite; folglich geht die Normale durch den zugehörigen Berührungspunkt zwischen c und k , gemäß der in (137) S. 384 für alle Rollkurven abgeleiteten Eigenschaft.

Es ist

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{s + a}{2} v};$$

ferner ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dv} : \frac{dx}{dv} = \frac{s + a}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{s + a}{2} v} \cdot \frac{1}{2as \sin \frac{s - a}{2} v \cdot \cos \frac{s + a}{2} v}.$$

Hieraus berechnen sich die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\xi = s \cos av - a \cos sv$$

$$- \frac{1}{\cos^2 \frac{s + a}{2} v} \cdot \frac{4as \cos^3 \frac{s + a}{2} v \cdot \sin \frac{s - a}{2} v \cdot \sin \frac{s + a}{2} v}{(s + a)} \cdot \frac{\sin \frac{s + a}{2} v}{\cos \frac{s + a}{2} v},$$

$$\xi = s \cos av - a \cos sv - \frac{4as}{s + a} \sin \frac{s - a}{2} v \cdot \sin \frac{s + a}{2} v$$

$$= s \cos av - a \cos sv - 2 \frac{as}{s + a} (\cos av - \cos sv),$$

$$\xi = \frac{s - a}{s + a} (s \cos av + a \cos sv);$$

$$\eta = s \sin av - a \sin sv + \frac{1}{\cos^2 \frac{s + a}{2} v} \cdot \frac{4as \cos^3 \frac{s + a}{2} v \cdot \sin \frac{s - a}{2} v}{(s + a)}$$

$$= s \sin av - a \sin sv + 4 \frac{as}{s + a} \sin \frac{s - a}{2} v \cdot \cos \frac{s + a}{2} v,$$

$$\eta = s \sin av - a \sin sv + 2 \frac{as}{s + a} (\sin sv - \sin av)$$

$$= \frac{s - a}{s + a} (s \sin av - a \sin sv).$$

Also ist die Gleichung der Evolute der gespitzten Trochoide

$$\xi = \frac{s-a}{s+a} (s \cos av + a \cos sv), \quad \eta = \frac{s-a}{s+a} (s \sin av - a \sin sv). \quad 55)$$

Um sie zu deuten, stellen wir die folgende Betrachtung an: Würden wir nicht die Anfangslage wie in Abb. 215 gewählt haben, in der P_0 mit B_0 zusammenfällt, sondern jene Lage, in der P_0 der Gegenpunkt zu B_0 auf c_0 ist, derart also, daß die Trochoide auf der positiven x -Achse statt der Spitze einen Scheitel hätte, so würde, wie man sich leicht überzeugt, die Gleichung der Trochoide in die Gleichung übergehen:

$$x = s \cos av + a \cos sv, \quad y = s \sin av + a \sin sv.$$

Dann ist aber die Evolute eine Trochoide, welche der Evolvente ähnlich ist, und zwar ist

$$s' = s \cdot \frac{s-a}{s+a}, \quad a' = a \cdot \frac{s-a}{s+a}$$

zu setzen, so daß man die Evolute dadurch erzeugen kann, daß man einen Kreis vom Halbmesser

$$a' = a \cdot \frac{l}{l+2a}$$

auf einem Kreise vom Halbmesser

$$l' = \frac{l^2}{l+2a}$$

abrollen läßt.

Die Länge eines ganzen (zwischen zwei Spitzen liegenden) Kurvenbogens ergibt sich nach Formel 50) S. 372 zu

$$\left. \begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{2\pi}{l}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2} dv = \int_0^{\frac{2\pi}{l}} 2as \sin \frac{s-a}{2} v \cdot dv \\ &= -2as \cdot \frac{2}{s-a} \left[\cos \frac{s-a}{2} v \right]_0^{\frac{2\pi}{l}} = 8 \frac{as}{s-a} = 8 \frac{(l+a)a}{l}. \end{aligned} \right\} \quad 56)$$

Die obere Grenze $\frac{2\pi}{l}$ erhalten wir dabei durch die folgende Erwägung: Der Punkt P ist wieder Spitze der Trochoide, wenn der auf k abgewälzte Bogen gleich dem Umfange von c , also gleich $2\pi a$ ist; dann ist aber

$$t = \frac{2\pi a}{l}, \quad \text{also} \quad v = \frac{t}{a} = \frac{2\pi}{l} \quad \text{w. o.}$$

(139) Unter den Sonderfällen der gespitzten Trochoide wollen wir zwei hervorheben.

A. Setzen wir $a = l$, so erhalten wir die **Kardioide**; sie hat nach 54) die Gleichung

$$x = 2l \cos t - l \cos 2t, \quad y = 2l \sin t - l \sin 2t,$$

ihre Evolute nach 55) die Gleichung

$$\xi = \frac{l}{3}(2 \cos t + \cos 2t), \quad \eta = \frac{l}{3}(2 \sin t + \sin 2t).$$

Die Länge ihres Bogens ist nach 56) $S = 16l$; es dürfte sich empfehlen, diese Ergebnisse ohne Zuhilfenahme dieser Formeln unmittelbar aus der Gleichung abzuleiten.

Die Kardioide hat ihren Namen von ihrer Gestalt, die der Form eines Herzens nicht unähnlich ist [Kardion (griechisch) = Herz].

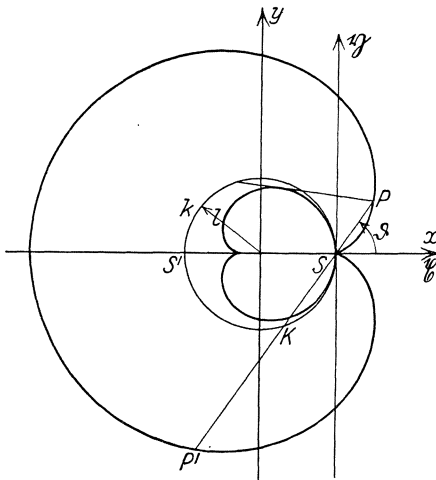


Abb. 216.

Verlegen wir den Koordinatenanfangspunkt nach der Spitze S der Kardioide, so erhalten wir mit Hilfe der Parallelverschiebungsformeln $x = l + \xi$, $y = \eta$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \xi &= l(2 \cos t - \cos 2t - 1) \\ &= 2l \cos t(1 - \cos t), \\ \eta &= 2l \sin t(1 - \cos t), \end{aligned}$$

die wir leicht in eine parameterfreie Form überführen können. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 &= 4l^2(1 - \cos t)^2, \\ \text{also} \quad \cos t &= 1 - \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2l}, \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \xi &= 2l \left(1 - \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2l} \right) \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2l}, \quad 2l \xi = 2l \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - (\xi^2 + \eta^2), \\ (\xi^2 + \eta^2)^2 - 4l \xi (\xi^2 + \eta^2) - 4l^2 \eta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Auch in Polarkoordinaten läßt sich die Gleichung leicht überführen.

Es ist $\frac{\eta}{\xi} = \tan t$, und da wir $\xi = r \cos \vartheta$, $\eta = r \sin \vartheta$ setzen müssen [s. Gleichung 8) in (106) S. 288], so ist der Parameter t identisch mit der Amplitude ϑ des Polarkoordinatensystems, und es ergibt sich

$$r = 2l(1 - \cos \vartheta).$$

Verlängern wir den zu P gehörigen Leitstrahl über S hinaus, so schneidet er die Kardioide noch in einem zweiten Punkte P' , der zur Amplitude $\vartheta + \pi$ gehört; folglich ist $SP' = r' = 2l(1 + \cos \vartheta)$ und demnach $PP' = 4l$.

Alle durch die Spitze gehenden Sehnen einer Kardioide sind gleich lang.

Die Sehne PP' schneide den festen Kreis k in K ; da aus dem rechtwinkligen Dreieck SKS' sich $KS = 2l \cos \vartheta$ ergibt, so ist

$$KP = KS + SP = 2l;$$

hieraus ergibt sich die folgende Entstehungsweise der Kardioiden:

Bewegt sich eine Strecke $KP = 2l$ so, daß sie beständig durch einen bestimmten Punkt S eines Kreises vom Halbmesser l geht, während ihr einer Endpunkt K auf diesem Kreise gleitet, so beschreibt der andere Endpunkt P eine Kardioiden.

Im Anschluß an die Kardioiden möge die folgende Aufgabe behandelt werden: $OA = a$ in Abb. 217 stelle eine um O drehbare Platte vom Gewichte G dar; an ihrem Ende A ist ein Seil befestigt, das über die Rolle B (von sehr kleinem Halbmesser) geführt ist, wobei $OB = a$ vertikal sein soll. Am Ende des Seiles ist ein Gewicht P befestigt; welche Bahn muß bei Bewegung der Klappe das Gewicht P

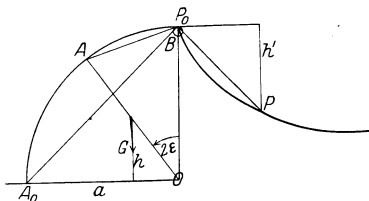


Abb. 217.

beschreiben, damit der Klappe in jeder ihrer Lagen das Gleichgewicht gehalten wird? Liegt die Klappe horizontal, so möge sich P in unmittelbarer Nähe von B befinden; das Seil AP soll also die Länge $b = a\sqrt{2}$ haben. Ferner wollen wir die besondere Annahme machen, daß in dieser Lage die Bahn von P vertikal sei, so daß das volle Gewicht P zur Wirkung kommt, also im Seile A_0B die Spannung P herrscht. Wählen wir O als Momentenpunkt, so ist das in A_0B wirkende Moment von P

$$M_P = P \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} bP.$$

Diesem wirkt entgegen das Drehmoment von G , das, weil wir uns G im Mittelpunkt (Schwerpunkt) von OA_0 angreifend denken müssen, gleich $G \cdot \frac{a}{2}$ ist. Da beide Momente infolge des Gleichgewichtes einander gleich sein müssen, so ergibt sich, daß $P = \frac{G}{2}\sqrt{2}$ sein muß.

In einer beliebigen Lage der Klappe möge OA mit OB den Winkel 2ε einschließen. G hat sich gegenüber der horizontalen Lage um die Strecke $h = \frac{a}{2} \cos 2\varepsilon$ gehoben, wie man leicht aus der Abbildung sieht; folglich ist durch Heben der Klappe die Arbeit geleistet worden:

$$A = G \cdot h = \frac{1}{2} G \cdot a \cos 2\varepsilon.$$

Diese Arbeit ist aber von P aufgebracht worden; hat sich P um die Strecke h' gesenkt, so muß die Arbeit $A' = Ph'$ gleich der Arbeit A sein, und es ergibt sich

$$h' = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cos 2\varepsilon = \frac{b}{2} \cos 2\varepsilon.$$

Da nun $AB = 2a \sin \varepsilon$ ist, so ist

$$BP = r = a\sqrt{2} - 2a \sin \varepsilon = b - b\sqrt{2} \sin \varepsilon,$$

und der Winkel ϑ , den BP mit BO einschließt, ergibt sich aus $\cos \vartheta = \frac{b'}{r}$. Also ist

$$r \cos \vartheta = \frac{b}{2} \cos 2\varepsilon = \frac{b}{2} (1 - 2 \sin^2 \varepsilon) \quad \text{oder} \quad 2 \sin^2 \varepsilon = 1 - 2 \frac{r}{b} \cos \vartheta,$$

und dadurch
$$\sin \varepsilon \cdot \sqrt{2} = \sqrt{1 - 2 \frac{r}{b} \cos \vartheta}$$

$$r = b - b \sqrt{1 - 2 \frac{r}{b} \cos \vartheta} \quad \text{oder} \quad (r - b)^2 = b^2 \left(1 - 2 \frac{r}{b} \cos \vartheta\right),$$

und hieraus

$$r = 2b(1 - \cos \vartheta).$$

Das ist aber die Polargleichung der Kardioiden; also muß sich das Gewicht P längs einer Kardioiden bewegen, deren Spitze in B liegt [vgl. hierzu (226) S. 785].

B. Setzen wir $a = -\frac{l}{2}$, so erhalten wir eine Hypozykloide, die nach 54) die Gleichung hat:

$$x = \left(\frac{l}{2} - b\right) \cos t, \quad y = \left(\frac{l}{2} + b\right) \sin t.$$

Das ist aber nach Gleichung 51) in (136) S. 373 die Parametergleichung einer Ellipse mit der großen Halbachse $\frac{l}{2} + b$ und der kleinen Halbachse $\frac{l}{2} - b$. Wir erhalten somit den Satz:

Rollt ein Kreis innerhalb eines anderen Kreises vom doppelten Halbmesser ab, so beschreibt irgendein mit ihm fest verbundener Punkt eine Ellipse. Liegt insbesondere der betreffende Punkt auf dem Umfange des rollenden Kreises ($b = \frac{l}{2}$), so lautet die Gleichung der Kurve

$$x = 0, \quad y = l \sin t;$$

Die Bahn des Punktes ist dann der mit der y -Achse zusammenfallende Durchmesser: Rollt ein Kreis innerhalb eines anderen Kreises vom doppelten Halbmesser des ersten, so beschreibt jeder Punkt auf dem Umfange des rollenden Kreises eine geradlinige Bahn (Geradföhrung!).

C. Setzen wir $a = -\frac{l}{4}$, so erhalten wir aus 54) eine gespitzte Hypozykloide, deren Gleichung lautet:

$$x = \frac{l}{4} (3 \cos t + \cos 3t), \quad y = \frac{l}{4} (3 \sin t - \sin 3t).$$

Diese Kurve heißt **Astroide** (Sternkurve); sie hat vier Spitzen, welche auf den Halbierungslinien der Koordinatenwinkel liegen. Da

$$\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$$

und

$$\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$$

ist, so läßt sich die Gleichung der Astroide auch folgendermaßen schreiben:

$$x = l \cos^3 t, \quad y = l \sin^3 t.$$

Hieraus ergibt sich die parameterfreie Gleichung der Astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

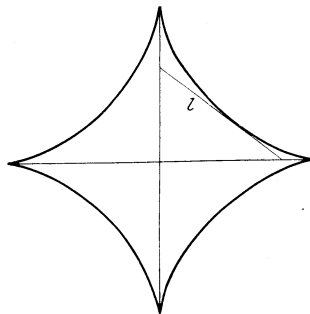


Abb. 218.

Die Gesamtlänge der Astroide ist nach 56) $s = 6l$. Da

$$\frac{dx}{dt} = -3l \cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3l \sin^2 t \cos t$$

ist, so ist

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} t$$

und demnach die Gleichung der Tangente

$$y - l \sin^3 t = -\operatorname{tg} t \cdot (x - l \cos^3 t) \quad \text{oder} \quad x \sin t + y \cos t = l \sin t \cos t$$

oder

$$\frac{x}{l \cos t} + \frac{y}{l \sin t} = 1.$$

Die Achsenabschnitte der Tangente sind also $l \cos t$ bzw. $l \sin t$, daher die Länge der Tangente konstant gleich l . Wir erhalten hieraus die folgende Entstehungsweise der Astroide:

Bewegt sich eine Strecke von der Länge l so, daß ihre Endpunkte auf zwei zueinander senkrechten Geraden gleiten, so umhüllt sie eine Astroide.

(140) Schließlich sei die Gleichung der Kurve abgeleitet, die ein mit einer Geraden c starr verbundener Punkt P beschreibt, wenn die Gerade c auf dem festen Kreise k abrollt. Wir wählen als Anfangslage die, in welcher der Berührungspunkt B_0 zwischen c und k gerade mit dem Fußpunkte des von P auf c gefällten Lotes zusammenfällt; durch ihn legen wir die Abszissenachse; der Nullpunkt sei der Mittelpunkt von k (Abb. 219). In einer durch den Winkel $B_0OB = t$ bestimmten beliebigen Lage ist der Fußpunkt des von P auf c gefällten Lotes nach C gewandert, und es ist $\widehat{BB_0} = BC = l \cdot t$. Wir erhalten daher für die Koordinaten von P

$$x = OB \cos t + BC \sin t + CP \cos t, \quad y = OB \sin t - BC \cos t + CP \sin t$$

oder

$$x = (l + b) \cos t + lt \sin t, \quad y = (l + b) \sin t - lt \cos t$$

als die Parametergleichung der Kurve, von der wir zwei Sonderfälle betrachten wollen.

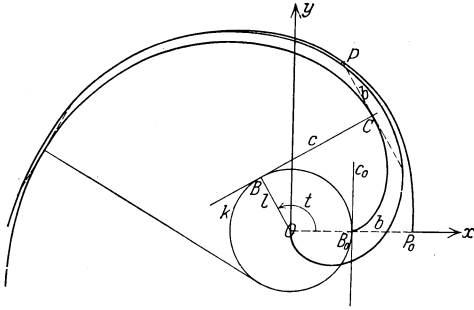


Abb. 219.

A. Ist $b = 0$, liegt also P auf c ($P \equiv C$), so lautet die Gleichung der Kurve

$$x = l(\cos t + t \sin t), \\ y = l(\sin t - t \cos t).$$

Da die Tangente BC des Kreises k nach den Erörterungen von (137) S. 384 Normale zur Rollkurve sein muß, so ist k Evolute zur

Rollkurve [s. (131) S. 351] und demnach diese eine Evolvente zu k ; man nennt diese Kurve daher die **Kreisevolvente**. Wir können diese Beziehungen auch leicht rechnerisch nachweisen; es ist nämlich

$$\frac{dx}{dt} = lt \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = lt \sin t, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t,$$

also die Gleichung der Normalen

$$[y - l(\sin t - t \cos t)] \operatorname{tg} t + [x - l(\cos t + t \sin t)] = 0$$

oder, wie man durch leichte Umformung findet,

$$x \cos t + y \sin t - l = 0 \quad (\text{Hessesche Normalform der Geraden}).$$

Die Normale ist also eine Gerade, die von O den konstanten Abstand l hat, d. h. sie ist Tangente an k .

Ferner ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{lt \cos t} = \frac{1}{lt \cos^3 t}, \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 t};$$

daher sind die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\xi = l \left(\cos t + t \sin t - \frac{t \cos^3 t}{\cos^2 t} \cdot \operatorname{tg} t \right) = l(\cos t + t \sin t - t \sin t) = l \cos t,$$

$$\eta = l \left(\sin t - t \cos t + \frac{t \cos^3 t}{\cos^2 t} \right) = l(\sin t - t \cos t + t \cos t) = l \sin t.$$

Die parameterfreie Gleichung der Evolute lautet also:

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Die Evolute ist ein Kreis mit dem Halbmesser l und dem Mittelpunkt O ; k ist in der Tat die Evolute. Der Krümmungshalbmesser hat die Länge

$$\rho = \frac{1}{\cos^3 t} \cdot lt \cos^3 t = lt,$$

ist also gleich dem Bogen BB_0 . Die Kreisevolvente hat in B_0 eine Spitze (s. Abb. 219).

Die Länge des von der Spitze aus gemessenen Kurvenbogens ist

$$s = \int_0^t \sqrt{l^2 t^2 \cos^2 t + l^2 t^2 \sin^2 t} dt = \int_0^t l t dt = \frac{l}{2} t^2.$$

Man berechne die Fläche, die man durch Integrieren zwischen den Grenzen 0 und 2π erhält! [Ergebnis: $F = (\pi l)^2$]. Man entwerfe ein Bild dieser Fläche.

B. Ist $b = -l$, so lauten die Gleichungen der Rollkurve

$$x = l t \sin t, \quad y = -l t \cos t;$$

die Kurve geht durch den Nullpunkt. Wir können leicht ihre Gleichung in Polarkoordinaten aufstellen; es ist nämlich

$$t g \vartheta = -ctg t, \quad \text{also} \quad \vartheta = t - \frac{\pi}{2}, \quad r = l t \quad \text{oder} \quad r = l \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right).$$

Legen wir den Anfangsstrahl nicht in die positive x -Achse, sondern in die negative y -Achse, wobei wir setzen müssen

$$\vartheta = \Theta - \frac{\pi}{2}, \quad r = R,$$

so lautet die neue Gleichung

$$R = l \cdot \Theta.$$

Dadurch sind wir auf eine Gleichung gestoßen, die uns schon aus (105) S. 287 als die Gleichung der **Archimedischen Spirale** bekannt ist; diese läßt sich also auch auf folgende Weise erzeugen:

Rollt eine Gerade auf einem Kreise ab, so beschreibt ein mit dieser Geraden starr verbundener Punkt, der durch den Mittelpunkt des Kreises läuft, eine Archimedische Spirale.

Wir werden der Archimedischen Spirale im nächsten Paragraphen nochmals begegnen. Dort wollen wir Kurven untersuchen, deren Gleichung in Polarkoordinaten gegeben ist.

§ 7. Die Kurve in Polarkoordinaten.

(141) Ist die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten gegeben [s. (105) S. 286 ff.], so ist zumeist der Leitstrahl r eines Kurvenpunktes P als Funktion der zu P gehörigen Amplitude ϑ gegeben, so daß die Kurvengleichung die Form hat:

$$r = f(\vartheta). \quad 57)$$

Die Eigenart der Polarkoordinaten erfordert auch eine von der bisher gewohnten im allgemeinen völlig verschiedene Art der Kurvenuntersuchung.

Es sei in Abb. 220 die Kurve von der Gleichung $r = f(\vartheta)$ angedeutet und $P(\vartheta|r)$ einer ihrer Punkte. Geben wir der Amplitude ϑ einen Zuwachs, den wir — der Bequemlichkeit halber — von vornherein unendlich klein annehmen und als solchen mit $d\vartheta$ bezeichnen wollen¹⁾, so daß die neue Amplitude den Wert $\vartheta + d\vartheta$ hat, so erhalten wir zu dieser auch einen neuen Leitstrahl, der sich von dem zu ϑ gehörigen r um den unendlich kleinen Wert dr unterscheiden, also gleich

$$r + dr = f(\vartheta + d\vartheta)$$

sein möge. Zu den beiden Polarkoordinaten $(d + d\vartheta|r + dr)$ finden wir sodann einen Punkt P' , welcher — auch auf der Kurve gelegen —

dem zu den Koordinaten $(\vartheta|r)$ gehörigen Punkte P unendlich benachbart liegt. Die Verbindungsgerade PP' ist demnach die in P an die

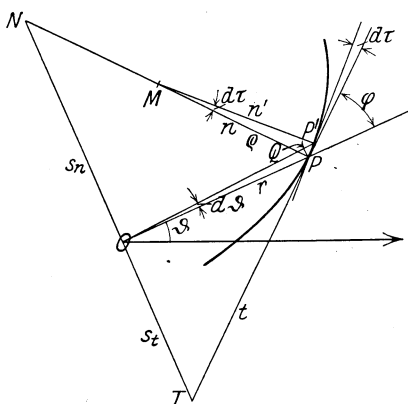


Abb. 220.

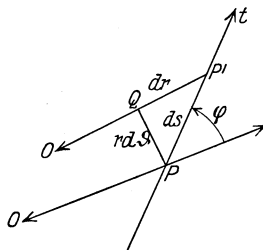


Abb. 221.

Kurve gelegte Tangente, und PP' selbst ein Kurvenelement ds , das, weil es unendlich klein ist, als geradlinig gelten kann. Schlagen wir um O den Kreis, der durch P geht, so schneidet dieser auf OP' einen Punkt Q aus, und wir erhalten eine Figur PQP' , die begrenzt wird von der (geradlinigen) Strecke $QP' = dr$, dem (krummlinigen) Kurvenelement $PP' = ds$ und dem Kreisbogen $PQ = r \cdot d\vartheta$; außerdem ist der Winkel $PQP' = 1R$, da OP' als Kreishalbmesser normal zum Kreisbogen ist. Im Grenzfalle ist sowohl $PP' = ds$ als auch $PQ = r \cdot d\vartheta$ geradlinig, und die Figur PQP' wird ein unendlich kleines, bei Q rechtwinkliges Dreieck, dessen Form in unendlich starker Vergrößerung in Abb. 221 wiedergegeben sei. Bildet nun die Tangente $PP' = t$ mit

¹⁾ Streng genommen müßten wir zunächst den endlichen Zuwachs $\Delta\vartheta$ geben und am Schlusse erst zu unendlich kleinem $d\vartheta \equiv \lim \Delta\vartheta \rightarrow 0$ übergehen (vgl. die früheren Grenzübergänge).

der Verlängerung des zu P gehörigen Leitstrahles OP den Winkel φ , so ist auch $\sphericalangle PP'Q = \varphi$, also

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r \cdot d\vartheta}{dr} = r : \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r}{r'},$$

wenn zur Abkürzung die Ableitung von r nach ϑ mit r' bezeichnet wird. Die Formel

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{r'} \quad (58)$$

kann dazu verwendet werden, die zu P gehörige Kurventangente festzulegen; wir tun dies also im Bereiche der Polarkoordinaten dadurch, daß wir den Winkel φ bestimmen, um welchen man den Leitstrahl des Berührungspunktes P um P drehen muß, bis er mit der Tangente zusammenfällt, und weichen damit von der bei den Parallelkoordinaten gebräuchlichen Art ab, bei der wir den Winkel verwenden, um den man die positive Abszissenachse drehen muß, bis sie mit der Tangente zusammenfällt oder mit ihr parallel ist.

Man erkennt auch ohne Mühe, daß für die Höchst- und Tiefstpunkte einer Kurve, d. h. solche Punkte, in denen die Tangente parallel dem Anfangsstrahl ist, $\varphi + \vartheta = \pi$, also

$$\operatorname{tg} \varphi \equiv \frac{r}{r'} = -\operatorname{tg} \vartheta \quad (59)$$

sein muß.

Durch die Richtung der Tangente ist auch die Richtung der Normalen bestimmt. Errichten wir in O auf dem Leitstrahle OP das Lot, und schneidet dieses die Tangente des Punktes P in T und seine Normale in N , so nennt man hier — ebenfalls abweichend von den bei Parallelkoordinaten üblichen Festsetzungen — die Strecken $OT = s_t$ die Polarsubtangente, $ON = s_n$ die Polarsubnormale und die Strecken $TP = t$ die Länge der Tangente, $NP = n$ die Länge der Normalen der Kurve $r = f(\vartheta)$ im Punkte P . Da

$$\sphericalangle ONP = \sphericalangle OPT = \varphi$$

ist, und $\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{r'}$ ist, so erhält man ohne weiteres die folgenden Formeln für die Größe dieser Strecken:

$$s_t = \frac{r^2}{r'}, \quad s_n = r', \quad t = \frac{r}{r'} \sqrt{r^2 + r'^2}, \quad n = \sqrt{r^2 + r'^2}. \quad (60)$$

Aus Abb. 221 ergibt sich ferner

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r \cdot d\vartheta)^2} = d\vartheta \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2} = \sqrt{r^2 + r'^2} d\vartheta;$$

es ist demnach die Länge der Kurve selbst

$$s = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\vartheta. \quad (61)$$

Schließlich hat der Ausschnitt OPP' in Abb. 220 einen Flächeninhalt, der sich zusammensetzt aus dem Inhalte des Kreisbogens OPQ und dem Inhalte der Figur PQP' ; er ist also

$$\frac{1}{2} r^2 d\vartheta + \frac{1}{2} r dr d\vartheta = \frac{r}{2} (r + dr) \cdot d\vartheta.$$

Im Grenzfalle nähert sich der Faktor $r + dr$ dem Werte r , und es ist $dF = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta$ und damit der Inhalt der von der Kurve $r = f(\vartheta)$ und den beiden zu $\vartheta = \vartheta_1$ und $\vartheta = \vartheta_2$ gehörigen Leitstrahlen begrenzten Fläche

$$F = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 \cdot d\vartheta. \quad (62)$$

Um schließlich die Größe des zu P gehörigen Krümmungshalbmessers zu ermitteln, haben wir folgendes zu bedenken. Der Krümmungsmittelpunkt M ist der Schnittpunkt der zu P gehörigen Normalen n mit der zu P' gehörigen Normalen n' ; beide bilden denselben Winkel $d\tau$ miteinander, den die zu P und P' gehörigen Tangenten t und t' miteinander einschließen. Aus dem Kreisbogenschnitt MPP' ergibt sich dann

$$\varrho = \frac{PP'}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau}.$$

Um $d\tau$ zu erhalten, drehen wir den Leitstrahl OP um O , bis P auf Q zu liegen kommt, also um den Winkel $d\vartheta$. Damit ist aber t noch nicht in eine zu t' parallele Lage gekommen; denn der Winkel, den t' mit OP' einschließt, ist ja nicht gleich φ , d. h. gleich dem Winkel, den t mit OP einschließt, sondern gleich $\varphi + d\varphi$. Wir müssen demnach die um $d\vartheta$ gedrehte Tangente t um den weiteren Winkel $d\varphi$ drehen, erst dann ist t zu t' parallel. Es ist also $d\tau = d\vartheta + d\varphi$ und damit

$$\varrho = \frac{ds}{d\vartheta + d\varphi} = \frac{\frac{ds}{d\vartheta}}{1 + \frac{d\varphi}{d\vartheta}}.$$

Da nun nach 59) $\varphi = \arctg \frac{r}{r'}$ ist, so ist nach der Kettenregel

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2} \cdot \frac{r' \cdot \frac{dr}{d\vartheta} - r \cdot \frac{dr'}{d\vartheta}}{r'^2},$$

und da $\frac{dr}{d\vartheta} = r'$, folglich $\frac{dr'}{d\vartheta} = r''$ ist, so ergibt sich

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{r'^2 - r \cdot r''}{r^2 + r'^2}.$$

Da fernerhin nach obigem $\frac{ds}{d\vartheta} = \sqrt{r^2 + r'^2}$ ist, so erhalten wir für die Länge des Krümmungshalbmessers

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'r'' - r r'''} \quad (63)$$

(142) Diese Formeln enthalten das für die Kurvenuntersuchung Wichtigste. Wir gehen nun zur Erörterung bestimmter Kurven über, deren Darstellung in Polarkoordinaten besonders einfach ist; es sind dies vor allem die **Spiralen**, von denen wir an dieser Stelle die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale näher behandeln wollen.

A. Der **Archimedischen Spirale** sind wir schon begegnet in (105) S. 287 und in (140) S. 401; ihre Gleichung ist

$$r = a \cdot \vartheta. \quad (7)$$

In (105) S. 287 haben wir uns auch schon ein Bild von ihrer Gestalt verschafft; es erübrigt nur noch, ein wenig auf ihre infinitesimalen Eigenschaften einzugehen. Es ist $r' = a = s_n$; die Subnormale der Archimedischen Spirale hat in jedem Punkte die konstante Länge a . Hieraus folgt eine einfache Konstruktion der Normalen und damit auch der Tangente (Abb. 222): Wir schlagen um O den Kreis k vom Halbmesser a und errichten in O auf dem Leitstrahle OP das Lot, welches k in N schneidet; NP ist die zu P gehörige Normale, die in P auf NP errichtete Senkrechte folglich die Tangente. Da $r'' = 0$ ist, so wird

$$\rho = a \frac{(\vartheta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\vartheta^2 + 2} = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2} = \frac{n^3}{a^2 + n^2},$$

wobei $n = \sqrt{a^2 + r^2}$ die Länge der Normalen ist. Um zu dem zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkt M zu gelangen, führen wir die folgende Konstruktion aus: Wir errichten in P auf OP und in N auf NP die Lote, welche einander in Q schneiden mögen; OQ schneidet dann die Normale in M . Es sind nämlich die beiden rechtwinkligen Dreiecke OPN und NQP einander ähnlich, und zwar ist in Dreieck OPN

$$OP = r, \quad ON = a, \quad NP = n, \quad \sphericalangle ONP = \sphericalangle (rt) = \varphi,$$

wobei

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{r'} = \frac{r}{a}$$

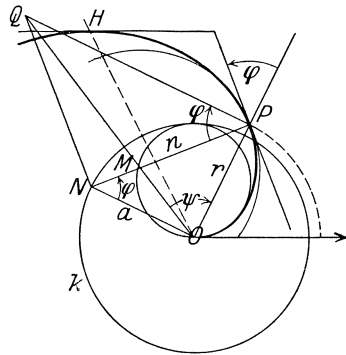


Abb. 222.

ist. Ferner ist

$$PQ : PN = PN : ON, \quad \text{also} \quad PQ = \frac{n^2}{a}.$$

Bezeichnen wir den in dem rechtwinkligen Dreieck OPQ gelegenen Winkel QOP mit ψ , so ist

$$\text{ctg } \psi = \frac{PO}{QP} = \frac{ar}{n^2}.$$

Auf das Dreieck OPM , in welchem $\sphericalangle OPM = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ist, wenden wir den Sinussatz an und erhalten

$$\begin{aligned} PM : OP &= \sin \psi : \sin \left(\frac{\pi}{2} + \psi - \varphi \right) = \sin \psi : \cos(\psi - \varphi) \\ &= 1 : (\cos \varphi \text{ctg } \psi + \sin \varphi), \end{aligned}$$

also

$$PM = \frac{r}{\frac{a}{n} \cdot \frac{r}{n^2} + \frac{r}{n}} = \frac{n^3}{a^2 + n^2} = \varrho,$$

was zu beweisen war.

Die von der Archimedischen Spirale und dem zur Amplitude ϑ gehörigen Leitstrahlen r begrenzte Fläche hat nach (62) den Inhalt

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} a^2 \vartheta^2 d\vartheta = \frac{a^2}{6} \vartheta^3 = \frac{r^3}{6a} = \frac{1}{6} r^2 \vartheta.$$

Da die Fläche des vom Mittelpunktswinkel ϑ bestimmten Ausschnittes im Kreise vom Halbmesser r den Inhalt $\frac{1}{2} r^2 \vartheta$ hat, also das Dreifache der obigen Fläche ist, erhalten wir den Satz:

Die Archimedische Spirale teilt alle Kreisabschnitte, die ihren Mittelpunkt in O haben, und deren Halbmesser der Leitstrahl und deren Mittelpunktswinkel die Amplitude ist im Verhältnis 1:2 [s. a. Parabelfläche (84) S. 221f.].

Die Länge des vom Nullpunkt bis zum Punkte $P(r|\vartheta)$ reichenden Bogens ergibt sich nach Formel (61) zu

$$s = \int_0^{\vartheta} \sqrt{a^2 \vartheta^2 + a^2} d\vartheta = \frac{a}{2} [\vartheta \sqrt{1 + \vartheta^2} + \mathfrak{A}r \mathfrak{S}in \vartheta] \quad [\text{s. Formel T II 15'}].$$

Es ist also der Bogen des ersten Umlaufes ($\vartheta = 2\pi$)

$$\begin{aligned} s &= \frac{a}{2} [2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \mathfrak{A}r \mathfrak{S}in 2\pi] = \frac{a}{2} [39,975 + 2,537] \\ &= 21,256a = 3,3830r. \end{aligned}$$

Da $\sqrt{1 + \vartheta^2}$ für sehr große Werte ϑ sich dem Werte ϑ nähert und $\mathfrak{A}r \mathfrak{S}in \vartheta$ gegenüber $\vartheta \sqrt{1 + \vartheta^2}$ vernachlässigt werden kann, ist für große Werte ϑ angenähert

$$s \approx \frac{a}{2} \vartheta^2 \quad \text{oder} \quad s \approx \frac{1}{2} r \vartheta.$$

Die Archimedische Spirale gibt Anlaß zu einer Reihe von Aufgaben, von denen einige hier angedeutet seien.

a) Welches ist die Gleichung der Archimedischen Spirale, welche durch den Punkt $P_0(r_0|\vartheta_0)$ geht?

$$r = r_0 \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta_0}, \quad \text{allgemein} \quad r = r_0 \frac{\vartheta}{\vartheta_0 + 2n\pi},$$

wobei n irgendeine ganze Zahl ist.

b) Wie groß ist der Flächeninhalt und der Bogen der Archimedischen Spirale, für welche zu $\vartheta = 2\pi$ der Leitstrahl 1 m gehört?

$$F = \frac{\pi}{3} \text{ m}^2, \quad \text{Bogen } l = 3,383 \text{ m}.$$

c) Wie bestimmt man die Höchst- und die Tiefstpunkte der Spirale? Für sie muß nach 59) sein $\text{tg}\vartheta + \vartheta = 0$; aus dieser transzendenten Gleichung kann man durch irgendein Annäherungsverfahren beliebig viele Winkel ϑ , deren Anzahl unendlich groß ist, bestimmen. (Der kleinste dieser Winkel ist $\vartheta = 116^\circ 14' 23'' = 2,0288$; s. *H* in Abb. 222.)

d) Wo liegt der Endpunkt des Bogens, der gleich der Strecke s ist? Für ihn muß sein

$$\vartheta \sqrt{1 + \vartheta^2} + \text{Ar}\text{Sin}\vartheta = \frac{2s}{a}.$$

Ist beispielsweise $s = a$, so erhalten wir für s die transzendenten Gleichung

$$\vartheta \sqrt{1 + \vartheta^2} + \text{Ar}\text{Sin}\vartheta - 2 = 0;$$

führt man $\vartheta = \text{Sin}\frac{u}{2}$ ein, so wird sie übergeführt in

$$\text{Sin}\frac{u}{2} \text{Cos}\frac{u}{2} + \frac{u}{2} - 2 = 0 \quad \text{oder} \quad u + \text{Sin}u = 4,$$

deren Lösung $u = 1,6068$, also $\vartheta = \text{Sin}0,8034 = 0,8927$, $\vartheta = 51^\circ 9'$ ist.

B. Die hyperbolische Spirale. Sie hat die Gleichung $r \cdot \vartheta = a$. Bei ihr ist also wie bei der gleichseitigen Hyperbel das Produkt aus den beiden Koordinaten eines jeden Punktes konstant [s. (31) S. 69]; dieser Übereinstimmung verdankt die Spirale auch ihren Namen. Lösen wir die Gleichung nach r auf, so erhalten wir

$$r = \frac{a}{\vartheta}. \quad (64)$$

Beschränken wir uns auf positive Winkel, so lesen wir aus (64) ab, daß für $\vartheta = 0$ $r = \infty$ wird; mit wachsenden Werten von ϑ nähert sich r dem Werte Null, ohne ihn jedoch zu erreichen; der Nullpunkt wird also in immer enger verlaufenden Windungen umkreist, liegt aber selbst nicht auf der Kurve; er ist ein sog. asymptotischer Punkt. Abb. 223 deutet den Verlauf an. Für negative Amplituden ergeben sich negative Leitstrahlen; zur vollständigen Kurve würde

also, wenn man auch negative Leitstrahlen zuläßt, noch ein Teil gehören, der zu dem bisher erwähnten bezüglich des durch O gehenden Lotes zum Anfangsstrahl symmetrisch verläuft. Aus der Gleichung

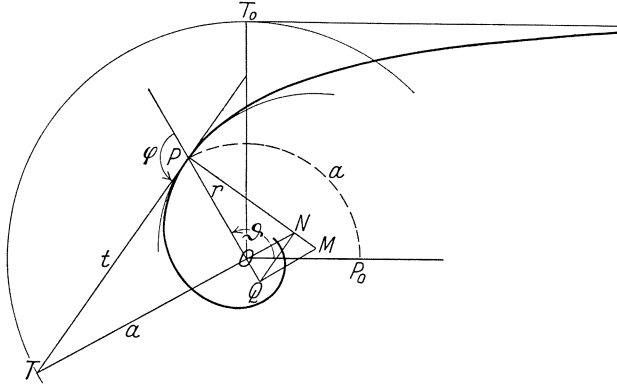


Abb. 223.

$r \cdot \vartheta = a$ folgt, daß die Bögen P_0P aller um O geschlagenen Kreise, welche zwischen dem Anfangsstrahl und der Spirale liegen, die konstante Länge a haben.

Da

$$r' = -\frac{a}{\vartheta^2} = -\frac{r^2}{a}$$

ist, so ist nach 60) die Subtangente $s_t = -a$; die Subtangente der hyperbolischen Spirale hat für jeden Punkt den konstanten Wert $-a$. Dabei deutet das Minuszeichen an — wie wir durch Vergleich mit Abb. 220 und den zugehörigen Ableitungen erkennen —, daß wir, um sie zu erhalten, den Leitstrahl nicht im Uhrzeiger-, sondern im Gegenzeigersinne um $1R$ zu drehen haben, um die Lage der Subtangente zu erhalten. — Diese Konstanz der Subtangente gestattet eine bequeme Tangentenkonstruktion. Man schlägt um O mit a den Kreis und bringt ihn zum Schnitt mit dem in O auf OP errichteten Lote; die Verbindungslinie von P mit dem Schnittpunkte T ist die Tangente in P . Diese Konstruktion gilt auch noch für $\vartheta = 0$; da hier $r = \infty$ ist, wird die Tangente zur Asymptote. Die hyperbolische Spirale besitzt also eine Asymptote; man erhält sie, indem man in O auf dem Anfangsstrahl das Lot $OT_0 = a$ errichtet und durch T_0 die Parallele zum Anfangsstrahl zieht.

Es ist $r'' = 2\frac{a}{\vartheta^3} = 2\frac{r^3}{a^2}$, also nach 63)

$$\varrho = \frac{\left(r^2 + \frac{r^4}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{r^4}{a^2} - 2\frac{r^4}{a^2}} = r \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^3,$$

wobei $t = \sqrt{r^2 + a^2}$ die Länge der Tangente ist. Um demnach zum Krümmungsmittelpunkte M zu gelangen, errichten wir auf der Normalen NP in N das Lot, das die Verlängerung von OP in Q schneiden möge, und auf QP in Q das Lot, das die Normale in M schneidet. Infolge der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke MQP , QNP , NOP , POT ist nämlich

$$n : r = t : a, \quad \text{also} \quad n = \frac{t}{a} r,$$

ferner

$$QP : n = t : a, \quad \text{also} \quad QP = \left(\frac{t}{a}\right)^2 \cdot r,$$

schließlich $MP : QP = t : a$, demnach in der Tat

$$MP = \left(\frac{t}{a}\right)^3 \cdot r = \rho.$$

Die vom Leitstrahle bei seiner Drehung aus der Amplitude ϑ_1 bis zur Amplitude ϑ_2 überstrichene Fläche der hyperbolischen Spirale ergibt sich aus 62) zu

$$[F]_1^2 = \frac{a^2}{2} \cdot \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{\vartheta^2} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right) = \frac{a}{2} (r_1 - r_2).$$

Wächst ϑ_2 über alle Grenzen hinaus, so ist diese Fläche, wenn $\vartheta_1 = \vartheta$ gesetzt wird, $F = \frac{1}{2} r a$, also gleich dem Inhalte des Kreisabschnittes OP_0P (Abb. 223).

Die Berechnung der Länge des von P_1 bis P_2 reichenden Kurvenbogens führt auf das Integral [s. 61)]

$$[s]_1^2 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\frac{a^2}{\vartheta^2} + \frac{a^2}{\vartheta^4}} d\vartheta = a \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\sqrt{1 + \vartheta^2}}{\vartheta^2} d\vartheta.$$

Um $\int \frac{\sqrt{1 + \vartheta^2}}{\vartheta^2} d\vartheta$ auszuwerten, setzen wir $\vartheta = \text{Sin } u$; dann ist

$$\sqrt{1 + \vartheta^2} = \text{Cos } u, \quad d\vartheta = \text{Cos } u \, du,$$

also

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1 + \vartheta^2}}{\vartheta^2} d\vartheta &= \int \frac{\text{Cos}^2 u}{\text{Sin}^2 u} du = \int \left(1 + \frac{1}{\text{Sin}^2 u} \right) du \\ &= u - \text{Ctg } u = \text{Ar Sin } \vartheta - \frac{\sqrt{1 + \vartheta^2}}{\vartheta}. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$[s]_1^2 = a \left[\text{Ar Sin } \vartheta - \frac{\sqrt{1 + \vartheta^2}}{\vartheta} \right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}.$$

(143) C. Die technisch wichtigste Spirale ist die **logarithmische Spirale**; sie hat die Gleichung

$$r = a \cdot e^{b\vartheta}, \tag{65}$$

wobei a eine Strecke, b eine Zahl bedeutet. Für $\vartheta = 0$ ist $r = a$. Durchläuft die Amplitude eine arithmetische Reihe, so durchläuft der Leitstrahl eine geometrische Reihe; in der Tat gehören zu den Amplituden $\vartheta_0, \vartheta_0 + \alpha, \vartheta_0 + 2\alpha, \dots, \vartheta_0 + n\alpha$ die Leitstrahlen

$$\begin{aligned} r_0 &= a e^{b\vartheta_0}, \\ r_1 &= a e^{b(\vartheta_0+\alpha)} = a e^{b\vartheta_0} \cdot e^{b\alpha} = r_0 \cdot q, \\ r_2 &= a e^{b(\vartheta_0+2\alpha)} = a e^{b\vartheta_0} \cdot e^{2b\alpha} = r_0 q^2, \dots, \\ r_n &= a e^{b(\vartheta_0+n\alpha)} = a e^{b\vartheta_0} \cdot e^{nb\alpha} = r_0 \cdot q^n, \end{aligned}$$

wenn $q = e^{b\alpha}$ gesetzt wird. Dies gibt Anlaß zur folgenden Konstruktion (Abb. 224): Sind $P_0(r_0 | \vartheta_0)$ und $P_1(r_1 | \vartheta_1 = \vartheta_0 + \alpha)$ irgend zwei Punkte

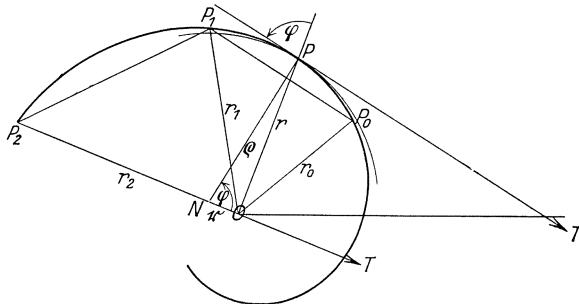


Abb. 224.

der Spirale, so trage man an OP_1 in O nochmals den Winkel α an und zeichne auf dem freien Schenkel den Punkt P_2 so, daß $OP_2 = r_2$ sich zu r_1 verhält wie r_1 zu r_0 ; P_2 ist dann ein weiterer Punkt der Spirale. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man zu einer beliebigen Anzahl solcher Punkte gelangen. Halbiert man andererseits den Winkel P_0OP_1 und trägt auf der Winkelhalbierenden das geometrische Mittel aus r_0 und r_1 $OP = r = \sqrt{r_0 r_1}$ ab, so ist P ebenfalls ein Punkt der Spirale; durch wiederholtes Winkelhalbieren kann man die Punktfolge so dicht gestalten, wie man nur will.

Ist $b > 0$, so ist für $\alpha > 0$ $q = e^{b\alpha} > 1$: die Leitstrahlen nehmen mit wachsender Amplitude zu und wachsen über alle Grenzen; sie nehmen andererseits mit der Amplitude ab und nähern sich (für $\alpha < 0$), stets positiv bleibend, dem Grenzwerte Null, der jedoch erst erreicht wird, wenn $\vartheta = 0$ wird ($\lim_{\vartheta \rightarrow -\infty} r = 0$). Der Nullpunkt ist demnach

ein asymptotischer Punkt, der in immer engeren Windungen umkreist wird. Für $b < 0$ kehren sich die Verhältnisse sinngemäß um.

Bei der Bedeutung, die der logarithmischen Spirale zukommt, ist es unerläßlich, sich Übung im Konstruieren dieser Kurve anzueignen;

der Leser entwerfe selbständig auf Grund der oben gegebenen Winkel die Spiralen, für welche

$$b = 1, \quad 0,1, \quad \frac{1}{\pi}, \quad \frac{1}{2\pi}, \quad \frac{1}{10\pi}, \quad \frac{1}{2\pi} \ln 2, \quad -0,2206 \quad \text{ist.}$$

Eine logarithmische Spirale, deren asymptotischer Punkt mit O zusammenfällt, ist durch zwei weitere Punkte $P_1(r_1 | \vartheta_1)$ und $P_2(r_2 | \vartheta_2)$ völlig bestimmt; ihre Gleichung muß von der Form sein: $r = a \cdot e^{b\vartheta}$. Es müssen also die beiden identischen Gleichungen bestehen:

$$r_1 = a e^{b\vartheta_1} \quad \text{und} \quad r_2 = a e^{b\vartheta_2};$$

aus ihnen folgt durch Dividieren

$$e^{b(\vartheta_2 - \vartheta_1)} = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{oder} \quad e^b = \sqrt[\vartheta_2 - \vartheta_1]{\frac{r_2}{r_1}}, \quad b = \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}.$$

Setzt man diesen Wert in eine der beiden Gleichungen ein, so erhält man

$$a = r_1 e^{-b\vartheta_1} = r_1 (e^b)^{-\vartheta_1} = r_1 \cdot \left(\sqrt[\vartheta_2 - \vartheta_1]{\frac{r_2}{r_1}} \right)^{-\vartheta_1} = r_1 \sqrt[\vartheta_2 - \vartheta_1]{\frac{r_1^{\vartheta_1}}{r_2^{\vartheta_1}}} = \sqrt[\vartheta_2 - \vartheta_1]{\frac{r_1^{\vartheta_1}}{r_2^{\vartheta_1}}}.$$

Also ist die Gleichung der durch P_1 und P_2 gehenden logarithmischen Spirale

$$r = \sqrt[\vartheta_2 - \vartheta_1]{\frac{r_1^{\vartheta_1}}{r_2^{\vartheta_1}}} \cdot \sqrt[\vartheta_2 - \vartheta_1]{\frac{r_2^{\vartheta_2}}{r_1^{\vartheta_2}}} \quad \text{oder} \quad r = \sqrt[\vartheta_2 - \vartheta_1]{\frac{r_2^{\vartheta_2 - \vartheta_1}}{r_1^{\vartheta_2 - \vartheta_1}}}.$$

Besonders einfache Eigenschaften zeigen sich bei Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die logarithmische Spirale. Es ist

$$r' = a \cdot b e^{b\vartheta} = b r;$$

demnach ist

$$\text{tg } \varphi = \frac{1}{b}.$$

Die logarithmische Spirale $r = a e^{b\vartheta}$ schneidet alle Leitstrahlen unter dem gleichen Winkel, dessen Kotangens den Wert b hat.

Bestimme diesen Winkel für die oben angegebenen Spiralen!

Hieraus folgt, daß alle durch Tangente und Normale gebildeten rechtwinkligen Dreiecke TPN einander ähnlich sind.

Da $r'' = b^2 r$ ist, so folgt für den Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{(r^2 + b^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2b^2 r^2 - b^2 r^2} = r \sqrt{1 + b^2} = \frac{r}{\sin \varphi} = PN.$$

Der Krümmungsmittelpunkt fällt demnach mit N zusammen. Da $r = ON = r \cdot b$ ist, so ist $r = a b \cdot e^{b\vartheta}$; wählen wir als neuen Anfangsstrahl denjenigen, der auf dem ursprünglichen senkrecht steht, so sind r und ϑ die Polarkoordinaten von N ; demnach ist $r = a b e^{b\vartheta}$ die Gleichung der Evolute der ursprünglichen logarithmischen Spirale.

Sie ist, wie man aus ihrer Gleichung erkennt, wiederum eine logarithmische Spirale, die den gleichen Winkel φ besitzt wie ihre Evolvente. Die Evolute der logarithmischen Spirale ist eine zu ihrer Evolvente kongruente Spirale. Beziehen wir die Gleichung der Evolute auf den ursprünglichen Anfangsstrahl, so lautet ihre Gleichung $r = abe^{b\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)}$; für sie können wir schreiben $r = ae^{b(\vartheta - \vartheta_0)}$, wenn wir $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\ln b}{b}$ setzen. Würden wir also als neuen Anfangsstrahl denjenigen wählen, der mit dem ursprünglichen den Winkel $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\ln b}{b}$ einschließt, so würde die Gleichung der Evolute lauten $r = ae^{b\vartheta}$, also identisch mit der Gleichung der Evolvente sein. Dreht man die logarithmische Spirale um ihren asymptotischen Punkt um den Winkel $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\ln b}{b}$, so geht sie in ihre Evolute über. Da eine Kurve mit sich selbst zur Deckung kommt, wenn man sie um einen oder mehrere Vollwinkel um O dreht, so kann auch der Fall eintreten, daß eine logarithmische Spirale ihre eigene Evolute ist; es müßte dann $\vartheta_0 = 2n\pi$ sein, wobei n eine ganze Zahl ist. Die Bedingung dafür, daß eine logarithmische Spirale ihre eigene Evolute ist, ist folglich

$$(2n - \frac{1}{2}) b \pi + \ln b = 0,$$

eine Bestimmungsgleichung für b .

Setzen wir $n = 1$, so lautet sie $\frac{3}{2} b \pi + \ln b = 0$; ihre Lösung ist $b = 0,274412$, und der Neigungswinkel dieser Spirale ist $\varphi = 74^\circ 39' 18''$. Ist $n = 2$, so ist

$$\frac{7}{2} b \pi + \ln b = 0, \quad b = 0,16427, \quad \varphi = 80^\circ 40' 17''.$$

Die von der logarithmischen Spirale und den beiden Leitstrahlen r_1 und r_2 eingeschlossene Fläche hat nach 62) den Inhalt

$$\begin{aligned} [F]_1^2 &= \frac{a^2}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} e^{2b\vartheta} d\vartheta = \frac{a^2}{4b} [e^{2b\vartheta}]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \frac{a^2}{4b} [e^{2b\vartheta_2} - e^{2b\vartheta_1}] = \frac{1}{4b} [r_2^2 - r_1^2] \\ &= \frac{1}{4} \cdot (r_2 + r_1) \sin \varphi \cdot \frac{r_2 - r_1}{\cos \varphi}; \end{aligned}$$

die Länge der von P_1 bis P_2 reichenden Kurve beträgt nach 61

$$\begin{aligned} [s]_1^2 &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{a^2 e^{2b\vartheta} + a^2 b^2 e^{2b\vartheta}} d\vartheta = a\sqrt{1 + b^2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} e^{b\vartheta} d\vartheta \\ &= a \frac{\sqrt{1 + b^2}}{b} [e^{b\vartheta}]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = a \frac{\sqrt{1 + b^2}}{b} [e^{b\vartheta_2} - e^{b\vartheta_1}], \\ [s]_1^2 &= \frac{\sqrt{1 + b^2}}{b} (r_2 - r_1) = \frac{r_2 - r_1}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

Die Formeln für $[F]_1^2$ und $[s]_1^2$ lassen eine einfache Konstruktion für Länge und Fläche zu. Man zeichne (s. Abb. 225) in P_2 an die Spirale die Tangente und schlage um O den Kreis durch P_1 , der OP_2 in Q und die Rückwärtsverlängerung von OP_2 in R schneidet. Das in Q auf OP_2 errichtete Lot schneidet die Tangente von P_2 in S , und es ist $P_2S = [s]_1^2$. Ferner ziehe man durch R zu P_2S die Parallele, welche das in S auf P_2S errichtete Lot in T schneiden möge, und ergänze zu dem Rechtecke P_2STU ; sein Flächeninhalt ist gleich $4[F]_1^2$. Der Beweis ist einfach: Es ist $P_2Q = r_2 - r_1$, also

$$P_2S = \frac{r_2 - r_1}{\cos \varphi} = [s]_1^2;$$

ferner $P_2R = r_2 + r_1$, also $ST = (r_2 + r_1) \sin \varphi$, und daher Rechteck

$$P_2STU = \frac{r_2 - r_1}{\cos \varphi} \cdot (r_2 + r_1) \sin \varphi = (r_2^2 - r_1^2) \operatorname{tg} \varphi = \frac{r_2^2 - r_1^2}{b} = 4 [F]_1^2.$$

Setzen wir $\vartheta_1 = -\infty$, also $r_1 = 0$ und $\vartheta_2 = \vartheta$, $r_2 = r$, so erhalten wir

$$F = \frac{r^2}{4} \operatorname{tg} \varphi \quad \text{und} \quad s = \frac{r}{\cos \varphi}.$$

Der Weg, den ein Punkt auf der logarithmischen Spirale zurücklegt, bis er in unendlich vielen Windungen vom asymptotischen Punkte bis zum Punkte P gelangt, ist also nicht, wie man leicht vermuten könnte, unendlich groß, sondern hat eine endliche Länge, und zwar ist diese gleich der Länge der Tangente im Punkte P . Die Fläche, die bei dieser Bewegung der Leitstrahl des Punktes überstreicht, hat einen Inhalt, der gleich dem Rechtecke aus dem Leitstrahle von P und dem vierten Teil der Subtangente von P ist.

Wir wollen die Betrachtung der logarithmischen Spirale nicht abschließen, ohne auf ihre innige Beziehung zur gedämpften Schwingung [s. (57) S. 144f.] einzugehen. Um den Zusammenhang beider noch enger zu gestalten, wollen wir die Gleichung der logarithmischen Spirale schreiben $r = a \cdot e^{-b\vartheta}$, wobei b eine absolute Größe sein soll; wir beschränken uns mit anderen Worten auf eine logarithmische Spirale, bei welcher mit wachsender Amplitude der Leitstrahl abnimmt. Auf der logarithmischen Spirale möge sich ein Punkt P mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω bewegen, $\vartheta = \omega t$, wobei t die Zeit bedeutet, die zur Zurücklegung des Winkels ϑ gebraucht wird. Er möge zu einem Umlaufe die Zeit T benötigen, so daß $\omega \cdot T = 2\pi$ ist. Unter Einführung der Zeit t erhält die Gleichung der logarithmischen Spirale die Gestalt

$$r = a \cdot e^{-b\omega t} = a \cdot e^{-\lambda t},$$

wenn $b\omega = \lambda$ gesetzt wird.

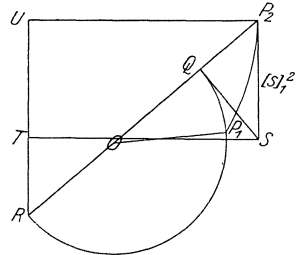


Abb. 225.

Mit dem auf der Spirale sich bewegendem Punkte P denken wir uns nun einen Punkt Q auf der durch O gehenden Normalen zum Anfangsstrahle derart verbunden, daß QP parallel dem Anfangsstrahle ist; Q führt bei jedem Umlauf von P eine Hinundherbewegung aus, die stets durch O führt; die Pendelungen werden hierbei beständig kürzer. Bezeichnen wir OQ mit y , so ist in jeder Lage

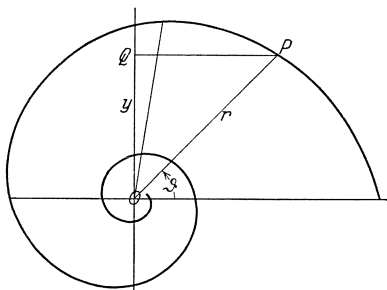


Abb. 226.

$$\begin{aligned} & y = r \sin \vartheta \\ \text{oder} & \quad y = a e^{-\lambda t} \sin \omega t \\ \text{bzw.} & \quad y = a e^{-\lambda t} \sin \frac{2\pi}{T} t. \end{aligned}$$

Dies ist aber die Gleichung der gedämpften Schwingung. Ist die Tangente an die Spirale parallel dem Anfangsstrahl, so hat der die gedämpfte Schwingung ausführende Punkt Q seinen größten Ausschlag und kehrt um; hier ist also seine augenblickliche Geschwindigkeit gleich Null. Da nach 59) in diesem Falle $\varphi + \vartheta = \pi$ sein muß, so ist die zugehörige Amplitude ϑ durch die Gleichung bestimmt $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{b}$; demnach ist der Zeitpunkt, in welchem Q umkehrt,

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{1}{b} = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\lambda} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{\lambda T},$$

in Übereinstimmung mit der in (57) gefundenen Formel.

D. Eine besondere Spirale, die **Fermatsche Spirale**, findet neuerdings im Rundfunkgerät Verwendung. Der in ihm eingebaute Drehplattenkondensator trägt auf seinem Knopfe eine Ablesevorrichtung zur Einstellung der richtigen Wellenlänge. Die feste Platte des Kondensators ist halbkreisförmig, die an ihr vorbeizudrehende war es ursprünglich auch. Daher war die Kapazität C proportional dem Drehwinkel α . Da nun die Wellenlänge λ sich aus der Formel $\lambda = 2\pi \sqrt{LC}$ berechnet (L Selbstinduktion), so war λ proportional $\sqrt{\alpha}$. Das hatte zur Folge, daß die Einteilung an der Ablesevorrichtung ungleichförmig war, und zwar für kleine Wellenlängen wesentlich dichter als für große (s. Abb. 227), so daß die Einstellung für jene wesentlich ungenauer wurde als für diese. Um eine gleichmäßige Empfindlichkeit des Kondensators zu erzielen, gibt man der Drehplatte eine spiralförmige Abgrenzung; die Gleichung der Spirale möge $r = f(\vartheta)$ lauten. Nach Drehung um den Winkel π aus der Anfangslage befindet sich dann eine Fläche F

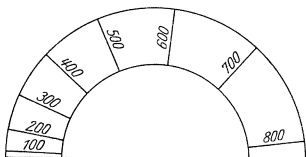


Abb. 227.

über der festen Platte, die sich zu $F = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} r^2 d\vartheta$ ergibt. Da sie proportional zu C , also proportional λ^2 ist, λ aber proportional ϑ sein soll, so erhalten wir für r die Gleichung

$$\frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} r^2 d\vartheta = c \cdot \vartheta^2.$$

Beiderseitiges Differenzieren nach ϑ liefert

$$\frac{1}{2} r^2 = 2c\vartheta, \quad \text{also} \quad r = 2\sqrt{c \cdot \vartheta}, \quad r = a\sqrt{\vartheta},$$

die Gleichung der Fermatschen Spirale, deren Gestalt Abb. 228 zeigt. Da man in der Gestalt der Drehplatte die Umrisse einer Niere zu erkennen glaubte, wird dieser Drehkondensator von gleichmäßiger Empfindlichkeit für Wellenlängeneinstellung auch als „Nierenplattenkondensator“ bezeichnet.

(144) Neben den angeführten Spiralen sind noch andere Kurven einer Un-

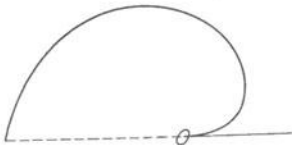
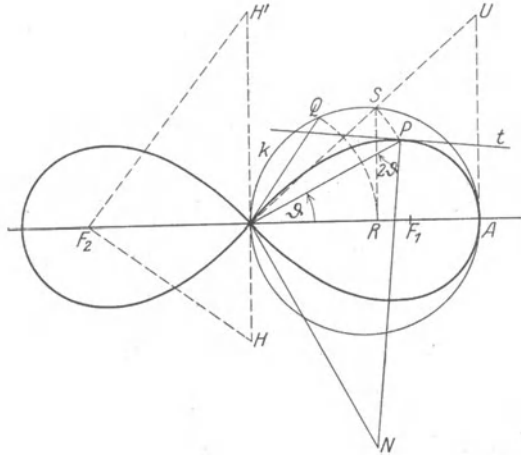


Abb. 228.

tersuchung in Polarkoordinaten leicht zugänglich; der Leser behandle beispielsweise die uns aus (139) S. 395 bekannte Kardioide auf diese Weise und zeige insbesondere, daß die von ihr eingeschlossene Fläche den Inhalt $J = 6\pi l^2$ hat. Hier seien noch die **Lemniskate** und die **Kegelschnitte** behandelt. Die **Lemniskate** hat die Gleichung

$$r = a\sqrt{\cos 2\vartheta}. \quad (66)$$

Der Leitstrahl ist also nur so lange reell, als $\cos 2\vartheta > 0$ ist, d. h. für Werte von ϑ , die in den Grenzen

$$-\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq +\frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \frac{3}{4}\pi \leq \vartheta \leq \frac{5}{4}\pi$$

liegen. Den zu einer bestimmten Amplitude ϑ gehörigen Lemniskatenpunkt P kann man durch folgende Konstruktion finden (s. Abb. 229):

Man wählt auf dem Anfangsstrahle den Punkt A so, daß $OA = a$ ist, und schlägt über OA als Durchmesser den Kreis k . Diesen bringt man mit dem freien Schenkel der Amplitude 2ϑ in Q zum Schnitt; dann schlägt man um O den durch Q gehenden Kreis, der OA in R trifft, und errichtet in R das Lot auf OA , das k in S schneidet; schließlich schlägt man um O den durch S gehenden Kreis, der den freien Schenkel der Amplitude ϑ in dem Lemniskatenpunkt P trifft. Es ist in der Tat

$$OR = OQ = a \cos 2\vartheta, \quad \text{folglich} \quad \overline{OP}^2 = \overline{OS}^2 = a \cdot a \cos 2\vartheta, \\ \text{also} \quad OP = r = a \sqrt{\cos 2\vartheta}.$$

Gleichung 66) sagt weiterhin aus, daß die Lemniskate aus vier zu einander symmetrischen Teilen besteht, und daß der Anfangsstrahl und seine Verlängerung sowie die in O auf diesem senkrechte Gerade die Symmetrielinien sind. Noch deutlicher läßt sich diese Eigenschaft erkennen, wenn wir die Gleichung der Lemniskate im rechtwinkligen Koordinatensystem aufstellen. Da

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \cos 2\vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta = \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}$$

ist, so ist $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ die gewünschte Gleichung, aus der die zu den beiden Koordinatenachsen symmetrische Lage der Kurve ohne weiteres hervorgeht.

Es ist ferner

$$r' = -a \frac{\sin 2\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} = -\frac{\sqrt{a^4 - r^4}}{r}, \quad \text{da} \quad \cos 2\vartheta = \frac{r^2}{a^2},$$

also

$$\sin 2\vartheta = \frac{\sqrt{a^4 - r^4}}{a^2}$$

ist. Folglich ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{r'} = a \sqrt{\cos 2\vartheta} : \left(-a \frac{\sin 2\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} \right) = -\operatorname{ctg} 2\vartheta,$$

also

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\vartheta;$$

d. h. der Winkel zwischen Leitstrahl und Kurvennormale $\varphi' = 2\vartheta$. Um also in P die Normale zu zeichnen, trägt man in P an PO den Winkel 2ϑ an; der freie Schenkel ist die Normale. Damit ist dann auch die Tangente gefunden. Den Höchstpunkt der Lemniskate erhalten wir durch die Erwägung, daß nach 59) $\varphi + \vartheta = \pi$ sein muß, aus der Gleichung

$$\frac{\pi}{2} + 2\vartheta + \vartheta = \pi,$$

aus der sich ergibt

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{6}, \quad r_0 = \frac{a}{2} \sqrt{2}.$$

Da die Subnormale

$$s_n = r' = -\frac{\sqrt{a^4 - r^4}}{r}$$

ist, so ist die Länge der Normalen

$$n = \sqrt{r^2 + \frac{a^4 - r^4}{r^2}} = \frac{a^2}{r}.$$

Schneidet man OS mit dem in A auf OA errichteten Lote in U , so ist $OU = n$; denn es ist im rechtwinkligen Dreieck OAU $AS \perp OU$, folglich $OS \cdot OU = \overline{OA}^2$ oder $OU = \frac{a^2}{r} = n$. Um also die Normale im Punkt T zu zeichnen, können wir auch so verfahren: Wir errichten in O auf OP das Lot und schlagen um P mit n den Kreis, der das Lot in N schneidet; PN ist dann die gesuchte Normale.

Ferner ist

$$r'' = \frac{dr'}{d\vartheta} = \frac{dr'}{dr} \cdot \frac{dr}{d\vartheta} = r' \frac{dr'}{dr}.$$

Da nun

$$\frac{dr'}{dr} = -\frac{r \cdot \frac{-4r^3}{2\sqrt{a^4 - r^4}} - \sqrt{a^4 - r^4}}{r^2} = \frac{a^4 + r^4}{r^2 \sqrt{a^4 - r^4}}$$

ist, so ist

$$r'' = -\frac{a^4 + r^4}{r^3}.$$

Hieraus folgt

$$\varrho = \frac{a^6}{r^3 \left(r^2 + 2 \frac{a^4 - r^4}{r^2} + \frac{a^4 + r^4}{r^2} \right)} = \frac{a^2}{3r} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{n}{3}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt und damit auch der Krümmungskreis lassen sich demnach in überaus einfacher Weise zeichnen; u. a. hat der Krümmungshalbmesser im Scheitel A die Länge $\frac{a}{3}$, im Höchstpunkte die Länge $\frac{a}{3}\sqrt{3}$.

Der Inhalt der von der Lemniskate, dem Anfangsstrahle und dem Leitstrahle von der Länge r begrenzten Fläche ist

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} a^2 \cos 2\vartheta \, d\vartheta = \frac{a^2}{4} [\sin 2\vartheta]_0^{\vartheta} = \frac{a^2}{4} \sin 2\vartheta = \frac{1}{4} \sqrt{a^4 - r^4}.$$

Setzen wir $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ oder $r = 0$, so ist $F = \frac{a^2}{4}$, und der Inhalt der von der schleifenförmigen Lemniskate begrenzten Gesamtfläche wird $F = a^2$.

Der von A aus gerechnete Kurvenbogen ergibt sich zu

$$s = \int_0^{\vartheta} n \cdot d\vartheta = \int_0^{\vartheta} \frac{a^2}{r} \, d\vartheta = a \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}$$

oder

$$s = \int_0^{\vartheta} \frac{a^2}{r \cdot r'} dr = -a^2 \int_a^r \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

Beide Integrale können wir erst später auswerten [s. (201) S. 662].

Auf eine weitere Konstruktionsart der Lemniskate sei zum Schlusse noch hingewiesen. Wir wählen in Abb. 229 auf der Geraden OA die beiden Punkte F_1 und F_2 im Abstände

$$OF_1 = OF_2 = \frac{a}{2} \sqrt{2}.$$

Dann ist nach dem Kosinussatze

$$\overline{F_1 P^2} = \frac{a^2}{2} + r^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \sqrt{r} \cos \vartheta \quad \text{und} \quad \overline{F_2 P^2} = \frac{a^2}{2} + r^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \sqrt{2} r \cos \vartheta$$

oder

$$\begin{aligned} (F_1 P \cdot F_2 P)^2 &= \frac{a^4}{4} + a^2 r^2 + r^4 - 2 a^2 r^2 \cos^2 \vartheta \\ &= \frac{a^4}{4} + a^2 r^2 + r^4 - a^2 r^2 (1 + \cos 2\vartheta) \\ &= \frac{a^4}{4} + r^4 - a^2 r^2 \cos 2\vartheta = \frac{a^4}{4} + r^4 - a^2 r^2 \cdot \frac{r^2}{a^2} = \frac{a^4}{4} \end{aligned}$$

oder

$$F_1 P \cdot F_2 P = \frac{a^2}{2} = \left(\frac{a}{2} \sqrt{2} \right)^2 = \overline{OF_1^2}.$$

Die Lemniskate ist der Ort aller Punkte, für welche das Produkt aus den Abständen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant, nämlich gleich dem Quadrate aus der halben gegenseitigen Entfernung dieser beiden Punkte ist. Gibt man sich demnach auf der Mittelsenkrechten zu $F_1 F_2$ einen beliebigen Punkt H und errichtet man in F_2 auf $F_2 H$ das Lot, das die Mittelsenkrechten in H' schneidet, so sind $r_1 = OH$ und $r_2 = OH'$ zwei Strecken, mit denen man nur um F_1 bzw. F_2 Kreise zu schlagen braucht, um in deren Schnittpunkten Punkte der Lemniskate zu erhalten.

Die Lemniskate erscheint so als Sonderfall einer umfassenderen Gruppe von Kurven, den **Cassinischen Kurven**, bei welchen das Produkt aus r und r' nicht gerade gleich dem Quadrate über der halben Entfernung von F und F' ist, sondern irgendeinen beliebigen, aber konstanten Wert hat.

Suchen wir schließlich die zur Lemniskate kreisverwandte Kurve [s. (126) S. 338], wobei der Verwandtschaftskreis der um O durch A geschlagene Kreis sein möge, so muß der Leitstrahl r des zur Amplitude ϑ gehörigen Punktes dieser Kurve die Bedingung erfüllen

$$r \cdot r' = a^2 \quad \text{oder} \quad r = \frac{a^2}{r} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}.$$

Setzen wir diese Gleichung in rechtwinklige Koordinaten um, so erhalten wir $r^2 \cos 2\vartheta = a^2$ oder $r^2 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta = a^2$

oder schließlich $x^2 - y^2 = a^2$ [s. (112) S. 303].

Die Lemniskate ist die zur gleichseitigen Hyperbel kreisverwandte Kurve.

(145) Unter einem Kegelschnitte wollen wir den geometrischen Ort aller Punkte verstehen, für welche das Verhältnis des Abstandes von einem festen Punkte F , dem Brennpunkte, und von einer festen Geraden l , der Leitlinie, gleich einem konstanten Werte ϵ , der numerischen Exzentrizität ist. Wir erhalten demnach auf folgendem Wege Punkte des Kegelschnittes: Wir tragen auf zwei sich schneidenden Geraden vom Schnittpunkte S aus zwei Strecken $SM = m$ bzw. $SN = n$ ab, so daß $m:n = \epsilon$ ist. Eine beliebige Parallele zu MN schneidet auf den beiden Geraden zwei Strecken SM' und SN' ab, deren Verhältnis ebenfalls ϵ ist. Mit SM' schlagen wir um F einen Kreis, im Abstand SN ziehen wir zu l die Parallele. Die Schnittpunkte zwischen Kreis und Parallele sind Punkte des Kegelschnittes. Wählen wir F als Nullpunkt

und die Verlängerung des von F auf l gefällten Lotes als Anfangsstrahl eines Polarkoordinatensystems

(Abb. 230), so ist, wenn $FD = d$ der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie ist, der Abstand PQ eines Kurvenpunktes P von der Leitlinie gleich $d + r \cos \vartheta$; demnach müssen die Polarkoordinaten eines jeden Kegelschnittpunktes die Gleichung erfüllen

$$\frac{r}{d + r \cos \vartheta} = \epsilon \quad \text{oder} \quad r = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon \cos \vartheta}. \tag{67}$$

Diese Gleichung heißt die Polargleichung des Kegelschnittes. Der Anfangsstrahl ist eine Symmetrielinie des Kegelschnittes, da sich aus 67) für entgegengesetzt gleiche Amplituden ϑ gleiche Leitstrahlen r ergeben; sie heißt die Hauptachse des Kegelschnittes; und die beiden auf ihr gelegenen Punkte A und A' , die man dadurch erhält, daß man die Strecke FD innen und außen im Verhältnis ϵ teilt, sind die Hauptscheitel des Kegelschnittes; man erhält ihre Leitstrahlen für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ zu

$$r_A = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon} \quad \text{und} \quad r_{A'} = \frac{\epsilon d}{1 + \epsilon}.$$

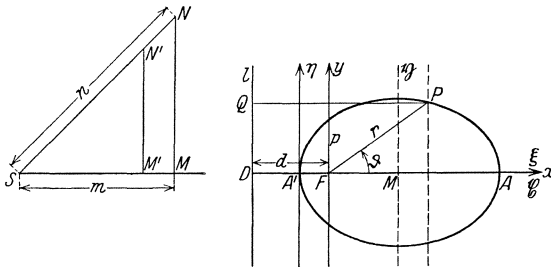


Abb. 230.

Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ ergibt sich $r = \varepsilon d = p$; p heißt der Parameter des Kegelschnittes und ist die zum Brennpunkt gehörige Ordinate. Unter Verwendung von p geht die Gleichung (67) über in

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \vartheta}, \quad (67')$$

und es wird

$$r_A = \frac{p}{1 - \varepsilon} \quad \text{und} \quad r_{A'} = \frac{p}{1 + \varepsilon}.$$

Wir müssen nun drei verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem $\varepsilon \leq 1$ ist. Ist $\varepsilon = 1$, so lautet die Gleichung

$$r = \frac{p}{1 - \cos \vartheta}.$$

Es wird

$$r_A = \infty, \quad r_{A'} = \frac{p}{2}, \quad p = d.$$

Der Kegelschnitt heißt **Parabel** und hat die Eigenschaft, daß der eine Scheitel A im Unendlichen liegt, während der andere A' der Mittelpunkt von FD ist. Da $\varepsilon = 1$ ist, so ist die Parabel der Ort aller Punkte, für welche die beiden Abstände vom Brennpunkt und von der Leitlinie einander gleich sind.

Ist $\varepsilon < 1$, so heißt die Kurve **Ellipse**. Da in diesem Falle $1 - \varepsilon \cos \vartheta$ stets positiv und endlich sein muß, so liegt nach Gleichung (67) und (67') auf jedem Leitstrahl ein Punkt der Kurve; die Ellipse ist eine geschlossene Kurve. Der Leitstrahl ist am größten für $\vartheta = 0$, am kleinsten für $\vartheta = \pi$. Der Scheitel A liegt unter allen Ellipsenpunkten am weitesten von F entfernt, der Scheitel A' ihm dagegen am nächsten.

Ist schließlich $\varepsilon > 1$, so heißt die Kurve **Hyperbel**. Für sie kann $1 - \varepsilon \cos \vartheta$ positiv, negativ und Null sein, je nachdem $\cos \vartheta \leq \frac{1}{\varepsilon}$ ist. Mit $1 - \varepsilon \cos \vartheta$ ist auch r positiv, und zwar am kleinsten für $\vartheta = \pi$: $r_{A'} = \frac{p}{1 + \varepsilon}$. Mit $1 - \varepsilon \cos \vartheta$ ist auch r negativ, der absolute Betrag am kleinsten für $\vartheta = 0$: $r_A = -\frac{p}{\varepsilon - 1}$. Sowohl der Scheitel A als auch der Scheitel A' liegen demnach vom Brennpunkte F aus auf der gleichen Seite der Achse, nämlich auf der nach l hin gerichteten, und zwar A' zwischen F und D , da

$$r_{A'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \cdot d < d,$$

dagegen A noch über D hinaus, da

$$-r_A = +\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} d > d$$

ist. Ist schließlich $\cos \vartheta = \frac{1}{\varepsilon}$, so ist $r = \infty$. Die Hyperbel besitzt daher zwei unendlich ferne Punkte.

Abb. 231 zeigt für verschiedene Werte ε die Kegelschnitte, die den Brennpunkt und die Leitlinie gemeinsam haben.

Daß die im obigen definierten Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel identisch sind mit den von uns schon früher behandelten

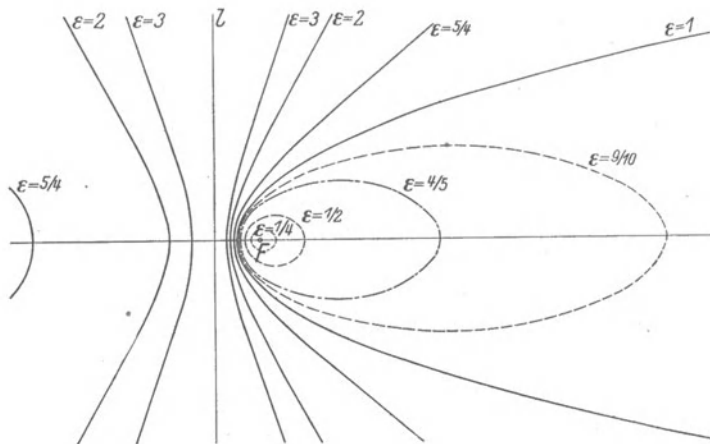


Abb. 231.

Kurven gleichen Namens, können wir sehr einfach nachweisen, wenn wir vom Polarkoordinatensystem zum rechtwinkligen Koordinatensystem übergehen. Aus Gleichung 67') erhalten wir

$$r = \varepsilon \cdot r \cos \vartheta + p.$$

Setzen wir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \cos \vartheta = x$$

[s. (106), Formeln 8) und 9)], so ergibt sich

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p + \varepsilon x,$$

woraus wir durch Quadrieren erhalten

$$x^2(1 - \varepsilon^2) + y^2 - 2\varepsilon p x - p^2 = 0.$$

Jetzt verschieben wir den Anfangspunkt des rechtwinkligen Koordinatensystems nach dem Scheitel A' , und zwar, da

$$r_{A'} = \frac{p}{1 + \varepsilon}, \quad \text{also} \quad FA' = -\frac{p}{1 + \varepsilon}$$

ist, mittels der Verschiebungsformeln

$$x = \xi - \frac{p}{1 + \varepsilon}, \quad y = \eta$$

und erhalten

$$(1 - \varepsilon^2) \left(\xi - \frac{p}{1 + \varepsilon} \right)^2 + \eta^2 - 2\varepsilon p \left(\xi - \frac{p}{1 + \varepsilon} \right) - p^2 = 0$$

oder geordnet

$$(1 - \varepsilon^2) \xi^2 + \eta^2 - 2p \xi = 0,$$

Scheitelgleichung des Kegelschnittes.

Für $\varepsilon = 1$ geht sie über in

$$\eta^2 - 2p \xi = 0,$$

eine Gleichung, die uns schon aus dem ersten Abschnitt [s. (38), Formel 72)] als die Scheitelgleichung der Parabel bekannt ist. Damit ist die Identität der Parabel nachgewiesen.

Schließlich verschieben wir den Anfangspunkt des rechtwinkligen Koordinatensystems nach dem Mittelpunkt M der Strecke $A'A$. Da

$$A'F = \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad \text{und} \quad FA = r_A = \frac{p}{1 - \varepsilon}$$

ist, so ist

$$A'A = p \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} + \frac{1}{1 + \varepsilon} \right) = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2},$$

und demnach

$$A'M = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}.$$

Daher lauten die Verschiebungsgleichungen

$$\xi = \xi + \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad \eta = \eta$$

und demnach die Kegelschnittsgleichung

$$(1 - \varepsilon^2) \left(\xi + \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 + \eta^2 - 2p \left(\xi + \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \right) = 0$$

oder

$$(1 - \varepsilon^2) \xi^2 + \eta^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2},$$

aus der die Gleichung folgt

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{p}{1 - \varepsilon^2} \right)^2} + \frac{\eta^2}{\frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}} = 1,$$

Achsgleichung der Kegelschnitte.

Nehmen wir erst den Fall der Ellipse $\varepsilon < 1$, so können wir auch schreiben

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{p}{1 - \varepsilon^2} \right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^2} = 1.$$

Diese Gleichung geht aber in die uns aus (136) S. 374 bekannte Achsengleichung der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

über, wenn wir

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

setzen, womit die Identität der Ellipse nachgewiesen ist. Im Falle der Hyperbel ist $\varepsilon > 1$; wir schreiben jetzt die Achsengleichung:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{p}{\varepsilon^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right)^2} = 1.$$

Setzen wir hier

$$\frac{p}{\varepsilon^2 - 1} = a, \quad \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = b,$$

so geht diese über in

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

die wir schon aus **(112)** S. 304 als die Achsengleichung der Hyperbel kennen, womit schließlich auch die Identität der Hyperbel nachgewiesen ist.

Wir schließen hiermit die Behandlung der Kurven in Polarkoordinaten ab; es bleiben nun noch die ebenen Kurven zu untersuchen, deren Gleichung in der unentwickelten (impliziten) Form $f(x, y) = 0$ gegeben ist. Vorher aber müssen wir uns mit der Lehre der partiellen Differentialquotienten vertraut machen, die uns zur analytischen Geometrie des Raumes führt.

Tabelle der wichtigsten Integrale.

T I 1)	$\int x^n dx$	$= \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1,$
2)	$\int \frac{dx}{x}$	$= \ln x,$
3)	$\int \frac{dx}{x^2+1}$	$= \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccot} x,$
4)	$\int \frac{dx}{1-x^2}$	$= \mathfrak{A}r \mathfrak{L}g x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$
5)	$\int \frac{dx}{x^2-1}$	$= -\mathfrak{A}r \mathfrak{C}tg x = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1},$
6)	$\int \frac{dx}{ax+b}$	$= \frac{1}{a} \ln(ax+b),$
7)	$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$	$= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a},$
8)	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$= \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} = -\frac{1}{a} \mathfrak{A}r \mathfrak{C}tg \frac{x}{a} = -\frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}$ $= -\frac{1}{a} \mathfrak{A}r \mathfrak{L}g \frac{x}{a},$
9)	$\int \frac{x+a}{x^2+2ax+b} dx$	$= \frac{1}{2} \ln(x^2+2ax+b).$
T II		
1)	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$= \operatorname{arcsin} x = -\operatorname{arccos} x,$
2)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	$= \mathfrak{A}r \mathfrak{S}in x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$
3)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	$= \mathfrak{A}r \mathfrak{C}of x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),$
4)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$= \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a},$
5)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$= \mathfrak{A}r \mathfrak{C}of \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}),$
6)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$= \mathfrak{A}r \mathfrak{S}in \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}),$

- $$7) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a}),$$
- $$8) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \sqrt{x^2 + a},$$
- $$9) \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2},$$
- $$10) \int \frac{dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = \arcsin \frac{x - r}{r},$$
- $$11) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 2rx}} = \mathfrak{Ar} \mathfrak{Cof} \left| \frac{x \pm r}{r} \right| = \ln(x \pm r + \sqrt{x^2 \pm 2rx}),$$
- $$12) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2},$$
- $$13) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2},$$
- $$14) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} - \frac{a}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a}),$$
- $$14') \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \mathfrak{Ar} \mathfrak{Sin} \frac{x}{a},$$
- $$14'') \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \mathfrak{Ar} \mathfrak{Cof} \frac{x}{a},$$
- $$15) \int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a}),$$
- $$15') \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \mathfrak{Ar} \mathfrak{Sin} \frac{x}{a},$$
- $$15'') \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \mathfrak{Ar} \mathfrak{Cof} \frac{x}{a}.$$

$$\text{VIII 1) } \int \sin x dx = -\cos x,$$

$$2) \int \cos x dx = +\sin x,$$

$$3) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg} x,$$

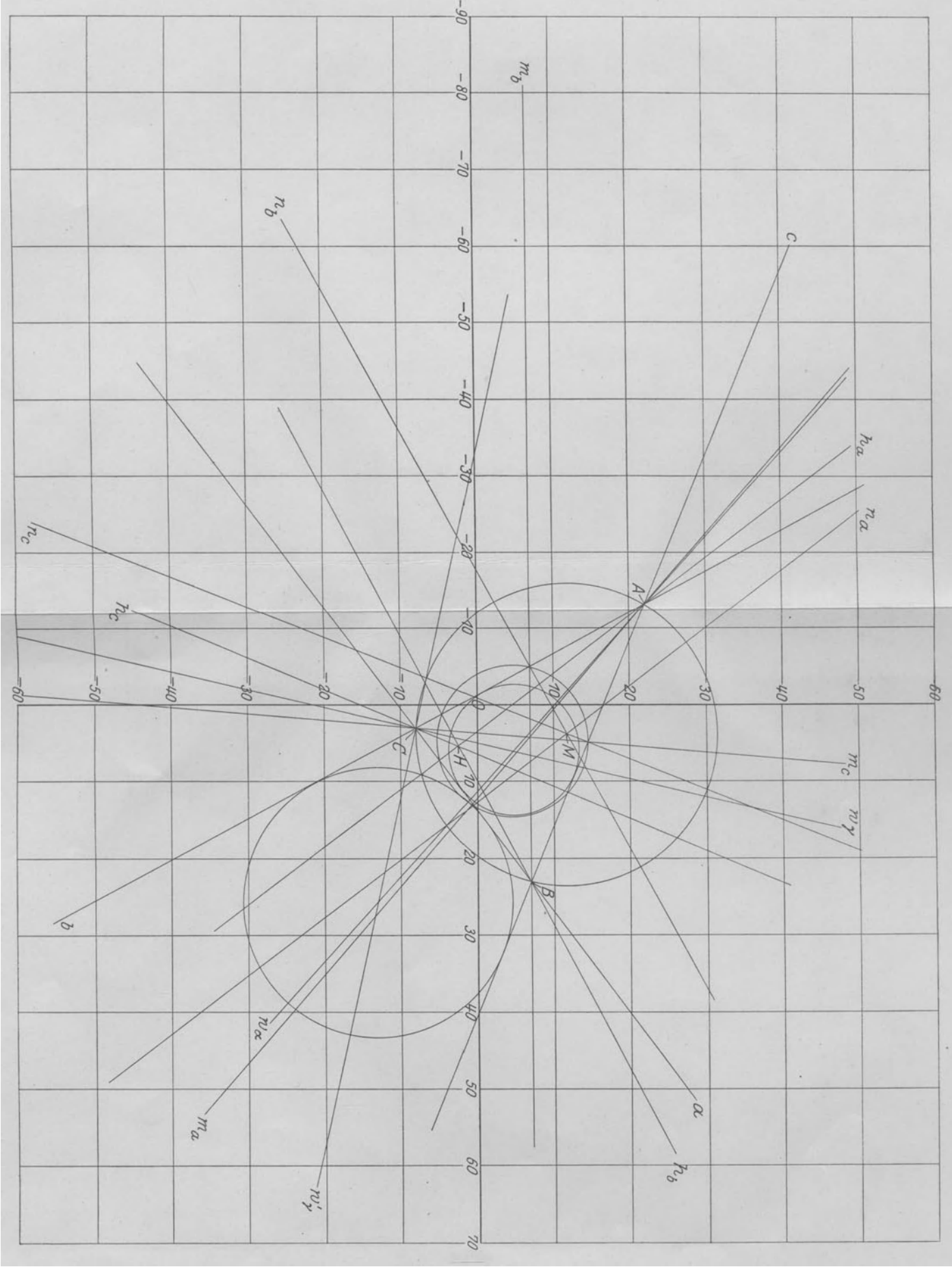
$$4) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x,$$

$$5) \int \mathfrak{Sin} x dx = \mathfrak{Cof} x,$$

$$6) \int \mathfrak{Cof} x dx = \mathfrak{Sin} x,$$

- 7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{Ctg} x,$
- 8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{Tg} x,$
- 9) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}.$
- 10) $\int e^x dx = e^x,$
- 11) $\int \text{tg} x dx = -\ln \cos x,$
- 12) $\int \text{ctg} x dx = \ln \sin x,$
- 13) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \text{tg} x,$
- 14) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \text{tg} \frac{x}{2},$
- 15) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right),$
- 16) $\int \ln x dx = x \ln x - x,$
- 17) $\int x^m \ln x dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} [(m+1) \ln x - 1],$
- 18) $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2},$
- 19) $\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2},$
- 20) $\int \arctg x dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2),$
- 21) $\int \text{arctg} x dx = x \text{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2),$
- 22) $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x,$
- 23) $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x,$
- 24) $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2},$
- 25) $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2},$
- 26) $\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx,$

- 27) $\int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = -\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} dx,$
- 28) $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx,$
- 29) $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}.$
- 30) $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx,$
- 31) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x},$
- 32) $\begin{cases} \int x^n \sin ax dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax dx, \\ \int x^n \cos ax dx = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax dx. \end{cases}$
-



Ingenieur-Mathematik. Lehrbuch der höheren Mathematik für die technischen Berufe. Von Dr.-Ing. Dr. phil. **Heinz Egerer**, Diplom-Ingenieur, vorm. Professor für Ingenieur-Mathematik und Materialprüfung an der Technischen Hochschule Drontheim.

Erster Band: **Niedere Algebra und Analysis.** — **Lineare Gebilde der Ebene und des Raumes in analytischer und vektorieller Behandlung.** — **Kegelschnitte.** Mit 320 Textabbildungen und 575 vollständig gelösten Beispielen. VIII, 503 Seiten. 1913. Unveränderter Neudruck. 1923. Gebunden RM 12.—

Zweiter Band: **Differential- und Integralrechnung.** — **Reihen und Gleichungen.** — **Kurvendiskussion.** — **Elemente der Differentialgleichungen.** — **Elemente der Theorie der Flächen- und Raumkurven.** — **Maxima und Minima.** Mit 477 Textabbildungen und über 1000 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben. X, 713 Seiten. 1922. Neudruck 1927. Gebunden RM 25.20

Dritter Band: **Gewöhnliche Differentialgleichungen.** — **Flächen.** — **Raumkurven.** — **Partielle Differentialgleichungen.** — **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung.** — **Fouriersche Reihen** usw. In Vorbereitung. RM 25.20

Lehrbuch der Mathematik. Für Mittlere Technische Fachschulen der Maschinenindustrie. Von Privatdozent Prof. Dr. **R. Neuendorff**, Kiel. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 262 Textfiguren. XII, 268 Seiten. 1919.

Gebunden RM 7.35

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. **W. Ludwig**, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. In drei Teilen.

Erster Teil: **Das rechtwinklige Zweitafelssystem.** Vielfache, Kreis, Zylinder, Kugel. Mit 58 Textfiguren. VI, 135 Seiten. 1919. Unveränderter Neudruck. 1924. RM 4.50

Zweiter Teil: **Das rechtwinklige Zweitafelssystem.** Kegelschnitte, Durchdringungskurven, Schraubelinie. Mit 50 Textfiguren. VI, 134 Seiten. 1922. RM 4.50

Dritter Teil: **Das rechtwinklige Zweitafelssystem.** Krumme Flächen, Axonometrie, Perspektive. Mit 47 Textfiguren. V, 169 Seiten. 1924. RM 5.70

Die drei Teile in einem Band gebunden RM 17.—

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In zwei Bänden. Von Professor Dr.-Ing. e. h., Dr. phil. **G. Scheffers** in Berlin.

Erster Band: **Zweite**, durchgesehene Auflage. Mit 404 Figuren im Text. X, 424 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1922. Gebunden RM 18.—

Zweiter Band: **Zweite**, durchgesehene Auflage. Mit 596 Textfiguren. VIII, 441 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1927. Gebunden RM 18.—

Darstellende Geometrie für Maschineningenieure. Von Dr. **Marcel Großmann**, Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Mit 260 Textabbildungen. VIII, 236 Seiten. 1927.

RM 15.—; gebunden RM 16.50

Angewandte darstellende Geometrie insbesondere für Maschinenbauer. Ein methodisches Lehrbuch für die Schule sowie zum Selbstunterricht. Von Studienrat **Karl Keiser**, Leipzig. Mit 187 Abbildungen im Text. 164 Seiten. 1925. RM 5.70

Analytische Geometrie für Studierende der Technik und zum Selbststudium. Von Prof. Dr. **Adolf Heß**, Winterthur. Mit 140 Abbildungen. VII, 172 Seiten. 1925. RM 7.50

Mathematisch-technische Zahlentafeln. Genehmigt zum Gebrauch bei den Reifeprüfungen an den höheren Maschinenbauschulen, Maschinenbauschulen, Hüttenschulen und anderen Fachschulen für die Metallindustrie durch Ministerial-Erlaß vom 14. Oktober 1919. Zusammengestellt von Studienrat Dipl.-Ing. **H. Bohde**, unter Mitwirkung von Prof. Dr. **J. Freyberg** und Dipl.-Ing. Prof. **L. Geusen**, Dortmund. Fünfte, vermehrte Auflage. 68 Seiten. 1927. RM 1.—

Lehrbuch der technischen Physik. Von Professor Dr. Dr.-Ing. **Hans Lorenz**,
Geheimer Regierungsrat, Danzig. Zweite, neubearbeitete Auflage.

Erster Band: Technische Mechanik starrer Gebilde. Zweite, vollständig neu-
bearbeitete Auflage der „Technischen Mechanik starrer Systeme“.

Erster Teil: Mechanik ebener Gebilde. Mit 295 Textabbildungen. VIII,
390 Seiten. 1924. Gebunden RM 18.—

Zweiter Teil: Mechanik räumlicher Gebilde. Mit 144 Textabbildungen. VIII,
294 Seiten. 1926. Gebunden RM 21.—

Einführung in die Mechanik mit einfachen Beispielen aus der Flugtechnik.

Von Professor Dr. **Th. Pöschl**. Mit 102 Textabbildungen. VII, 132 Seiten.
1917. RM 3.75

Ingenieur-Mechanik. Lehrbuch der technischen Mechanik in vorwiegend
graphischer Behandlung. Von Dr.-Ing. Dr. phil. **Heinz Egerer**, Dipl.-Ingenieur,
vorm. Professor für Ingenieur-Mechanik und Materialprüfung an der Technischen
Hochschule Drontheim.

Erster Band: Graphische Statik starrer Körper. Mit 624 Textabbildungen sowie
298 Beispielen und 145 vollständig gelösten Aufgaben. VIII, 380 Seiten. 1919. Unver-
änderter Neudruck. 1923. Gebunden RM 11.—

Lehrbuch der technischen Mechanik für Ingenieure und Studierende.

Zum Gebrauche bei Vorlesungen an Technischen Hochschulen und zum Selbst-
studium. Von Professor Dr.-Ing. **Theodor Pöschl** in Prag. Mit 206 Ab-
bildungen. VI, 263 Seiten. 1923. RM 6.—; gebunden RM 7.80

Lehrbuch der technischen Mechanik. Von Professor **M. Grübler** in
Dresden.

Erster Band: Bewegungslehre. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 144 Textfiguren.
VII, 148 Seiten. 1921. RM 4.20

Zweiter Band: Statik der starren Körper. Zweite, berichtigte Auflage. (Neudruck.)
Mit 222 Textfiguren. X, 280 Seiten. 1922. RM 7.50

Dritter Band: Dynamik starrer Körper. Mit 77 Textfiguren. VI, 157 Seiten. 1921. RM 4.20

Die technische Mechanik des Maschineningenieurs mit besonderer
Berücksichtigung der Anwendungen. Von Professor Dipl.-Ing. **P. Stephan**,
Reg.-Baumeister.

Erster Band: Allgemeine Statik. Mit 300 Textfiguren. VI, 160 Seiten. 1921.
Gebunden RM 6.—

Zweiter Band: Die Statik der Maschinenteile. Mit 276 Textfiguren. IV, 268 Seiten.
1921. Gebunden RM 9.—

Dritter Band: Bewegungslehre und Dynamik fester Körper. Mit 284 Textfiguren.
VI, 252 Seiten. 1922. Gebunden RM 9.—

Vierter Band: Die Elastizität gerader Stäbe. Mit 255 Textfiguren. IV, 250 Seiten.
1922. Gebunden RM 9.—

Fünfter Band: Die Statik der Fachwerke. Mit 198 Textfiguren. IV, 140 Seiten.
1926. Gebunden RM 8.40

Aufgaben aus der technischen Mechanik. Von Professor **Ferdinand**
Wittenbauer † in Graz.

Erster Band: Allgemeiner Teil. 839 Aufgaben nebst Lösungen. Fünfte, ver-
besserte Auflage, bearbeitet von Professor Dr.-Ing. **Theodor Pöschl** in Prag. Mit
640 Textabbildungen. VIII, 281 Seiten. 1924. Gebunden RM 8.—

Zweiter Band: Festigkeitslehre. 611 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formel-
sammlung. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 505 Textfiguren. VIII, 408 Seiten. 1918.
Unveränderter Neudruck. 1922. Gebunden RM 8.—

Dritter Band: Flüssigkeiten und Gase. 634 Aufgaben nebst Lösungen und einer
Formelsammlung. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 493 Textfiguren.
VIII, 390 Seiten. 1921. Unveränderter Neudruck. 1922. Gebunden RM 8.—

Theoretische Mechanik. Eine einleitende Abhandlung über die Prinzipien
der Mechanik. Mit erläuternden Beispielen und zahlreichen Übungsaufgaben.

Von Professor **A. E. H. Love** in Oxford. Autorisierte deutsche Übersetzung
der zweiten Auflage von Dr.-Ing. **Hans Polster**. Mit 88 Textfiguren.
XIV, 424 Seiten. 1920. RM 12.—; gebunden RM 14.—