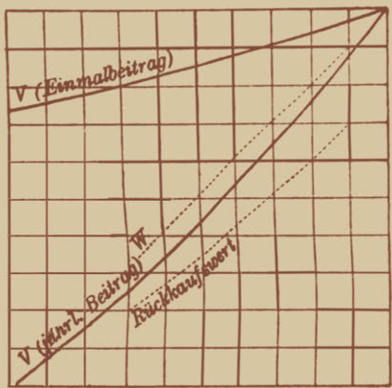
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

BAND 46

H. SCHÜTZE

DIE MATHEMATISCHEN GRUNDLAGEN DER LEBENSVERSICHERUNG



SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE
BIBLIOTHEK
HERAUSGEGEBEN VON **W. LIETZMANN** UND **A. WITTING**
46

DIE MATHEMATISCHEN GRUNDLAGEN
DER
LEBENSVERSICHERUNG

VON

DR. PHIL. HERMANN SCHÜTZE
STUTTGART

1922

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

ISBN 978-3-663-15520-1 ISBN 978-3-663-16092-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-16092-2

URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI B.G. TEUBNER IN LEIPZIG 1922.

VORWORT

Eine Darstellung der mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung in so engem Rahmen, die außerdem gemeinverständlich sein soll, kann nicht erschöpfend sein. Ich habe mich deshalb auf das *Allerwesentlichste*[1]) beschränkt, *das* aber des leichteren Verständnisses wegen so ausführlich wie möglich gebracht. Insbesondere glaube ich, durch *die reichliche Einstreuung* durchgerechneter Zahlenbeispiele und die sowohl tabellarische als auch graphische Darstellung der Versicherungswerte die Lebensversicherungsmathematik anschaulich und verständlich gemacht zu haben. Ich empfehle dem Leser, die Zahlenbeispiele vollständig durchzurechnen und auch die Werte der beigegebenen Tafeln zu prüfen.

Sämtliche im Büchlein vorkommenden Formeln sind im Anhang noch einmal zusammengestellt worden.

Stuttgart, 1. Juli 1922.

Dr. H. Schütze.

---

1) So mußte verzichtet werden auf ausführliche Darstellung der Gewinnverteilung und der Sterbetafeln, der Unterjährigkeit, veränderlichen Beiträge und Versicherungswerte, der Versicherung verbundener Leben, der Selektionstafeln u. a. m.

INHALTSVERZEICHNIS

1. DIE VERSICHERUNGSFORMEN

Nur von den gebräuchlichsten Formen der Lebensversicherung soll die Rede sein. Das sind:

1. *Die Todesfallversicherung,*
2. *Die gemischte Versicherung,*
3. *Die Versicherung mit bestimmter Verfallzeit.*

Jede Versicherung lautet auf eine bestimmte *Versicherungssumme,* z. B. 10000 M., 50000 M. usw. Bei der Todesfallversicherung wird diese Summe fällig unmittelbar nach dem Tode des Versicherten. Bei der gemischten Versicherung, die auf eine bestimmte *Versicherungsdauer,* z. B. 10, 15 oder 20 Jahre, abgeschlossen wird, ist die Versicherungssumme zahlbar beim Tode des Versicherten, vorausgesetzt daß der Tod innerhalb der Versicherungsdauer eintritt; erlebt der Versicherte den Ablauf der Versicherungsdauer, so wird ihm dann die Versicherungssumme ausgezahlt. Bei der Versicherung mit bestimmter Verfallzeit wird die Versicherungssumme unabhängig vom Tode des Versicherten fällig sofort nach Eintritt der *Verfallzeit,* d. h. nach Ablauf der Versicherungsdauer, die sich je nach Wunsch des Versicherten auf irgend eine Reihe von Jahren, meist nicht unter 10, erstreckt.

Die *Versicherungsbeiträge,* auch Prämien genannt, sind die Gegenleistungen des Versicherten an den *Versicherer* (die Versicherungsgesellschaft), der ihm dafür den „Versicherungsschutz" gewährt. Die Grundlage aller Rechnungen in der Lebensversicherung ist nun die, daß die Leistung der Versicherungsgesellschaft gleich der Gegenleistung des Versicherten ist. Nach diesem Grundsatze berechnet man die Beiträge der Versicherten.

Im allgemeinen zahlt der Versicherte die Beiträge jährlich oder auch in unterjährigen Raten. Bei der Todesfallversicherung sind die Beiträge bis zum Tode des Versicherten zu zahlen; bei der gemischten Versicherung bis zum Ablauf der Versicherungsdauer oder nur bis zum Tode des Versicherten, wenn er vor Ablauf der Versicherungsdauer eintritt; ebenso bei der Versicherung mit bestimmter Verfallzeit.

Es hat natürlich seinen Sinn, daß die Lebensversicherung in diesen drei Hauptformen auftritt. Die Todesfallversicherung als uneigennützigste Form sorgt nicht für den Versicherten selber, sondern allein für die Hinterbliebenen. Sie ist die Grundlage der *Sterbekassen,* die den Hinterbliebenen das Begräbnisgeld des Versicherten liefern; sie dient auch zur Bereitstellung von Kapital für die Erbschaftssteuern und die Nachlaßregelung. Die gemischte Versicherung sorgt für die Hinterbliebenen und den Versicherten selber. Erreicht er das Endalter der Versicherung, d. h. erlebt er den Ablauf ihrer Dauer, so erhält er selber die Versicherungssumme als Rückhalt fürs Alter; stirbt er vor Ablauf der Dauer, so erhalten die Hinterbliebenen die Summe und sind so vor Not geschützt. Die Versicherung mit bestimmter Verfallzeit soll die Mittel bereitstellen für die Aussteuer der Töchter, das Studium und die Berufseinrichtung der Söhne, und zwar unabhängig vom Leben des Ernährers, da nach dessen Tode die Beitragszahlung aufhört, die Summen also unter allen Umständen und zur rechten Zeit da sein werden.

2. DIE ZINSRECHNUNG

Der Zins tritt in allen versicherungstechnischen Rechnungen auf; am durchsichtigsten bei der Versicherung mit bestimmter Verfallzeit. Nehmen wir an, es handle sich darum, den Wert einer solchen Versicherung von 20jähriger Versicherungsdauer zu bestimmen. Die Versicherungsgesellschaft verpflichtet sich, dem Versicherten oder seinen Hinterbliebenen nach Ablauf von 20 Jahren die Versicherungssumme, sie möge 10000 M. betragen, zu zahlen. Welchen Wert hat diese Leistung der Versicherungsgesellschaft heute, d. h. zur Zeit des Versicherungsabschlusses? Diesen Wert muß man zunächst ermitteln, wenn man die Versicherungsbeiträge, d. h. die Gegenleistung des Versicherten bestimmen will, denn die Beitragszahlung des Versicherten beginnt mit dem Abschluß der Versicherung.

Es ist klar, daß man den Wert der Versicherung nicht einfach gleich 10000 M. setzen darf, denn diese Summe würde mit Zins und Zinseszins nach 20 Jahren viel mehr betragen als das, was die Gesellschaft dann leisten wird. Beträgt der Zins z. B. 4%, so wächst die Summe im 1. Jahre um 400 M. auf 10400 M. an. Im 2. Jahre beträgt der Zins bereits 416 M., die Summe steigt auf 10816 M. usw. Man findet den Endwert der Summe nach 20 Jahren gemäß den bekannten Formeln der Zinseszinsrechnung mit $10000 \cdot 1{,}04^{20} = 21911$ M.

Diese Zinseszinsformeln treten bei den Rechnungen der Lebensversicherung in etwas anderer Gestalt auf als in der gebräuchlichen Zinsrechnung. Man setzt den *Zinsfuß* $i = \frac{p}{100}$, worin p gleich dem Prozentsatze ist. Danach hat man bei 4% ($p = 4$) den Zinsfuß $i = 0{,}04$, bei $3\frac{1}{2}\%$ $i = 0{,}035$ usw. Da nun die Zinsen, die das Kapital K in einem Jahre bringt, gleich $\frac{K \cdot p}{100}$ sind, so hat man bei Benutzung des Zinsfußes i den einfacheren Ausdruck $K \cdot i$ für den Zins des Kapitals K in einem Jahre. Setzt man $K = 1$, so hat man i als Zins des Kapitals 1 in 1 Jahre. Also wächst das Kapital 1 in 1 Jahre an auf $(1 + i)$. Läßt man dieses Kapital $(1 + i)$ ein weiteres Jahr Zins tragen, so erhält man als Zins im 2. Jahre $(1 + i) \cdot i$ und als Gesamtkapital am Ende des 2. Jahres

$$(1 + i) + (1 + i) \cdot i = (1 + i)(1 + i) = (1 + i)^2.$$

Das 3. Jahr bringt an Zinsen $(1 + i)^2 \cdot i$, das Kapital wächst an auf $(1 + i)^2 + (1 + i)^2 \cdot i = (1 + i)^2(1 + i) = (1 + i)^3$. Daraus kann man ohne weiteres schließen, daß das Kapital 1 in n Jahren anwächst auf $(1 + i)^n$. Das Kapital K wächst daher in n Jahren an auf $K(1 + i)^n$. Man findet aus dieser Formel für $K = 10000$, $n = 20$ und $i = 0{,}04$ denselben Ausdruck $10000 \cdot 1{,}04^{20} = 21911$ wie eingangs dieses Abschnitts.

Da solche Zinseszinsrechnungen häufig vorkommen, wäre es umständlich, für jeden einzelnen Fall die Potenzen $(1 + i)^n$ besonders zu berechnen. Man hat sie deshalb in Tafeln zusammengestellt. Tafel I des Anhangs: „Zinsfaktoren" bringt für $i = 0{,}03$, $0{,}035$ und $0{,}04$, d. h. für 3%, $3\frac{1}{2}\%$ und 4% die Potenzen $(1 + i)^n$ von $n = 1$ bis $n = 40$. Diese Werte nennt man auch *Aufzinsungsfaktoren*. Für $n = 20$ und 4% findet man den Aufzinsungsfaktor 2,1911 und daraus durch Multiplikation mit 10000 die Summe 21911 M., auf die 10000 M. in 20 Jahren zu 4% anwachsen.

Für unsere Versicherung mit bestimmter Verfallzeit ist damit nichts gewonnen außer der Erkenntnis, daß 10000 M. ihr Wert nicht sein kann. Man muß sich aber sogleich sagen, daß diejenige Summe ihr Wert ist, die nach Ablauf von 20 Jahren einschließlich Zins und Zinseszins auf 10000 M. angewachsen sein wird. Nennt man diese Summe einstweilen x, so ist $x \cdot 1{,}04^{20}$ ihr Wert nach 20 Jahren, und also

$$x \cdot 1{,}04^{20} = 10000.$$

Daraus findet man $$x = \frac{10000}{1{,}04^{20}} = \frac{10000}{2{,}1911} = 4564 \text{ M.}$$

Das ist der Wert der Versicherung, und die Versicherungsgesellschaft könnte sich ohne weiteres verpflichten, dem Versicherten nach Ablauf von 20 Jahren die Summe von 10000 M. auszuzahlen, wenn er ihr dafür zu Beginn der Versicherung 4564 M. gibt. Denn die Gesellschaft wird die 4564 M. zinstragend anlegen, und — wenn sie mindestens 4% Zins erhält, — nach 20 Jahren auch mindestens 10000 M. zur Verfügung haben.

Allgemein wird man so rechnen: die Versicherungssumme betrage 1 und die Dauer der Versicherung n Jahre; den Wert der Versicherung bezeichnet man mit $A_{\overline{n}|}$. Dieser Wert muß in n Jahren den Betrag 1 erreichen:

$$A_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n = 1 \quad \text{oder} \quad A_{\overline{n}|} = \frac{1}{(1+i)^n}.$$

$\frac{1}{1+i}$ schreibt man kürzer v und hat

$$A_{\overline{n}|} = v^n \tag{1}$$

als *Wert der Versicherung mit bestimmter Verfallzeit* für die Versicherungssumme 1. Für die Summe S ist der Wert dann $S \cdot A_{\overline{n}|}$.

v ist der heutige Wert — dafür sagt man auch *Barwert* — des nach einem Jahre fälligen Kapitals 1, denn $v(1+i) = 1$, da $v = \frac{1}{1+i}$. Man nennt v auch den *Abzinsungs-* oder *Diskontierungsfaktor*. Der Barwert des nach n Jahren fälligen Kapitals 1 ist v^n, denn es ist $v^n(1+i)^n = 1$, d. h. das Kapital v^n wächst in n Jahren auf die Summe 1 an. Die Tafel „Zinsfaktoren" enthält auch die v^n für 3%, 3½% und 4%

von $n = 1$ bis $n = 40$. Man findet daraus für 4% und $n =$ 20 den Wert 0,4564 als Barwert des nach 20 Jahren fälligen Kapitals 1; dann ist 4564 M. der Barwert des nach 20 Jahren fälligen Kapitals von 10000 M., also nichts anderes als der Wert der Versicherung mit bestimmter Verfallzeit von 20jähriger Dauer bei 4% und 10000 M. Versicherungssumme.

3. STERBLICHKEIT

Nachdem wir den Wert der Versicherung mit bestimmter Verfallzeit allein durch die Zinsrechnung ermittelt haben, gehen wir über zur Todesfallversicherung. Die Versicherungssumme wird fällig beim Tode des Versicherten. Da niemand von vornherein weiß, wann der Tod des Versicherten eintreten wird, so läßt sich der Wert der Versicherung nicht ohne weiteres bestimmen. Das ist nur dann möglich, wenn sich Gesetze über das Leben und Sterben der Menschen aufstellen lassen.

Langjährige und vielseitige Beobachtungen der statistischen Landesämter und auch der Lebensversicherungsgesellschaften führten zur Aufstellung sog. *Sterblichkeitstafeln*, deren eine im Auszuge im Anhang dieses Bändchens zu finden ist. Es ist die Sterbetafel *MuWI der 23 deutschen Gesellschaften*. Wie schon der Name sagt, ist sie abgeleitet aus den Erfahrungen von 23 deutschen Lebensversicherungsgesellschaften. Sie bezieht sich auf Personen beiderlei Geschlechts (männlich und weiblich); die Bezeichnung *I* besagt, daß die Personen ärztlich untersucht und für gesund befunden waren.

Die erste Spalte der Tafel ist mit dem Buchstaben x überschrieben. x bedeutet das Alter in Jahren, und mit (x) bezeichnet man gewöhnlich eine x-jährige Person. (25) heißt also: eine Person im Alter von 25 Jahren. Dabei sei erwähnt, daß man eine Person dann als x-jährig auffaßt, wenn sie zwischen $x - {}^1/_2$ und $x + {}^1/_2$ Jahren alt ist. Eine Person gilt also als 25-jährig während des halben Jahres bis zu ihrem 25. Geburtstage und während des darauffolgenden halben Jahres.

Die Tafel beginnt mit dem Alter 20 und endet mit dem Alter 90. Die 2. Spalte enthält die *Zahlen der Lebenden* der einzelnen Altersstufen; l_x ist das Zeichen für die Anzahl der Lebenden des Alters x. In der Tafel ist die Anzahl der Lebenden des Alters 20 willkürlich gleich 100000 gesetzt. Die Beobachtungen ergaben, daß von 100000 der (20) nur 99081 das Alter 21 erreichen; also findet man in der Tafel $l_{21} = 99081$. Demnach müssen von den (20) vor Erreichung des Alters 21

$$100000 - 99981 = 919$$

gestorben sein. Diese 919 bilden die Anzahl der Toten des Alters 20, bezeichnet mit d_{20}. Man findet die d_x in Spalte 3 der Tafel.

In diesem Sinne ist die Tafel weiter zu verfolgen. Von den $l_{21} = 99081$ der (21) sterben $d_{21} = 908$ vor dem Alter 22, so daß $l_{22} = 98173$ des Alters 22 bleiben usw. Allgemein hat man

$$l_x - d_x = l_{x+1}.$$

Die Tafel ist fortgesetzt bis zum Alter 90 und dann abgebrochen, indem einfach $l_{90} = d_{90}$, d. h. die Zahl der Toten des Alters 90 gleich der Zahl der Lebenden desselben Alters, gesetzt wurde. Damit wird $l_{91} = 0$. Natürlich entspricht das nicht den tatsächlichen Verhältnissen, denn wenn von 100000 Personen des Alters 20 nach 70 Jahren noch rund 1000 leben, so werden auch wohl einige 91, 92 oder mehr Jahre alt werden. Doch hat die Fortsetzung der Tafel über das Alter 90 hinaus für die gebräuchlichen versicherungstechnischen Rechnungen wenig Bedeutung mehr.

Das Endalter einer Sterbetafel bezeichnet man mit ω; hier ist also $\omega = 90$ und $l_\omega = d_\omega = 1071$.

Den Verlauf des Absterbens zeigt Fig. 1. Die Kurve der l_x beginnt mit $l_{20} = 100000$ und geht im Bogen gleichmäßig herab bis $l_{90} = 1071$. Die gleiche Figur zeigt auch die Kurve der Toten, aber in größerem Maßstabe. Die Kurve sinkt anfangs, steigt dann langsam und immer schneller, bis sie um das Alter 70 herum ihren Höhepunkt erreicht und dann steil abfällt. Daraus könnte man den voreiligen Schluß ziehen, daß die Sterblichkeit der Menschen im Alter 70 am größten wäre und später wieder abnähme. Das ist natürlich nicht der Fall.

Die Zahlen der Toten d_x, die jene Kurve bilden, sind kein Maß für die Sterblichkeit, sofern man sie absolut nimmt. Man muß bedenken, daß die Höchstzahl der Toten, nämlich $d_{71} = 2455$, hervorgeht aus $l_{71} = 31249$, während $d_{72} = 2436$, an sich zwar kleiner, aus nur $l_{72} = 28794$ zu nehmen ist. Auf 1000 Lebende des Alters 71 kommen daher 78,6 Tote, auf 1000 Lebende des Alters 72 aber kommen 84,6 Tote. Die Sterblichkeit hat also zugenommen.

Als Maß für die Sterblichkeit benutzen wir eine andere Verhältniszahl, die *Sterbenswahrscheinlichkeit.* Wir setzen

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

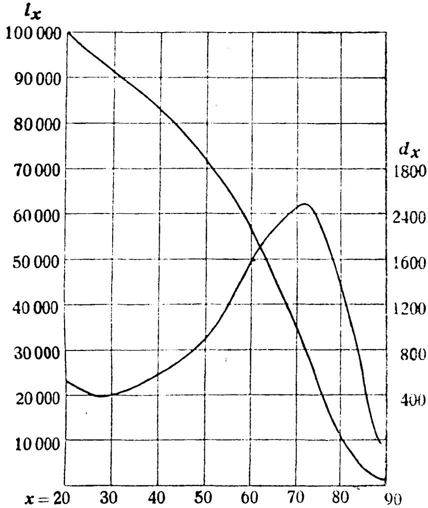


Fig. 1. Absterbeordnung.

und nennen q_x die Sterbenswahrscheinlichkeit[1]) des (x).

Nach der Sterbetafel sterben von 100000 Personen des Alters 20 erfahrungsgemäß 919 vor Erreichung des Alters 21. Ob der einzelne 20-jährige nun zu den 919 gehören wird, das weiß man im voraus nicht; man kann aber mit 919 : 100,000 darauf rechnen, daß es der Fall sein wird, und man sagt 919 : 100000 = 0,00919 sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der (20) vor Erreichung des Alters 21 sterbe. Diese Wahrscheinlichkeit bezeichnet man mit q_{20} und nennt sie die Sterbenswahrscheinlichkeit des (20). Da nun $d_{20} = 919$ und $l_{20} = 100000$ ist, so hat man in der Tat

$$q_{20} = \frac{d_{20}}{l_{20}},$$

und allgemein $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ als Wahrscheinlichkeit dafür, daß der (x) sterbe vor Erreichung des Alters $(x + 1)$.

Fragt man im Gegensatz zu dem Bisherigen nach der Wahrscheinlichkeit, daß der (20) das Alter 21 *erlebe,* so

1) Vgl. O. Meißner, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 4. u. 33. Bd. dieser Sammlung.

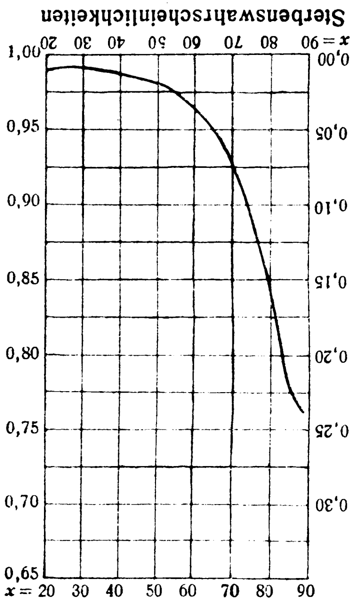


Fig. 2. Erlebenswahrscheinlichkeiten.

kommt man zu dem Werte 0,99081, denn von 100000 Personen des Alters 20 erreichen 99081 das Alter 21. Die *Erlebenswahrscheinlichkeit* des (x) bezeichnet man mit p_x und hat

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x},$$

da von l_x Personen des Alters x erfahrungsgemäß l_{x+1} das Alter $(x+1)$ erreichen. Man findet $p_{71} = \frac{l_{72}}{l_{71}} = \frac{28794}{31249} = 0{,}9214$, und $p_{72} = \frac{l_{73}}{l_{72}} = \frac{26358}{28794} = 0{,}9154$. Die Erlebenswahrscheinlichkeit nimmt also *in diesem Alter ab*. Fig. 2 zeigt den Verlauf der Erlebenswahrscheinlichkeit von p_{20} bis p_{89}. Man sieht, die Erlebenswahrscheinlichkeit nimmt zunächst fast unmerklich zu; sie erreicht im Alter 27 ihren Höhepunkt (wovon man sich durch die Rechnung überzeugen möge), nimmt dann allmählich immer schneller ab, um schließlich in einem etwas flacheren Bogen auszulaufen.

Stellt man die Figur auf den Kopf, so hat man — von rechts nach links gerechnet, — den Verlauf der Sterbenswahrscheinlichkeiten. Das geht daraus hervor, daß $p_x + q_x = 1$ ist für alle Alter. Denn es ist $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$, $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ und $d_x + l_{x+1} = l_x$. Die berechneten Beispiele zeigen: $p_{20} = 0{,}99081$, $q_{20} = 0{,}00919$, also $p_{20} + q_{20} = 1$; $p_{71} = 0{,}9214$, $q_{71} = 0{,}0786$, $p_{71} + q_{71} = 1$ usw.

Aus dem Verlauf der Kurve der Sterbenswahrscheinlichkeiten erkennt man, daß die Sterblichkeit bis zum Alter 27 schwach abnimmt, dann aber immer stärker wächst.

Nun wird man ohne Schwierigkeit zur Erweiterung der Erlebens- und Sterbenswahrscheinlichkeiten schreiten können. Man fragt sich etwa: Wie groß ist für den (20) die Wahrscheinlichkeit, das Alter 40 zu erreichen? Die Tafel sagt, daß von 100000 Personen des Alters 20 erfahrungsgemäß $l_{40} = 82878$ das Alter 40 erreichen, und daraus berechnet man die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit 82878 : 100000 = 0,82878. Allgemein sei gefragt nach der Wahrscheinlichkeit, daß der (x) das Alter $x + n$ erreiche. Man bezeichnet diese Erlebenswahrscheinlichkeit mit ${}_np_x$ und hat

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x},$$

denn von l_x Personen des Alters x erreichen nur l_{x+n} das Alter $x + n$. Ebenso ist

$${}_nq_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der (x) nach Ablauf von n Jahren im Laufe des nächstfolgenden Jahres sterben wird, denn von den l_x Personen des Alters x sterben erfahrungsgemäß d_{x+n} im Alter $x + n$.

4. DIE TODESFALLVERSICHERUNG

Nach diesen Vorbereitungen können wir dazu übergehen, den Wert der Todesfallversicherung zu bestimmen. Wir bleiben zunächst bei der Versicherungssumme von 10000 M. und nehmen an, der Versicherte sei beim Abschluß der Versicherung bereits 60 Jahre alt. Wenn er stirbt, ehe er das Alter 61 erreicht, so hat die Versicherungsgesellschaft schon im ersten Jahre der Versicherung 10000 M. zu zahlen; damit wäre dann die Versicherung erledigt. Die Wahrscheinlichkeit für diesen frühen Tod des Versicherten ist $q_{60} = \frac{d_{60}}{l_{60}} = \frac{1976}{55892} = 0{,}0354$. Die Gesellschaft wird daher für diesen Fall nicht die ganze Summe, sondern nur einen Teil in Rechnung stellen, nämlich $10000 \cdot 0{,}0354 = 354$ M. Diesen Teil der Summe nennt man ihren *erwartungsmäßigen Wert.* Wenn allgemein eine Summe S mit der Wahrscheinlichkeit p zu zahlen sein wird, so ist $p \cdot S$ der erwartungsmäßige Wert.

Aber auch der Betrag 354 M. ist noch zu hoch, denn die Summe wird nicht gleich am ersten Tage der Versicherung, sondern erst im Laufe des Jahres anfallen. Man nimmt sogar zugunsten des Versicherten an, daß sie erst am Ende des Jahres fällig wird und berechnet deshalb nicht den vollen

Wert 354 M., sondern den um 1 Jahr diskontierten $354 \cdot v$. Bei $3^1/_2\%$ ist das $354 \cdot 0{,}9662 = 342$ M.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Versicherte im 2. Jahre sterbe, ist ${}_1q_{60} = \frac{d_{61}}{l_{60}} = \frac{2038}{55892} = 0{,}0365$; in Rechnung zu stellen ist der Wert $10000 \cdot 0{,}0365 = 365$ M., der aber erst nach 2 Jahren fällig wird. Es kommt also

$$365 \cdot v^2 = 365 \cdot 0{,}9335 = 340{,}70 \text{ M.}$$

So müßte man fortfahren bis zum Ende der Sterbetafel und hätte damit ein zwar richtiges aber doch außerordentlich zeitraubendes Rechnungsverfahren. Man hätte dann 31 Barwerte, deren Summe der Barwert der Todesfallversicherung des (60) wäre. Für jedes andere Alter müßte das Verfahren wiederholt werden — das gäbe z. B. für das Alter 20 allein 71 Barwertberechnungen!

Die Praxis schlägt einen bequemeren Weg ein. Es sei der Wert der Todesfallversicherung des (x) zu berechnen; die Versicherungssumme sei 1. Mit der Wahrscheinlichkeit q_x ist zu erwarten, daß der Versicherte im ersten Jahre sterbe, $1 \cdot q_x = q_x$ ist also der erwartungsmäßige Wert. Nimmt man wiederum an, die Zahlung falle auf das Ende des Jahres, so ist $q_x \cdot v$ der Barwert. Die Wahrscheinlichkeit für den Tod nach Ablauf *eines* Jahres, und zwar im 2. Jahre, ist ${}_1q_x$; daraus geht hervor der Barwert ${}_1q_x \cdot v^2$. Für das 3. Jahr erhält man ${}_2q_x \cdot v^3$ usw. bis ans Ende der Sterbetafel. Die Summe sämtlicher Barwerte gibt den Wert der Versicherung, den man mit A_x bezeichnet. Man hat also

$$A_x = q_x \cdot v + {}_1q_x \cdot v^2 + {}_2q_x \cdot v^3 + \cdots$$

Nach dem vorigen Abschnitt ist $q_x = \frac{d_x}{l_x}$, ${}_1q_x = \frac{d_{x+1}}{l_x}$ usw.

Daraus folgt $$A_x = \frac{d_x \cdot v}{l_x} + \frac{d_{x+1} \cdot v^2}{l_x} + \frac{d_{x+2} \cdot v^3}{l_x} + \cdots$$

oder $$A_x = \frac{d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + d_{x+2} \cdot v^3 + \cdots}{l_x}.$$

Nun multipliziere man Zähler und Nenner der rechten Seite mit v^x:

$$A_x = \frac{d_x \cdot v^{x+1} + d_{x+1} \cdot v^{x+2} + d_{x+2} \cdot v^{x+3} + \cdots}{l_x \cdot v^x}$$

Das Produkt $l_x \cdot v^x$ nennt man *„diskontierte Zahl der Lebenden“* und gibt ihm das Zeichen D_x. Diese D_x sind für alle Alter x der Sterbetafel im voraus gerechnet; die Tafel im Anhang enthält die D_x für $3\frac{1}{2}\%$ in der 4. Spalte. Da ist z. B. $D_{20} = 50257$. Man findet durch Rechnung:

$$D_{20} = l_{20} \cdot v^{20} = 100000 \cdot 0{,}5026 = 50260,$$

wo der Fehler in der letzten Stelle auf die Abkürzung der Diskontierungsfaktoren zurückzuführen ist.

Die Produkte $d_x \cdot v^{x+1}$, $d_{x+1} \cdot v^{x+2} \ldots\ldots$ bezeichnet man mit C_x, $C_{x+1} \ldots\ldots$ und nennt sie *„diskontierte Zahlen der Toten“* (Spalte 6 der Tafel). So ist z. B. $C_{20} = d_{20} \cdot v^{21} = 919 \cdot 0{,}4856 = 446$.

Mit Hilfe dieser Abkürzungen erhält man

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots\cdot}{D_x}$$

und braucht nun, um A_x zu finden, nichts weiter zu tun, als die C_x der Reihe nach von x bis zum Ende der Tafel zu addieren und die Summe durch D_x zu teilen. Aber auch diese Arbeit ist zum größten Teil schon erledigt, denn die Summen der C_x stehen bereits in der Tafel. Sie sind mit M_x bezeichnet (Spalte 8), so daß

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots\cdot + C_\omega .$$

Für $x = 90$ ist danach $M_{90} = C_{90} = 47$.

Für $x = 89$ ist $M_{89} = C_{89} + C_{90} = 16 + 47 = 63$,

genauer 62, wie man findet, wenn die C_x mit 1 oder 2 Stellen nach dem Komma gegeben sind. Damit hat man als endgültige Formel für den *Wert der Todesfallversicherung*

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} . \tag{2}$$

Zu diesem Werte kann man auch ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung kommen. Man geht davon aus, daß die Versicherung nicht von *einer* Person, sondern von sämtlichen l_x Personen des Alters x abgeschlossen wird. Der Gesamtwert dieser Versicherungen ist dann $l_x \cdot A_x$. Von den l_x Versicherten sterben im 1. Jahre d_x, so daß am Ende des 1. Jahres die Summe d_x zu zahlen ist, da ja die Versicherungssumme gleich 1 sein soll. Diese Summe hat den Barwert $d_x \cdot v$. Im 2. Jahre sterben d_{x+1} Personen, der Barwert wird $d_{x+1} \cdot v^2$, und so hat man an Barwerten

$$d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + d_{x+2} \cdot v^3 + \cdots$$

bis zum Ende der Tafel. Die Summe dieser Barwerte stellt die Gesamtleistung der Versicherungsgesellschaft dar für die l_x Versicherungen. Auf *eine* Versicherung kommt also der Wert

$$\frac{d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + d_{x+2} \cdot v^3 + \cdots}{l_x}$$

wie oben.

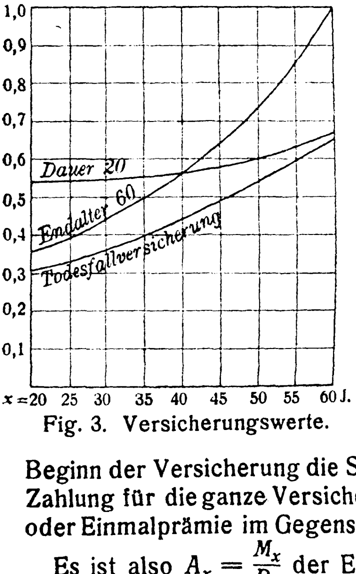


Fig. 3. Versicherungswerte.

A_x ist der Wert der Todesfallversicherung des (x), d. h. der Wert der Leistung der Versicherungsgesellschaft berechnet auf den Beginn der Versicherung. Die Gegenleistung des Versicherten muß also auch den Wert A_x haben, und daher kann ihm die Gesellschaft die Todesfallversicherung gewähren, wenn er zu Beginn der Versicherung die Summe A_x zahlt. Diese einmalige Zahlung für die ganze Versicherung nennt man *Einmalbeitrag* oder Einmalprämie im Gegensatz zu den jährlichen Beiträgen.

Es ist also $A_x = \frac{M_x}{D_x}$ der Einmalbeitrag für die Todesfallversicherung des (x) mit der Versicherungssumme 1. Für die Versicherungssumme S hat man $S \cdot A_x$ als Einmalbeitrag.

x	A_x
20	0,306
25	0,331
30	0,363
35	0,401
40	0,443
45	0,491
50	0,543
55	0,598
60	0,653

Tafel 1.

Für den (20) ist $A_{20} = \frac{M_{20}}{D_{20}} = \frac{15386}{50257} = 0{,}306$ oder 306 M. für die Versicherungssumme 1000 M.

Nebenstehende Tafel 1 gibt die Einmalbeiträge der Todesfallversicherungen für die „runden“ Alter von 20 bis 60. Die Beiträge nehmen mit steigendem Alter schnell zu; das liegt daran, daß die Sterblichkeit mit dem Alter zunimmt und daß der Zins um so weniger zur Geltung kommt, je kürzer die Zeit bis zur Fälligkeit im Erlebensfalle wird (Fig. 3).

5. DIE GEMISCHTE VERSICHERUNG

Es handle sich um die gemischte Versicherung des (x), die Versicherungsdauer betrage n Jahre. Die Technik bezeichnet den Wert einer solchen Versicherung mit $A_{x\overline{n}|}$. Zweierlei ist bei der Bestimmung dieses Wertes zu beachten: *erstens* ist die Versicherungssumme zu zahlen, wenn der Versicherte vor Ablauf der n Jahre *stirbt, zweitens* ist sie nach Ablauf der n Jahre zu zahlen, wenn der Versicherte dann noch *lebt*.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Versicherte im 1. Jahre sterbe, ist q_x, in die Rechnung einzusetzen als Barwert $q_x \cdot v$; für das 2. Jahr kommt ${}_1q_x \cdot v^2$, für das 3. Jahr ${}_2q_x \cdot v^3$ usw., und für das letzte, das $n$te ${}_{n-1}q_x \cdot v^n$, denn ${}_{n-1}q_x$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Versicherte das letzte Versicherungsjahr noch erlebt, aber nicht mehr den Ablauf dieses Jahres. Somit ist für den *Todesfall* anzusetzen:

$$q_x \cdot v + {}_1q_x \cdot v^2 + {}_2q_x \cdot v^3 + \cdots + {}_{n-1}q_x \cdot v^n \quad \text{oder}$$

$$\frac{d_x \cdot v}{l_x} + \frac{d_{x+1} \cdot v^2}{l_x} + \frac{d_{x+2} \cdot v^3}{l_x} + \cdots + \frac{d_{x+n-1} \cdot v^n}{l_x}.$$

Man multipliziere Zähler und Nenner wieder mit v^x:

$$\frac{d_x \cdot v^{x+1} + d_{x+1} \cdot v^{x+2} + d_{x+2} \cdot v^{x+3} + \cdots + d_{x+n-1} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x}.$$

Der Nenner ist wiederum gleich D_x. Für den Zähler schreiben wir wie im vorigen Abschnitt:

$$C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots C_{x+n-1},$$

nur gilt die Summe nicht bis ans Ende der Sterbetafel. Nun ist aber

$$C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1} + C_{x+n} + C_{x+n+1} + \cdots + C_\omega = M_x$$

und $$C_{x+n} + C_{x+n+1} + \cdots + C_\omega = M_{x+n},$$

und zieht man beide Reihen voneinander ab, so hat man

$$C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1} = M_x - M_{x+n}.$$

Daher wird also der Anteil des Todesfalles am Werte der Versicherung gleich $\dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$.

Nun der *Erlebensfall*. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der

Gemischte Versicherung Endalter: 60 Jahre	
x	$A_{x\overline{n}\rceil}$
20	0,355
25	0,392
30	0,439
35	0,495
40	0,561
45	0,639
50	0,734
55	0,850
60	1,000

Tafel 3.

fordert stets den niedrigsten Beitrag, wie das auch nicht anders zu erwarten ist, denn sie gewährt die Versicherungssumme nur beim Tode des Versicherten; die gemischte Versicherung aber leistet mehr durch die Zahlung im Erlebensfalle. Bei gleicher Dauer (vgl. Kurve: Dauer 20) steigt ihr Wert aber mit wachsendem Alter nur langsam an und nähert sich allmählich dem der Todesfallversicherung. Für das Eintrittsalter 60 sind sich beide schon merklich nahegekommen. Das ist auch verständlich. Die Todesfallversicherung endigt nach unserer Tafel mit dem Alter 90, die gemischte Versicherung zuerst mit dem Alter 40 (Eintrittsalter 20, Dauer 20), dann 45 usw. bis zum Endalter 80 beim Eintrittsalter 60; beim Eintrittsalter 70 müßten beide Werte zusammenfallen. Man sieht aber schon an der graphischen Darstellung, wie wenig die Jahre nach dem Alter 80 den Versicherungswert beeinflussen, und wird daher auch den Abbruch der Sterbetafel mit dem Alter 90 für berechtigt halten.

Verlauf einer Versicherung: Wenn sich die Kapitalanlagen der Versicherungsgesellschaft genau so hoch verzinsen, wie es dem rechnungsmäßigen Zinsfuß (in unseren Beispielen $3^1/_2\,^0/_0$) entspricht, wenn ferner die Sterbefälle genau nach den Voraussetzungen der Sterbetafel eintreffen, so müssen sich die Einnahmen an Beiträgen und Zinsen gegenüber den Ausgaben für Sterbefälle und Abläufe (Auszahlungen für den Erlebensfall) vollständig ausgleichen. Nimmt man an, es haben sämtliche 50-jährige der Tafel, $l_{50} = 71831$, je eine gemischte Versicherung von 10-jähriger Dauer mit der Versicherungssumme 1 abgeschlossen, so erhält die Gesellschaft mit dem Beginn der Versicherungssummen 71831 mal den Einmalbeitrag von je 0,734 (vgl. die Tafel 3 der Beiträge für die gemischte Versicherung mit dem Endalter 60). Die Gesamteinnahme zu Beginn des 1. Jahres beträgt also $71831 \cdot 0{,}734 = 52724$ M. Diese Summe zu $3^1/_2\,^0/_0$ verzinst, bringt im 1. Jahre an Zinsen 1845 M; am Ende des Jahres ist die Summe

Versicherte am Ende des $n$ten Jahres noch lebe, ist ${}_np_x$; daher ist ${}_np_x \cdot v^n$ der Barwert der Auszahlung auf den Erlebensfall. Es ist also ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$, der Barwert also gleich $\frac{l_{x+n} \cdot v^n}{l_x}$ oder $\frac{l_{x+n} \cdot v^{n+x}}{l_x \cdot v^x}$, woraus, da $l_x \cdot v^x = D_x$ und $l_{x+n} \cdot v^{x+n} = D_{x+n}$ ist, folgt

$$\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

als Anteil des Erlebensfalls am Werte der Versicherung. Man erhält daher

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \tag{3}$$

als Wert oder Einmalbeitrag der gemischten Versicherung des (x) bei n-jähriger Versicherungsdauer und der Versicherungssumme 1.

Für den (20) bei 20-jähriger Versicherungsdauer hat man

$$A_{20,\,\overline{20}|} = \frac{M_{20} - M_{40} + D_{40}}{D_{20}} = \frac{15386 - 9283 + 20933}{50257} = 0{,}538$$

oder 538 M. für die Versicherungssumme 1000 M.

Die beiden nebenstehenden Tafeln enthalten:

1. Die Einmalbeiträge für die Dauer 20 Jahre, fortschreitend von 5 zu 5 Jahren vom Eintrittsalter 20 bis zum Eintrittsalter 60 (Tafel 2).

2. Die Einmalbeiträge für das Endalter 60 Jahre, in gleicher Weise geordnet (Tafel 3).

Da beim Eintrittsalter 40 und Endalter 60 die Dauer 20 Jahre beträgt, so müssen für dieses Alter die Werte beider Tafeln übereinstimmen. Bei gleichem Eintritts- und Endalter (Tafel III, 60) ist die Dauer 0, der Beitrag natürlich gleich der Versicherungssumme. Dieser Wert ist nur der Vollständigkeit halber angegeben.

Man vergleiche nunmehr den Verlauf der Versicherungswerte an Fig. 3. Die Todesfallversicherung er-

Gemischte Versicherung Dauer: 20 Jahre

x	$A_{x\overline{20}|}$
20	0,538
25	0,539
30	0,543
35	0,550
40	0,561
45	0,576
50	0,599
55	0,630
60	0,668

Tafel 2.

Versicherungsjahr	Kapital	Einnahme an Zinsen	Ausgabe für Sterbefälle	Kapitalzuwachs
1	52724	1845	1303	542
2	53266	1864	1362	502
3	53768	1882	1425	457
4	54225	1898	1490	408
5	54633	1912	1556	356
6	54989	1925	1621	304
7	55293	1935	1691	244
8	55537	1944	1759	185
9	55722	1950	1832	118
10	55840	1954	1900	54

Tafel 4.

1303 M. zu zahlen für 1303 Sterbefälle (vgl. Sterbetafel). Somit vermehrt sich das Vermögen von 52744 M. um 1825 — 1303 = 542 M. auf 53266 M. Das ist der Vermögensbestand zu Beginn des 2. Jahres; daraus fließen an Zinsen 1864 M., sind für Sterbefälle zu zahlen 1362M., bleibt ein Zuwachs von 502M. usw. Tafel 4 zeigt den Verlauf. Das 10. (letzte) Jahr beginnt mit 55840M. Kapital und bringt einen Zuwachs von 54M., so daß am Ende des Jahres 55894 M. vorhanden sind. Gemäß der Sterbetafel leben dann noch 55892 Personen des Alters 60, die nun die Versicherungssummen mit 55892M. erhalten. Der Ausgleich ist also vollständig, denn der Überschuß im Betrage 2 ist lediglich zurückzuführen auf die abgekürzten Zahlen der Rechnung.

In Wirklichkeit ist der Verlauf natürlich anders. Die Gesellschaft erzielt mehr Zinsen, sie hat auch im allgemeinen weniger Sterbefälle, als die Tafel anzeigt. Den so erzielten Gewinn könnte sie verwenden zur Deckung ihrer *Unkosten*. Doch benutzt man dafür meist noch besondere Zuschläge. Die Unkosten setzen sich zusammen aus den Abschlußkosten und den laufenden Verwaltungskosten; Abschlußkosten hat die Gesellschaft für den Werbedienst, die ärztlichen Untersuchungen und die Vergütung, die die Vertreter (Agenten) für das Zustandebringen der Versicherungen erhalten. Die Abschlußkosten rechnet man im Verhältnis zur Versicherungssumme; ihre Höhe muß aus den geschäftlichen Erfahrungen bestimmt werden. Mit α bezeichnet man die Höhe der Abschlußkosten auf die Versicherungssumme 1; um α ist also der Einmalbeitrag für die Versicherung zu vermehren

$$A' = A + \alpha,$$

wenn man mit A den reinen Einmalbeitrag und mit A' den erhöhten bezeichnet.

Die laufenden Verwaltungskosten gehen hervor aus den Gehältern der Beamtenschaft, den Kosten für die Einkassierung der Beiträge u. a. m. Man rechnet sie im Verhältnis zum Versicherungsbeitrag und bezeichnet sie mit β, so daß also $\beta \cdot A'$ der Anteil der laufenden Unkosten am Beitrage ist. Somit hat man insgesamt $A' = A + \alpha + \beta \cdot A'$, woraus ohne weiteres folgt:

$$A' = \frac{A + \alpha}{1 - \beta}.$$

Es sei $\alpha = 0{,}05$, d. h. die Abschlußkosten werden mit 5% der Versicherungssumme angesetzt; ferner $\beta = 0{,}10$ d. h. 10% des Beitrags an laufenden Kosten, so wird

$$A' = \frac{A + 0{,}05}{0{,}9}$$

der wirkliche Beitrag (Bruttoprämie) im Gegensatz zum „mathematischen" Beitrag (Nettoprämie). In der Aufstellung der Beiträge für die Todesfallversicherung (Tafel 1) findet man $A = 0{,}306$ für das Eintrittsalter 20. Der wirkliche Beitrag wird also

$$A' = \frac{0{,}306 + 0{,}05}{0{,}9} = \frac{0{,}356}{0{,}9} = 0{,}396$$

oder 396 M. für die Versicherungssumme 1000 M. *Zu diesen Beiträgen bieten die Versicherungsgesellschaften ihren Ver-*

Eintritts-alter	Todesfall-Versicherung	Gemischte Versicherung Dauer 20	Gemischte Versicherung Endalter 60
20	396	653	450
25	423	654	491
30	459	659	543
35	501	667	606
40	548	679	679
45	601	696	766
50	659	721	871
55	720	756	1000
60	781	798	—

Tafel 5.

sicherungsschutz. Tafel 5 gibt die Beiträge an für 1000 M. Versicherungssumme bei der Todesfallversicherung und der gemischten Versicherung. Sie sind aus den 3 schon gegebenen Beitragstafeln hervorgegangen.

6. JÄHRLICHE BEITRÄGE

Der Versicherte zahlt zu Beginn jedes Jahres den gleichen Versicherungsbeitrag, der mit P_x bezeichnet sei.

Die *Todesfallversicherung* verlangt die jährlichen Beiträge bis zum Tode des Versicherten. Der letzte Beitrag wird also gezahlt zu Beginn des Versicherungsjahres, in dem der Versicherte stirbt.

Sicher ist der Versicherungsgesellschaft nur der 1. Jahresbeitrag, sie erhält also unter allen Umständen den Betrag P_x vom Versicherten. Der 2. Beitrag wird zu Beginn des 2. Jahres zahlbar, ist also um 1 Jahr zu diskontieren: $P_x \cdot v$; die Wahrscheinlichkeit, daß der Versicherte den Beginn des 2. Jahres erlebt, ist ${}_1p_x$. Da er nur in diesem Falle den Beitrag zahlt, so hat man den 2. Beitrag mit ${}_1p_x \cdot P_x \cdot v$ anzusetzen. Für den 3. Beitrag kommt ${}_2p_x \cdot P_x \cdot v^2$ usw. bis zum Endalter der Sterbetafel. Als Leistung des Versicherten hat man daher

$$P_x + {}_1p_x\, P_x \cdot v + {}_2p_x \cdot P_x \cdot v^2 + \cdots$$

bis zum Ende der Sterbetafel;

oder $$P_x\,(1 + {}_1p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \cdots).$$

Nun ist ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$, also wird die Leistung der Versicherten

$$P_x\left(1 + \frac{l_{x+1} \cdot v}{l_x} + \frac{l_{x+2} \cdot v^2}{l_x} + \cdots\right)$$

oder $$P_x\,\frac{l_x + l_{x+1} \cdot v + l_{x+2} \cdot v^2 + \cdots}{l_x}.$$

Zähler und Nenner multipliziere man mit v^x:

$$P_x \cdot \frac{l_x \cdot v^x + l_{x+1} \cdot v^{x+1} + l_{x+2} \cdot v^{x+2} + \cdots}{l_x \cdot v^x}$$

oder $$P_x \cdot \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots}{D_x}.$$

Die Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden (D_x) ist bis ans Ende der Sterbetafel fortzusetzen. Diese Summen sind für jedes x bereits gerechnet und als N_x

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots$$

in der Sterbetafel (Spalte 5) enthalten. So hat man als Wert der Leistung des Versicherten einfach $P_x \cdot \frac{N_x}{D_x}$. Die Gegenleistung der Versicherungsgesellschaft war als A_x bereits bestimmt.

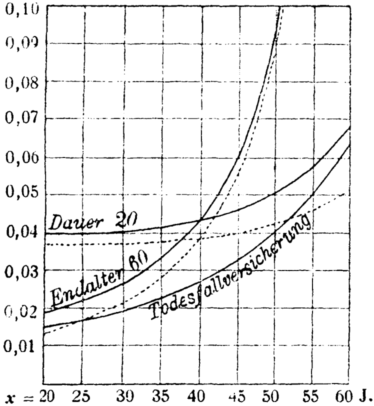


Fig. 4. Jährliche Beiträge

Beide sind einander gleichzusetzen:

$$P_x \cdot \frac{N_x}{D_x} = A_x$$

und daraus

$$P_x = \frac{A_x \cdot D_x}{N_x}.$$

Nun war nach Formel (2) $A_x = \frac{M_x}{D_x}$; setzt man diesen Wert für A_x ein, so erhält man mit

$$P_x = \frac{M_x}{N_x} \tag{4}$$

den jährlichen Beitrag für die Todesfallversicherung des (x) mit der Versicherungssumme 1.

Für das Eintrittsalter 20 ist

$$P_{20} = \frac{M_{20}}{N_{20}} = \frac{15386}{103115} = 0{,}0149$$

der jährliche Beitrag für die Summe 1; für die Summe 10000 M. hat man dann 149 M. als jährlichen Beitrag. Tafel 6 gibt die Beiträge für die Alter 20—60 und die Versicherungssumme 10000. Das Ansteigen der Beiträge mit dem Alter veranschaulicht Figur 4.

x	P_x
20	149
25	167
30	193
35	226
40	269
45	326
50	401
55	503
60	637

Tafel 6.

Leibrenten: Jährlich wiederkehrende Zahlungen nennt man Renten; wird die Zahlung abhängig gemacht vom Leben des Empfängers, so spricht man von *Leibrenten*. Die Beitragsleistungen des Versicherten kann man daher auch als Leibrenten auffassen, nur daß die Zahlung nicht vom Leben des Empfängers, sondern von dem des Zahlers abhängt. Der Wert $P_x \cdot \frac{N_x}{D_x}$ ist also nichts anderes als der Wert einer Leibrente vom jährlichen Betrage P_x. Daher ist $\frac{N_x}{D_x}$ der Wert der Leibrente vom Betrage 1; diesen Wert bezeichnet man mit $\mathfrak{a}_x$, und es ist somit

$$\mathfrak{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \tag{5}$$

der Wert der jährlich im voraus zahlbaren Leibrente (vorschüssigen oder pränumerando Leibrente) vom Betrage 1 des (x). Solche Renten können auch für sich versichert werden. Verpflichtet sich die Gesellschaft, dem Versicherten jährlich den Betrag 1 zu zahlen, solange er am Leben ist, so verlangt sie dafür vom Versicherten den Einmalbeitrag $\mathfrak{a}_x$. Für den (60) ist

$$\mathfrak{a}_{60} = \frac{N_{60}}{D_{60}} = \frac{72734}{7094} = 10{,}25$$

für den Rentenbetrag 1. Für die jährliche Rente von 100 M. hat man 1025 M. als Einmalbeitrag.

Für die Beitragsleistung in der Lebensversicherung hat man P_x als jährlichen Rentenbetrag zu setzen. Danach ist $P_x \cdot \mathfrak{a}_x$ der Wert der Leistung des Versicherten, und aus

$$P_x \cdot \mathfrak{a}_x = A_x$$

(6) findet man $$P_x = \frac{A_x}{\mathfrak{a}_x}$$

als jährlicher Beitrag für die Todesfallversicherung. Für den (60) ist der Wert der Todesfallversicherung $A_{60} = 0{,}653$ (vgl. Tafel 1); den Wert der Leibrente fanden wir mit $\mathfrak{a}_{60} = 10{,}25$, und so wird

$$P_{60} = \frac{A_{60}}{\mathfrak{a}_{60}} = \frac{0{,}653}{10{,}25} = 0{,}0637$$

für die Versicherungssumme 1 und 637 M. für die Versicherungssumme 10000 M., wie auch die obige Tafel angibt.

Die gemischte Versicherung verlangt die jährlichen Beiträge bis zum Tode des Versicherten, längstens aber bis zum Ablauf der Versicherungsdauer. Beträgt die Dauer n Jahre, so ist der letzte Beitrag zu Beginn des n^{ten} Jahres zu zahlen, d. i. $n-1$ Jahre nach Abschluß der Versicherung. Der Barwert dieses Beitrages ist demnach $P_{x\overline{n}|} \cdot v^{n-1}$, wenn mit $P_{x\overline{n}|}$ der jährliche Beitrag für die gemischte Versicherung bezeichnet wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Versicherte den Fälligkeitstag des letzten Beitrags erlebt, ist ${}_{n-1}p_x$, denn ${}_np_x$ war ja die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er die ganze Versicherungsdauer durchlebt, deren Ende ein Jahr später ist. Nun hat man gemäß der Aufstellung für die Todesfallversicherung als Wert der Leistung des Versicherten

$$P_{x\overline{n}|}\,(1 + {}_1p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \cdots + {}_{n-1}p_x \cdot v^{n-1})$$

oder $$P_{x\overline{n}|}\left(1 + \frac{l_{x+1} \cdot v}{l_x} + \frac{l_{x+2} \cdot v^2}{l_x} + \cdots + \frac{l_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^{n-1}\right).$$

Daraus $P_{x\overline{n}|} \cdot \dfrac{l_x + l_{x+1} \cdot v + l_{x+2} \cdot v^2 + \cdots + l_{x+n-1} \cdot v^{n-1}}{l_x}$ oder

$$P_{x\overline{n}|} \cdot \frac{l_x \cdot v^x + l_{x+1} \cdot v^{x+1} + l_{x+2} \cdot v^{x+2} + \cdots + l_{x+n-1} \cdot v^{x+n-1}}{l_x \cdot v^x}$$

und endlich $$P_{x\overline{n}|} \cdot \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_x}.$$

Nun ist

$$D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+n-1} + D_{x+n} + D_{x+n+1} + \cdots + D_\omega = N_x$$

und $$D_{x+n} + D_{x+n+1} + \cdots + D_\omega = N_{x+n}.$$

Subtrahiert man beide Summen voneinander, so erhält man

$$D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots D_{x-+n1} = N_x - N_{x+n}.$$

Daraus ergibt sich als Wert der Leistung des Versicherten

$$P_{x\overline{n}|}\,\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

Dieser Wert ist dem Werte der gemischten Versicherung $A_{x\overline{n}|}$ gleichzusetzen:

$$P_{x\overline{n}|}\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = A_{x\overline{n}|} \quad \text{oder} \quad P_{x\overline{n}|} = \frac{A_{x\overline{n}|} \cdot D_x}{N_x - N_{x+n}}.$$

Nach Formel (3) ist $A_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$, und so wird

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{7}$$

der jährliche Beitrag für die gemischte Versicherung von n-jähriger Dauer des (x) mit der Versicherungssumme 1.

x	Dauer 20	Endalter 60
20	394	186
25	395	218
30	402	264
35	414	331
40	432	432
45	460	600
50	505	933
55	575	1915
60	681	∞

Tafel 7.

Für das Eintrittsalter 20 und die Dauer 20 hat man

$$P_{20,\overline{20}|} = \frac{M_{20} - M_{40} + D_{40}}{N_{20} - N_{40}} = \frac{15386 - 9283 + 20933}{1031126 - 344466} = \frac{27036}{686660} = 0{,}0394$$

oder 394 M. für die Summe 10000 M. Für das Eintrittsalter 20 und das Endalter 60, d. i. die Dauer 40, hat man

$$P_{20,\overline{40}|} = \frac{M_{20} - M_{60} + D_{60}}{N_{20} - N_{60}} = \frac{15386 - 4635 + 7094}{1031125 - 72734} = \frac{17845}{958391} = 0{,}0186$$

oder 186 M. für 10000 M. Dieser Beitrag ist natürlich wesentlich niedriger, da er bis zu 40mal zahlbar ist, während der erste nur 20mal fällig wird. Daß er weniger als die Hälfte des ersten beträgt, liegt an dem Einfluß des Zinses.

Für andere Eintrittsalter findet man die Beiträge in der Tafel 7 bei 10000 M. Versicherungssumme sowohl für die Versicherungsdauer von 20 Jahren als auch für das Endalter 60 Jahre; Übereinstimmung zeigt wieder das Eintrittsalter 40. Für dieses Alter schneiden sich auch die beiden Beitragskurven der Fig. 4. Man sieht wiederum, daß sich die Kurve für die Dauer 20 in langsamem Aufstieg der Todesfallkurve nähert; für das Alter 70 müßte sie mit ihr zusammentreffen.

Verlauf der Versicherung: Wie die Einmalbeiträge, so müssen auch die jährlichen Beiträge samt ihren Zinsen während des Verlaufs der Versicherungen restlos aufgehen in den Ausgaben für Sterbefälle und Abläufe, vorausgesetzt, daß der wirkliche Zins dem rechnungsmäßigen entspricht, und daß das Ableben der Versicherten genau nach den Angaben der Sterbetafel verläuft. Das soll wiederum gezeigt werden an der gemischten Versicherung des (50) bei 10-jähriger Dauer mit der Versicherungssumme 1. Der jährliche Beitrag für diese Versicherung beträgt 0,0933 (d. i. für 10000 M. Vers. Summe 933 M. nach obiger Tafel). Nimmt man an, daß alle (50) der Sterbetafel $l_{50} = 71831$ die Versicherung abschließen, so hat man als Beitragseinnahme zu Beginn des 1. Jahres 71831 mal 0,0933 gleich 6702 M., die zu $3\frac{1}{2}\%$ bis zum Ende des Jahres an Zinsen 235 M. bringen, also auf 6937 M. anwachsen. Für $d_{50} = 1303$ Tote im 1. Jahre sind 1303 M. zu zahlen, sodaß $6937 - 1303 = 5634$ M. als Vermögen am Ende des 1. Jahres vorhanden sind. Dazu kommen zu Beginn des 2. Jahres von den $l_{51} = 70528$ noch Lebenden an Beiträgen $70528 \cdot 0,0933 = 6580$ M., zusammen $5634 + 6580 = 12214$ M., die durch die Zinsen um 427 M. anwachsen. An Beiträgen und Zinsen bringt daher das 2. Jahr einen Zuwachs von $6580 + 427 = 7007$ M. Davon gehen 1362 M. ab für $d_{51} = 1362$ Sterbefälle, bleibt also ein Zuwachs von $7007 - 1362 = 5645$ M., das Vermögen steigt auf $5634 + 5645 = 11279$ M. Den ganzen Verlauf während der 10 Jahre zeigt die Tafel 8. Zu Beginn des 10. Jahres ist ein Vermögen von 50446 M. vorhanden, das sich bis zum Ende des Jahres nach Abzug der Sterbefälle um 5446 M. auf 55892 M. vermehrt. Die Sterbetafel zeigt, daß von den 71831 Personen, die die

Versich.-Jahr	Kapital	Einnahme an Beiträgen	Einnahme an Zinsen	Ausgabe für Todesfälle	Kapital-Zuwachs
1		6702	235	1303	5634
2	5634	6580	427	1362	5645
3	11279	6453	621	1425	5649
4	16928	6320	814	1490	5644
5	22572	6181	1006	1556	5631
6	28203	6036	1198	1621	5613
7	33816	5885	1390	1691	5584
8	39400	5727	1579	1759	5547
9	44947	5563	1768	1832	5499
10	50446	5392	1954	1900	5446

Tafel 8.

Versicherung abschlossen, dann gerade noch $l_{60} = 55892$ am Leben sind. Sie erhalten jeder die Versicherungssumme 1, das ist genau das am Ende der Versicherungen vorhandene Vermögen.

Die Versicherung mit bestimmter Verfallzeit: Wie bei der gemischten Versicherung sind auch hier die Beiträge zahlbar bis zum Tode des Versicherten, längstens aber bis zum Ablauf der Versicherungsdauer von n Jahren. Bezeichnet man den jährlichen Beitrag mit $P_x\,(A_{\overline{n}|})$, so hat die Leistung des Versicherten also den Wert

$$P_x\,(A_{\overline{n}|})\cdot\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

Die Leistung der Versicherungsgesellschaft hat den Wert $A_{\overline{n}|} = v^n$, und man findet den jährlichen Beitrag aus der Gleichung

$$P_x\,(A_{\overline{n}|})\cdot\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = A_{\overline{n}|}$$

(8) mit $$P_x\,(A_{\overline{n}|}) = \frac{A_{\overline{n}|}\cdot D_x}{N_x - N_{x+n}} = \frac{v^n\cdot D_x}{N_x - N_{x+n}}.$$

Für das Eintrittsalter 20 und die Dauer 20 ist der jährliche Beitrag

$$P_{20}\,(A_{\overline{20}|}) = \frac{v^{20}\cdot D_{20}}{N_{20} - N_{40}} = \frac{0{,}5026\cdot 50257}{1\,031\,125 - 344\,466} = 0{,}0368$$

oder 368 M. für die Versicherungssumme von 10000 M.

Für das Eintrittsalter 20 und das Endalter 60 hat man

$$P_{20}\,(A_{\overline{40}|}) = \frac{v^{40}\cdot D_{20}}{N_{20} - N_{60}} = \frac{0{,}5226\cdot 50257}{1\,031\,125 - 72\,734} = 0{,}0132$$

oder 132 M. für die Summe 10000 M.

x	Dauer 20	Endalter 60
20	368	132
25	369	167
30	372	215
35	378	283
40	387	387
45	401	560
50	424	901
55	459	1895
60	512	∞

Tafel 9.

Weitere Beiträge findet man in der Tafel 9. Man vergleiche ihren Verlauf an den gestrichelten Kurven der Fig. 4. Die Beiträge halten sich stets unter denen für die gemischte Versicherung; und das ist nicht anders zu erwarten, denn die vorzeitigen Zahlungen für Sterbefälle fallen ja bei der Versicherung mit bestimmter Verfallzeit fort.

Kurze Leibrenten: Wie für die Todesfallversicherung, so kann man auch die jährlichen Beiträge für die gemischte Versicherung und die Versicherung mit bestimmter Verfallzeit als Renten auffassen. Da die Rentenzahlung aber auf die Dauer von n Jahren abgekürzt ist, so spricht man von *kurzen Leibrenten.* Der Wert einer solchen Rente vom jährlichen Betrage P war bereits bestimmt worden mit $P \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$. Für den jährlichen Betrag 1 bezeichnet man den Wert mit $a_{x\overline{n|}}$ und hat

$$a_{x\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{9}$$

als Wert der kurzen Leibrente von n-jähriger Dauer des (x).

Für das Alter 20 und die Dauer 20 hat man

$$a_{x\overline{n|}} = \frac{N_{20} - N_{40}}{D_{20}} = \frac{1\,031\,125 - 344\,466}{50\,257} = 13{,}66$$

oder 1366 *M.* für die jährliche Rente von 100 *M.*

Da wir für die weitere Berechnung der jährlichen Beiträge von den Rentenwerten noch Gebrauch zu machen haben, sind sie in der Tafel 10 zusammengestellt. Sie nehmen – wie man aus der Tafel sieht,– mit steigendem Alter ab, weil die Anzahl der Rentenempfänger um so schneller zusammenschrumpft, je größer die Sterblichkeit wird.

x	Lebenslänglich	Dauer 20	Endalter 60
20	20,52	13,66	19,06
25	19,79	13,63	17,99
30	18,83	13,50	19,60
35	17,72	13,29	14,94
40	16,46	12,98	12,98
45	15,07	12,53	10,66
50	13,52	11,86	7,87
55	11,90	10,95	4,45
60	10,25	9,81	—

Tafel 10.

Renten und jährliche Beiträge: Wie der jährliche Beitrag für die Todesfallversicherung nach Formel (6) auch durch $P_x = \frac{A_x}{a_x}$ gegeben war, so hat man für die *gemischte Versicherung*

$$P_{x\overline{n|}} = \frac{A_{x\overline{n|}}}{a_{x\overline{n|}}} \tag{10}$$

und für die *Versicherung mit bestimter Verfallzeit*

(11) $$P_x(A_n) = \frac{A_n}{a_{x\overline{n}}}.$$

Für das Eintrittsalter 30 und die Dauer 20 ist $a_{30, 20} = 13{,}50$ (Tafel 10); in der gemischten Versicherung hat man $A_{30, \overline{20}|} = 0{,}543$ (Tafel 2), für die Versicherung mit bestimmter Verfallzeit $A_{20} = v^{20} = 0{,}5026$ (Tafel I, Anhang). Folglich erhält man den jährlichen Beitrag für die gemischte Versicherung:

$$P_{30, \overline{20}} = \frac{A_{30, 20}}{a_{30, \overline{20}|}} = \frac{0{,}543}{13 \cdot 50} = 0{,}0402 \quad \text{(vgl. Tafel 7)}$$

Versicherung mit bestimmter Verfallzeit

$$P_{30}(A_{\overline{20}|}) = \frac{A_{20}}{a_{30, \overline{20}|}} = \frac{0{,}5026}{13 \cdot 50} = 0{,}0372 \quad \text{(vgl. Tafel 9)}.$$

Setzt man allgemein den jährlichen Beitrag gleich P, den Einmalbeitrag gleich A und den Wert der Rente gleich a, so hat man in

(12) $$P = \frac{A}{a}$$

den allgemeinen Ausdruck für den jährlichen Beitrag.

Wirkliche Jahresbeiträge: In den bisher errechneten „mathematischen" oder reinen Jahresbeiträgen (Nettoprämien) sind die Unkosten der Versicherungsgesellschaft noch nicht enthalten. Die wirklichen Jahresbeiträge (Brutto- oder Tarifprämien) erhöhen sich durch die einmaligen und laufenden Unkosten. Die einmaligen Unkosten α (im Verhältnis zur Versicherungssumme gerechnet) erhöhen den Wert der Leistung der Versicherungsgesellschaft von A auf $A + \alpha$; die laufenden Unkosten β (im Verhältnis zum jährlichen Beitrag gerechnet) erhöhen den Beitrag um $P' \cdot \beta$, wenn man mit P' den wirklichen Jahresbeitrag bezeichnet. So hat man

$$P' = \frac{A + \alpha}{a} + \beta \cdot P'$$

(13) oder $$P' = \frac{A + \alpha}{a(1 - \beta)}$$ als *wirklichen Jahresbeitrag.*

Setzt man wieder $\alpha = 0{,}05$ und $\beta = 0{,}10$, d. h. rechnet man die einmaligen Unkosten mit 5 % der Versicherungssumme und die laufenden mit 10 % des Jahresbeitrags, so wird

$$P' = \frac{A + 0{,}05}{a \cdot 0{,}9}.$$

Für die Todesfallversicherung des (20) ist

$$P'_{20} = \frac{A_{20} + 0,05}{0,9 \cdot a_{20}}.$$

Nach Tafel 1 ist $A_{20} = 0,306$, nach Tafel 10 ist $a_{20} = 20,52$, und so wird

$$P'_{20} = \frac{0,306 + 0,05}{0,9 \cdot 20,52} = 0,0193$$

oder 193 M. für die Versicherungssumme von 10000 M., gegenüber dem reinen Jahresbeitrag von 149 M. (Tafel 6).

Für die gemischte Versicherung des (20) bei 20-jähriger Dauer ist

$$P'_{20,\,\overline{20|}} = \frac{A_{20,\,\overline{20|}} + 0,05}{0,9 \cdot a_{20,\,\overline{20|}}},$$

worin $A_{20,\,\overline{20|}} = 0,538$ (Tafel 2) und $a_{20,\,\overline{20|}} = 13,66$ (Tafel 10); also wird

$$P'_{20,\,\overline{20|}} = \frac{0,538 + 0,05}{0,9 \cdot 13,66} = 0,0478$$

oder 478 M. für die Versicherungssumme von 10000 M., gegenüber dem reinen Jahresbeitrag von 394 M. (Tafel 7).

Für die Versicherung mit bestimmter Verfallzeit des (20) bei 20-jähriger Dauer ist $A_{\overline{20|}} = 0,5026$ und man hat

$$P'_{20}(A_{\overline{20|}}) = \frac{0,5026 + 0,05}{0,9 \cdot 13,66} = 0,0449$$

oder 449 M. für die Versicherungssumme von 10000 M., gegenüber dem reinen Jahresbeitrag von 368 M. (Tafel 9).

Eintritts-Alter	Todesfall-Versicherung	Gemischte Versicherung Dauer 20	Gemischte Versicherung Endalter 60	Vers. m. best. Verfallzeit Dauer 20	Vers. m. best. Verfallzeit Endalter 60
20	193	478	236	449	176
25	214	480	272	450	216
30	244	488	327	455	270
35	283	502	405	462	352
40	333	523	523	473	473
35	399	555	718	490	674
50	487	608	1107	518	1071
55	605	690	2247	561	2227
60	762	813	—	625	—

Tafel 11.

Auf diese Weise sind die Beiträge der Tafel 11 berechnet, die also gewissermaßen als fertiger „Tarif“ einer Versicherungsgesellschaft gedacht sein kann.

7. DAS DECKUNGSKAPITAL

Die Versicherung ist ein Vertrag zwischen dem Versicherten und der Versicherungsgesellschaft, der beide Teile verpflichtet: den Versicherten zur Beitragszahlung, die Versicherungsgesellschaft zur Auszahlung der Versicherungsumme im Todes- oder Erlebensfalle. Beim Abschluß der Versicherung haben beide Verpflichtungen gleichen Wert, denn die Beitragsleistung der Versicherten war so bemessen worden, daß der Wert des Einmalbeitrags oder der Barwert aller zu erwartenden jährlichen Beiträge gleich dem Werte der Gegenleistung der Versicherungsgesellschaft war.

Bei der Versicherung mit Einmalbeitrag entledigt sich der Versicherte seiner Verpflichtungen sofort beim Abschluß der Versicherung. Dagegen bleibt die Verpflichtung der Gesellschaft bestehen bis zur Auszahlung der Versicherungssumme. Sie darf daher den empfangenen Versicherungsbeitrag nicht nach ihrem Belieben verwenden, sondern muß soviel davon als „Reserve" zurückstellen, als ihrer Verpflichtung entspricht. Im ersten Versicherungsjahre ist diese Verpflichtung gleich dem mathematischen Beitrage des Versicherten, der daher unantastbar bleibt; den Aufschlag für die Unkosten wird die Gesellschaft natürlich seiner Bestimmung zuführen. Nach Ablauf des 1. Jahres hat sich die Verpflichtung der Gesellschaft geändert. Der Versicherte ist um ein Jahr älter geworden; nach wie vor bleibt aber die Gesellschaft verpflichtet, im Todes- oder Erlebensfalle die Versicherungssumme zu zahlen. Der Wert ihrer Verpflichtung auf den Todesfall entspricht also jetzt dem Werte der Versicherung des um ein Jahr älteren Versicherten; ebenso der Wert ihrer Verpflichtung auf den Erlebensfall, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß dieser Zeitpunkt um ein Jahr näher gerückt ist. Die Verpflichtung der Gesellschaft hat also den Wert einer Versicherung des um ein Jahr älteren Versicherten mit um ein Jahr kürzerer Versicherungsdauer. Nach k Versicherungsjahren muß dementsprechend die Rückstellung gleich dem Werte der Versicherung des um k Jahre älteren Versicherten bei um k Jahre kürzerer Versicherungsdauer sein. Diese während des Verlaufs der Versicherung zu machende Rückstellung nennt man ihr *Deckungskapital*

Das Deckungskapital der Todesfallversicherung mit Einmalbeitrag: Der Einmalbeitrag für die Todesfallversicherung des (x) bei der Versicherungssumme 1 ist nach Formel (2) $A_x = \frac{M_x}{D_x}$. Nach Ablauf des 1. Jahres hat der Versicherte das Alter $(x + 1)$ erreicht. Der Wert der Verpflichtung der Versicherungsgesellschaft und damit das Deckungskapital beträgt nunmehr $A_{x+1} = \frac{M_{x+1}}{D_{x+1}}$. Das Deckungskapital einer Versicherung mit dem Eintrittsalter x bezeichnet man allgemein mit V_x; zur Kennzeichnung der Anzahl von Jahren, die seit dem Abschlusse vergangen sind, schreibt man ${}_kV_x$ als Deckungskapital nach k Jahren. Für die Todesfallversicherung fanden wir oben

$$ {}_1V_x = A_{x+1} $$

und dementsprechend ist

$$ {}_kV_x = A_{x+k} \tag{14} $$

das Deckungskapital der Todesfallversicherung mit Einmalbeitrag nach k Versicherungsjahren.

Für das Eintrittsalter 20 ist nach Tafel 1 $A_{20} = 0{,}306$, genauer 0,3061. Diesen Betrag hat die Versicherungsgesellschaft zu Beginn der Versicherung als „reinen" Einmalbeitrag eingenommen. Das Deckungskapital, das sie am Ende des 1. Jahres zurückzustellen hat, beträgt

$$ {}_1V_{20} = A_{21} = \frac{M_{21}}{D_{21}} = \frac{14940}{48109} = 0{,}3105. $$

Es ist größer als der Einmalbeitrag. Nun hat sich der Einmalbeitrag aber verzinst und wäre zu $3\frac{1}{2}\,\%$ um 0,0107 auf 0,3168 angewachsen. Doch ist der daraus als Überschuß hervorgegangene Betrag von $0{,}3168 - 0{,}3105 = 0{,}0063$ kein Gewinn der Gesellschaft, sondern er ist ausgegeben worden für die Sterbefälle im 1. Versicherungsjahre.

Nimmt man nämlich an, es haben alle $l_{20} = 100000$ Personen des Alters 20 der Sterbetafel die Versicherung abgeschlossen, so wäre die Gesamtbeitragseinnahme zu Beginn der Versicherungen gleich $100000 \cdot 0{,}3061 = 30610$ M. gewesen. Diese Summe vermehrt sich bis zum Ablauf des Jahres durch die Zinsen um 1071 M. auf 31681 M. Anderseits sterben im 1. Jahre $d_{20} = 919$ Personen, für die an Versicherungssummen insgesamt der Betrag 919 M. zu zahlen ist. Daher bleibt am Ende des Jahres das Kapital $31681 - 919 = 30762$ M. Nach Abzug der Gestorbenen bleiben am Ende des 1. Jahres von den 100000 Versicherten noch 99081; für jeden von ihnen muß das Deckungskapital 0,3105 gestellt werden, insgesamt also 30765 M., und das entspricht in der Tat dem am Ende des 1. Jahres vorhandenen Kapital 30762 M.

(Der Unterschied in der letzten Stelle ist natürlich auf die Abkürzung des Beitrags und des Deckungskapitals auf 4 Stellen zurückzuführen. Es würde aber wenig Wert haben, wollte man die Versicherungswerte, die doch auf in der Wirklichkeit nie genau eintreffenden Voraussetzungen beruhen, übertrieben „genau" rechnen. Das wäre ebenso unsinnig, wie etwa die Angabe der Zimmerwärme auf Tausendstel Grad Celsius oder der Körpergröße auf Hundertstel Millimeter.)

Den weiteren Anstieg des Deckungskapitals für die Todesfallversicherung des (20) kann man sowohl aus der Tafel 1 als auch der Figur 3 ablesen, wenigstens bis zum Alter 60. Im Alter 90, d. h. nach 70 Versicherungsjahren, erreicht das Deckungskapital nahezu den Wert der Versicherungssumme selber, denn es ist

$$_{70}V_{20} = A_{20+70} = A_{90} = \frac{M_{90}}{D_{90}} = \frac{47}{48} = 0{,}98.$$

Das Deckungskapital der gemischten Versicherung mit Einmalbeitrag: $A_{x\overline{n|}}$ ist der Beitrag. Nach k Jahren hat der Versicherte das Alter $x + k$ erreicht, ist aber dem Ablauf der Versicherung um k Jahre näher gerückt. Das Deckungskapital der Versicherung ist also

$$(15) \qquad _kV_x = A_{x+k,\,\overline{n-k|}}\,.$$

Für die gemischte Versicherung des (50) bei zehnjähriger Dauer ist nach Tafel 3

$$A_{50,\,\overline{10|}} = 0{,}734$$

der Einmalbeitrag. Das Deckungskapital nach einem Jahre ist

$$_1V_{50} = A_{51,\,\overline{9|}} = \frac{M_{51} - M_{60} + D_{60}}{D_{61}} = \frac{6755 - 4635 + 7094}{12201}\,,$$

$$_1V_{50} = 0{,}755.$$

Das Deckungskapital nach 2 Jahren findet man mit

$$_2V_{50} = A_{52,\,\overline{8|}} = 0{,}777.$$

Den weiteren Verlauf bis zum Ablauf der Versicherung zeigt Tafel 12. Man vergleiche damit den Verlauf der Versicherung in Tafel 4. Dort ging man von der Annahme aus, es hätten $l_{50} = 71831$ Personen die Versicherung abgeschlossen und fand am Ende des ersten (Beginn des zweiten) Jahres ein vorhandenes Kapital von 53266. Diesem Kapital steht das Deckungskapital für alle Versicherungen der noch Lebenden $l_{51} = 70528$ gegenüber. Nimmt man nun an, die vorhandene Summe 53266 M. sei das Deckungskapital, so kommt in der Tat auf jede einzelne Versicherung der Anteil 53266 : 70528 = 0,755 wie in Tafel 12. Ebenso findet man für das Ende des 2. Jahres aus 53768 M. vorhandenem Kapital und $l_{52} = 69166$ noch lebenden Versicherten als Deckungskapital einer Versicherung 0,777 usw.

k	V
1	0,755
2	0,777
3	0,800
4	0,825
5	0,850
6	0,877
7	0,905
8	0,935
9	0,966
10	1,000

Tafel 12.

Diese Übereinstimmung trifft natürlich nur solange zu, als man den Verlauf der Versicherungen so darstellt, daß sowohl der rechnungsmäßige Zins als auch die Angaben der Sterbetafel gewahrt bleiben. In Wirklichkeit ist der Verlauf anders. Hat sich das Vermögen der Gesellschaft etwa mit 4 % verzinst, so ist die Einnahme an Zinsen aus 52724 M. im ersten Jahre 2109 M. statt 1845 M.; wäre ferner die Sterblichkeit um 10 % günstiger gewesen, so hätte man 1173 M. statt 1303 M. für Sterbefälle angeben müssen. Das Vermögen hätte sich demnach um 2109 — 1173 = 936 M. auf 52724 + 936 = 53660 M. vermehrt. Nun leben aber am Ende des 1. Jahres noch 71831 — 1173 = 70658 Versicherte; die Gesellschaft hat also das Deckungskapital 70658 · 0,755 = 53347 M. zu stellen. Folglich hat sie einen Überschuß von 53660 — 53347 = 313 M. erzielt.

Das Deckungskapital bei jährlicher Beitragszahlung: An der Verpflichtung der Gesellschaft für sich genommen ändert sich nichts, ob nun der Versicherte seinen Beitrag einmal geleistet hat oder jährlich leisten wird. Sie bleibt also in der Höhe $A_{x+k, \overline{n-k}|}$ bestehen. Nun hat aber der Versicherte bei jährlicher Beitragszahlung auch noch Pflichten übernommen, die der Verpflichtung der Gesellschaft gegenüber stehen. Daher vermindert sich das Deckungskapital um den Wert der noch ausstehenden Leistungen des

Versicherten. Sind seit dem Abschluß der Versicherung k Jahre vergangen, so hat der Versicherte bis zum Ablauf der Versicherung noch $(n-k)$ mal den Jahresbeitrag zu leisten; seine Verpflichtung entspricht also dem Werte einer jährlichen Rente von der Höhe des Jahresbeitrags und der Dauer von $(n-k)$ Jahren. Da der Versicherte aber um k Jahre älter geworden ist, so gilt als Rentenbarwert derjenige einer Rente vom Eintrittsalter $(x+k)$.

Das Deckungskapital der Todesfallversicherung mit jährlichen Beiträgen ist demnach gleich der Todesfallversicherung des um k Jahre älteren Versicherten, A_{x+k}, vermindert um den Wert seiner noch zu erwartenden jährlichen Beiträge, d. i. einer jährlichen Rente vom Betrage P_x des $(x+k)$ jährigen Versicherten. $\mathfrak{a}_{x+k}$ ist der Barwert dieser Rente vom jährlichen Betrage 1, also $P_x \cdot \mathfrak{a}_{x+k}$ der Wert der künftigen Leistungen des Versicherten. Folglich ist

$$(16) \qquad {}_kV_x = A_{x+k} - P_x \cdot \mathfrak{a}_{x+k}$$

das Deckungskapital für die Todesfallversicherung am Ende des k^{ten} Versicherungsjahres,

Für die Todesfallversicherung des (20) ist $P_{20} = 0{,}0149$ (Tafel 6). Das Deckungskapital ist also

$${}_kV_{20} = A_{20+k} - 0{,}0149 \cdot \mathfrak{a}_{20+k}.$$

Die Rentenbarwerte $\mathfrak{a}$ enthält Tafel 10 von 5 zu 5 Jahren, die Werte A_{20+k} findet man in Tafel 1. So ist

$${}_5V_{20} = A_{25} - 0{,}0149 \cdot \mathfrak{a}_{25} = 0{,}331 - 0{,}0149 \cdot 19{,}79 = 0{,}036$$
$${}_{10}V_{20} = A_{30} - 0{,}0149 \cdot \mathfrak{a}_{30} = 0{,}363 - 0{,}0149 \cdot 18{,}83 = 0{,}082$$
$${}_{15}V_{20} = A_{35} - 0{,}0149 \cdot \mathfrak{a}_{35} = 0{,}401 - 0{,}0149 \cdot 17{,}72 = 0{,}137$$
$${}_{20}V_{20} = A_{40} - 0{,}0149 \cdot \mathfrak{a}_{40} = 0{,}443 - 0{,}0149 \cdot 16{,}46 = 0{,}198$$

usw. Das Deckungskapital steigt also im Laufe der Versicherung; und das war nicht anders zu erwarten, denn mit den A_{x+k} steigt die Verpflichtung der Versicherungsgesellschaft, während die Verpflichtung des Versicherten um so kleiner wird, je mehr Beiträge er geleistet hat.

Das Deckungskapital der gemischten Versicherung mit jährlichen Beiträgen: Die Verpflichtung der Versicherungsgesellschaft bleibt $A_{x+k,\,\overline{n-k}|}$ wie bei der Versicherung mit

Einmalbeitrag. Der Versicherte hat nach Ablauf von k Jahren den Jahresbeitrag $P_{x\overline{n}|}$ höchstens noch $(n-k)$ mal zu leisten. Der Gesamtwert seiner künftigen Zahlungen kommt also dem Werte einer $(n-k)$-jährigen Rente gleich vom jährlichen Betrage $P_{x\overline{n}|}$. Da der Versicherte zu Beginn dieser Rente das Alter $(x+k)$ hat, so ist der Wert $P_{x\overline{n}|} \cdot a_{x+k, \overline{n-k}|}$ einzusetzen. Mithin ist

$$ {}_kV_x = A_{x+k, \overline{n-k}|} - P_{x\overline{n}|} \cdot a_{x+k, \overline{n-k}|} \tag{17} $$

das Deckungskapital der gemischten Versicherung nach k Versicherungsjahren.

Für die gemischte Versicherung des (50) bei 10-jähriger Dauer sind die $A_{x+k, \overline{n-k}|}$ bereits in der Tafel 12 zusammengestellt. Der jährliche Beitrag $P_{50, \overline{10}|}$ ist nach Tafel 7 gleich 0.0933. Also ist das Deckungskapital nach einem Jahre ${}_1V_{50} = 0{,}755 - 0{,}0933 \cdot a_{51, \overline{9}|}$.
Nach Formel (9) ist

$$ a_{51, \overline{9}|} = \frac{N_{51} - N_{60}}{D_{51}} = \frac{161051 - 72734}{12201} = 7{,}24 $$

und $$ {}_1V_{50} = 0{,}755 - 0{,}0933 \cdot 7{,}24 = 0{,}080. $$

Tafel 13 zeigt das Deckungskapital während der ganzen Versicherungsdauer. In Figur 5 vergleiche man den Verlauf des Deckungskapitals bei einmaligem und jährlichem Beitrag für die Versicherungssumme 1000!

k	V
1	0,080
2	0,163
3	0,250
4	0,341
5	0,436
6	0,536
7	0,642
8	0,754
9	0,873
10	1,000

Tafel 13.

Zu weiterer Klarstellung des Begriffs vom Deckungskapital ziehe man Tafel 8 heran. Dort war angenommen, es hätten $l_{50} = 71831$ Personen je eine gemischte Versicherung von 10-jähriger Dauer abgeschlossen. Die Beitragseinnahme zu Beginn des 1. Jahres betrug 6072 M.; sie brachte an Zinsen zu $3\frac{1}{2}\,\%$ die Summe 235 M. Das Jahr verlangte für Sterbefälle den Betrag 1303 M., so daß am Ende des 1. Jahres das Vermögen 5634 M. vorhanden war. Da von den Versicherten noch $l_{51} = 70528$ vorhanden waren, so kam auf jede einzelne Versicherung der Vermögensanteil 5634 : 70528 = 0,080, was in der Tat dem Deckungskapital entspricht. Ebenso findet man für das Ende des 2. Jahres aus dem Vermögen 11279 M. und $l_{52} =$

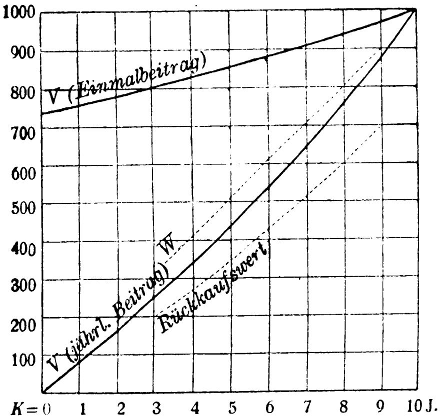


Fig. 5. Deckungskapital.

69166 das Deckungskapital 0,163 für die einzelne Versicherung, wie in Tafel 13.

Hätte sich das Vermögen der Gesellschaft im 1. Jahre mit 4% verzinst, so wäre 268 M. der Zinsertrag aus der Beitragseinnahme 6702 M. gewesen; wäre ferner die Sterblichkeit um 10% günstiger gewesen, so hätte *nur* die Summe 1173 *M.* für Sterbefälle aufgebracht zu werden brauchen. Das Vermögen am Ende des Jahres betrüge dann 6702 + 268 − 1173 = 5797 M. statt 5634 M. Aber auch das Deckungskapital ist höher zu bemessen als in Tafel 8, denn statt l_{51} = 70528 leben noch 72851 − 1173 = 70657 Versicherte, für deren Versicherungen das Deckungskapital 70657 · 0,080 = 5653 zu stellen ist. Der Gewinn der Gesellschaft beträgt danach 5797 − 5653 = 144.

Das Deckungskapital der Versicherung mit bestimmter Verfallzeit: Die Leistung der Versicherungsgesellschaft hat nach Ablauf von k Versicherungsjahren den Wert $A_{\overline{n-k}} = v^{n-k}$. Die Leistung des Versicherten entspricht in ihrem Werte der für die gemischte Versicherung, wobei an Stelle des Jahresbeitrags dafür der Beitrag $P_x(A_{\overline{n}})$ für die Versicherung mit bestimmter Verfallzeit zu setzen ist. Also ist

$$(18) \qquad {}_kV_x = v^{n-k} - P_x(A_{\overline{n}}) \cdot a_{x+k,\,\overline{n-k}}$$

das Deckungskapital der Versicherung mit bestimmter Verfallzeit.

k	V
1	0,082
2	0,166
3	0,254
4	0,346
5	0,442
6	0,542
7	0,648
8	0,759
9	0,876
10	1,000

Tafel 14.

Für das Eintrittsalter 50 und die Dauer 10 war nach Tafel 9 der jährliche Beitrag $P_{50}(A_{\overline{10}}) = 0{,}0901$. Das Deckungskapital wird

$${}_kV_{50} = v^{10-k} - 0{,}0901 \cdot a_{50+k,\,\overline{10-k}}$$

Nach Ablauf des 1. Jahres

$$
\begin{aligned}
{}_1V_{50} &= v^9 - 0{,}0901 \cdot a_{51,\overline{9}|} \\
&= 0{,}734 - 0{,}0901 \cdot 7{,}24 \\
{}_1V_{50} &= 0{,}082
\end{aligned}
$$

Die Deckungskapitalien für die ganze Versicherungsdauer findet man in Tafel 14.

8. DAS ZILLMERSCHE DECKUNGSKAPITAL

Die Behandlung des Deckungskapitals in den vorigen Abschnitten geschah auf Grund der mathematischen Beiträge ohne Rücksicht auf die Unkosten der Gesellschaft. Man nehme nun einmal an, die Gesellschaft habe für die 71831 Versicherten der Tafel 8 nicht den mathematischen Beitrag 0,0933, sondern den wirklichen Jahresbeitrag 0,1107 (Tafel 11) eingenommen. Ihre Beitragseinnahme betrüge also zu Beginn des 1. Versicherungsjahres 71831 · 0,1107 = 7952 M. Die laufenden Verwaltungskosten waren bei den Beiträgen der Tafel 11 zu 10% des Beitrags angesetzt. Entspricht das den wirklichen Verhältnissen, so hat die Gesellschaft an laufenden Ausgaben den Betrag 795 M. von der Beitragseinnahme abzuziehen ; bleiben 7952 — 795 = 7157 M. Die Abschlußkosten waren mit 0,05 für jede Versicherung (d. i. 50‰ der Versicherungssumme) angenommen; für 71831 Versicherungen hätte daher die Gesellschaft die Ausgabe 71831 · 0,05 = 3592 M. Somit bliebe als Einnahme 7157 — 3592 = 3565 M. Dieses Kapital vermehrt sich durch die Zinsen in Höhe von 125 M. auf 3690 M. Davon geht ab für Sterbefälle 1303 M., folglich bleibt am Ende des Jahres 3690 — 1303 = 2387 M. Demgegenüber hat die Gesellschaft das Deckungskapital für l_{51} = 70528 Versicherungen zu je 0,080, zusammen 5642 M. zu stellen. Da aber nur 2387 M. vorhanden sind, so hat sie einen *Verlust* von 5642 — 2387 = 3255 M. zu verzeichnen, trotzdem sie nicht mehr Sterbefälle hatte, als vorgesehen waren, trotzdem der Zins nicht geringer als $3\frac{1}{2}$% war, und trotzdem die Verwaltungskosten nicht größer waren als die in den Beiträgen enthaltenen.

Zu Beginn des 2. Jahres zahlen noch l_{51} = 70528 Versicherte den Beitrag, insgesamt 70528 · 0,1107 = 7807 M. Davon gehen ab 781 M. für laufende Verwaltungskosten. Das

Kapital zu Beginn des 2. Jahres beläuft sich also auf 2387 + 7807 — 781 = 9413 M. Bis zum Ende des Jahres kommen dazu an Zinsen 329 M., die Summe wächst also an auf 9742 M. Davon geht ab für Sterbefälle 1362 M., und es bleibt am Ende des 2. Jahres als Vermögen 8380 M. Dem steht gegenüber das Deckungskapital von je 0,163 für $l_{52} = 69\,166$ Versicherungen, d. i. 11 274 M. Der Verlust der Gesellschaft ist damit auf 11 274 — 8380 = 2894 M. heruntergegangen.

Verfolgt man die Versicherungen auf diese Art weiter, so findet man, daß der Verlust mit jedem Jahre kleiner wird und schließlich beim Ablauf der Versicherungen verschwindet.

Dieser Verlust kommt daher, daß die Gesellschaft die vollen Abschlußkosten für die Versicherung gleich beim Abschlusse leistet, während sie der Versicherte bei jährlicher Beitragszahlung nach und nach abträgt. Die Gesellschaft hat also mit den Abschlußkosten für die Versicherung bereits eine Leistung erfüllt, deren Gegenleistung noch aussteht. Genau wie die noch zu erwartende mathematische Beitragsleistung des Versicherten wird man aber auch seine künftigen Zahlungen für die Abschlußkosten, die in den wirklichen Jahresbeiträgen enthalten sind, bei der Berechnung des Deckungskapitals berücksichtigen können.

Ist A der Wert der Versicherung und α der Wert der Abschlußkosten, so ist

$$P = \frac{A + \alpha}{\mathrm{a}}$$

der Jahresbeitrag ohne Rücksicht auf die laufenden Verwaltungskosten (Formel 13). Der Anteil der Abschlußkosten am Beitrage ist also $\frac{\alpha}{\mathrm{a}}$. Vermehrt man bei der Bemessung des Deckungskapitals den Beitrag P um $\frac{\alpha}{\mathrm{a}}$, so hat man die Abschlußkosten voll berücksichtigt, und es ist

$$(19) \qquad {}_k\overline{V}_x = A_k - \left(P + \frac{\alpha}{\mathrm{a}}\right) \cdot \mathrm{a}_k$$

die Formel für das Deckungskapital, das man *Zillmersches Deckungskapital* nennt, nach Dr. Zillmer, der es eingeführt hat.

Für die Todesfallversicherung ist danach gemäß Formel (16)

$$(19\,\mathrm{a}) \qquad {}_k\overline{V}_x = A_{x+k} - \left(P_x + \frac{\alpha}{\mathrm{a}_x}\right) \cdot \mathrm{a}_{x+k};$$

für die gemischte Versicherung gemäß Formel (17)

$$(19\text{b})\quad {}_k\bar{V}_x = A_{x+k,\overline{n-k}|} - \left(P_{x\overline{n}|} + \frac{\alpha}{a_{x\overline{n}|}}\right)\cdot a_{x+k,\overline{n-k}|};$$

für die Versicherung mit bestimmter Verfallzeit

$$(19\text{c})\quad {}_k\bar{V}_x = v^{n-k} - \left(P_x(A_{\overline{n}|}) + \frac{\alpha}{a_{x\overline{n}|}}\right)\cdot a_{x+k,\overline{n-k}|}.$$

Wie diese Methode das Deckungskapital ändert, soll wieder an der gemischten Versicherung des (50) von 10-jähriger Dauer gezeigt werden. Dafür hat man

$${}_k\bar{V}_{50} = A_{50+k,\overline{10-k}|} - \left(P_{50,\overline{10}|} + \frac{\alpha}{a_{50,\overline{10}|}}\right)\cdot a_{50+k,\overline{10-k}|}.$$

Nach einem Jahre:

$${}_1\bar{V}_{50} = A_{51,\overline{9}|} - \left(P_{50,\overline{10}|} + \frac{\alpha}{a_{50,\overline{10}|}}\right)\cdot a_{51,\overline{9}|}.$$

$A_{51,\overline{9}|}=0{,}755$ (Tafel 12); $P_{50,\overline{10}|}=0{,}0933$ (Tafel 7); $\alpha=0{,}05$; $a_{50,\overline{10}|}=7{,}87$ (Tafel 10) und $a_{51,\overline{9}|}=7{,}24$ (vgl. S. 25). Also

$${}_1\bar{V}_{50} = 0{,}755 - \left(0{,}0933 + \frac{0{,}05}{7{,}87}\right)\cdot 7{,}24$$

$${}_1\bar{V}_{50} = 0{,}655 - 0{,}09965 \cdot 7{,}24$$

$${}_1\bar{V}_{50} = 0{,}034$$

gegen ${}_1V_{50} = 0{,}080$ ohne Berücksichtigung der Abschlußkosten.

Man vergegenwärtige sich, daß bei Einsatz der Abschlußkosten laut Berechnung zu Beginn dieses Abschnitts das Vermögen der Gesellschaft am Ende des 1. Jahres 2387 betrug. Es verteilt sich auf 70528 Versicherungen, woraus sich ergibt, daß auf eine einzige gerade das Zillmersche Deckungskapital 2387 : 70528 = 0,034 kommt.

Die Zillmersche Methode der Berechnung des Deckungskapitals ist namentlich nach dem Kriege zu großer Bedeutung gekommen. Mit der allgemeinen Teuerung wuchsen auch die Verwaltungskosten der Versicherungsgesellschaften; namentlich die Abschlußkosten erreichten eine außerordentliche Höhe, weil nämlich der Zugang an neuen Versicherungen ungemein groß wurde und bei mancher Gesellschaft nahezu die Höhe des vorhandenen Versicherungsbestandes erreichte. Die Ursache dieses starken Ansteigens des Neugeschäftes lag in der Geldentwertung, man versicherte allgemein viel höhere Summen, denn mit den früher üblichen Versicherungen von 5000 bis 10000 M. konnte man jetzt nicht mehr viel anfangen. Es ist nun klar, daß bei der gewöhnlichen Art der Deckungskapitalberechnung ohne Rücksicht auf die Abschlußkosten der buchmäßige Verlust um so größer sein muß, je größer der Zugang an neuen Versicherungen ist. Deshalb benutzen heute die meisten Gesellschaften die Zillmersche Methode. Freilich „zillmert" man nicht die ganzen Abschlußkosten sondern nur einen Teil, z. B. $\alpha = 0{,}025$. Früher war es überhaupt nur zulässig bis zum Satze $\alpha = 0{,}0125$, d. i. $12\frac{1}{2}$‰ der Versicherungssumme zu zillmern; aber diese Einschränkung ist nach dem Kriege gefallen. In Tafel 15 findet man das Deckungskapital der gemischten Versicherung des (50) bei 10-jähriger Versicherungsdauer nach der gewöhnlichen Methode (Tafel 13), ferner mit den Zillmersätzen von $\alpha = 0{,}025$ und $\alpha = 0{,}050$ nebeneinandergestellt. In allen drei Fällen erreicht das Deckungskapital am Ende der Versicherung den Wert der Versicherungssumme.

k	V	$\ddot{V}(0{,}025)$	$\ddot{V}'(0{,}05)$
1	0,080	0,056	0,034
2	0,163	0,142	0,121
3	0,250	0,233	0,214
4	0,341	0,324	0,308
5	0,436	0,422	0,408
6	0,536	0,525	0,513
7	0,642	0,633	0,624
8	0,754	0,748	0,742
9	0,873	0,869	0,866
10	1,000	1,000	1,000

Tafel 15.

Für die gemischte Versicherung des (20) mit der Dauer 40 war der jährliche Beitrag nach Tafel 7 $P_{20,\,\overline{40}|} = 0{,}0186$. Das Deckungskapital ohne Rücksicht auf die Abschlußkosten ist nach Ablauf des ersten Jahres

$$_1V_{20} = A_{21,\,\overline{39}|} - P_{20,\,\overline{40}|} \cdot a_{21,\,\overline{39}|}$$

gemäß Formel (17). Darin hat man nach Formel (3)

$$A_{21,\,39} = \frac{M_{21} - M_{60} + D_{60}}{D_{21}} = \frac{14940 - 4635 + 7094}{48109} = 0{,}3615;$$

ferner nach (9)

$$a_{21,\,39} = \frac{N_{21} - N_{60}}{D_{21}} = \frac{980868 - 72734}{48109} = 18{,}88,$$

so daß $\quad {}_1V_{20} = 0{,}3615 - 0{,}0186 \cdot 18{,}88 = 0{,}011$

wird. Das gezillmerte Deckungskapital mit $\alpha = 0{,}05$ ist

$$ {}_1\overline{V}_{20} = A_{21,\,\overline{39}|} - \left(P_{20,\,\overline{40}|} + \frac{0{,}05}{a_{20,\,\overline{40}|}}\right) \cdot a_{21,\,\overline{39}|}\,. $$

Darin ist nach Tafel 10 $a_{20,\,\overline{40}|} = 19{,}06$, und so wird

$$ {}_1\overline{V}_{20} = 0{,}3615 - \left(0{,}0186 + \frac{0{,}05}{19{,}06}\right) \cdot 18{,}88 $$

oder $\quad {}_1\overline{V}_{20} = 0{,}3615 - 0{,}4021$

$$ {}_1\overline{V}_{20} = -\,0{,}0406, $$

das Deckungskapital wird kleiner als Null, d. h. die Verpflichtung der Versicherten ist größer als die der Gesellschaft. Verfolgt man das Deckungskapital weiter durch Berechnung von ${}_2\overline{V}_{20}$ usw., so kommt man schnell auf positive Werte. Die Gesellschaften pflegen übrigens in ihren Vermögensaufstellungen die negativen Deckungskapitalien gleich Null zu setzen.

9. RÜCKKAUFSWERT, BEITRAGSFREIE VERSICHERUNG, UMWANDLUNG

Der Rückkaufswert: Wie der vorige Abschnitt gezeigt hat, hat die Versicherungsgesellschaft eine mit den Jahren steigende Schuld an den Versicherten, deren Höhe theoretisch gleich dem Deckungskapital ist. Wenn nun der Versicherte nach einer gewissen Reihe von Versicherungsjahren den jährlichen Beitrag nicht mehr zahlen kann oder will, so hat er ein Recht auf das Deckungskapital, das ihm die Gesellschaft gegen Rückgabe des Versicherungsscheins (der Police) aushändigt. Die Gesellschaft kauft also gewissermaßen die Versicherung zurück, und den Preis dafür nennt man den *Rückkaufswert.* Da der Gesellschaft aber durch den Rückkauf der Versicherung nicht nur die künftigen mathematischen Beiträge sondern auch die Verwaltungskostenzuschläge entgehen, so zahlt sie als Rückkaufswert nicht das volle Deckungskapital, sondern nur einen Teil[1]), etwa 75 %

1) Sie ist gesetzlich dazu berechtigt (§ 176 des Vers. Vertrags-Gesetzes).

oder 80%, je nach ihren Bedingungen. In den ersten zwei bis drei Jahren gibt man den Versicherungen gewöhnlich gar keinen Rückkaufswert.

Gesetzt, die Gesellschaft zahle als Rückkaufswert 80% des Deckungskapitals vom 3. Jahre, so sind bei der gemischten Versicherung des (50) auf 10 Jahre Dauer und 1000 M. zu zahlen (Tafel 13):

am Ende des 3. Jahres: 80% von 250 M., gleich 200 M.
„ „ „ 4. „ : 80% „ 341 M., „ 272 M. usw.

Man vergleiche den Verlauf an der gestrichelten Kurve in Figur 5!

Der Rückkaufswert gilt auch als Grundlage für die *Beleihung des Versicherungsscheins.* Wie die Banken gegen Hinterlegung von Wertpapieren Darlehen bis zur Höhe von 75% oder 80% des Kurswertes der Papiere ausgeben, so gewähren auch die Versicherungsgesellschaften ihren Versicherten Darlehen bis zur Höhe des Rückkaufswertes gegen Hinterlegung des Versicherungsscheines.

Beitragsfreie Versicherung: Wenn dem Versicherten nur darum zu tun ist, keine weiteren Beiträge mehr zu leisten, ohne daß er Wert legt auf die Auszahlung des Rückkaufswertes, so kann er veranlassen, daß die Versicherung in eine beitragsfreie umgewandelt wird. Soll das nach k Versicherungsjahren geschehen, so ist ${}_kV_x$ das zur Verfügung stehende Deckungskapital. Faßt man das auf als Einmalbeitrag für eine Versicherung, so kann man dem Versicherten diese Versicherung gewähren, ohne weitere Beiträge von ihm zu verlangen, Ist A_k der Einmalbeitrag für die Versicherung 1, so ist ${}_kW_x \cdot A_k$ der Einmalbeitrag für die Versicherung mit der Summe ${}_kW_x$, womit man die beitragsfreie Versicherung bezeichnet. Es muß also sein

$$ {}_kV_x = {}_kW_x \cdot A_k $$

(20) oder $$ {}_kW_x = \frac{{}_kV_x}{A_k} $$

ist der Wert der beitragsfreien Versicherung.

Für die Todesfallversicherung hat man

(20a) $$ {}_kW_x = \frac{{}_kV_x}{A_{x+k}}, $$

für die gemischte Versicherung

(20b) $${}_kW_x = \frac{{}_kV_x}{A_{x+k,\overline{n-k|}}},$$

für die Versicherung mit bestimmter Verfallzeit

(20c) $${}_kW_x = \frac{{}_kV_x}{A_{\overline{n-k|}}}.$$

In den ersten zwei bis drei Versicherungsjahren pflegt man keine beitragsfreie Versicherung zu gewähren.

Für die gemichte Versicherung des (50) mit 10-jähriger Dauer und 1000 M. Versicherungssumme hat man nach 3 Jahren

$${}_3W_{50} = \frac{{}_3V_{50}}{A_{53,\overline{7|}}} \cdot 1000.$$

Nun ist nach Tafel 12 $A_{53,\overline{7|}} = 0{,}800$, ferner nach Tafel 13

$${}_3V_{50} = 0{,}250\,,$$

also $${}_3W_{50} = 312$$

die beitragsfreie Versicherung nach 3 Jahren. In Tafel 16 findet man die Rückkaufswerte und beitragsfreien Versicherungen vom 3. bis zum 9. Versicherungsjahre für die Versicherungssumme 1000. Fig. 5 zeigt ihren Verlauf.

k	R	W
3	200	313
4	278	413
5	349	513
6	429	611
7	514	709
8	603	806
9	698	904

Tafel 16.

Umwandlungen. Außer der Umwandlung einer Versicherung mit jährlichen Beiträgen in eine beitragsfreie Versicherung kennt man auch noch andere Arten der Umwandlung von Versicherungen. Wie man dabei verfährt, soll an einem Beispiel gezeigt werden:

Eine Todesfallversicherung mit jährlicher Beitragszahlung soll umgewandelt werden in eine gemischte Versicherung des Endalters t. Die Todesfallversicherung, abgeschlossen auf das Leben des (x), hat den jährlichen Beitrag P_x; sie möge bereits k Jahre gelaufen sein. Vorhanden ist dann das Deckungskapital ${}_kV_x$; der Versicherte hat das Alter $x + k$, bis zum Ablaufe der gemischten Versicherung bleiben daher $n = t - (x + k)$ Jahre. Ist P der neue Beitrag, so wird die künftige Beitragsleistung des Versicherten $P \cdot a_{x+k,\overline{n|}}$. Der Wert der gemischten Versicherung des $(x + k)$ auf das Endalter n, d. h. von n-jähriger Dauer, ist $A_{x+k,\overline{n|}}$. Deckungskapital und künftige Leistung des Versicherten zusammengenommen müssen gleich diesem Werte sein:

$${}_kV_x + P \cdot \mathrm{a}_{x+k,\,\overline{n|}} = A_{x+k,\,\overline{n|}},$$

und daraus findet man

$$P = \frac{A_{x+k,\,\overline{n|}} - {}_kV_x}{\mathrm{a}_{x+k,\,\overline{n|}}}$$

als Beitrag der gemischten Versicherung.

Der (20) habe die Todesfallversicherung abgeschlossen; sein jährlicher Beitrag ist $P_{20} = 0{,}0148$ (Tafel 6). Nach $k = 20$ Jahren soll die Versicherung umgewandelt werden auf eine gemischte Versicherung mit dem Endalter 60. Der Versicherte hat dann das Alter $x + k = 40$, die weitere Dauer der Versicherung $n = 20$. Folglich hat man als neuen Beitrag:

$$P = \frac{A_{40,\,\overline{20|}} - {}_{20}V_{20}}{\mathrm{a}_{40,\,\overline{20|}}}.$$

Man findet aus Tafel 3 den Wert $A_{40,\,\overline{20|}} = 0{,}561$, aus Tafel 10 $\mathrm{a}_{40,\,\overline{20|}} = 12{,}98$. Ferner ist für die Todesfallversicherung

$${}_{20}V_{20} = A_{40} - P_{20} \cdot \mathrm{a}_{40}$$

nach Formel (16). Nun ist $A_{40} = 0{,}443$ (Tafel 1) und $\mathrm{a}_{40} = 16{,}46$ (Tafel 10), also ${}_{20}V_{20} = 0{,}443 - 0{,}0149 \cdot 16{,}46$

$${}_{20}V_{20} = 0{,}198$$

und $$P = \frac{0{,}561 - 0{,}198}{12{,}98} = 0{,}0280.$$

Wäre 10000 M die Versicherungssumme gewesen, so hätte der Versicherte für die Todesfallversicherung den jährlichen Beitrag 149 M. zahlen müssen, dagegen 280 M. für die umgewandelte Versicherung.

10. GEWINN UND DIVIDENDE

Es ist schon darauf hingewiesen worden, daß die Versicherungsgesellschaften aus ihren Versicherungen dadurch Gewinn erzielen, daß sich ihr Vermögen höher verzinst als rechnungsmäßig und daß die Sterblichkeit vielfach geringer ist, als aus der Sterbetafel hervorgeht. Ferner bemessen die Gesellschaften die Zuschläge für die Abschlußkosten und laufenden Verwaltungskosten schon aus Gründen berechtigter Vorsicht etwas reichlich, so daß sie durch sparsame Verwaltung auch daraus Gewinn haben. Diese Gewinne kommen auch den Versicherten zugute, deren Versicherungen gewinnberechtigt sind. Sie erhalten Anteile am Gewinn, entweder im Verhältnis zu ihren Beiträgen (z. B. 10% des Beitrags) oder im Verhältnis zum Dekkungskapital. Manche Gesellschaften verwenden auch die Gewinnanteile derVersicherten zur Erhöhung der Versicherungssummen. Über die technischen Grundlagen der Gewinn- und Dividendenberechnungen unterrichte man sich aus umfangreicheren Lehrbüchern.

LITERATUR

Blaschke, E., Vorlesungen über mathematische Statistik. 1906. Leipzig, B. G. Teubner.

Bleicher, H., Aus der politischen Arithmetik. In Weber-Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik III, 2. 2. Aufl. 1922. Leipzig, B. G. Teubner.

Bohlmann, G., Lebensversicherungs-Mathematik (Enc. I, 6). 1906. Leipzig, B. G. Teubner.

Bortkiewicz, L., Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik (Enc. I, 6). 1906. Leipzig, B. G. Teubner.

Broggi, H., Versicherungsmathematik. 1911. Leipzig, B. G. Teubner.

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung. I. Wahrscheinlichkeitstheorie, Fehlerausgleichung, Kollektivmaßlehre. 3. Aufl. 1914. II. Mathematische Statistik, Mathematische Grundlage der Lebensversicherung. 3. Aufl. 1921. Leipzig, B. G. Teubner.

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften I, 6). 1906. Leipzig, B. G. Teubner.

Loewy, A., Mathematik des Geld- und Zahlungsverkehrs. 1920. Leipzig, B. G. Teubner.

Manes, A., Versicherungswesen. I. Allgemeine Versicherungslehre. II. Besondere Versicherungslehre. 3. Aufl. 1922. Leipzig, B. G. Teubner.

Manes, A., Grundzüge des Versicherungswesens (Privatversicherung). 3. Aufl. 1918. Leipzig, B. G. Teubner.

Meißner, O., Wahrscheinlichkeitsrechnung. I. Grundlehre. II. Anwendungen. 2. Aufl. 1919. Leipzig, B. G. Teubner.

Weber, H. und Bauschinger, J., Wahrscheinlichkeitsrechnung. In Weber-Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik III, 2. 2. Aufl. 1922. Leipzig, B. G. Teubner.

FORMELN

I. ZINSFAKTOREN

n	$1{,}03^{+n}$	$1{,}035^{+n}$	$1{,}04^{+n}$	$1{,}03^{-n}$	$1{,}035^{-n}$	$1{,}04^{-n}$	n
1	1,0300	1,0350	1,0400	0,9709	0,9662	0,9615	1
2	1,0609	1,0712	1,0816	0,9426	0,9335	0,9246	2
3	1,0927	1,1087	1,1249	0,9151	0,9019	0,8890	3
4	1,1255	1,1475	1,1699	0,8885	0,8714	0,8548	4
5	1,1593	1,1877	1,2167	0,8626	0,8420	0,8219	5
6	1,1941	1,2293	1,2653	0,8375	0,8135	0,7903	6
7	1,2299	1,2723	1,3159	0,7131	0,7880	0,7599	7
8	1,2668	1,3168	1,3686	0,7894	0,7594	0,7307	8
9	1,3048	1,3629	1,4233	0,7664	0,7337	0,7026	9
10	1,3439	1,4106	1,4802	0,7441	0,7089	0,6756	10
11	1,3842	1,4600	1,5395	0,7224	9,6850	0,6496	11
12	1,4258	1,5111	1,6010	0,7014	0,6618	0,6246	12
13	1,4685	1,5640	1,6651	0,6810	0,6394	0,6006	13
14	1,5126	1,6187	1,7317	0,6611	0,6178	0,5775	14
15	1,5580	1,6753	1,8009	0,6419	0,5969	0,5553	15
16	1,6047	1,7340	1,8730	0,6232	0,5767	0,5339	16
17	1,6528	1,7947	1,9479	0,6050	0,5572	0,5134	17
18	1,7024	1,8575	2,0258	0,5874	0,5384	0,4936	18
19	1,7535	1,9225	2,1068	0,5703	0,5202	0,4746	19
20	1,8061	1,9898	2,1911	0,5537	0,5026	0,4564	20
21	1,8603	2,0594	2,2788	0,5375	0,4856	0,4388	21
22	1,9161	2,1315	2,3689	0,5219	0,4692	0,4220	22
23	1,9736	2,2061	2,4647	0,5067	0,4533	0,4057	23
24	2,0328	2,2833	2,5633	0,4919	0,4380	0,3901	24
25	2,0928	2,3632	2,6658	0,4776	0,4231	0,3751	25
26	2,1566	2,4460	2,7725	0,4637	0,4088	0,3607	26
27	2,2213	2,5316	2,8834	0,4202	0,3950	0,3468	27
28	2,2879	2,6202	2,9987	0,4371	0,3817	0,3335	28
29	2,3566	2,7119	3,1187	0,4243	0,3687	0,3207	29
30	2,4273	2,8068	3.2434	0,4120	0,3563	0,3083	30
31	2,5001	2,9050	3,3731	0,4000	0,3442	0,2965	31
32	2,5751	3,0067	3,5081	0,3883	0,3326	0,2851	32
33	2,6523	3,1119	3,6484	0,3770	0,3213	0,2741	33
34	2,7319	3,2209	3,7943	0,3660	0,3105	0,2636	34
35	2,8139	3,3336	3,9461	0,3554	0,3000	0,2534	35
36	2,8983	3,4503	4,1039	0,3450	0,2898	0,4237	36
37	2,9852	3,5710	4,2681	0,3350	0,2800	0,2343	37
38	2,0748	3,6960	4,4388	0,3252	0,2706	0,2253	38
39	3,1670	3,8254	4,6164	0,3158	0,2614	0,2166	39
40	3,2620	3,9593	4,8010	0,3066	0,2526	0,2083	40

II. STERBETAFEL M UND WI DER 23 DEUTSCHEN GESELLSCHAFTEN NEBST GRUNDZAHLEN ZU $3\frac{1}{2}\%$.

x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
20	100000	919	50257	1031125	446	15386
21	99081	908	48109	980868	426	14940
22	98173	887	46057	932759	402	14514
23	97286	861	44097	886702	377	14112
24	96425	835	42229	842605	353	13735
25	95590	816	40449	800376	334	13382
26	94774	804	38747	759927	318	13048
27	93970	797	37119	721180	304	12730
28	93173	795	35560	684061	293	12426
29	92378	800	34062	648501	285	12133
30	91578	808	32626	614439	278	11848
31	90770	818	31246	581813	272	11570
32	89952	831	29917	550567	267	11298
33	89121	841	28637	520650	261	11031
34	88280	856	27408	492013	257	10770
35	87424	873	26224	464605	253	10513
36	86551	889	25084	438381	249	10260
37	85662	906	23987	413297	245	10011
38	84756	928	22931	389310	243	9766
39	83828	950	21913	366379	240	9523
40	82878	975	20933	344466	238	9283
41	81903	1006	19987	323533	237	9045
42	80897	1035	19072	303546	236	8808
43	79862	1063	18192	284474	234	8572
44	78799	1092	17344	266282	232	8338
45	77707	1117	16523	248938	230	8106
46	76590	1140	15736	232415	226	7876
47	75450	1169	14978	216679	224	7650
48	74281	1204	14247	201701	223	7426
49	73077	1246	13542	187454	223	7203
50	71831	1303	12861	173912	225	6980
51	70528	1362	12201	161051	228	6755
52	69166	1425	11561	148850	230	6527
53	67741	1490	10940	137289	232	6297
54	66251	1556	10337	126349	235	6065
55	64695	1621	9753	116012	236	5830
56	63074	1691	9187	106259	238	5594
57	61383	1759	8639	97072	239	5356
58	59624	1832	8107	88433	241	5117
59	57792	1900	7593	80326	241	4876

x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
60	55892	1976	7094	72734	242	4635
61	53916	2038	6612	65639	241	4393
62	51878	2097	6147	59027	240	4151
63	49781	2149	5699	52880	238	3911
64	47632	2197	5269	47181	235	3673
65	45435	2246	4856	41912	232	3438
66	43189	2302	4460	37056	230	3207
67	40887	2355	4079	32596	227	2977
68	38532	2399	3714	28517	223	2750
69	36133	2432	3365	24803	219	2526
70	33701	2452	3033	21438	213	2308
71	31249	2455	2717	18405	206	2094
72	28794	2436	2419	15688	198	1888
73	26358	2406	2139	13270	189	1690
74	23952	2360	1878	11131	179	1502
75	21592	2299	1636	9252	168	1323
76	19293	2210	1412	7616	156	1155
77	17083	2103	1208	6204	144	998
78	14980	1982	1024	4996	131	855
79	12998	1848	858	3973	118	724
80	11150	1730	711	3114	107	606
81	9420	1599	581	2403	95	499
82	7821	1443	466	1823	83	404
83	6378	1264	367	1357	70	321
84	5114	1080	284	990	58	251
85	4034	896	217	705	47	193
86	3138	715	163	489	36	146
87	2423	566	122	326	27	110
88	1857	442	90	205	21	83
89	1415	344	66	115	16	62
90	1071	1071	48	48	47	47