QUELLEN UND STUDIEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

O. NEUGEBAUER
GÖTTINGEN

J. STENZEL
KIEL

O. TOEPLITZ
BONN

ABTEILUNG B:

STUDIEN

BAND 1 HEFT 3

MIT 9 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 25. SEPTEMBER 1930)

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH

1930

PREIS RM 29.80

QUELLEN UND STUDIEN
ZUR
GESCHICHTE DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

O. NEUGEBAUER
GÖTTINGEN

J. STENZEL
KIEL

O. TOEPLITZ
BONN

ABTEILUNG B:

STUDIEN

BAND 1 HEFT 3

MIT 9 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 25. SEPTEMBER 1930)

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1930

ISBN 978-3-662-37522-8 ISBN 978-3-662-38292-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-38292-9

Von den „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik" erscheinen in zwangloser Folge zwei Publikationen. Die eine Abteilung, A Quellen, soll die eigentlichen Originalausgaben größeren Umfangs umfassen mit möglichst getreuer Übersetzung. Die zweite Abteilung, B Studien, soll Abhandlungen enthalten, die mehr oder weniger mit dem Material der Quellen zusammenhängen. Etwa 25 Bogen der Abteilung B werden zu einem Bande zusammengefasst; jährlich wird höchstens ein solcher Band erscheinen. Die Quellenbearbeitungen der Abteilung A bilden jeweils einzelne Bände.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100, von größeren Arbeiten 50 Sonderdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung. Doch bittet die Verlagsbuchhandlung nur die zur tatsächlichen Verwendung benötigten Exemplare zu bestellen. Die Herren Mitarbeiter werden jedoch in ihrem eigenen Interesse gebeten, die Kosten vorher vom Verlage zu erfragen. Manuskriptsendungen sind an einen der drei Herausgeber zu richten:

Privatdozent Dr. **O. Neugebauer**, Göttingen, Calsowstraße 57.
Professor Dr. **J. Stenzel**, Kiel, Feldstraße 80.
Professor Dr. **O. Toeplitz**, Bonn, Koblenzer Straße 121.

Zugelassene Sprachen für Aufsätze der Abteilung B sind: Deutsch, Englisch, Französisch und Italienisch.

Die Erledigung aller nichtredaktionellen Angelegenheiten, die die Zeitschrift betreffen, erfolgt durch die

Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin W 9, Linkstr. 23/24.
Fernsprecher: Amt Kurfürst 6050—53 und 6326—28 sowie Amt Nollendorf 755—57.

1. Band — **Inhalt** — 3. Heft

Geometry in the Jaina Cosmography.

Von Prof. Dr. Bibhutibhusan Datta, University of Calcutta.

(Eingegangen am 26. I. 1930.)

In the cosmography of the Jainas are found applications of certain geometrical, or rather mensuration formulae. Some of them pertaining to the geometry of circle have already been noted in my article on "The Jaina School of Mathematics"[1]. There are also others as regard the theory of proportional triangles and the area of the segment of a circle. It is desirable that all of them should be dealt together at one place so as to give a fairly accurate idea of the extent of the knowledge of geometry amongst the early Jainas.

In the Jaina cosmography, the earth is supposed to be a flat plane divided into successive regions of land and water by a system of concentric circles. The innermost region is one of land, called Jambudvîpa. It is a circle of diameter 100000 *yojana.* Next lies an annulus of water, called Lavana Samudra (or "The Salt Ocean"). Then an annulus of land and so on. It is further stated that the central continent is divided into seven *varṣa* ("Country") by a system of six parallel mountains running due East-to-West. The southernmost country is known as Bhāratavarṣa. Others in succession towards the North are Haimavatavarṣa, Harivarṣa, Mahāvidehavarṣa, Ramyakavarṣa, Hairaṇyavarṣa and Airāvatavarṣa. The names of the mountains beginning with the southernmost one are Himavat, Mahāhimavat, Niṣadha, Nîlavat, Rukmi, and Śikharî. The breadths of the countries and mountains considered together are in the ratio 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 successively. Each country is again supposed to be divided into two halves by a mountain, called Vaitāḍhya. In Bhāratavarṣa and Airāvatavarṣa, this mountain runs directly East-to-West from one extremity of the country to the other and is of breadth 50 *yojana*. In the others, the mountain is circular in shape.

The dimensions of each of these land and water regions, countries, sub-countries and mountains are stated in detail in the canonical works

[1]) *Bull. Cal. Math. Soc.*, vol. 21, 1929, pp. 115—145; hereafter this article will be referred to as Datta, *Jaina Mathematics.*

of the Jainas. The circumference of Jambudvîpa is given as a little over 316227 *yojana* 3 *gavyuti* 128 *dhanu* $13\frac{1}{2}$ *aṅgula* and its area as 7905694150 *yojana* 1 *gavyuti* 1515 *dhanu* 60 *aṅgula*. In considering the detailed dimensions of the countries, our object will be fully and conveniently served even if we fix attention on Bhāratavarṣa only. It is evidently of the shape of a segment of a circle of diameter 100000 *yojana*. The North-to-South breadth of Bhāratavarṣa, that is, the height or arrow of the segment, is stated to be $526^6/_{19}$ *yojana* ($=100000/190, 190 = 1+2+4+8+16+32+64+32+16+8+4+2+1$). Other dimensions in *yojana* are as follow:

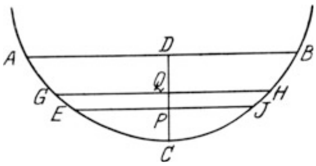


Fig. 1.

AB	$= 14471^6/_{19}$ (a little less)	ACB	$= 14528^{11}/_{19}$
PQ	$= 50$	GCH	$= 10743^{15}/_{19}$
CD	$= 526^6/_{19}$	ECJ	$= 9766^1/_{19}$ (a little over)
CP	$= QD = 238^3/_{19}$	AG	$= BH = 1892^7/_{19} + ^1/_{38}$
EJ	$= 9748^{12}/_{19}$	EG	$= JH = 488^{16}/_{19} + ^1/_{38}$
GH	$= 10720^{12}/_{19}$		

These numerical data will be found to work out the following formulae for the geometry of circles:

$$C = \sqrt{10\,d^2} = \pi d$$

$$A = \frac{1}{4}\,C d$$

$$c = \sqrt{4h(d-h)}$$

$$d = \frac{c^2}{4h} + h$$

$$a = \sqrt{6h^2 + c^2}$$

$$a' = \frac{1}{2}\,\{(\text{bigger arc}) - (\text{smaller arc})\}$$

$$h = \frac{1}{2}\,(d - \sqrt{d^2 - c^2})$$

$$\text{or } h = \sqrt{(a^2 - c^2)/6}$$

where d = diameter of a circle, C = its circumference, A = its area, c = a chord of the circle, a = an arc cut off by the chord, h = height of the segment or its arrow, a' = arc of the circle lying between two parallel chords. The Jainas always take $\pi = \sqrt{10}$.

These formulae, I have not found clearly defined in abstract in any of the early canonical works consulted by me such as the *Jambudvîpa-prajñapti*, *Jîvābhigama-sûtra*, *Bhagavatî-sûtra*, etc., most of which only state in minute details some or others of the above numerical data[2]).

[2]) *Jambudvîpa-prajñapti*, Sûtra 2, 10–16; *Jîvābhigama-sûtra*, Sûtra 82, 124; *Sûtrakṛtāṅga-sûtra*, Sûtra 12.

But there can be no doubt that the formulae were known in some forms or others to the learned people of their times. The first explicit statement of them in an early work, I have come across in the commentary of Umāsvāti (c. 150 B. C.) on his own treatise *Tattvārthādhigama-sûtra*[3]). Umāsvāti says:

"The square-root of ten times the square of the diameter of a circle is its circumference. That (circumference) multiplied by a quarter of the diameter (gives) the area. The square-root of four times the product of an arbitrary depth and the diameter diminished by that depth is the chord. The square-root of the difference of the squares of the diameter and the chord should be subtracted from the diameter: half of the remainder is the arrow. The square-root of six times the square of the arrow added to the square of the chord (gives) the arc. The square of the arrow plus one-fourth of the square of the chord is divided by the arrow: the quotient is the diameter. From the northern (meaning the bigger) arc should be subtracted the southern (meaning the smaller) arc: half of the remainder is the side (arc)."

All these rules have been restated by Umāsvāti in another work, viz. *Jambudvîpa-samāsa*[4]). But there the formula for the arrow has a different form and it is obviously approximate:

"The square-root of one-sixth of the difference between the squares of the arc and the chord is the arrow."

A more accurate and clear estimate of the knowledge of geometry amongst the early Jainas can be had from a work of comparatively later date, the *Vṛhat Kṣetra-samāsa* of Jinabhadra Gaṇi (529—589 A. D.)[5]). It is a work particularly devoted to the treatment of the cosmographical geography according to the Jainas. But its interest for a historian of mathematics lies in its reference to certain matters of arithmetical and geometrical character, especially to certain rules of mensuration that have been very clearly formulated. Besides those noted before[6]), it contains two formulae for finding the area of a segment of a circle which have not been so far traced to any earlier Hindu work. It should also be noted in particular that in the canonical works, there is no numerical data for the area (or volume) of any geometrical figure (or solid) besides

[3]) *Tattvārthādhigama-sûtra* with the *Bhāṣya* of Umāsvāti, edited by K. P. Mody, Calcutta, 1903, iii. 11.

[4]) Ch. iv. This work has been published in the Appendix C of Mody's edition of the *Tattvārthādhigama-sûtra*.

[5]) Jinabhadra Gaṇi wrote two books with the title *Kṣetra-samāsa*, a bigger one and a smaller one. Our reference in this article is always to the bigger one, called *Vṛhat Kṣetra-samāsa*. It has been published in 1921 by the *Jaina Dharma Prasāraka Sabhā* of Bhavnagar.

[6]) *Vṛhat Kṣetra-samāsa*, i. 36—41, 46.

a complete circle (or cube). In case of a segment of a circle cut off by two parallel chords, Jinabhadra Gaṇi says:

"For the area of the figure, multiply half the sum of its greater and smaller chords by its breadth."[7]) . . . . (i)

or

"Sum up the squares of its greater and smaller chords; the square-root of the half of that (sum) will be the 'side'. That multiplied by the breadth will be its area."[8]) . . . . (ii)

Neither of these rules, the author thinks, will be available for finding the area of the Southern Bhāratavarṣa which, as has been described before, has only a single chord. So he says:

"In case of the Southern Bhāratavarṣa, multiply the arrow by the chord and then divide by four; then square and multiply by ten: the square-root (of the result) will be its area."[9]) . . . .(iii)

None of these rules will give the desired result to a fair degree of accuracy. The rule (i) indeed gives the area of the isosceles trapezium of which the two parallel chords form the two parallel sides. The result obtained by it will therefore be approximately correct only when the breadth is small. Otherwise, as has been observed by the commentator Malayagiri (*c.* 1200) the rule will give only a wrong result[10]). Jinabhadra Gaṇi seems to have been aware of this defect or limitation of the formula. For he has not followed it in practice.

The *rationale* of the rule (ii) cannot be easily determined. It is, however, found to have been followed by the author[11]). It does not occur in the *Gaṇita-sāra-saṁgraha*[12]) of Mahāvîra (*c.* 850 A. D.), the only available treatise on mathematics by a Jaina writer but reappears in a cosmographical work of much later date[13]).

The rule (iii) seems to have been derived by analogy from the rule for finding the area of a semi-circle.

$$\text{Area of a semi-circle} = \frac{1}{2} \cdot \pi \text{ (radius)}^2.$$

Taking $\pi = \sqrt{10}$, the value adopted by the Jainas, this can be written in

---

[7]) *Ibid.* i. 64.

[8]) *Ibid.* i. 66.

[9]) *Ibid.* i. 122.

[10]) Malayagiri points out that by this rule the area of the base of the Vaitāḍhya mountain will come out to be $511731\,^{11}/_{19}$ *yojana*, whereas it is stated in the text (i. 76) to be $512307\,^{12}/_{19}$ *yojana*. He then observes, "This rule for finding the area thus deviates from the truth and hence should be neglected" (i. 64 *Com.*).

[11]) This will be sufficiently corroborated out by the detailed workings in i. 66—76.

[12]) This work with English translation has been edited by M. Rangacarya, Madras, 1912.

[13]) *Laghu Kṣetra-samāsa* of Ratnaśekhara Sûri (1440 A. D.), Rule 192.

the following form in terms of the chord and arrow of the figure:

$$\text{Area of a semi-circle} = \sqrt{10 \times \left\{\frac{(\text{chord} \times \text{arrow})}{4}\right\}^2}$$

which leads by analogy to the rule (iii). This inaccurate rule has been restated in the later Jaina works[14]). However, the discovery of the occurrence of this rule in a work of the sixth century of the Christian era requires modification of a previous statement by the present writer that "we do not find amongst the Hindus, as far as is known, any expression for the area of a segment of a circle before the time of Śrîdhara (*c.* 750)."[15])

Jinabhadra Gaṇi has two rules for calculating the arcs of a circle lying between two parallel chords[16]):

"Subtract the smaller arc from the greater arc; half of what remains after that (operation) has been stated as the side (arc)."

"Square the half of the difference of the chords and add the square of the perpendicular; take the square-root of the result and know that as the side (arc)."

It will be observed that the first rule is an ancient one and truly accurate. As regards the other rule, the commentator remarks, "The second rule of operation which is followed by others[17]) entails more mathematical calculations and is also misleading; so in neglect of that the first one should be followed in every case."[18]) Jinbhadra Gaṇi has indeed followed the first rule.

There are several other important formulae which are clearly based on the properties of proportional triangles and parallel lines. For instance take the case of the Mount Meru or Mandara. It has been described thus in the early canonical works:

"At the centre of Jambudvîpa, there is known to be a mountain, Mandara by name, whose height above (the earth) is 99000 *yojaṇa*, whose depth below is 1000 *yojaṇa;* its diameter at the base is $10090^{10}/_{11}$ *yojaṇa*, at the ground 10000 *yojaṇa*. Then (its diameter) diminishes by degrees until at the top it is 1000 *yojaṇa*. Its circumference at the base is $31910^{3}/_{11}$ *yojaṇa*, at the ground 31623 *yojaṇa*, and at the top a little over 3162 *yojaṇa*. It is broader at the base, contracted at the middle and (still) shorter at the top and is of the form of a cow's tail (i. e., a truncated right cone)."[19])

14) Datta, *Jaina Mathematics*, p. 145.
15) *Ibid.* p. 130.
16) i. 46—47.
17) By whom?
18) i. 48 (*Com.*).
19) *Jambudvîpa-prajñapti*, Sûtra 103.

To find the diameter of any other section parallel to the base, Jinabhadra Gaṇi gives the following rule[20]:

"Wherever is wanted the diameter (of the Mandara): the descent from the top of the Mandara divided by eleven and then added to thousand will give the diameter. The ascent from the bottom should be similarly (divided by eleven) and the quotient subtracted from the diameter of the base: what remains will be the diameter there (i. e., at that height) of that (Meru)."

It is stated further[21]:

"Half the difference of the diameters at the top and the base should be divided by the height; that (will give) the rate of increase or decrease on one side: that multiplied by two will be the rate of increase or decrease on both sides: in going from either ends of the mountain."

"Subtract from the diameter of the base of the mountain, the diameter at any desired place; what remains when multiplied by the denominator (meaning eleven) will be the height (ot that place)."

All these rules will follow at once from the following general formulae:

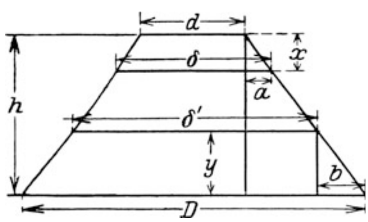


Fig. 2.

$$a = \left(\frac{D-d}{2h}\right) x,$$

$$\delta = a + \left(\frac{D-d}{h}\right) x,$$

$$y = (D - \delta') \frac{h}{(D-d)},$$

$$b = \left(\frac{D-d}{2h}\right) y,$$

$$\delta' = D - \left(\frac{D-d}{h}\right) y.$$

There are several other rules in the *Vṛhat Kṣetra-samāsa* which can be derived exactly in the same way but as more particular cases[22]. To determine the breadth at any place in case of a river gradually widening into the sea, Jinabhadra Gaṇi says[23]:

"In case of all rivers, half the difference between the breadths at the source and the mouth should be divided by the length of the river: the result will be the rate of increase (of the breadth) on one side: that multiplied by two will give the rate of increase on both sides."

Rules similar to those stated above and hence the geometrical properties leading to them, were known to the peoples long before the time of Jinabhadra Gaṇi (529—589 A. D.). For as early as the second century

[20]) *Vṛhat Kṣetra-samāsa*, i. 307—8.

[21]) *Ibid.* i. 309—311.

[22]) For instance see i. 13—4, 149—150, 229—230, 307—11; ii. 25—6, 39—40 etc.

[23]) i. 229—230.

before the Christian era, Umāsvāti very rightly observed that in the case of Mount Meru, "for every ascent of 11000 *yojaṇa*, the diameter diminishes by 1000 *yojaṇa*."[24]) Again, "Half the difference between the breadths at the source and the mouth being divided by 45000 *yojaṇa* and the quotient multiplied by two will give the rate of increase (of the breadth) on both sides, in case of rivers."[25]) (45000 *yojaṇa* is the length of a river.)

They are found even in the canonical works. According to the Jaina cosmography, the Lavana Ocean is annular in shape, having a breadth of 200000 *yojaṇa*. In the undisturbed state, its height as well as depth are said to be varying continouusly from its either banks till at distances of 95000 *yojaṇa* from the banks, the height is 16000 *yojaṇa* and the depth 1000 *yojaṇa*. At the centre is a region of uniform height and depth whose breadth is 10000 *yojaṇa*. The radial section of the Lavana Ocean when in the undisturbed state will be represented by the Fig. 3 where

$AE = A'E' = 95000$ *yojaṇa*,
$CE = C'E' = 16000$ *yojaṇa*,
$ED = E'D' = 1000$ *yojaṇa*,
and $EE' = 10000$ *yojaṇa*.

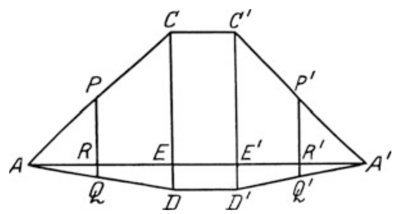


Fig. 3.

To determine the height or the depth of this ocean at any distance from its either banks, *Jîvābhigama-sûtra* says[26]):

"Sir! In the Lavana Ocean how much the depth is known to be increased to? O Gotama! From either banks of the Lavana Ocean, for proceeding every 95 *pada*, the depth is known to be increased to 1 *pada;* for proceeding every 95 *bālāgra*, the depth is known to be increased to 1 *bālāgra;* for proceeding every 95 *likṣā*, the depth is known to be increased to 1 *likṣā;* for proceeding every 95 *yava*, *yava-madhya*, *aṅgula*, *vitasti*, *aratni*, *kuṣki* (? *kiṣku*), *dhanu*, *gavyuti*, *yojaṇa* or *yojaṇa-śata* (lit., hundred *yojaṇa*) (the depth is known to be increased to the extent of that unit); until on proceeding 95000 *yojaṇa*, the depth is known to be increased to 1000 *yojaṇa*. Sir! in the Lavana Ocean, how much the height is known to be increased to? O Gotama! from either banks of the Lavana Ocean, for proceeding every 95 *pada*, the height is known to be

---

[24]) *Tattvārthādhigama-sûtra-bhāṣya*, iii. 9. It shoult be noted that along with this correct rule, the available text of the work contains a few numerical data which, as has also been pointed out by the commentator, are incompatible with it and hence erroneous. The copyists of Umāsvāti's work must be responsible for these faults.

[25]) *Jambudvîpa-samāsa*, ch. iv.

[26]) *Jîvābhigama-sûtra*, Sûtra 172.

increased to 16 *pada* and so on, until on proceeding to 95000 *yojana*, the height is known to be increased to 16000 *yojana*."

These rules can be easily verified thus: From the properties of similar triangles,

$$QR = \frac{ED}{AE} AR = \frac{1}{95} AR,$$

$$PR = \frac{EC}{AE} AR = \frac{16}{95} AR.$$

If $AR = 95\,x$, where x is any unit of measurement, then

$$QR = x, \quad PR = 16\,x.$$

Again it is stated in the *Jambudvîpa-prajñapti*[27]) that at a height of 500 *yojana* above the ground the breadth of the Mount Mandara is $9954\,{}^{6}/_{11}$ *yojana*, while at 63000 *yojana* above it is $4272\,{}^{8}/_{11}$ *yojana*. These values, as can be easily verified, tally with the general formulae (on page 7). There will then remain very little doubt to conclude that those properties of proportional triangles were known to the ancient Hindus in the time of the canonical works.

For the mensuration of a circular annulus of uniform breadth there is practically one rule in the *Vṛhat Kṣetra-samāsa*[28]):

"That which is half the sum of the inner and outer circumferences will be the mean circumference."

$$C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2),$$

where C_1, C_2 and C are respectively the inner, outer and mean circumferences of the annulus. From the various numerical measurements for the circumference of circles of different diameters as recorded in the canonical works, it is obvious that their authors were aware of this rule as also of the property that the circumference of a circle varies as its diameter. It appears further, they knew that for an increase of every 100 *yojana* in the diameter of a circle its circumference will increase by 316 *yojana* (approximately)[29]).

There is no method for finding the area of the annulus, except one which is explicitly stated to be applicable to the case of the Lavana Ocean specially.

"Subtract 10000 from the breadth and halve the remainder; by adding the same number that (which is obtained) is the *koṭi* of the Lavana Ocean. It is 105000 (*yojana*). Multiply the *koṭi* by the mean circumference of the Lavana; that will be the area."[30])

[27]) Sûtra 104—5.

[28]) ii. 7.

[29]) *Jîvābhigama-sûtra*, Sûtra 112.

[30]) ii. 79—80.

$$\text{Area} = \left(\frac{b - 10000}{2} + 10000\right) \times C,$$

where b is the breadth and C the mean circumference of the Lavana Ocean. This formula seems to been have taken by Jinabhadra Gaṇi from an earlier writer whose name is not known to us. For by the application of the rule, the area of the Lavana Ocean comes out to be 99611715000 square *yojaṇa* and this value is remarked to have been fixed (*nirddiṣṭam*) by earlier writers[31]). It is, however, erroneous.

In the canonical works there is nothing to indicate that the mensuration of the volume of a solid except the cube was known in their times. Jinabhadra Gaṇi has the following rule for the same purpose[32]).

"The area of the base multiplied by the height (will give) the volume of mountains which are uniform (in height). In case of seas, excepting the Lavana Ocean, the area of the base multiplied by the height will give the volume."

This rule is found to have been applied in the *Vṛhat Kṣetra-samāsa* in a very few instances only. Of these the one of some interest is to find the volume of the Vaitāḍhya Mountain[33]). This mountain can be considered to be broken up into three portions standing one above the other, each being of uniform breadth as well as of height. The base of each portion will have the form of the segment of a circle cut off by two parallel chords.

To determine the volume of the Lavana Ocean, says Jinabhadra Gaṇi, its area should be multiplied by 17000 *yojaṇa*[34]). The *rationale* of this rule has been indicated by the author in another work, namely *Viśeṣaṇavatî*[35]). By the juxtaposition of the portion on one side of the central belt of uniform height (say the portion $A'C'D'$ in the Fig. 3) on the other, he observes, this sea can be looked upon as one of uniform height of 17000 *yojaṇa*, but of a smaller base. This is not right; and the final result will be further vitiated on account of the error in calculating the area.

The sources on which we have mainly relied for information about the knowledge of the science of geometry amongst the early Jainas are unfortunately very uncertain as regards their dates. The earliest canonical works whose authorship is traditionally attributed to Mahâvîra (died 527 B. C.), the great founder of the Jainism, are referred by modern

---

31) ii. 81.

32) i. 65.

33) i. 77—82.

34) ii. 82.

35) I have not seen this work. But the relevant portion has been quoted by Malayagiri in his commentary.

scholars to the period 500—300 B. C. The same uncertainty exists about the time of Umāsvāti. For reasons indicated elsewhere[36]), we have placed him about the middle of the second centry B. C. But he may be posterior by a century or two. Jinabhadra Gaṇi lived in the years 529—589 A. D. Thus our sources cover a period extending over a thousand years. We have not referred to cosmographical works of later times as they are merely compilations from the earlier ones.

To recapitulate: in the earlier period (500—300 B. C.) the Jainas had a certain amount — a fair amount indeed — of the knowledge of the geometry of circles, circular segments and proportional triangles. In the suceeding period though we find a clear and explicit formulation of those properties, the Jainas added practically nothing new to their stock of knowledge of geometry. Towards the latter part of the period attempts were made to determine the area of a circular segment and volume of certain solids. But all those ended in failure. Only a few very roughly approximate formulae were obtained. But most of them were discarded by the mathematicians. For they do not appear in the *Gaṇita-sāra-saṁgraha* ("Collection of the essence of Mathematics") of Mahāvîra (*c*. 850 A. D.).

[36]) Datta, *Jaina Mathematics.*

Die Harpedonapten oder Seilspanner und Seilknüpfer.

Von Solomon Gandz, The Rabbi Isaac Elchanan Theological Seminary, New York City.

(Eingegangen am 25. 3. 30.)

I. Geschichtliches.

§ 1. Die Demokritstelle und ihre Echtheit.

Demokrit, (c. 460—370 B. C.) berühmt als der lachende Philosoph, sagte von sich: „Im Konstruieren von Linien unter Erörterung der Beweise hat mich keiner je übertroffen, selbst nicht die sogenannten Harpedonapten der Ägypter."[1]) Die Echtheit dieser Stelle wurde fast allgemein, sowohl von den Geschichtsschreibern der griechischen Literatur als auch von den Historikern der Mathematik, stillschweigend angenommen[2]). Diels[3]) war der erste, der die Echtheit in Frage gestellt hatte. Er glaubte, daß „das Motiv der Stelle, das seit Euhemeros in der alexandrinischen Reiseromantik beliebt wird, die Ruhmredigkeit und die Gelehrsamkeit die Fälschung evident machen." Die Stelle soll, nach Diels' Ansicht, in Ägypten, in gutalexandrinischer Zeit, gefälscht worden sein. Diels' Argumente werden jedoch von einer Autorität wie Theodor Gomperz[4]) bestritten, der gegen die „ihm als völlig grundlos geltende Athetese" Verwahrung einlegt. Gomperz sagt mit Recht: „als vermeintlicher Grund der Verwerfung bleibt nichts übrig, als die darin zutagetretende „Ruhmredigkeit und Gelehrsamkeit". Ich vermag nicht einzusehen, wie diese Indizien ‚die Fälschung evident' machen können." Es hieße doch in der Tat die gesunde Kritik übertreiben, wenn man eine sonst gut bezeugte Stelle auf Grund solch vager Vermutungen für gefälscht erklären wollte. Sei dem aber wie es wolle, für unsere Zwecke bleibt es sich gleich, ob die Stelle um 200 Jahre früher oder später anzusetzen sei. Wie wir später (§ 5) sehen werden, ist ja die Existenz von Harpedonapten in Ägypten durch Inschriften bezeugt, die auf die Zeit Sethos I. (c. 1400 B. C.) zurückgehen.

§ 2. Die Bedeutung des Wortes.

Das Wort Harpedonapten bedeutet Seilspanner oder Seilknüpfer. Es ist eine Zusammensetzung zweier griechischer Wörter: *ἁρπεδόνη* =

---

[1]) Clemens Alexandrinus, *Stromata*, ed. Potter, I, 357: *γραμμέων συνθέσιος μετὰ ἀποδείξιος οὐδεὶς κώ με παρήλλαξεν, οὐδ' οἱ Αἰγυπτίων καλεόμενοι Ἁρπεδονάπται.* Siehe auch Cantor, *Geschichte der Mathematik*, I, 4. Auflage, S. 104.

[2]) Vgl. *Encyclopaedia Britannica*, 14. Aufl., VII, S. 187; Pauly-Wissowa, *Real-Encyclopädie der Klassischen Altertumswissenschaften*, unter *Demokrit*; Zeller Ed., Grundriß der Geschichte der griech. Philosophie, 4. Aufl., S. 66; Cantor, *loc. cit.*, S. 104, 191; D. E. Smith, *History of Mathematics*, I, S. 80/81; II, S. 288; T. L. Heath, *Greek Mathematics*, I, S. 121; u. a. m.

[3]) *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 1. Aufl., Berlin 1903, S. 459/60, Fragment 299.

[4]) In „Beiträge zur Kritik und Erklärung griechischer Schriftsteller", *Sitzungsberichte der Wiener Akad. d. Wissenschaften*, Nr. 152, 1905, S. 23f. Vgl. auch Christ-Schmid, *Geschichte der Griechischen Literatur*, I[6], München 1912, S. 630, Anm. 2.

Seil, Strick, und ἅπτω = heften, anknüpfen, anfassen, berühren, ergreifen, handhaben. Das ist zuerst von Moritz Cantor entdeckt und im Jahre 1877 öffentlich bekannt gemacht worden.[5])

Dieser Sachverhalt ist merkwürdigerweise von den Verfassern der besten griechischen Wörterbücher übersehen worden. Franz Passow[6]) erwähnt nicht einmal das Wort. Im *Thesaurus Graecae Linguae*[7]) wird das Wort wohl gebracht, muß aber eine Reihe „entsetzlicher Deutungsversuche“[8]) über sich ergehen lassen, die alle das richtige verfehlen. In der dritten Auflage von Pape's griechischem Wörterbuche, die 1888 erschienen ist, findet sich freilich bereits die richtige Erklärung des Wortes. Aber Liddel-Scott's Griechisch-Englisches Wörterbuch weiß noch 1901 nichts davon. Die Harpedonapten werden da noch einfach als der Name der weisen Männer Ägyptens angegeben und als Erklärung wird auf Sturz (lebte 1762—1832) hingewiesen, der vermutete[9]) „*ob redimitum caput*“, „wegen des umhüllten Hauptes“, und auf das Lateinische *flamen* verwies. Erst die neueste Ausgabe des Liddel-Scottschen Wörterbuches[10]), an der Sir Heath für die mathematischen Termini mitarbeitete, hat die richtige Erklärung.

§ 3. Was sind die Harpedonapten.

Freilich „auch die richtige Übersetzung reicht zum Verstehen jenes Demokrit-Satzes nicht aus, wenn man nicht weiß, wer jene Seilspanner waren, denen Demokrit in seinem ruhmredigen Vergleiche ein hochehrendes Zeugnis geometrischer Gewandtheit ausstellte, und worin ihre Obliegenheiten bestanden.“ Dies sagt schon Cantor[11]) mit Recht, und liefert selber den Beweis dafür. Cantor hat nämlich wohl die richtige Übersetzung des Wortes erkannt, das Wesen und die Obliegenheiten der Harpedonapten scheint er aber doch verkannt zu haben. Cantor meint nämlich, daß die Seilspanner die Aufgabe hatten, einen rechten Winkel zu konstruieren. Sie haben gewußt, daß drei Seiten von der Länge 3, 4, 5 zu einem Dreiecke verbunden ein solches mit einem rechten Winkel zwischen den beiden kleineren Seiten bilden. Das Seil hatte die Länge 12 und war durch Knoten in Abstände von 3, 4, 5 geteilt. Es wurde nun an den Pflöcken befestigt und bildete den rechten Winkel.

---

[5]) In seinem Aufsatze „Gräkoindische Studien“ in der Historisch-Literarischen Abteilung der Zeitschrift für *Mathematik und Physik*. Bd. XXII, S. 23ff.

[6]) *Griech. Wörterbuch*, 4. Aufl. Leipzig 1831. Auch in der Anlage dazu wird das Wort ausgelassen.

[7]) Ed. Dindorf, Paris 1831—56, I, 2 S. 2032.

[8]) Cantor, *loc. cit.*, S. 23, Anm. 68.

[9]) *De Dialectu Macedonica*, 1808, S. 99.

[10]) Oxford, 1925, S. 246: „rope-fasteners, applied to Egyptian geometers“.

[11]) *Geschichte der Mathematik*, I^4, 104.

Nun ist aber von alldem in den Urkunden keine Rede. Wir hören nur, daß bei der Zeremonie der Grundsteinlegung der König den Strick hält und spannt. Anfang und Ende eines Baues wurden durch die Feier der Grundsteinlegung ausgezeichnet. Die „Ausspannung des Strickes" war aber eine der wichtigsten Zeremonien der Grundsteinlegung. Nissen[12]) meint daher, daß „vom Spannen der Meßschnur die ägyptischen Ingenieure bei den Griechen den Namen Harpedonapten führen". Nach Nissen waren es also die Bauarchitekten und Ingenieure. W. Otto meinte ursprünglich[13]), daß sie den *ἱερογραμματεῖς*, d. i. den heiligen Schreibern oder den gelehrten Schreibern der Gottesbücher gleichzusetzen seien. Später[14]) schloß er sich der Ansicht Nissens an.

Die allgemeine Auffassung ist jedoch, daß es die Geometer und Landmesser waren. Diese Auffassung finden wir schon bei Röth, Bretschneider und Hankel, denen die richtige Bedeutung des Wortes noch nicht bekannt war. Eduard Röth war der erste, der in seiner *Geschichte unserer abendländischen Philosophie*[15]) den ägyptischen Einfluß auf griechische Wissenschaft und Philosophie stark betonte. So hat er auch zuerst auf die Bedeutung dieser Demokrit-Stelle für die Geschichte der Mathematik hingewiesen und intuitiv die Harpedonapten als die Geometer erkannt. Wir wollen ihn, der jetzt ganz vergessen ist, wörtlich zitieren[16]): „Rührt aber die demonstrative Methode von Pythagoras her, dann ergibt sich unmittelbar weiter, daß Pythagoras sie aus Ägypten mitgebracht habe. Denn in einer uns erhaltenen Stelle des Demokrit . . . rühmt er sich in bezug auf die Mathematik, daß ihn im Konstruieren von Figuren mit Beweisführung niemand übertroffen habe, nicht einmal einer der ägyptischen Geometer. Nun besteht aber die demonstrative Methode bei Euklid, gerade aus diesen beiden . . . Hauptbestandteilen; einer Hilfskonstruktion . . . , und alsdann aus einer regelmäßigen Beweisführung. Diese Form der mathematischen Sätze, die demonstrative Methode, war also schon dem Demokrit bekannt . . . Zugleich fand aber Demokrit dieselbe Form der mathematischen Sätze auch bei den ägyptischen Geometern vor; sie war also auch die Form der ägyptischen Mathematik". In einem andern Zusammenhange[17]) zitiert Röth auch eine hierher gehörige Stelle des Theon Smyrnaeus[18]), die besagt, „daß

[12]) *Orientation*, S. 33; vgl. auch S. 30ff.

[13]) *Priester und Tempel im hellenistischen Ägypten*, I (1905), S. 88, Anm. 8, Ende. Den Hinweis auf dieses Werk verdanke ich Dr. O. Neugebauer.

[14]) *Ib.* II, S. 316.

[15]) Mannheim 1846—58; 2. Aufl., Mannheim 1862.

[16]) *Geschichte unserer abendländischen Philosophie*, 2. Aufl., II, S. 589/90; II, 2, S. 144, Anm. 878 B.

[17]) *Ib.* II, S. 87; II, 2, S. 3, Anm. 51.

[18]) *Liber de astronomia*, ed. Martin, S. 270. *οἱ μὲν ἀριθμητικάς τινας, ὥσπερ Χαλδαῖοι, μεθόδους, οἱ δὲ καὶ γραμμικάς, ὥσπερ οἱ Αἰγύπτιοι.*

die mit der Astronomie verbundene mathematische Spekulation der Ägypter mit Vorliebe durch geometrische Methoden ihre Probleme zu lösen gesucht habe, während die Chaldäer mehr die Rechnung ausgebildet, und die astronomischen Aufgaben vorzugsweise berechnet hätten." Den Spuren Röths folgen dann Bretschneider[19]) und Hankel[20]). Das ist auch die Übersetzung von Diels[21]), Gomperz[22]), Pape[23]), Liddel-Scott[24]), Smith[25]), Heath[26]) und Peet[27]).

Während aber Heath gleichzeitig die Theorie Cantors sich zu eigen macht, wird sie von Peet aufs entschiedenste bekämpft. Peet sagt: „For this last statement[28]). I can find no foundation whatsoever; nothing in Egyptian mathematics suggests that the Egyptians were acquainted even with special cases of Pythagoras' theorem concerning the squares on the sides of a right-angled triangle. That the harpedonaptai were landmeasurers on the other hand is most probable, indeed we can even see such persons at work in the pictures on the wall of Egyptian tombs... We see ... men equipped with ropes and writing material measuring a field[28a]) ... these persons might most suitably be described as „rope-stretchers"; the very unit by which fields were measured was a „reel of roope" of 100 cubits in length. This process of land-measuring with a rope, the Egyptian mame of which is not known, has been confused by historians of mathematics with the ceremony called *pd šś* „the stretching of the cord." This was one of the initial ceremonies at the foundation of a temple. The king ... took a sighting of the pole-star through a cleft stick, another person standing north of him with a plumb-bob attached to a wooden arm.[29]) Each then drove a stake into

---

[19]) *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, 1870, S. 12.

[20]) *Geschichte der Mathematik*, 1874, S. 84.

[21]) *Loc. cit.* „Seilknüpfer = Landmesser".

[22]) *Loc. cit.* „Seilknüpfer = Landmesser".

[23]) *Griech. Wörterbuch.* „Feldmesser".

[24]) *Griech.-Englisches Wörterbuch*, „Egyptian geometers".

[25]) *History of Mathematics*, I, 81; II, 288.

[26]) *Greek Mathematics*, I, 121 ff.

[27]) *Rhind Mathematical Papyrus*, S. 32.

[28]) Daß die Harpedonapten rechte Winkel konstruierten.

[28a]) Abbildungen von Feldmessern mit Meßstrick und Reservestriken, an deren Anfang der Kopf des Ammonwidders sich befindet, kann man auch sehen bei Wreszinski, *Atlas zur altägyptischen Kulturgeschichte*, Leipzig, 1923, Tafeln 11, 189, 191, 231, 243, 424. Dr. Naugebauer verdanke ich den Hinweis auf dieses Werk. Siehe auch die Stellen in Bissing-Kees, weiter unten, Anm. 40 a.

[29]) „Examples of these two instruments, the diopter and the arm with a plumb line, have been found; ... They are doubtless the instruments called *ὡρολόγιον* and *φοὶνιξ ἀστρολογίας* ... It is significant that the priest who uses them is here called not *ἁρπεδονάπτης* but *ὡροσκόπος*.

the ground in front of him, and a cord stretched between the two gave a true north and south line and enabled the four corners of the temple to be fixed. Here the stretching of the cord is used not necessarily in measurement, but in the fixing of the orientation[30]).“

Der Ansicht Peets schließt sich auch George Sarton an, der in der Besprechung des Buches Peets[31]) gerade diese Stelle als ein Muster trefflicher Beweisführung und klarer Darstellung wörtlich zitiert. Auch der Schreiber dieser Zeilen möchte sich, mit Ausnahme eines Punktes[32]), dieser Auffassung anschließen, und im folgenden die in der Tat treffliche Darstellung Peets zur Grundlage seiner Ausführungen machen. Drei Elemente treten hier klar hervor:

1. Das Seil ist das übliche Meßinstrument in der Landvermessung und zugleich die Meßeinheit.
2. Die Seilspanner sind die Landvermesser.
3. Die Seilspannung ist aber auch eine wichtige Anfangszeremonie bei der Grundsteinlegung eines Tempels. Der Zweck ist die Festsetzung der Orientation.

II. Die Seilspanner.

§ 4. Die Seilspannung als Grundsteinlegungs-Zeremonie bei den Ägyptern.

Wir gehen nun vom letzten Punkte aus und möchten zuerst die Seilspannung bei den Ägyptern anläßlich der Grundsteinlegung eines Tempels behandeln. Wir erfahren diesbezüglich[33]), daß in allen bildlichen Darstellungen der Grundsteinlegung eines Tempels die neben dem Könige auftretende Göttin stets den Meßstrick halte und durch eingeschlagene Pflöcke die Eckpunkte des Heiligtums festlege. Wie die Grundsteinlegung, so geschieht auch die Seilspannung durch den König[34]), die Göttin oder den vornehmsten Priester. So wird Tutmosis III. geschildert, „als er den Strick spannte über Ammon prächtig am Hori-

[30]) Vgl. noch Borchardt, *Altägyptische Zeitmessung*, S. 51; Nissen, *Orientation*, S. 31ff. und S. 88; Cantor, *loc. cit.*, I^4, S. 104.

[31]) *Isis*, VI, S. 556.

[32]) Daß nämlich die Seilspannung bei Bauten den Zweck hatte, die Orientierung festzustellen.

[33]) Vgl. Brugsch, „Bau und Maße des Tempels von Edfu“, in *Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde*, VIII (1870), S. 153f.; Dümichen, *ebd.*, X, S. 38f., sowie *Baugeschichte des Denderatempels*, Straßburg, 1877, S. 32f.; H. Nissen, *Orientation*, Berlin 1906, S. 30—33; Cantor, *loc. cit.*, I^4, S. 104f.

[34]) In ähnlicher Weise finden wir auch den sumerischen König Ur-Nina (*c.* 3100 B. C.) auf einer Steinplatte abgebildet mit einem Maurerkorb auf dem Haupte. Die Steinplatte wurde in Lagasch gefunden und stellt die Zeremonie bei der Grundsteinlegung eines Tempels dar. Siehe M. Rostovzeff, *A History of the Ancient World*, I, S. 24 und die Tafel ebd.

zont"[35]). Altertümliche Reliefs, die aus einem Sonnentempel der V. Dynastie in Abusir stammen, führen die einzelnen Handlungen des Königs vor: das Seilspannen in Gemeinschaft mit der Göttin Safech, das Abschreiten der Baustelle, das Ausheben der Baugrube usw.[36]). Die Urkunde, welche den Bau des Sonnentempels zu On (Heliopolis) schildert[37]), berichtet am Schlusse: Der König war geschmückt mit der Doppel-Federkrone, alle Wissenden folgten ihm. Der oberste Vorlese-Priester des göttlichen Buches spannte den Strick und schlug den Pflock in die Erde." Eine Inschrift, die einen Rückblick auf die Gründung des Tempels von Abydos durch Sethos I. (c. 1400 B. C.) wirft, läßt die Göttin zum König also sprechen: „Der Schlägel in meiner Hand war von Gold, als ich schlug den Pflock mit ihm und Du warst bei mir in Deiner Eigenschaft als Harpedonapt." Auf den Bildern erscheint der König mit der Osiris-Krone der Göttin gegenüber. Beide halten in der Rechten eine Keule und schlagen damit je einen langen Pflock in den Boden. Um die zwei Pflöcke läuft ein an den Enden verbundenes Seil, das straff angezogen wird. An den Wänden des Hathortempels von Dendera liest man[38]): „Der lebende Gott, ... der Herrscher des Landes spannt den Strick in Freude."

Auf den Inschriften des Tempels zu Edfu (237—57 B. C.) spricht der König wie folgt[39]): „Ich habe gefaßt den Holzpflock und den Stiel des Schlägels, ich halte den Strick gemeinschaftlich mit der Göttin Safech. Mein Blick folgt dem Gange der Gestirne. Wenn mein Auge an dem Sternbilde des großen Bären angekommen ist und erfüllt ist der mir bestimmte Zeitabschnitt der Zahl der Uhr, so stelle ich auf die Eckpunkte Deines Gotteshauses." — „Er schlägt mit der in seiner rechten Hand befindlichen Keule einen Pflock in den Erdboden und ein gleiches tut ihm gegenüber Safech, die Bibliotheksgöttin, die Herrin der Grundsteinlegung. Es ist klar, daß die diese beiden Pflöcke verbindende Gerade die Richtung nach Norden, den Meridian des Tempels, bezeichnet, daß durch sie die gewünschte Orientierung des Grundrisses zur Hälfte vollzogen ist. Allerdings nur zur Hälfte! Die Wandungen des Tempels sollen senkrecht zueinander stehen, und demgemäß ist es nicht weniger notwendig, in einer zweiten Handlung diese mehr geometrische als astronomische Bestimmung zu treffen." So räsonniert Cantor[40]), und mit

---

[35]) Nissen, *loc. cit.*; Erman, *Ägypten*, S. 603; in der neuen Ausgabe durch Ranke, Tübingen 1923, S. 542.

[36]) Nissen, *loc. cit.*, S. 31; *Zeitschrift f. äg. Sprache etc.*, XXXVIII (1900), Tafel 5.

[37]) Siehe Nissen, *loc. cit.*; *Zeitschrift f. äg. Sprache etc.*, XII (1874), S. 85f.

[38]) Dümichen, *Baugeschichte etc.*, S. 30; Nissen, *loc. cit.*, S. 33.

[39]) Cantor, *loc. cit.*

[40]) *Loc. cit.*

Recht. Wenn er aber die Schlußfolgerung zieht, daß die Seilspannung den Zweck hatte, den rechten Winkel zu konstruieren, so liefern die Quellen dafür nicht die mindeste Begründung. Durch die Seilspannung konnte man offenbar weder den rechten Winkel konstruieren, noch die Orientierung ausfindig machen. Die Orientierung wurde durch das Visierinstrument und den Polarstern gefunden. Die Seilspannung hat aber die einmal aufgefundene Orientierung, und wohl auch die rechtwinklige Richtung, festgehalten. Durch das Spannen des Seiles wurde der Bauplatz abgesteckt, die Grenzen, Maße und Richtungen dem Plane gemäß bezeichnet und festgelegt. Ohne diese Seilspannung konnte ja der Bau gar nicht vor sich gehen. Daher die Seilspannung als eine der wichtigsten Zeremonien beim Beginne eines jeden Baues. Daher heißt auch nach ihr das ganze Gründungsfest „Fest des Seilspannens“[40a]. Dies wird auch bestätigt durch die im folgenden zu zitierenden Bibelstellen, die vom Seilspannen handeln.

§ 5. Die Seilspannung als Grundsteinlegungs-Zeremonie in der Bibel.

Merkwürdigerweise hat man es bis jetzt, in diesem Zusammenhange, noch nicht beachtet, daß wir es auch mit hebräischen Harpedonapten zu tun haben, und daß auch in der Sprache der Bibel das Spannen des Seiles als die Hauptzeremonie bei jeder Grundsteinlegung genannt wird. Hier, in der Bibel, hören wir aber nichts von einer Orientierung, noch hören wir etwas von rechtwinkligen Konstruktionen. Die Seilspannung hat nur den Zweck, den Bauplatz und die einzelnen Abteilungen plangemäß abzustecken und die geradlinige Richtung festzulegen. Das Seil bezeichnet die Grenzen und zeigt den Bauleuten an, wo sie bauen sollen.

So fragt Gott den Job[41]: „Wo warst Du, als ich die Erde gründete . . . Wer hat ihre Pläne[42] festgestellt, wenn Du es weißt, oder wer das Seil über sie ausgespannt? Auf was sind ihre Säulenfüße eingesenkt, oder wer hat ihren Eckstein gelegt?“ Wir sehen hier den Vorgang bei der Errichtung eines großen Baues klar vorgezeichnet. Der Architekt entwirft

[40a]) Vgl. Bissing-Kees, *Untersuchungen zu den Reliefs aus dem Re-Heiligtum*, in *Abhandlungen d. Bayer. Akad. d. Wiss.*, Phil. Hist. Kl. 32,1 (1922) S. 4. Kees, *ib.*, und in *Das Re-Heiligtum des Rathures*, Bd. 2, S. 3; Bd. 3, S. 4, spricht auch immer nur vom „Abstecken“, oder „Aufmessen des Bauplatzes durch die Seilspannung“. Den Hinweis auf Bissing-Kees verdanke ich wiederum Dr. Neugebauer, den Prof. Kees darauf aufmerksam gemacht hat.

[41]) Iob 38, 4—6; V. 5 lautet: מי שם ממדיה כי תדע או מי נטה עליה קו.

[42]) Das Wort מֵמַד wird gewöhnlich als „Maß“ übersetzt. Der Sinn ist aber, wer hat ihre Maße auf dem Plane festgelegt. Ich glaube aber, daß es bedeutet: „die Stelle, der Papyrus, wo das Maß hingezeichnet wird; der Plan“; vgl. die im folgenden zitierte Stelle von Brugsch.

den Plan und stellt die Maße auf dem Papyrus fest. Dann wird das Seil ausgespannt, die Grenzen des Bauplatzes werden abgesteckt, Maße und Richtung auf dem Boden durch das Seil bezeichnet. Sodann wird das Fundament gelegt und die Ecksteine werden aufgestellt. Der Herr fragt nun Job, ob er denn den Architekten oder den Harpedonapten des Erdenbaues kenne? In ähnlicher Weise ging es auch in Ägypten zu[43]). „Der Papyrus, auf welchem der Grundplan des zukünftigen Gebäudes nach Raum und Maß gezeichnet stand, diente als Führer für die Absteckung des Baugrundes. Die Meßkette, nach der ‚heiligen Elle' abgeteilt, kam zur Verwendung und die vier Eckpunkte des Allerheiligsten, mit welchem der ganze Bau seinen Anfangs- und Ausgangspunkt nahm, wurden festgesteckt. Der König tat dies wiederum in eigener Person, indem er mit einem hölzernen Schlägel, an Stelle unseres Hammers, vier hölzerne Stangen in den Boden eintrieb, um welche die Meßkette gelegt wurde." Der Prophet Zacharia verheißt den Wiederaufbau Jerusalems mit folgenden Worten[44]): „Darum spricht der Herr also: Ich will mich Jerusalem in Barmherzigkeit wieder zuwenden. Mein Haus soll darin aufgebaut werden, und ein Seil soll über Jerusalem ausgespannt werden." Späterhin[45]) wird diese Prophezeiung noch bestärkt durch die Vision: „Und ich blickte auf und sah einen Mann, der in seiner Hand eine Meßschnur hielt. Und ich sprach: Wohin gehst du? Und er antwortete: Jerusalem zu messen, zu sehen, wie groß seine Breite und wie groß seine Länge sei."

Wir werden wohl nicht fehlgehen, wenn wir annehmen, daß dieser Engel eben den Harpedonapten darstellen sollte, der hinausging, um das Seil über Jerusalem zu spannen. Er tat dies aber nicht um die astronomische Richtung, sondern um die Maße festzustellen. Noch viel klarer geht dies hervor aus der Stelle in Jes. 44, 13: „Der Holzschnitzer hat ein Seil ausgespannt über den Holzblock, um das Götzenbild zu schnitzen." Er tut dies wohl nur, um das Maß zu nehmen. Ebenso heißt es in Jes. 28, 16—17: „Darum, so spricht der Ewige, der Herr: Ich will in Zion einen Grundstein legen, einen geprüften Stein, einen kostbaren Eckstein.... Und ich will Recht zum Seile und Gerechtigkeit zum Senkblei machen." Das gespannte Seil und das Senkblei bildeten die Richtschnur beim Bauen, das eine in horizontaler, das andere in vertikaler Richtung, damit der Bau geradlinig und rechtwinklig aufgeführt werde. Dann lesen wir noch in Jeremia 31, 38—39: „Fürwahr, spricht der Herr, kommen wird die Zeit, da die Stadt (Jerusalem) dem Herrn wieder aufgebaut werden wird, vom Turme Hananels bis zum Ecktore.

[43]) Siehe H. Brugsch, *Steinschrift und Bibelwort*, 2. Aufl., Berlin 1891, S. 281f. Brugsch hat aber nicht auf die Parallelen in der Bibel hingewiesen.

[44]) Zach. I, 16 ביתי יבנה בה ... וקוה ינטה על ירושלם. [45]) II, 5—6.

Und weiter noch soll die Meßschnur hinausgehen, geradeaus bis zum Hügel Gareb."

Aus all diesen Stellen geht klar und unzweideutig hervor, daß das gespannte Seil einfach die Meß- und Richtschnur war, die den Bauleuten Maß und Richtung vorgezeichnet hat und auch als Grenzlinie diente.

§ 6. Die Seilspannung als Zeremonie beim Niederreißen eines Baues.

Für die oben ausgesprochene Ansicht zeugt auch ganz besonders der Umstand, daß die Seilspannung als die einleitende Zeremonie auch dort genannt wird, wo es sich um das Zerstören und Niederreißen eines Baues handelt. So klagt der Dichter[46]): ,,Beschlossen hat der Herr zu zerstören die Mauer der Tochter Zion, er spannte das Seil, wandte seine Hand nicht ab vom Niederreißen." Also: er faßte den Beschluß, trat dann an die Arbeit heran und spannte das Seil, und setzte das Werk der Zerstörung unermüdlich bis zum Ende fort. An einer anderen Stelle[47]) wird die Zerstörung Jerusalems mit den Worten verkündet: ,,Und spannen will ich über Jerusalem das Seil Samaria's und [anlegen] das Senkblei des Hauses Ahab's, und wegwischen will ich Jerusalem, wie man eine Schüssel [rein] abwischt." Samaria und das Haus Ahab's waren um diese Zeit bereits zerstört. Seil und Senkblei wurden dort zum Niederreißen gebraucht. Ein anderes Mal spricht der Prophet ausdrücklich von einer Seilspannung des *Tohu wa bohu*, des Chaos und der Zerstörung[48]): ,,Und er wird darüber ausspannen das Seil des Tohu und das Senkblei des Bohu[49])." In Amos (7, 7—8) ist auch die Rede von einem Bleilot der Zerstörung.

Es ist nun klar, daß bei all dem weder von der Konstruktion eines rechten Winkels, noch von einer Orientation die Rede sein kann. Die Seilspannung hatte hier wohl nur den einen Zweck, den Ort abzustecken, wo das Werk der Zerstörung vor sich gehen soll. Eingestehen möchte ich jedoch, daß es mir nicht ganz klar ist, wozu das Senkblei angewendet wurde[50]). Dies geht uns aber hier nicht an, da wir uns nur mit der Seilspannung befassen.

---

[46]) Klagelieder, 2, 8 חשב יי להשחית חומת בת ציון נטה קו . .

[47]) 2 Reg. 21, 13 ונטיתי על ירושלם את קו שמרון ואת משקלת בית אחאב.

[48]) Jes. 34, 11 ונטה עליה קו תהו ואבני בהו.

[49]) Yahuda in *Die Sprache des Pentateuch in ihren Beziehungen zum Ägyptischen*, S. 129, Anm. 3, gibt eine Erklärung zu dieser Stelle, die aber wenig erklärt. Merkwürdigerweise übersieht er den Zusammenhang zwischen der biblischen und ägyptischen Seilspannung.

[50]) Die Kommentare sagen gewöhnlich, daß es beim teilweisen Einreißen benötigt wurde. Der Ausdruck ist dann auch dort angewendet worden, wo ein Bau ganz und völlig niedergerissen wurde; siehe Dillmann zu Jes. 34, 11.

§ 7. Das Seil als Meßinstrument und Meßeinheit.

Wir finden das Seil als das älteste Meßinstrument, und daher auch als Meßeinheit, in Anwendung bei fast allen antiken Völkern. Dies ist ganz natürlich so; hat sich ja die Meßschnur bis auf den heutigen Tag als ein praktisches Ding erhalten. Die Ägypter haben das *Khet* = „Strick“ als ein Längenmaß von 100 Ellen. Das Quadrat des *Khet* war die Einheit des Flächenmaßes, das ägyptische *Setat* und das griechische *aroura* (*ἄρουρα*)[51]). Die Sumerer und Akkadier hatten das *ashlu* oder *šŭ* = „Leine, Strick“, und das *šŭbban* = „der halbe Strick“ als Maßeinheiten. Das *šŭ* war = 20 Rohr = 120 Ellen; das *šŭbban* = 10 Rohr = 60 Ellen[52]). In Palästina war noch zur Zeit der Mišna[53]) das Seil das übliche Feldmaß. Wenn jemand ein genaues Maß verkaufen wollte, so sagte er[53a]): „ich verkaufe dir ein Maß mit dem Seile“. Die Vorschrift bestand jedoch, daß man zu religiösen Zwecken, bei Ausmessung der Sabbatgrenze, nur mit einem Seile von 50 Ellen messen solle[54]). Dies war also die alte hebräische Maßeinheit für die Feldmessung. Wir haben demgemäß im Dezimalsystem das Hebräische Seil (*ḥebel*) zu 50 Ellen, gleich dem halben ägyptischen *Khet*, während im Sexagesimalsystem das sumerische *šŭbban* zu 60 Ellen dem halben *šŭ* entsprach.

Auch in der Bibel haben wir das Seil als das übliche Meßinstrument. So lesen wir, daß ein Seil von 30 Ellen das eherne Meer umspannte[55]). In Jes. 34, 17 heißt es „und seine Hand hat das Land mit dem Seile unter sie verteilt“, und Amos (7, 17) sagt: „Dein Land soll mit dem Seile unter sie verteilt werden. König David schlug die Moabiter[56]) „und maß sie mit einem Seile. Er ließ sie nämlich auf die Erde hinlegen und maß je zwei Seile zum Hinrichten und je ein Seil um sie am Leben zu lassen.“ Das Wort *ḥebel* bedeutet: ein Seil, Strick, dann: die Länge eines Seiles, ein bestimmtes Maß, ein abgemessenes Teil, (חבל נחלה „ein Seil des Erbes“, ist ein Erbteil), ein Besitztum, ein Landstrich und Be-

---

[51]) Vgl. Peet, *Rhind Mathematical Papyrus*, S. 24f. Dr. Neugebauer schreibt mir: „Äg. *ḫt* = 100 Ellen ist auch explizite als *ḫtn nwḥ* ‚Rute aus Seil‘ belegt; vgl. Gardiner, *Egyptian Grammar*, 1927, S. 199. Sicherlich ist auch das Zahlzeichen 100, das ja dem Determinativ des ‚Seiles‘ gleich ist (@), daher genommen – übrigens ein schönes Beispiel für die ursprünglich gegenständliche Bedeutung der Zahlworte.“ Viell. wäre überhaupt hebr. *ḥuṭ* zu dem äg. *ḫt* zu stellen?

[52]) Siehe O. Neugebauer, *Zur Entstehung des Sexagesimalsystems*, Berlin 1927, S. 22; Thureau-Dangin in *Revue d'Assyriologie*, XVIII, und auch XVII, S. 133; Deimel, *Sumerische Grammatik*, § 45.

[53]) Schlußredaktion um 200 C. E.

[53a]) *Mišna* B. B. VII, 3 מדה בחבל אני מוכר לך.

[54]) *Mišna Erubin*, V, 4 (57b); vgl. auch weiter § 10.

[55]) 2 Reg. 7, 23; 2 Chr. 4, 2; vgl. auch Zacharia II, 5—6, zitiert oben § 5.

[56]) 2. Sam. 8, 2 וימדדם בחבל השכב אותם ארצה וימדד שני חבלים להמית ומלא החבל להחיות.

zirk. So hören wir von einem „Seile (Landstrich, Gegend) des Meeres“ oder von einem „Seile (Bezirk) Argob“. Selbst der übliche Ausdruck für Grenze, *gebul*, bedeutet ursprünglich „ein gedrehter Strick“, von dem Seile, mit dem die Grenze abgesteckt oder „gezogen“ wurde[57]).

Die Griechen hatten ein Landmaß *ὁ σχοῖνος* = „ein Strick“[58]), und die Inder hatten ihre *Çulvasutras*, „Seilvorschriften“ (*çulva* = Seil), die geometrisch-theologische Fragen behandelten und die Seilspannung zum Zwecke der Konstruktion von rechten Winkeln lehrten[59]).

§ 8. Die Seilspanner als Landmesser.

Es ist nun selbstverständlich, daß das Seil ausgezogen, gespannt werden müsse, um ein korrektes Maß zu liefern. So gibt die Tosefta[60]) die ausdrückliche Vorschrift: „Der Feldmesser solle mit seiner ganzen Kraft [das Seil] spannen und messen[61]).“ Selbst die üblichen hebräischen und aramäischen Ausdrücke für „messen“, *madad*, *mašaḥ*, *mataḥ*, bedeuten ursprünglich „ausdehnen, spannen“. Die Landmesser heißen daher, im Aramäischen und in der Sprache der *Mišna*, *mašōḥā*, im Arabischen *massāḥ*, im Assyrischen *mašiḥānu*, d. i. Seilspanner. Das Meßseil heißt *mešīḥa*, der Flächeninhalt heißt *mešīḥa*, arabisch *misāḥa*, assyrisch *mešiḥtu*, und die Feldmeßkunst wird auch *mešīḥa*, *misāha* genannt[62]). All diese Ausdrücke gehen auf das Spannen des Meßstrickes zurück und sind alt-akkadisches Sprachgut. Die Worte *madādu* = „messen“, und *mašiḥu*, *mašiḥanu* = Feldmesser, sind akkadischen Ursprunges[63]).

Wir finden also die Seilspanner als die übliche Bezeichnung für die Landmesser bei den Akkadern, Assyrern, Babyloniern, Hebräern, Aramäern und Arabern. Glücklicherweise haben sich in den Talmudischen Quellen viele Stellen erhalten, die genauere Angaben über die Seilspanner und auch manche Regeln und Vorschriften über die Art, wie sie ihre Kunst ausüben sollen, enthalten. Da wir ja bis jetzt von den Harpedonapten nicht viel mehr als den Namen wußten, dürfte es von Interesse sein, etwas Näheres über die hebräischen Harpedonapten zu

---

57) Vgl. die Wörterbücher und Konkordanzen zu חוט, קו, חבל, גבול.

58) Vgl. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, I^4, S. 385 und die griechischen Wörterbücher zu *σχοῖνος*, *σχοινίον*, *σχοίνισμα*. Das letztere wird in der Septuaginta für die Übersetzung des hebr. *ḥebel* gebraucht.

59) Siehe Cantor, *loc. cit.*, I^4, S. 635—45.

60) *Erubin* IV, 13 in den Talmudausgaben; VI, 13 in ed. Zuckermandel (p. 145).

61) והמודד מותח בכל כחו ומודד והולך.

62) Vgl. Gandz, „Three Interesting Terms Relating to Area“, in *The American Mathematical Monthly*, Bd. 34 (1927), S. 81.

63) Vgl. Zimmern H., *Akkadische Fremdwörter*, S. 22/23, 26, und in *Orientalische Literaturzeitung*, Bd. 19 (1916), S. 324/25, Anm. 3.

erfahren. Im folgenden wollen wir daher einige der wichtigsten Stellen in Original und Übersetzung bringen.

III. Regeln und Vorschriften für die hebräischen Harpedonapten.

§ 9. Die Werkzeuge: Pflöcke, Seil und Kette.

„Die[64]) Pflöcke der Zelte und die Pflöcke der Seilspanner empfangen die levitische Unreinheit. Die Kette der Seilspanner empfängt die levitische Unreinheit." — „Die Kette der Dokumente empfängt nicht die levitische Unreinheit, die der Seilspanner jedoch wird unrein[65])." — „Rabbi Asi sagt: man mißt nur mit einem Seile aus Palmenbast. . . . In einer Baraita wird gelehrt: Rabbi Josua ben Hanania sagt: Es gibt kein besseres [Zeug] zum Messen, als eiserne Ketten, aber was können wir tun, wenn die Tora sagt[66]): ‚Und in seiner Hand war ein Meßseil'[67]). Es steht ja auch[68]): ‚Und in der Hand des Mannes war ein Meßrohr'? Das war für die Tore. Rabbi Josef zitiert eine Baraita: Drei Seile gibt es: aus Binsen, aus Weiden und aus Flachs. . . . Das flachsene wird für das Messen verwendet[69]). — „Einerlei ist das Maß der Einverleibung[70]) und das Maß der Sabbatgrenze[71]). Das Maß der Sabbatgrenze jedoch wird nur mit einem Seile gemessen. Man mißt weder mit einem Faden, noch mit einem Binsenseile, sondern mit einem Meßseile (aus Flachs)[72])."

Wir sehen also, daß man auch die eiserne Kette kannte, und daß man sich wohl bewußt war, daß die eiserne Kette ein genaueres Meß-

---

[64]) *Mišna Kelim*, 14, 3 יתדות אהלים ויתדות המשוחות טמאות. שלשלת של משוחות טמאה.

[65]) *Tosefta Kelim*, B. M., II 2 in den Talmudausgaben; II, 3 in ed. Zuckermandel (p. 519) שלשלת דוסקאות הרי זו טהורה ושל משוחות הרי טמאה.

[66]) Zacharia 2, 5.

[67]) Darum muß man mit einem Seile messen.

[68]) Ezekiel 40, 3, 5.

[69]) *Babli Erubin* 58a . . . אמר רבי אסי אין מודדין אלא בחבל של אפסקימא .... תניא אמר רבי יהושע בן חנניה אין לך שיפה למדידה יותר משלשלאות של ברזל, אבל מה נעשה שהרי אמרה תורה ובידו חבל מדה. והכתיב וביד האיש קנה המדה? ההוא לתרעי. תני רב יוסף ג׳ חבלים הם: של מגג, של נצר ושל פשתן.... של פשתן למדידה. Vgl. noch *Yer. Erubin*, V. 3.

[70]) Vgl. Levys *Wörterbuch über die Talmudim*, III, S. 611: „Wenn einige Häuser einer Stadt vorstehen und andere einwärts gebaut sind, so zieht man die Meßschnur von den vorstehenden Gebäuden zu den anderen vorstehenden Gebäuden und schließt den dazwischenliegenden, leeren Raum ein; so daß dieser mit zum Bereiche der Stadt gehört." Dieser eingeschlossene Raum heißt עבור „die Einschaltung, Vergrößerung (der Stadt)". Vgl. noch Krauß, קדמוניות התלמוד I, 1 S. 55.

[71]) Die Sabbatgrenze ist 2000 Ellen außerhalb der Stadt. Weiter darf man am Sabbat nicht gehen; vgl. Schürer, *Geschichte des jüdischen Volkes*, II, 3. Aufl., S. 492. All die zitierten Stellen handeln vom Ausmessen dieser Sabbatgrenze.

[72]) *Tosefta Erubin*, IV, 12/13 in den Talmudausgaben, VI, 13 in ed. Zuckermandel (p. 145) אחד מדת העבור ואחד מדת התחום. אלא שמדת התחום מודד בחבל. אין מודדין לא בחוט ולא בחבל של גמי אלא במשיחה.

instrument, als das Seil ist; aber man wollte eben für religiöse Zwecke, d. i. für die Ausmessung der Sabbatgrenze, lieber das altbiblische Flachsseil haben.

§ 10. Die Länge des Seiles.

„Die Meßschnur[73]) der Baumeister und der Kalkanstreicher ist fünfzig Ellen (lang). Rabbi Simon ben Gamaliel sagt: auch die (Meßschnur) der Seilspanner ist fünfzig Ellen (lang)[74])." — „Man darf nur mit einem Seile von 50 Ellen messen, nicht weniger und nicht mehr. . . . Wie groß ist das Maß der Sabbatgrenze? Vierzig Seile[75]). ‚Nicht weniger' [darf das Seil sein], weil es ausgedehnt wird und er profitiert. ‚Nicht mehr', weil es einschrumpft und er verliert[76])." Strittig ist die Frage, ob man auch mit einem kleineren Seile messen darf dort, wo die zu messende Strecke weniger als 50 Ellen beträgt. „Wenn die Strecke von ihm aus bis zum Tale (oder Flusse) 75 Ellen beträgt, (darüber streiten) zwei Amoras. Der eine sagt: er messe mit einem Seile von 50 Ellen, gehe dann 25 Ellen rückwärts (und messe wieder 50 Ellen). Der andere sagt: er messe mit einem Seile von 50 Ellen und den Rest messe er mit einem Seile von 4 Ellen" [77]). Wir sehen aus all dem, daß das Seil von 50 Ellen eine alte Maßeinheit war und daß man daher abgeneigt war, ein anderes Maß zu benützen.

§ 11. Die Genauigkeit beim Messen.

Mit Rücksicht auf das Einschrumpfen und Ausdehnen des Meßseiles, von dem wir soeben hörten, wurde auch die Verfügung getroffen, daß man nicht mit demselben Seile dem einen sein Landteile im Winter und dem anderen im Sommer zumesse. Man nahm nämlich an, daß das Seil im Sommer einschrumpfe und im Winter ausgedehnt werde. Wenn daher, z. B. zwei Brüdern ihr Erbteil zugeteilt und dem einen im Sommer, dem anderen im Winter zugemessen wird, so wird das Seil im Sommer ein kleineres Maß liefern als im Winter[78]). Im selben Sinne

---

[73]) Wörtlich חוט = „Faden".

[74]) *Tosefta Kelim, B. B.* VII, 2; in ed. Zuckermandel, VII, 2 (p. 597) חוט של בנאין ושל סיידין חמשים. רשב״ג אומר אף של משוחות חמשים אמה.

[75]) Die Sabbatgrenze ist 2000 Ellen.

[76]) *Mišna Erubin*, V, 4 und *Yer.* zur Stelle אין מודדין אלא בחבל של חמשים אמה לא פחות ולא יתר ..... כמה היא מדת התחום ארבעים חבלים. לא פחות שהוא נמתח ונשכר. ולא יתר שהוא נקמז ומפסיד. Vgl. noch § 11.

[77]) *Yer. Erubin V*, 3. היה ממנו לנחל שבעים וחמש אמה, תרין אמורין: חד אמר מודד בחבל של חמשים אמה וחוזר לאחוריו עשרים וחמש אמה. וחורנה אמר מודד בחבל של חמשים אמה והשאר מודד בחבל של ארבע אמות.

[78]) *B. B.* 89b; *B.M.* 61b; *Sifra* zu Leviticus 19, 35. ת״ר לא תעשו עול במשפט במדה במשקל ובמשורה, במדה זו מדידת קרקע. שלא ימדוד לאחד בימות החמה ולאחד בימות הגשמים. „Ver-

wird die folgende Weisung an einen Seilspanner erteilt[79]): „Rab Juda sagte dem Seilspanner Rab Adda: Sei nicht nachlässig (ungenau) in der Feldmessung. Denn auch das kleinste Stückchen Feld ist gut für die Bepflanzung mit Gartensafran.“ Demselben Seilspanner gibt Rab Juda die Belehrung, daß er bei der Bemessung der 4 Ellen am Rande eines Kanals oder Flusses doch ungenau vorgehen darf[80]). Andererseits hören wir jedoch eine vereinzelte Ansicht, daß die Seilspanner beim Ausmessen der Sabbatgrenze nicht ganz genau waren: „Wenn jemand am Freitag abends außerhalb der Sabbatgrenze sich befindet, und sei es auch nur eine Elle, darf er nicht in die Stadt gehen. Rabbi Simon sagt: selbst [wenn er] 15 Ellen [außerhalb der Grenze ist], darf er in die Stadt gehen; denn die Seilspanner nehmen das Messen nicht genau, mit Rücksicht auf die Irrenden[81]).“

§ 12. Sonstige Vorschriften. Das Nivellieren und das Durchstechen der Berge.

„Man messe nur dem Herzen gegenüber[82]). Wenn man beim Messen an ein Tal oder an eine Wand anlangt, so verschlingt[83]) man es und nimmt dann wieder das Messen vor[84]). Wenn man an einen Berg anlangt, verschlingt man ihn und nimmt dann wieder die Messung vor. Man darf aber dabei[85]) nicht außer der Sabbatgrenze gehen. Wenn man aber (die Unebenheit) nicht verschlingen kann, in solch einem Falle sagte Rabbi

---

übet kein Unrecht beim Rechtsprechen, beim Maße, Gewichte und Hohlmaße“ (Lev. 19, 35), beim Maße, d. i. bei der Feldmessung, daß man nicht dem einen im Sommer und dem anderen im Winter messe.“ Vgl. auch Abraham Savasorda, *Ḥibbur ha Mešiḥah*, S. 4.

79) *B. M.* 107b אמר ליה רב יהודה לרב אדא משוחאה לא תזלזל במישחתא, דכל פורתא ופורתא חזי לכורכמא רישקא.

80) *Loc. cit.* אמר ליה רב יהודה לרב אדא משוחאה ד׳ אמות דאניגרא זלזל בהו, דאנהרא לא תמשחנו כלל.

81) *Mišna Erubin* IV, 11 (52b). מי שהחשיך חוץ לתחום אפילו אמה אחת לא יכנס. ר״ש אומר אפילו חמש עשרה אמות יכנס. שאין המשוחות ממצין את המדות מפני הטועין.

82) D. h.: die beiden Feldmesser, die das Seil spannen, sollen jeder das Seil dem Herzen gegenüber halten, damit eine gerade Linie entstehe. Würde der eine das Seil höher, der andere es niedriger halten, dann würde das Maß durch die schiefe Linie verkürzt werden.

83) D. h.: man verschlingt die Schiefe der Erhebung oder Senkung und mißt nur die horizontale Entfernung, man nivelliert. Dies geschieht in der Weise, daß man ausweicht und die Messung dort vornimmt, wo die Erhebung oder Senkung so gering ist, daß man das Seil von 50 Ellen darüber in gerader Linie spannen kann. Wo dies unmöglich ist, wird das Verfahren des „Durchstechens“ angewendet; siehe weiter unten.

84) In der ursprünglichen Richtung.

85) Beim Ausweichen der Hebung oder Senkung.

Dostai bar Jannai im Namen des Rabbi Meir: ich habe eine Überlieferung, daß man Berge „durchsticht“. . . . Eine Baraita lehrt: Wieso „durchsticht“ man? Der untenstehende (hält das Seil) dem Herzen gegenüber, der obenstehende den Fußsohlen gegenüber[86]). Abajji sagt: wir haben einen Grundsatz, daß man die Durchstechung nur mit einem Seile von 4 Ellen vornimmt. . . . Messungen dürfen nur von einem Fachmanne vorgenommen werden[87]).“

§ 13. Talmudlehrer und Seilspanner.

Die Seilspanner übten ihr Amt der Feldmessung unter den palästinensischen und babylonischen Juden aus. Sie werden in der Mišna, im palästinensischen und babylonischen Talmud oft genannt. Zwischen Talmudlehrern und Seilspannern bestanden freundliche Beziehungen. Sie arbeiteten Hand in Hand. Der Talmudlehrer erteilte dem Seilspanner Weisungen in religiöser und gesetzlicher Hinsicht, wie wir oben (§ 11) sahen. Wir finden aber auch, daß der Lehrer den Seilspanner um Belehrung bittet, wenn es sich um geometrische Fragen handelt. Dies wollen wir durch die folgende Stelle illustrieren, die zugleich charakteristisch ist für die Wissenschaft der Seilspanner. Die Stelle lautet[88]):

„Eine Baraita lehrt: Rabbi Eliezer, der Sohn des Rabbi Jose, sagt: Der Bezirk[89]) der Levitenstädte beträgt 2000 Ellen. Gehen ab 1000 Ellen für den Weideplatz. Es ergibt sich daher, daß der Weideplatz ein Viertel (des Levitenlandes) beträgt und der Rest Felder und Weinberge sind.

---

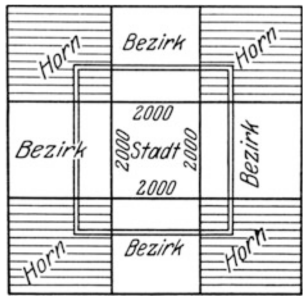
[86]) Vgl. noch *Tosefta* und *Yer.* z. St. Im *Yer.* ist der Text verderbt. Es muß dort wohl heißen: „der unten stehende hält das Seil dem Kopfe gegenüber, der oben stehende den Fußsohlen gegenüber“. Vgl. auch das Wörterbuch Levys, IV, S. 244. Levy liest שמקדרין statt שמקדרין.

[87]) *Mišna Erubin*, V, 4—5 und *Gemara* z. St. (57b—58b) ולא ימדוד אלא כנגד לבו. היה מודד והגיע לגיא או לגדר מבליעו וחוזר למדתו. הגיע להר מבליעו וחוזר למדתו ובלבד שלא יצא חוץ לתחום. אם אינו יכול להבליעו בזו אמר רבי דוסתאי בר ינאי משום רבי מאיר שמעתי שמקדרין בהרים... ת״ר כיצד מקדרין? תחתון כנגד לבו עליון כנגד מרגלותיו. אמר אביי נקיטינן אין מקדרין אלא בחבל של ארבע אמות.... אין מודדין אלא מן המומחה.

[88]) *Erubin* 56b; siehe auch *Sota* 27b; *Tosefta Arakhin*, *Ende*; *Sota*, V, *Ende*. תניא אמר רבי אליעזר ברבי יוסי: תחום ערי לוים אלפים אמה, צא מהם אלף אמה מגרש נמצא מגרש רביע והשאר שדות וכרמים. מנא הני מילי? אמר רבא דאמר קרא מקיר העיר וחוצה אלף אמה סביב. אמרה תורה סבב את העיר באלף. נמצא מגרש רביע. רביע? פלגא הוי? אמר רבא, בר אדא משוחאה אסברה לי, משכחת לה במתא דהויא תרי אלפי אתרי אלפי. תחום כמה הויא? שיתסר. קרנות כמה הויין? שיתסר. דל תמניא דתחומין וארבעה דקרנות. כמה הוי? תריסר. נמצא מגרש רביע. טפי מתלתא נינהו? אייתי ארבעה דמתא שדי עלייהו. אכתי תילתא הוי? מי סברת בריבועא קאמר? בעיגולא קאמר. כמה מרובע יתר על העיגול? רביע. דל רביע מינייהו פשו להו תשעה. ותשעה מתלתין ושיתא ריבעא הוי.

[89]) Die Umgebung, der Stadtbezirk; vgl. zu dieser Stelle Numeri, 35, 1—9. Zur Bedeutung des Wortes מגרש siehe noch Krauß קדמוניות התלמוד I, 1, S. 33—34.

Woher wissen wir dies? Raba sagte: der Bibelvers[90]) sagt: ‚[Und die Weideplätze der Städte, die ihr den Leviten geben sollet], sollen außerhalb der Stadtmauer 1000 Ellen ringsherum sein'. Die Tora sagte also: Umringe die Stadt mit 1000. Du sagtest oben: ‚Es ergibt sich daher, daß der Weidplatz ein Viertel beträgt.' Ein Viertel? Es ist ja die Hälfte [des Bezirkes]? Rabba sagte: der Seilspanner Bar Adda[91]) erklärte es mir. Es ist möglich in einer Stadt, die 2000 (Ellen) im Quadrate beträgt. Wie groß ist nun der Bezirk? Sechzehn[92]). Die Hörner[93]) wieviel sind? Sechzehn. Ziehe nun ab acht [Quadrate] von den Bezirken [für den Weideplatz] und vier [Quadrate] von den Hörnern; wieviel sind es? Zwölf. Es ergibt sich daher, daß der Weideplatz ein Viertel beträgt. Es ist ja noch immer mehr als ein Drittel?[94]) Nimm die vier [Quadrate] der Stadt und addiere sie dazu[95]). Das gibt ja noch immer nur ein Drittel? Glaubst du denn, daß er von einem Quadrate spricht? Er spricht [eigentlich nur] von einem Kreise. Um wieviel ist das Quadrat größer, als der [eingeschriebene] Kreis? Um ein Viertel. Geht also ein Viertel ab, bleiben neun [Quadrate] zurück. Und 9 ist ein Viertel von 36." (Vgl. Fig.)



Die Erklärung dieser etwas dunklen Stelle ist wie folgt: Die in Rede stehende Stadt hat nicht die Form eines Quadrates, sondern die Form eines Kreises mit einem Durchmesser von 2000 Ellen. In solch einem Falle wird aber die Stadt in ein Quadrat mit der Seite 2000 umgewandelt und als Quadrat behandelt in bezug auf die Bezirke. Der Bezirk beträgt daher wie früher, zusammen mit der Stadt selber, 36000 Quadratellen. In bezug auf den Weideplatz jedoch wird die Stadt als Kreis behandelt und der Weideplatz ist nur ein Kreisring, dessen Dicke 1000 Ellen beträgt. Nach der im Talmud üblichen Regel ist die Peripherie dreimal so groß als der Durchmesser ($= 3d$). Daher ist der eingeschriebene Kreis

[90]) Numeri, 35, 4.

[91]) Der Sohn Addas. Es ist vielleicht der Sohn des oben (§ 11) genannten Seilspanners Adda.

[92]) D. h. der Stadtbezirk, der 2000 Ellen um die Stadt herum ist, beträgt 16 Quadrate zu je 1000 Ellen im Gevierte. Denn an jede Seite wird ein Quadrat von 4000 Quadratellen hinzugefügt.

[93]) Unter Hörnern sind die vier Ecken gemeint, die an den Winkeln entstehen und die auch zum Stadtbezirke gehören. Diese Hörner betragen jedes 4000 Quadratellen und zusammen 16 Quadrate zu je 1000 Ellen².

[94]) Dies ist die Einwendung der Gemara. Der Weideplatz hat 12 und der Bezirk 32 Quadrate.

[95]) Zu dem Bezirke. Dies ergibt 36 Quadrate.

um ein Viertel kleiner als das Quadrat. Dieselbe Regel wird auch auf den Kreisring angewendet, der an Stelle des umgeschriebenen viereckigen Bezirkes tritt. In unserem Falle stimmt dies auch von einem anderen Gesichtspunkte aus. Betrachten wir den Kreisring als Trapez, dessen Höhe 1000 Ellen ist. Die innere Peripherie beträgt — nach der alten talmudischen Regel — $3d=6000$; die äußere $3D=12000$. Der Durchschnitt ist $\frac{6000+12\,000}{2}=9000$. Das ergibt also den Flächeninhalt von 9000 Quadratellen.

Wir sehen also jedenfalls, daß die Seilspanner als die berufenen Fachmänner in geometrischen Fragen und in der Konstruktion von Figuren betrachtet wurden. Wir werden es daher ganz begreiflich finden, daß Demokrit, wenn er seine geometrischen Kenntnisse rühmen will, nichts Besseres zu sagen weiß, als daß ihn nicht einmal die ägyptischen Harpedonapten übertreffen, die wohl die Lehrer aller anderen Seilspanner waren.

IV. Die Spuren der Seilspanner in der Terminologie.

§ 14. Das Seil als Linie.

Wenige Spuren dieser Seilspanner finden sich noch erhalten in der Terminologie der Geometrie. Unser heutiges deutsches Wort „Linie" kommt vom lateinischen *linea;* dies kommt von *linum* = „Leinen, Seil, Flachsseil[96]." Allein schon im Sumerischen haben wir das Wort *tim* für Linie, das aber ursprünglich „Seil" bedeutet. Schon Cantor[97]) ahnt den richtigen Sachverhalt: „daß es nicht zu den Unmöglichkeiten gehört, es habe eine Art von Seilspannung vielleicht freilich nur ein Messen mittelst des Seiles ... in Babylon stattgefunden". Die *Mišnat ha Middot*, die älteste hebräische Geometrie, die ungefähr um 150 C. E. verfaßt wurde[98]), und eine Art praktischen Handbuches der hebräischen Seilspanner war, gebraucht für die Linie den Ausdruck *ḥuṭ* = „Faden, Seil", oder auch *qaw* = „Seil"[99]). In den mittelalterlichen hebräischen Schriften wird der Ausdruck *qaw* allgemein gebraucht[100]).

---

[96]) Vgl. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, IV², S. 38.

[97]) *Loc. cit.*, I⁴, S. 46, 645.

[98]) Vgl. Gandz im *The American Mathematical Monthly*, Bd. 33, S. 263, Anm. 5; Bd. 34, S. 81, Anm. 3; in *Isis*, XII, S. 464, Anm. 42.

[99]) Siehe I, 3, 4; II, 3, 8; III, 4; V, 1, 2, 3, 7. *Qaw* wird daselbst, I, 4, nur für die Peripherie gebraucht.

[100]) Bereits im *Ḥibbūr ha Mešiḥa* des Abraham Savasorda (*c.* 1100); seitdem allgemein üblich.

§ 15. Diagonale, Durchmesser und Hypotenuse.

Der Ausdruck *ḥuṭ* für Linie wird aber in der *Mišnat ha Middot* eigentlich nur in bezug auf die Diagonale oder den Durchmesser angewendet[100a]). Abstrakte, allgemeine Linien kennt diese Geometrie noch nicht, oder sie befaßt sich mit ihnen noch nicht. Die Linien werden durch die konkreten Gegenstände bezeichnet, die sie gewöhnlich darstellen. Also beim Vierecke sind es „Seiten“ oder „Wände“, während die Fläche als „Dach“ bezeichnet wird[101]). Beim Dreiecke (I, 3) sind es Grundlage und Säule, das letztere für die Höhe. Beim Kreisabschnitte (I, 5) haben wir die Termini „Sehne“ und „Pfeil“. Die Diagonale aber bezeichnet eine Strecke, die gewöhnlich nicht verbaut ist und für die sich auch sonst kein konkretes Bild finden läßt. Sie ist eine ideale Größe, die durch keinen konkreten Gegenstand dargestellt wird. Man konstruiert also das konkrete Bild durch ein Seil, das von einer Ecke zur anderen Ecke ausgespannt wird. Es ist eben das Meßseil, das ausgespannt wird, um die Entfernung zu messen. Dies ist wohl der Ursprung der idealen Linie.

Es ist charakteristisch, daß der Ausdruck „Seil“ für die Diagonale bei mehreren antiken Völkern anzutreffen ist. Wir finden ihn bei den alten Indern[102]): „Das Seil (die Diagonale), quer durch ein Quadrat ausgespannt, erzeugt ein doppeltes Quadrat“. Bei den Chinesen finden wir denselben Ausdruck in der sogenannten „Figur des Seiles“, wo das Seil die Diagonale bedeutet[103]). Und was das merkwürdigste an der Sache ist, selbst die antike griechische Terminologie, aus der voreuklidischen Zeit, scheint auf denselben Ausdruck zurückzugehen. Die alte griechische Definition der Diagonale stimmt fast wörtlich mit der Definition der *Mišnat ha Middot* überein. Wir lesen in der letzteren[104]): „Das Viereck hat 3 Elemente: Die Wand (Seite), das Seil (die Diagonale) und das Dach (die Fläche)... Was ist das Seil? Das ist das [das Viereck] durchschneidende [Seil], das von Winkel zu Winkel, von Ecke zu Ecke [gespannt wird].“ Fast dieselben Worte werden auch von Plato gebraucht[105]): „Diese Linie jedoch, die von dem einen Winkel zu dem anderen gespannt

---

[100a]) Einmal finden wir aber doch, in I, 7, den Ausdruck *ḥuṭ* für die zwei Linien, die die Quadrattelle in vier Viertel Quadratellen teilen. Hier ist also *ḥuṭ* eine zu ziehende Hilfslinie.

[101]) I, 2, גג, צלע; vgl. Gandz, in *The American Mathematical Monthly*, Bd. 33, S. 263, Anm. 2.

[102]) Vgl. Smith, *History of Mathematics*, I, S. 98; Colebrooke, *Algebra ... from the Sanscrit*, London 1817, S. 59, Anm. 2.

[103]) Siehe Cantor, I^4, S. 679/80.

[104]) I, 2 המרבעת בג׳ פנים, בצלע, בחוט, ובגג .... והחוט זה המפסיק מזוית לזוית מן הקצה אל הקצה.

[105]) *Dialogi* (*Meno*), ed. L. Hermann, III, Lipsiae, 1851, S. 338: *Οὐκοῦν ἔστιν αὕτη γραμμὴ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν τείνουσα τέμνουσα δίχα ἕκαστον τούτων τῶν χωρίων.*

ist, teilt jedes dieser Quadrate in zwei gleiche Teile." Oder auch[106]) „Von der [Linie], die von einem Winkel in den anderen Winkel des Vierecks gespannt ist."[107]) Von dem Worte *τείνουσα* „gespannt" ist aber zu ersehen, daß ursprünglich wohl nicht an die *γραμμή*, die geschriebene Linie, sondern an das Seil gedacht war. Das Seil liegt ja auch der Hypotenuse *ὑποτείνουσα* zugrunde. Es ist eben das unter den beiden Armen des rechten Winkels gespannte Seil[108]). Später haben die Sophisten für die Diagonale den Terminus „Diameter" geprägt. So lesen wir bei Plato[109]): „Die Sophisten aber nennen diese Linie den Diameter." Der Ausdruck „Diameter" wurde nun auch gemeinschaftlich für Diagonale und Durchmesser gebraucht, gleich dem hebräischen *ḥuṭ*. Beide Ausdrücke, *ḥuṭ* und Diameter, bedeuten wohl ursprünglich nichts anderes als das Meßseil, das gespannt wurde, um die Entfernung zwischen den gegenüberliegenden Winkeln, oder zwischen den Rändern des Kreises, zu messen. Erst Hero der Alexandriner hat den Terminus *diagonios* für die Diagonale eingeführt[110]).

Wir können daher 4 Stufen in der Terminologie für die Diagonale unterscheiden: 1. Ein Seil ausgespannt von einem Winkel zu dem anderen. 2. Ein Seil, die ideale Linie. 3. Diameter. 4. Diagonale.

§ 16. Die Definition der Geraden.

Bekannt ist die übliche, auf Archimedes († 212 B. C.) zurückgeführte, Definition der geraden Linie als die kürzeste Entfernung zweier Punkte[111]) Weniger gelungen waren die Definitionen des Plato und Euklid[112]). Interessant ist es aber, die Definition der alten Seilspanner zum Vergleiche heranzuziehen. Die Seilspanner gehen natürlicherweise von ihrer konkreten Linie, dem Seile, aus und sie bezeichnen daher die Gerade als „das gespannte, gestreckte" Seil. So lautet der Fachausdruck für die Gerade in der *Mišnat ha Middot*[113]), *mašūkh*=„gezogen, gestreckt, gespannt". Diese Auffassung wird auch bei Heron[114]) gefunden, der die

[106]) *Ib.* S. 339: *Ἀπὸ τῆς ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν τεινούσης τοῦ τετράποδος.*

[107]) Vgl. auch das chinesische *King yu*, d. h. „der Weg, der die Winkel vereinigt", für die Diagonale; Cantor, I⁴, S. 679.

[108]) Vgl. auch eine andere Theorie bei Cantor I⁴, S. 184.

[109]) *Dialogi, ib.*, S. 339: *καλοῦσι δέ γε ταύτην διάμετρον οἱ σοφισταί.*

[110]) Siehe Smith, *loc. cit.*, II, S. 278; Cantor I⁴, S. 218 und 208; Tropfke, IV², S. 96.

[111]) Vgl. Cantor, I⁴, S. 298; Smith, II, S. 275; Heath, *Euclid*, I, S. 166, 168/69.

[112]) Siehe Smith, *loc. cit.*

[113]) I, 3, 4, 5. Besonders I, 4, wo der Durchmesser im Gegensatze zur Peripherie *mašūkh* genannt wird. Auch sonst ist im Talmud *mašūkh* = "gerade, gespannt" der übliche Gegensatz zu '*agūl* = „gekrümmt, rund".

[114]) *Opera ... Omnia*, IV, ed. Heiberg, Lipsiae 1912, S. 12 *καὶ οἷον ἐπ' ἄκρον τεταμένη ἐπὶ τὰ πέρατα.*

Gerade definiert: „wie bis zum äußersten ausgespannt zwischen den Endpunkten“. Wir finden sie wohl auch in dem griechischen *σχεινοτενής, ές* = „ausgespannt wie ein Strick, eine Meßruthe, eine gerade Linie“ und im deutschen Worte „Strecke“[115]). Dies erinnert uns zugleich an die oben (§ 8, 10) angeführten Vorschriften, das Seil mit der ganzen Kraft (*ἐπ' ἄκρον*) auszuspannen, und kein Seil zu benützen, das länger als 50 Ellen ist, da ein solches nicht gut ausgespannt werden kann.

Diese Seilspanner-Definition ist nun das gerade Gegenteil von der des Archimedes. Sie lautet, dem Sinne nach: „eine Gerade ist die größte Ausdehnung eines Seiles zwischen den beiden Endpunkten“, oder: „die größte Entfernung der beiden Endpunkte eines Seiles von einander“. Archimedes hat nun wohl im bewußten Gegensatze dazu seine Definition als ein geistreiches Paradoxon geprägt: „eine Gerade ist die kürzeste Entfernung zweier Punkte“. Die Definition der Seilspanner bezieht sich auf das Seil, die des Archimedes bezieht sich auf den Raum. Die Definition der Seilspanner ist konkret, natürlich und jedem einleuchtend. Die des Archimedes ist abstrakt und geistreich[116]).

V. Die Seilknüpfer.

§ 17. Das Quipu.

Wir haben bereits im Anfange (§ 2—3) erwähnt, daß manche mit Cantor die Harpedonapten als Seilknüpfer auffaßten. Durch die bisherigen Ausführungen ist es wohl zur Genüge bewiesen worden, daß sie als Seilspanner und Feldmesser zu verstehen sind. Nichtsdestoweniger glauben wir, hier einiges über eine ganz andere Institution von Seilknüpfern sagen zu müssen. Wenn nicht sprachlich, so gab es doch sachlich einen Zusammenhang zwischen Seilspannern und jenen anderen Seilknüpfern.

Bevor die Schriftkunst erfunden und verbreitet worden war, spielten die Knotenzeichen eine große Rolle als memoria technica und das Seilknüpfen war eine Art Schriftersatz. Es gab eine Art Knotenschrift, durch die man Zahlen, Rechnungen, geschichtliche Ereignisse, Traditionen, Gesetze, und sogar Gedichte und Namenslisten zur Darstellung brachte, oder im Gedächtnisse behielt. Zur besonderen Entwicklung gelangte diese Knotenschrift unter den Incas in Peru in der Form des Quipu[117]). Hier, in Peru, lebte ein Volk mit einer hohen Zivilisation, einer reichen

---

115) Zu letzterem siehe Tropfke, IV^2, S. 39 und 63.

116) Vgl. Gandz, „Origin of Angle-Geometry“ in *Isis*, XII, S. 464, 469, 472.

117) Quipu bedeutet im Peruanischen „einen Knoten“ oder „einen Knoten machen“. Daher der übliche Terminus *quipu* für das geknotete Seil, das als Schriftzeichen diente.

Tradition, einer ausgebildeten und komplizierten Regierungsmaschine, aber ohne Schrift. Hier wurde daher ein System von Knotenzeichen zu einer besonderen Höhe entwickelt. Das Quipu bestand aus einem horizontal gehaltenen Hauptstricke, an dem mehrere andere Seile befestigt waren, die senkrecht herabhingen. Diese vertikalen Seile waren von verschiedener Farbe und Länge, und mit Knoten von verschiedener Größe und Form versehen. Alle diese verschiedenen Seile und Knoten hatten nun die Aufgabe, bestimmte Zahlen, Worte, Sätze und Ideen zur Darstellung zu bringen. Es gab einen eigenen Stand von „Hütern der Quipu", *Quipucamayu*, deren Amt es war, die Quipu zu bewahren und zu deuten. Diese Quipu-Gelehrten haben die geknoteten Seile gelesen und gedeutet, wie man Bücher und Annalen liest. Solche Knotenzeichen, die bestimmte Zahlen oder Ideen darstellten, waren aber auch den meisten antiken Völkern bekannt, den Ägyptern und Chinesen, den Griechen, Hebräern und Römern[118]).

§ 18. Das Seil in Geometrie und Arithmetik.

Die Vermutung besteht nun, daß die Seilknoten als Zahlzeichen der Seilspannung ihre Entstehung und Ausbildung verdanken. Es ist wohl ganz natürlich, daß der Seilspanner, nachdem er ein Land ausgemessen hatte, die Maße irgendwie festhalten und verzeichnen wollte. Schreiben konnte er nicht. So hat er eben in dem Seile einen Knoten gemacht. So wurde das Seil von einem Instrumente der Meßkunst zu einem Werkzeuge der Zählkunst und höchst wahrscheinlich auch der Rechenkunst. Man hat nämlich Quipus gefunden, in denen die verschiedenen Knoten und Seile einen verschiedenen Stellenwert haben. Die einen stellen die Einer dar, die anderen die Zehner, Hunderter usw.[119]). Das geknotete Seil war also die ursprüngliche Form des abacus. Es ist sogar möglich, daß das Wort abacus auf eine hebräische Wurzel *abaq* zurückgeht, die „knüpfen, knoten" bedeutet.

§ 19. Seilgelehrte und Schriftgelehrte

Wir haben den Versuch gemacht, die Bedeutung des Seiles in der Geschichte der Zivilisation zu würdigen. Die Seilspanner waren die ersten Landvermesser und Geometer. Sie haben bei der Feldverteilung die Grenzen gezogen und an der Entwicklung des Privateigentums mit-

[118]) Vgl. besonders L. Leland Locke, *The Ancient Quipu*, or *Peruvian Knot Records*, New York, The American Museum of Natural History, 1923; S. Gandz, „The Knot in Hebrew Literature", in *Isis*, 1930, S. 189—214.

[119]) Vgl. Gandz, *loc. cit.* § 16—20, S. 203 f.

gewirkt[120]). Die Seilspannung war eine der wichtigsten Zeremonien bei der Grundsteinlegung. Die Seilknüpfer haben die Arithmetik entwickelt und eine primitive Schrift zur Ausbildung gebracht. Sie haben die geschichtlichen und religiösen Traditionen aufbewahrt. Wenn wir nun die Seilspanner und Seilknüpfer mit dem gemeinsamen Namen der Harpedonapten[121]) oder Seilgelehrten bezeichnen, können wir mit Recht von einer primitiven Kulturepoche der Harpedonapten sprechen. Die Harpedonapten waren die Vorläufer der Schriftgelehrten, sie waren die Hauptträger der Kultur ihrer Zeit.

---

[120]) Über die hohe Bedeutung der Feldmeßkunst mit Rücksicht auf die Einführung der Limitation vgl. Nissen, *Orientation*, S. 79f. Zu den Ausführungen Nissen's und den Aussprüchen der römischen Feldmesser vergleiche man die folgenden Bibelstellen: Dt. 32, 8; Ps. 74, 17; Dt. 19, 3, 14; Prov. 15, 25; 22, 28; 23, 10. Ich hoffe die „Einführung der Limitation“ einmal in einem besonderen Aufsatze behandeln zu können.

[121]) Obgleich das Wort ursprünglich nur die Seilspanner bezeichnet.

Beiträge zur kritischen Textgestaltung des Autolykos und des Hypsikles.

Von Vittorio De Falco in Genua*).

(Eingegangen am 3. 5. 30.)

Wir verdanken die Erhaltung einiger minder bedeutender mathematischer Traktate des griechischen Altertums einzig dem Umstande, daß, vielleicht im dritten nachchristlichen Jahrhundert, eine Sammlung derselben hergestellt wurde, die mit Beziehung auf die schon vorhandene *μεγάλη σύνταξις* des Ptolemaeus den Namen *ὁ μικρὸς ἀστρονομούμενος* (scil. *τόπος*) erhielt[1]). Weder Zahl noch Reihenfolge der darin enthaltenen Einzelwerke läßt sich mit Sicherheit bestimmen. Von Euklides enthielt die Sammlung die *Δεδομένα*, die *Ὀπτικά*, die *Κατοπτρικά* und die *Φαινόμενα*; von Theodosios die Traktate *Σφαιρικά*, *Περὶ οἰκήσεων* und *Περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν*; von Autolykos die Schriften *Περὶ κινουμένης σφαίρας* und *Περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων*; von Aristarch aus Samos das *Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης*; von Hypsikles von Alexandrien den *Ἀναφορικός*. Wahrscheinlich gehörten auch noch dazu die drei Bücher *Σφαιρικῶν* des Menelaos. Der Kommentar, den Theon zur Sammlung schrieb[2]), ist uns leider verloren gegangen; erhalten ist uns dagegen der des Pappos, denn das sechste Buch der „Collectiones" „*περιέχει*", sagt der Scholiast[3]), „*ἀποριῶν λύσεις τῶν ἐν τῷ μικρῷ ἀστρονομουμένῳ*". Doch behandelt Pappos in seinem Kommentar der Reihe nach nur folgende Schriften: die „Sphaerica" des Theodosios (S. 474—518 H.), das „De sphaera" des Autolykos (S. 518—530), das 1. Buch des „De diebus" des

---

*) Ich möchte nicht versäumen, Herrn Prof. Dr. Grünanger auch an dieser Stelle für die freundliche Durchsicht der deutschen Übersetzung dieser Arbeit zu danken.

[1]) Vgl. Fabric., bibl. gr. II p. 88; Menge, Euclid. opp. praef., VI p. LIV; Manitius, Des Hypsikles Schrift Anaphorikos nach Überlieferung und Inhalt kritisch behandelt, Progr. Gymn. Dresden 1888, p. VIf.; Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I³ 447 (S. 344 der 2. Aufl.).

[2]) Anon. b. Papp. ed. Hultsch III p. 1142, 10f.: *δέδεικται μὲν Θέωνι ἐν τῷ ὑπομνήματι τοῦ μικροῦ ἀστρονόμου.*

[3]) Papp. II p. 474, 2 Hultsch.

Theodosios (S. 530—554), das „De magnitudinibus" des Aristarch (S. 554—568), endlich die „Optik" (S. 568—594) und die „Phaenomena" (S. 594—632) des Eukleides[4]). Daraus darf jedoch nicht ohne weiteres gefolgert werden, daß ursprünglich in der Sammlung nur diese und keine anderen Werke enthalten waren. Jede Hypothese hierüber würde einer sicheren Grundlage ermangeln; zudem ist diese Frage für uns von keinem großen Belang. Wir begnügen uns mit der Feststellung, daß wir hier eine Reihe von Schriften vor uns haben, welche, sei es wegen ihres hohen Alters (unter den griechischen Mathematikern, deren Schriften uns erhalten sind, ist Autolykos der älteste), sei es wegen der in ihnen behandelten astronomisch-mathematischen Probleme, unser Interesse auf das lebhafteste in Anspruch nehmen.

In den letzten Jahren sind außer der bekannten Eukleidesausgabe des Verlages Teubner auch noch die Schriften des Aristarchos[5]) und des Theodosios[6]) herausgegeben worden. Es dürfte daher an der Zeit sein, nunmehr auch die Werke des Autolykos und des Hypsikles einer kritischen Textrevision zu unterziehen.

Friedrich Hultsch schreibt in der Einleitung zum zweiten Bande seiner Papposausgabe[7]): „Compertum habebam Autolyci et Theodosii librorum nondum editorum, quos Pappus passim citat, praestantissimum codicem Romae in bibliotheca Vaticana latere; huius igitur apographum, antequam Pappi mei secundum volumen in lucem prodire concederem, illinc repetendum esse decrevi." Doch fehlen auch noch in der Autolykosausgabe, die Hultsch einige Jahre später besorgte[8]), nähere Angaben über diesen Kodex. Hultsch begnügt sich mit der Erklärung, er habe die Codices ABCDE vollständig, und für einige Stellen, auch noch die Pariser Codices 2364, 2448, 2472, sowie den Laur. 28, 14 kollationiert[9]). Immerhin darf man, ohne fehlzugehen, annehmen, daß unter dem „praestantissimus Vaticanus" der Cod. A (Vat. 191) zu verstehen sei, dem Hultsch bei der Textgestaltung im allgemeinen den Vorzug gibt. Auch über die Verwandtschaftsverhältnisse der von ihm herangezogenen Handschriften sagt uns der Herausgeber nichts. Da war es ein Verdienst

[4]) Die *Δεδομένα* sind im VII. Buch behandelt. Vgl. auch Heiberg, Mathem. gr. min. (Danske Vid. Selsk. hist. fil. Med. 13, 3), S. 73 ff.

[5]) Th. Heath, Aristarchus of Samos, Oxford 1913.

[6]) Theodosius Sphaerica ed. J. L. Heiberg. Theodosius de habitationibus liber. De diebus et noctibus libri duo ed. R. Fecht. Abhandl. d. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen, Philol.-hist. Kl., N. F., XIX 3. 4. Berlin 1927.

[7]) Berolini 1877, p. VII.

[8]) Autolyci de sphaera quae movetur liber, de ortibus et occasibus libri II ed. F. Hultsch, Lipsiae, Teubner, 1885.

[9]) Vgl. auch Sitz.-Ber. d. k. Sächs. Ges. d. Wiss., Philol.-hist. Kl., 1885, 173

Menges[10]), im Vat. gr. 204 die älteste uns erhaltene Handschrift nicht nur des Autolykos, sondern des ganzen „μικρὸς ἀστρονομούμενος" aufgezeigt zu haben. Zugleich hat Menge, allerdings nicht mit triftigen Gründen, für Autolykos ein näheres Verwandtschaftsverhältnis zwischen der letztgenannten Handschrift und dem Cod. C zu erweisen gesucht.

Man sieht also, daß die Sache eine nähere Untersuchung erfordert. Die Zahl der Autolykoshandschriften im besondern und der Handschriften des μικρὸς ἀστρονομούμενος im allgemeinen ist beträchtlich größer als die neun Handschriften, die Hultsch bekannt waren, und die vier, welche Menge nachgewiesen hat. Auf Grund einer sorgfältigen Durchsicht der mir zugänglichen Bibliothekskataloge bin ich in der Lage, folgendes Verzeichnis aufzustellen:

D = Monacensis gr. 301, chart., s. XVI.
E = Hamburgensis gr. math. V fol., chart., s. XVII, cum scholiis.
A = Vaticanus gr. 191, ff. 72—73. 64—70^{r} [11]), chart., s. XIII[12]).
Vaticanus gr. 202, chart., s. XIII, ff. 82—95^{r}. 269—298, cum scholiis[13]).
Vaticanus gr. 203, chart., s. XIII, ff. 29^{v}—31^{r}. 31^{v}—38^{r}, cum scholiis[14]).
T = Vaticanus gr. 204, membr., s. X, ff. 38—43^{r}. 119—133^{r}, cum scholiis[15]).
M = Ambros. gr. 28 [A 101 sup.], s. XV—XVI, chart., ff. 138^{v}—142^{r}. 180—187, cum scholiis[16]).
Ambros. gr. 655 [P 270 sup.], s. XV—XVI, chart., ff. 68—81 (de sphaera, definitiones I et II nec non alia eiusmodi)[17]).
Ambros. gr. 817 [A 194 inf.], s. XVI ex., chart., ff. 3—23^{r}. 47—100^{r} [18]).
Ambros. gr. 903 [C 263 inf.], s. XVI, chart., ff. 29—34. 13^{v}—28[19]).
Ambros. gr. 1051 [I 84 inf.], s. XV—XVI, chart., ff. 42^{v}—52. 25—42^{r} [20]).

10) Neue Jahrbb. f. Philol. 133, 1886, 180ff.

11) Die ersten Zahlen beziehen sich immer auf das De sphaera, die zweiten auf das De ortibus.

12) Vgl. G. Spezi, Memoria di un cod. gr. Vaticano, Roma 1865; Parthey, Monatsber. Berl. Akad. 1863, 374ff.; Maaß, Aratea, 10ff. 63; Jan, Musici scriptores gr. p. XXIVff.; Kroll, Catal. Codd. Astr. V 2, p. 3—23; J. Mercati et P. Franchi de' Cavalieri, Codd. Vatic. gr. (Romae 1923), 220ff. Hultsch weist diesen Kodex dem 14.—15. Jahrh. zu.

13) Vgl. Mercati et Franchi de' Cavalieri, 244f.

14) Vgl. Mercati et Franchi de' Cavalieri, 245f.

15) Vgl. Menge a. a. O. 183f.; Mercati et Franchi de' Cavalieri, 264ff.; Franchi de' Cavalieri et Lietzmann, Specimina codicum gr. Vaticanorum², Berolini 1929, p. IX et tab. XI.

16) S. unten S. 291 A. 43.

17) Vgl. Martini et Bassi, Catal. cod. gr. bibl. Ambros., II (Mediolani 1906) 733ff.

18) Vgl. Martini et Bassi, II 912f.

19) Vgl. E. Maaß, Analecta Eratosthenica (Philol. Unters. VI), 38f.; Martini et Bassi, II 1011.

20) Vgl. Martini et Bassi, II 1124.

Ambros. gr. 1055 [I 90 inf.], s. XVI, chart., ff. 57—62. 41—56[21]).
Marc. gr. 304, s. XV, chart[22]).
Barocc. Bodl. 166, s. XV ex., chart., ff. 184—190. 166—183. 191—196 [scholia][23]).
C = Paris. gr. 2342, s. XIV, chart., ff. 130r. 150v—154.
Paris. gr. 2363, s. XV, chart., ff. 25v—29r. 84v—95r.
P = Paris. gr. 2364, s. XV, chart., ff. 88—96. 97—111.
Paris. gr. 2365, s. XVI, chart., ff. 54—63. 98—117.
Paris. gr. 2366, s. XVI, chart., ff. 74—79. 80—98.
Paris. gr. 2388, s. XVII, chart., ff. 1—12. 13—50 [a J. Auria descriptus].
Paris. gr. 2472, s. XIV, chart., ff. 43v—48, 142—158.
Paris. Suppl. gr. 13, s. XVI, chart., ff. 79—97r. 97v—106[24]).
Escorial. gr. Y—1—7, s. XVI, chart., ff. 245—250r. 250v—266 cum scholiis.
Escorial. gr. X—1—4, s. XVI, chart., ff. 113—121r. 121v—144r cum scholiis[25]).
Riccard. gr. 38 [K. II. 1], s. XVI, chart., ff. 41—46. 47—64r cum scholiis[26]).
Magliabech. gr. 2 [II. III. 40], s. XVI, chart., ff. 95r—101v. 78—95r cum scholiis[27]).

Ferner, ist das De sphaera auch in folgenden 5 Codices enthalten:
Paris. gr. 2387, chart., s. XVII, ff. 9—21r [a J. Auria descriptus].
B = Paris. gr. 2390, bomb., s. XIII, ff. 261—264.
Paris. gr. 2448, bomb., s. XIV, ff. 79v—88r.
Paris. Suppl. gr. 451, chart., s. XV, ff. 46—53[28]).
Laur. gr. Acquisti e Doni 171, chart., s. XVI, ff. 1—9 cum figuris et scholiis[29]).

Ein ganz kurzer Auszug aus der Schrift De ortibus (S. 49—50, 4 H.) findet sich endlich in dem von Hultsch benutzten Laur. gr. 28, 14, s. XIV ex., chart., f. 302r[30]). Ich beschränke mich in meiner Unter-

21) Vgl. Martini et Bassi, II 1126.
22) Vgl. Zanetti, Graeca D. Marci Bibliotheca codicum manu scriptorum, p. 143.
23) Vgl. H. Coxe, Catal. codd. mss. bibl. Bodl., I (Oxonii 1863), cc. 281ff.
24) Vgl. Omont, Invent. somm. II 243, 246f., 247, 251, 266f., III 203.
25) Vgl. Miller, Catal. des Mss. Grecs de la Bibl. de l'Escurial (Paris 1848), 262f., 292.
26) Vitelli, Studi ital. di filol. cl. II 496f.: „Scholia occurrunt qualia graeca edidit Hultschius, sed non omnia; non comparent Auriae scholia, quantum observare potui".
27) Vitelli, Studi ital. di filol. cl. II 544ff.: „ff. 129—133r Scholia in Theodosii Sphaerica; item in libros De habitat., De diebus et noct.; in Autolyci Sphaeram et De ort. et occas. Post f. 81 inserta sunt duo foliola, quorum unum vacuum est, alterum continet interpretationem latinam proposit. 5ae et initii 6ae Autol. l. I De ort."
28) Vgl. Omont, Invent. Somm. II 251. 263. III 264.
29) Vgl. Rostagno, Studi ital. di filol. cl. II 154. VI 133.
30) Vgl. Bandini, II 30; Olivieri, Catal. Codd. Astr. Gr. I 36.

suchung auf das De sphaera, für das ich die beiden Codices M und T[31]) verglichen habe. Für die übrigen Hss. ABCDEP bediene ich mich des kritischen Apparates von Hultsch, wobei ich jedoch von allen Lesarten absehe, die entweder für die endgültige Textgestaltung oder wenigstens für den Zweck der gegenwärtigen Untersuchung keinen Wert haben. In allen den Fällen, wo ich überzeugt bin, daß eine von Hultsch nicht angeführte Lesart in der betreffenden Hs. doch enthalten ist, setze ich die Sigle der Hs. in Klammern und daneben ein Fragezeichen.

p. 2 Hultsch

4 *α'* om. ACDM — *ὅσα* CET *ὅταν* AD $\overset{\tau\alpha\nu}{\text{ὅσα}}$ [ead. m. suprscr.] BM — 5 *τε* om. CT — *ἢ* BCDTM *ἤ* A om. E — $\overset{\eta\tau\alpha\iota}{\text{διεξέρχεται}}$ B $\overset{\eta}{\text{διεξέρχεται}}$ M — 6 *β'* E om. ABCDTM — 6 *τι*] *τὸ* B — 7 *δίο* A — 9 *διεξῆλθεν* AET *διεξῆλθε* **BCDM** — 12 *α'* om. ABMT — *στρέφεται* ABT.

p. 4

4 *σημεῖα* om. **M**[D?] — 11 *δή*] *τὴν* E — 12 $\overline{\alpha\beta}$ A — 16 $\overline{\alpha\gamma}$ A — 19 *οὖσα* om. **CT** — 20 *ᾀεὶ* D *ἀεὶ* ABCETM — 27 $\bar{\alpha}\,\bar{\beta}$ DM — *πόλους* om. B.

p. 6

2 *κύκλοι παράλληλοι* **DM** — *εἰσίν* D [Schreibfehler] — 5 *ὅτι* D [Schreibfehler] — 10 *διέρχεται* D [Schreibfehler] — 21 *γὰρ* om. DM — 23 *τῆς* $\overline{\alpha\beta}$ *καὶ τοῦ* $\bar{\gamma}$ ABDM *τῆς αβγ* CTE — *ποιήση* T — 25 *τὸ* $\overline{\alpha\gamma\beta}$ *ἡμικύκλιον* post *δὴ* [*δὲ* D] add. **DM**.

p. 8

1 *ἐξερχέσθω* E — 1 *καὶ* . . . 3 *ἡμικύκλιον* om. C [omoioteleuton] — 3 *καὶ* ante *ἐπεὶ* add. **M** [D?] — 4 *εἰσὶ* C — 6 $\overline{\gamma\varepsilon}$ $\overline{\delta\beta}$ C — *ὅμοια* B — 7 *τὸ*] *τό τε* **DM** — 8 $\bar{\varepsilon}$] $\bar{\eta}$ E — *παραγίνεται* M [D?] — 9 *ἀδύνατον* E — 10 *παραγιγνέσθω*] *ἐρχέσθω* **DM** — 15 *τὸ* *B'* scr. Hu.: *τὸ* $\bar{\varepsilon}$ codd. — 17 *τὸ*] *τό τε* **DM** — 18 *παραγίνεται* **DM** — 19 *δὲ* D — 20 *οὐδ'* E — 22–25 *μὴ ἐρχέσθω δὴ* [*δὲ* D] *τὸ* $\overline{\alpha\gamma\beta}$ *ἡμικυκλίῳ* [in *ἡμικύκλιον* corrig.] *διὰ τοῦ* $\bar{\delta}$, *ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς* $\bar{\beta}'$ *καταγραφῆς* **DM**.

p. 10

1 $\overline{\vartheta\delta\zeta}$ E — 1-2 *περιφερείᾳ* (compendium) post *τῇ* *ΓΕ* add. **DM** [Hultsch schreibt, wahrscheinlich aus Versehen: *περιφερείας* D] — 2 $\overline{\vartheta\eta}$ et $\overline{\vartheta\zeta}$ E — 2 *περιφερείᾳ* . . . 3 $\overline{\vartheta\zeta}$ om. B [omoioteleuton] — 3 $\overline{\vartheta\eta}$ E — *τῇ* om. E — $\overline{\varepsilon\zeta}$ A — 4 *εἰσὶ* **BCDM** — *ἐστὶ* C — $\overline{\vartheta\eta}$ E — 5 $\overline{\delta\zeta}$ E — 6 $\bar{\vartheta}$ E — *παραγίνεται* DM — $\bar{\delta}$ E — *ἴσῳ* TE — 7 $\bar{\vartheta}$] $\bar{\delta}$ E — 8 *τό τε Γ* **DM** — 9 $\bar{\delta}$] $\bar{\vartheta}$ E — 10 *ἐν* post *ἐὰν* add. M [Schreibfehler, wie aus der Auslassung in D und aus dem folgenden *σφαῖρα* statt *σφαίρᾳ* hervorgeht] — 14 *ὁ* ante *ἄξων* add. M — 18 *τὸ*] *τό τε* **MD** — 18 *διαπορευέσθω* . . . 19 *περιφέρειαν* om. C [omoioteleuton] — 22 *τὸ*] *τό τε* **DM** — 23 *διαπορεύεται περιφέρειαν* E — 24 *τὸ*] *τό τε* **DM**.

[31]) Die Kollation von T ist nicht vollständig; sie reicht nur bis S. 44, 28 Hultsch.

p. 12
1 τὸ alt.] τό τε **DM** — 2 εἰσὶ **CDM** — 6 οὐδ' E — 7 περιφερείᾳ post ΔZ add. **DME** — 12 σημεῖον D [Flüchtigkeitsfehler des Kopisten, der die Abkürzung für ων in der Urhandschrift falsch auslegte] — 13 $\overline{\alpha}$ in mrg. add. DM — 13. 14 ᾀεὶ D ἀεί ABCEMT — 20 ἐπὶ τῆς om. B.

p. 14
4 ἐστι **BCDEM** — 6 συμβάλλει C — 7 ἔστι **BCDEM** — 13. 14 διαπαντός utrob. M [D?] — 14/15 ἐν τῷ ἀφ.] ἀφανῆ E — 18 $\overline{\beta}$ in mrg. add. DM — 22 ὁ γὰρ διὰ **CTE** — 23 $\overline{\alpha\beta\gamma}$] $\overline{\alpha\beta}$ A — 26 σημεῖα B$\mathrm{D^s}$M σημεῖον A om. CTE — δυνάμει D.

p. 16
5 $\overline{\gamma}$ in mrg. add. DM — δύνει] δύνασθαι D — 6 $\overline{\beta\delta\gamma\varepsilon}$ corr. Hu.: $\overline{\beta\gamma}$ $\overline{\delta\varepsilon}$ A $\overline{\beta\gamma\delta\varepsilon}$ BCDMT $\overline{\beta\varepsilon\gamma\delta}$ E — 7 πρὸς ὀρθὰς add. Hu.: καὶ E — 9 ἀεὶ E — 19 $\overline{\delta}$ in mrg. add. DM — 21 ἐφάπτεται E — 23 αἰεὶ] καὶ E — 24 ἀεὶ E.

d. 18
1 κύκλος μέγιστος E — 4 ἐφάψεται ex ἐφάπτεται in mrg. ab ead. m. corr. E — 5. 6 ἀεὶ utrob. E — 7-8 ἔστω γὰρ ὁ φανερὸς πόλος τῆς σφαίρας ὁ $\overline{\delta}$, καὶ διὰ τῶν τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ κύκλου πόλων καὶ τοῦ $\overline{\delta}$ **DM** — 8 κύκλου om. CT — 11 $\overline{\delta\alpha}$ **DM** — $\overline{\alpha\eta\zeta}$ **DM** — 12 $\overline{\gamma\kappa\vartheta}$ B — 13 $\overline{\varepsilon}$ in mrg. add. DM — $\overline{\gamma\vartheta\kappa}$ EDM $\overline{\gamma\vartheta}$ ABCT — 14 ἐστι **BCDM** — 15 $\overline{\gamma\kappa\vartheta}$ B.

p. 20
1 ἀεὶ utrob. E — 2 ἐστιν om. **DM** — 3 ἀεὶ E — 5 συμβαλέτω D [Schreibfehler] — 6 καὶ ante ἐπεὶ add. **DM** — 7 τῶν in mrg. ead. m. D — 9 τέμνει DM — 13–14 ἐπὶ διαμέτρου τῆς $\overline{\alpha\gamma}$ bis rep. E — 15/16 ἐφέστηκε **BCDM** — 19 καὶ post τέμνεται add. ET — 23 ἐστὶν E — 25 εὐθείας om. **DM** — in mrg. $\overline{\zeta}$ add. DM — 26 ἐστι **BCDM**.

p. 22
2 οὐδὲν E — 3 ὁ μὲν ἄρα $\overline{\alpha\eta\zeta}$ **DM** — αζη] η antea om. ead. m. add. T — 3. 4 (utrob.) ᾀεὶ D ἀεὶ EM — 3 ἐστι **BCD** utrum ἐστι an ἐστιν M praebeat incertum — 4 $\overline{\gamma\vartheta\alpha}$ D — 5 ὁ om. B — ἐν om. D [Schreibfehler] — 6 καὶ τὸ ἀφανὲς τῆς σφαίρας **DM** — 8 ἀεὶ E — 10 κεκλιμένος D [Versehen des Kopisten, der das Kompendium für οι des Archetypus falsch auslegte] — 14 $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ Hu.: $\overline{\alpha\eta}$ $\overline{\beta\delta}$ A $\overline{\alpha\eta\beta\delta\gamma}$ BCDEMT — 19 τὰ om. B — ἀεὶ E — 22 ποιούντων in mrg. Paris. 2472 — 23 $\overline{\eta}$ in mrg. add. M [D?] — 27 $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ CTE $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ AB $\overline{\alpha\eta\beta\delta\gamma}$ DM.

p. 24
1 οἵ E — καὶ ante ἐπεὶ add. **DM** — 3 τὸν $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ DM τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ AE τὸν $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ BCT — 5 $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ Hu.: $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ codd. — 6 $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ Hu.: $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ A $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ BCDEMT — 7 $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ DM $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ A $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ BCET — 8 ἐφέστηκε **BCM** [D?] — 9 τέμνηται E — 10 $\overline{\zeta\eta}$] $\overline{\eta\zeta}$ M [D?] — περιφέρεια ἡ ἡμίσεια· ἡ $\overline{\zeta\eta}$ om. E [omoioteleuton] — 11 ἐστὶ **BCDM** compendium E — σημείων T [Schreibfehler] — 12 $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ DM $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ A $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ BCET — 13 ἔγγιον ex -γειον corr. T — τῆς ἀπώτερον post ZH add. CT ἀπώτερον E — ἐστὶν] ἐστὶ τῆς πορρώτερον DM — 13–14 $\overline{\vartheta}$ in mrg. add. DM — 14 ἐστὶν alt. om. **DM** — 15 $\overline{\iota}$ in mrg. add. DM — 16 καὶ διὰ (om. δὲ) E — 19 $\overline{\kappa}$ in mrg. add. DM — 20 ἀεὶ E.

p. 26

1 δὴ om. E — 2 $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\delta\gamma}$ DM $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ A $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ BCET — 3 καὶ ante ἐπεὶ add. **DM** — 4 $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\delta\beta}$ A $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\delta\gamma}$ CDTM $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ E om. B — 5 $\overline{\alpha\zeta\vartheta}$ E — 7 $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ pr. E : $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\delta\gamma}$ ACTDM $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ B — ὥστε καὶ ἑκάτερος τῶν $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ om. D extremo folio — ἑκάτερος] ἕκαστος **M** ἕκαστος in mrg. corr. P — $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$] $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\delta\gamma}$ AMP $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ B $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ nec plura CT $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ E — 8 κύκλων] κύκλος ET — ἐστι **BCDM** — κύκλον post $\overline{\eta\zeta\vartheta}$ add. **DM** — 9 αὐτῶν post ἄρα add. CT — $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta\beta\alpha}$ BC $\overline{\alpha\beta}$· $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\beta\alpha}$ A $\overline{\alpha\beta}$· $\overline{\gamma\delta}$, $\overline{\beta\alpha}$ DM $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$· $\overline{\beta\alpha}$ E — ἡ *AB* om. DM — ἐστι **BCDEMT** — 10 ἄρα suprscr. T — 11 καὶ οὔσας post αὐτῆς add. **DM** — τῷ $\overline{\eta\zeta\vartheta\kappa}$ C τῷ $\overline{\eta\zeta\vartheta}$ E τῷ τοῦ $\overline{\eta\zeta\vartheta}$ κύκλου **DM** — 11 ὀρθή ... 13 ἐπιπέδῳ antea om. [omoioteleuton] summo folio add. M — 12 δὴ D — ἑκάτερα D — 13 $\overline{\eta}$ $\overline{\zeta}$ $\overline{\vartheta}$ κ/ῦ DM — 14 $\overline{\lambda}$ in mrg. add. DM.

p. 28

1 τῶν om. **DM** — 1. 4 (utrob.) κέκλ. ex κέκλειται corr. T — 2 $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\delta\gamma}$ DM $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ A $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ BCET — 3 τῶν om. **DM** — ἡ κλίσις ἐστὶν **DM** — 4 $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ DM $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ A $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ BCET — 5 $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ BT — 6 $\overline{\zeta\vartheta}$ AC^{s} $\overline{\eta\zeta\vartheta}$ **BDEMT** — 8 τῶν utrob. om. **DM** — 9 τῶν om. **DM** — $\overline{\kappa\mu\nu}$ **DM** — ἦν] ἐν ᾗ **DM** — 10 κέκλειται T — 10. 12 (utrob.) $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\delta\gamma}$ DM $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ A $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ BCET — 11 τῶν om. **DM** — 12 $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$] $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ BCT — 13 $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ DM $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ A $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ BCET — 16 ἐφαρμόζουσιν E.

p. 30

1 γὰρ post ἔστω add. E — 2 pr. ἀεὶ ABCEMT ᾀεὶ D — alt. αἰεὶ ABCT ᾀεὶ D ἀεὶ EM — 4 τὶς μέγιστος κύκλος ἐφαπτόμενος, antea om., in mrg. ead. m. add. D — 5 pr. $\overline{\delta\beta\varepsilon\gamma}$ CDEM $\overline{\delta\beta}$ $\overline{\varepsilon\gamma}$ ABT — alt. $\overline{\delta\beta\varepsilon\gamma}$ BCDEMT $\overline{\delta\beta}$ $\overline{\varepsilon\gamma}$ A — 7 παράλληλος κύκλος τῷ $\overline{\alpha\delta}$ **DM** — 8 ἐστι **BCDM** ἔσται E — 9 $\overline{\gamma}$ $\overline{\zeta}$ $\overline{\varepsilon}$ Hu.: $\overline{\delta\zeta}$ $\overline{\gamma\varepsilon}$ ABCETM $\overline{\delta\zeta\gamma\varepsilon}$ D — ὑπὸ B [ὑ in ἀ corrig.] — 10 $\overline{\eta}$ $\overline{\beta}$ $\overline{\lambda}$ Hu.: $\overline{\alpha\eta\beta\lambda}$ ABECT $\overline{\alpha\eta}$ $\overline{\beta\lambda}$ DM — παράλληλοι κύκλοι εἰσὶν **DM** — εἰσι BCE — 11 $\overline{\eta\zeta\vartheta}$ M — καὶ om. C — εἰσὶ **BCDM** — 12 $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\delta\beta\varepsilon\gamma}$ BCET $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\beta\varepsilon\gamma}$ A $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\delta\varepsilon\beta\gamma}$ DM — 13 εἰσι **BCDEM** — 15 $\overline{\delta\alpha\kappa}$ E — 18 παραγίνεται DM — 19 $\overline{\varepsilon}$] $\overline{\lambda}$ CT — $\overline{\lambda}$] $\overline{\varepsilon}$ CT — 19/20 παραγίνεται DM — 21 $\overline{\alpha}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\delta}$ DM — 22 τὸ $\overline{\lambda}$ [$\overline{\lambda\varepsilon}$ C] ἐπὶ τὸ $\overline{\varepsilon}$ CT.

p. 32

1 τῇ A — 3 τέμνουσιν E — 12 ἐν σφαίρᾳ γὰρ E — 20 ἔγγειον T — 26 καὶ ante ἐπεὶ add. **DM** — 27 ἐστι **BCDEM**.

p. 34

1 περιφέρεια ἄρα B — 13 ἐστι **CDM** — 19 $\overline{\kappa\varepsilon}$ A $\overline{\eta\kappa\varepsilon}$ ex $\overline{\kappa\varepsilon}$ corr. T — γὰρ post ἔστω add. E — 20 καὶ ante ἐπεὶ add. **DM** — $\overline{\zeta\vartheta}$ C — 23 ἥπερ ... 24 παραγίγνεται om. DM [omoioteleuton].

p. 36

3 ἐν ... 4 σφαίρας om. DM [omoioteleuton?] — 4. 11 δὶς (utrob.) ex corr. T — 7 ἀεὶ E — 8 ὁ $\overline{\alpha\zeta\varepsilon\eta}$, om. κύκλος E — 13 κύκλον post $\overline{\alpha\beta\gamma}$ add. **DM** — 14 ἐπειδὴ E — ἑκάτερος A ex ἑκάτερα corr. B ἑκατέρα CDEMT.

p. 38

1 $\overline{\zeta\delta}$ A — $\overline{\alpha\zeta\varepsilon\eta}$ E [cf. p. 36, 8] — 7 ὁ $\overline{\beta\gamma\vartheta}$ θέσιν ἕξει τὴν $\overline{\alpha\delta\varepsilon}$· τὰ γὰρ $\overline{\eta}$ $\overline{\zeta}$ σημεῖα ἐφαρμόσει ἐπὶ τὰ $\overline{\alpha}$ $\overline{\varepsilon}$· καὶ post παραγένηται add. CT — 9 $\overline{\alpha\vartheta\delta}$ A — 10 κύκλος]

κύκλον E [Flüchtigkeitsfehler des Kopisten, der, wie schon Hultsch bemerkt hat, das Kompendium für ος des Archetypus falsch auflöste] — 10 ἐστι **BCDEM** — 10 καὶ … 11 κύκλον om. B [omoioteleuton] — 11 $\overline{\beta\delta\gamma}$ ex $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ corr. T — ἐστι **CDM** compendium E — 16 $\overline{\zeta\delta}$ CT.

p. 40

1 ἐστι **BCDEMP** — 2 $\overline{\gamma\delta\gamma}$ E — ἐστι **BDMTP** compendium CE — 3 πάλιν … 7 ἔσται om. BCDEMTP, in mrg. add. P^2 — 4 διελθὸν P^2 διελθὼν A — 5 παρέσται A παραγενήσεται **P^2** — 6 $\overline{\beta\delta\gamma\vartheta}$ Hu.: $\overline{\beta\delta\gamma o}$ A $\overline{\beta\delta\gamma}$ **P^2** [unnötig die Korrektur bei Hultsch; die richtige Lesart ist die von P^2: man vgl. darüber Hultsch selbst zu 32, 12. 13 (p. XXXI) und 40, 28] — 7 δὶς P^2 in mrg., β̓ P^1 $\bar{\beta}$ A — ἔσται AP ἐξέσται P^2 — 9 κύκλος om. B — 13 μέγιστος om. DM — 14 ἅπτηται] ἅπτεται DM — ὧν om. DM — 16 ὧν ἐφάπτεται om. CT — ποιήσει DM — 28 τοῦ $\overline{\alpha\delta}$ post ἁπτέσθω add. DM [l. potior?] — $\overline{\zeta\beta}$] $\overline{\beta\zeta}$ MD [l. potior?] — ἢ suprscr. T — 28 ἢ … 29 ἐφάπτεται om. DM [l. potior?].

p. 42

1 λέγων D [Schreibfehler] — ἀεὶ E — 2 ἀνατελεῖ D^sM ἀνατέλλει ABCET — 5 φέρεται ex corr. T — 6/7 $\overline{\lambda\vartheta\mu}$ $\overline{\nu\kappa\xi}$ DEM $\overline{\lambda\vartheta}$ $\overline{\mu\eta}$ $\overline{\kappa\zeta}$ A $\overline{\lambda\vartheta}$ $\overline{\mu\nu}$ $\overline{\kappa\xi}$ BCT — 7 καὶ ante ἐπεὶ add. **DM** — 8. 11 (utrob.) ἀεὶ E — 9 διὰ … 12 ἀνατέλλει om. DM [omoioteleuton] — 17 $\overline{\xi\mu}$ DM — 18 $\overline{\lambda\nu}$ $C^s$$D^s$EMT $\overline{\lambda\eta}$ AB — 22 ὅλως D [Flüchtigkeitsfehler des Kopisten, der das Kompendium für ος des Archetypus falsch auflöste] — 27 ἀεὶ τέμνῃ δίχα, ὁ δὲ ἕτερος E.

p. 44

2 [ἀεὶ E ?] — κύκλ$\overset{\omega}{o}$ν ead. m. corr. M — 3 μηδέτερος CDTM μὴδέτερος AB μηδ’ ἕτερος E — 5 $\overline{\alpha\gamma\beta}$ $\overline{\gamma\delta\beta}$ ABCT $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\gamma\delta\beta}$ DM $\overline{\alpha\gamma\beta}$, om. $\overline{\gamma\delta\beta}$, E — ἐστι T — 8 $\overline{\beta\delta\gamma}$ DM — 11 $\overline{\beta\delta\gamma}$ M [D ?] — 12 ἀεὶ E — 19 καὶ ante ἐπεὶ add. **DM** — 19. 21 ἀεὶ E (utrob.) — 20 ἐστὶ **BCDM** — 21 τοῦ post κατὰ add. B — κύκλος ἄρα **DM** — 26 ἐστί **BCDEM** — 27 τὸ *E* … 29 σφαίρας bis rep. D.

p. 46

1–2 τῆς σφαίρας ἐστὶν **DM** — 3 ἐστι **BCDEM** — 4. 6. 9 (utrob.). 12. 17. 18 $\overline{\beta\delta\gamma}$ (pro $\overline{\gamma\delta\beta}$) DM [zu Z. 17 bemerkt Hultsch: $\overline{\beta\gamma\delta}$ D; ich halte es jedoch für ein Versehen] — 12 ἐστι **BCDEM** — 15 οὐδ’ E — ἀλλ’ ὅτι A ἄλλον τι D [Versehen der Kopisten, die das ἄλλό τι der Archetypen mißverstanden) — 17 ἐν om. B — 18 in fine τέλος τοῦ αὐτολύκου περὶ κινουμένης σφαίρας add. BD τέλος E τέλος τοῦ περὶ κινουμένης σφαίρας αὐτολύκου M.

Wenn man nun diese Varianten näher ins Auge faßt und einer eingehenden Analyse unterzieht, so gelangt man zu folgenden interessanten Ergebnissen:

Wenn Hultsch der Hs. A den Vorzug vor allen anderen gegeben hat, so hat er mehr nach dem äußeren Schein als nach den tatsächlichen Handschriftenverhältnissen geurteilt. Dabei ist selbst für ihn die Autorität dieser Hs. keineswegs so unanfechtbar, wie sich nach seinen Äußerungen schließen ließe; mehr als einmal sieht er sich genötigt, die Lesarten der anderen Hss. heranzuziehen und die von A als offensichtliche Entstellungen des Grundtextes oder als Flüchtigkeitsfehler des Kopisten zu verwerfen. Hultsch gibt zwar nicht den Grund an, weshalb er die Hs. A für die zuverlässigste hielt; doch hat ihn wahrscheinlich die geringe Zahl von Auslassungen in dieser Hs. dazu veranlaßt. Da jedoch die Auslassungen in den anderen Hss. keineswegs beabsichtigt, sondern fast durchwegs durch Omoioteleuta zu erklären sind, d. h. also durch gelegentliche Versehen der Kopisten, die diese Hss. oder ihre Vorlagen abschrieben, so verliert der Grundsatz, dem hier Hultsch gefolgt ist, einen großen Teil seiner Beweiskraft.

Aus diesen Gründen hielt ich es für angebracht, die beiden Hss. M und T näher zu untersuchen. Dabei hat sich mir ergeben, daß M nahe verwandt mit D ist. Beide stammen aus ein und demselben Archetypus x, wobei M die sorgfältigere Abschrift darstellt und von besserem Verständnis zeugt. Um dies einzusehen, braucht man nur darauf zu achten, daß, namentlich bei den Formen ἐστί und εἰσί, immer der Schreiber von M es ist, der das euphonische ν an der richtigen Stelle wieder einsetzt.

In analoger Weise steht nun T nahe zu C und ist korrekter als dieses; doch ergibt sich aus einigen Abweichungen, daß sie nur mittelbar auf denselben Archetypus b zurückgehen.

Indem nun die Lesarten von M und T die von D, beziehungsweise von C bestätigen, geben sie diesen Hss. eine größere Autorität.

Aus einer anderen Grundhandschrift, aus c, sind ABE geflossen, und zwar auf drei verschiedenen Wegen, so daß der Urtext im Laufe der Zeit bedeutende Wandlungen durchgemacht hat.

Es sind nun zwei Stellen vor allem, denen wir unsere Aufmerksamkeit zuwenden müssen.

Die Hss. BCDEMT lassen auf S. 40 (Hultsch) die Zeilen 3—7 fallen, wobei es sich nicht um ein Versehen handeln kann. Andererseits schieben wieder CT, und nur sie, auf S. 38, 7 eine andere Stelle ein.

Nehmen wir nun an, daß die Stelle S. 38, 7 (CT) in der Urhandschrift vorhanden war und erst später wegen des Omoioteleuton (der beiden $\bar{\varepsilon}$) in den Abschriften x und c gestrichen wurde, dann würden CT die ursprüngliche Fassung darstellen und die Stelle S. 40, 3—7, die in b fehlt und nur in A vorhanden ist, wäre dann nachträglich eingeschoben. In diesem Falle stünde also die Sippe b und nicht die Hs. A dem Archetypus näher.

Zu einem ganz anderen Ergebnis führt die Annahme, daß in der Urhandschrift nicht die Stelle S. 38, 7 (CT) (die vielmehr als spätere Interpolation zu tilgen wäre), sondern die Stelle S. 40, 3—7 (A) existiert hätte, die dann in allen anderen Hss. auf unerklärliche Weise ausgefallen wäre. Der letzteren Ansicht muß offenbar auch Hultsch gewesen sein, da er in seinen Text wohl die Stelle S. 40, 3—7, nicht aber die S. 38, 7 aufgenommen hat. Dabei hat aber Hultsch einen sehr wichtigen Umstand übersehen. In P ist nämlich die Stelle S. 40, 3—7, die von dem ersten Schreiber ausgelassen worden war, von anderer Hand am Rande wieder zugesetzt worden. P^2 hat also beim Durchkorrigieren von P einen Kodex d vor Augen gehabt, in welchem diese Stelle gleichwie in A vorhanden war. Nun kann aber dieses d weder mit A selbst noch auch mit irgendeiner anderen Hs. der A-Sippe identifiziert werden, denn gerade an der fraglichen Stelle weicht P^2 von A in einigen Lesarten ab, die, wie der kritische Apparat (S. 40, 4. 5. 6) erweist, denen von A zweifellos vorzuziehen sind. Man kann also nicht umhin anzunehmen, daß die Sippe, zu welcher die Hs. d gehörte, zuverlässiger war als die, welche für uns durch A vertreten ist. Noch eines kommt hinzu: da P^2, d. h. d, an einer anderen Stelle (S. 26, 7) mit M in einer Lesart übereinstimmt, die nur von M und P^2 geboten wird, so darf man daraus ohne weiteres folgern, daß d zu derselben Sippe x gehörte, aus welcher M stammt. So gehört also M zu einer Sippe, die zuverlässiger ist als A und seine Gruppe.

Nach den obigen Ausführungen dürfte es wohl niemandem zweifelhaft sein, daß eine befriedigende Lösung der Textfrage nur auf Grund einer sorgfältigen Prüfung sämtlicher Hss. möglich ist, wobei die Hs. P besondere Berücksichtigung verdient. Jedenfalls dürften schon die angeführten Gründe genügen, um der Hs. A die uneingeschränkte Autorität zu nehmen, die ihr Hultsch zuerkannt hat, und um eine aufmerksame Durchsicht der von den anderen Hss., namentlich von DM gebotenen Lesarten wünschenswert erscheinen zu lassen.

Der Kürze halber habe ich in meinem Apparat die Varianten, die ich für wesentliche Verbesserungen des von Hultsch gebotenen Textes halte, durch Fettdruck kenntlich gemacht.

Der künftige kritische Herausgeber des Autolykos wird, glaube ich, noch manche weitere Lesarten, und zwar nicht nur von DM, sondern auch von CT, ja sogar von E übernehmen müssen.

Indem wir nun zur Untersuchung der Scholien übergehen, merken wir gleich an, daß in M auf den Text elf Scholien folgen, die mit den elf ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet sind, denen ebensoviele am Rande des Textes eingetragene Buchstaben entsprechen (s. Apparat, S. 12, 13. 14, 18. 16, 5. 19. 18, 13. 20, 25. 22, 23. 24, 13—14. 15. 19. 26, 14). Auch in der Hs. D findet sich dieselbe Buchstabenreihe. Nun hat Hultsch diese Übereinstimmung der beiden Handschriften nicht nur nicht angemerkt, sondern nach seinem kritischen Apparate und nach der Beschreibung, die er (S. XXII) von der Hs. D gibt, hätte es fast den Anschein, als ob D gar keine Scholien enthielte. Ich halte dagegen die

Vermutung für begründet, daß D nach Bl. 75 dieselben Scholien enthalte wie M.

In T hat eine spätere Hand die nämlichen Scholien, die Hultsch bietet, teils am Rande, teils am Fuße der einzelnen Blätter eingetragen, folgende ausgenommen: *α*, *ζ*, *η*, *ϑ*, *ι*, *ια*, *κη*, *λγ*. In M liest man dagegen außer zwei noch unveröffentlichten, nur folgende Scholien: *ιη*, *κ*, *κβ*, *κδ*, *κη*, *λ*, *λγ*, *λζ*, *λη*.

Im folgenden führe ich nur die Varianten dieser beiden Hss. an:

p. 8 Hultsch, Sch. (*ε*): *διὰ*] *ἀπὸ* T.

p. 12, (*νγ*): *ἰσημερηνός* T. An Stelle dieser Scholie steht in M folgende, bisher noch unveröffentlichte: *⟨ὥ⟩σπερ ἔχει ἐπὶ τῶν οἰκήσεων τῶν ὑπὸ τοὺς πόλους τῆς οὐρανίου σφαίρας· ἐπ' ἐκείνων γὰρ ὅ τε ἰσημερινὸς κύκλος ὁρίζων γίνεται καὶ ἡ ἡμέρα ἓξ μηνῶν καὶ ἡ νὺξ ὡσαύτως μηνῶν ἕξ· καλοῦνται δὲ οἱ ὑπὸ τοὺς πόλους οἰκοῦντες περίσκιοι.*

p. 14, (*ιδ*): *τούτου τοῦ βιβλίου* T [l. potior].

In T steht über dem *συμβαλεῖ* (Z. 6 des Textes) *συμπίπτει*, was wohl eher eine Scholie sein dürfte als eine Korrektur, wie Hultsch (S. XXVI) annimmt.

(*ιζ*) An Stelle dieser Scholie steht in M folgende, noch unveröffentlichte:

⟨ὥ⟩ς ἔχει ἐπὶ τῆς ὑπὸ τὸν ἰσημερινὸν οἰκήσεως, ἥτις λέγεται καὶ ὀρθὴ σφαῖρα· ἐπ' ἐκείνης γὰρ ὅ τε ὁρίζων διὰ τῶν πόλων ἐστὶ τῆς σφαίρας, καὶ ἀεὶ ἰσημερία ἐστίν.

p. 16, (*ιη*): 25 *κύκλος* om. M — 26 *α'*] *πρῶτον* M — 27 *καθ' ὃ* M — 28 *ἤτοι* post *τομή* add. M — *σημεῖον* post *Γ* add. M — *καὶ* om. T — 29 *σημεῖον* post B add. M.

(*κ*): 31 *ὅ ἐστιν*] *⟨ὥ⟩ς ἔχει* M — *οκήσεως* T (sic) — *ὅταν*] *ὅπου* M *ὅτε* T — 32 *ᾖ*] *ἐστὶ* M.

p. 18, (*κβ*): 19 *ἡμικύκλιον* M — 20 alt. *τὸ Δ* ex *τὸ ΓΘΔ* corr. T — *κύκλου* post *ΔΗΖ* add. M — 21 *τοῦ* post *ἐκ* add. M — 22 *ἐν τῷ α'*] *τοῦ αὐτοῦ* M — *τὸ* E *πόλος*] *πόλος ἐστι τὸ* $\bar{ε}$ M — 23 *τοῦ* $\bar{ε}$ *τὸ* $\bar{δ}$ T *τὸ* $\bar{ε}$ *τοῦ* $\bar{δ}$ M — 24 *ὄντες πόλους παράλληλοι*] *πόλους ὄντες κύκλοι, παράλληλοι εἰσίν* M — *ἴσοι δέ*] *εἰσὶ δὲ καὶ ἴσοι* M — 26 $\overline{αηζ}$ M — 27 *ΔΔΓΕ*] $\overline{αηγε}$ MT.

p. 20, (*κδ*): 28 *ΑΗΖ*] $\overline{αξη}$ *κύκλος* M — *ΑΔΓ*] $\overline{αβγ}$ M — 29 *ἐλάττων* T *ἐλάσσων ἐστὶ* M — 30 *ΑΓ*] $\overline{αηγ}$ M — *ἐστιν* T.

(*κς*): *ε'* om. T.

p. 22, (*κζ*): *τουτέστιν* T.

(*κη*): 31 *ἤτοι* post *ποιήσει* add. M — *καὶ δι' ἄλλου* om. M — *παρὰ*] *διὰ δὲ* M — *ἔσται* M.

p. 24, (*λ*): 23 *γάρ* om. M — *ἀνωτέρω* M.

p. 26, (*λγ*): 16 *προσδιορισμοῦ* M — 19 *γὰρ* post *ἐὰν* add. M — 22/23 *τοῖς πρότερον* om. M — 23 *κατασκευάσωμεν*, *δείξομεν* M — 24 *τοῦτο . . . 26 βιβλίου* om. M.

(*λς*): 32 *αὐτῷ* om. T.

p. 28, (*λζ*): 17 *KMN*] $\overline{\kappa\mu\vartheta}$ M — 18 *γὰρ* post *ἐὰν* add. M — ***κύκλων ὡς*** post ***παραλλήλων*** add. M — *ΞPO*] $\overline{\xi o}$ MT — 20 *ZP*] $\overline{\xi\varrho}$ M — 22 ***ἡμικύκλιον*** M — 25 ***Θ****P*] $\overline{\varrho\vartheta}$ M — 27 *γωνία* post ***HΣP*** add. M — 28 ***περιφερείας*** om. M — 34 *ὥστε . . . τρεῖς*] *ὥστε καὶ αἱ ὑπὸ* ***KMΘ ΛNΘ*** *ὀξεῖαί εἰσιν· ἴσαι γάρ εἰσιν ἑκατέρα τῇ ὑπὸ* ***PΣΘ*** *διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς KM ΛN τῇ* ***PΣ*** M.

(*λη*): 36 *ZE*] $\overline{\varepsilon\zeta}$ M.

p. 32: 4 steht, über ***πλείονα***, in T: *τοῦ δύο*: offenbar eine Scholie (s. Hultsch, p. XXXI).

p. 32, (*μζ*): 16 *καὶ*] *ως* T (sic).

p. 44, (*νε*): *τοῦ περὶ κιν. σφ.*] *τούτου τοῦ βιβλίου* T.

Auch die Scholien bestätigen also in gewissem Sinne das Ergebnis unserer Textvergleichung. Ich halte es für wahrscheinlich, daß die Scholien der Hs. M aus einer älteren Quelle stammen, aus der dann die anderen durch fernere Änderungen und Erweiterungen abgeleitet sind. Eines ist jedenfalls sicher: auch bei den Scholien sind in vielen Fällen die Lesarten von M der von Hultsch gebotenen Textgestaltung vorzuziehen.

Eine kritische Ausgabe des Autolykos ist also keine so leichte Aufgabe. Man wird auch die anderen, bisher noch nicht berücksichtigten Hss. heranziehen müssen, denn so, wie die Sachen jetzt stehen, läßt sich keine einzige Hs. aufweisen, welche den Originaltext getreu wiedergäbe. Auch wird sich der künftige Herausgeber hüten müssen, den Wert der einzelnen Hs. *a priori* nach ihrem Alter zu beurteilen. Ein solcher Schluß wäre für die Schriften des Autolykos hinfällig. Endlich wird man bei der Herstellung des kritischen Textes im ganzen eklektisch vorgehen müssen; jedenfalls wird man von der allzu einfachen Methode, die Hultsch in seiner Ausgabe befolgt hat, abgehen müssen.

Die von Manitius[32]) besorgte Ausgabe von Hypsikles' kleiner Schrift „*Ἀναφορικός*" ist namentlich wegen der ausführlichen Inhaltsangabe und wegen der Untersuchungen über die arabischen Übersetzer wertvoll. Hypsikles wurde nämlich gegen Ende des 9. Jahrhunderts von Ishak ben Honain und von Kosta ben Luka ins Arabische übertragen[33]). Auf dem arabischen, und nicht auf dem griechischen Texte, beruht auch die von Manitius herausgegebene lateinische Übersetzung des Gerardus Cremonensis[34]).

---

[32]) Vgl. oben S. 1 A. 1.

[33]) Zu den arab. Übersetzungen vgl. auch Wenrich, De auctorum Graecorum versionibus et commentariis Syriacis, Arabicis, Armen. Persicisque, Lipsiae 1842, p. 206; Steinschneider, Zeitschr. f. Mathem. u. Physik, X, 1865, 456ff.; Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, Leipzig 1900 usw.

[34]) Die lateinische Übersetzung der Schrift, die Giorgio Valla seinem Werke De expetendis et fugiendis rebus (B. XVI) einfügte, blieb dem Manitius unbekannt (vgl.

Der Herausgeber glaubte, im Traktate des Hypsikles einen schweren Irrtum entdeckt zu haben, weshalb er nicht anstand, die Schrift für unecht zu erklären und sie einem unbekannten Mathematiker um 130 v. Chr. zuzuweisen. Nachdem aber Menge [35]) die Haltlosigkeit dieser Behauptung erwiesen und gezeigt hat, daß der angebliche Fehler gar nicht besteht, hat niemand mehr die Echtheit des „Ἀναφορικός“ in Frage gestellt. Nach den Ausführungen Menges und Björnbos [36]) erübrigt es sich, auf Inhalt, Form und Bedeutung der Schrift näher einzugehen. Wie bei Autolykos so sind es auch bei Hypsikles die Grundlagen der handschriftlichen Überlieferung, die noch einer gründlichen Untersuchung bedürfen.

Manitius hat für seine Ausgabe die fünf Codices ABCVW benutzt; außerdem kannte er noch, ohne sie jedoch zu benutzen, die zwei Leidener, die zwei Escorialensischen und sechs Pariser Codices. Von den vatikanischen Hss. hatte er nur eine sehr vage Notiz (S. VIII): „Nach Montfaucon, Bibl. bibl. p. 9 C, 9 D, 10 B, 11 C, besitzt die Bibliotheca Vaticana vier Codices, welche den Ἀναφορικός enthalten. Näher bekannt ist nur der von Parthey, Mon.-Ber. d. Berl. Ak. d. W. 1863, S. 384f. seinem Inhalte nach beschriebene Sammelband von 397 Bl. in Folio Nr. 191, dessen erster Bestandteil, nach Hultsch, Autol. p. XXII ein Cod. membr. sacc. XIV, 12 Schriften umfaßt.“ Unbekannt blieb ihm auch der Vatic. 204, auf den Menge [37]) schon zwei Jahre vorher aufmerksam gemacht hatte.

Ferner hat Manitius bei seiner Textgestaltung den Cod. A zugrundegelegt; nur ganz ausnahmsweise hat er den Lesarten der vier anderen von ihm benutzten Codices den Vorzug gegeben. Dabei fehlt jeder Versuch, die handschriftliche Tradition, sei es auch nur summarisch, zu überprüfen. Oemichen [38]) unterscheidet zwei Gruppen von Hss.: zur ersten würden AVC gehören (dabei wäre A aufs engste mit V ver-

---

Menge, Neue Jahrbücher für Philologie, 137, 1888, 763). Zu den mittellateinischen Übersetzungen griechischer Mathematiker vgl. Björnbo, Archiv f. Gesch. d. Technik u. Naturwiss., I, 1909, 385ff.

[35]) a. a. O. 762; vgl. auch Oemichen, Berl. Philol. Woch. 1888, 684f.; Günther, ebd. 1144f.

[36]) R. E. IX 430ff.; vgl. auch Schaubach, Über Hypsikles' Schrift Ἀναφ., Archiv f. Philol. V, 1830, 9ff.; Cantor, Vorles. I² 344ff.; Susemihl, Gesch. d. gr. Lit. in d. Alex. I 759ff. und die dort angeführten Werke.

[37]) S. o. S. 280 A. 10. Auf diesen auffälligsten, wenn auch nicht schwersten Mangel der Ausgabe von Manitius ist natürlich schon wiederholt hingewiesen worden: vgl. Heiberg, in Gercke u. Norden, Einl. d. Altertumswiss. II 408; Susemihl, a. a. O. I 760 A. 244; Björnbo, a. a. O. 430; Christ-Stählin-Schmid, Gr. Litg. II⁶ 279 (der Kodex wird hier unvorsichtigerweise als der wichtigste, statt als der älteste bezeichnet).

[38]) a. a. O. „Auf weitere Klassifikation läßt der Verfasser sich nicht ein. (Es sind zwei Gruppen, AVC und BWe; mit A ist V eng verwandt).“

wandt), zur zweiten BWe[39]). Menge gibt, Montfaucons Angaben bestätigend, Nachricht von drei vatikanischen Codices, EST, und weist dabei auf die nahe Verwandtschaft zwischen S und C und auf die oftmalige Übereinstimmung von E und V hin. Was die Scholien betrifft, die Manitius nach der Fassung von CP wiedergibt, so bringt Menge wenig Neues aus der Fassung von ST.

Man sieht also, daß eine allgemeine Durchsicht des von Manitius beigebrachten Apparates notwendig ist, da derselbe in seiner gegenwärtigen Gestalt ganz unzulänglich ist und da auch das von Menge neu beigebrachte Material zu dürftig und unzuverlässig ist.

Die Schrift des Hypsikles ist, wie ich auf Grund einer sorgfältigen Durchsicht der mir zugänglichen Kataloge habe feststellen können, in folgenden 25 Codices enthalten:

W = Vindobon. Suppl. gr. 9 [olim 63], s. XVII, chart[40]).
Leidensis gr. 39, s. XVI, chart.
Leidensis gr. 8, s. XVII, chart[41]).
P = Paris. gr. 453, ff. 59 ss., s. XVI—XVII, chart., cum scholiis.
D = Paris. gr. 2342, f. 155, s. XIV, chart., cum scholiis.
Paris. gr. 2347, ff. 377 ss., s. XVI, chart.
Paris. gr. 2363, ff. 95^v ss., s. XV, chart.
Paris. gr. 2364, ff. 122 ss., s. XV, chart.
Paris. gr. 2365, ff. 118 ss., s. XVI, chart.
Paris. gr. 2366, ff. 210 ss., s. XVI, chart.
Paris. gr. 2472, ff. 159 ss., s. XIV, chart.
Paris. Suppl. gr. 292, ff. 169 ss., s. XVII, chart.[42])
A = Ambros. gr. 28 [A 101 sup.], ff. 188—189, s. XV—XVI, chart.[43])
B = Ambros. gr. 903 [C 263 inf.], ff. 10^v—13^r, s. XVI, chart.[44])
C = Ambros. gr. 1051 [I 84 inf.], ff. 53—55. 170^v—171, s. XV—XVI, chart., cum scholiis[45]).
V = Marc. gr. 304, s. XV, chart.[46])
F = Vatic. gr. 191, ff. 70^v—72^r, s. XIII, chart.[47])
G = Vatic. gr. 192, ff. 143—145^r, s. XIII, chart., cum scholiis[48]).
E = Vatic. gr. 202, ff. 299—304, s. XIII, chart.
S = Vatic. gr. 203, ff. 38^v—39^v, s. XIII, chart., cum scholiis.

---

[39]) e = ed. princeps von J. Mentel, Parisiis 1657.

[40]) Vgl. A. F. Kollarii Supplementorum lib. I, Vindob. 1790, p. 423.

[41]) Vgl. Catal. libr. tam impress. quam mss. bibl. univ. Lugd. Bat. (1716), p. 341. 391.

[42]) Vgl. Omont, Invent. Somm. I 50. II 243. 244. 247. 267. III 244.

[43]) Vgl. Martini et Bassi, a. a. O. I 32. Manitius weist an einer Stelle (p. VIII) die Hs. dem XVI. Jh., an einer anderen (p. XXII) dem XIV. Jh. zu; Menge weist sie dem XIV., Heiberg, Theod. Sphaer. p. IV, dem XV.—XVI. Jh. zu.

[44]) Vgl. oben S. 280 A. 19.

[45]) Vgl. Martini et Bassi, a. a. O. II 1124.

[46]) Vgl. oben S. 281 A. 22.

[47]) Vgl. oben S. 280 A. 12.

[48]) Vgl. Mercati et Franchi de' Cavalieri, a. a. O. 227ff.

T = Vatic. gr. 204, ff. 133v–135v, s. X, membr., cum scholiis[49]).
R = Riccard. gr. 38 [K. II. 1], ff. 64v–67, s. XVI, chart.[50])
M = Magliabech. gr. 11B [II. III. 36], ff. 68v—69. 105v–108r, s. XVI, chart., cum scholiis[51]).
Escorial. gr. Y—1—7, ff. 267–269, s. XVI, chart., cum scholiis.
Escorial. gr. X—1—4, ff. 144v–148, s. XVI, chart., cum scholiis[52]).

Die vatikanischen Hss. sind also fünf und nicht vier; G ist allen Forschern bisher entgangen.

Ich teile im folgenden das Ergebnis der von mir durchgeführten Vergleichung der Hss. DFGSTRM mit; für ABCVW benütze ich den Apparat von Manitius[53]).

c. 1 *m.*

1 *A* add. *m*: om. *c* — ὅσοι δηποτοῦν T — 3 ἡ om. R^1 — 3/4 ὑπεροχικ^ὁ R^1 ὑπεροχῇ C — 4 ἡ om. CR^1 — 5 τοῦ μεγίστου . . . 7 τετρά- om. R^1 (in mrg. add. R^2) — 5 alt. τοῦ A: om. cett. — 8 τοῦ om. CS — ἐκκειμένων AR^2 *m* ἐγκειμένων FGBWTM συγκειμ. CSR^1 ἐκειμ. D — 9 ὁ AV οἱ cett. et *m* — 13 ἡμίσους *m* ἡμίσους δὲ FBWMST ἥμισυς δὲ CDRG ἥμισυ δὲ AV — 16 τοῦ *ΔΗ* . . . 17 κατὰ suprscr. G — 17 πολλαπλάσιος A πολλαπλασίων cett. — ἐστὶν RT ἐστὶ cett.[54]) — διὰ S^1 — 18 pr. τοῦ] τῆς R^1 — 20 ἐστὶν FGT — ἐναλλὰξ ἄρα ἡ τῶν $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\delta\varepsilon}$ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν $\overline{\delta\varepsilon}$ $\overline{\varepsilon\zeta}$ ὑπεροχῇ ante ἐναλλὰξ add. D — 21 inter *AB* et *ΔE* lacunam 2—3 litterarum exhibet S — ἐστὶν TGF om. RC — alt. τῶν] τῷ M — 21-22 τῇ τῷ $\overline{\beta\gamma}$ $\overline{\gamma\delta}$ ὑπεροχῇ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν $\overline{\beta\gamma}$ $\overline{\varepsilon\zeta}$ ὑπεροχῇ, πάλιν B — 23 τῇ τῶν $\overline{\varepsilon\zeta}$ $\overline{\zeta\eta}$ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν $\overline{\varepsilon\zeta}$ $\overline{\zeta\eta}$ ὑπεροχῇ, ἐναλλὰξ B — ἐστὶν FGTR — 23 ἐναλλὰξ . . . 25 ὑπεροχῇ antea om. [omoioteleuton], in mrg. add. R — 23 ἄρα A: om. cett. — 24 ὑπεροχῇ R — ἐστὶν TGF — 27 alt. τῶν ex τοῦ corr. G — 29 ἐστὶν TG — 30 $\overline{\beta\gamma}$ $\overline{\gamma\delta}$ ex $\overline{\beta\gamma\delta}$ corr. T — ἔστιν GTF — 31 τῆς] τοὺς CSR^1 — 32 ὑπεροχῆς post *ΒΓ* scripsit simulque del. G — 32 *ΓΔ* suprscr. R om. C.

col. 3

1 $\overline{\beta\gamma}$ in mrg. R — 2 κατὰ . . . 4 τουτέστι om. AV [omoioteleuton] — 3 $\overline{\alpha\beta}$ . . . 5 τῶν antea om. [omoioteleuton], in mrg. add. R — 3 $\overline{\alpha\beta}$ . . . 5 πλήθους bis rep. W — 4/5 ἀπὸ τοῦ πλήθους τοῦ ἡμίσους V — 5 ἐγκειμένων WGFM — 6 *B* om. *c* — ὦσιν suprscr. R^2 om. CSR^1 — 7 ὑπεροχὴ F — 8 τοῦ om. DSMTGRBCVW, deletum videtur in F — 9 ἐστὶν FTGR — 10 ἐγκειμένων G ἐκκ. ex ἐγκ. corr. W

[49]) Vgl. oben S. 280 A. 13, 14, 15.

[50]) Vgl. Vitelli, Studi ital. di filol. cl. II, 1894, 497.

[51]) Vgl. Vitelli, ebd. 550f.

[52]) Vgl. oben S. 281 A. 25.

[53]) Mit *m* bezeichne ich die Ausgabe von Manitius, mit *c* die übereinstimmende Überlieferung sämtlicher Codd., mit R^1 S^1 T^1 die erste Hand dort, wo der Text von einer zweiten Hand korrigiert ist. Von R habe ich nur die ff. 64v–66r = c. 1–9, 16 *m* kollationiert. Den Text von *e*, dessen Lesarten von *m* übernommen sind, habe ich als wertlos übergangen.

[54]) In S steht für ἐστὶ immer das tachygraphische Kompendium.

— 12 *καὶ* ante *ἐν* add. V — *ὑπεροχὴ* F — 13 *ἀρχόμενοι* om. A — 15 *μίσου* C — 16 *ἐστὶν* R — 20 *διίσου* RFSDG — $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\beta\gamma}$ $\overline{\gamma\delta}$ CS — 22 *ἔσται* A : *ἐστὶ* cett. [*ἐστὶν* GTFR] — 23 *τοῦ ΓΔ* om. A — *πολλαπλάσιος* CV — *ἐστὶν* R — 26 *ἐστὶν* TG — 28 *ἐστὶν* FTG — 30 *Γ* om. *c* — *ἴσοι* D — 32 *ὁ* suprscr. T^2 om. T^1 — 33 *κατασυζυγίαν* G.

col. 5

1 *ἐστιν* TGRF — *ἥμισυ* CTS *ἥμισαν* M compendium A — 2 *ἐκκειμ.* ex *ἐγκ.* corr. W — 5 *ἐξ ἧς* G — 6 *ὅσοι δηποτοῦν* T *ὁσοιδήποτουν* R — 8 *κείμενοι* om. CS suprscr. R — *ἀπομεγίστου* G — AB] $\overline{\alpha\gamma\beta}$ SC ex $\overline{\alpha\gamma}$ corr. R — 9 *ἄρτιον*] *ἄριστόν τι* C ex *ἄριστον* corr. RS — 10 *κατασυζυγίαν* G — 11 *πολλαπλασίων* CR — *ἐστιν* TGF — *ἥμισυ* CTSR compendium A — 12 *ἐγκειμ.* G — 13 *ἡ* et *ἴση* om. B — 14 *ἐστιν* TGRF — *τῇ*] *τῆς* R — *ὑπεροχῇ* om. D — 14–24 ordo verborum in W turbatus — 17 *ἴσος ἐστὶ συναμφοτέρῳ* om. A — *ἴσως* W — 19 *τῷ*] *τὸ* B — *τοσοῦτον* B *τοσοῦτο* W — 19/20 $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\zeta\eta}$ $\overline{\beta\gamma}$ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\delta\varepsilon}$, om. $\overline{\varepsilon\zeta}$ CVS $\overline{\varepsilon\zeta}$ suprscr. R $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\zeta\eta}$ $\overline{\beta\gamma}$ $\overline{\varepsilon\zeta}$ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\delta\varepsilon}$ FMDGT — 20 *ὅσον*] *τοσοῦτον* BWTDMF *τὸ σούτόν* G [sic] om. V — *ἐστὶ* om. A — 21 *τουτέστι* A — 23 *τὸ* M — 24 *ἥμισυν*] ex *-συ* corr. R *-συ* CTSM — 25 *α* add. *m* : om. *c* — *τξ´* AD *m* : *τριακοσίας ἑξήκοντα* GBVWRTSFM [*ἑξ.* M] *τριακοσίους ἑξ* C — 26 *ἴσα* C — *διηρημένον* B — 27 *μοιρα* sine acc. M — 29 *παραγίνεται* BCVWM — 30 *τξ´* AD *m* : *τριακοσίους ἑξήκοντα* cett. [*ἑξ.* M] — *διηρημένοι* C *διηρημένος* S — 32 33 *θεωρήμασιν* BTGFM — 33 *δείξωμεν* M — *ὡς* antea om. postea add. R om. C — 33/34 *γινωσκομένου* MBCWS *γινοσκ.* R — 34 *ἀκροτάτη* WM — 35 *ἡμέραν* del. S^2 om. CR.

col. 7

3 *ἀλεξανδρία* F — *τῇ*] ex *τῆς* corr. RF *τῆς* CS *τῇς* V — 5 *βαχυτάτην* W — *λόγον ἔχει* BCWTGDSFMR — 6 *τὸ ζ´ . . . τὸ ε´* CRS^1 — 7 *γινομέναις* ACWSR — 8 *κατὰ τὰς τοῦ ἡλίου τροπὰς* A *m* *τροπικαῖς* BVWGTDSFMR om. C — 9 *ἐν ᾧ* . . . 11 *κύκλος*, antea om. [omoioteleuton], postea in mrg. add. R — 10 *διειρήσθω* R — 11-12 $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\beta\gamma}$ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\delta\varepsilon}$ $\overline{\varepsilon\zeta}$ $\overline{\zeta\eta}$ $\overline{\eta\vartheta}$ $\overline{\vartheta\varkappa}$ $\overline{\varkappa\lambda}$ $\overline{\lambda\mu}$ $\overline{\mu\nu}$ $\overline{\nu\alpha}$ A *m* $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\varepsilon\zeta}$ $\overline{\eta\vartheta}$ $\overline{\varkappa\lambda}$ $\overline{\mu\nu}$ BCVWRMFSTG $\bar{\alpha}$ $\bar{\beta}$ $\bar{\gamma}$ $\bar{\delta}$ $\bar{\varepsilon}$ $\bar{\zeta}$ $\bar{\vartheta}$ $\bar{\varkappa}$ $\bar{\lambda}$ $\bar{\mu}$ $\bar{\nu}$ D — 13 *σημεῖον* suprscr. S^2 — *τοῦ* om. V — 15 *ἑξῆς* ·*ʃ*. R — 17 *ὁ* ante *ζ´* add. BCVWGDTSFR — *μεγίστη* C — 18 *καρκίνου* RD *καρκἶνου* C *καρκῖνου* ABVWMFSG — 19 *τοῦτεστίν* G *τουτέστιν* FT — 20 *τὸ* om. M — *τὸν*] *τὸ* M — 21 *αἰγόκερ*$\overset{\omega}{o}$*ν* W *αιγοκαιρω* T — *τουτέστι* solus A praebet — 22 $\overline{\lambda\delta\alpha}$ D — *ο αρα* bis rep. T [sine acc.] — *ΔΗΛ*] $\overline{\delta\alpha\lambda}$ DT — 23 *τῆς* om. DBVWFTGM *τῆς τοῦ* om. CSR^1 (*τοῦ* suprscr. R^2) — $\overline{\delta\alpha\lambda}$ MRCS $\overline{\alpha\lambda\delta}$ V — 24 *ὁ* $\overline{\nu\zeta}$ C — 25 *ὅλος δὲ* A *καὶ ὅλος* cett. — *ὁ* om. CR — *κύκλος* ACS^2 in mrg. W^2R^2 *χρόνος* $BVTDFGMS^1W^1$ om. R^1 — 25 26 *μοίραις χρονικαῖς* M — 26 *τξ´*] $\overline{\sigma\iota}$ M — *μὲν ἄρα ΔΗΛ*] *δὲ* $\overline{\delta\alpha\lambda}$ M — 26/27 *ἀναφέρεται* om. M — 27 *σί* . . . 28 *χρονικαῖς* om. M [omoioteleuton] — 27 *δὲ* om. CR^1 suprscr. R^2 — 28 pr. *ἐν* om. B.

col. 9

1 *τῷ*] ex corr. R *τὼ* V *τὸ* C — *ΗΛ*] $\overline{\alpha\delta}$ M $\overline{\alpha\delta}$ in mrg. W — 1 *ΗΛ* . . . 3 *τεταρτημόριον* antea om. [omoioteleuton], in mrg. add. G — 3 *τῷ ΛΔ*] *τὼ* $\overline{\eta\lambda}$ V — 3 *ἀναφέρεται* post *τεταρτημορίῳ* add. BCVWGRMSFDT : om. A *m* — 5 *ρε´* . . . 7

χρονικαῖς om. A [omoioteleuton] — 6 τὸ . . . 7 οε′ bis rep. B — 8 ηξεδ RCDS² ηεδ TBVWFS¹MG δη A — χρόνους C — τοῦ] τὰ C — τῆς solus A praebet — 9 δγβα DS²R διβα C δβα BVWTFMGS¹ δα A — 11 ἐπεὶ] ἐπὶ B — 12 ἀναφοραῖς V ἀναφορᾶ T — ισω T — 13 ἀλλήλοις BCWTGSMF — ἀρχόμενος CR² — 14 τοῦ *HZ m* [collata interpr. lat.]: τοῦ κζ′ A τοῦ πρὸς τὸ η BG τοῦ πρὸς τῷ η TCVWDFMSR — 15 πραγμ.] ἀναφερομένοις V — 15 ἡ . . . 16 ὑπερέχει] ἡ ὑπερέχει ὑπεροχῇ V — 17 ἀρχομένου WM — 17 ἀρχομένων . . . 20 πλήθους om. C [omoioteleuton] — 20 καὶ . . . 22 πλήθους om. S¹ [omoioteleuton]: in mrg. add. S² — 20 μὲν om. CS² — 22 ἀρχόμενος C ἀρχόμενοι S² — 23 λ′] τριάκοντα BDFGT — post δὲ duae vel tres litterae del. (τῶν?) F — 24 ὁ om. CS — τοῦ πλήθους solus A praebet — 25 τῶν] τῷ WM — κ′] Γ̂ hic et fere ubique TGF DSM — 26 δγ γβ βα . . . 29 ξε om. S¹ [omoioteleuton]: in mrg. add. S² — 27 ὑπεροχῶν CS² — ἐστὶν WFGT — 28 ἐπειδὴ C — 29 εδ om. CS² — περιφεριῶν C — 33 ἔστιν TGF — 34 ἀναφοραὶ TGFDMS — 35 γ′ A: τρία cett. — 36 λε′ om. C — ἐστὶν TGF — 37 ἐν μοίραις . . . 38 ἀνενεχθήσεται antea om. [omoioteleuton], in calce add. G.

col. 11

2 ἀναφοραὶ] ἀναφορικαῖς V — 4 μ′] hic et ubique Γ̂ TDS Ϸ G ΓΒ FM [hic tamen β̄ M] — ἐν solus A praebet — δίδυμοι ex δηδ. corr. T — 5 καρκίνος D καρκῖνος cett. [-ῖνο C] — pr. δὲ ἐν om. C δὲ om. S — 7 αἱ δὲ A: καὶ αἱ cett. — 8 τῶν ἰσημερινῶν σημείων solus A praebet — 10 δὴ om. A — ἐν λη κ′ om. G spatio relicto — ἐν λη om. TD — κ′ om. MSF — 11 αἰγόκερος M αιγοκαιρως T — 12 ὑδρηχόος F [η ex corr.] GDMT — alt. ἐν om. CVWM — 14 ἕνος W — οὐδήποτε VD: οὗ δήποτε cett. — 15 ἀναφοραὶ C; utrum -αὶ vel -ὰ S praebeat, incertum — τῇ om. C — 16 καταδυέσειν C — 17 β′ add. *m*: om. *c* — γινωσκομένης S γινοσκ. C — 19 ζῳδ.] διακοῦ B — 20/21 ἀλλήλων A *m*: ἀλλήλοις cett. — 21 αἱ ἀναφ. γνωσθ. A *m*: γνωσθ. αἱ ἀναφ. cett. — 24 ἐξοῖς B ἐξῆς G — 26 ἀναφ.] φορᾶς V — 28 ἀναφορων T — 30 τῶν . . . 36 τριακοστημορίων om. D [omoioteleuton] — 31 ἀρχομένων suprscr. S² ἀρχομένου^{ις} C om. S¹ — 32 τοῦ om. V — αἱ om. CS — 33/34 ⟨⟩ add. *m*: ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης S¹ del. S² — 35 τοῖς] τῷ C — 36 αἱ τῶν om. T — τῶν om. BCVWFGMS — 38 πρὸς τῷ solus A praebet — 40 τῆς] τοῖς G — 41 κατὰ] καὶ C — 42 ἐκκειμένων CS² [suprscr.]: om. cett.

col. 13

1 post δὲ duae vel tres litterae del. (τῶν ?) F [cf. col. 9, 23] — 2 ἐστὶν CVW GFT — οὖν post ἐστὶν add. C — 2/3 ἐννακοσιοστῶν C — 5 τριακοσιμορίων DT — 8 οὐδηποτοῦν D *m* οὐδηποτε οὖν A οὗ δήποτε οὖν GBCSMF οὔδηποτε οὖν W ουδηποτεόυν T — γνωριζομένοι G — ἐν ὅσαις *m*: ἐν αἷς A ἑνὸς αἷς BCVWSMFG ἑνὸς ἐν ὅσαις D ενοσ αισ T — 9 γινωσκομένης MSW γινοσκ. C — 11 δωδεκατημορίων C — 13 γνοσθήσεται M — 16 δὲ om. SC — διοίσειν C — 17 δῆ G — 18 χρονικαῖς μοίραις A — μ̄ GS¹ ω̄ MDS² — 19 δωδεκατημορίων WM — 21 πρῶτον WD *m* ᾱ ABCGVSFT ᾱ^{ον} M — τριακοστομόριον M — 22 ΔΒ] βδ A αβ D — 23 εἰσι T — 25 ἀναφορὰι F — 27. 30 (utrob.) ἐκκειμένων A: ὑποκ. cett.

— 29 *ημισυ* T — *τῶν ἐκκειμένων ὅρων* CDS^2 mrg.: om. ABVWFTGMS^1 — 30 *συγκείμενος* om. ABCVTDGS — 31 *ἡμίσυς* W *ε* V compendium A — 32 *γίνεται* BMW — 33 $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\delta\beta}$ ex $\overline{\gamma\delta\beta}$ corr. T — $\overline{\beta\delta}$ VMW — 36 *τριακοστημοριαίων* A: -*μορίων* cett.

col. 15

1/2 *μεγίστην* C — 2 *ἔστιν* FTG — 3 alt. *ΔB*] $\overline{\alpha\beta}$ W — 5 *τοσαῦται* ex corr. G — 5/6 *συντιθεῖσαι* M — 6 *γίνονται* AMW — *ἡ τῆς* S^{1}AFGBVW: *ἡ* om. T *ἡ διὰ τῆς* D *ἡ περιφέρεια τῆς* CS^2 — 7 $\overline{\alpha\gamma}$ ex $\overline{\alpha\beta}$ corr. G — *ἀναφορὰς* B — *ΔB*] $\overline{\beta\delta}$ MW — *δ* post *ἐστὶν* add. M — 9 *χρονικαῖς μοίραις* A [cf. c. 13, 18] — 10 $\overline{\alpha\gamma}$] $\overline{\alpha\delta}$ CS^2 — *ἐν* solus A praebet — $\overline{o}$ *μς′ λγ″ κ‴*] $\overline{o}$ $\overline{\lambda\varsigma}$ *νγ″ κ‴*, *ἡ δὲ* $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{o}$ $\overline{\mu\vartheta}$ $\overline{\mu\varsigma}$ $\overline{\mu}$ C *õ λς′ νγ″ κ‴ ἡ δὲ* $\overline{\alpha}$ $\overline{\gamma}$ $\overline{o}$ *μϑ μς′ μ* S^2 mrg. — 11 *μ′ ς″ μ‴*] *μϑ′ μς″ μ‴* D — 12 *τούτων*] *τῶν* C — *εἰρημένων* A — *γινωσκομένης* CWSM — 13 *ἐν ταῖς* om. V — *περιφερείαις* A: *περιφερείας* cett. [ex -*είαις* corr. M] — *ἀναφορικαῖς* C — 13/14 *ὑπεροχῆς* solus A praebet — 14 *o′*] $\overline{o}$ V *οὐδὲν* GBCWMTFD *οὐΔ῾ἐν* S om. A — 15 *ἐν m*: *ἐφ᾽ c* — 16 *τέλος τοῦ Ὑψικλέους Ἀναφορικοῦ* ABCVW *m*: *ὑψικλέους ἀναφορικός* DTG *ὑψικλέους ἀναφορικὸς τέλος* S om. FM.

Aus dem vorliegenden Apparat geht mit aller Deutlichkeit hervor, daß der künftige Herausgeber des Hypsikles einen eklektischen Standpunkt wird einnehmen müssen, da keine der uns erhaltenen Hss. den Wortlaut des Originals getreu widergibt. Vielmehr zeigt unsere handschriftliche Überlieferung eine große Mannigfaltigkeit von Verzweigungen und Varianten.

Die Hss. CSR gehören zwar ein und derselben Sippe an, doch hängen sie nur auf indirektem Wege miteinander zusammen und sind voneinander unabhängig. Aus einer anderen Sippe stammen die Codd. FGTMWB und zwar sind sie aus verschiedenen Abzweigungen des nämlichen Grundtextes hervorgegangen. Unter ihnen nehmen die Codd. BWM, jeder für sich, eine Sonderstellung ein. Doch zeigen wiederum W und M einige Übereinstimmungen, die nicht rein zufällig sein können. M ist die Arbeit eines unwissenden und oft nachlässigen Schreibers. Zu einer anderen Gruppe, die vielleicht ursprünglich mit der zweiten zusammenhing, gehört die Hs. D, der gleichfalls eine gewisse Bedeutung zukommt. Endlich gehören AV zu einer dritten Gruppe; doch hängen auch sie nur indirekt miteinander zusammen.

Dem Cod. A kommt sicherlich eine große Bedeutung für die kritische Textgestaltung zu; doch darf seine Zuverlässigkeit auch nicht überschätzt werden. Denn auch A geht nicht auf eine durchaus reine und unverderbte Originalfassung zurück; seine Lücken und falschen Lesarten sind nicht alle als Flüchtigkeitsfehler des Kopisten zu erklären.

So läßt beispielsweise in c. 5, 17 nur die Hs. A die Worte: *ἴσος ἐστὶ συναμφοτέρῳ* aus. Hier liegt offenbar eine Korrektur vor: der Schreiber hat diese Worte gestrichen, weil sie aus dem Texte der unmittelbar vorhergehenden Zeilen (14—16) leicht zu ergänzen waren und sie ihm daher überflüssig schienen. In ähnlicher Weise tilgt A in c. 9, 3 das *ἀναφέρεται*, weil es schon in Zeile 2 zu lesen war. Noch manche andere nur der Hs. A eigentümliche Lesart läßt sich auf diese Art erklären: c. 1, 5 *τοῦ*; 1, 17 *πολλαπλάσιος* [so geschrieben im Hinblick auf 3, 28. 5, 11. 23 usw.]; 1, 23 *ἄρα* [ergänzt im Hinblick auf Z. 20]; 3, 22 *ἔσται*; 3, 23 *τοῦ ΓΔ* om.; 9, 8 $\overline{\delta\eta}$; 9, 9 $\overline{\delta\alpha}$. In c. 7, 8 ist die Variante „*κατὰ τὰς τοῦ ἡλίου τροπάς*" statt des einfachen *τροπικαῖς* sicher als eine Korrektur des Schreibers zu erklären, der das vieldeutige Adjektiv durch die bestimmtere Umschreibung ersetzte und dabei auch die Häufung der Dativformen vermeiden wollte. So sind auch *τουτέστι* 7, 21; *ὅλος δὲ* 7, 25; *τοῦ* $\overline{\eta\zeta}$[55]) 9, 14; *τοῦ πλήθους* 9, 24; *αἱ δὲ* 11, 7; *ἀλλήλων* 11, 20/21; *ἐκκειμένων* 13, 27. 30; *τριακοστημοριαίων* 13, 36 recht verdächtige Lesarten.

Besondere Beachtung verdient die Hs. D. Trotz der vielen Fehler scheint sie mir auf eine gute Quelle zurückzugehen. Ferner muß hervorgehoben werden, daß in c. 11, 33 nur S^1 den ersten Teil der von *m* zugefügten Stelle bringt, der allein durch den Sinn gefordert zu sein scheint, während der zweite Teil entbehrlich ist.

Eine gründliche Prüfung sämtlicher erhaltenen Hss. wird m. E. zu Resultaten führen, welche eine endgültige Festlegung des kritischen Textes ermöglichen werden. Doch darf man schon jetzt zu der von *m* gebotenen Textgestaltung folgende Varianten vorschlagen:

col. 1, 1 *Α* secludendum.
5 *τοῦ* alt. secludendum.
12–13 ist die Lesart *ἥμισυς δὲ* der Hss. wiederherzustellen und die von *m* eingeschobene Stelle zu streichen.
17 *πολλαπλασίων*.
23 *ἄρα* secludendum.

col. 3, 6 *Β* secludendum.
8 *τοῦ* secludendum.
22 *ἐστὶ*.
30 *Γ* secludendum.

col. 5, 25 *α* secludendum.

col. 7, 5 *λόγον ἔχει*.
8 *τροπικαῖς*.
11–12 *κατὰ τὰ* $\overline{\alpha}$ $\overline{\beta}$ $\overline{\gamma}$ $\overline{\delta}$ $\overline{\varepsilon}$ $\overline{\zeta}$ $\overline{\eta}$ $\overline{\vartheta}$ $\overline{\varkappa}$ $\overline{\lambda}$ $\overline{\mu}$ $\overline{\nu}$ (scil. *σημεῖα*). Das ist zweifellos die ursprüngliche Lesart. Mit der Zeit haben nun die Kopisten aus Versehen: $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\varepsilon\zeta}$ $\overline{\eta\vartheta}$ $\overline{\varkappa\lambda}$ $\overline{\mu\nu}$ geschrieben, und man hat dann dementsprechend den Text korrigiert und die weiteren sechs Paare $\overline{\beta\gamma}$ $\overline{\delta\varepsilon}$ $\overline{\zeta\eta}$ $\overline{\vartheta\varkappa}$ $\overline{\lambda\mu}$ $\overline{\nu\alpha}$ hinzugefügt.

[55]) Falls in der Hs. wirklich $\overline{\varkappa\zeta}$ und nicht $\overline{\eta\zeta}$ steht (was bezweifelt werden darf), so liegt hier ein Versehen des Schreibers vor, welches sich leicht aus der großen Ähnlichkeit der beiden Zeichen für *ϰ* und *η* in der kleinen Kursive erklären läßt.

21 τουτέστι secludendum.
25 καὶ ὅλος.

col. 9, 3 ἀναφέρεται post τεταρτημορίῳ addendum.
14 τοῦ $\overline{\eta\zeta}$] πρὸς τῷ $\overline{\eta}$.
24 τοῦ πλήθους secludendum.

col. 11, 7 καὶ αἱ.
20/21 ἀλλήλοις.
21 γνωσθήσονται αἱ ἀναφοραί.
42 ἐκκειμένων secludendum.

col. 13, 8 ἑνός, ἐν ὅσαις.
27. 30 (utrob.) ὑποκειμένων.
36 τριακοστημορίων.

Nicht alle Zusätze in *m* scheinen mir berechtigt; sehr verdächtig ist die Stelle col. 5, 17—18.

Ich gehe nun zu den Scholien über, für welche ich die Hss. RGDSTM verglichen habe. Die Lesarten von ACP[56]) entnehme ich aus *m*.

Sch. (α), c. 1, 33-35: CPRDTMGS om. A.
33 ἀντὶ] αὐτὸν CM — μοιᾶς R — οἱασδήποτοῦν R — ὑπεροχῆς om. P — 34 ἐγκειμένων P — 34/35 ἢ ἐναλλὰξ οἱασδηποτοῦν P — 35 ἄλλως M — ἐφ' ἑξῆς S.

Sch. (β), c. 1, 36: CPDTMG om. ARS.
36 alt. τὸ] τῷ M.

Sch. (γ), c. 1, 37-39: CPRDTMGS om. A.
37-38 αὐτὸ τριπλάσιον· ἴση γὰρ ὑπόκειται· συντιθεμένων CM — 37 τοῦ om. P — 38 εἰσι om. P.

Sch. (δ), c. 2, 35-43: ACPRDTMSG.
35 ἐστὶν ante ἴσαι add. R — αἱ solus A praebet — 36 τῶν pr. et sec.] τῷ C^rR — τῶν tert. A: ἐκ τῶν C^rR αἱ τῶν C^sPGTDSM — τρεῖς ante ὑπεροχαί add. MSRDTG — 37 καὶ τρεῖς συντεθεῖσαι C^sPMSRDTG — ἡ] αἱ P — τῶν] τοῦ R — καὶ ante ΔE add. A — 37/38 ὑπεροχὴ solus A praebet — 38 ὡς om. A — δείξει A — πρὸς $B\Gamma$ om. C^sM — 39 τοῦ ΔE] τουτέστιν C^rR — 40 τοῦ $\Gamma\Delta$ μιᾷ, ὁ ἄρα $B\Gamma$ om. D [omoioteleuton] — μιᾶς M — 41 μιᾷ post ἀλλὰ add. A — 42 ὅσ.] ἴσον M — ἐστὶν R — 43 τῶν AC^r.

Sch. (ε), c. 3, 34: CPDTGM om. ARS.

Sch. (ϛ) c. 3, 35-40: CPDTGM om. ARS.
35 ὑπεροχὴ om. P — 36 σχῆμα τὸν πρῶτον P — τοῦ $\overline{\alpha}$ τὸ ἐναλλὰξ MDTG [ἐναλὰξ T] τὸ ἐν. P — 37 ἡ om. DT — τοῦ P — ἐστὶ D — 37-38 verbis τῶν $B\Gamma\,\Delta E$ sch. expl., verbis autem ἴση ἐστὶ aliud sch. incipit MG — 37-38 verba ὑπεροχῇ. ἀλλ' ἡ τῶν $B\Gamma\;\Delta E$ ὑπεροχὴ quae iam *m* addiderat [καὶ pro ἀλλ'], praebent DT — 39 ὑπεροχὴ M.

---

[56]) C^r = Randscholien; C^s = Scholiensammlung in den ff. 170^v—171^v.

Sch. (ζ), c. 4, 45-47 : CPRDTMGS om. A.

45 τουτέστιν T — καὶ γὰρ om. R [sp. rel.] C^r — 46 ἕκτης S — ἀρχόμενος P — 47 ἔστιν T.

Sch. (η), c. 5, 36-37 : CPMG om. ARDTS.

36 ἶσον γὰρ ὑπόκειται P — 37 τὰ ἑξῆς] compendium MG om. C.

Sch. (ϑ), c. 5, 38-6, 45 : CPRDTMGS om. A.

38-39 συναμφότεροι εἰσὶν ἕκαστοι συναμφότεροι C — 38/39 ἑκάστοις R — 6,40 οἱ $\overline{αβ}$ ἐκ τοῖς C^r — ZH] ΔH C^sM EH R — 40 ΓΔ ΔE] $\overline{εδη}$ ἡ $\overline{δε}$ R — 41 $\overline{γ}$ RSTDG — 42 τριπλάσιοι R — 43 ἐστὶν] ἄρα C^rR — pr. AH] $\overline{αβη}$ C^rR — alt. AH] $\overline{αβ}$ R — 44 εἰσὶ R ἐστὶν M — 45 ἐκκειμ.] ἐκείνων S.

Sch. (ι), c. 8, 35-37 : CPRDTMSG om. A.

35. 36 utrob. ὡρῶν] $\overline{ὁρ}$ M — 37 τοῖς] τῆς S.

Sch. (ια), c. 8, 38-39 : CPDTGM om. ARS.

38 δύο] δεῖ δύο DT — 39 δύο] $\overline{β}$ DT.

Sch. (ιβ), c. 8, 40 : CPDTGM om. ARS.

Sch. (ιγ), c. 8, 41-9, 42 : CPDTMG om. ARS.

41 $\overline{δηλ}$ ex $\overline{ηλ}$ corr. T — 42 λόγον del. G, ἴσως λόγον P om., sp. 8-10 litterarum [fort. ἴσως λόγον?] rel., M — ἡ et τὴν om. D — ἔστιν G — 43 ὁ om. P — τὸν] τῶν P — 44 διελθεῖν CPMG [ἴσως διελεῖν in mrg. CP] — 44 λόγον . . . 45 πρὸς om. P — 44 τῶν] τὸν D — 45 ἐπειδὴ] ἐπεὶ D διά τι P — Inter ζ′ et ε′ lacunam trium litterarum exhibet T — 47 sine lac. DT — 47 verbis πρὸς ε′ sch. explicit, verbis autem συνθέντι ἄρα aliud sch. incipit MG — 48 τὸ om. C — 50 οὕτω utrob. DM — 51 καὶ post ε′ add. TD — 9, 40 οὕτω DM — ρν′ ex ρε′ corr. D — 42 in fine hoc schema: $\overline{ιβ}$ $\overline{ε}$ add. GDMT.

$\overline{τξ}$ $\overline{ρν}$
$\overline{ζ}$ $\overline{ε}$
$\overline{ςι}$ $\overline{ρν}$

Sch. (ιδ), c. 9, 43 solus A praebet.

Sch. (ιε), c. 9, 44-10, 52 : CPDTMSG om. A.

44 λ′] τριάκοντα D — ἐννεαπλάσια PD — εἰσιν P — 45 ἐννάκι GMT — 10, 51 ἕκαστον om. D — 52 τὸν ϑ′ M.

Sch. (ις), c. 12, 50 : PDTG om. AMSC.

Sch. (ιζ), c. 13, 37-41 : CPDTMGS om. A.

37 πενκεδεκάκι (τ supra) S δεκάκι GMT δεκα (κ̈ supra) D [sic infra ubique] — $\overline{κα}$ μ′] ιε′ CGMDTS ἐκεῖ P — ς] $\overline{ε}$ D — ταῦτα om. P — 38 πρῶτα] τὰ $\overline{α}$ C^r $\overline{α}$ SGMDT — 38 ἐστὶ] εἰσὶ C^r om. P — 39 ἔστι] ἐπὶ C^r — γ′] υ′ TDGS — καὶ om. C^sTDMGS — δεκάκι TMGS — $\overline{κ}$ $\overline{ς}$ TD $\overline{κ}$ $\overline{c}$ S $\overline{κc}$ G — 40 πεντάκι (utrob.) et δεκάκι SGM — κς′] $\overline{κ}$ $\overline{ρ}$ SD $\overline{κρ}$ GM — σξ′] $\overline{σ}$ $\overline{ξ}$ S $\overline{ς}$ $\overline{ξ}$′ M $\overline{ς}$ $\overline{ξ}$ D — σμ′] $\overline{ς}$ $\overline{μ}$ SGD $\overline{ς}$′ μ′ M — ἐστι PM εἴσιν C^r — 41 $\overline{ακ}$, $\overline{ςμ}$ MG $\overline{α}$ $\overline{κ}$ $\overline{σ}$ $\overline{μ}$ C^r $\overline{ακ}$ καὶ $\overline{μ}$ P.

Sch. (ιη), c. 15, 17-20 : CPDTMGS om. A.

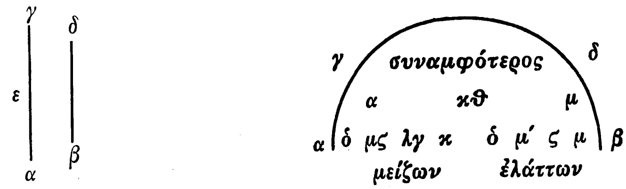
17 ὅσων δήποτε SGMT — ὑπεροχὴ M — 18 ὁ μέγιστος] ὁ $\overline{με}$. ὁ $\overline{ςκ}$ μέγιστος C^s — λα′] $\overline{χα}$ C^sPMGSDT — 19 ὑπερό. C^r — ὅσων GST.

Sch. (ιϑ), c. 15, 21-22: CPDTMG om. AS.

21 $\overset{\kappa^{..}}{\text{ἐννεα}}$ D — $\overset{\overline{\vartheta\zeta}}{\overline{\varphi\pi}}$ T $\overset{\vartheta}{\varphi}\ \overset{\zeta}{\pi}$ D καὶ τὸ ζ φ ϑ ξ P — 22 $\frac{\tau\ \pi\ \sigma\ \mu}{\bar{o}\ \bar{\varsigma}\ \bar{\kappa}\ \bar{\mu}}$ M $\frac{\tau\ \pi\ \varsigma\ \mu}{\bar{o}\ \bar{\varsigma}\ \bar{\kappa}\ \bar{\varsigma}\ \bar{\mu}}$ GDT.

Sch. (κ), c. 15, 23-16, 34: CPDTGS om. AM.

23 ἀφορήσθω C — 25 δ] $\bar{o}$ DTS — $\bar{o}$] $\bar{\beta}$ S — 26 *δίχα*] διὰ δίκα P — οὕτως G — 27 τὰ C — 29 ἅμα ὡς ἴσας οἷον ὡς τὰς $\overline{\varepsilon\alpha}$ $\overline{\delta\beta}$ post *ΔB* add. PGDT — 30 $\overline{\gamma\varepsilon}$ post τῆς add. DT — διὸ] δὶς P — τὸ κατάλιπον P τὸ καταλιπὲν GT τὸ καταλοιπὲν S τὸ καταλιπὸν D — 31 καὶ om. C — φαίρεται C — ὁ om. C — β′ γὰρ] $\overline{\beta\gamma}$ δ′ C — 16, 28 ὁ ante ἐλάττων add. PTDSG — γίγνεται G — 29 ὁ $\overline{\mu\varsigma}$ μ′ D — 32 τῆς] τοῦ C — συναμφότερα C — 34 δέχεται με P — In mrg.: ὅ ἐστιν ὁ μείζων [compendiose scripta] et schemata haec:



add. GSDT: alterum schema add. F.

Ich lasse die bisher unveröffentlichten Scholien folgen, die in DGT[57]) zu lesen sind:

col. 3, 25/26: τουτέστι διπλασίων DTG;
5, 16: διὰ τὸ λῆμμα τὸ [τοῦ T] ἐν τῷ πρὸ αὐτοῦ DTG;
5, 19: ἀντὶ τοῦ τρία DT;
5, 26/27: ἀντὶ τοῦ ἰσημερινοῦ DGT;
7, 12 (in figuram): ἐσφαλμένως κατεγράφη G;
7, 17/18: διὰ τὸ $\overline{\iota\alpha}$ τῶν φαινομένων DT;
9, 4: ἀπὸ τοῦ $\overline{\iota\alpha}$ τῶν φαινομένων D;
9, 12/13: ταῦτα ψεύδη λαμβάνει DT, τὰ πάντα μαχόμενα ὑπείληπται G;
9, 20: διὰ τὸ $\bar{\alpha}$ DGT;
9, 22/23: ἡμῖν καὶ αὐτῇ τοῦ ἀληθοῦς οἷον ὁ αὐτὸς Ὑψικλῆς λέγει G;
9, 29/30: διὰ τὸ $\bar{\beta}$ DT;
11, 5/6: ἀπὸ τοῦ $\overline{\iota\beta}$ τῶν φαινομένων πρὸς τῷ [τὸ G] τέλει GT;
13, 18: $\bar{\mu}$ ὅ ἐστι διμοίρου DT.

In M steht an Stelle der Scholie (κ) eine andere, die ich wortgetreu wiedergebe: τῶν μὴ κυρίων τετραγώνων [comp. M] ἡ πλευρὰ εὑρίσκεται οὕτως· λαμβάνεται ἡ πλευρὰ τοῦ ἐλάττονος μὲν αὐτοῦ ἀριθμοῦ πρώτου δὲ κυρίως τετραγώνου, καὶ διπλασιάζεται· εἶτα ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ ὑποκειμένου τετραγωνίζεσθαι [τετραγώνου scribendum] ὅλος ὁ ἀληθὴς τετράγωνον [-νος scribendum], καὶ τὸ λειπόμενον λαμβάνεται μέρος παρώ-

[57]) Die letzte Scholie von G ist in meiner photographischen Wiedergabe nicht zu lesen.

νυμον ἀπὸ τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ, τῷ διπλασιασμῷ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυρίως τετραγώνου, ὃ δὴ μέρος [ex *μέτρος* corr. M] *προστεθὲν τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τετραγωνικὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος ποιεῖ.*

Endlich bringt T am Rande von f. 134^{v} (zu col. 13, 7 ff. des Textes), von viel späterer Hand zugesetzt [58]) eine Scholie zu Eukl. Catopt. prop. I, die schon von Heiberg, Euclidis opp. VIII, p. 291, 19—292, 15 veröffentlicht worden ist.

Die Prüfung der Scholien bestätigt also im allgemeinen die Schlußfolgerungen, zu denen wir auf Grund der Textvergleichung gelangt sind. Vergleicht man nun weiter meine Kollationen zu Autolykos und Hypsikles mit den jüngst erschienenen Ausgaben des Theodosios, so wird man finden, daß der Wert der einzelnen Handschriften des „*μικρὸς ἀστρονομούμενος*“ keineswegs für alle darin enthaltenen Traktate der gleiche ist. So hat z. B. der Ambros. 28 zwar für die „Sphaerica“ des Theodosios sehr geringe Bedeutung, dagegen darf er für Autolykos und Hypsikles nicht vernachlässigt werden. Dafür ließe sich noch eine ganze Reihe von Beispielen anführen; doch würde ich damit den Rahmen meiner gegenwärtigen Untersuchung überschreiten. Ich werde zufrieden sein, wenn es mir gelungen ist, einige nicht ganz belanglose Elemente zur kritischen Textgestaltung des Autolykos und Hypsikles beizubringen.

---

[58]) Monsignor Mercati, der mir in zuvorkommendster Weise einige Aufklärungen über diese Scholie gegeben hat, glaubt die Hand des Johannes Costasmenos (14. bis 15. Jh.) zu erkennen.

Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter.

Von O. Neugebauer, Göttingen.

(Abgeschlossen 18. 4. 30*).)

K. Sethe in Verehrung und Dankbarkeit.

Im folgenden wird der Versuch unternommen, den ganzen Umkreis des ägyptischen Rechnens unter einheitlichem Gesichtspunkt zu betrachten, soweit dies aus den wenigen vorgriechischen Quellen möglich ist[1]). Die Einschränkung auf „Arithmetik" ist dabei nur eine Konzession

---

*) Der Freundlichkeit Professor Struves verdanke ich (seit Frühjahr 1927) die Kenntnis von M. Im wesentlichen war diese Arbeit schon Herbst 1928 abgeschlossen, sollte aber nicht vor der Edition von M erscheinen. Seither ist manches zu ihrem Thema erschienen, vor allem Vogels „Grundlagen der ägyptischen Arithmetik" (1929). Ich habe darauf verzichtet, mich hier im einzelnen mit dieser Arbeit auseinanderzusetzen, da dies in einer ausführlichen Anzeige Archiv NF Bd. 4 S. 94 geschieht; ich möchte nur die vollkommene Unabhängigkeit beider Darstellungen betonen.

[1]) Es sind dies:

B Berliner Papyrus 6619.
Publ. ÄZ 38 (1900) S. 135ff. und ÄZ 40 (1902) S. 65f.
Geschrieben: MR.

C Cairenser Rechentafeln 25367 und 25368.
Publ. Recueil de travaux relatifs à la Philologie et à l'Archéologie égyptiennes et assyriennes 28 (1906) S. 62ff. und Catalogue générale des Antiquités égyptiennes du Musée du Caire, Ostraca (1901) S. 95, 96 bzw. Tafel 62—64.
Geschrieben: MR.

K Kahun Papyri (Konkordanz vgl. S. 380).
Publ. Griffith, Hieratic Papyri from Kahun and Gurob, London 1898. Text S. 15ff., Tafel VIII.
Geschrieben: MR.

L Lederrolle des British Museum BM 10250.
Publ. JEA 13 (1927) 232ff.
Geschrieben: etwa Hyksoszeit.

M Moskauer Mathematischer Papyrus.
Publ. QS A 1 (1930).
Geschrieben: MR.

R Mathematischer Papyrus Rhind.
Publ. Eisenlohr, Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter.

an die moderne Terminologie und im Grunde nur scheinbar. „Arithmetik und Rechentechnik" soll heißen, daß hier auf die, sozusagen über allen Anwendungen stehende, allgemeine Methodik, auf den eigentlichen Kern der ägyptischen „Mathematik" eingegangen werden soll. Die uns gewohnte Gegenüberstellung „Arithmetik" — „Geometrie" soll damit nicht gemeint sein, denn sie bedeutet eine Verzerrung der historischen Tatsachen: entweder man betrachtet die ägyptische (und mit ihr die ganze vor- und frühgriechische) Mathematik als einheitliches Entwicklungsfeld zur Beherrschung rechnerischer (d. h. „arithmetisch-algebraischer") Aufgaben — wie ich es eben im folgenden tun will — oder man klassifiziert nach diesen Aufgaben selbst; dann ist aber „Geometrie" nur eine Aufgabengruppe unter vielen, im Prinzip völlig gleichberechtigt etwa dem Regelsystem der „*pśw*-Rechnungen" (Brot- und Bierbereitung), oder den als „Wirtschaftstexten" bekannten Rechnungspapyri usw. Man hätte es mit einem großen (jedoch bisher noch äußerst stiefmütterlich behandelten) Gebiet speziell ägyptischer Kulturgeschichte zu tun, nicht aber mit einer prinzipiellen Entwicklungsgeschichte mathematischer Ideenbildung. Diese Konstatierung der Tatsache, daß man die „Geometrie" (zunächst wenigstens) auch bloß als eines unter vielen Anwendungsgebieten einer selbständig entwickelten Rechentechnik ansehen kann, scheint mir wichtig, angesichts des Dogmas von der überragenden Bedeutung geometrischer Ideenbildung für die antike Mathematik. Immer deutlicher prägt sich in der vorgriechischen (insbesondere sumerisch-babylonischen) Mathematik die Tatsache aus, daß es neben geometrischen auch rein algebraische Gedankengänge gegeben hat, die sich zum Teil ganz prinzipiell nicht mehr geometrisch interpretieren lassen — etwa die mehrfach belegbare Vorschrift altbabylonischer Texte, zwei „Flächen" miteinander zu multiplizieren[2]). Ich sehe daher in der gesonderten Untersuchung der Rechentechnik der antiken Mathematik eine wesentliche Vorbedingung für die Heraus-

---

Leipzig 1877. Text und Tafeln.

Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus, London 1898.

Peet, The Rhind Mathematical Papyrus. London 1923.

Chase-Bull-Manning-Archibald, The Rhind Mathematical Papyrus (Text und photographische Reproduktionen). Oberlin Ohio, I 1927, II 1929 (erschienen 1930).

Abschrift der Hyksoszeit eines Textes des MR.

Weitere Literaturzitate siehe am Schluß.

Das Heranziehen hellenistischer oder gar byzantinischer Quellen (nur weil sie aus Ägypten stammen) halte ich für einen prinzipiellen Fehler, solange man von der griechischen „Logistik" so gut wie nichts weiß und daher außerstande ist, deren Einfluß abzuschätzen.

[2]) Z. B. SKT 11 sowie in Texten des Berliner Museums, die in QS A 2 veröffentlicht werden.

schälung der algebraischen Methoden, über die die antike Mathematik m. E. in weit höherem Maße verfügt hat, als man es bisher zuzugeben pflegte. Als Beitrag zur Untersuchung des auf Ägypten bezüglichen Teilproblems in diesem Programm ist die vorliegende Arbeit gedacht.

Der Anlage nach entspricht das Folgende einem Abtragen von Schichten. Kapitel I betrifft den äußeren Aufgabenkreis der ägyptischen Mathematik, von den ganz allgemein formulierten „Größen"-Rechnungen (*'ḥ'*) an, über deren Anwendungen bis zu den konkreten *pśw*-Rechnungen. Kapitel II geht auf die der gesamten ägyptischen Mathematik zugrunde liegende Rechentechnik ein. Zunächst wieder der äußere Formalismus (insbesondere die „Hilfszahlenrechnung" der Bruchrechnung), dann die $2/n$-Tabelle, schließlich die Fundamente: „Stammbruchpostulat" und „Dyadik". So weit gelangt, hat man die Möglichkeit einer einigermaßen geschlossenen Entwicklungsgeschichte vor sich (Kap. III).

Diese ganze Disposition bringt es mit sich, daß ich manche Dinge, die ich in meiner 1926 erschienenen Arbeit über „Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung" behandelt habe, hier wiederholen muß. Ich habe dies nicht durch bloße Hinweise tun wollen, weil ich sonst wesentliche Gedankengänge hier hätte übergehen müssen. Statt dessen habe ich versucht, den damaligen Überlegungen eine breitere Basis zu geben und vor allem die Modifikation anzubringen, die mir durch die Veröffentlichung von L nötig schien[3]).

Ich muß zum Abschluß dreier Werke gedenken, die von bestimmendem Einfluß auf die eigentlichen Grundlagen meiner Anschauungen geworden sind — ein Einfluß, von dem ich hoffe, daß er auch für das Folgende wesentlich geworden ist. Das erste Sethes „Von Zahlen und Zahlworten" (1916), das mir überhaupt erst die Möglichkeit einer nicht auf bloße „Intuition" gegründeten geschichtlichen Betrachtungsweise des Zahl- und Bruchbegriffs erschlossen hat. Dann H. Schäfers „Von ägyptischer Kunst besonders der Zeichenkunst" (1. Auflage 1919), vor allem durch seine prinzipiellen Einsichten über die ägyptische Auffassung der „perspektivischen" Darstellungsweise und schließlich Lévy-Bruhls „Fonctions mentales dans les sociétés inférieures" (5. Auflage 1922), das Schäfers Werk in ganz allgemeiner Hinsicht ergänzt. Einen Satz Lévy-Bruhls möchte ich geradezu als Leitmotiv für die Einstellung zur vorgriechischen, insbesondere ägyptischen Mathematik, hinstellen: „Leur mentalité se prête mal aux opérations qui nous sont familières; mais, par des procédés qui lui sont propres, elle sait obtenir, jusqu'à un certain point, les mêmes résultats".

[3]) Vgl. auch Anhang 1 zu § 7.

Inhalt.

Anhang. Abkürzungen.
I. Texte.
II. Bücher.
III. Zeitschriften.
IV. Konkordanz für K.
V. Sonstiges.

Verzeichnis der Tabellen.

Kapitel I.

Der Aufgabenkreis der ägyptischen Arithmetik.

§ 1. Die 'ḥ'-Rechnungen.

Diese Gruppe von Rechnungen ist in der Geschichte der Mathematik auch unter dem Namen „Hau"-Rechnungen bekannt. Das Wort „Hau" stammt von einer heute nicht mehr gebräuchlichen Art der Vokalisierung des ägyptischen Wortes 'ḥ'[4]), welche dadurch entstand, daß man dieses Wort früher als Plural[5]) las und dessen Endung *w* wie üblich mit *u* wiedergab. Was die Wortbedeutung selbst anlangt, so entspricht ihr wohl als mathematischer Terminus am besten die Bezeichnung „*Menge*" oder „*Größe*"[6]).

Mathematisch genommen handelt es sich bei diesen Rechnungen um die Bestimmung einer als 'ḥ' bezeichneten Unbekannten aus einer

[4]) Die ägyptische Schrift kennt bekanntlich keine Vokale, sondern nur „Halbvokale" wie *3*, ', *w* usw. (entsprechend dem hebräischen א, ע bzw. ו), die man sich zur Erleichterung der Aussprache durch volle Vokale *a*, *u* usw. ersetzt (also 'ḥ' = *aha*). Im übrigen setzt man willkürlich *e* zwischen die Konsonanten (z. B. *škm* = *sekem*).

[5]) Daß die III des Determinativs von 'ḥ' im Papyrus Rhind nicht als Pluralendung zu lesen sind, verdanke ich einer Bemerkung von Professor Sethe. — In M dient immer die Buchrolle allein als Determinativ (Determinativ des „Abstrakten").

[6]) Die ursprüngliche Bedeutung im Ägyptischen ist „Haufen", auch „Besitz", „Habe" (WB I S. 220). Es wird aber auch ganz im Sinne von „Menge", „*Anzahl*" verwendet; so R 72: „im Austausch gegen eine Anzahl ('ḥ') von Broten".

Gleichung ersten (oder auch zweiten) Grades. Der einfachste Typ ist durch R 30 repräsentiert: „10 ist $2/3+1/10$ wovon?“[7]) — Antwort (durch „Division“): „Diese Größe (‘ḥ‘) ist $13+1/23$“. Ähnlich M 19[8]): $1\frac{1}{2}x + 4 = 10$. Die Lösung wird in folgenden Schritten gefunden: man bildet $10 - 4 = 6$, dann das Reziproke von $1\frac{1}{2}$, d. h. 2/3, und nimmt 2/3 von 6; das Ergebnis 4 ist der Wert der gesuchten Größe. Die Methode ist also genau die unsere: man dividiert das absolute Glied durch den Koeffizienten von x.

Bei den übrigen uns erhaltenen ‘ḥ‘-Rechnungen (vgl. Tabelle I[9]), S. 307) ist (modern gesprochen) die linke Seite eine Summe von Termen $a_i x$ oder $a_i x^2$ (im zweiten Falle aber nur quadratische Glieder). Die Lösungsmethode kann am besten folgendermaßen beschrieben werden: *man zählt ab*, wieviele ‘ḥ‘ gegeben sind, und bestimmt dann diejenige Zahl, welche mit der gefundenen multipliziert die gegebene liefert. Dieses Abzählen der vorhandenen x ist aus M 25[10]) ($2x+x=9$) wörtlich nachweisbar: „Nimm zusammen diese Größe (‘ḥ‘) mit diesen 2, das gibt 3“. Tabelle I, die den Gang der Rechnung in moderner Schreibweise schematisiert wiedergibt, zeigt die konsequente Anwendung dieser Methode in den übrigen Beispielen.

Hinzuzufügen ist noch eine ‘ḥ‘-Rechnung, die sich in B findet, und insofern eine Sonderstellung einnimmt, als die Unbekannte hier im Quadrat auftritt. Der Text ist ziemlich fragmentiert, läßt aber doch eine im wesentlichen eindeutige Ergänzung zu[11]), aus der hervorgeht, daß es sich um die Auflösung der Gleichung $x^2 + (3/4\,x)^2 = 100$ handelt. Die Formulierung der Aufgabe in der ersten (leider sehr beschädigten) und zweiten Zeile weist allerdings noch nicht auf eine quadratische Gleichung hin[12]): „[100] ist gleich: [einer ersten Größe (‘ḥ‘), zusammen mit 3/4 der] ersten Größe für die andere“. Man würde also zunächst denken, daß es sich um $x + 3/4\,x = 100$ handelt; aber die nun folgenden Worte[13]) und der weitere Gang der Rechnung lehren, daß in Wahrheit die oben

[7]) Diese Übersetzung nach Gunn, JEA 12 (1926) S. 131.

[8]) Hinsichtlich einer ‘ḥ‘-Rechnung $ax^2 + b = c$, vgl. Anhang 3 zu § 1.

[9]) Es bedeutet immer: $\bar{n}$ soviel wie $1/n$ und $\bar{\bar{3}} = 2/3$.

[10]) „Beispiel zur Berechnung einer Menge (‘ḥ‘), die zweimal genommen zusammen mit sich selbst 9 gibt; gib die Menge an“.

[11]) Von Schack-Schackenburg in ÄZ 38 S. 136 ff. gegeben. Einzelheiten siehe im Anhang 2 zu diesem Paragraphen.

[12]) Eckige Klammern bedeuten immer „ergänzte Stelle“.

[13]) Obwohl schon hinter der Fragestellung „laß mich wissen“ stehend, wird man die Worte von Zeile 3 (vgl. Anhang 2 zu § 1) „Nimm eine Fläche von immer Eins und nimm (eine) [von immer] 3/4 von Eins“ doch noch zu den Angaben zu zählen haben, da sie dort fehlen, andererseits die eigentliche Rechnung erst in den Zeilen 4, 5 beginnt (insbesondere wird erst in Zeile 5, 6 wirklich quadriert).

Tabelle I.

‘ḥ‘-Rechnungen (Übersicht)[1].

R 30

$10 = (\bar{\bar{3}} + \overline{10})\, x$

$x = 10 : (\bar{\bar{3}} + \overline{10})$

M 19

$(1 + \bar{2})\, x + 4 = 10$

$10 - 4 = 6 \quad x = 6 \cdot \bar{\bar{3}}$

M 25

$2x + x = 9$

$2 + 1 = 3$

$x = 9 : 3$

R 25

$x + \bar{2}x = 16$

$x = (16 : 3) \cdot 2$

R 26

$x + \bar{4}x = 15$

$x = (15 : 5) \cdot 4$

R 27

$x + \bar{5}x = 21$

$x = (21 : 6) \cdot 5$

R 24

$x + \bar{7}x = 19$

$x = (19 : 8) \cdot 7$

R 34

$x + \bar{2}x + \bar{4}x = 10$

$x = 10 : (1 + \bar{2} + \bar{4})$

R 32

$x + \bar{3}x + \bar{4}x = 2$

$x = 2 : (1 + \bar{3} + \bar{4})$

R 33

$x + \bar{\bar{3}}x + \bar{2}x + \bar{7}x = 37$

$x = 37 : (1 + \bar{\bar{3}} + \bar{2} + \bar{7})$

R 31

$x + \bar{\bar{3}}x + \bar{2}x + \bar{7}x = 33$

$x = 33 : (1 + \bar{\bar{3}} + \bar{2} + \bar{7})$

R 29[2]

$\left[\bar{3}\left((x + \bar{\bar{3}}x) + \bar{3}\,(x + \bar{\bar{3}}x)\right) = 10\right]$

K 3[3]

$x - (\bar{2} + \bar{4})\, x = 5$

$1 - (\bar{2} + \bar{4}) = \bar{4}$

$x = 5 \cdot 4$

R 28

$(x + \bar{\bar{3}}x) - \bar{3}\,(x + \bar{\bar{3}}x) = 10$

$10 : 10 = 1 \quad x = 10 - 1$[4]

[5]

B 1[6]

$x^2 + \left((\bar{2} + \bar{4})\, x\right)^2 = 100$

$1^2 + (\bar{2} + \bar{4})^2 = 1 + \bar{2} + \overline{16}$

$\sqrt{1 + \bar{2} + \overline{16}} = 1 + \bar{4}, \quad \sqrt{100} = 10$

$x_1 = 10 : (1 + \bar{4}) = 8$

$x_2 = (\bar{2} + \bar{4}) \cdot 8$

[7]

1) Für Einzelheiten der Ausrechnung vgl. Kap. II § 6.

2) Vgl. Anhang 4 zu § 6 (S. 343).

3) Vgl. Anhang 1 zu § 1 (S. 310).

4) Vgl. Anhang 4 zu § 6 (S. 343).

5) Für M 1 hat Struve (QS A 1 S. 115 ff.) die Ergänzung $x - \bar{5}x = 20$ vorgeschlagen.

6) Vgl. Anhang 2 zu § 1 (S. 310).

7) Über B 3 vgl. Anhang 3 zu § 1 (S. 311).

angegebene (rein) quadratische Gleichung gemeint ist, — eine Unklarheit der Formulierung, die zwar nichts Ungewöhnliches ist[14]), die aber doch geeignet ist, die Abwesenheit einer präzisen Terminologie zu demonstrieren. — Die Rechnung verläuft so, daß 1^2 und $(3/4)^2$ addiert werden, was 25/16 als Koeffizienten von x^2 ergibt. Die Wurzel daraus ist 5/4, die aus 100 ist 10, also $x = 8$ und $3/4\,x = 6$. Damit sind die beiden gesuchten Bestandteile gefunden.

Daß es sich offenbar um *zwei* gesuchte Größen handelt, scheint mir besonders beachtenswert und für den Unterschied zwischen moderner und ägyptischer Betrachtungsweise charakteristisch. Der modernen Auffassung genügt es, die *eine* Unbekannte x zu bestimmen, welche der vorgelegten linearen Gleichung genügt; der Ägypter dagegen sucht *nach den einzelnen Summanden*, aus denen sich die gegebene rechte Seite aufbauen soll, und nennt sie demgemäß einzeln im Resultat. Mit Rücksicht auf das eigentlich gewünschte Ergebnis wäre demnach die Aufgabe so zu umschreiben: $x_1^2 + x_2^2 = 100$, $x_2 = 3/4\,x_1$. Daß diese Betrachtungsweise den historischen Tatsachen entspricht, läßt sich leicht noch anderweitig stützen. Sämtliche '*ḥ*'-Rechnungen in R lassen auf die Bestimmung von x eine Probe durch Addition der ausgerechneten einzelnen Summanden $a_i x$ folgen: ja, R 31, R 33 und R 34 verzichten überhaupt darauf, den Wert von x selbst explizite anzugeben. So wird in keinem der inhaltlich unmittelbar an die '*ḥ*'-Rechnungen anschließenden Beispiele R 35 bis R 38 die Größe x selbst berechnet, sondern wieder nur die der „Probe" entsprechende Rechnung durchgeführt. Aber gerade bei diesen Beispielen ist es leicht ersichtlich, warum man sich um die Größe x selbst gar nicht kümmert: Die Größe der rechten Seite bedeutet hier eine konkret gegebene Getreidemenge, so daß die Aufgabe für die Praxis erst dann gelöst ist, wenn man die wirklichen Einzelbeträge, in welche die Gesamtmenge nach gegebenen Verhältnissen zerlegt werden soll, kennt, während die Größe „x" als solche nur ein ganz bedeutungsloser Proportionalitätsfaktor ist. Weitere Beispiele werden in § 2 zu erwähnen sein (vgl. S. 314).

Wenn man von derartigen Aufgaben ausgeht, so gelangt man zu einer ganz naturgemäßen Entstehungsgeschichte der „'*ḥ*'-Rechnungen". Den Ausgangspunkt bilden Probleme von der Form (modern ausgedrückt) $\Sigma x_i = a$, $x_i = a_i x$ mit gegebenen Zahlen a und a_i; d. h.: aus Gesamtmenge und Proportionalitäten sind die Teilbeträge zu bestimmen. Die Lösung beruht dann darauf, daß man sich klar macht, daß man die Bestimmung der eigentlich gesuchten Größen x_i ersetzen kann durch die Bestimmung der einen Größe x, welche die Eigenschaft haben muß, daß sie mit der

---

[14]) Vgl. etwa M 9, M 11, R 28, R 40, R 62, R 74, R 76. Ähnliches gilt für die babylonische Mathematik.

Summe der a_i multipliziert a ergibt. Der technische Kern der 'ḥ'-Rechnungen liegt also in einem Schluß, den man kurz als das Verfahren von „Einsetzen" (von $x_i = a_i x$ in $\Sigma x_i = a$) und „Ausklammern" (Bestimmung der Anzahl Σa_i der x) bezeichnen könnte: $\Sigma x_i = a = \Sigma a_i x = (\Sigma a_i)x$. Die Berechnung von x aus $(\Sigma a_i)x = a$ ist nun (im Augenblick abgesehen von der rein rechentechnischen Frage der numerischen Durchführung) eine Selbstverständlichkeit. Die Schwierigkeit der Aufgabe liegt für den Ägypter nicht in der Lösung der „linearen Gleichung", sondern in ihrer Aufstellung, d. h., in der Umsetzung konkret gegebener Bedingungen in ein numerisches Verfahren.

Dieser einfache und naturgemäße Aufbau ist in fast allen Diskussionen über ägyptische Mathematik verdeckt worden durch die Legende vom „falschen Ansatz" (regula falsi), der angeblich hier zur Anwendung kommen soll[15]). So sagt Schack-Schackenburg[16]) in dem Kommentar zu der quadratischen Gleichung $x^2 + (3/4\,x)^2 = 100$ in B: „Hätte nun der Verfasser des Kahuner Papyrus auch die Regula falsi angewendet und die Seiten des Rechtecks versuchsweise gleich 1 und 3/4 gesetzt, so hätte er den Flächeninhalt = 3/4 Quadratellen gefunden. Der Faktor, mit dem die angegebenen Größen multipliziert werden mußten, wäre also $= \sqrt{12} : \sqrt{3/4}$ geworden. Wenn der Verfasser nun glaubte[17]), daß er die Wurzeln ausziehen müsse, ehe er die Division ausführte, so kam er auf irrationale Zahlen. Das mag der Grund sein, weshalb er einen ganz anderen Weg einschlug."

Ebenso hat Peet in seinem Kommentar zu den 'ḥ-Rechnungen den einfachen Sachverhalt dadurch verdeckt, daß er immer die Wahl von „trial numbers" postuliert, die an sich von Fall zu Fall ganz willkürlich wären — sehr im Gegensatz zu der inneren Einheitlichkeit der Methode. Die Ursache zu einem solchen Mißverständnis liegt eben darin, daß man in die Lösung der linearen Relationen Schwierigkeiten verlegen zu müssen glaubte (obwohl sie hier für den Ägypter so wenig existieren wie für uns), statt sie in der Umsetzung des ursprünglich auf mehrere Unbekannte[18]) bezüglichen konkreten Problems in die einfache lineare Relation für eine Unbekannte zu erkennen.

Auf die rechnerischen Einzelheiten der 'ḥ'-Rechnungen wird noch in Kapitel II zurückzukommen sein.

---

15) Protestiert haben dagegen m. W. M. Cantor, Simon und Wieleitner. Auch Gillain wagte in seinem Buche (AEME) einen schwachen Protest gegen diese Auffassung. Vgl. neuerdings auch Struve in QS A 1 S. 113.

16) ÄZ 38 (1900) S. 139.

17) Wozu uns aber jede Begründung fehlt!

18) Abgesehen von den einfachen Fällen $ax = b$.

Anhang zu § 1.

1. Rekonstruktion zu K 3.

1. . . . .[19])
2. *ỉn mꜥ ḏd św ỉr ḫ[r]-k [ḏꜣ.t n.t 1]*[20])

(25) 3. *r śꜣ* $\overline{2}$ $\overline{4}$ *ḫpr.t ỉm pw* $\overline{4}$ *ỉr [ḫ]r-k* $\overline{4}$

4. *r gm.t wꜥ ḫpr.t ỉm pw sp 4*
5. *ỉr ḫr-k 5 sp 4 ḫpr.t ỉm pw 20*
6. *ỉn 20 ḏd św.*

Übersetzung:

1. . . . .[19]).
2. wer nennt sich?[21]) Bilde [den Rest von 1][20]).

(25) 3. gegen $\overline{2}+\overline{4}$. Es gibt $\overline{4}$. Nimm $\overline{4}$

4. um Eins zu finden. Das macht 4-mal.
5. Nimm 5 4-mal. Das macht 20.
6. 20 nennt sich[22]).

Griffith[23]) rekonstruiert die Aufgabe als $\overline{2}x - 4x = 5$. Wie schon Gillain[24]) bemerkt, paßt dies nur zum Ergebnis, nicht zum Gang der Rechnung. Aus dieser ergibt sich statt dessen

$$x - (\overline{2}+\overline{4})\,x = 5$$

als ursprüngliche Formulierung, wozu die erhaltene Rechnung

$$1 - (\overline{2}+\overline{4}) = \overline{4} \quad (\text{„Ausklammern“})$$
$$1 : \overline{4} = 4 \quad 5\cdot 4 = 20 = x$$

genau paßt.

2. B 1 Kol. II.

Vgl. ÄZ 38, 136ff.

1. *kjj [n pśš*[25]) *ꜥḥꜥ] mj ḏd-[n-k 100] m ꜥḥ[ꜥ wꜥ ḥnꜥ* $\overline{2}$ $\overline{4}$ *n]*
2. *ꜥḥꜥ 1 n kjj ḥwꜥ dj-k rḫ-j ꜥḥꜥ [1 ḥnꜥ ꜥḥꜥ kjj]*
3. *ỉr-t ḥꜣj.t m wꜥ r nḥḥ ḥnꜥ ỉr.t* $\overline{2}$ $\overline{4}$ *n wꜥ [r nḥḥ ỉr ḫr-k]*
4. $\overline{2}$ $\overline{4}$ *n ꜥḥꜥ wꜥ n kjj ḫpr ḫr* $\overline{2}$ $\overline{4}$ *ỉr ḫr-k ś.t [n ꜥḥꜥ kjj]*
5. *ỉw ꜥḥꜥ wꜥ m wꜥ kjj m* $\overline{2}$ $\overline{4}$ *ỉr ḫr-k wꜥ nb [m snj*[26]) *dmḏ-k]*
6. *ḫpr ḫr 1* $\overline{2}$ $\overline{16}$[27]) *ỉr ḫr-k tm*[28])*-f ḫpr-ḫr m 1* $\overline{4}$ *ỉr ḫr-k [tm*[28]) *m*[29]) *100]*
7. *ḫpr ḫr [10] ỉr.t 1* $\overline{4}$ *pn r gm.t 10 ḫpr ḫr s[p] 8 ỉ[n 8 . . . ỉr ḫr-k]*
8. *[*$\overline{2}$ $\overline{4}$ *m] 8 pn ḫpr ḫr [sp] 6 dj-[n]-k*[30]) *n [ꜥḥꜥ kj]*

---

19) Hoffnungslos zerstört.

20) Ergänzung nach den Parallelstellen in M 9 und M 10.

21) D. h. etwa soviel wie: „welche Zahl erscheint als Resultat?“ vgl. Zeile 6.

22) Wörtlich etwa „20 (ist es) das von sich (so) redet“ (so nach Sethe, Erl. 60, 20).

23) Griffith, Kah., Kommentar S. 17.

24) Gillain, AEME S. 239f.

25) Vgl. R 1 und R 64.

26) Nach M 11. Vgl. QS A 1 S. 32.

27) Text hat irrtümlich $1 + \overline{2} + \overline{4} + \overline{16}$.

28) Diese Lesung von nach JEA 15, 170 Anm. 1.

29) Nach K 1.

30) Nach M XVII, 3.

Übersetzung:

1. Ein anderes (Beispiel) [der Berechnung von Größen (*ʿḥʿ*)]. Wenn man Dir sagt [100] ist gleich [einer ersten Größe, zusammen mit 3/4]
2. der ersten Größe für die andere; laß mich wissen die [erste] Größe [und die andere].
3. Nimm eine Fläche[31]) von immer Eins und nimm (eine) [von immer] 3/4 von Eins. [Nimm]
4. 3/4 von der ersten Größe für die andere. Es macht 3/4. Nimm es [für die erste Größe].
5. Nun ist die erste Größe gleich Eins, die andere gleich 3/4. Nimm einzeln jede [ins Quadrat; addiere[32])].
6. Es macht $1+\bar{2}+\overline{16}$[27]). Nimm davon die Wurzel. Es macht $1+\bar{4}$. Nimm [die Wurzel von 100].
7. Es macht [10]. Nimm dieses $1+\bar{4}$, um 10 zu finden. Es macht 8 Male. N[un ist 8 die erste Größe. Nimm]
8. [3/4 von] diesen 8. Es macht 6 [Male], die Dir geg[eben] sind für [die andere Größe].

Gang der Rechnung:

$$\begin{array}{ll}
(x)^2+((\bar{2}+\bar{4})\,x)^2=100 & x_1^2+x_2^2=100 \qquad x_2=3/4\,x_1\\
\left.\begin{array}{l}(\bar{2}+\bar{4})\,1=\bar{2}+\bar{4}\\ 1^2+(\bar{2}+\bar{4})^2=1+\bar{2}+\overline{16}\end{array}\right\} & (1^2+(3/4)^2)\,x^2=100\\
\left.\begin{array}{l}\sqrt{1+\bar{2}+\overline{16}}=1+\bar{4}\\ \sqrt{100}=10\end{array}\right\} & \sqrt{25/16}\,x=10\\
10:(1+\bar{4})=8=x_1 & x_1=x=\dfrac{10}{5/4}\\
(\bar{2}+\bar{4})\,8=6=x_2 & x_2=3/4\,x_1
\end{array}$$

3. B 3.

Schack-Schackenburgs Vermutung (ÄZ 40 S. 65f.), daß dieses Fragment dem Fragment 1 vorangeht und eine Aufgabe analoger Struktur enthält, erscheint mir sehr unwahrscheinlich. Nach Schack-Schackenburgs Ansatz müßte die Rechnung lauten:

---

[31]) Natürlich ganz im Sinne von „Produkt" gemeint, wie unser „Quadrat". Damit folge ich der Auffassung Gunns: *ḥ3j.t*=„superficies", „surface" (JEA 12, 124 und 130) gegen Struves (QS A 1 S. 126) „rechtwinkliges Parallelepiped", da an der vorliegenden Stelle *ḥ3j.t* unmöglich etwas Dreidimensionales bedeuten kann, während es in K 1 viel eher als oberflächliche Benennung der Schichten der Fläche 3.4 der (nie explizite erwähnten) Höhe 1 verstanden werden kann. Ein Vermischen von Flächen- und Volumbezeichnungen ist übrigens in der ganzen antiken Metrologie nichts Seltenes.

[32]) Mindestens sachlich wäre eine solche Bemerkung nötig, wenn auch die unmittelbare Aufeinanderfolge mehrerer Operationen ohne jeweilige Resultatangabe nicht üblich ist.

$$[(2x)^2 + (3/2x)^2 = 400$$
$$2^2 = 4 \qquad (1 + \bar{2})^2 = 2 + \bar{4} \quad \text{zusammen } 6 + \bar{4}]$$
$$\sqrt{6 + \bar{4}} = 2 + \bar{2} \qquad [\sqrt{400} = 20$$
$$1 : (2 + \bar{2}) = \bar{3} + \overline{15} \qquad (\bar{3} + \overline{15}) \cdot 20 = 8 = x$$
$$2x = 16 = x_1 \qquad (1 + \bar{2})\, x] = 12\, [= x_2].$$

Zu dieser Rechnung passen die Zahlen des Textes sehr schlecht. Eine „3“ in der vorletzten Zeile und vor allem das Bilden einer Differenz in der 5. letzten Zeile bleibt ganz unerklärlich. Aus der Schlußformel „*ỉn 12 d̲d̲ św*“ („die 12 ist es, die von sich so redet“[33])) scheint mir eher zu folgen, daß es sich nur um eine einzige gesuchte Größe handelt, das Ganze also den Typus $ax^2 + b = c$ (ähnlich wie M 19) hat. Daß das Ganze eine ‘ḥ‘-Rechnung war, scheint mir wegen der Schlußformel recht wahrscheinlich.

§ 2. Anwendungsbeispiele der ‘ḥ‘-Rechnungen. „Reihen“.

Wenn auch ein so allgemeiner Aufgabentyp wie die ‘ḥ‘-Rechnungen nur als Ergebnis einer von konkreten Erfahrungen ausgehenden Entwicklung zu verstehen ist so wird man doch für eine kulturelle Epoche, wie die des mittleren Reichs (aus der allein man umfangreichere Texte besitzt, vor allem M und R) ohne weiteres annehmen dürfen, daß man der Praxis entnommene Beispiele schon ganz als Anwendung der allgemeinen ‘ḥ‘-Methodik zu fassen verstand. Ein Vergleich von

R 35	**R 38**	**R 36**	**R 37**
$3x + \bar{3}x = 1$	$3x + \bar{7}x = 1$	$3x + \bar{3}x + \bar{5}x = 1$	$3x + \bar{3}x + \bar{3} \cdot \bar{3}x + \bar{9}x = 1$
$x = 1 : (3 + \bar{3})$	$x = 1 : (3 + \bar{7})$	$x = 1 : (3 + \bar{3} + \bar{5})$	$x = 1 : (3 + \bar{2} + \overline{18})$

mit Tabelle I (S. 307) zeigt unmittelbar diesen Zusammenhang (Methodik des „Ausklammerns“ !), wenn auch nun der allgemeine Terminus „Menge“, „Größe“ durch bestimmte Getreidemengen ersetzt ist.

Diese Aufgabengruppe R 35 bis R 38 läßt besonders die Schwierigkeit hervortreten, die schon oben als Kern der ‘ḥ‘-Aufgaben bezeichnet wurde: die Umsetzung der in Worten beschriebenen konkreten Tatsachen in ein System von Zahlen, mit denen man wirklich rechnen kann. Die Angaben z. B. von R 35 lauten[34]): „Ich bin drei Male in den Scheffel gegangen und ein Drittel von mir zu mir hinzu werde ich voll[35])“. Die eigentliche Rechnung beginnt dann mit[36])

---

[33]) Vgl. S. 310 Anm. 22.

[34]) Übersetzung nach Gunn, JEA 12 S. 131.

[35]) Auch in der Personifizierung der Unbekannten schließen sich diese Rechnungen ganz an die ‘ḥ‘-Rechnungen an (vgl. z. B. Anhang 1 zu § 1: K 3: „Wer nennt sich?“ — „20 nennt sich“).

[36]) Die Merkstriche an den Zahlen links bedeuten üblicherweise, daß diese Stelle bei der Addition zu berücksichtigen ist.

$$\begin{array}{lll} / & 1 & 1 \\ / & 2 & 2 \\ / & \bar{3} & \bar{3} \\ \text{zusammen} & & 3+\bar{3} \end{array}$$

was also nur als ein überflüssiges „$a=a$" erscheint. Man muß sich aber klar machen, daß auch ganz triviale Bemerkungen in unseren Texten einen sehr guten Sinn haben. Mangels jeder Formelsprache wird nämlich die analogen Beispielen gemeinsame Gesetzmäßigkeit bzw. Lösungsregel dadurch zum Ausdruck gebracht, daß man verschiedene Einzelbeispiele nacheinander gibt und jedesmal den ganzen Formalismus vorführt[37]), betont unabhängig davon, daß in einem speziellen Beispiele gewisse der vorgeschriebenen Operationen durch die zufälligen Zahlwerte trivial werden. Im vorliegenden Falle kann der Zweck dieser Gegenüberstellung nur der sein: die konkreten Zahlen des Beispiels sind zur praktischen Rechnung herzurichten, oder, wie ich kurz sagen will: die Angaben sollen „algorithmisiert" werden. Daß diese Anschauung das Richtige trifft, zeigt sehr schön R 37 ($3x+\bar{3}x+\bar{3}\cdot\bar{3}x+\bar{9}x=1$), wo die entsprechende Stelle lautet:

$$\begin{array}{rll} & 1 & 1 \\ & 2 & 2 \\ & \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3}\text{ von seinem} & \bar{3} & \bar{9} \\ \text{sein} & \bar{9} & \bar{9} \\ \text{zusammen} & & 3+\bar{2}+\overline{18}, \end{array}$$

wo einerseits die Worte der Angabe „ein Drittel von einem Drittel von mir . . ." in $\bar{9}$ umgesetzt werden und die Abzählung der vorhandenen x sogleich nach den Regeln der Bruchrechnung umgeformt wird: $2/9=\bar{6}+\overline{18}$ und $\bar{3}+\bar{6}=\bar{2}$.

Man sieht: Der Anwendung der '$\underset{\cdot}{h}$'-Methodik auf „Textgleichungen" der Praxis hat die „Algorithmisierung" der konkreten Angaben voranzugehen, d. h. ihre Umsetzung in ein reines Zahlensystem. Die weitere Rechnung erfolgt dann genau nach den Regeln der '$\underset{\cdot}{h}$'-Rechnung.

---

[37]) Ein sehr schönes Beispiel einer analogen Methode gibt u. a. eine babylonische Aufgabengruppe (CT IX 10, 5—22; vgl. QS A 2 Kapitel IV). Die formelmäßige Relation zwischen zwei Größen würde

$$a=\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\cdot b$$

heißen. Nun ist einmal $b=60$, was in dem babylonischen pseudopositionellen Sexagesimalsystem dasselbe Schriftbild wie 1 hat, so daß das Zahlzeichen von a einfach dem aus $\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}$ gefundenen gleich ist und man das b der Formel in der Rechnung nicht bemerken würde. Daher wird die ganze Rechnung nochmals mit denselben α_1, α_2, α_3 wiederholt, nun aber mit $b=30$. Erst die Gesamtheit der Beispiele läßt das Gesetz erkennen!

Ich möchte mit aller Deutlichkeit hervorheben, daß die Existenz eines besonders markierten Schrittes in der Lösung eines einfachen linearen Problems, der die Überführung des speziellen konkreten Beispiels in einen (wenn auch noch so einfachen) allgemeinen Rechenalgorithmus zum Ziele hat, wie kaum etwas anderes zu zeigen geeignet ist, welche ungeheuren Schwierigkeiten auch nur den ersten Schritten zu allgemeinen mathematischen Ideenbildungen gegenüberstehen.

Schon in § 1 habe ich darauf hingewiesen, daß bei den 'ḥ'-Rechnungen eigentlich die Bestimmung mehrerer Unbekannten (d. h. der wirklichen einzelnen Summanden) das Ziel der Rechnung ist, zu dem die Einführung des auszuklammenden Proportionsfaktors „x" nur ein technischer Kunstgriff ist. Zugrunde liegt überall die Frage nach der Verteilung von Rationen in vorgeschriebenem Verhältnis, so wie wir es aus zahlreichen Wirtschaftstexten, Erbverträgen, aber auch aus den „mathematischen" Papyri[38]) kennen. Charakteristisch für diese Aufgaben ist etwa R 68, wo Getreide auf 3 verschieden starke Trupps von Leuten verteilt werden soll, so aber, daß alle Leute gleiche Ration erhalten. Lösung: Man dividiert die Gesamtmenge des Getreides durch die Gesamtzahl der Leute und bestimmt daraus den Anteil der Trupps je nach ihrer Stärke.

Dies gibt nun auch eine Methode, mit der man bei ungleicher Rationenverteilung vorgehen kann. In R 65 sollen von 10 Leuten 3 doppelte Portionen bekommen. Lösung: Man dividiert den Vorrat durch 13. Es ist nun typisch für die konkrete Denkweise der Ägypter, daß dieses Beispiel nicht etwa damit schließt, daß es sagt, ein Mann der ersten Gruppe bekommt $a = \frac{A}{13}$, einer der zweiten $2a$, sondern statt dessen 7mal den Betrag der einfachen Ration, 3mal den der doppelten hinschreibt — genau so, als hätte der Vorrat in Konkreto in seine Anteile zerlegt werden sollen. Ähnlich R 39: die Anteile, die aus je 50 Broten auf 6 bzw. 4 Mann entfallen, werden einzeln 6mal bzw. 4mal aufgezählt; ausdrücklich gestellt und beantwortet wird in dieser Aufgabe auch noch die Frage nach dem Unterschied der Anteile.

Die Frage nach Unterschieden von Rationen gibt Anlaß zu Aufgaben, die man mit „arithmetischen Reihen" zu bezeichnen pflegt. So verlangt R 64, daß 10 Scheffel Korn so unter 10 Leute verteilt werden, daß jeder um 1/8 Scheffel mehr als sein Vordermann erhält. Man hat aus der Lösung dieser Aufgaben immer auf die Existenz besonderer Regeln für arithmetische Reihen schließen wollen. Ich glaube aber, daß man zu einem solchen Schluß keinen Anlaß hat, solange sich alles ganz naturgemäß aus dem sonstigen Material herleiten läßt. Wie man nämlich

[38]) Z. B. K 2 (Griffith Kah. Kommentar S. 17f.), M 23, R 82 bis 84.

(siehe oben S. 314) in R 65 die 3 Doppelportionen bei 10 Leuten einfach dadurch los wird, daß man zunächst Gleichverteilung (dafür aber unter 13 Leuten) annimmt, so gibt man zunächst auch hier jedem Mann denselben Anteil[39]) (1 Scheffel). Die wirklichen Anteile erhält man sofort durch Verteilung der verfügbaren 9 Differenzen: um $4^{1}/_{2}$ Differenzen oder 9 halbe Differenzen (also um $9 \cdot \overline{16} = \overline{2} + \overline{16}$ Scheffel) übersteigt der höchste Anteil den Durchschnitt[40]). Aus ihm werden nun alle anderen Anteile durch schrittweises Subtrahieren der Differenz gewonnen und wieder einzeln angegeben[41]).

Das komplizierteste derartige Beispiel ist aber R 40: Unter 5 Leute sollen Brote in arithmetischer Progression verteilt werden, derart, daß der Anteil der beiden letzten $^{1}/_{7}$ des Anteils der drei ersten ist. Der Text beginnt die Rechnung ohne Motivierung[42]) mit der Aufzählung von 5 Zahlen 23, $17\frac{1}{2}$, 12, $6\frac{1}{2}$, 1, die eine arithmetische Reihe (der Differenz $5\frac{1}{2}$) bilden, der Bedingung $x_4 + x_5 = {}^{1}/_{7}\,(x_1 + x_2 + x_3)$ genügen, aber die Summe 60 statt 100 haben. Nun wird einfach jede dieser Zahlen mit $\frac{100}{60} = 1^{2}/_{3}$ multipliziert, und man hat auch die richtige Summe hergestellt.

Die Schwierigkeit[43]) für eine Erklärung dieser Rechnung liegt natürlich in der Frage, woher die erste Zahlenfolge mit der Differenz $5^{1}/_{2}$

---

39) Text: *pšš.t mt.t* „mittlerer Anteil". Diese Lesung nach Peet (Tafel S). Sie wird wohl mit dem *m mt.t (nt) ib* „aus vollem (d. h. mittlerstem) Herzen" zusammenzustellen sein (vgl. WB II S. 168), nicht mit *mtr* „richtig", wie in WB II S. 173 — der „mittlere" Anteil ist ja eben noch nicht der „richtige"! (Vgl. Peet, RMP S. 107 „mean share"; bei Chase RMP 2, Pl. 86 ist hieroglyphisch *mt.t* mit *mtr.t* transkribiert und als „average [literally regular]" übersetzt!)

40) Text: „Subtrahiere 1 von 10; Rest 9. Die Hälfte des Überschusses (von Mann gegen Mann) ist $\overline{16}$ (Scheffel). Mal 9 ist $\overline{2} + \overline{16}$. Addiere es zum mittleren Anteil" (was dann gleich dem höchsten Anteil ist). — Für die weitgehenden Ähnlichkeiten dieser Aufgaben mit einer babylonischen Verteilungsaufgabe unter „10 Brüder" vgl. QS B 1 S. 120ff.

41) Auch Gillain, AEME S. 267f., interpretiert den Gang der Rechnung in diesem Sinne, schließt aber dann doch mit der Angabe einer allgemeinen Regel, deren Existenz durch nichts bewiesen ist.

42) Peets Übersetzung (S. 78) „The doing as it occurs supposing the difference of share to be $5^{1}/_{2}$" ist hier nicht genau; von „supposing" steht nichts im Text.

43) Gillain, AEME S. 270, übergeht sie mit Stillschweigen, nachdem schon Peet zu keinem bestimmten Resultat gelangte. Chase RMP S. 12 nimmt an, daß "it is so natural to think of 1 as the smallest number that it does not occur to the autor to mention it", daß er ferner aus gleichem Grunde auch noch die Differenz der arithmetischen Reihe gleich 1 genommen habe, also von 1, 2, 3, 4, 5 ausgegangen sei, dann 1, 3, 5, 7, 9 genommen habe und schließlich aus der Abweichung von dem geforderten $x_5 + x_4 = 1/7\ (x_3 + x_2 + x_1)$ die richtige Differenz bestimmt habe. Es ist dies eine gänzlich von der Theorie des „falschen Ansatzes" inspirierte Hypothese, für die der Text selbst keinerlei Anlaß bietet und für die auch keine sonstige methodische Parallele existiert.

stammt. Sie läßt sich sofort heben, wenn man sich dieses Verteilungsproblem als '$\underset{.}{h}$'-Rechnung formuliert: „Das 7fache des kleinsten Anteils ($a = x_5$) zusammen mit dem um eine bestimmte Größe (x) vermehrten Anteil soll gleich sein der Summe der um 2, 3 und 4 solcher Größen vermehrten Anteile": $7\,(a+(a+x)) = (a+2\,x)+(a+3\,x)+(a+4\,x)$. Genau nach der '$\underset{.}{h}$'-Methode zählt man hieraus sofort ab, daß $11\,a = 2\,x$ sein muß, d. h. daß der Unterschied der Anteile das $5\frac{1}{2}$fache des kleinsten Anteils a sein muß. Nun kennt man zwar diesen Mindestanteil a gar nicht. Aber er ist wieder aus einer '$\underset{.}{h}$'-Rechnung zu bestimmen. Es ist ja verlangt, daß die Summe aller Anteile $a+(a+5\frac{1}{2}a)+(a+11\,a)+(a+16\frac{1}{2}a)+(a+22\,a) = 100$ sein soll. „Ausklammern" heißt aber gerade die im Text stehende Frage stellen: mit welcher Zahl a muß man die Summe von

$$1,\ 6\tfrac{1}{2},\ 12,\ 17\tfrac{1}{2},\ 23$$

(d. h. 60) multiplizieren, um 100 zu bekommen? — Es ist hervorzuheben, daß diese Erklärungsweise von R 40 als Ineinanderschachtelung zweier '$\underset{.}{h}$'-Rechnungen nicht etwa zu viel verlangt: z. B. zeigt eine genauere Betrachtung der sog. *pśw*-Rechnungen, daß ein derartiges Ineinanderschachteln einfacher Grundaufgaben ein gerne verwandtes methodisches Prinzip zur Erzeugung komplizierterer Beispiele darstellt (vgl. § 3 Tab. II S. 319).

Dieses Beispiel zeigt mit aller nur erwünschten Deutlichkeit, wie die '$\underset{.}{h}$'-Rechnung mit ihren beiden Grundoperationen „Einsetzen" und „Ausklammern" genau das Instrument zur Lösung der gestellten Aufgaben abgibt. Es zeigt aber ebenso drastisch, daß die Lösungen von R 64 (vgl. S. 314 f.) und die unseres jetzigen Beispiels R 40 nicht aus einer einheitlichen „Theorie" der „arithmetischen Reihen" hergeleitet sind. Denn das Verfahren der gleichmäßigen Verteilung von R 64 hätte bei R 40 sofort $x_3 = \frac{100}{5} = 20$ für den Anteil des Dritten ergeben und daraus wegen

$$7\,\big((20-2\,d)+(20-d)\big) = 20+(20+d)+(20+2\,d)$$

ohne weiteres die endgültige Differenz $d = 55/6$. In Wirklichkeit reduziert sich das Gemeinsame dieser Aufgaben auf die Frage nach der Bestimmung von Einzelanteilen gegebenen Verteilungsgesetzes, die durch mehr oder minder geschickte Anwendung von Schlüssen, die aus der '$\underset{.}{h}$'-Rechnung geläufig sind, gelöst werden, ohne daß aber die Verteilung in arithmetischer Progression dabei besonders wesentlich wäre.

Das Resultat, daß man bei der Annahme formelartiger Zusammenhänge, angewandt zur Lösung bestimmter mathematischer Typen von Aufgaben, nur mit allergrößter Vorsicht zu Werke gehen darf, bestätigt sich auch bei dem berühmten Beispiel einer „geometrischen Reihe" in

R 79[44]). Dort wird einerseits $7+\ldots+7^5$ durch Addition von 7, 49, ..., 16807 ($=7^5$) berechnet, andererseits aber durch Multiplikation[45]) von 2801 mit 7, woraus man wegen $2801=\frac{7^5-1}{7-1}$ auf die Benutzung der Summenformel der geometrischen Reihe schloß. Zu der Rechnung $2801\cdot 7$ kann man aber auch einfach aus dem ägyptischen Multiplikationsschema kommen, wenn man es nur etwas übersichtlich anordnet:

1	7	49	343	2401	2801
2	14	98	686	4802	5602
4	28	196	1372	9604	11204
7	49	343	2401	16807	19607

wobei der Text von R 78 eben gerade die Zahlen gibt, die den linken, unteren und rechten Rand dieses Schemas ausmachen. Hypothetisch ist also nur die Ergänzung des inneren rechteckigen Schemas und der Addition sowohl nach Zeilen wie nach Spalten, beides Dinge, die aus den Abrechnungen der Wirtschaftspapyri wohl bekannt sind[46]). Es zwingt also nichts zu so einschneidenden Annahmen, wie die der Existenz von besonderen Kenntnissen über geometrische Reihen, so daß man zunächst lieber bei der historisch einfacheren Hypothese bleiben wird[47]). D. h.: sowohl '$\underset{.}{h}$'-Rechnung wie deren Anwendungen sind nicht eigentlich mathematische Kategorien („lineare" oder gar „quadratische" „Gleichungen", „Reihen" usw.), sondern Beispiele zur Bestimmung von Anteilen, in denen sich ganz von selbst eine gewisse aber durchaus nicht theoretisch konsequente Methodik herausgebildet hat.

§ 3. Die *pšw*-Rechnungen.

Es ist kennzeichnend für den Typus der ägyptischen „mathematischen" Papyri, daß $^1/_8$ der Beispiele von R und über $^1/_3$ der von M[48]) sich mit Rechnungen aus der Brot- und Bierbereitung beschäftigen, ein Bruchteil, der noch sehr viel größer wäre, wenn man die übrigen Beispiele, die der landwirtschaftlichen Praxis entstammen, hinzunehmen

---

[44]) Eingekleidet als „7 Häuser, 7 Katzen, 7 Mäuse usw.".

[45]) Selbstverständlich in der üblichen dyadischen Form durchgeführt:

1	2801
2	5602
4	11204
zusammen	19607.

[46]) Vgl. z. B. Kah. XVI (Anhang 5 zu § 6).

[47]) Vgl. auch Neugebauer, ÄBR S. 14 Anm. 4 Ende.

[48]) R 69 bis R 78, M 5, 8, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22, 24. Ferner B Fragment 2 und vermutlich auch 4 (vgl. ÄZ 38 S. 139f. und ÄZ 40 S. 66).

würde[49]). Das Folgende wird zeigen, daß eine zunächst möglich erscheinende Erklärung dieser Tatsachen nicht richtig ist: daß diese Beispiele nur ihren Rahmen dem naheliegendsten Teile des ägyptischen Lebens entnommen hätten, ihrem Kerne nach aber zur Einübung allgemeiner mathematischer Schlüsse dienten. Dieser Umstand ist es auch, der uns zwingt, die Gruppe dieser „*pśw*"-Rechnungen für sich zu behandeln.

Der Terminus *pśw*[50]) hängt mit dem Verbum *pśj* „kochen", „backen" zusammen und wird gewöhnlich mit „Backverhältnis", „Kochung"[51]) übersetzt. Er dient zur Qualitätsbezeichnung von Brot und Bier, dadurch, daß die als *pśw* bezeichnete Zahl angibt, wieviel Brote bzw. Krüge Bier aus *einem* Scheffel hergestellt werden können. Ich übersetze *pśw* im folgenden immer mit „Qualität"[52]). Bier der „Qualität 1" ist demnach stärker als eines der „Qualität 4"[53]).

Sei G die verfügbare Getreidemenge, A die daraus hergestellte Anzahl von Broten oder Krügen, p deren *pśw*, g der Getreidegehalt pro Brot bzw. Krug, so bestehen offenbar folgende Relationen:

(1) $$G = A g = \frac{A}{p}.$$

Sie bilden den Kern aller *pśw*-Rechnungen. Hinzu kommen nur noch Komplikationen, die durch Bezugnahme auf verschiedene Getreidesorten bedingt sind und das Berücksichtigen gewisser Maßverhältnisse verlangen. Mathematisch genommen läßt sich dies durch die weitere Relation

(2) $$\bar{G} = \mu G$$

ausdrücken, wo μ ein als bekannt anzusehender Maßfaktor ist[54]). Historisch gesehen liegt selbstverständlich in der Kenntnis und Beherrschung dieser Maßrelationen die eigentliche Schwierigkeit solcher Aufgaben[55]). Eine systematische Übersicht der *pśw*-Rechnungen[56]) gibt Tabelle II (S. 319).

---

[49]) Als Parallele gewisse Keilschrifttexte, in denen die „Belagerungsrechnungen" etwa denselben Prozentsatz ausmachen (vgl. QS A 2 Kap. IV).

[50]) Etwa als „pesu" auszusprechen (vgl. S. 305 Anm. 4).

[51]) WB I S. 552.

[52]) Peet sagt „strength".

[53]) Für den großen Kreis kulturgeschichtlicher Fragen, die sich an diesen Begriff knüpfen, siehe Struve, QS A 1 Übersetzung und Kommentar § 2.

[54]) Entsprechend ist auch die „Qualität" auf Getreide der Sorte von $\bar{G}$ zu beziehen: $\bar{p}$.

[55]) Auch der modernen Interpretation stellen sich hier die größten Hindernisse entgegen, da es keine einfache Sache ist, sich in dem Chaos der antiken Maß- und Wertbezeichnung zurechtzufinden. Vgl. dazu QS A 1.

[56]) Abgesehen von:

B 2 (als *ḏb3*-Rechnung wie R 72 bis R 78 bezeichnet, aber ohne rechnerische Analogien, soweit dies aus den Resten überhaupt erkennbar ist;

Tabelle II. *pśw*-Rechnungen (Übersicht). Relationen: $G = Ag = \frac{A}{p}$ $\overline{G} = \mu G$

R 70, R 69	M 12	M 20	M 15
G, A $g = ?$ $p = ?$ Rechnung: 1. $A : G = p$ Probe: $G \cdot p = A$ 2. $G : A = g$ Probe: $g \cdot A = G$	G, A $\overline{p} = ?$ Rechnung: $A : \frac{G}{\mu} = \overline{p}$	A, p $\overline{G} = ?$ Rechnung: $\frac{\mu}{p} \cdot A = \overline{G}$	G, p $A = ?$ Rechnung: $G \cdot p = A$

R 77, R 73, R 75, R 78	R 72	M 5 = M 8	R 74	R 76
$(A_1, p_1) \approx (A_2 = ?, p_2)$ Rechnung: $(A_1, p_1) \approx G$ $G \cdot p_2 = A_2$ Probe: $(A_1, p_1) \approx G$ $(A_2, p_2) \approx G$	$(A_1, p_1) \approx (A_2 = ?, p_2)$ Rechnung: $\frac{p_2 - p_1}{p_1} A_1 + A_1 = A_2$	$(A_1, p_1) \approx (A_2 = ?, \overline{p}_2)$ Rechnung: $(A_1, p_1) \approx G$ $\frac{1}{\mu} G = \overline{G}$ $\overline{G} \cdot \overline{p}_2 = A_2$	$(A_1, p_1) \approx (A_2 = ?; p'_2, p''_2)$ $[G' = G'']$ Rechnung: $(A_1, p_1) \approx G$ $\frac{1}{2} G p'_2 = A'_2$ $\frac{1}{2} G p''_2 = A''_2$ Probe: $(A_1, p_1) \approx G$ $(A'_2, p'_2) \approx \frac{1}{2} G$ $(A''_2, p''_2) \approx \frac{1}{2} G$	$(A_1, p_1) \approx (A_2 = ?; p'_2, p''_2)$ $[A'_2 = A''_2]$ Rechnung: $(A_1, p_1) \approx G$ $G \frac{1}{\frac{1}{p'_2} + \frac{1}{p''_2}} = A'_2 = A''_2$ Probe: $(A_1, p_1) \approx G$ $(A'_2, p'_2) \approx G'$ $(A''_2, p''_2) \approx G''$ $[G' + G'' = G]$

M 22	M 9 = M 13
$G \approx (A_1, p_1 = ?) + (A_2, \overline{p}_2)$ Rechnung: $(A_2, \overline{p}_2) \approx G_2$ $G - G_2 = G_1$ $[A_1 : G_1 = p_1]$	$G \approx (A_1, p_1) + (A_2 = ?; p'_2, p''_2, p'''_2)$ $[A'_2 = A''_2 = A'''_2]$ Rechnung: $(A_1, p_1) \approx G_1$ $G - G_1 = G_2$ $\overline{g}'_2 = \frac{1}{\overline{p}'_2}$ $\overline{g}''_2 = \frac{1}{\overline{p}''_2}$ $\overline{g}'''_2 = \frac{1}{\overline{p}'''_2}$ $G_2 : (\overline{g}'_2 + \overline{g}''_2 + \overline{g}'''_2)\, \mu = A'_2 = A''_2 = A'''_2$

M 24
$G \approx (A_1, p_1 = ?) + (A_2, p_2 = ?)$ $\alpha p_1 = p_2$ Rechnung: $\left(\frac{1}{\alpha} A_2 + A_1\right) : G = p_1$ $\alpha p_1 = p_2$

Die einfachste Gruppe von *pśw*-Rechnungen beschränkt sich darauf, auf Grund der Relation (1) eine unbekannte Größe[57]) aus den beiden bekannten andern zu berechnen[58]), eventuell mit Hereinziehung der Maßrelation (2)[59]).

Die restlichen *pśw*-Rechnungen komplizieren sich dadurch, daß sie verlangen, verschiedene Gruppen (A, p, G) miteinander zu vergleichen, etwa indem (A_1, p_1) in dem Sinne (A_2, p_2) „äquivalent"[60]) sein sollen[61]), daß für die Herstellung von A_1 Stücken der Qualität p_1 dieselbe Menge G verbraucht wird, wie für (A_2, p_2). Wegen (1) könnte man dies unmittelbar als Proportion

$$\frac{A_1}{p_1} = \frac{A_2}{p_2} \tag{3}$$

formulieren, so daß die Aufgabe[62])

$$(A_1, p_1) \approx (A_2 = ?, p_2)$$

sofort durch

$$A_2 = \frac{A_1}{p_1} p_2$$

zu lösen ist. Der Sache nach entspricht dem auch meist die ägyptische Rechnung, indem konstatiert wird, daß zu (A_1, p_1) die Menge G nötig ist[63]), woraus $A_2 = G\, p_2$ folgt[64]). Wie sehr man sich aber hüten muß, darin etwa nur die formale Auflösung der „Proportion" (3) zu sehen, zeigt die „absurd method"[65]), nach der R 72 genau dieselbe Aufgabe löst:

$$A_2 = \frac{p_2 - p_1}{p_1} A_1 + A_1$$

offenbar fern von jeder Beziehung zum Proportionsbegriff[66]). Verständ-

---

Zu S. 318: man könnte auch an M 23 (*db3* = „Entlohnung") denken, ohne Zusammenhang mit den *pśw*-„Äquivalent"-Rechnungen).

B 4 (sehr arg zerstört).

M 16 vermutlich zum Typus $(A_1, p_1) \approx (A_2, p_2)$ gehörig, aber nicht eindeutig rekonstruierbar.

Ferner sind R 71 und M 21 weggelassen, da sie in dieser systematischen Zusammenstellung ohne Interesse sind (vgl. unten S. 322).

[57]) Wobei ich g und p wegen $g = \frac{1}{p}$ als eine Größe zähle.

[58]) R 70, R 69, M 20, M 15. Vgl. Tabelle II (S. 319).

[59]) M 12.

[60]) In Zeichen: $(A_1, p_1) \approx (A_2, p_2)$.

[61]) Der Ägypter spricht von *db3* „austauschen".

[62]) R 77, R 73, R 75, R 78, R 72 bzw. M 5 = M 8 mit p_2 statt p_2.

[63]) In Zeichen: $(A_1, p_1) \approx$ G.

[64]) So in R 77, R 73, R 75, R 78, M 5 = M 8.

[65]) Peet, RMP S. 119.

[66]) An ein bewußtes Ersetzen von (3) durch die gleichwertige „Proportion"

$$\frac{p_1}{p_2 - p_1} = \frac{A_1}{A_2 - A_1}$$

ist natürlich nicht zu denken.

lich wird dies nur, wenn man an die rein gegenständliche Bedeutung aller Größen denkt. Dann gibt $p_2 - p_1$ an, wieviel Stück pro Scheffel von der neuen Qualität mehr erzeugt wird, als von der alten. Da p_1 Stück der ersten Qualität pro Scheffel erzeugt waren, so werden nun $\frac{p_2 - p_1}{p_1}$ pro Stück mehr erzeugt, also bei A_1 Stück um $A_1 \frac{p_2 - p_1}{p_1}$ mehr, so daß $A_2 = A_1 + A_1 \frac{p_2 - p_1}{p_1}$ ist. So betrachtet, ist dieser Weg zur Bestimmung der Anzahl A_2 ganz direkt, da er nur mit Anzahlen (*pśw* ist ja eine spezifische Anzahl) operiert — wogegen die Lösung durch $(A_1, p_1) \approx G$, $G\, p_2 = A_2$ zwar rechnerisch kürzer erscheint, aber den Umweg über die Gesamtgetreidemenge G nötig hat. Man sieht: keine der beiden Lösungen denkt eigentlich an die formale Proportionalität (3), sondern beide operieren ganz gegenständlich: die eine mit der Gesamtmenge, die andere mit den Anzahlen — wieder ein warnendes Beispiel, nicht unsere Begriffsbildungen in antike Fragestellungen hineinzutragen, bloß weil der Rechenalgorithmus zufällig (oder wenn man will: zwangläufig) sich diesen Begriffen fügt.

Eine Variante dieser Austausch- oder Äquivalent-Aufgaben bringen R 74 und R 76[67]). Dort soll der Gegenwert von (A_1, p_1) nicht in einer einzigen Sorte der Qualität p_2 bestimmt werden, sondern in einem Gemisch zweier neuer Qualitäten p_2' und p_2'': $(A_1, p_1) \approx (A_2 = ?, p_2', p_2'')$. Für die mangelnde Präzision der Angaben ist kennzeichnend, daß erst aus der Rechnung von R 74 zu ersehen ist, daß die Verteilung der beiden neuen Sorten (A_2', p_2') und (A_2'', p_2'') eine solche sein soll[68]), daß die zugehörigen Getreideanteile G', G'' einander gleich werden, (also $G' = G'' = \frac{1}{2} G$), während in R 76 statt dessen aus der Rechnung hervorgeht, daß hier die beiden neuen Sorten gleich zahlreich sein sollen: $A_2' = A_2'' = \frac{1}{2} A_2$.

M 22 und M 9 (wovon M 13 eine Dublette ist) liefern eine neue Abart von *pśw*-Aufgaben: Aus G soll $(A_1, p_1) + (A_2, p_2)$ hergestellt werden, bei M 9 mit der Komplikation, daß A_2 in drei gleiche Anzahlen[69]) A_2', A_2'', A_2''' der Qualitäten p_2', p_2'', p_2''' zu zerlegen ist. In M 22 ist p_1, in M 9 A_2 (oder besser $1/3\, A_2 = A_2' = A_2'' = A_2'''$) unbekannt, das Übrige gegeben. Die Rechnung rekuriert auf die Getreidemengen, zunächst die des einen Summanden, dann die des Restes, der nun für den andern verfügbar ist. Diese Beispiele lassen erkennen, wie die ägyptische Mathematik durch bloßes Ineinanderschachteln der einfachen Grundaufgaben zu scheinbar sehr komplizierten Aufgaben gelangt: die Aufgabe M 9 ist ihrem Wesen

[67]) Vgl. Tabelle II (S. 319).

[68]) Selbstverständlich ist $A_2 = A_2' + A_2''$.

[69]) Was wieder nur aus der Rechnung zu ersehen ist (vgl. R 76).

nach eine Aufeinanderstellung von M 20 und R 76[70]), das seinerseits wieder nur eine Iterierung einer der Grundaufgaben (M 20) bedeutet[71]).

Während alle übrigen *pśw*-Aufgaben im wesentlichen nur die Bestimmung einer Unbekannten verlangen[72]), gibt M 24 zwei Gleichungen für zwei Unbekannte:

$$G \approx (A_1, p_1 = ?) + (A_2, p_2 = ?),$$

wobei p_1 und p_2 in gegebenem Verhältnis stehen sollen:

$$\alpha\, p_1 = p_2.$$

Wie (1) zeigt, entspricht dies

$$G = \frac{A_1}{x_1} + \frac{A_2}{x_2} \qquad \frac{x_2}{x_1} = \alpha$$

womit die Auflösung des Textes

$$p_1 = \left(\frac{1}{\alpha} A_2 + A_1\right) : G \qquad p_2 = \alpha\, p_1$$

übereinstimmt[73]). Eine Überlegung ganz analog der von R 72 (vgl. S. 320 f.) wird auch hier die eigentliche Ursache dieser Anlegung der Rechnung abgegeben haben.

Durch das Vorangehende ist (parallel zu Tabelle II S. 319) der mathematische Kern von *pśw*-Rechnungen beschrieben. Historisch genommen ist der Kreis damit sicher zu eng gezogen. Das zeigt etwa R 71, wo p dadurch geändert wird, daß $^1/_4$ des Volumens durch Wasser ersetzt werden soll, oder M 21, das aus A_1, g_1; A_2, g_2 einen mittleren Gehalt (pro Stück) des Gemisches durch

$$A_1\, g_1 + A_2\, g_2 = G$$
$$G : (A_1 + A_2) = g_m$$

berechnet. Die historisch richtige Anordnung wird demnach viel eher durch die Aufgabenfolge des Papyrus Rhind gegeben sein[74]), wo vor den eigentlichen „*pśw*-Rechnungen" die Brot- und Getreide-Verteilungsbeispiele R 63 bis 68 stehen[75]), darauf aber sofort die „geometrische

[70]) Nur zufällig mit dreierlei p_2 statt mit nur zweien wie R 76.

[71]) Vgl. die Übersicht in Tabelle II S. 319.

[72]) Die Bestimmung von g und p in R 69, R 70 geschieht wie in zwei unabhängigen Beispielen; R 74, R 76, M 9 (= M 13) zerfallen eigentlich auch in lauter Einzelaufgaben mit je einer Unbekannten, ganz abgesehen von der Voraussetzung gleicher Anzahlen in R 76 und M 9 (= M 13).

[73]) Wegen $x_1 G = A_1 + \frac{x_1}{x_2} A_2$. Gleichberechtigt wäre:

$$p_2 = (A_2 + \alpha A_1) : G \qquad p_1 = \frac{1}{\alpha}\, p_2.$$

[74]) In M geht alles bunt durcheinander.

[75]) Zum Teil sind sie schon in § 2 besprochen worden („Reihen").

Reihe“ R 79[76]) folgt, deren Summe eine Getreidemenge bedeutet, um dann ganz in Scheffel-Umrechnungen überzugehen. Wieder weist dies auf die Verschiedenheit der Einstellung hin: wir umgrenzen das zufällig mathematisch einheitliche Gebiet[77]) der „*pśw*-Rechnungen“, für den Ägypter war sie sicher nur ein aus sachlichen Gründen wichtiger Zweig seiner ganzen Agrar-Mathematik.

§ 4. Die ägyptische Arithmetik als Ganzes.

Die *pśw*-Rechnungen stehen schon hart an der Grenze gegen das große Gebiet der Wirtschaftstexte, die nur einer modernen stillen Konvention zufolge immer von den „mathematischen“ Texten getrennt gehalten werden, obwohl z. B. R 82 oder K 2 ganz offensichtlich zum Gebrauch der Wirtschaftsrechnung bestimmt ist. Sachlich hat man damit recht, denn an mathematischer Methodik ist aus diesen Texten nichts mehr zu lernen. Nur darf man nicht vergessen, sie bei der kulturgeschichtlichen Bewertung wieder als gleichberechtigte Zeugen neben die „mathematischen“ Papyri zu stellen. Statt dessen wird immer wieder versucht, die mathematischen Texte noch mehr von ihrer Umwelt zu isolieren und als „wissenschaftliche“ Texte zu behandeln.

Ich will natürlich nicht behaupten, daß die mathematischen Papyri mit den Wirtschaftstexten einfach zu identifizieren seien. Im Gegenteil: durch ihre sammelnde und auf das Erlernen der anzuwendenden Rechenverfahren gerichtete Tendenz gewinnen sie von selbst *den* Abstand von der Wirklichkeit, den jedes „Reglement“ und jedes „Unterrichtswerk“ von der Praxis besitzt. Dieser Abstand darf aber nicht mit dem zwischen allgemeiner Theorie und bloßer Praxis verwechselt werden und zum Beweise des „wissenschaftlichen“ Charakters der ägyptischen Mathematik dienen[78]).

Man tut der ägyptischen Mathematik mit dieser Postulierung ihrer „Wissenschaftlichkeit“ grobes Unrecht. Wären die Ägypter wirklich nach wissenschaftlichen Gesichtspunkten an mathematische Dinge herangegangen (etwa wie die Griechen an den Begriff des Strecken- und Zahlenverhältnis), so wäre es ein trauriges Zeichen ihrer Errungenschaften, wenn sie Dingen wie den *pśw*- und ‘*ḥ*‘-Rechnungen nicht in anderer Weise, als es uns die Texte zeigen, an den Leib rücken konnten — ganz abgesehen von der Art ihrer Bruchrechnung und sonstiger Rechentechnik. Die griechische Mißachtung aller „Logistik“ ist ein deutlicher Beweis

[76]) Vgl. oben S. 317.

[77]) Diese Einheitlichkeit ist bedingt durch die gemeinsamen Grundrelationen (1) und (2).

[78]) Zu diesem Thema vgl. auch meine Bemerkungen in Archiv NF Bd. 4 S. 94 ff.

dafür, daß schon die Wissenschaft der Antike sich weit über diese Methodik hinaus zu sein erachtete. Aber es ist nicht die Aufgabe des Historikers, die ägyptische Mathematik in irgend einem Sinne zu werten, sondern nur, ihre Rolle in der Entwicklungsgeschichte mathematischer Begriffsbildung zu erkennen.

Hier liegt der Kern des ganzen Problems, zu dessen Lösung ägyptische Arithmetik und Rechentechnik die Quellen liefern müssen[79]). Ich habe in den vorangehenden Paragraphen zu zeigen versucht, wie die wesentlichen Rechnungsarten der ägyptischen Arithmetik ersichtlich noch nicht zu einer einheitlichen mathematischen Methodik (etwa Proportionsbegriff) vorgedrungen sind, nirgends ihre Verbundenheit mit dem anschaulich Gegebenen verleugnen, selbst in den '$ḥ$'-Rechnungen nicht. Man darf sich darüber nicht wundern: es ist nicht zu erwarten, daß man bereits zu allgemeinen mathematischen Begriffsbildungen zu gelangen sucht, während noch die rechnerische Durchführung jeder einfachsten Aufgabe wesentliche Schwierigkeiten bereitet, solange insbesondere jede Rechnung mit Brüchen ein Problem ist. Man kann das Wesen der ägyptischen Arithmetik nicht historisch richtig erfassen, wenn man sie für sich betrachtet, und übersieht, daß die Schwierigkeit etwa eines einfachen *pśw*-Beispiels nicht z. B. in der Bestimmung von p aus $G = \frac{A}{p}$ liegt (wo doch jeder Schritt der Rechnung anschaulich verständlich ist), sondern in der reinen Technik des Umgehens mit den Zahlen, angefangen mit der Umsetzung der Angaben in bloße Zahlzeichen („Algorithmisierung"!) bis zur Umrechnung der Maßgrößen und ihrer Bruchteile ineinander und allem, was damit zusammenhängt. Nicht in der Gewinnung von Methoden zur „Bestimmung von Unbekannten", die einer gegebenen „Gleichung" genügen, liegt das Ziel der ägyptischen Mathematik, sondern in der Beherrschung der Zahlen. Ihre geschichtliche Bedeutung liegt in der Tatsache, daß es ihr gelungen ist, vom primitiven Anzahlbegriff (dem der ganzen Zahlen) zu einer wirklichen Bruchrechnung vorzudringen, oder kraß ausgedrückt: den Bereich der ganzen (positiven) Zahlen zu dem der rationalen (positiven) erweitert zu haben.

Den Weg, auf dem dies geschehen ist, wenigstens in großen Zügen zu erkennen, muß die Aufgabe des Folgenden sein. Alle seine Schwierigkeiten (auf welche Weise immer) überwunden zu haben, ist für die intellektuelle Kraft eines Volkes höher zu werten, als die Existenz einer unzureichenden Theorie über einfache Zusammenhänge. Als Quelle aber

[79]) Die Geometrie als solche scheidet fast aus, weil es bei dem gegenwärtigen Stand der Überlieferung so gut wie unmöglich ist, über die Entwicklung der geometrischen Begriffsbildung (oder gar „Beweis"-Methode) etwas Zusammenhängendes auszusagen.

und Beispiel für die Entwicklung der grundlegendsten arithmetischen Begriffe ist die ägyptische Rechentechnik von einzigartiger Bedeutung[80]).

Kapitel II.

Entstehung und Praxis der ägyptischen Rechentechnik.

§ 5. Allgemeines. Problemstellung.

Das ägyptische System der ganzen (positiven) Zahlen ist dezimal, mit Individualzahlzeichen für die einzelnen Zehnerpotenzen und streng additiver Verknüpfung innerhalb jeder Stufe und der Stufen untereinander.

Beispiel: ∩∩ ||||| 10, 10, 1, 1, 1, 1, 1 (= 25).

Addition und Subtraktion (Resultat $\geqq 0$)[81]) ist bei diesem System trivial; ebenso Multiplikation mit 10. Jede andere Vervielfachung geschieht durch iteriertes Verdoppeln und geeignetes Zusammenfassen, durch / hervorgehoben (d. h. „dyadisches Entwickeln" des einen Faktors), sofern sie nicht manchmal durch Verzehnfachen und Halbieren abgekürzt wird.

Beispiele[82]):

R 32			**R 69**			**K 6**		
	1	12		1	80		/ 1	16
(12.12)	2	24	(14.80)	/ 10	800	(16.16)	/ 10	160
	/ 4	48		2	160		/ 5	80
	/ 8	96		/ 4	320	zusammen		256
zusammen		144	zusammen		1120			

Ein Beispiel von Rechnungsverkürzung durch Subtraktion („dekadische Ergänzung" $8 = 10 - 2$) ist mir nicht bekannt, was für den primitiv-

[80]) Sie übertrifft als Material einer solchen Analyse bei weitem die babylonische Rechentechnik, weil sie in ihrer ganzen Umständlichkeit gerade die wesentlichen Schwierigkeiten erkennen läßt. Durch das Vorherrschen des Positionellen im babylonischen Zahlensystem sind alle derartigen Züge viel mehr verwischt, manche prinzipielle Schwierigkeit des additiven Systems nie aufgetaucht. — Das mathematische Niveau der babylonischen Mathematik ist ein ungleich höheres als das der ägyptischen, nicht zuletzt eben wegen der Überlegenheit des rein Rechentechnischen.

[81]) Für den Fall der „Null" als Subtraktionsresultat geben die mathematischen Papyri keinen Aufschluß, wohl aber die Wirtschaftstexte. So steht beispielsweise in den Abrechnungen des Pap. Boulaq 18 (vgl. ÄZ 57, 1922, S. 51ff.) in der mit „Rest" (*d3.t*, wie in R und M) bezeichneten Zeile, die den Unterschied zwischen Eingängen und Leistungen betrifft, einfach „gut" (*nfr*), wenn nichts übrig bleibt (z. B. in XXVII, 15). In den Inschriften aus Edfu (Brugsch, Thes. 3 z. B. V, 7) tritt das Negationszeichen *n* (det. durch den „schlechten Vogel") „nichts" an dessen Stelle (bei den Dreiecken, die als Trapez mit einer Seite „Null" angesehen werden).

[82]) Die linke Kolonne solcher Rechnungen soll im folgenden kurz als Reihe der „*Kennziffern*" bezeichnet werden.

additiven Charakter dieser Multiplikationsmethode charakteristisch ist. Dagegen sind Verstöße gegen Vereinfachungsmöglichkeiten auf Grund des kommutativen Gesetzes äußerst selten[83]) und meist durch die gegenständliche Bedeutung der Zahlen zu erklären. In C scheint der Sinn der dortigen Rechnungen zum Teil geradezu in der Vorführung beider Möglichkeiten zur Bildung eines Produktes ab und ba zu liegen (vgl. Anhang 6 zu § 6).

„Quadrieren" erfolgt wie jede andere Multiplikation durch fortgesetztes Verdoppeln (vgl. oben R 32). Eine besondere Rechenweise zur Bestimmung der Quadratwurzel ist nicht erhalten. Alle Beispiele[84]) beschränken sich auf reine Quadrate relativ kleiner Zahlen als Radikanden, liefern also ein rationales Resultat. Ich halte es für möglich, daß tatsächlich kein besonderer Algorithmus zum Wurzelziehen existierte, sondern daß man eben die einfachsten Quadratzahlen als solche kannte und in den Schulbeispielen benutzte.

Von den Brüchen existieren für 1/2, 1/4, 1/3 und 2/3 besondere Zeichen[85]); für alle $n > 4$ wird $1/n$ durch Vorsetzen von *r3* (das hier „Teil" bedeutet) vor das Zahlzeichen von n geschrieben. Für andere Brüche als die genannten („*Stammbrüche*") sind keine Zeichen bekannt. Nebeneinanderschreiben von Brüchen bedeutet ihre additive Verknüpfung[86]).

R 25

	/ 1	3	
	2	6	
(16:3)	/ 4	12	
	$\bar{\bar{3}}$	2	
	/ $\overline{3}$	1	Resultat: $5+\overline{3}$

[83]) Vielleicht R 26:

1	3			
2	6	statt	/ 1	4
/ 4	12		/ 2	8

[84]) B 1: $\sqrt{1+\overline{2}+\overline{16}} = 1+\overline{4}$ (der Text hat irrtümlich $1+\overline{2}+\overline{4}+\overline{16}$ als Radikand!)

B 3: $\sqrt{6+\overline{4}} = 2+\overline{2}$

K 1: $\sqrt{16} = 4$

M 6: $\sqrt{16} = 4$

M 7: $[\sqrt{100} =]\ 10$

M 17: $\sqrt{100} = 10$.

Es sind also nur 4, 16, 25 und 100 als Quadratzahlen ausgenutzt.

[85]) Über ein altes Zeichen für 3/4 vgl. Sethe, ZZ S. 98ff. Ferner Gardiner, Gram. S. 197 und OLZ 32 (1929), 234.

[86]) Zur Vermeidung von Mißverständnissen setze ich abweichend vom Text immer + bei additiver Verknüpfung.

Die „Division" von a durch b wird genau in der durch die ägyptische Formulierung „addiere angefangen mit b bis zur Auffindung von a" beschriebenen Weise durchgeführt:
D. h. man approximiert den Dividend so weit als möglich nach der dyadischen Methode und ergänzt den Rest durch Bruchteile des Divisors. Bei diesem Ergänzen geht man entweder rein dyadisch vor, indem man $\bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \ldots$ nimmt („*1/2-Reihe*"), oder ähnlich von $\bar{\bar{3}}$ aus: $\bar{\bar{3}}, \bar{3}, \bar{6}, \ldots$ („*2/3-Reihe*"), oder unter Verwendung von $\overline{10}$, alles in ersichtlicher Analogie zum Rechnen mit ganzen Zahlen.

Beispiele:

R 24

	1	8
(19:8)	/2	16
	$\bar{2}$	4
	/$\bar{4}$	2
	/$\bar{8}$	1
Resultat	$2+\bar{4}+\bar{8}$	

R 32[87])

	1	$1+\bar{\bar{3}}+\bar{4}$
$(2:(1+\bar{\bar{3}}+\bar{4}))$	/ $\bar{\bar{3}}$	$1+\overline{18}$
	/ $\bar{3}$	$\bar{2}+\overline{36}$
	/ $\bar{6}$	$\bar{4}+\overline{72}$
	/ $\overline{12}$	$\bar{8}+\overline{144}$

R 21

	1	15
(4:15)	$\overline{10}$	$1+\bar{2}$
	/ $\bar{5}$	3
	/ $\overline{15}$	1
Resultat	$\bar{5}+\overline{15}$	

Diese Divisionsmethode ist hinsichtlich der Bruchbestandteile des Resultats natürlich nicht eindeutig — je nach Wahl von $^1/_2$-, $^2/_3$- oder anderen Reihen von Bruchteilen kann es sehr verschiedenes Aussehen bekommen[88]). Die gewohnheitsmäßige Bevorzugung von $^1/_2$- und $^2/_3$-Reihe hat aber zur Folge, daß in praxi die Zahl der Möglichkeiten sehr reduziert wird. Auch beim Dividieren wird von der Subtraktion zur Abkürzung von Rechnungen nie Gebrauch gemacht.

Während die sogenannten „4 Spezies" ganz auf ein sehr primitives (wenn auch logisch vollkommen einwandfreies[89])) Verfahren rein additiven Rechnens reduziert sind, könnte die eigentliche Bruchrechnung zunächst einen wesentlich weiterentwickelten Eindruck machen, etwa wenn in R 38 ohne weiteres das Doppelte von $\bar{6}+\overline{11}+\overline{22}+\overline{66}$ als $\bar{2}+\overline{11}+\overline{33}+\overline{66}$ angegeben wird. Aber es ist kein Zweifel, daß auch hier nicht etwa die Gleichheit von $2(\bar{6}+\overline{11}+\overline{22}+\overline{66})$ und $\bar{2}+\overline{11}+\overline{33}+\overline{66}$ direkt übersehen wird: dahinter steht vielmehr nur die Anwendung von festen Regeln, um aus einem Stammbruch (wie $\overline{11}$) das Doppelte zu bilden, deren Gesamtheit ich als „$2/n$-Tabelle" bezeichne. Eine solche Rela-

---

87) Hier nur der Anfang der Rechnung reproduziert. Für ihre gänzliche Durchführung („Hilfszahlenalgorithmus") vgl. § 6 S. 340.

88) Etwa so wie unser $9:4 = 2^1/_4$ oder 2,25.

89) Dies ist ausdrücklich gegen manche der üblichen Darstellungen zu betonen. Insbesondere ist die Division so wenig wie unsere weder „tastend" (Hultsch u. a.) noch gar „angenähert" (Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik² I [1921] S. 51 u. a.).

tionensammlung findet sich sowohl zu Beginn von R wie von K und ist überdies in allen anderen Texten bei Stammbruchverdopplungen angewandt. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß man sie so (zum großen Teil sicher auswendig) zur Hand haben mußte, wie wir das „Einmaleins". Dann ist die zitierte Rechnung in R 38 auch kein Wunder mehr, denn nach dieser $2/n$-Tabelle ist $2/11 = \overline{6} + \overline{66}$, so daß (abgesehen von reinen Verdopplungen) nur das Zusammenziehen von $\overline{3} + \overline{6}$ in $\overline{2}$ bleibt, was ebenfalls, wie sich leicht nachprüfen läßt, zu den meistgebrauchten festen Regeln des ägyptischen Bruchrechnens gehört[90]).

So naheliegend die Sammlung von Regeln zur Bildung von $2/n$ aus $1/n$ bei der ausschließlichen Verdopplungsmethodik des ägyptischen Rechnens auch ist, so ist für das Verständnis der Bruchrechnung mit dem Hinweis auf diese $2/n$-Tabelle die Fragestellung nur verschoben, wenn auch wesentlich schärfer zu umgrenzen: woher kommt nun diese $2/n$-Tabelle mit so komplizierten Stammbruchdarstellungen wie z. B. $2/61 = \overline{40} + \overline{244} + \overline{488} + \overline{610}$? Wie kann man mit den sonst zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln derartige Relationen gewonnen haben? Warum ist gerade diese statt beliebig vieler anderer Zerlegungen gewählt?

Das Bild kompliziert sich noch: mit der Verdopplung ist es nicht getan, denn damit wird zwar das Vervielfachen von Stammbrüchen erledigt, nicht aber das Addieren verschiedener Brüche[91]). Auch hier scheint man unerwartet weit zu sein, wenn etwa R 30 einfach konstatiert wird, daß

$$\overline{\overline{3}} + \overline{46} + \overline{138} + \overline{5} + \overline{10} + \overline{230} = 1$$

ist. Und endlich scheint ein Beispiel wie R 22

$$\begin{array}{cccc} \overline{\overline{3}} + & \overline{5} + & \overline{10} + & \overline{30} = 1 \\ \mathbf{20} & \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{array}$$

mit den rot unter[92]) die Brüche geschriebenen „*Hilfszahlen*" zu zeigen, daß es sich bei solchen Additionen genau um das handelt, was wir Einführen des „kleinsten gemeinsamen Nenners" nennen.

Aber so einfachen Kaufes kommt man doch wieder nicht davon. Denn einerseits ist der Kontrast zwischen der Primitivität des Rechnens mit ganzen Zahlen und der Bruchrechnung nur noch fühlbarer geworden, andererseits zeigen andere Beispiele, daß sich das Rechnen mit Hilfs-

---

[90]) Vgl. Anhang 3 zu § 7 S. 369f.

[91]) Das Multiplizieren von Stammbrüchen miteinander ist nur durch die Bruchbezeichnung *r3* von der Multiplikation ganzer Zahlen verschieden, da ja $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{c}$ ist, wenn $a \cdot b = c$. Daher passieren auch leicht Fehler wie R 43, wo $\overline{45}$ als Hälfte von $\overline{90}$ angegeben wird, statt $\overline{180}$.

[92]) Nur aus Platzgründen werden im folgenden diese Hilfszahlen des öfteren neben statt unter die zugehörigen Brüche gesetzt.

zahlen doch nicht so eindeutig als Einführung des „kleinsten gemeinsamen Nenners“ auffassen läßt. So wird R 33 konstatiert, daß sich

$$\begin{array}{ccccccc} 36 + \bar{\bar{3}} & + & \bar{4} & + \overline{28} & \text{und} & \overline{28} & + \overline{84} \\ \mathbf{3621 + \bar{3}} & & \mathbf{1358} & \mathbf{194} & & \mathbf{194} & \mathbf{64 + \bar{\bar{3}}} \end{array}$$

zu 37 ergänzen, wo also die Hilfszahlen einem gemeinsamen Nenner 5432 entsprechen würden, in dem sich aber weder 2/3 noch 1/84 ganzzahlig ausdrücken lassen, während bereits 84 der richtige Nenner wäre — wobei noch vollkommen unklar bleibt, wie man sich von der Richtigkeit der Zuordnung zwischen den einzelnen Brüchen und ihren Hilfszahlen ohne die umständlichsten Rechnungen überzeugen konnte, die aber in auffallendem Gegensatz zu der sonstigen Vorführung auch der trivialsten Multiplikationen einfach weggelassen sein müßten.

So treten allmählich drei innerlich eng zusammenhängende Problemgruppen hervor:

1. Einer großen Primitivität im Rechnen steht eine Bruchrechnung gegenüber, deren Ausdehnung und Kompliziertheit einer wesentlich fortgeschritteneren Entwicklungsphase zu entsprechen scheinen, wenn auch wieder die absolute Beschränkung auf Stammbrüche dazu nicht passen will.

2. Das technische Hilfsmittel der Bruchrechnung, die 2/n-Tabelle, hebt aus der unendlichen Menge von prinzipiell gleichberechtigten Zerlegungen jeweils eine kanonisch einzig zulässige heraus[93]. *Frage: Woher stammt gerade diese Auswahl und wie sind die zugehörigen Berechnungen erstmalig zustande gekommen?*

3. Welches ist die Technik, die bei der tatsächlichen Durchführung von Bruchrechnungen zur Anwendung kommt, welches ist insbesondere Sinn und Methode der Hilfszahlenrechnung?

Die moderne Interpretation der ägyptischen Mathematik hat sich hauptsächlich mit dem zweiten Problem, der Berechnung der $2/n$-Tabelle, beschäftigt, hat allerdings dabei auch die Hilfszahlenrechnung mit in Betracht gezogen. So gut wie ganz ist sie dagegen über die in der ersten Frage berührten Schwierigkeiten hinweggegangen. So kann man beispielsweise immer wieder lesen, daß der Ägypter nur mit 2 und 10 direkt hätte multiplizieren können. Nichtsdestoweniger wird ohne Bedenken zur Erklärung der $2/n$-Zerlegungen die Rücksichtnahme auf die Primzahlzerlegung von n postuliert, was doch einen eklatanten Widersinn in sich schließt. Demgegenüber scheint mir eine Erklärung der $2/n$-Tabelle nicht eher befriedigend zu sein, als bis man imstande ist, sie *ausschließlich*

[93]) In der Tat sind sämtliche $2/n$-Darstellungen, die uns in den uns überlieferten Texten begegnen, ausschließlich nach diesen kanonischen Zerlegungen vorgenommen.

unter Beschränkung auf die überlieferte ägyptische *Rechenweise* zu verstehen. Das Material hierzu kann und darf allein den ägyptischen Texten entnommen werden, ohne Hinzufügung moderner Begriffsbildungen, die mit den charakteristischen Eigentümlichkeiten des ägyptischen Rechnens nichts zu tun haben. Die aus der ganzen ägyptischen Kulturgeschichte immer wieder hervortretenden Eigentümlichkeiten des zähen Bewahrens aller Rudimente der Entwicklung auch noch in viel späteren Phasen läßt es erhoffen, auch in mathematischen Dingen eine einheitliche Entwicklungslinie nachweisen zu können, als deren Endprodukt dann diejenige Mathematik erscheinen muß, die uns in der Blüteperiode der ägyptischen Literatur vorliegt.

Die anzuwendende Arbeitsmethode wird daher die sein, daß ich zunächst von der Technik der ägyptischen Bruchrechnung ausgehe, um von da aus die Methoden kennen zu lernen, die bei der Berechnung der $2/n$-Tabelle Anwendung gefunden haben können. Wenn dies geleistet worden ist, muß die scheinbare Diskrepanz zwischen Primitivität einerseits und Kompliziertheit andererseits von selbst weggefallen sein.

§ 6. Die Technik der Bruchrechnung. Die „Hilfszahlen".

Unserem Programm entsprechend stellen wir uns zunächst auf den Standpunkt der erhaltenen Texte[94]) und betrachten die $2/n$-Tabelle als gegebenes Hilfsmittel der Bruchrechnung, ohne nach ihrer Entstehungsgeschichte zu fragen.

Ich beginne mit den einfachen Bruchmultiplikationen R 7 bis R 20. Hier sind es gerade die „Hilfszahlen", die es ermöglichen, den inneren Zusammenhang zwischen diesen anscheinend wahllos hingestellten Beispielen zur Bruchrechnung herzustellen. Gleichzeitig werden aber so scheinbar sinnlose Hilfszahlenfolgen wie die in R 14[95]) ($\overline{28}\cdot(1+\overline{2}+\overline{4})$,

1	$\overline{28}$	**1**
$\overline{2}$	$\overline{56}$	**2**
$\overline{4}$	$\overline{112}$	**4**
zusammen	$\overline{16}$	

die sich von den „Kennziffern" links nur durch die rote Farbe unterscheiden, erklärt: Wie bei einer Multiplikation die einzelnen Teilprodukte nach dem durch die Kennziffern angegebenen Gesetz zusammen-

[94]) Dabei fällt M beinahe ganz aus, da seine Beispiele zahlenmäßig ungleich einfacher sind als die von R.

[95]) Für die Verbesserung eines Schreibfehlers des Textes an dieser Stelle vgl. ÄBR S. 26.

Tabelle III.

R 7 bis R 20.

R 11

1	$\overline{7}$	[**4**]
$\overline{2}$	$\overline{14}$	[**2**]
$\overline{4}$	$\overline{28}$	[**1**]
zus.	$\overline{4}$	

R 12

1	$\overline{14}$	[**2**]
$\overline{2}$	$\overline{28}$	[**1**]
$\overline{4}$	$\overline{56}$	[$\overline{\mathbf{2}}$]
zus.	$\overline{8}$	

R 14

1	$\overline{28}$	**1**
$\overline{2}$	$\overline{56}$	$\overline{\mathbf{2}}$
$\overline{4}$	$\overline{112}$	$\overline{\mathbf{4}}$
zus.	$\overline{16}$	

R 9

1	$\overline{2}$	+	$\overline{14}$
	[**14**]		[**2**]
$\overline{2}$	$\overline{4}$	+	$\overline{28}$
	[**7**]		[**1**]
$\overline{4}$	$\overline{8}$	+	$\overline{56}$
	[**3** + $\overline{\mathbf{2}}$]		[$\overline{\mathbf{2}}$]
zusammen	1		

R 7, R 7b, R 10

1	$\overline{4}$	+	$\overline{28}$
	7		**1**
$\overline{2}$	$\overline{8}$	+	$\overline{56}$
	3 + $\overline{\mathbf{2}}$		$\overline{\mathbf{2}}$
$\overline{4}$	$\overline{16}$	+	$\overline{112}$
	1 + $\overline{\mathbf{2}}$ + $\overline{\mathbf{4}}$		$\overline{\mathbf{4}}$
zusammen	$\overline{2}$		

[1	$\overline{8}$	+	$\overline{56}$
	3 + $\overline{\mathbf{2}}$		$\overline{\mathbf{2}}$
$\overline{2}$	$\overline{16}$	+	$\overline{112}$
	1 + $\overline{\mathbf{2}}$ + $\overline{\mathbf{4}}$		$\overline{\mathbf{4}}$
$\overline{4}$	$\overline{32}$	+	$\overline{224}$
	$\overline{\mathbf{2}}$ + $\overline{\mathbf{4}}$ + $\overline{\mathbf{8}}$		$\overline{\mathbf{8}}$
zusammen	$\overline{4}$]		

R 13

1	$\overline{16}$	+	$\overline{112}$
	1 + $\overline{\mathbf{2}}$ + $\overline{\mathbf{4}}$		$\overline{\mathbf{4}}$
$\overline{2}$	$\overline{32}$	+	$\overline{224}$
	$\overline{\mathbf{2}}$ + $\overline{\mathbf{4}}$ + $\overline{\mathbf{8}}$		$\overline{\mathbf{8}}$
$\overline{4}$	$\overline{64}$	+	$\overline{448}$
	$\overline{\mathbf{4}}$ + $\overline{\mathbf{8}}$ + $\overline{\mathbf{16}}$		$\overline{\mathbf{16}}$
zusammen	$\overline{8}$		

R 15

1	$\overline{32}$	+	$\overline{224}$
	$\overline{\mathbf{2}}$ + $\overline{\mathbf{4}}$ + $\overline{\mathbf{8}}$		$\overline{\mathbf{8}}$
$\overline{2}$	$\overline{64}$	+	$\overline{448}$
	$\overline{\mathbf{4}}$ + $\overline{\mathbf{8}}$ + $\overline{\mathbf{16}}$		$\overline{\mathbf{16}}$
$\overline{4}$	$\overline{128}$	+	$\overline{896}$
	$\overline{\mathbf{8}}$ + $\overline{\mathbf{16}}$ + $\overline{\mathbf{32}}$		$\overline{\mathbf{32}}$
zusammen	$\overline{16}$		

R 16

1	$\overline{2}$	[**9**]
$\overline{\overline{3}}$	$\overline{3}$	[**6**]
$\overline{3}$	$\overline{6}$	[**3**]
zus.	1	

R 17

1	$\overline{3}$	[**6**]
$\overline{\overline{3}}$	$\overline{6}+\overline{18}$	[**4**]
$\overline{3}$	$\overline{9}$	[**2**]
zus.	$\overline{\overline{3}}$	

R 8[1]

1	$\overline{4}$	**4** + $\overline{\mathbf{2}}$
$\overline{\overline{3}}$	$\overline{6}$	**3**
$\overline{3}$	$\overline{12}$	**1** + $\overline{\mathbf{2}}$
zus.	$\overline{2}$	**9**

R 18

1	$\overline{6}$	[**3**]
$\overline{\overline{3}}$	$\overline{9}$	[**2**]
$\overline{3}$	$\overline{18}$	[**1**]
zus.	$\overline{3}$	

R 19

1	$\overline{12}$	**1** + $\overline{\mathbf{2}}$
$\overline{\overline{3}}$	$\overline{18}$	**1**
$\overline{3}$	$\overline{36}$	$\overline{\mathbf{2}}$
zus.	$\overline{6}$	

R 20

1	$\overline{24}$	$\overline{\mathbf{2}}$ + $\overline{\mathbf{4}}$
$\overline{\overline{3}}$	$\overline{36}$	$\overline{\mathbf{2}}$
$\overline{3}$	$\overline{72}$	$\overline{\mathbf{4}}$
zus.	$\overline{12}$	

[1]) Entweder durch Halbieren aus R 16 oder durch Addition von R 18 und R 19 zu gewinnen ($\overline{2} = \overline{3} + \overline{6}$).

hängen[96]), so gehen hier die ganzen Rechnungen, einschließlich ihrer Hilfszahlen, auseinander gemäß dem dyadischen Schema hervor (vgl. die drei Gruppen in Tabelle III[97]), S. 331). So ist etwa in R 11, R 12, R 14 die Folge der Ergebnisse $\overline{4}$, $\overline{8}$, $\overline{16}$, denen als Anfangszahlen $\overline{7}$, $\overline{14}$, $\overline{28}$ entsprechen und zu denen die Hilfszahlen [**4**], [**2**], **1** gehören, so daß die Hilfszahlenfolge in der Ausgangsrechnung R 11 *ganzzahlig* und *gegenläufig* zu den Kennziffern wird[98]).

Schon die einfache Beispielgruppe von Tabelle III zeigt also mit aller Deutlichkeit zweierlei: erstens, daß unter Umständen der Hilfszahlenalgorithmus in der Bruchrechnung auch an Stellen rekonstruiert werden muß, wo er bei dem zufälligen Textzustand fehlt[99]) — die Hilfszahlen von R 14 wären sinnlos ohne die von R 12 und R 11, ebenso die von R 8 ohne R 16 usw.; zweitens: das Hilfszahlenschema einer einzelnen Bruchaddition darf nicht für sich betrachtet werden, sondern hängt vollkommen von der Struktur der Gesamtaufgabe ab — wäre R 15 nicht das letzte Glied einer ganzen Serie von Beispielen, so würde man zur Addition: $\overline{32} + \ldots + \overline{896} = \overline{16}$ ganz andere Hilfszahlen genommen haben, als die vom Standpunkt des „gemeinsamen Nenners" ganz sinnlosen Brüche ($\mathbf{\overline{2} + \overline{4} + \overline{8}}$) $+ \ldots +$ $\mathbf{\overline{32}}$.

Diese „Relativität" des Hilfszahlensystems ist das erste wesentliche Ergebnis. Es ist aber nicht, wie es scheinen könnte, nur negativer Natur: die Erkenntnis, daß Hilfszahlen durch den Rechnungsprozeß einfach mit transformiert werden, bietet auch die Handhabe, um nun rückläufig den Ausgangspunkt des Schemas und damit seine ursprüngliche Struktur zu gewinnen: R 14 hat für sich genommen sinnlose Hilfszahlen — die von R 11 lauten aber [**4**], [**2**], [**1**] zu $\overline{7}$, $\overline{14}$, $\overline{28}$, sind also ganzzahlig und so beschaffen, daß $\overline{28}$ die **1** zugeordnet wird[100]), d. h., *der kleinste Bruch*

---

[96]) z. B. R 34:

$$\begin{array}{ll} 1 & 1+\overline{2}+\overline{4} \\ 2 & 3+\overline{2} \\ 4 & 7 \qquad \text{usw.} \end{array}$$

[97]) Dieser Zusammenhang wurde unabhängig voneinander von Gunn (JEA 12 S. 30) und mir (ÄBR Kapitel II § 3) bemerkt.

[98]) Für die Einzelheiten der Ergänzung vgl. Neugebauer, ÄBR Kapitel II § 3. Durch Chase RMP 1 S. 63 und 2 Pl. 40 ist jetzt sichergestellt, daß R 9 im Original in Ordnung ist.

[99]) Bei R ist ja in der Einleitung selbst gesagt, daß es sich um eine Abschrift handelt — bei den übrigen Texten war es sicher nicht anders.

[100]) Ähnlich ist in der zweiten Reihe von Tabelle III S. 331 die erste Zeile von R 7 der Ausgangspunkt des Hilfszahlenschemas:

$$\begin{array}{cc} \overline{4} + & \overline{28} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1}. \end{array}$$

Dies wird nun zunächst in die Zeilen 2 und 3 mittransformiert, dann aber R 7 als Ganzes einerseits bis R 9, andererseits bis R 15 schrittweise abgeändert. Für die 3. Reihe von Tabelle III ist R 18 der Ausgangspunkt.

der Reihe erscheint als neue Einheit, auf die die anderen bezogen werden[101]). Offenbar hat man hier den Kern des Verfahrens in Händen. *Wenn* sich die größeren Brüche durch den kleinsten ganzzahlig auszählen lassen (was bei der dyadischen Bildungsmethode solcher Zahlenreihen oft genug eintreten wird), so ist dies der Einführung des kleinsten gemeinsamen Nenners dem Erfolg nach äquivalent, dem mathematischen Gehalte nach aber streng davon zu scheiden, denn diese Methode hat nichts mit der Aufsuchung der geeigneten Faktoren zu tun, die in der Forderung der ganzzahligen Ausdrückbarkeit aller Summanden durch die neue Einheit gelegen ist[102]): bleibt ja doch bei der ägyptischen Methode, den kleinsten Bruch gleich **1** zu setzen, immer offen, daß anderen Summanden Bruchteile dieser Einheit zugeordnet werden müssen. Das Folgende wird zeigen, daß dieser Fall in der Tat oft vorkam.

Reiches Material zur Untersuchung des Rechnens mit Hilfszahlen geben die ‘ḥ‘-Rechnungen von R. So führt deren einfachste Gruppe

R 25

$x + \bar{2}x = 16$

$1 \quad \bar{2}$

$\mathbf{2} + \mathbf{1} = \mathbf{3}$

$16 : 3 = 5 + \bar{3}$

$(5 + \bar{3}) \cdot 2 = 10 + \bar{\bar{3}} = x$

R 26

$x + \bar{4}x = 15$

$\mathbf{4} + \mathbf{1} = \mathbf{5}$[103])

$15 : 5 = 3$

$3 \cdot 4 = 12 = x$

R 27

$x + \bar{5}x = 21$

$1 \quad \bar{5}$

$\mathbf{5} + \mathbf{1} = \mathbf{6}$

$21 : 6 = 3 + \bar{2}$

$(3 + \bar{2}) \cdot 5 = 17 + \bar{2} = x$

R 24

$x + \bar{7}x = 19$

$1 \quad \bar{7}$

$\mathbf{7} + \mathbf{1} = \mathbf{8}$

$19 : 8 = 2 + \bar{4} + \bar{8}$

$(2 + \bar{4} + \bar{8}) \cdot 7 = 16 + \bar{2} + \bar{8} = x$

beim „Ausklammern“ von x (vgl. § 1) auf eine sehr typische Form der Hilfszahlenzuordnung[104]), nämlich $\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{n} \\ \bar{n} & \mathbf{1} \end{smallmatrix}$. Die rechte Seite wird dann zunächst durch $\mathbf{n} + \mathbf{1}$ dividiert und danach mit $\mathbf{n}$ multipliziert[105]) — hier

---

[101]) Hultsch hat dafür den treffenden Namen „Hilfseinheiten“ eingeführt, aber nicht die zentrale Rolle erkannt, die dieser Methode für die Einsicht in den begrifflichen Aufbau der ägyptischen Bruchrechnung zukommt.

[102]) Auch das an Hand von Tabelle III (S. 331) geschilderte Mittransformieren von Hilfszahlen ist ja sachlich vollkommen unsinnig und zeigt, wie sehr der rein schematische Formalismus sachliches Verständnis überwogen hat.

[103]) Die Zahlen $\begin{smallmatrix} 1 & \bar{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{smallmatrix}$ sind hier durch die Worte: „addiere angefangen mit 4; nimm ihr 4-tel; gleich 1; zusammen 5“ ersetzt.

[104]) Im Text sind hier die Hilfszahlen nicht rot geschrieben wie sonst üblich. Dies hat natürlich um so weniger zu besagen, als die rote Farbe auch bei anderen wichtigen Zahlen verwandt wird und keineswegs ein absolutes Kriterium für Hilfszahlen der Bruchrechnung darstellt. Vgl. Anm. 113 S. 336.

[105]) Natürlich immer nach dyadischer Methode.

ist ja im Erfolg der Hilfszahlenalgorithmus genau der Ersetzung von $x + \bar{n}\,x = a$ durch $\frac{n+1}{n}\,x = a$ äquivalent.

Mit der bloßen Konstatierung dieser Tatsachen wird man aber der Bedeutung des Hilfszahlenrechnens nicht gerecht — denn diese Hilfszahlen treten keineswegs immer dort auf, wo wir etwa mit „gemischten Brüchen" (Zähler > 1) rechnen würden; sie haben vielmehr im Laufe einer größeren Rechnung die besondere Funktion von „Kontrollorganen" in folgendem Sinne: R 33 ist als $x + \bar{\bar{3}}\,x + \bar{2}\,x + \bar{7}\,x = 37$ zu umschreiben. Man könnte erwarten, daß durch Einführung von Hilfszahlen $1 + \bar{\bar{3}} + \bar{2} + \bar{7}$ als gleichwertig mit **97** 42-teln erkannt wird, um dann x aus $\frac{42 \cdot 37}{97}$ zu berechnen. In Wirklichkeit verfährt man ganz anders: Man „dividiert" 37 direkt durch $1 + \bar{\bar{3}} + \bar{2} + \bar{7}$ und nicht durch den zugeordneten gemischten Bruch $\frac{97}{42}$:

1	$1 + \bar{\bar{3}} + \bar{2} + \bar{7}$
2	$4 + \bar{3} + \bar{4} + \overline{28}$[106]
4	$9 + \bar{6} + \overline{14}$[107]
8	$18 + \bar{3} + \bar{7}$
/ 16	$36 + \bar{\bar{3}} + \bar{4} + \overline{28}$[106]
	28 + 10 + $\bar{2}$ + 1 + $\bar{2}$ = 40.

Nur in der letzten Zeile kommen Hilfszahlen vor; man erhält sie unmittelbar, wenn man in der ersten Zeile [**42** + **28** + **21** + **6** = **97**] ergänzt[108]) und den Kennziffern entsprechend von Zeile zu Zeile fortschreitet[109]). Also: obwohl man in der ersten Zeile genau die Hilfszahlen hatte, die den Koeffizienten von x als $\frac{97}{42}$ erkennen lassen könnten, verwendet man sie nicht zur multiplikativen Bestimmung von $x = \frac{42 \cdot 37}{97}$,

[106]) $2/n$-Tabelle: $\bar{7} + \bar{7} = \bar{4} + \overline{28}$.

[107]) Wegen der Relation: $\bar{\bar{3}} = \bar{2} + \bar{6}$.

[108]) Wie es übrigens bei gleichen Zahlen in R 31 explizite steht. Woher man diese Zahlen hatte (sie entsprechen offenbar dem richtigen kleinsten gemeinsamen Nenner 42) ist eine Frage für sich (vgl. S. 340).

[109]) Der Verlauf einer solchen Rechnung ist:

1	$1 + \bar{\bar{3}} + \bar{2} + \bar{7}$
	28 21 6
2	$4 + \bar{3} + \bar{4} + \overline{28}$
	14 10 + $\bar{2}$ 1 + $\bar{2}$
4	$9 + \bar{6} + \overline{14}$
	7 3
8	$18 + \bar{3} + \bar{7}$
	14 6
16	$36 + \bar{\bar{3}} + \bar{4} + \overline{28}$
	28 10 + $\bar{2}$ 1 + $\bar{2}$

sondern nur dazu, um festzustellen, wie weit man sich durch das schrittweise Verdoppeln bereits dem Endziele 37 der eigentlichen Division genähert hat. Bei komplizierten Rechnungen ist es ja gar nicht so einfach zu übersehen, wie weit man sich dem erstrebten Resultat schon genähert hat, wenigstens so weit es sich um den Bruchbestandteil dreht. Gerade hier greift nun die Kontrolltätigkeit der Hilfszahlen ein. Der ganzzahlige Bestandteil der letzten Zeile, 36, liegt schon nahe bei 37: wieviel fehlt noch von dem Bruchbestandteil $\overline{\overline{3}} + \overline{4} + \overline{28}$ gegen die letzte Einheit? „Rest **2**" sagt der Text; d. h. offenbar, daß wegen $\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{42} \\ \overline{42} & \mathbf{1} \end{array}$ noch **2** 42-tel fehlen, um dieses 1 voll zu machen. Die erste Zeile enthielt **97** Hilfseinheiten, also muß man $\overline{97}$ bilden, um **1** zu produzieren, d. h. 2/97 für die erwünschte **2**. Daher im Text:

$$\begin{array}{lll} \overline{97} & \overline{42} & \mathbf{1} \\ /\ \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}\,^{110)} & \overline{21} & \mathbf{2} \end{array}$$

d. h. $x = 16 + \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$.

Man sieht: es ist vollkommen falsch, in den Hilfszahlen nur eine (wenn auch unhandliche) Umschreibung für gemischte Brüche zu sehen: sie sind es zwar (notwendigerweise) des öfteren im Effekt — im Wesen ist aber die Gleichungsauflösung ganz additiv und die Hilfszahlen springen erst dort ein, wo man am Schlusse nicht mehr von selbst übersehen kann, welche Bruchteile zur Ergänzung der letzten dyadischen Approximation zur vollen rechten Seite nötig sind. *Das Primäre ist immer die alte dyadische Rechentechnik, zu der die Hilfszahlen nur als ergänzendes Hilfsmittel hinzukommen, wenn dieses Schema zu unübersichtliche Resultate liefert.* Tabelle IV (S. 337) soll Vergleichsmaterial ('ḥ'-Rechnungen) vor Augen führen.

Das eben Besprochene hat gezeigt, daß die Hilfszahlen erst an der Stelle eingesetzt werden, wo es sich um das Vervollständigen der Bruchreste handelt. Die ganzen Zahlen bleiben dabei außer Betracht (vgl. S. 334 die letzte Zeile bei R 33) — bei ihnen sieht man ja von selbst, was noch fehlt. Dies ist keine bloße Plausibilitätserklärung, sondern vielmehr nur ein Fall eines sehr aufschlußreichen Prinzips: *nur solche Rechnungen erhalten Hilfszahlen, die nicht „übersehbar" sind*[111]. In R 34 ist als „Probe" $(1 + \overline{2} + \overline{4})\ (5 + \overline{2} + 7 + \overline{14})$ zu bilden (das Resultat soll 10 sein). Die Rechnung lautet:

---

[110]) Nach $2/n$-Tabelle für $\overline{97} + \overline{97}$.

[111]) Damit soll aber nicht die Umkehrung behauptet werden: daß Rechnungen ohne Hilfszahlen immer „übersehbar" sind. Allerdings glaube ich, daß man sich bei der wirklichen Durchrechnung komplizierterer Beispiele immer dieser Methode bediente. Daß etwa die Rechnungen von R im Text nicht alle ganz durchgerechnet sind, kann keinem Zweifel unterliegen (vgl. auch die Bemerkung von Anh. 3 zu § 6 S. 343).

$/\,1$	$5+\overline{2}+\overline{7}+\overline{14}$
$/\,\overline{2}$	$2+\overline{2}+\overline{4}+\overline{14}+\overline{28}$
$/\,\overline{4}$	$1+\overline{4}+\overline{8}+\overline{28}+\overline{56}$
zusammen	$9+\overline{2}+\overline{8}$
Rest[112])	$\overline{4}+\overline{8}$

$\overline{4}$	**14**[113])
$\overline{8}$	**7**
zusammen	**21**

$\overline{7}+$	$\overline{14}+$	$\overline{14}+$	$\overline{28}+$	$\overline{28}+$	$\overline{56}$	
8	**4**	**4**	**2**	**2**	**1**	[zusammen **21** w. z. b. w.]

Man sieht: „übersehbar" in der Addition der drei ersten Zeilen ist $5+2+1+\overline{2}+\overline{2}+\overline{4}+\overline{4}+\overline{8}=9+\overline{2}+\overline{8}$; der restliche Teil aber bedarf einer Hilfszahlenrechnung! Wie kraß dieser Unterschied zwischen „übersehbarer" und Hilfszahlenrechnung zur Geltung kommt, zeigt Tabelle V (S. 339). Man sieht, daß es nur ein ganz bestimmter Bereich von Bruchteilen ist, den man behandelt wie ganze Zahlen: $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$[114]) von der „1/2-Reihe" und $\overline{\overline{3}}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$ von der „2/3-Reihe". Ich nenne sie „*natürliche Brüche*", im Gegensatz zu der Gesamtheit der anderen Stammbrüche, der „*algorithmischen Brüche*". Wir werden auf diese sehr wesentliche Begriffsbildung noch zurückzukommen haben[115]).

---

[112]) Gegen die gesuchten 10.

[113]) Im Text nicht rot geschrieben, der Sache nach aber „Hilfszahlen" (vgl. Anm. 104 S. 333.

[114]) Mit einer Ausnahme in R 31 (vgl. Anm. 117 S. 338).

[115]) Ich möchte nicht unerwähnt lassen, daß ich zu dieser Begriffsbildung ursprünglich von ganz anderer Seite her gelangt bin (ÄBR Kapitel I § 3). Während jetzt „*übersehbar*" und „*Hilfszahlenalgorithmus*" zur Definition von „*natürlich*" bzw. „*algorithmisch*" dienen, ging ich damals von rein sprachlichen und psychologischen Überlegungen aus, die zeigten, daß sich der ursprüngliche Zahlbegriff nicht auf den der „*natürlichen*" *ganzen Zahlen* beschränkt, sondern als gleichberechtigte Elemente eben die „natürlichen" Brüche mit umfaßt, während die „algorithmischen" Brüche erst als zwangläufiges Resultat einer wirklichen *Rechentechnik* erscheinen („Division"). Daß sich diese tiefgehende Scheidung nicht nur in den eben erörterten Dingen kundgibt, sondern auch für die Struktur der „2/*n*-Tabelle" grundlegend ist, wird in § 7 zu besprechen sein.

Die sprachlich-psychologische Motivierung reicht natürlich tiefer als die sozusagen empirische aus dem Rechenformalismus erschlossene (wenn auch letztere „beweisender" erscheinen mag). Ihre letzten Gründe liegen in der Entstehungsgeschichte des Zahlbegriffs überhaupt. Jede Beschäftigung mit völkerkundlichem Material zeigt, daß der abstrakte Anzahlbegriff bereits eine fortgeschrittene Entwicklungsphase darstellt, der konkrete Mengen- und Gegenstandsbezeichnungen vorangehen (nicht „100", sondern „100 Ellen", nicht „1/2", sondern „eine Seite"). So zeigt sich die Trennung der Brüche in natürliche und algorithmische auch darin, daß erstere den individuellen (d. h. besonders benannten) Maßbruchteilen entsprechen, letztere nicht oder erst sekundär. Als Beispiel kann vielleicht auch die ägyptische

Tabelle IV.

Hilfszahlen als „Kontrollorgane“.

<table>
<tr><td>R 32
$x+\bar{3}x+\bar{4}x=2$</td><td>R 33
$x+\bar{\bar{3}}x+\bar{2}x+\bar{7}x=37$</td><td>R 31
$x+\bar{\bar{3}}x+\bar{2}x+\bar{7}x=33$</td></tr>
<tr><td>/1 $1+\bar{3}+\bar{4}$
[144+48+36=]228
$\bar{\bar{3}}$ $1+\overline{18}$
[144 + 8 =] 152
$\bar{3}$ $\bar{2}+\overline{36}$
[72 + 4 =] 76
/$\bar{6}$ $\bar{4}+\overline{72}$
[36 + 2 =] 38
/$\overline{12}$ $\bar{8}+\overline{144}$
[18 + 1 =] 19</td><td>1 $1+\bar{\bar{3}}+\bar{2}+\bar{7}$
[42 + 28 + 21 + 6 = 97]
2 $4+\bar{3}+\bar{4}+\overline{28}$
[14 10+$\bar{2}$ 1+$\bar{2}$]
4 $9+\bar{6}+\overline{14}$
[7 3]
8 $18+\bar{3}+\bar{7}$
[14 6]
/16 $36+\bar{\bar{3}}+\bar{4}+\overline{28}$
28 + 10+$\bar{2}$ + 1+$\bar{2}$ = 40</td><td>1 $1+\bar{\bar{3}}+\bar{2}+\bar{7}$
42 + 28 + 21 + 6 = 97
/2 $4+\bar{3}+\bar{4}+\overline{28}$
[14 + 10+$\bar{2}$ + 1+$\bar{2}$ = 26]
/4 $9+\bar{6}+\overline{14}$
[7 + 3 = 10]
/8 $18+\bar{3}+\bar{7}$
[14 + 6 = 20]</td></tr>
<tr><td>[zusammen 285
2 288
Rest 3]</td><td>zusammen 40
[Rest auf 37] 1 42
Rest 2</td><td>[zusammen 56
Rest auf 33 2 84
Rest 28]</td></tr>
<tr><td>also: /$\overline{228}$ $\overline{144}$ 1
/$\overline{114}$ $\overline{72}$ 2</td><td>also: $\overline{97}$ $\overline{42}$ 1
/$\overline{56}+\overline{679}+\overline{776}$ $\overline{21}$ 2</td><td>also: [1 97
$\bar{2}$ $48+\bar{2}$
/$\bar{4}$ $24+\bar{4}$
/Rest] 3 + $\bar{2}$ + $\bar{4}$ [zus. 28]
also: /$\overline{97}$ $\overline{42}$ 1
/$\overline{56}+\overline{679}+\overline{776}$ $\overline{21}$ 2
/$\overline{194}$ $\overline{84}$ $\bar{2}$
/$\overline{388}$ $\overline{168}$ $\bar{4}$</td></tr>
<tr><td>d. h. $x=1+\bar{6}+\overline{12}$
$+\overline{114}+\overline{228}$</td><td>d. h. [$x=16+\overline{56}+\overline{679}+\overline{776}$]</td><td>d. h. [$x=14+\bar{4}+\overline{56}+\overline{97}+\overline{194}$
$+\overline{388}+\overline{679}+\overline{776}$]</td></tr>
<tr><td>folgt Probe:
$(1+\bar{3}+\bar{4})\cdot x=2$</td><td>folgt Probe:
$(1+\bar{\bar{3}}+\bar{2}+\bar{7})\cdot x=37$</td><td></td></tr>
</table>

Scheffelteilung herangezogen werden (vgl. ÄZ 65, insbesondere S. 46) – abgesehen von reichem, in Sethes Zahlen und Zahlworte enthaltenem Material. Hinsichtlich der fundamentalen Rolle eines ähnlichen „Kernes“ ältester Bruchbegriffe für das sumerisch-babylonische Zahlensystem vgl. Neugebauer, Zur Entstehung des Sexagesimalsystems, Abh. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, Math.-phys. Kl. NF 13, 1 (1927) (Kapitel III).

Es ist noch die Frage zu behandeln, wie man sich zu komplizierteren Bruchaggregaten die „richtigen" Hilfszahlen verschaffen konnte. Den Ausgangspunkt habe ich schon oben (S. 333) genannt: der kleinste Bruch wird „Hilfseinheit" $\mathbf{1}$, in der nun alle anderen gemessen werden müssen. Entsprechen sich also etwa $\bar{n}$ und $\mathbf{1}$, so sind sich insbesondere 1 und $\boldsymbol{n}$ zugeordnet, entsprechend dem Schema $\begin{matrix} 1 & \boldsymbol{n} \\ \bar{n} & \mathbf{1} \end{matrix}$, wie sich ja überhaupt „Kennziffern" und „Hilfszahlen" dem Zahlenbild nach geläufig verhalten. Dieses Grundschema (das ja nichts anderes ist, als die formale Fassung des Begriffes „ein n-tel") kann nun unmittelbar dazu verwendet werden, neuen Bruchteilen $\bar{m}$ ihre Hilfszahlen zuzuordnen. Sind sie kleiner als der ursprüngliche Ausgangsbruch, so gehen die zugehörigen Hilfszahlen aus $\bar{n}$ $\mathbf{1}$ ebenso hervor, wie $\bar{m}$ aus $\bar{n}$ $\left(\text{etwa} \begin{matrix} \bar{4} & \mathbf{1} \\ \bar{8} & \bar{\mathbf{2}} \end{matrix}\right)$; sind sie größer, so braucht man nur von 1 $\boldsymbol{n}$ auszugehen (aus $\begin{matrix} 1 & \mathbf{4} \\ \bar{4} & \mathbf{1} \end{matrix}$ folgt $\begin{matrix} 1 & \mathbf{4} \\ \bar{3} & \mathbf{1}+\bar{\mathbf{3}} \end{matrix}$ genau so, wie bei jeder „Division"). Das Ergebnis sind oft nicht ganze Hilfszahlen. Nun liegen die Dinge ganz einfach: sind die erhaltenen Hilfszahlenbrüche „übersehbar" (d. h. Aggregate „natürlicher" Brüche), so kann man es dabei belassen; Beispiel: R 31[116])

$$x + \bar{\bar{3}}x + \bar{2}x + \bar{7}x = 33$$

Division von 33 durch $1 + \bar{\bar{3}} + \bar{2} + \bar{7}$:

$$\begin{array}{ll} „1 & 1 + \bar{\bar{3}} + \bar{2} + \bar{7} \\ /\,2 & 4 + \bar{3} + \bar{4} + \overline{28} \\ /\,4 & 9 + \bar{6} + \overline{14} \\ /\,8 & 18 + \bar{3} + \bar{7} \\ \bar{2} & \bar{2} + \bar{3} + \bar{4} + \overline{14} \\ /\,\bar{4} & \bar{4} + \bar{6} + \bar{8} + \overline{28}\text{“} \end{array}$$

Addition der übersehbaren Bestandteile gibt[117])

$$\text{„zusammen } 32 + \bar{2}\text{“}$$

also gegen das gesuchte 33 einen

$$\text{„Rest } \bar{2}\text{“},$$

wovon allerdings vom algorithmisch zu behandelnden Teile schon etwas vorhanden ist; wieviel? Hilfszahlen der ersten Zeile:

$$\begin{array}{cccc} 1+ & \bar{\bar{3}}+ & \bar{2}+ & \bar{7} \\ & \mathbf{28} & \mathbf{21} & \mathbf{6} \end{array}$$

woraus für die algorithmischen Brüche folgt:

$$\begin{array}{ccccc} „\bar{7}+ & \bar{8} & +\overline{14}+ & \overline{28} & + \quad \overline{28} \\ \mathbf{6}+ & \mathbf{5}+\bar{\mathbf{4}}+ & \mathbf{3} & +\mathbf{1}+\bar{\mathbf{2}}+ & \mathbf{1}+\bar{\mathbf{2}} = \mathbf{17}+\bar{\mathbf{4}}\text{“}. \end{array}$$

---

116) „. . ." steht im Text.

117) Wobei ein $\bar{8}$ der letzten Zeile wohl der Einfachheit des Resultates halber nicht mitgenommen wird.

Tabelle V. Übersehbarkeit und Hilfszahlen.

R 31 [1])

$$4+\overline{3}+\overline{4}+\overline{28}$$
$$\mathbf{1+\overline{2}}$$
$$+\ 9+\overline{6}\qquad+\overline{14}$$
$$\mathbf{3}$$
$$+\ 18+\overline{3}\qquad+\overline{7}$$
$$\mathbf{6}$$
$$+\ \overline{4}+\overline{6}+\overline{8}+\overline{28}$$
$$\mathbf{5+\overline{4}\quad 1+\overline{2}}$$

R 34 [1])

$$5+\overline{2}+\overline{7}+\overline{14}$$
$$\mathbf{8\quad 4}$$
$$2+\overline{2}+\overline{4}+\overline{14}+\overline{28}$$
$$\mathbf{4\quad 2}$$
$$1+\overline{4}+\overline{8}+\overline{28}+\overline{56}$$
$$\mathbf{2\quad 1}$$

R 37

$$\overline{2}+\overline{4}+\overline{8}+\overline{72}+\overline{16}+\overline{32}+\overline{64}+\overline{576}$$
$$\mathbf{8\quad 36\quad 18\quad 9\quad 1}$$
$$\overline{2}+\overline{4}+\overline{32}+\overline{16}+\overline{12}+\overline{96}+\overline{36}+\overline{288}+\overline{36}+\overline{288}$$
$$\mathbf{9\quad 18\quad 24\quad 3\quad 8\quad 1\quad 8\quad 1}$$

R 32 [1])

$$1+\overline{6}+\overline{12}+\overline{114}+\overline{228}$$
$$\mathbf{76\quad 8\quad 4}$$
$$+\overline{3}+\overline{18}+\overline{36}+\overline{342}+\overline{684}$$
$$\mathbf{50+\overline{\overline{3}}\quad 25+\overline{3}\quad 2+\overline{\overline{3}}\quad 1+\overline{3}}$$
$$+\overline{4}+\overline{24}+\overline{48}+\overline{456}+\overline{912}$$
$$\mathbf{38\quad 19\quad 2\quad 1}$$

R 36 [1])

$$\overline{4}+\overline{53}+\overline{106}+\overline{212}$$
$$\mathbf{20\quad 10\quad 5}$$
$$+\overline{2}+\overline{30}+\overline{318}+\overline{795}+\overline{53}+\overline{106}$$
$$\mathbf{25+\overline{3}\quad 3+\overline{3}\quad 1+\overline{3}\quad 20\quad 10}$$
$$+\overline{12}+\overline{159}+\overline{318}+\overline{636}$$
$$\mathbf{88+\overline{3}\quad 6+\overline{\overline{3}}\quad 3+\overline{3}\quad 1+\overline{\overline{3}}}$$
$$+\overline{20}+\overline{265}+\overline{530}+\overline{1060}$$
$$\mathbf{53\quad 4\quad 2\quad 1}$$

R 38

$$319+\overline{\overline{3}}+\overline{11}+\overline{11}+\overline{22}+\overline{22}+\overline{33}+\overline{66}+\overline{66}$$
$$\mathbf{6\quad 6\quad 3\quad 3\quad 2\quad 1\quad 1}$$

[1]) Im Text ist die Hilfszahlenzuordnung getrennt durchgeführt.

Das genügt nun vollauf, um zu übersehen, daß von dem Rest

$$„\overline{2} \quad \mathbf{21}“$$

bereits alles bis auf

$$„\mathbf{3} + \overline{\mathbf{2}} + \overline{\mathbf{4}}“$$

durch die bisherige Rechnung gewonnen ist, so daß nur noch die zu diesen Hilfszahlen gehörigen Kennziffern bestimmt werden müssen (vgl. oben S. 338, im Augenblick nicht mehr wesentlich).

Im allgemeinen wird man aber durch die ursprünglichen Hilfszahlen nicht nur zu „übersehbaren“ Bruchteilen gelangen. Geht man etwa in R 32 (Tabelle IV S. 337) von

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 + \overline{3} + \overline{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} + \overline{\mathbf{3}} \quad \mathbf{1} \end{array}$$

aus, so führt die 2/3-Reihe zwar leicht zu

$$\begin{array}{cc} \overline{12} & \overline{8} + \overline{144} \\ & \overline{\mathbf{2}} \quad \overline{\mathbf{36}} \end{array}$$

aber das ist nicht „übersehbar“, d. h. für die weitere Rechnung zu kompliziert. Aber man hat nichts weiter zu tun, als auf diese Hilfszahlenbrüche nochmals dieselbe Methode anzuwenden:

$$\begin{array}{rr} \mathbf{1} & \mathbf{36} \\ /\,\overline{\mathbf{36}} & \mathbf{1} \\ /\;\overline{\mathbf{2}} & \mathbf{18} \end{array}$$

um statt dessen

$$\begin{array}{cc} \overline{12} & \overline{8} + \overline{144} \\ & \mathbf{18} + \mathbf{1} = \mathbf{19} \end{array}$$

schreiben zu können, woraus sich durch Rückwärtsrechnen wegen des nun gültigen

$$\begin{array}{cc} \overline{144} & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{144} \end{array}$$

auch sofort für alle vorangehenden Zeilen die neuen Hilfszahlen (und das sind genau die des Textes) ergeben. Ganz analog ist es natürlich jederzeit möglich, sich von einem zunächst zu komplizierten Ausgangsschema wie etwa (R 33)

$$\begin{array}{cccc} 1 + & \overline{\overline{3}} + & \overline{2} + & \overline{7} \\ \mathbf{7} \;\; \mathbf{4} + & \overline{\mathbf{3}} \;\; \mathbf{3} + & \overline{\mathbf{2}} & \mathbf{1} \end{array}$$

(das auf $\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{7} \\ \overline{7} & \mathbf{1} \end{smallmatrix}$ beruht) zu befreien, und zu ganzen Zahlen überzugehen:

$$\begin{array}{cccc} 1 + & \overline{\overline{3}} + & \overline{2} + & \overline{7} \\ \mathbf{42} & \mathbf{28} & \mathbf{21} & \mathbf{6} \end{array}$$

— wenn nötig, wieder durch Einführung von

$$\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \overline{\mathbf{2}} & \mathbf{1} \end{array}$$

und dann von

$$\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \bar{\mathbf{3}} & \mathbf{1} \end{array}$$

oder (was bei diesen einfachen Brüchen wohl unmittelbar geschehen ist) durch Versechsfachen.

Man sieht: *an keiner Stelle des Hilfszahlenrechnens braucht man andere Methoden anzunehmen, als die klassisch ägyptischen:* Nebeneinanderschreiben von Kennziffern und Zahlen wie bei jeder „Multiplikation" und dauerndes Mittransformieren der Hilfszahlen. *In dieser absoluten methodischen Einheitlichkeit sehe ich ein notwendiges aber auch hinreichendes Erfordernis für die Richtigkeit jeder Theorie der ägyptischen Buchrechnung.*

Anhang zu § 6. Beispiele, Ergänzungen.

1. Formales.

Bei einiger Übung sieht man leicht, wie das Hilfszahlenrechnen in praxi vorzunehmen ist. Beispielsweise:

$$1 + \bar{\bar{3}} + \bar{2} + \bar{7}$$

dann $\bar{\mathbf{7}}$ *zuerst* $\mathbf{1}$

und nun *von* $\bar{\mathbf{7}}$ *ausgehend:*

$$\begin{array}{ccc} & 1 + \bar{\bar{3}} & + \quad \bar{2} \\ \bar{\mathbf{7}} & \mathbf{4} + \bar{\bar{\mathbf{3}}} & \mathbf{3} + \bar{\mathbf{2}} \end{array}$$

also der einfachsten Formulierung „was ist $^1/_2$ von 7?" entsprechend, *nicht* etwa von $\mathbf{1}$ ausgehend: „$^1/_7$ entspricht $\mathbf{1}$, was entspricht $^1/_2$?" oder „wieviele Siebentel sind $^1/_2$?"[118])

Ich möchte betonen, daß ich den Verzicht auf das uns gewohnte Schriftbild $1/n$ gegen $\bar{n}$ für durchaus wesentlich halte, um sich in das geschichtlich gegebene Zahlenbild hineindenken zu können. Die formalen Analogien wie etwa, daß aus einer Zuordnung $\bar{a}\ \boldsymbol{b}$ sofort $\bar{b}\ \boldsymbol{a}$ folgt, fallen dann viel mehr ins Auge und lassen erkennen, welche große Hilfe sie beim Rechnen gewesen sein müssen, ohne jede Rekursion auf unsere multiplikativen Schlüsse.

2. Hilfszahlenrechnung in der Probe von R 33.

Es soll bewiesen werden, daß $(1 + \bar{\bar{3}} + \bar{2} + \bar{7})\ (16 + \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}) = 37$ ist. Rechnung:

---

118) Das soll natürlich kein Dogma sein.

Zu
$$\begin{array}{l} \bar{7} + \overline{14} \\ \overline{14} + \overline{28} \\ \overline{28} + \overline{56} \end{array}$$

(R 34) findet man die Hilfszahlen sofort nach dem Schema

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \mathbf{8} & \longleftarrow & \mathbf{4} & \uparrow \\ & \mathbf{4} & & \mathbf{2} & \\ \downarrow & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & \end{array}$$

ohne besondere Rechnungen vornehmen zu müssen.

1	16	$+\ \overline{56}$ $\mathbf{97}$	$+\ \overline{679}$ $\mathbf{8}$	$+\ \overline{776}$ $\mathbf{7}$	
$\overline{\overline{3}}$	$10+\overline{\overline{3}}$	$+\ \overline{84}$ $\mathbf{64+\overline{\overline{3}}}$	$+\ \overline{1358}$ $\mathbf{4}$	$+\ \overline{4074}$[119]) $\mathbf{1+\overline{3}}$	$+\ \overline{1164}$ $\mathbf{4+\overline{\overline{3}}}$
$\overline{2}$	8	$+\ \overline{112}$ $\mathbf{48+\overline{2}}$	$+\ \overline{1358}$ $\mathbf{4}$	$+\ \overline{1552}$ $\mathbf{3+\overline{2}}$	
$\overline{7}$	$2+\overline{4}+\overline{28}$	$+\ \overline{392}$ $\mathbf{13+\overline{2}+\overline{4}+\overline{14}+\overline{28}}$	$+\ \overline{4753}$ $\mathbf{1+\overline{7}}$	$+\ \overline{5432}$ $\mathbf{1}$	

(Diese Hilfszahlenrechnung ist sehr charakteristisch für die völlige Verschiedenheit von der Methode des ,,kleinsten gemeinsamen Nenners".) Es wird nun die Summe der hilfszahlenlosen Teile gebildet und der Rest gegen das gesuchte 37 gebildet, der dem ,,algorithmischen" Anteile gleich sein müßte; Text:

$$(*)\qquad \begin{array}{cccccc} 36\ + & \overline{\overline{3}}\ + & \overline{4}\ + & \overline{28} & \text{Rest}\ \overline{28}\ + & \overline{84} \\ & \mathbf{3621+\overline{3}} & \mathbf{1358} & \mathbf{194} & \mathbf{194} & \mathbf{64+\overline{\overline{3}}}. \end{array}$$

Daß $\overline{4}+\overline{28}$ ($=2/7$ nach der $2/n$-Tabelle) zum hilfszahlfreien Teil genommen wird, scheint der oben (S. 336) angegebenen Abgrenzung der ,,natürlichen Brüche" zu widersprechen. Woher kommt es aber, daß der ,,Rest" (der Brüche gegen 1) als $\overline{28}+\overline{84}$ angegeben wird? 1. Woher weiß man dies? 2. Warum steht $\overline{28}+\overline{84}$ da, statt des einen Stammbruches $\overline{21}$ ($=1/28+1/84$)? Um ,,1." zu beantworten, wird man Hilfszahlen annehmen müssen:

$$\begin{array}{c} \overline{\overline{3}}\ +\overline{4}+\overline{28} \\ \mathbf{18+\overline{\overline{3}}}+\mathbf{7}+\mathbf{1}=\mathbf{26+\overline{\overline{3}}} \end{array}$$

also

$$\text{Rest}\ \mathbf{1+\overline{3}}\ \text{d. h.}\ \begin{array}{cc} \mathbf{1} & \overline{28} \\ \mathbf{\overline{3}} & \overline{84} \end{array}$$

d. h. genau die Brüche $\overline{28}+\overline{84}$ des Textes, während Rechnen mit kleinstem gemeinsamen Nenner auf $\overline{21}$ führen würde!

Man sieht daraus folgendes: die Rechnung war so angelegt worden, daß man zunächst nur den ganzzahligen Teil 16 (das Übrige $\overline{56}+\ldots$ sind reichlich ,,unübersehbare" Brüche) mit $1+\overline{\overline{3}}+\overline{2}+\overline{7}$ multiplizierte. Dann wurde aus der eben angegebenen Hilfszahlenrechnung als Rest $\overline{28}+\overline{84}$ erschlossen. Nun hätte eigentlich bewiesen werden sollen, daß dies dem ganzen noch unberücksichtigten Bruchrest gleich ist, was die Addition aller zugehörigen Hilfszahlen erfordern würde. Dies geschieht aber nicht; es wird nur konstatiert, daß in den Hilfszahlen der Hauptrechnung ($\mathbf{1}$ $\overline{5432}$) gezählt $\overline{\overline{3}}+\overline{4}+\overline{28}$ durch $\overline{28}+\overline{84}$ zu 1 ergänzt wird, was man ja schon aus (*) weiß. Die wirkliche Hilfszahlenaddition wurde also gar nicht ausgeführt — und konnte es auch gar nicht, ohne vorerst noch die algorithmischen Brüche (vgl. $\mathbf{13+\overline{2}+\overline{4}+\overline{14}+\overline{28}}$!) bei den Hilfszahlen wegzuschaffen. Hier hat man also ein schönes Beispiel der ersten Phase einer Hilfszahlenrechnung (vgl. oben S. 340) noch klar erhalten. Alle anderen Hilfszahlenrechnungen des Textes sind schon so weit reduziert, daß sie höchstens ,,übersehbare" Bruchbestandteile enthalten.

[119]) Da $\overline{\overline{3}}=\overline{2}+\overline{6}$ gerechnet wird, ist $2/3\cdot\overline{679}=\overline{1358}+\overline{4074}$.

3. Zu R 70.

Der Schluß des vorigen Beispiels zeigt, daß das eigentlich zu Beweisende gar nicht berechnet wird, das ganze Hinschreiben aller Brüche und Hilfszahlen nur Formsache war — so bleibt auch ein Rechenfehler[120]) ohne Folgen. Daß große Bruchrechnungen ohne bis zu Ende durchgeführte Hilfszahlenrechnungen immer nur ein leeres Schema sind, zeigt R 70 sehr drastisch. In dieser *pśw*-Rechnung soll als Probe $12 + \bar{\bar{3}} + \overline{42} + \overline{126}$ mit $7 + \overline{2} + \overline{4} + \overline{8}$ multipliziert werden, was auf eine Addition von 26 Zahlen (davon 20 Brüchen) hinauskommt. Hilfszahlen fehlen. Angegeben ist „Summe 2520" — statt 100[121])! 100 (Brote) und 2520 (Getreidemenge) waren nämlich die beiden Angaben des Beispiels und der Schreiber erwischte die falsche als Resultat der „Probe", die also nie wirklich durchgerechnet worden ist. Ähnlich sind die umfangreichen Rechnungen von C (vgl. Anhang 6) nur leeres Schema, denn sowohl bei 11-, wie 13-Teilung blieb das Weglassen eines Bruches unverbessert. *Der leere Formalismus in den Rechentexten ist ungleich größer, als man es im allgemeinen zugibt.*

4. R 28, R 29.

R 28 bildet zur Bestimmung von x aus $x + \bar{\bar{3}}x - \overline{3}(x + \bar{\bar{3}}x) = 10$ folgendes: $10 : 10 = 1$, $10 - 1 = 9 = x$. Wieleitner[122]) hat dies so erklärt, daß links $\frac{10}{9}x$ ständen, also $10\frac{x}{9} - \frac{1}{10}\cdot 10\frac{x}{9} = \frac{9}{9}x = x$ und entsprechend dazu rechts: $10 - \frac{1}{10}\cdot 10 = 9$, d. h. $x = 9$. „Einfacher" als $x = \frac{10}{10}\cdot 9$ ist dies nur, wenn man (wie der Text) alle Schlüsse kurzerhand wegläßt, so daß mir die von Peet[123]) zur Erwägung gestellte Möglichkeit, daß der Schreiber das Resultat kannte und $10 - 1$ statt $1 . 9$ sagte, noch immer recht wahrscheinlich erscheint — besonders wenn man die Ausrechnung von R 24 bis R 27 berücksichtigt (vgl. Tabelle I S. 307).

Unter allen Umständen aber bleibt wichtig, daß der Koeffizient von x in 9-teln und nicht in 18-teln gezählt wird: denn $\overline{3}\cdot\bar{\bar{3}} = 2/9$ wäre nach $2/n$-Tabelle in $\overline{6} + \overline{18}$ zu zerlegen. Es wird darauf in § 8 zurückzukommen sein. Das zu ergänzende Hilfszahlenschema muß also $(\mathbf{9} + \mathbf{6}) - (\mathbf{3} + \mathbf{2}) = \mathbf{10}$ heißen.

In R 29 ist nur der Schlußteil einer ʿḥʿ-Rechnung erhalten, offenbar ist die mindestens sehr verkürzte Ausrechnung von R 28 und die Übereinstimmung der Zahlenkoeffizienten in R 28 und R 29 schuld daran. Mit Peet (RMP S. 64) glaube ich, daß die Aufgabe $\overline{3}\,((x + \bar{\bar{3}}x) + \overline{3}\,(x + \bar{\bar{3}}x)) = 10$ hieß. Die Hilfszahlen der einzeln ausgerechneten Koeffizienten wären dann

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{3} & & \overline{6}+\overline{18} & & \overline{9} & & \overline{18}+\overline{54} \\ \mathbf{9} & + & \mathbf{6} & + & \mathbf{3} & + & \mathbf{2} \quad = \mathbf{20} \end{array}$$

wobei wieder die $2/n$-Zerlegungen $\overline{6} + \overline{18}$ und $\overline{18} + \overline{54}$ nur formale Umschreibungen für $2/9$ und $2/27$ wären (vgl. § 8). Demnach wäre $\frac{20}{27}x = 10$. Der erhaltene Text

---

120) Peet, RMP S. 69 : $\overline{1184}$ statt $\overline{1164}$.

121) Peet, RMP S. 116.

122) Zeitschrift f. math. naturw. Unterricht 56 (1925) S. 134 und Archivio 6 (1925) S. 48.

123) RMP S. 63.

beginnt mit der Berechnung von $(1+\overline{4}+\overline{10})\cdot 10 = 13\,1/2$ und bildet dann:

[1	$13+\overline{2}$]
$\overline{\overline{3}}$	9
zusammen	$22+\overline{2}$
$\overline{3}$	$7+\overline{2}$
zusammen	30
$\overline{\overline{3}}$	20
[/] $\overline{3}$	10

was genau als Probe zu der ergänzten Aufgabe $\overline{3}\,((x+\overline{\overline{3}}x)+\overline{3}\,(x+\overline{\overline{3}}x))$ passen würde. Da $1+\overline{4}+\overline{10}=\frac{27}{20}$ ist, so wird dies noch wahrscheinlicher gemacht. Dann hätte man es hier mit einem wichtigen Falle zu tun: daß nämlich in $x = 10\cdot\frac{27}{20}$ der „Bruch" 27/20 direkt ausgerechnet wäre.

5. Kah. XVI.

Ein Wirtschaftstext (Fleischlieferung), ediert Griffith Kah. Tafel XVI, Kommentar S. 45.

Es ist (außer C) der einzige mir bekannte aus der Praxis stammende Text, der auch nicht „übersehbare" Bruchadditionen enthält. Tabelle VI S. 345 gibt nur das Zahlenschema. Zwangläufig vorzunehmende Ergänzungen sind nicht als solche kenntlich gemacht; nur in den Zeilen A_{18}, A_{20}, A_{32} ist ein Rechenfehler verbessert: A_{18} hat $20+\overline{\overline{3}}$, A_{20} ist zerstört, A_{32} hat (wegen A_{18}) $2603+\overline{2}$. Addiert wird sowohl horizontal wie vertikal. Nebenrechnungen fehlen; ich möchte folgende ergänzen:

B_{20} und C_{20}

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \overline{2} & + & \overline{3} & + & \overline{4} & + & \overline{12} & + & \overline{45} & = & 1 & + & \overline{6} & + & \overline{45} \\ \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & & & \mathbf{12} & & \mathbf{2} & & \end{array}$$

D_{20}: Addition von $\overline{4}$, $\overline{36}$ und $\overline{45}$:

1	**45**			
/ $\overline{45}$	**1**			
/ $\overline{36}$	$\mathbf{1}+\overline{\mathbf{4}}$	dies aus	/ 1	36
/ $\overline{4}$	$\mathbf{11}+\overline{\mathbf{4}}$		$\overline{2}$	18
zusammen	$\mathbf{13}+\overline{\mathbf{2}}$		/ $\overline{4}$	9
			zusammen	45

also $\overline{4}+\overline{36}+\overline{45}$
$\mathbf{11}+\overline{\mathbf{4}}+\mathbf{1}+\overline{\mathbf{4}}+\mathbf{1}=\mathbf{13}+\overline{\mathbf{2}}$
gleich $\overline{5}+\overline{10}$ wegen[124])

1	**45**
/ $\overline{10}$	$\mathbf{4}+\overline{\mathbf{2}}$
/ $\overline{5}$	**9** .
zusammen	$\mathbf{13}+\overline{\mathbf{2}}$.

E_{16}: Die Summe der 3 Posten $\overline{4}+\overline{45}$ wird nicht einfach als $\overline{2}+\overline{4}+\overline{15}$ angegeben, sondern sonderbarerweise als $\overline{\overline{3}}+\overline{10}+\overline{20}$. Ich kann mir dies nur so erklären:

/ 1	$\overline{4}+\overline{45}$
/ 2	$\overline{2}+\overline{30}+\overline{90}$ (nach $2/n$-Tabelle)
zusammen	$\overline{2}+\overline{4}+\overline{30}+\overline{45}+\overline{90}$
	$\mathbf{45}+\mathbf{22}+\overline{\mathbf{2}}+\mathbf{3}+\mathbf{2}+\mathbf{1}=\mathbf{73}+\overline{\mathbf{2}}$

---

[124]) Vgl. R 21 (oben S. 327).

Tabelle VI.

Kah. XVI, 15 bis 32.

Zeilen	A	B	C	D	E $= B + C + D$	F $= A - E$	Zeilen
15	$2212 + \overline{3} + \overline{4}$						15
16	$156 + \overline{3} + \overline{15}$	$41 + \overline{4} + \overline{45}$	$41 + \overline{4} + \overline{45}$	$41 + \overline{4} + \overline{45}$	$123 + \overline{\overline{3}} + \overline{10} + \overline{20}$	$32 + \overline{2} + \overline{12}$	16
17	36	$9 + \overline{2}$	$9 + \overline{2}$	$9 + \overline{2}$	$28 + \overline{2}$	$7 + \overline{2}$	17
18	$2[1 + \overline{2} + \overline{4}]$	$5 + \overline{3} + \overline{12}$	$5 + \overline{3} + \overline{12}$	$5 + \overline{2} + \overline{36}$	$16 + \overline{4} + \overline{9}$	$5 + \overline{3} + \overline{18}$	18
19	360						19
20	$278[6 + \overline{\overline{3}} + \overline{15}]$	$56 + \overline{6} + \overline{45}$	$56 + \overline{6} + \overline{45}$	$56 + \overline{5} + \overline{10}$	$168 + \overline{\overline{3}} + \overline{90}$	$45 + \overline{3} + \overline{12} + \overline{18}$	$20 = 15 + \ldots + 19$
21							21
22	11					11	22
23	9			9	9	[0]	23
24	2					2	24
25	26					26	25
26	88	46	42		88	[0]	26
27	21			21	21	[0]	27
28	20			20	20	[0]	28
29	4			4	4	[0]	29
30	1			1	1	[0]	30
31	182	46	42	55	143	39	$31 = 22 + \ldots + 30$
32	$260[4 + \overline{\overline{3}} + \overline{15}]$	$10 + \overline{6} + \overline{45}$	$14 + \overline{6} + \overline{45}$	$1 + \overline{5} + \overline{10}$	$25 + \overline{\overline{3}} + \overline{90}$	$6 + \overline{3} + \overline{12} + \overline{18}$	$32 = 20 - 31$

also	1	**90**
	/ $\overline{\overline{3}}$	**60**
	/ $\overline{10}$	**9**
	/ $\overline{20}$	**4 + $\overline{2}$**
	zusammen	**73 + $\overline{2}$** d. h. $\overline{2}+\overline{4}+\overline{30}+\overline{45}+\overline{90}=\overline{\overline{3}}+\overline{10}+\overline{20}$.

E_{18}: Ähnlich $(\overline{3}+\overline{12})+(\overline{3}+\overline{12})+(\overline{2}+\overline{36})$ nicht einfach $=1+\overline{3}+\overline{36}$, sondern $=1+\overline{4}+\overline{9}$ gesetzt. Etwa so:

$\overline{2}+\overline{\overline{3}}+\overline{12}+\overline{12}+\overline{36}$

18 + 24 + 3 + 3 + 1 = 49

/ 1	**36**
$\overline{2}$	**18**
/ $\overline{4}$	**9**
/ $\overline{9}$	**4**
zusammen	**49**

$E_{20}=B_{20}+C_{20}+D_{20}$. Hier ist offenbar für 2/45 in $(\overline{6}+\overline{45})+(\overline{6}+\overline{45})+(\overline{5}+\overline{10})=\overline{\overline{3}}+\overline{90}$ die 2/*n*-Zerlegung $2/45=\overline{30}+\overline{90}$ benutzt (vgl. E_{16}!):

$\overline{3}+\overline{5}+\overline{10}+\overline{30}+\overline{90}$

30 + 18 + 9 + 3 + 1 = 61

1	**90**
/ $\overline{\overline{3}}$	**60**
/ $\overline{90}$	**1**
zusammen	**61**

F_{20} offenbar durch $F_{16}+F_{17}+F_{18}$ und nicht durch $A_{20}-E_{20}$ gebildet.

6. C.

C wurde durch Daressy gelegentlich seiner Edition noch unrichtig interpretiert, dann von Möller und Sethe weiter bearbeitet und schließlich von Peet[125]) endgültig aufgeklärt. Da diese Rechnungen trotzdem kaum für die Diskussion der ägyptischen Mathematik Beachtung gefunden haben, scheint mir ihre übersichtliche Zusammenstellung nicht überflüssig[126]).

Vorbemerkung. Ein Scheffel enthält 320 *r3*. Die besonders bezeichneten Vielfachen dieser kleinen Volumeinheit sind (160), (80), (40), (20), (10), (5), *r3*, wobei ( ) andeuten soll, daß es sich nicht um die üblichen Zahlzeichen, sondern andere Symbole handelt[127]).

1. *3-Teilung des Scheffels.*

[/] 1	$\overline{3}$
2	$\overline{\overline{3}}$
[/] 4	$1+\overline{3}$

Bedeutung dieses Schrittes[128]): 1/3 von 5 *r3* $=1+\overline{\overline{3}}$. Also:

[$\overline{3}$ von]	(5)	*r3* + $\overline{\overline{3}}$
,,	(10)	3 *r3* + $\overline{3}$
,,	(20)	(5) + *r3* + $\overline{\overline{3}}$
,,	(40)	(10) + 3 *r3* + $\overline{3}$
,,	(80)	(20) + (5) + *r3* + $\overline{\overline{3}}$
,,	(160)	(40) + (10) + 3 *r3* + $\overline{3}$.

[125]) JEA 9 (1923) S. 91ff.; dort auch Zitate der vorangehenden Bearbeitungen.

[126]) Ich verzichte auf Angabe von Wiederholungen und kleiner Schreibfehler.

[127]) Es sind die sogenannten „Horusaugenteile". Für Einzelheiten vgl. ÄZ 65, S. 42ff. [128]) Peet, JEA 9, S. 95.

Schließlich wäre $\overline{3}$ von 320 *r3* (d. h. $^1/_3$ Scheffel) = (80) + (20) + (5) + *r3* + $\overline{\overline{3}}$.
Probe:

/ 1	(80) + (20) + (5) + *r3* + $\overline{\overline{3}}$
/ 2	(160) + (4) + (10) + 3 *r3* + $\overline{3}$

Durchführung der angezeigten Summation würde richtig 320 *r3* = 1 Scheffel ergeben.

2. *7-Teilung des Scheffels.*

[/]	1	7
	10	70
	20	140
[/]	40	280
	2	1[4]
[/]	4	2[8]

[/]	$\overline{7}$	1	Probe: /	1	(40) + (5) + $\overline{2}$ + $\overline{7}$ + $\overline{14}$
	$\overline{4}$ + $\overline{28}$	2	/	2	(80) + (10) + *r3* + $\overline{4}$ + $\overline{7}$ + $\overline{28}$
[/]	$\overline{2}$ + $\overline{14}$	4	/	4	(160) + (20) + 2 *r3* + $\overline{2}$ + $\overline{4}$ + $\overline{14}$ + $\overline{28}$

3. *10-Teilung des Scheffels.*

	1	10	Probe:	1	(20) + (10) + 2 *r3*
[/]	10	100	/	2	(40) + (20) + 4 [*r3*]
[/]	20	200		4	(80) + (40) + (5) + 3 *r3*
[/]	2	20	/	8	(160) + (80) + (10) + (5) + *r3*

4. *11-Teilung des Scheffels.*

[/]	1	11	Probe: /	1	(20) + (5) + 4 *r3* + $\overline{11}$
	10	110	/	2	(40) + (10) + (5) + 3 *r3* + $\overline{6}$ + $\overline{66}$
[/]	20	220		4	(80) + (20) + (10) + (5) + *r3* + [$\overline{3}$] + $\overline{33}$
	2	22	/	8	(160) + (40) + (20) + (10) + 2 *r3* + $\overline{\overline{3}}$ + $\overline{22}$ + $\overline{66}$
	4	44			
[/]	8	88			
[/]	$\overline{11}$	1			

5. *13-Teilung des Scheffels.*

	1	13	Probe:
	10	130	[/] 1 (20) + 4 *r3* + $\overline{2}$ + $\overline{13}$ + $\overline{26}$
[/]	20	260	2 (40) + (5) + 4 *r3* + [$\overline{8}$] + $\overline{13}$ + $\overline{52}$ + $\overline{104}$
	2	26	[/] 4 (80) + (10) + (5) + 3 *r3* + $\overline{4}$ + $\overline{8}$ + $\overline{13}$ + $\overline{104}$
[/]	4	52	[/] 8 (160) + (20) + (10) + (5) + *r3* + $\overline{2}$ + $\overline{4}$ + $\overline{8}$ + $\overline{26}$ + $\overline{104}$
	$\overline{13}$	1	
	$\overline{8}$ + $\overline{52}$ + $\overline{104}$	2	
	$\overline{4}$ + $\overline{26}$ + $\overline{52}$	4	
[/]	$\overline{2}$ + $\overline{13}$ + $\overline{26}$	8	

Abgesehen vom ersten Beispiel besteht das Verfahren in der Division von 320 durch a (a = 7, 10, 11, 13) und in der Multiplikation des in *r3*-Multipla (+ Bruchteilen) ausgedrückten Resultats mit a als Probe. Beachtenswert scheint mir die

Gewandtheit in der Benutzung der $2/n$-Zerlegung bei der 11- und 13-Teilung. Formal gesehen verhalten sich die beiden Teile der Rechnungen (abgesehen von der ersten) wie zwei Multiplikationen ab und ba gleichen Resultates.

§ 7. Die $2/n$-Tabelle.

Die ägyptische Mathematik benutzt bekanntlich als einzigen Bruchbegriff den „Stammbruch". Wie im vorigen Paragraphen die Existenz der $2/n$-Tabelle als gegebene Voraussetzung angenommen wurde, so soll jetzt dieses „Stammbruchpostulat" als solches hingenommen werden. Aus dem dyadischen Charakter der Rechentechnik folgt, daß es für das Verbleiben in dem Stammbruchbereich notwendig aber auch hinreichend ist, $2/n$ durch Stammbrüche ausdrücken zu können. Diese Aufgabe hat 1. eine auf der Hand liegende „triviale" Lösung $\bar{n}+\bar{n}$ und ist 2. unendlich vieldeutig. Historischer Sachverhalt: 1. wird nicht benutzt, trotz 2. gibt die $2/n$-Tabelle eine einzige „kanonische" Auswahl, die ausschließlich verwendet wird, soweit dies aus den bisher bekannten Texten zu sagen ist. Woher kommt 1.? Woher 2.?

1. Man denke sich $\overline{11}$ dyadisch verfünffacht, unter Aufrechterhaltung des „Stammbruchpostulats". Dies hieße mit Anwendung der trivialen Zerlegung

/ 1	$\overline{11}$
2	$\overline{11}\ \overline{11}$
/ 4	$\overline{11}\ \overline{11}\ \overline{11}\ \overline{11}$
zusammen 5	$\overline{11}\ \overline{11}\ \overline{11}\ \overline{11}\ \overline{11}$

Das psychologische Ärgernis, das einer solchen Rechenweise entgegensteht, liegt auf der Hand: es steht zum Schluß nur wieder „fünf 11-tel" da, die ganze Rechnerei erscheint ergebnislos, wächst außerdem ins Uferlose. Wenn heute ein Schulkind $^5/_{11}$ „ausrechnen" soll, wird ihm kein Lehrer „$5 \cdot {}^1/_{11}$" als „Resultat" konzedieren, sondern behaupten, daß „ausrechnen" heiße, die konventionelle Symbolik für $0.10^0 + 4.10^{-1} + 5.10^{-2} + \ldots$ anwenden. Auch für den Ägypter heißt „ausrechnen" soviel wie „in neue Zeichen umsetzen"[129]). Hätte es schon damals den „morbus decimalium" gegeben, so wäre die Aufgabe so „eindeutig" wie heute und niemand würde nach 2. fragen.

Die Beantwortung von 1. liegt gewissermaßen auf psychologischem Gebiete. Wir werden es wieder betreten müssen, wenn es sich um die Untersuchung der auch jetzt noch unangetasteten Pfeiler der ägyptischen

[129]) So hieße die „wirkliche" Rechnung:

/ 1	$\overline{11}$
2	$\bar{6}+\overline{66}$
/ 4	$\bar{3}+\overline{33}$
zusammen	$\bar{3}+\overline{11}+\overline{33}.$

Rechentechnik handeln wird: das „Stammbruchpostulat“ und die „Dyadik“. Bei der Frage 2. könnte man hoffen, wieder auf sicheren bloß mathematischen Boden zu kommen; es wäre der Fall, wenn man folgendes zeigen könnte: Die kanonischen $2/n$-Zerlegungen sind die (natürlich auf dem dyadischen Verfahren beruhende) Antwort auf die Frage: „womit ist n zu multiplizieren, um 2 zu erhalten“. Leider zeigen die Tatsachen, daß es nicht so einfach geht[130]): die wirkliche $2/n$-Tabelle gibt ganz andere Zerlegungen, als man sie nach solchen Divisionen erwarten würde.

Es ist kein Wunder. Wenn 1. eben richtig beantwortet wurde, so ist diese Antwort auf 2. a priori wenig wahrscheinlich. Denn 1. beruht auf der Auffassung, daß die ganze Fragestellung von dem Verdoppeln herstammt, wobei $\overline{\mathrm{II}}$ sozusagen als zählbares Individuum, als Einheit, gilt, während man statt dessen für 2. an den Quotienten zweier ganzer Zahlen zu denken hätte. Es bleibt also nichts übrig, als sich mit 2. als mit einem sehr viel komplizierterem geschichtlichen Prozeß auseinanderzusetzen.

Tabelle VII (S. 350) enthält das überlieferte System der „kanonischen“ $2/n$-Zerlegungen; die Bedeutung der Spalte „$1+\alpha$“ wird sogleich zu erörtern sein. Tabelle IX (S. 366) soll eine Übersicht über den im folgenden dargestellten Aufbau vermitteln.

I. Grundlagen. Die Gruppe der $\overline{\overline{3}}$-Zerlegungen.

Durch den Text L ist ein Dokument erhalten, das geeignet ist, die Technik der Gewinnung von Bruchrelationen deutlich vor Augen zu führen. L enthält nichts als völlig kommentarlose Bruchrechnungen, die aber doch bei richtiger Anordnung in deutlich erkennbarem inneren Zusammenhang stehen[131]). Die einfachste Gruppe von Relationen ist[132])

$$\text{(I)} \quad \overline{6}+\overline{6}=\overline{3}$$
$$\text{(II)} \quad \overline{6}+\overline{6}+\overline{6}=\overline{2}$$
$$\text{(III)} \quad \overline{3}+\overline{3}=\overline{\overline{3}}$$

— genau solche Beziehungen, wie wir sie schon eben bei Behandlung der Frage 1. erwähnt haben, und die man als „zwei Sechstel = ...“ usw.

[130]) Wie etwa die „Division“ 2:15 aussehen müßte, hat Gillain angegeben (AEME S. 128f.). Er kommt zu fünferlei Möglichkeiten, die zwar die kanonische Zerlegung $\overline{10}+\overline{30}$ enthalten, aber weder das Resultat der Anwendung der $^1/_2$-Reihe ($\overline{8}+\overline{120}$) noch der $^1/_3$-Reihe ($\overline{12}+\overline{24}+\overline{120}$). Auf diesem Weg ist selbstverständlich erst recht nicht Eindeutigkeit zu erlangen, weil der Möglichkeiten der „Division“ zu viele sind.

[131]) Unabhängig voneinander von Vogel (Archiv NF. 2, 1929, S. 386ff.) und mir (ÄZ 64, 1929, S. 44ff.) bearbeitet.

[132]) Ich verzichte auf die Wiedergabe der sachlich bedeutungslosen zufälligen Anordnung im Text. Vgl. aber auch Anhang 5 zu § 7 Ende.

Tabelle VII. Die $2/n$-Tabelle.

n	$2/n$	$1+\alpha$	n	$2/n$	$1+\alpha$
3	$\overline{2}+\overline{6}$	$1+\overline{2}$	53	$\overline{30}+\overline{318}+\overline{795}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{10}$
5	$\overline{3}+\overline{15}$	$1+\overline{\overline{3}}$	55	$\overline{30}+\overline{330}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{6}$
7	$\overline{4}+\overline{28}$	$1+\overline{2}+\overline{4}$	57	$\overline{38}+\overline{114}$	$1+\overline{2}$
9	$\overline{6}+\overline{18}$	$1+\overline{2}$	59	$\overline{36}+\overline{236}+\overline{531}$	$1+\overline{2}+\overline{12}+\overline{18}$
11	$\overline{6}+\overline{66}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{6}$	61	$\overline{40}+\overline{244}+\overline{488}+\overline{610}$	$1+\overline{2}+\overline{40}$
13	$\overline{8}+\overline{52}+\overline{104}$	$1+\overline{2}+\overline{8}$	63	$\overline{42}+\overline{126}$	$1+\overline{2}$
15	$\overline{10}+\overline{30}$	$1+\overline{2}$	65	$\overline{39}+\overline{195}$	$1+\overline{\overline{3}}$
17	$\overline{12}+\overline{51}+\overline{68}$	$1+\overline{3}+\overline{12}$	67	$\overline{40}+\overline{335}+\overline{736}$	$1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{20}$
19	$\overline{12}+\overline{76}+\overline{114}$	$1+\overline{2}+\overline{12}$	69	$\overline{46}+\overline{138}$	$1+\overline{2}$
21	$\overline{14}+\overline{42}$	$1+\overline{2}$	71	$\overline{40}+\overline{568}+\overline{710}$	$1+\overline{2}+\overline{4}+\overline{40}$
23	$\overline{12}+\overline{276}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{4}$	73	$\overline{60}+\overline{219}+\overline{292}+\overline{365}$	$1+\overline{6}+\overline{20}$
25	$\overline{15}+\overline{75}$	$1+\overline{\overline{3}}$	75	$\overline{50}+\overline{150}$	$1+\overline{2}$
27	$\overline{18}+\overline{54}$	$1+\overline{2}$	77	$\overline{44}+\overline{308}$	$1+\overline{2}+\overline{4}$
29	$\overline{24}+\overline{58}+\overline{174}+\overline{232}$	$1+\overline{6}+\overline{24}$	79	$\overline{60}+\overline{237}+\overline{316}+\overline{790}$	$1+\overline{4}+\overline{15}$
31	$\overline{20}+\overline{124}+\overline{155}$	$1+\overline{2}+\overline{20}$	81	$\overline{54}+\overline{162}$	$1+\overline{2}$
33	$\overline{22}+\overline{66}$	$1+\overline{2}$	83	$\overline{60}+\overline{332}+\overline{415}+\overline{498}$	$1+\overline{3}+\overline{20}$
35	$\overline{30}+\overline{42}$	$1+\overline{6}$	85	$\overline{51}+\overline{255}$	$1+\overline{\overline{3}}$
37	$\overline{24}+\overline{111}+\overline{296}$	$1+\overline{2}+\overline{24}$	87	$\overline{58}+\overline{174}$	$1+\overline{2}$
39	$\overline{26}+\overline{78}$	$1+\overline{2}$	89	$\overline{60}+\overline{356}+\overline{534}+\overline{890}$	$1+\overline{3}+\overline{10}+\overline{20}$
41	$\overline{24}+\overline{246}+\overline{328}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{24}$	91	$\overline{70}+\overline{130}$	$1+\overline{5}+\overline{10}$
43	$\overline{42}+\overline{86}+\overline{129}+\overline{301}$	$1+\overline{42}$	93	$\overline{62}+\overline{186}$	$1+\overline{2}$
45	$\overline{30}+\overline{90}$	$1+\overline{2}$	95	$\overline{60}+\overline{380}+\overline{570}$	$1+\overline{2}+\overline{12}$
47	$\overline{30}+\overline{141}+\overline{470}$	$1+\overline{2}+\overline{15}$	97	$\overline{56}+\overline{679}+\overline{776}$	$1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{14}+\overline{28}$
49	$\overline{28}+\overline{196}$	$1+\overline{2}+\overline{4}$	99	$\overline{66}+\overline{198}$	$1+\overline{2}$
51	$\overline{34}+\overline{102}$	$1+\overline{2}$	101	$\overline{101}+\overline{202}+\overline{303}+\overline{606}$	1

zu lesen hat: ein schönes Beispiel, wie „gemischte" Brüche in Ägypten aussehen!

Was will man mit solchen „trivialen" Relationen? Ich behaupte: sie dienen zum „Beweise" anderer Beziehungen, die (im Sinne der oben als Antwort auf „1." gegebenen Auffassung) bestimmt sind, das fortgesetzte Wiederholen desselben Zahlzeichens zu umgehen, etwa indem man in (II) so zusammenfaßt, daß wegen (I)

$$(1) \quad \overline{3}+\overline{6}=\overline{2}$$

dasteht, oder mit (III)

$$(1^{*}) \quad \overline{\overline{3}}=\overline{2}+\overline{6},$$

beides Relationen, denen man auf Schritt und Tritt in der ägyptischen Mathematik begegnet[133]. Es ist aber hervorzuheben, daß sie in L **nicht** selbst genannt sind, obwohl man sie durch (I), (II), (III) vor Augen hat; ähnlich bei allen weiteren Rechnungen: sie gehen genau bis zum letzten Schritt vor die kanonische $2/n$-Zerlegung. Man kann nicht bezweifeln, daß sowohl $2/n$-Zerlegungen wie (1), (1*) jedem Rechner geläufig waren[134]; daß sie in L weggelassen wurden, betrachte ich nur als Ausdruck ihrer Selbstverständlichkeit — den ganzen Text könnte ich mir etwa als „Rechenzettel" beim Erklären von Regeln der Bruchrechnung denken.

Die weiteren Relationen des Textes lassen sich nun folgendermaßen anordnen, wobei nur die in [ ] stehenden Glieder der allgemeinen Gesetzmäßigkeit folgend hinzugefügt sind:

(1)	$[\overline{3}+\overline{6}=\overline{2}]$	(1′)	$[\overline{2}+\overline{3}+\overline{6}=1]$
(2)	$[\overline{6}+\overline{12}=\overline{4}]$		
(3)	$\overline{9}+\overline{18}=\overline{6}$	(3′)	$[\overline{6}+\overline{9}+\overline{18}=\overline{3}]$
(4)	$\overline{12}+\overline{24}=\overline{8}$		
(5)	$\overline{15}+\overline{30}=\overline{10}$	(5′)	$[\overline{10}+\overline{15}+\overline{30}=\overline{5}]$
(6)	$\overline{18}+\overline{36}=\overline{12}$		
(7)	$\overline{21}+\overline{42}=\overline{14}$	(7′)	$\overline{14}+\overline{21}+\overline{42}=\overline{7}$
(8)	$\overline{24}+\overline{48}=\overline{16}$		
(9)	$[\overline{27}+\overline{54}=\overline{18}]$	(9′)	$\overline{18}+\overline{27}+\overline{54}=\overline{9}$
(10)	$\overline{30}+\overline{60}=\overline{20}$		
(11)	$[\overline{33}+\overline{66}=\overline{22}]$	(11′)	$\overline{22}+\overline{33}+\overline{66}=\overline{11}$

es folgen noch

(15)	$\overline{45}+\overline{90}=\overline{30}$	(15′)	$\overline{30}+\overline{45}+\overline{90}=\overline{15}$
(16)	$\overline{48}+\overline{96}=\overline{32}$		

und (wohl durch Halbieren)

$$(32) \quad \overline{96}+\overline{192}=\overline{64}.$$

---

133) Vgl. auch Anhang 3 zu § 7.

134) Übrigens kommen $2/n$-Zerlegungen in einer nicht in unseren Zusammenhang gehörenden Rechnung von L wirklich vor.

Man sieht hier wieder einmal deutlich, wie die ägyptische Mathematik durch ganz schrittweises Vorgehen immer neue Relationen aus einer ganz einfachen und übersehbaren wie (1) und (1′) zu gewinnen weiß (vgl. z. B. Tabelle III S. 331). *Dieses Relationenschema ersetzt unsere Formeln*

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{n}+\frac{1}{2n}=\frac{3}{2n} \qquad \text{(a}'\text{)} \quad \frac{3}{2n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}=\frac{3}{n}$$

in der nur Stammbrüche vorkommen, wenn n durch 3 teilbar ist.

Gehen wir noch einmal zum Ausgangspunkt dieses Systems zurück: Aus den Beziehungen (I) bis (III) (S. 349) folgen durch geeignetes Zusammenfassen sofort einerseits

$$(1) \quad \bar{3}+\bar{6}=\bar{2} \quad \text{und} \quad (1') \quad \bar{2}+\bar{3}+\bar{6}=1$$

andererseits auch

$$(1^*) \qquad \bar{\bar{3}}=\bar{2}+\bar{6}.$$

(1*) ist nun offenbar sowohl aus (1) wie aus (1′) ableitbar: entweder man addiert in (1) beiderseits $\bar{6}$, oder man läßt in (1′) das $\bar{3}$ weg. Eine solche Abänderung der Ausgangsformel (1) und (1′) pflanzt sich durch die ganze Reihe weiter fort: *wie aus (1) und (1′) die Zerlegung (1*) von* $\bar{\bar{3}}$ *folgt, so erhält man aus allen weiteren Zeilen eine Zerlegung eines 2/n; es sind genau „kanonische“ Zerlegungen der 2/n-Tabelle* (vgl. Tabelle IX S. 366). Geht man von (1) aus, so fallen die Formeln gerader Nummer weg, weil deren „n“ durch 2 teilbar ist; dagegen hat der Text bei den ′-Formeln gerade n bereits nicht mit aufgenommen. Allgemein heißt dies: sowohl aus (a) wie aus (a') erhält man (für durch 3 teilbare und ungerade n) die Zerlegung

$$\text{(a}^*\text{)} \quad \frac{2}{n}=\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n}$$

entweder durch Addition von $\frac{1}{2n}$ in (a) oder durch Weglassen von $\frac{1}{n}$ in (a').

Die Bedeutung von L liegt eben darin, daß man deutlich vor Augen hat, auf welchem Wege das geleistet wurde, was wir heute durch eine Formel überschauen können. Man sieht, wie es einfach die Kraft des schematischen Rechnens mit sich bringt, daß man von der berühmten Relation $\bar{\bar{3}}=\bar{2}+\bar{6}$[135]) ausgehend gleich zu einer ganzen Klasse von $2/n$-Zerlegungen gelangt, die von $\bar{n}+\bar{n}$ glücklich verschieden ist und trotzdem gar nicht dazu kommt, von der prinzipiellen „Mehrdeutigkeit“ der Aufgabe, $2/n$ als Stammbruchsumme darzustellen, etwas zu verspüren.

In der eben behandelten Gruppe von Zerlegungen sehe ich den natürlichen historischen Ausgangspunkt aller $2/n$-Zerlegungen über-

[135]) Sie ist in R 61b ausdrücklich als Regel formuliert und wird immerfort angewandt (vgl. Anhang 3 zu § 7 S. 369ff).

haupt. Der Verlauf dieser Entwicklung muß nun aus dem Typus der andern $2/n$-Zerlegungen erschlossen werden.

II. Erste Weiterbildung („primäre Zerlegungen“).

Schon die einleitenden Bemerkungen zu diesem Paragraphen haben gezeigt, daß es sich bei der Untersuchung der $2/n$-Tabelle nicht darum handeln kann, eine bestimmte mathematische „Theorie“ aufzufinden, nach welcher die kanonischen Zerlegungen vor allen sonst denkbaren ausgezeichnet erscheinen, sondern daß es sich um einen ideengeschichtlichen Prozeß handelt, dessen treibende Kräfte sehr mannigfaltiger Natur sind, jedenfalls aber in ganz frühe Entwicklungsphasen des mathematischen Denkens zurückgreifen. Das Folgende wird zeigen, daß sich auch die Methodik der $2/n$-Zerlegungen deutlich stuft — ich zweifle nicht daran, daß man es dabei mit vielleicht zeitlich weit auseinanderliegenden und nur allmählich gewonnenen Resultaten zu tun hat. Ein solcher Einschnitt liegt sicherlich nach der eben besprochenen „$\bar{\bar{3}}$-Gruppe“ von Zerlegungen (d. h. durch 3 teilbare n), auf die man eben schon aus den allereinfachsten Bruchrelationen kommen konnte. Man wird fragen, was man dann etwa mit $2/5$ anfing. Antwort: wie heute, wenn ein Problem die Leistungsfähigkeit der Mathematik übersteigt: man probiert herum, oder man mogelt, oder gibt auf. Die erste Methode ist die wahrhaft fruchtbare, damals wie heute. Für die zweite scheint in der Zerlegung von $2/101$ (vgl. S. 364) ein Beispiel vorzuliegen. Für die dritte sei (um in der altorientalischen Kultur zu bleiben) das Beispiel der babylonischen Bruchrechnung angeführt: in den Reziprokentabellen steht des öfteren an den Stellen, die zu nicht abbrechenden Sexagesimalbrüchen Anlaß geben würden[136]), „teilt nicht“, womit der Fall erledigt scheint. Es wird bei der ägyptischen Bruchrechnung nicht anders gegangen sein.

Dies war zur Vermeidung von Mißverständnissen voranzuschicken, wenn ich jetzt die Frage zu beantworten suche, wie sich das „Prinzip“ der Zerlegungen vom $\bar{\bar{3}}$-Typus sinngemäß erweitern ließ. „Prinzip“ soll eben nicht beabsichtigte mathematische Theorie heißen, sondern nur Beibehaltung bzw. allmähliche Umgestaltung historisch entwickelter Methodik — eine Eigenschaft, die man dem Ägypter gewiß zusprechen darf.

Die Zerlegungen der $\bar{\bar{3}}$-Gruppe haben folgenden Typus

$$\begin{aligned} \bar{\bar{3}} &= \bar{2} + \bar{6} \\ \bar{9} + \bar{9} &= \bar{6} + \overline{18} \\ \overline{15} + \overline{15} &= \overline{10} + \overline{30} \end{aligned}$$

usw.

136) Wenn n andere Primfaktoren als 2, 3, 5 enthält. Vgl. QS B 1 S. 188.

wobei, wie wir gesehen haben, Relationen wie

$$\bar{2} = \bar{6} + \bar{6} + \bar{6} = \bar{3} + \bar{6}$$

den Ausgangspunkt bildeten. Rechts steht schon ein Drittel und ein halbes Drittel; man ergänzt dies sofort zu einer Stammbruchdarstellung von zwei Drittel, wenn man beiderseits noch ein weiteres halbes Drittel hinzugibt — ein Gedankengang, der der ägyptischen Rechentechnik besonders naheliegt: man denke an ihre „Division" (vgl. S. 327), ihre „Ergänzungsrechnungen" (vgl. ÄBR S. 28ff.) usw.

Allgemein läßt sich der bisher geschilderte Sachverhalt so darstellen: Hat man irgend woher eine Stammbruchrelation

$$(1) \qquad \bar{a} = \bar{n} + \bar{m}$$

wo $\bar{m} < \bar{n}$ sein möge, also etwa

$$(1\text{a}) \qquad \bar{m} = \alpha\,\bar{n} \quad \alpha < 1,$$

so hat man mit Hilfe jenes Bruches β, der α zu 1 ergänzt

$$(2\text{a}) \qquad \beta = 1 - \alpha$$

sofort eine $2/n$-Zerlegung

$$(2) \qquad \bar{n} + \bar{n} = \bar{a} + \beta\,\bar{n}$$

da ja $\bar{a} + \beta\bar{n} = \bar{n} + \bar{m} + \beta\bar{n} = \bar{n} + \alpha\bar{n} + (1 - \alpha)\bar{n} = \bar{n} + \bar{n}$ ist. Dabei sind allerdings im Rahmen des historisch Gegebenen zwei Einschränkungen zu machen, von denen die erste selbstverständlich, die zweite aber von ausschlaggebender Bedeutung ist:

Bedingung 1. Die Brüche α und $\beta = 1 - \alpha$ müssen entweder selbst *Stammbrüche* oder mindestens *Summen von Stammbrüchen* sein — das ist der Inhalt des für die ganze ägyptische Bruchrechnung charakteristischen „Stammbruchpostulats" (vgl. S. 348). Dann besagt (2a): ist α oder β insbesondere ein *Stammbruch*, so ist β bzw. α der zugehörige „*Komplementbruch*" — d. h. man hat es dann mit jenem Begriffspaar zu tun, das, wie Sethe[137]) gezeigt hat, zu den fundamentalsten und ursprünglichsten Gebilden in der Entwicklung des Zahlbegriffs überhaupt gehört. Solche Paare α und β sind beispielsweise: $\bar{2}$ und $\bar{2}$, oder $\bar{3}$ und $\bar{\bar{3}}$ oder $\bar{4}$ und $\bar{2} + \bar{4}$ — eine Wechselbeziehung, die sich am deutlichsten in der Sonderrolle von „2/3" ausspricht, der in ganz früher Zeit eine analoge Hervorhebung von „3/4" durch ein besonderes Zahlzeichen an die Seite gestellt war[138]). Der einfachste Fall $\alpha = \beta = \bar{2}$ ist gerade der bei den Zerlegungen der $\bar{\bar{3}}$-Gruppe realisierte

$$\begin{array}{ll} \bar{2} = \bar{3} + \bar{6} & \qquad \bar{2} + \bar{6} = \bar{\bar{3}} \\ \bar{a} = \bar{n} + \bar{2}\cdot\bar{n} & \qquad \bar{a} + \bar{2}\cdot\bar{n} = \bar{n} + \bar{n} \end{array}$$

---

[137]) ZZ insb. Abschnitt III und IV.

[138]) Vgl. Sethe, ZZ S. 98 und im folgenden Anhang 3 zu § 7.

Bedingung 2. Man hat sich vor dem Fehler zu hüten, das, was wir durch das Gleichungssystem (1), (1′), (1*) beschreiben, etwa als bewußte Grundlage einer einheitlichen Methode zur Gewinnung von $2/n$-Darstellungen auffassen zu wollen. Wir haben vielmehr schon gesehen, aus welchen einfachen Beziehungen sich die Zerlegungen der $\overline{3}$-Gruppe herleiteten. Nur dann wird man zu einem historisch möglichen Aufbau gelangen, wenn man nur solche Begriffsbildungen und Schlußweisen zugrunde legt, die in einem ganz frühen Stadium der Entwicklung möglich sind. In Anwendung auf den vorliegenden Fall heißt dies: Die Ausgangsrelationen $\overline{a}=\overline{n}+\overline{m}=\overline{n}+\alpha\overline{n}$ bzw. die Brüche α (und damit eo ipso β) müssen ohne Voraussetzung einer besonderen Technik des Bruchrechnens bereits zu gewinnen sein. Die in § 6 durchgeführte Analyse der bereits entwickelten Bruchrechnung ließ doch noch erkennen, wo der Trennungsstrich zwischen solchen ursprünglichen Relationen und ausgebildeter Technik zu ziehen ist: er entspricht der Unterscheidung zwischen „übersehbaren" Relationen und solchen, die eines besonderen Algorithmus bedürfen („Hilfszahlen"). So läßt sich die Forderung historischer Möglichkeit ganz präzise im Sinne von § 6 als „Bedingung 2" formulieren: *In den Ausgangsrelationen* (1) *müssen* $\overline{n}+\alpha\overline{n}$ *„übersehbare" Bruchaggregate sein*, oder: *in* $\overline{n}+\alpha\overline{n}$ *dürfen nur „natürliche" Bruchteile von* $\overline{n}$ *auftreten.*

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun möglich, die Gruppe der $\overline{\overline{3}}$-Zerlegungen als den Ausgangspunkt einer ganzen Reihe weiterer $2/n$-Zerlegungen zu erkennen. Der allen diesen Zerlegungen mit der $\overline{\overline{3}}$-Gruppe gemeinsame Ausgangspunkt läßt sich dabei in folgender Fragestellung fassen: *Um eine Stammbruchzerlegung von* $\overline{n}+\overline{n}$ *zu gewinnen, füge man zu* $\overline{n}$ *einen solchen* übersehbaren *Bruchteil* $\overline{m}=\alpha\overline{n}$ *von* $\overline{n}$ *hinzu, daß die Summe* $\overline{n}+\overline{m}$ *wieder ein Stammbruch* $\overline{a}$ *wird; dann entsteht aus* $\overline{a}$ *durch Hinzufügung des komplementären Bruchteils* $\beta\overline{n}=(1-\alpha)\,\overline{n}$ *die Stammbruchzerlegung*

$$\overline{n}+\overline{n}=\overline{a}+\beta\overline{n}.$$

Bevor wir an den Vergleich mit den textlich gegebenen Zerlegungen herangehen, ist festzustellen, daß man durch diese Methode nur eine endliche Anzahl von Zerlegungsgruppen[139]) erhalten kann; die „Bedingung 2" schränkt ja die Bruchteile α nur auf die geringe Anzahl „übersehbarer" Kombinationen natürlicher Brüche ein, wozu noch weiter zu berücksichtigen ist, daß nicht jedes an sich zugelassene α eine neue

[139]) Selbstverständlich gibt jede solche Gruppe zu unendlich vielen einzelnen Zerlegungen Anlaß: der $\overline{\overline{3}}$-Gruppe entspricht die Gesamtheit aller durch 3 teilbaren n usw.

Gruppe liefern muß[140]). Diese endliche Menge von Zerlegungsgruppen bezeichne ich kurz als „primäre“ Zerlegungen[141]), im Gegensatz zu allen solchen, die sich mit dem genannten Verfahren prinzipiell nicht fassen lassen. Um über die „primären“ Zerlegungen hinausgehende $2/n$-Darstellungen erhalten zu können, hat man entweder die Bruchteile α von der durch „Bedingung 2“ gemachten Einschränkung zu befreien oder nach ganz neuen Methoden zu verfahren. Wir werden sehen (S. 358ff.), daß also die Scheidung zwischen „übersehbar“ und „algorithmisch“ unangetastet blieb. Diese nie verwischte Verschiedenheit der Rechentechnik, die sofort zur Geltung kommt, wie die „Übersehbarkeit“ ein Ende findet, die schon bei der Hilfszahlentechnik ganz deutlich in Erscheinung trat, — sie läßt sich nun in die Fundamente der ganzen Bruchrechnung hinein verfolgen und gibt damit das wichtigste Prinzip zur Einsicht in den gedanklichen Aufbau der ganzen ägyptischen Arithmetik ab[142]).

Der Text L hat uns die Entstehungsgeschichte der $\overline{\overline{3}}$-Zerlegungen gezeigt. Es gilt nun, in Übereinstimmung mit der oben gegebenen Formulierung, die übrigen „primären“ Zerlegungsmöglichkeiten aufzufinden. Nach dem in der $\overline{\overline{3}}$-Gruppe vorliegenden einfachsten Falle des zu $\overline{n}$ hinzuzufügenden Bruches $\overline{m} = \alpha\overline{n} = \overline{2}\,\overline{n}$ (mit $\beta = \alpha = \overline{2}$) erscheint nun das Paar $\overline{3}$ und $\overline{\overline{3}}$ als naheliegendste Erweiterung. $\alpha = \overline{3}$ liefert allerdings keine verwendbare $2/n$-Zerlegung. Denn die Bedingung $\overline{n} + \alpha\overline{n} = \overline{a}$ (Stammbruch!) zeigt, daß wegen $1/a = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{n} = \frac{4}{3n}$ nur solche n in Frage kämen, die durch 4 teilbar sind — für solche ist aber $\frac{2}{n}$ von selbst wieder ein Stammbruch, also eine „Zerlegung“ überflüssig. Dagegen liefert $\alpha = \overline{\overline{3}}$

$$\overline{a} = \overline{n} + \overline{\overline{3}}\,\overline{n}$$

als Bedingung die Teilbarkeit von n durch 5 mit

$$\overline{n} + \overline{n} = \overline{a} + \overline{3}\,\overline{n} \qquad \left(\overline{a} = \frac{5}{3n}\right)$$

als zugehöriger $2/n$-Darstellung. Wie Tabelle VII (S. 350) und IX (S. 366) zeigen, ist sie für $n = 5, 25, 65, 85$ angewandt, d. h. also im Intervall

140) Ist $\alpha = \frac{r}{s}$ $(r < s$ und $(r, s) = 1)$ so muß wegen $\bar{a} = \bar{n}\left(1 + \frac{r}{s}\right)$ offenbar $r + s$ eine Primzahl sein, wenn die zugehörige Gruppe nicht schon in einer mit kleinerem s enthalten sein soll. (Siehe auch gleich unten S. 361.)

141) Sachlich wäre vielleicht „primitiv“ ganz am Platze, wenn dieses Wort nicht zu sehr mit dem Beigeschmack von Mangelhaftigkeit behaftet wäre.

142) In ÄBR habe ich die „primären“ Zerlegungen als „reguläre“ bezeichnet und davon die „Ausnahmezahlen“ unterschieden. Diese Terminologie erweckt den Anschein, als sei in den letzteren ein Verstoß gegen die festen Regeln der ägyptischen Arithmetik enthalten, während sie in Wirklichkeit nur eine neue Phase der Entwicklung darstellen. Ich sage daher im folgenden „*primär*“ und „*algorithmisch*“, was besser den Kern der Sache trifft.

von 5 bis 85 nur unter Auslassung von 45 und 75, die aber bereits zur $\overline{\overline{3}}$-Gruppe gehören (schon durch 3 teilbar!) und $n = 35$ und 55 als Ausnahmen; $n = 55$ wird sich sehr bald erledigen (S. 358), $n = 35$ aber wird uns erst in ganz anderem Zusammenhang zu beschäftigen haben (S. 364).

Mit $\overline{2}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{\overline{3}}$ sind die zueinander komplementären Brüche, die außerdem als „Stammbrüche“ zu gelten haben, erschöpft. Als nächstes führt die Zusammenfassung von $\overline{n}+\overline{2n}+\overline{4n}$ (man beachte die formale Analogie zum Multiplikations- und „Divisions“-Algorithmus!) zu einer neuen Gruppe von „primären“ $2/n$-Zerlegungen: es muß n durch 7 teilbar sein, damit

$$\overline{a} = \overline{n} + \overline{2n} + \overline{4n}$$

ein Stammbruch wird. Tabelle VII und IX zeigen, daß die resultierende Zerlegung

$$\overline{n} + \overline{n} = \overline{a} + \overline{4n} \qquad \left(\overline{a} = \frac{7}{4\,n}\right)$$

für $n = 7$, 49, 77 angewandt ist, also ausnahmslos, natürlich unter Verzicht auf die durch 2/3- und 2/5-Gruppe schon erledigten Fälle. Zu dieser Verifizierung aus der $2/n$-Tabelle tritt noch eine schöne Bestätigung aus L hinzu. Dort ist die Ausgangsrelation

$$\overline{7} + \overline{14} + \overline{28} = \overline{4}$$

wieder angegeben, ebenso wie bei den 2/3-Relationen. In Analogie zu den $'$-Relationen (vgl. S. 351) wäre hier $[\overline{4} + \overline{7} + \overline{14} + \overline{28} = \overline{2}]$ zu ergänzen. Außerdem[143]) gibt L die $'$-Formel $\overline{28} + \overline{49} + \overline{98} + \overline{196} = \overline{14}$, dem wieder $[\overline{49} + \overline{98} + \overline{196} = \overline{28}]$ entsprechen würde, was zur Zerlegung $\overline{49} + \overline{49} = \overline{28} + \overline{196}$ gehört. Das bestätigt also unmittelbar die eben dargestellte Betrachtungsweise, nach der die $\overline{\overline{3}}$-Zerlegungen das Vorbild aller übrigen „primären“ Zerlegungen abgegeben haben.

Auf das Schema der 2/7-Gruppe folgt dann $\overline{a} = \overline{n} + \overline{2n} + \overline{8n}$ mit der $2/n$-Zerlegung $\overline{n} + \overline{n} = \overline{a} + \overline{4n} + \overline{8n}$, was, wegen $\overline{a} = \frac{13}{8\,n}$, verlangt, daß n durch 13 teilbar ist und in der Tat mit der kanonischen Zerlegung $\overline{13} + \overline{13} = \overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$ übereinstimmt (vgl. Tabelle VII und IX S. 366).

Schließlich ist es leicht (in Analogie zum Ursprung der $\overline{\overline{3}}$-Zerlegungen)[144]) in $\overline{\overline{3}} + \overline{6}$ und $\overline{6}$ zwei komplementäre Brüche zu erkennen, die zu

$$\overline{n} + \overline{n} = \overline{a} + \overline{6n} \qquad \left(\overline{a} = \frac{11}{6\,n}\right)$$

als $2/n$-Zerlegung führen, wenn

$$\overline{a} = \overline{n} + \overline{\overline{3}n} + \overline{6n}$$

ein Stammbruch, d. h. a durch 11 teilbar ist. Man erhält so (vgl. Ta-

---

[143]) Damit ist der die $2/n$-Tabelle betreffende Inhalt von L erschöpft. Für die Einzelheiten vgl. ÄZ 65 S. 44ff.

[144]) Vgl. die Angabe von L (S. 349): $\overline{3} + \overline{3} = \overline{\overline{3}} \qquad \overline{3} = \overline{6} + \overline{6}$.

belle VII S. 350) die $2/n$-Zerlegungen für $n = 11$ und $n = 55$, wobei der zweite Fall bereits zur 2/5-Gruppe hätte genommen werden können (vgl. S. 357).

Durch das Vorangehende ist die Gesamtheit der „primären" Zerlegungen umfaßt. Man überzeugt sich leicht, daß es bei der Einschränkung auf „natürliche" Bruchteile von $\overline{n}$ bzw. auf die daraus zusammensetzbaren „übersehbaren" Aggregate keine anderen Ausgangsrelationen $\overline{a} = \overline{n} + \alpha\overline{n}$ (mit entsprechender $2/n$-Zerlegung $\overline{n} + \overline{n} = \overline{a} + \beta\overline{n}$ wo $\beta = 1 - \alpha$) gibt [145]). Dadurch sind die $2/n$-Zerlegungen für $n = 3, 5, 7, 11, 13$ gefunden, sowie für alle ganzen Vielfachen dieser n (vgl. Tab. IX).

III. Die Übergangsgruppe.

Wie schon bemerkt, halte ich es für durchaus wahrscheinlich, daß erst die $\bar{\bar{3}}$-Gruppe, dann die daran anschließenden „primären" Zerlegungen einmal einen wirklichen Einschnitt in der Technik der Bruchrechnung bedeutet haben, daß alle übrigen $2/n$-Zerlegungen (um einen Terminus aus der Gleichungsauflösung zu gebrauchen) „transzendente" Probleme darstellen: „quod vires algebrae transcendit". Erst mit der Entwicklung einer über die Beherrschung der „übersehbaren" Grundrelationen hinausgehenden festen Rechentechnik, eines bestimmten „Algorithmus", war diese Schranke zu überwinden.

Die Wirklichkeit historischer Prozesse kennt natürlich kaum absolut scharfe Einschnitte. So ist auch hier die Weiterentwicklung schon in der vorangehenden Phase vorbereitet. Formal gesehen ist ja die Methodik der „primären" Zerlegungen mit der Technik von Multiplikation und vor allem Division nahe verwandt: Das Operieren mit $\overline{n} + \overline{2n}$ oder $\overline{n} + \overline{2n} + \overline{4n}$ oder $\overline{n} + \bar{\bar{3}}\overline{n}$ usw. entspricht ja vollkommen dem Zusammenfassen der Kennziffern bei der Multiplikation; bei der Division noch dadurch modifiziert, daß nicht nur dyadische Brüche (die „1/2-Reihe"), sondern auch die der 2/3-Reihe vorkommen.

145) Etwa an Hand des folgenden Schemas:

$\alpha =$	1	$+\bar{2}$	$+\bar{4}$	$+\bar{8}$
$n =$		*3	*7	15
			5	*13
				11
				9

für die 1/2-Reihe

$\alpha =$	1	$+\bar{\bar{3}}$	$+\bar{3}$	$+\bar{6}$
$n =$		*5	—	—
			4	9
				*11
				7

für die 1/3-Reihe.

Die n der ersten Zeile entstehen bei Addition aller Summanden von α bis zur entsprechenden Stelle (also 3 bei $1 + \bar{2}$, 7 bei $1 + \bar{2} + \bar{4}$ usw.), in der zweiten Zeile ist der zweite Summand von α wegzulassen, in der dritten Zeile der dritte, in der vierten Zeile der zweite und dritte. * deutet die tatsächliche Verwendung in der $2/n$-Tabelle an.

Diese (sowohl formale wie entwicklungsgeschichtliche) Parallelität zwischen primären $2/n$-Zerlegungen und Divisionsmethode vermittelt nun den Übergang zu den rein algorithmischen Zerlegungen. Alle $2/n$-Zerlegungen laufen ja im Grunde darauf hinaus, Brüche α und β so aufzufinden, daß $(1+\alpha)+\beta=2$ ist. Dabei drückt sich der historische Charakter dieses Prozesses darin aus, daß α und β aus natürlichen Brüchen bestehen, die genannte Relation also eine „übersehbare" ist. In der primären Gruppe sind die allereinfachsten derartigen Möglichkeiten erschöpft, die darin bestehen, daß man die Brüche der 1/2-Reihe geeignet kombiniert bzw. von $\overline{\overline{3}}+\overline{3}=1$ (evtl. modifiziert) Gebrauch macht[146]). Die nun folgenden Zerlegungen kann man formal einfach dadurch erhalten, daß man auch Kombinationen zwischen 1/2- und 2/3-Reihe zuläßt. Geschichtlich wird dies dadurch erreicht, daß man zwar nach wie vor an der Übersehbarkeit der Ergänzung $\alpha+\beta=1$ festhält[147]), aber schon insofern „algorithmisch" vorgeht, daß man sich durch „Division" aus n einen solchen Bruch $\overline{a}=(1+\alpha)\overline{n}$ zu verschaffen sucht, daß er zu einer übersehbaren Ergänzung von $1+\alpha$ mit β zu 2 Anlaß gibt; Beispiel: R 2/17:

	1	17
	.....	
/	$\overline{12}$	$1+\overline{4}+\overline{6}$

d. h. $\alpha=\overline{4}+\overline{6}$ woraus sich $\beta=\overline{3}+\overline{4}$ ergibt.

Bei dieser „Division" oder besser „Zerteilung" wird mit der 2/3- statt mit der 1/2-Reihe operiert, deren größerer Nenner raschere Erreichung von $1+\alpha$ und damit kleinere Nenner von α, also auch von β, erwarten lassen[148]). Dabei treten in $1+\alpha$ *von selbst* (wegen der Halbierungs-

---

146)

α	β	Gruppe
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{\overline{3}}$
$\overline{\overline{3}}$	$\overline{3}$	2/5
$\overline{2}+\overline{4}$	$\overline{4}$	2/7
$\overline{2}+\overline{8}$	$\overline{4}+\overline{8}$	2/13
$\overline{\overline{3}}+\overline{6}$	$\overline{6}$	2/11

147) Dadurch schließen sich die Zerlegungen der Übergangsgruppe viel enger den primären wie den „algorithmischen" Zerlegungen an.

148) Beispiel:

	1	17	statt	1	17
	$\overline{\overline{3}}$	$11+\overline{3}$		$\overline{2}$	$8+\overline{2}$
	$\overline{3}$	$5+\overline{\overline{3}}$		$\overline{4}$	$4+\overline{4}$
	$\overline{6}$	$2+\overline{2}+\overline{3}$		$\overline{8}$	$2+\overline{8}$
/	$\overline{12}$	$1+\overline{4}+\overline{6}$		$\overline{16}$	$1+\overline{16}$

d. h. $\beta=\overline{3}+\overline{4}$ d. h. $\beta=\overline{2}+\overline{4}+\overline{8}+\overline{16}$

und daher

$$\overline{17}+\overline{17}=\overline{12}+\overline{51}+\overline{68}$$

Für die übrigen Rechnungen dieser Gruppe vgl. Anhang 3, III. — Es bleibt übrigens durchaus möglich, daß es gar nicht die Raschheit der Erreichung von $1+\alpha$ geteilung auch in der 2/3-Reihe!) sowohl Brüche der 1/2- wie der 2/3-Reihe auf, zu denen nun β zu bestimmen ist. Diese Aufgabe ist in übersehbarer Weise so weit lösbar, als nur „natürliche" Brüche der 1/2-Reihe vorkommen, die mit denen der 2/3-Reihe durch die grundlegenden „$\overline{\overline{3}}$-Relationen" (vgl. Anhang 3 S. 369 ff.)

$$\begin{aligned}\bar{2} &= \bar{3} + \bar{6}\\ \bar{4} &= \bar{6} + \overline{12}\\ \bar{8} &= \overline{12} + \overline{24}\end{aligned}$$

verknüpft werden können, die zum ältesten Bestandteil der ägyptischen Bruchrechnung gehören. Ist beispielsweise $1 + \bar{4} + \bar{6}$ zu 2 zu ergänzen, so würde der 1/2-Reihen-Bestandteil $1 + \bar{4}$ durch $\bar{2} + \bar{4}$ zu ergänzen sein; das schon vorhandene $\bar{6}$ zwingt aber zur Benutzung von $\bar{2} = \bar{3} + \bar{6}$, so daß die gesuchte Ergänzung $\bar{3} + \bar{4}$ heißt[149]).

Wir stoßen damit wieder auf jene Relationen, die schon in der $\overline{\overline{3}}$-Gruppe den Anlaß zur ganzen $2/n$-Zerlegung gegeben haben. Um die Erörterung nicht zu sehr unterbrechen zu müssen, ist die ganze Technik des $\overline{\overline{3}}$-Rechnens in Anhang 3 zu diesem Paragraphen verwiesen. Insbesondere zeigt die nähere Diskussion der Rechnungen zu den $2/n$-Zerlegungen für $n = 17$, 19, 23, 29, 37 und 41 (vgl. S. 370), daß genau diese durch die Benutzung der oben genannten Umformungen

$$\begin{aligned}\bar{2} &= \bar{3} + \bar{6}\\ \bar{4} &= \bar{6} + \overline{12}\\ \bar{8} &= \overline{12} + \overline{24}\end{aligned}$$

(d. h. der Relation (1) von S. 352 und ihrer natürlichen dyadischen Abkömmlinge) auf übersehbare Ergänzungen führen. Diese Werte von n sind aber gerade diejenigen, die nun an die Reihe zu kommen haben, nachdem man einmal die primären Zerlegungen kennt, mit der einzigen Auslassung $n = 31$ (vgl. Tabelle IX S. 366). Sie sollen als „*Übergangsgruppe*" bezeichnet werden, da sie bereits die „primäre" Forderung der Übersehbarkeit durch Hinzunahme des von n ausgehenden Teilungsalgorithmus mit 2/3-Reihe ergänzen. Man überzeugt sich leicht, daß die Forderung der Übersehbarkeit auch jetzt wieder die Grenzen des Ver-

wesen ist, welche die $^2/_3$-Reihe vor die $^1/_2$-Reihe schob, sondern nur jene dominierende Rolle der $\overline{\overline{3}}$-Zerlegungen, welche den Anlaß zu der ganzen Stammbruchentwicklung von $\bar{n} + \bar{n}$ abgegeben hatte; so sind ja auch die „$\overline{\overline{3}}$-Relationen" von ausschlaggebender Bedeutung für die nun nötig werdende Kombination von Brüchen der beiden Reihen.

[149]) Es ist dies immer die Methode des geeigneten Zusammenfassens von Teilsummanden:

$$\begin{aligned}2 &= (1 + \bar{4}) + (\bar{2} + \bar{4})\\ &= (1 + \bar{4}) + (\bar{3} + \bar{6} + \bar{4})\\ &= (1 + \bar{4} + \bar{6}) + (\bar{3} + \bar{4}).\end{aligned}$$

Vgl. die Zerlegung von 2/17 (vorige Anmerkung).

fahrens bedingt[150]), und von $n = 43$ an den Bereich der natürlichen Brüche überschreiten würde.

IV. Die algorithmischen Zerlegungen.

Nachdem, wie L zeigt, ausgehend von einfachsten Zusammenfassungen, wie $\bar{2} = \bar{3} + \bar{6}$ da $\bar{3} = \bar{6} + \bar{6}$, Umformnungen für einzelne $\bar{n} + \bar{n}$ gefunden waren, die alle von einer Relation $\bar{a} = \bar{n} + \alpha \bar{n}$ zu $\bar{n} + \bar{n} = \bar{a} + \beta \bar{n}$ überzugehen lehrten, zeigen die Zerlegungen der „Übergangsgruppe", daß man allmählich lernte, mit Hilfe der Teilung nach der 2/3-Reihe (wenigstens bei gewissen Zahlen n) zu Zahlen $1 + \alpha$ zu gelangen, die sich immer noch in übersehbarer Weise durch Bruchteile β zu 2 ergänzen ließen. Aber auch dieses Verfahren verliert notwendig bei zu großen n seine Wirksamkeit, weil sich dann nicht mehr Übersehbarkeit aufrecht erhalten läßt. Man konnte erst weiterkommen, indem man diese Einschränkung fallen ließ und direkt nach Stammbruchrelationen $\bar{a} = (1 + \alpha)\bar{n}$ suchte, wobei die Ergänzung zu $\bar{n} + \bar{n}$ erst zweite Sorge wurde. Zur Erreichung dieses nächsten Zieles ist der einfachste Weg der, $1 + \alpha = \frac{r}{s}$ (modern ausgedrückt) so einzurichten, *daß $r = n$ ist: dann ist $\bar{n} + \alpha \bar{n}$ sicherlich ein Stammbruch*[151]). In der Tat ist die ganze nun folgende Gruppe von Zerlegungen (unter Übergehung von $n = 59$ aber einschließlich der noch aus der Übergangsgruppe zurückgebliebenen von $\overline{31} + \overline{31}$), nach diesem Schema behandelt: $1 + \alpha$ wird gleich $\frac{n}{a}$ gemacht und dazu β als $\frac{2a - n}{a}$ bestimmt. *Das Mittel aber, um solche Rechnungen ausführen zu können, kann allein im Hilfszahlenalgorithmus gesehen werden.* Mit anderen Worten: die letzte Phase der $2/n$-Zerlegungen verlangt bereits die Ausbildung einer wirklichen Technik der Bruchrechnung, eines Algorithmus. Wir haben gesehen (§ 6), daß sich die historische Entwicklung von Übersehbarkeit zu Algorithmus auch noch in der Anwendung der fertigen Bruchrechnung auf die verschiedensten Rechenaufgaben erkennen läßt. Wie dort so gibt auch hier die Ergänzung der zugehörigen Hilfszahlen den Schlüssel zum Verständnis des Rechenvorganges ab.

Wie ist es mit ägyptischen Mitteln möglich, ein solches $1 + \alpha$ zu konstruieren, daß es einem Bruch $\frac{n}{a}$ des Zählers n gleich wird? Dazu

---

150) Es ist dies etwa auf die Weise möglich, wie ich es ÄBR Tafel II bzw. S. 22 entwickelt habe. Doch scheint es jetzt überflüssig, $\overline{12}$ auch zu den „natürlichen" Brüchen zu zählen, wenn man die $\bar{\bar{3}}$-Relationen in der in Anhang 3, III angegebenen Weise mit heranzieht. Ich möchte darin einen wesentlichen Fortschritt gegen die Darstellung in ÄBR sehen, der den Begriff der „natürlichen Brüche" noch schärfer zu umgrenzen gestattet.

151) $\bar{n} + \alpha \bar{n} = \frac{n}{s} \bar{n} = \bar{s}$.

hat man sich nur zu überlegen, daß unser „$1+\alpha$“ nur eine Abkürzung für einen Ausdruck $1+\overline{a}_1+\overline{a}_2+\ldots+\overline{a}_k$ ist, so daß sich das Problem für den Ägypter so stellt: es ist eine Summe von 1 und geeigneten Stammbrüchen $1+\overline{a}_1+\ldots+\overline{a}_k$ so zu finden, daß sie dem n-fachen eines beliebigen Stammbruchs $n\,.\,\overline{a}$ gleich wird. Zum Nachweis einer solchen Gleichheit

$$1+\overline{a}_1+\ldots+\overline{a}_k=n\,\overline{a}$$

dient gerade der Hilfszahlenalgorithmus. Also: Soll eine solche Gleichheit bestehen, so muß die linke Seite, in $\overline{a}$ gezählt, gerade n solche $\overline{a}$ wert sein, d. h., es müssen nach Einführung von Hilfszahlen auf Grund von $\begin{matrix}1 & \mathbf{a}\\ \overline{a} & \mathbf{1}\end{matrix}$ die dadurch links entstehenden Hilfszahlen $\begin{matrix}1 & + & \overline{a}_1 & + & \ldots & + & \overline{a}_k\\ \mathbf{a} & & \mathbf{b}_1 & & & & \mathbf{b}_k\end{matrix}$ die die Summe $\mathbf{n}$ ergeben. Das besagt: für den Ägypter drückt sich unsere Forderung $1+\alpha=\frac{n}{a}$ darin aus, daß er $\mathbf{n}=\mathbf{a}+\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\ldots+\mathbf{b}_k$ macht und dann aus $1\ \mathbf{a}$ die Stammbrüche $\overline{a}_1$ (zu $\mathbf{b}_1$) bis $\overline{a}_k$ (zu $\mathbf{b}_k$) bestimmt (nach Anhang 1 zu § 6, S. 341), was immer dann leicht möglich sein wird, wenn der Aufbau von $\mathbf{n}$ aus seinen Summanden möglichst einfach (etwa dyadisch) ist, so daß alle auftretenden Teilungen ohne neuen Bruchrest möglich sind. Ein solches Aufbauen einer bestimmten Zahl aus einzelnen Summanden ist aber das tägliche Brot der ägyptischen Rechentechnik: die dyadische Multiplikation tut ja nichts anderes (vgl. § 5). Selbstverständlich kommt bei so großen Zahlen wie z. B. 61 nicht der rein dyadische Aufbau in Frage, sondern seine Verkürzung durch Verzehnfachung: wie 6 in $2+4$ zerlegt wird, so 60 in $20+40$. Die für den Ägypter unmittelbar gegebene Zerlegung ist also $\mathbf{61}=\mathbf{40}+\mathbf{20}+\mathbf{1}$ zu dem wegen $\begin{matrix}1 & \mathbf{40}\\ \overline{40} & \mathbf{1}\end{matrix}$ der Ausdruck $\begin{matrix}1 & + & \overline{2} & + & \overline{40}\\ \mathbf{40} & & \mathbf{20} & & \mathbf{1}\end{matrix}$ als „$1+\alpha$“ gehört. Es ist also $\overline{a}=\overline{61}\,(1+\overline{2}+\overline{40})=\overline{61}\,\frac{61}{40}=\overline{40}$ der gesuchte Stammbruch. Da sich 2 und $\mathbf{80}$ zugeordnet sind, so muß β die restlichen $\mathbf{80}-\mathbf{61}=\mathbf{19}$ Hilfseinheiten aufbringen. Das liefert sofort die Rechnung

$$\begin{array}{rrr} & 1 & \mathbf{40}\\ & \overline{2} & \mathbf{20}\\ / & \overline{4} & \mathbf{10}\\ / & \overline{8} & \mathbf{5}\\ / & \overline{10} & \mathbf{4}\end{array}$$

d. h. $\beta=\overline{4}+\overline{8}+\overline{10}$ und $\overline{61}+\overline{61}=\overline{40}+(\overline{4}+\overline{8}+\overline{10})\,\overline{61}=\overline{40}+\overline{244}+\overline{488}+\overline{610}$ wie in R angegeben.

Tabelle VIII (S. 363) läßt die Einheitlichkeit der Methode erkennen[152]). Die Regelmäßigkeit in den Hilfszahlen von $1+\alpha$ ist deutlich genug; bei β sind Hilfszahlen bereits überflüssig[153]), denn β ergibt sich durch „Di-

[152]) Ausnahme nur $n=59$.

[153]) Wenn nicht als „Kontrollorgane“ (vgl. S. 334ff) verwendet.

Tabelle VIII.

Die algorithmischen Zerlegungen.

$$\bar{a} = \bar{n} + \alpha\bar{n}$$
$$\bar{n} + \bar{n} = \bar{a} + \beta\bar{n}$$
$$(1 + \alpha) + \beta = 2$$

n	Hilfszahlen zu $1+\alpha$	$1+\alpha$	a	2a—n	β	Hilfszahlen zu β	$\bar{n}+\bar{n}$
31	**20 + 10 + 1**	$1+\overline{2}+\overline{20}$	**20**	**9**	$\overline{4}+\overline{5}$	**5 + 4**	$\overline{20}+\overline{124}+\overline{155}$
43	**42 + 1**	$1+\overline{42}$	**42**	**41**	$\overline{2}+\overline{3}+\overline{7}$	**21 + 14 + 6**	$\overline{42}+86+\overline{129}+\overline{301}$
47	**30 + 15 + 2**	$1+\overline{2}+\overline{15}$	**30**	**13**	$\overline{3}+\overline{10}$	**10 + 3**	$\overline{30}+\overline{141}+\overline{470}$
53	**30 + 20 + 3**	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{10}$	**30**	**7**	$\overline{6}+\overline{15}$	**5 + 2**	$\overline{30}+\overline{318}+\overline{795}$
61	**40 + 20 + 1**	$1+\overline{2}+\overline{40}$	**40**	**19**	$\overline{4}+\overline{8}+\overline{10}$	**10 + 5 + 4**	$\overline{40}+\overline{244}+\overline{488}+\overline{610}$
67	**40 + 20 + 5 + 2**	$1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{20}$	**40**	**13**	$\overline{5}+\overline{8}$	**8 + 5**	$\overline{40}+\overline{335}+\overline{736}$
71	**40 + 20 + 10 + 1**	$1+\overline{2}+\overline{4}+\overline{40}$	**40**	**9**	$\overline{8}+\overline{10}$	**5 + 4**	$\overline{40}+\overline{568}+\overline{710}$
73	**60 + 10 + 3**	$1+\overline{6}+\overline{20}$	**60**	**47**	$\overline{3}+\overline{4}+\overline{5}$	**20 + 15 + 12**	$\overline{60}+\overline{219}+\overline{292}+\overline{365}$
79	**60 + 15 + 4**	$1+\overline{4}+\overline{15}$	**60**	**41**	$\overline{3}+\overline{4}+\overline{10}$	**20 + 15 + 6**	$\overline{60}+\overline{237}+\overline{316}+\overline{790}$
83	**60 + 20 + 3**	$1+\overline{3}+\overline{20}$	**60**	**37**	$\overline{4}+\overline{5}+\overline{6}$	**15 + 12 + 10**	$\overline{60}+\overline{332}+\overline{415}+\overline{498}$
89	**60 + 20 + 6 + 3**	$1+\overline{3}+\overline{10}+\overline{20}$	**60**	**31**	$\overline{4}+\overline{6}+\overline{10}$	**15 + 10 + 6**	$\overline{60}+\overline{356}+\overline{534}+\overline{890}$

vision“ von $2a-n$ durch a, wobei die Hilfszahlen der einzelnen Summanden von β ganz belanglos sind. Es ist in Tabelle VIII (S. 363) deutlich der Unterschied zwischen den systematisch gewählten Hilfszahlen zu $1+\alpha$ und den „zufällig“ resultierenden zu β erkennbar.

V. Zerlegungen über $n=89$.

Aus Gründen (teils philologisch-stilistischer Art), die ich schon ÄBR, Kapitel II, § 7 auseinandergesetzt habe, möchte ich die Zerlegungen über $n=89$ als eigentlich systemlos, vielleicht sogar als spezielle Zutat von R ansehen. 91 würde sich sowohl in die 2/7- wie in die 2/13-Gruppe einordnen lassen, verwendet aber $1+\overline{5}+\overline{10}$ als $1+\alpha$ und $\overline{\overline{3}}+\overline{30}$ als β, letzteres ein Bruchaggregat, das wegen des „Zählers 2“ in $\overline{\overline{3}}$ eigentlich ausgeschlossen sein müßte[154]) und ähnlich nur noch bei der Ausnahmezahl $n=35$ (vgl. Anm. 181 S. 376) vorkommt. 93 wird nach der 2/3-Gruppe zerlegt, 95 aber als Vielfaches von 19 der Übergangsgruppe (statt 2/5-Gruppe). Bei 97 ist $1+\alpha=1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{14}+\overline{28}$, $\beta=\overline{7}+\overline{8}$, beides gänzlich systemlos[155]). 99 gehört zur 2/3-Gruppe. $\overline{101}+\overline{101}$ wird in $\overline{101}+\overline{202}+\overline{303}+\overline{606}$ zerlegt, was 1. wegen des einen Summanden $\overline{101}$ und 2. der fundamentalen Relation $\overline{2}=\overline{3}+\overline{6}$ wegen gerade für die ägyptische Bruchrechnung nur eine „triviale“ Umformung von $\overline{101}+\overline{101}$ bedeuten konnte. Mit $2=1+\overline{2}+\overline{3}+\overline{6}$ hätte man natürlich alle $2/n$-Zerlegungen bewältigen können. Daß man sie jetzt am Schlusse anwendet, zeigt sehr kraß, daß man wieder einmal am Ende der Leistungsfähigkeit der Rechentechnik angelangt war: es ist ein Einschnitt, wie sie ähnlich auch in den vorangehenden Zerlegungen bestanden hatten, aber immer wieder überwunden worden waren.

---

154) $n=13$. Hilfszahlen: $\mathbf{13}=\mathbf{10}+\mathbf{2}+\mathbf{1}$. Also $1+\alpha=1+\overline{5}+\overline{10}$ d. h. $\boldsymbol{a}=\mathbf{10}$. $2a-n=\mathbf{7}$, also β aus

1	$\mathbf{10}$
/ $\overline{\overline{3}}$	$\mathbf{6}+\overline{\overline{\mathbf{3}}}$
$\overline{3}$	$\mathbf{3}+\overline{\mathbf{3}}$
$\overline{10}$	$\mathbf{1}$
/ $\overline{30}$	$\overline{\mathbf{3}}$
zusammen	$\mathbf{7}$,

d. h. $\beta=\overline{\overline{3}}+\overline{30}$, wobei natürlich die letzte Rechnung ganz unzweckmäßig ist, da sie wegen des $\overline{\overline{3}}$ eigentlich zu einer neuen $2/n$-Zerlegung führen müßte, nämlich $\overline{13}+\overline{13}=\overline{10}+(\overline{\overline{3}}+\overline{30})\cdot\overline{13}=\overline{10}+(\overline{39}+\overline{39})+\overline{390}=\overline{10}+\overline{26}+\overline{78}+\overline{390}$ (statt des tatsächlichen $\overline{13}+\overline{13}=\overline{8}+\overline{52}+\overline{104}$). Diese Zerlegung ist also ausschließlich auf $91=7\cdot 13$ zugeschnitten, da dann $\beta\cdot\overline{91}=\frac{7}{10}\cdot\overline{91}=\overline{130}$ wird, somit $2/91=1/7\cdot 2/13=1/7\,(\overline{10}+\beta\cdot\overline{13})=\overline{70}+\beta\cdot\overline{91}=\overline{70}+\overline{130}$. Die Stammbruchdarstellung $\overline{\overline{3}}+\overline{30}$ ist also eine rein formale Umschreibung für 7/10.

155) Man würde $1+\alpha=1+\overline{2}+\overline{4}+\overline{30}$ erwarten, was aber zu sehr umständlichem β Anlaß gäbe.

Tabelle IX S. 366 zeigt nochmals die Folge der nacheinander entwickelten Methoden. Wenn die Ansicht zu Recht besteht, daß von $n = 89$ an die zunehmende Kompliziertheit der notwendigen Rechnungen eine systematische Fortsetzung der $2/n$-Zerlegungen verhinderte, so hat die allgemein gestellte Frage, wie man $\overline{n} + \overline{n}$ für $n > 101$ in andere Stammbruchsummen umformte, keinen Sinn. Allerdings: daß man z. B. das Zerlegungsschema der $\overline{\overline{3}}$-Gruppe $\left(\overline{n} + \overline{n} = (\overline{2} + \overline{6}) \frac{3}{n}\right)$ ganz allgemein anwandte, beweist etwa R 33: $\overline{\overline{3}} \cdot \overline{679} = \overline{1358} + \overline{4074}$. Aber bei anderen n (insbesondere Primzahlen) wird man entweder resigniert oder Scheinlösungen verwandt haben, nach dem Schema von $\overline{101} + \overline{101} = \overline{101} + (\overline{2} + \overline{3} + \overline{6})\,\overline{101}$[156]). Die Hoffnung, aus Rechnungen anderer Art als gerade „$2/n$-Tabelle" doch noch höhere Zerlegungen kennen zu lernen, erfüllt sich nicht. Die Tatsache, daß Verdoppeln und Halbieren bei allen ägyptischen Rechnungen eine so bevorzugte Rolle spielt, hat zur Folge, daß in den meisten Zahlen hohe 2-er Potenzen stecken, so daß auch eine „Multiplikation" $a \cdot \overline{n}$ (mit $n > 101$) nicht zu höheren $2/n$-Zerlegungen Anlaß geben muß, da sich beim dyadischen Multiplizieren erst einmal die Faktoren 2 aus n wegkürzen müssen, ehe wieder eine echte $2/n$-Zerlegung auftritt[157]). So liefert das erhaltene Textmaterial fast nur Zerlegungen mit $n < 50$[158]). Die $2/n$-Tabelle von R scheint also reichlich die Bedürfnisse der Praxis gedeckt zu haben.

Anhang zu § 7.

1. Verhältnis der Betrachtungsweise von ÄBR und § 7.

Die zur Gewinnung einer $2/n$-Tabelle nötige Zerspaltung von 2 in $1 + \alpha$ und β habe ich in ÄBR durch die Termini „Ergänzungsterm" und „Hauptglied" bezeichnet. Es entspricht dies folgender Betrachtungsmöglichkeit: Wie ganzzahlige Multipla $a.n$ von n durch geeignetes Zusammenfassen sukzessiver dyadischer Vielfacher von n gewonnen werden, so gelangt man zu $2/n$-Darstellungen, wenn man von dyadischen Bruchteilen von $\overline{n}$ ausgeht und demgemäß $\overline{n} + \overline{n}$ aus $\overline{2}\,\overline{n}$ („Hauptglied") oder $\overline{2}\,\overline{n} + \overline{4}\,\overline{n}$ bzw. $\overline{3}\,\overline{n}$, $\overline{6}\,\overline{n}$ usw. und einem restlichen Stammbruch $\overline{m}$ („Ergänzungsterm" in Analogie zur Divisionsmethodik) aufbaut. Jedem solchen Hauptglied $(\beta\,\overline{n})$ entspricht ein Ergänzungsterm $((1 + \alpha)\,\overline{n} = \overline{a})$, dessen

---

156) Auf diese Möglichkeit hat Gunn in JEA 12, S. 129 hingewiesen.

157) Sehr schönes Beispiel in C (vgl. S. 347)

1	$\overline{13}$
2	$\overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$
4	$\overline{4} + \overline{26} + \overline{52}$
8	$\overline{2} + \overline{13} + \overline{26}$.

Vgl. auch Anm. 173 S. 372.

158) $n = 97$ in R 31 und R 33, $n = 75$ in L.

Tabelle IX.

Systematische Übersicht über die Methoden der $2/n$-Zerlegungen von $n = 3$ bis $n = 101$.

* Ausnahme.

n	$\bar{\mathfrak{z}}$-Gruppe	primäre Zerlegungen				Übergangsgruppe							algorithmische Zerlegungen						systemlos		
3	3																				
5		5																			
7			7																		
9	9																				
11				11																	
13					13																
15	15																				
17						17															
19							19														
21	21																				
23								23													
25		25																			
27	27																				
29									29												
31										*31			31								
33	33																				
35		*35																	35		
37											37										
39	39																				
41												41									
43														43							
45	45																				
47															47						
49			49																		
51	51																				
53															53						
55		*55		55																	
57	57																				
59																*59				59	
61																	61				
63	63																				
65		65																			
67																	67				
69	69																				
71																	71				
73																		73			
75	75																				
77			77																		
79																		79			
81	81																				
83																		83			
85		85																			
87	87																				
89																		89			
91			*91		*91														91		
93	93																				
95		*95					95														
97																				97	
99	99																				
101																					101

Stammbruchcharakter nur dann gewahrt bleiben kann, wenn n die richtigen Teilbarkeitseigenschaften hat. Zusammen mit der Einschränkung auf natürliche Bruchteile von $\bar{n}$ gelangt man so zur gleichen Klassifizierung der $2/n$-Zerlegungen (die schließlich durch eine algorithmische Methodik weitergeführt werden müssen) wie in § 7.

Die Veröffentlichung von L (1927) hat es erst ermöglicht, diesen formalen Aufbau historisch schärfer zu gliedern. L zeigt ja (vgl. S. 349ff.) explizite, welche einfache Identitäten zum Ausgangspunkt der Zerlegungen dienten und wie man sich durch sie ganz naturgemäß die richtigen Stammbrüche $\bar{a} = (1 + \alpha)\,\bar{n}$ verschaffen konnte. Da in den Nebenrechnungen zur $2/n$-Tabelle in R nur die formale Gesetzmäßigkeit verifiziert wird[159]), so blieb die Frage unentscheidbar, wie der ursprüngliche Ausgangspunkt ausgesehen hatte[160]) — abgesehen nur von den algorithmischen Zerlegungen, deren ganzer Aufbau dazu zwang, den „Ergänzungsterm" zum eigentlichen Ausgangspunkt zu machen. Erst L ermöglichte es, die formale Klassifizierung auch historisch zu fassen und zu erkennen, von welcher Seite bei der Ergänzung $1 + \alpha + \beta = 2$ ausgegangen wurde. Wie oben auseinandergesetzt, erweist sich jetzt das Experimentieren mit dem „Ergänzungsterm" $(1 + \alpha)\,\bar{n} = \bar{a}$ von Anfang an als das prius. Um nicht durch die Worte „Hauptglied" und „Ergänzungsterm" den Anschein zu erwecken, als solle durch sie etwas über die Reihenfolge der Prozesse ausgesagt werden, so habe ich hier auf sie verzichtet. Ich will aber damit keineswegs den in ÄBR, Kapitel II § 3 genannten Zusammenhang von „Ergänzungsterm" und „Ergänzungsrechnung" (es sind dies die Rechnungen von Tabelle III S. 331) zurücknehmen: $1 + \alpha\,\bar{n}$ hat natürlich sachlich immer die Bedeutung, β zu 2 zu ergänzen, und der Kontrollierung dieser Tatsachen dienen eben jene „Ergänzungsrechnungen" (ägyptisch *škm* vollmachen). — In der Betonung der ursprünglichen Bedeutung des „Ergänzungstermes" gegen das „Hauptglied" gebe ich Vogels Darstellung vollkommen recht. An der formalen Einteilung der $2/n$-Zerlegungen ändert dies nichts. Wohl aber habe ich indessen gelernt, den Bruch $\overline{12}$ nicht zu den „natürlichen" Brüchen zählen zu müssen, sondern zu jener Gliederung zu gelangen, die in Tabelle IX S. 366 gegeben ist.

In welcher Weise die hier vorliegende Darstellung der Theorie der $2/n$-Tabelle mit dem Ganzen der ägyptischen Arithmetik verknüpft wird, habe ich schon einleitend bemerkt. Zur Darstellung des Begriffes „natürliche Brüche" vgl. noch Anm. 115 S. 336.

2. Die $2/n$-Tabelle von R.

Wie schon hervorgehoben, haben die Nebenrechnungen zur $2/n$-Tabelle von R nur einen formalen rein verifizierenden Charakter, der von der ursprünglichen Auffindung der $2/n$-Relationen nichts unmittelbar erkennen läßt. Daß den verschiedenen Zerlegungsprinzipien doch gewisse äußere Merkmale entsprechen, habe ich schon ÄBR, Kapitel II § 7 gezeigt.

---

159) Vgl. Anhang 2 zu § 7.

160) Vgl. allerdings ÄBR S. 38, wo schon auf die prinzipielle Bedeutung der $\overline{\overline{3}}$-Gruppe hingewiesen ist.

Wie wenig diese Rechnungen in R im allgemeinen geeignet sind, für die wirkliche Berechnungsweise etwas auszusagen, zeigt der Umstand, daß z. B. den einheitlichen Zerlegungen der $\bar{\bar{3}}$-Gruppe verschiedene Nebenrechnungen entsprechen. Von $n = 21$ bis 87 sind sie zwar einheitlich nach dem Schema

$$\begin{array}{lll} & \cdot & 21 \\ / & \bar{\bar{3}} & 14 \;.\; 1+\bar{2} \\ / & \bar{2} & 42 \;.\; \bar{2} \end{array} \qquad\qquad \cdot\ \overline{\mathbf{14}}\ .\ 1+2\ .\ \overline{\mathbf{42}}\ .\ 2$$

angelegt[161]), aber $2/9 = \bar{6} + \overline{18}$ wird aus

$$\begin{array}{lll} & \cdot & 9 \\ & \bar{\bar{3}} & 6 \\ & \bar{3} & 3 \\ / & \bar{6} & 1+\bar{2} \quad / \ \overline{18} \quad \bar{2} \end{array} \qquad\qquad \cdot\ \bar{\mathbf{6}}\ .\ 1+\bar{2}\ .\ \overline{\mathbf{18}}\ .\ \bar{2}$$

abgeleitet, eine Methode, die bei 2/21 verlangen würde, daß man mit der 2/3-Reihe bis „$\overline{14}$ $1+\bar{2}$" gelangen könnte, was unmöglich ist. Aus R könnte man also zu schließen versuchen, daß die 2/9-Zerlegung ganz speziell für sich berechnet würde[162]), während es in Wirklichkeit nur eine spezielle „Beweismethode" dieser Zerlegung ist. Ähnliches gilt für mehrere andere Zerlegungen, besonders aber für die von 2/35 und 2/91, die beide ganz unmotiviert auf die Möglichkeit verzichten, von den vorangehenden Zerlegungen von 2/5 oder 2/7 bzw. 2/7 oder 2/13 Gebrauch zu machen und statt dessen rein formale Umschreibungen für β in der Zerlegung $\bar{n} + \bar{n} = \bar{a} + \beta\,\bar{n}$ angeben, die in dieser Form nicht gebraucht werden können, da sie „$\bar{\bar{3}}$" enthalten und daher zu einer neuerlichen $2/n$-Zerlegung Anlaß geben müßten (vgl. Anm. 181 S. 376 sowie oben S. 364).

Es ist in diesem Zusammenhang wesentlich, darauf hinzuweisen, daß es ein prinzipieller Fehler ist, ägyptische „mathematische" Papyri sozusagen als systematische wissenschaftliche Abhandlungen anzusehen. Wohin würde man kommen, wenn man aus einem größeren Totentext und einigen Fragmenten eine systematische Theologie Ägyptens rekonstruieren wollte? Gerade die offenkundige Uneinheitlichkeit innerhalb der mathematischen Texte gibt uns die Möglichkeit, ihre Entwicklungsgeschichte (wenn auch nur in großen Zügen) zu rekonstruieren. *Das, was trotzdem in ihnen einheitlich ist, ist nicht geschlossene wissenschaftliche Theorie, sondern konservative Kraft des historisch Gewordenen.* Ich halte es für eine wichtige und noch lange nicht erledigte Aufgabe, die mathematischen Texte (zusammen mit den Wirtschaftstexten) einer eingehenden literar- und sprachgeschichtlichen Untersuchung zu unterziehen. Erst dann wird man ihrem wesentlich historischen Charakter gerecht werden können. Das in dieser Arbeit Gegebene soll nicht anders verstanden werden, als eine Vorarbeit, die sich bemüht, den sachlichen Gehalt der mathematischen Texte schon so weit zu analysieren und zu gruppieren, daß dieser erste Teil der Aufgabe nicht mehr wesentliche Hindernisse bereiten kann.

---

161) $2/21 = \overline{14} + \overline{42}$.

162) Ähnlich $2/15 = \overline{10} + \overline{30}$ aus

$$\begin{array}{lll} & \cdot & 15 \\ / & \overline{10} & 1+\bar{2} \\ / & \overline{30} & \bar{2}. \end{array}$$

3. Das Rechnen mit $\overline{\overline{3}}$.

Woher die Tatsache kommt, daß $\overline{\overline{3}}$ zu allen Zeiten der antiken Mathematik die Rolle eines eigentlichen „Stammbruches“ spielt, hat Sethes bahnbrechende Untersuchung gezeigt[163]). Im folgenden handelt es sich nur um die Rolle dieses Bruchbegriffes in der Rechentechnik Ägyptens.

I. Die Grundrelationen.

An Stelle unseres „1 mal 1“, das für die ägyptische Mathematik gänzlich überflüssig ist, treten andere feste immer angewandte Relationen. Im Gebiete der Bruchrechnung sind es vor allem die „*$\overline{\overline{3}}$-Relationen*“, deren altgewohnte Verwendung ihnen den Charakter „übersehbarer“ Relationen für die Rechentechnik verleiht. Wie sie ursprünglich aufzufinden waren, zeigt noch L (vgl. S. 349 ff.). Ihre große historische Bedeutung liegt darin, daß sie vermittels $\overline{6}$ die Brücke zwischen den beiden ursprünglichsten Bruchgruppen der 1/2- und 2/3-Reihe herstellen und durch die Aufweisung der prinzipiellen Möglichkeit solcher Beziehungen (vor allem $\overline{\overline{3}} = \overline{2} + \overline{6}$) den Anlaß für die ganze $2/n$-Darstellung (ausgehend von der $\overline{\overline{3}}$-Gruppe, vgl. S. 352) abgeben konnten und so die gesamte antike Rechentechnik und Arithmetik entscheidend beeinflußt haben.

Zusammen mit ihren unmittelbaren dyadischen Abkömmlingen sind diese $\overline{\overline{3}}$-Relationen:

(1) $\overline{2} = \overline{3} + \overline{6}$	(2) $\overline{\overline{3}} = \overline{2} + \overline{6}$	(3) $\overline{2} + \overline{3} = \overline{\overline{3}} + \overline{6}$
(1, 2) $\overline{4} = \overline{6} + \overline{12}$	(2, 2) $\overline{3} = \overline{4} + \overline{12}$	(3, 2) $\overline{4} + \overline{6} = \overline{3} + \overline{12}$
(1, 4) $\overline{8} = \overline{12} + \overline{24}$	(2, 4) $\overline{6} = \overline{8} + \overline{24}$	(3, 4) $\overline{8} + \overline{12} = \overline{6} + \overline{24}$

(4) $\overline{\overline{3}} + \overline{2} = 1 + \overline{6}$

II. Anwendungsbeispiele.

Alle mathematischen Texte zeigen die Bedeutung der $\overline{\overline{3}}$-Relationen auf Schritt und Tritt. R 61 stellt eine Anzahl von ihnen noch besonders zusammen („2/3-Tabelle“[164])). Die im folgenden gegebenen Beispiele für die Anwendung der einzelnen Formeln sind nur ganz zufällig herausgegriffen und ließen sich leicht vermehren.

(1)

R 42. 2 $17 + \overline{\overline{3}} + \overline{9}$ (nach $2/n$-Tabelle ist $\overline{9} + \overline{9} = \overline{6} + \overline{18}$)
4 $35 + \overline{2} + \overline{18}$

(2)

R 38. 1 $213 + \overline{3}$ R 61. $\overline{\overline{3}}$ von $\overline{6}$ ist $\overline{12} + \overline{36}$ (statt einfach $= \overline{9}$!)
$\overline{2}$ $106 + \overline{\overline{3}}$

R 2/23. Rechnung: $1 + \overline{2} + \overline{4} + \overline{6}$; dafür Überschrift: $1 + \overline{\overline{3}} + \overline{4}$

(3)

R 42. $\overline{\overline{3}}$ $5 + \overline{\overline{3}} + \ldots$
$\overline{3}$ $2 + \overline{\overline{3}} + \overline{6} + \ldots$

R 2/41. $\overline{3}$ $13 + \overline{\overline{3}}$
$\overline{6}$ $6 + \overline{\overline{3}} + \overline{6}$

---

163) Sethe, ZZ insb. III, 6a und 7.
164) Vgl. Neugebauer, ÄBR Kapitel II § 6 und Tafel VI.

(4)

R 31. $2 \quad 4+\bar{3}+\bar{4}+\ldots$
$4 \quad 9+\bar{6}+\ldots$

(1, 2)

R 70. $1 \quad 7+\bar{2}+\bar{4}+\bar{8}$
$\bar{\bar{3}} \quad 5+\bar{4} \qquad (4+\bar{\bar{3}}+\bar{3}+\bar{6}+\overline{12}=5+\bar{6}+\overline{12})$

(1, 4) und (2, 2)

R 2/37. $1+\bar{2}+\overline{24}=1+\alpha$; dazu $\beta=\bar{3}+\bar{8}$. Wegen (1, 4) gehört nämlich zu diesem $1+\alpha$ ein $\beta=\bar{4}+\bar{8}+\overline{12}$, das nach (2, 2) $\beta=\bar{3}+\bar{8}$ liefert.

(2, 4)

R 2/29. $1+\bar{6}+\overline{24}=1+\alpha$; dazu $\beta=\bar{2}+\bar{6}+\bar{8}$.

(3, 2)

R 2/17. Rechnung: $1+\bar{4}+\bar{6}$; dafür Überschrift: $1+\bar{3}+\overline{12}$.

(3, 4)

R 2/29. Aus der mit Rücksicht auf β zu ergänzenden Rechnung (vgl. sogleich unten III) würde sich $1+\bar{8}+\overline{12}$ ergeben; dafür Überschrift: $1+\bar{6}+\overline{24}$.

III. $\bar{\bar{3}}$-Rechnungen und 2/n-Zerlegungen der „Übergangsgruppe“.

Anwendung auf die Rechnungen von R[165]) zur „Übergangsgruppe“ (vgl. S. 358ff.):

R 2/17. $\bar{6} \quad 2+\bar{2}+\bar{3}$
$/\ \overline{12} \quad 1+\bar{4}+\bar{6} \qquad$ also $\beta=\bar{3}+\bar{4}$ nach (1)
R 2/19. $/\ \overline{12} \quad 1+\bar{4}+\overline{12} \qquad$ also $\beta=\bar{4}+\bar{6}$ nach (1, 2)
R 2/23. $\bar{6} \quad 3+\bar{2}+\bar{3}$
$/\ \overline{12} \quad 1+\bar{2}+\bar{4}+\bar{6} \qquad$ also $\beta=\overline{12}$ nach (1, 2)
R 2/29[166]). $[1 \quad 29]$
$[\bar{\bar{3}} \quad 19+\bar{3}]$
$[\bar{3} \quad 9+\bar{\bar{3}}]$
$[\bar{6} \quad 4+\bar{2}+\bar{3}]$
$[\overline{12} \quad 2+\bar{4}+\bar{6}]$
$/\ \overline{24} \quad [1+\bar{8}+\overline{12}] \qquad$ also $\beta=\bar{2}+\bar{6}+\bar{8}$ nach (1, 2)
R 2/37. $/\ \overline{24} \quad 1+\bar{2}+\overline{24} \qquad$ also $\beta=\bar{4}+\bar{8}$ nach (1, 4)
R 2/41. $\bar{3} \quad 13+\bar{\bar{3}}$
$\bar{6} \quad [6+\bar{2}+\bar{3}=]\,6+\bar{\bar{3}}+\bar{6}$ nach (3)
$\overline{12} \quad [3+\bar{4}+\bar{6}=]\,3+\bar{3}+\overline{12}$
$/\ \overline{24} \quad [1+\bar{2}+\bar{8}+\overline{12}=]\,1+\bar{\bar{3}}+\overline{24}$ nach (2), also $\beta=\bar{6}+\bar{8}$ nach (1,2).

Man sieht: *in allen diesen Fällen dienen genau die Relationen* (1), (1, 2), (1, 4), *welche $\bar{2}$, $\bar{4}$, $\bar{8}$ durch Brüche der 2/3-Reihe ausdrücken, dazu, β aus* übersehbaren *Bruchrelationen zu bestimmen.* D. h.: die Rechnungen der Übergangsgruppe ver-

165) Hier nur so weit reproduziert, als im gegenwärtigen Zustand nötig. [ ] erklärende Ergänzungen; alles andere im Text.

166) Rechnung fehlt in R.

laufen völlig im Bereich der „natürlichen“ Brüche und der daraus durch die $\overline{\overline{3}}$-Relationen zu gewinnenden Erweiterungen.

IV. Das Rechnen mit der vollständigen 2/3-Reihe.

Es gehört zu den bekanntesten Sonderbarkeiten der ägyptischen Bruchrechnung, daß 1/3 einer Zahl nicht direkt, sondern auf dem Umweg über 2/3 berechnet wird[167]). In Wirklichkeit kann man dies aber keinesfalls als absolute Regel hinstellen, da es Beispiele genug gibt, die 1/3 direkt berechnen (z. B. in R 35, 36, 37, 43). Es scheint mir also außer jedem Zweifel zu sein, daß man den Umweg über 2/3 keineswegs nötig hatte.

Es erhebt sich die Frage, warum man ihn doch meist einschlug. Ich kann nur die einzige Ursache darin erblicken, daß man die Analogie zu den beiden rein dyadischen Reihen 1, 2, 4, 8, . . . bzw. 1, $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$, . . . möglichst weit treiben wollte und wenigstens formal eine Einheitlichkeit der Methode hervorheben wollte, die rein sachlich genommen durch das Hinzunehmen der Brüche der 2/3-Reihe prinzipiell zerstört war. Daß *man die 2/3-Reihe überhaupt zuließ*, daß *man sie offensichtlich der 1/2-Reihe gleichberechtigt hielt, zeigt mit besonderer Deutlichkeit, wie himmelweit man von jeder theoretischen Durchbildung des dyadischen Verfahrens entfernt war, wie entscheidend dagegen die entwicklungsgeschichtliche Gleichwertigkeit aller natürlichen Brüche das Denken beherrschte.* Ferner: *Der Trieb zur formalen Analogie ist weit wesentlicher für das Aussehen der ägyptischen Rechentechnik als sachlich zu rechtfertigende Schlüsse.*

Da also die Vervollständigung der 2/3-Reihe nur formale Gründe hat, bleibt die Möglichkeit offen, daß man $\overline{\overline{3}}$ in Wirklichkeit auf dem Wege des Verdoppelns von $\overline{3}$ berechnet hatte. In der Tat läßt sich diese Möglichkeit nicht absolut von der Hand weisen. In einem Falle wie R 42 allerdings ist es sicher, daß $\overline{\overline{3}}$ wirklich $\overline{3}$ voranging; dort würde nämlich zu

$$1 \quad 8 + \overline{\overline{3}} + \overline{6} + \overline{18}$$

bei direkter Berechnung von $\overline{3}$ gehören[168]):

$$\begin{aligned} \overline{3} \quad & 2 + \overline{\overline{3}} + \overline{6} + \overline{18} + \overline{18} + \overline{54} \\ & = 2 + \overline{\overline{3}} + \overline{6} + \overline{9} + \overline{54}. \end{aligned}$$

In Wirklichkeit ist aber

$$\overline{3} \quad 2 + \overline{\overline{3}} + \overline{6} + \overline{12} + \overline{36} + \overline{54}$$

angegeben, was sich unmittelbar[169]) der vorangehenden Zeile

$$\overline{\overline{3}} \quad 5 + \overline{\overline{3}} + \overline{6} + \overline{18} + \overline{27}$$

anschließt. Ich halte demnach den Schluß für unabwendbar, daß $\overline{\overline{3}}$ im allgemeinen ganz direkt gebildet wurde. In dieser Zumutung eine Überspannung der ägyptischen Fähigkeiten zu sehen, halte ich nicht für richtig. Ich bin überhaupt überzeugt, daß die ungeheuere Schwerfälligkeit der ägyptischen Rechentechnik zum großen Teil nur den reglementmäßigen Absichten der „mathematischen“

---

167) Etwa R 2/23, R 2/41 usw.

168) $\overline{9} + \overline{9} = \overline{6} + \overline{18}$.

169) Mit Rücksicht auf $\overline{2} + \overline{3} = \overline{\overline{3}} + \overline{6}$ (vgl. S. 369).

Papyri zuzuschreiben ist, die eben jeden einzelnen Schritt prinzipiell anzugeben bestrebt sind[170]), während Wirtschaftstexte[171]) (und auch M) viel größere Unabhängigkeit von Nebenrechnungen zeigen (allerdings auch voll von Rechenfehlern sind).

4. $2/n$-Zerlegungen und Dezimalbrüche.

Für jede „vorwissenschaftliche" Mathematik ist die enge Beziehung zwischen Metrologie und Bruchbegriff bzw. Bruchrechnung charakteristisch. Sie ist schuld daran, daß die „natürlichen Brüche" eine solche Rolle spielen, und verhindert damit sowohl die Ausbildung eines reinen Dualsystems wie die eines reinen Dezimalsystems — ersteres wäre durch die Rechentechnik, letzteres durch das Zahlensystem nahegelegt. Die historisch gewordene Systemlosigkeit aller Metrologie bewirkt das Nebeneinanderbestehen aller Bruchsysteme, die nur durch das formale Band des „Stammbruchpostulats" zusammengehalten werden. Man begnügt sich mit der Kenntnis des Überganges von einem Maßbrüchesystem in das andere[172]) bzw. in die Stammbruchdarstellung. Mathematisch wesentlicher ist von ihnen nur die „1/10-Tabelle", welche in R der „$2/n$-Tabelle" folgt. Sie drückt die Multipla von $\overline{10}$ in folgender Weise durch Stammbrüche aus:

1	$\overline{10}$	4	$\bar{3}+\overline{15}$	7	$\bar{\bar{3}}+\overline{30}$
2	$\bar{5}$	5	$\bar{2}$	8	$\bar{\bar{3}}+\overline{10}+\overline{30}$
3	$\bar{5}+\overline{10}$	6	$\bar{2}+\overline{10}$	9	$\bar{\bar{3}}+\bar{5}+\overline{30}$

Ihr Bildungsgesetz ist sehr einfach:

$$\begin{array}{ll} 1 & \overline{10} \\ 2 & \bar{5} \\ 4 & \bar{3}+\overline{15} \\ 8 & \bar{\bar{3}}+\overline{10}+\overline{30} \end{array}$$

(die beiden letzten Stellen aus der $2/n$-Tabelle[173])), daraus 3 und 9 durch Addition, 7 durch Weglassen von $\overline{10}$; 5 und 6 selbstverständlich.

Dieser 1/10-Tabelle folgen in R „Anwendungsbeispiele", welche 1, 2, ... 9 Brote unter 10 Leute zu verteilen verlangen. Lösung z. B. für 9 (R 6): „addiere angefangen mit $\bar{\bar{3}}+\bar{5}+\overline{30}$, 10mal

$$\begin{array}{rll} 1 & \bar{\bar{3}}+\bar{5}+\overline{30} & \\ /2 & 1+\bar{\bar{3}}+\overline{10}+\overline{30} & \text{(d. h. } 1+8/10) \\ 4 & 3+\bar{2}+\overline{10} & \text{(d. h. } 3+6/10) \\ /8 & 7+\bar{5} & \\ \text{zusammen} & 9 \text{ Brote. Das ist es.``} & \end{array}$$

---

170) Vgl. etwa R 25:

$$\begin{array}{rll} & 1 & 3 \\ & \bar{\bar{3}} & 2 \\ / & \bar{3} & 1. \end{array}$$

171) Vgl. Anhang 5 zu § 6 S. 344.

172) z. B. R 47, R 80.

173) Es ist dies ein schönes Beispiel für den S. 365 betonten Sachverhalt, daß weiteres Verdoppeln doch nicht zu höheren Zerlegungen führen muß: es wiederholen sich nur immer 2/5 und 2/15.

Man sieht, daß sich diese Rechnung nur ganz äußerlich des dyadischen Schemas bedient, daß aber der Übergang von 2 zu 4 keineswegs $1 + \overline{3} + \overline{5} + \overline{15}$ liefert, sondern ganz auf den Stammbruchdarstellungen der $\overline{10}$-Brüche aus der 1/10-Tabelle beruht — selbstverständlich wurde auch die Addition der beiden Teilresultate nie wirklich vorgenommen. Ebenso ist es nur eine leere Formalität, wenn man das triviale Resultat $\overline{10}$ im Falle eines Brotes umständlich dyadisch verifiziert. *Man sieht deutlich, wie in einer vorwissenschaftlichen Mathematik das dauernde Wiederholen gewisser Schemata, selbst wenn sie sachlich sinnlos sind, den eigentlichen mathematischen Beweisbegriff ersetzt, oder besser, gar nicht zur Entwicklung gelangen läßt.*

Ähnlich wie die $\overline{\overline{3}}$-Relationen spielen auch diese $\overline{10}$-Relationen in der Praxis des Rechnens ihre Rolle.

R 35	1	$\overline{5} + \overline{10}$
	2	$\overline{2} + \overline{10}$
	$\overline{3}$	$\overline{10}$

benutzt ersichtlich die 1/10- und nicht die $2/n$-Tabelle; ebenso

R 30	1	$13 + \overline{23}$
	$\overline{10}$	$1 + \overline{5} + \overline{10} + \overline{230}$

usw. Die Ausnahmezerlegung $2/91 = \overline{70} + \overline{130}$ benutzt plötzlich für $2 = (1 + \alpha) + \beta$ die 1/10-Tabelle

$$2 = (1 + \overline{5} + \overline{10}) + (\overline{\overline{3}} + \overline{30})$$

d. h. $2 = 13/10 + 7/10$. Gerade an dem zweiten Bestandteil ist wieder der bloß formale Charakter der Stammbruchumschreibung klar ersichtlich.

5. Zur Textstruktur von R.

R beginnt mit der „$2/n$-Tabelle", dann folgt die „1/10-Tabelle", darauf deren Anwendungsbeispiele R 1 bis R 6. Die nun folgende Gruppe R 7 bis R 20 gehört aber, wie ich ÄBR, Kapitel II § 3 dargelegt habe, zu den $2/n$-Zerlegungen. Ich glaube, daß sie im ursprünglichen Textzustand vor der 1/10-Tabelle stand. Dann hätte R 21 bis R 23 an die 1/10-Rechnungen anzuschließen, was sich auch inhaltlich gut verstehen läßt. R 22 verlangt nämlich die Ergänzung von $\overline{\overline{3}} + \overline{30}$ (d. h. von 7/10, nach 1/10-Tabelle!) zu 1. Antwort $\overline{5} + \overline{10}$ demnach selbstverständlich. Nebenrechnung und Hilfszahlen sind wieder nachträgliches Beiwerk[174]).

R 21 ($\overline{\overline{3}} + \overline{15}$ zu 1 zu ergänzen) wird wohl einfach aus $(\overline{3} + \overline{15}) + (\overline{3} + \overline{15}) + \overline{5}$ zusammengebaut sein, so daß das Resultat $\overline{5} + \overline{15}$ wieder selbstverständlich ist.

Auch R 23 glaube ich zu R 22 in direkte Beziehung setzen zu können. Aus $(\overline{\overline{3}} + \overline{30}) + (\overline{5} + \overline{10}) = 1 = (\overline{\overline{3}} + \overline{10}) + (\overline{5} + \overline{30}) = (\overline{2} + \overline{10}) + (\overline{5} + \overline{6} + \overline{30})$ folgt

[174]) Daß die Aufgabe von vornherein auf der bekannten Zerlegung $(\overline{\overline{3}} + \overline{30}) + (\overline{5} + \overline{10}) = 1$ beruhte, bestätigen m. E. auch die Worte: „Ein anderes (Beispiel): $\overline{5} + \overline{10}$ ist hinzuzugeben", die sich am Schlusse von R 21 finden und offenbar bereits zu R 22 gehören (Peet hat gegen Griffith, das *kj zu* dem *tp n śtj* gezogen, sicher zu Unrecht, wie auch die Textanordnung beweist).

nämlich durch 2/3-Bildung sofort $\overline{\overline{3}} = (\overline{5} + \overline{5}) + \overline{10} + \overline{10} + \overline{9} + \overline{45}$. Faßt man hierin $\overline{5} + \overline{5}$ als Dezimalbruch 4/10 und dividiert 4 dyadisch durch 10, so bekommt man sofort $\overline{\overline{3}} = \overline{4} + \overline{8} + \overline{40} + \overline{10} + \overline{30} + \overline{9} + \overline{45}$. In der Tat verlangt R 23 die Ergänzung von $\overline{4} + \overline{8} + \overline{10} + \overline{30} + \overline{45}$ zu $\overline{\overline{3}}$, was durch $\overline{40} + \overline{9}$ geschieht. Ein derartiges Modifizieren und Neuzusammenkleben von Aufgaben läßt sich durch die ganze vorgriechische Mathematik, andererseits auch in den Heronischen Schriftenkreis (bis Indien) hinein verfolgen.

Es ist dies natürlich nur eine Teilfrage des allgemeinen Problems der offenbaren Um- und Unordnung der Rechnungen in den verschiedenen Texten. Es sind da wohl verschiedene Gründe verantwortlich: 1. der Wechsel zwischen Vertikal- und Horizontalzeilen während des MR; 2. die Möglichkeit verschiedener Papyrusbreiten (z. B. hat R volle Breite, M. nur Viertelbreite; 3. Sammlung von Einzeltexten (Ostraca?) zu größeren Texten. All dies bewirkt beim Abschreiben leicht Umstellungen gegen das Original, natürlich unterstützt durch Systemlosigkeit überhaupt, Unkenntnis und Schludrigkeit der Schreiber, an der kein Mangel ist.

§ 8. Dyadik und Stammbruchpostulat.

Dyadische Rechenmethode und Stammbruchpostulat (vgl. S. 348) gehören zu den markantesten Eigentümlichkeiten der ägyptischen Mathematik. Beide sind Rudimente und Zeugen ältester Entwicklungsstufen mathematischen Denkens, die allmählich zur festen Form (nicht Inhalt!) aller Rechentechnik geworden sind.

Die Dyadik hat ihre Wurzel in dem „Nocheinmalnehmen", in diesem ersten mathematischen Prozeß, der über das reine Beschreiben von Mengen durch das Zählen hinausgeht. Es ist ein glücklicher Umstand, daß es möglich ist, jedes Vervielfachen auf die beiden Grundoperationen der Addition („und eins") und des Verdoppelns („noch einmal") zurückzuführen. Alle Aufgaben des Rechnens werden auf diese Weise einheitlich additiv verifiziert — unberührt von allen Sorgen einer feineren logischen Analyse. Die Dyadik wird zum festen Rahmen der ägyptischen Mathematik. Das darf aber nicht zu der Ansicht verleiten, der Ägypter wäre aus irgendeiner sonderbaren Konstitution seines Geistes prinzipiell außerstande gewesen, „andere Operationen auszuführen als Multiplikation mit 2 (und 10)". Wie heute jeder Erwachsene sich das Resultat irgendeiner Multiplikation auf viele Weisen gewinnen kann, wenn er dazu Lust hat, in praxi aber immer nach irgendeinem Ritus verfahren wird, der ihm von der Schule her geläufig ist, so ist für den Ägypter die additive Dyadik der nun einmal gegebene modus procedendi; nur mit dem Unterschied, daß uns gewisse multiplikative Beziehungen („1 mal 1") geläufig sind, dem Ägypter aber andere Relationengruppen anerzogen waren (Verdoppeln, Stammbruchdarstellungen für $\overline{n} + \overline{n}$, $\overline{\overline{3}}$- und $\overline{10}$-Relationen usw.[175])). Und, soweit wir es aus dem Erhaltenen beurteilen können, — die Tatsache des Ausreichens der gewohnten Methode hat bewirkt, daß man sich mit ihr zufrieden gab.

Ähnlich ist auch das Stammbruchpostulat der Ausdruck für die Lebenskraft der ältesten Begriffsbildungen. Man muß immer wieder betonen, daß elementarer Zahlbegriff und natürliche Brüche parallele Gebilde sind, nicht etwa der Bruchbegriff auf dem Umweg der „Division" aus dem der Anzahl abgeleitet ist: ohne diese Einsicht ist es nicht möglich, zu einer Entwicklungsgeschichte des mathematischen Denkens zu gelangen, wenn man nicht dabei alle Tatsachen der Sprachgeschichte und des äußeren Textbestandes ignorieren will. Sachlich genommen ist das Stammbruchpostulat das beste Zeugnis für die logische Unverdorbenheit eines auf sich gestellten Denkens, wenn es auch andrerseits beweist, daß man von so tiefen mathematischen Konzeptionen, wie die Ersetzung eines Zahlpaares durch ein Symbol, dessen Verwendungsregeln man geeignet (aber im Prinzip willkürlich) festsetzt, weit entfernt war. Die Geschichte zeigt eben, daß diese einschneidendste Erweiterung des „Zahl"begriffes[176]) auch nicht anders vorgenommen werden konnte, als in logisch korrekter Form — daß die erste Idee einer solchen Erweiterung mit der vollen Erfassung des gesamten logischen Sachverhaltes äquivalent ist, und daß es wieder eines langwierigen historischen Prozesses bedarf, um sie zu einer in jeder Schule gelehrten „Selbstverständlichkeit" werden zu lassen und so zu verderben.

Mit der Konstatierung dieser Tatsache hat es gar nichts zu tun, daß es keinem Zweifel unterliegt, daß die Ägypter sich voll bewußt waren, daß sich Divisionsresultate unter Umständen durch Brüche ausdrückten, daß andrerseits das Mehrfachnehmen eines Stammbruches ein durch eine „Division" erhältliches Ergebnis liefert, daß sie sich vier Fünftel selbstverständlich genau so gut vorstellen konnten wie vier beliebige andere Gegenstände. Nur sind sie ersichtlich nie auf den Gedanken gekommen, in solchen vier Fünfteln irgendein einheitliches Gebilde zu erblicken, ebensowenig wie man 4 Steine als einen neuen Stein behandelt. Die sonderbare Methode, einen „allgemeinen" Bruch als „Divisionsresultat" zu „definieren", ist leider erst der Neuzeit vorbehalten geblieben — ein Ägypter hätte mit Recht nicht verstanden, wie man z. B. ein „Resultat" „Resultat-mal" nehmen soll. Seine Divisionen, seine Bruchverdopplungen waren nur dann „ausgerechnet", wenn sie durch „Zahlen" aus-

---

[175]) Die Menge derartiger Relationen (zu der in Wirklichkeit noch eine Unzahl Maßrelationen gehört haben werden) stempelt von selbst das antike Rechnen zu einer ähnlichen „Kunst" wie die Beherrschung der schwierigen Schriftsysteme.

[176]) Man verdankt sie für die Antike wohl Eudoxos.

gedrückt waren, und Zahlen sind entweder Anzahlen (daher die Redewendung[177]) „das macht 5 Male") oder Kombinationen anderer Einheiten wie Halbe, Drittel usw., wobei man von der Möglichkeit, Wiederholungen derselben Brucheinheit durch Zusammenfassung gewisser neuer Bruchteile zu umschreiben, Gebrauch zu machen pflegt — nicht weil man sich bei $\overline{5}\ \overline{5}\ \overline{5}\ \overline{5}$ nichts vorstellen konnte[178]), sondern aus jenen teils praktischen, teils psychologischen Gründen, die ich schon oben (§ 6 S. 348) auseinandergesetzt habe.

Es ist zu betonen, daß es keinem Zweifel unterliegen kann, daß man ohne weiteres übersehen konnte, daß, wenn $\overline{\overline{3}}+\overline{30}$ die übliche Umschreibung für $\overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10}$ war[179]), dies durch weitere drei $\overline{10}$ oder $\overline{5}+\overline{10}$ zu 1 zu ergänzen war; dazu muß man nur (z. B. auswendig) wissen, daß sieben Zehntel $\overline{\overline{3}}+\overline{30}$, oder zwei Neuntel $\overline{6}+\overline{18}$ usw. äquivalent sind[180]) und schreibt dann ebenso von selbst hin, daß $\overline{6}+\overline{18}+\overline{9}=\overline{3}$ ist, wie man eben weiß, daß drei Neuntel einem Drittel entsprechen oder $3\cdot 3=9$ ist[181]). Aber das virtuoseste Kopfrechnen mit allen $2/n$- und sonstigen Bruchrelationen und allen ganzen Zahlen hat nichts mit der Einführung eines Begriffs wie „Rationalzahl" oder gar des allgemeinen „Verhältnis"-Begriffes zu tun; im Gegenteil: je selbstverständlicher man sich in der ganzen Stammbruchmethodik bewegte, je mehr man von den in ihr enthaltenen Abkürzungsmöglichkeiten Gebrauch zu machen verstand, desto weniger ergab sich ein Anstoß zu einer grundstürzenden Änderung. So kam man in Babylonien nie auf die Idee des echten Positionssystems, obwohl es zum Greifen nahe lag, so haben

---

177) Besonders gebräuchlich in M.

178) Vgl. z. B. R 21 $\overline{\overline{3}}\ \overline{5}\ \overline{15}\ \overline{15}$ oder R 31 $\overline{7}\ \overline{8}\ \overline{14}\ \overline{28}\ \overline{28}$.

179) Vgl. S. 372.

180) Gillain, AEME, spricht in diesem Sinne ganz richtig von „formule hiéroglyphique de 2/15".

181) Beispiele für die volle Ausnutzung der Tatsache, daß Stammbruchdarstellungen auch als bloß konventionelle Umschreibungen für Bruch-Vielfache gelten können, lassen sich leicht nennen. Vgl. z. B. Anhang 4 zu § 6 und Anhang 5 zu § 7. Oder: die wegen des $\overline{\overline{3}}$ eigentlich sinnlosen Zerlegungen von 2/35 und 2/91 sind nur dadurch zu rechtfertigen, daß man $2=(1+\overline{6})+(\overline{\overline{3}}+\overline{6})$ und $2=(1+\overline{5}+\overline{10})+(\overline{\overline{3}}+\overline{30})$ bzw. als $2=7/6+5/6$ und $2=13/10+7/10$ übersah und wußte, daß sich 35 durch 5 und 91 durch 7 teilen ließ. Aber gerade die Ausnahmestellung dieser beiden Zerlegungen zeigt, wie wenig man sich über die darin zur Geltung kommende multiplikative Betrachtungsweise klar gewesen ist. — Oder R 67: $\frac{1}{2}\ \ \frac{\overline{6}+\overline{18}}{9}$ nicht etwa $\overline{12}+\overline{36}$ (analog R 17). Oder M 10: $8-(\overline{\overline{3}}+\overline{6}+\overline{18})=7+\overline{9}$. R 63: $\overline{2}+\overline{14}$ von 700 ist 400, usw. Schließlich ist auf B 1 $\sqrt{1+\overline{2}+\overline{16}}=1+\overline{4}$ und B 3 $\sqrt{6+\overline{4}}=2+\overline{2}$ hinzuweisen (vgl. Anm. 84, S. 326). Vgl. ferner R 24 bis R 27 (Tab. I S. 307), wo z. B. $x+\overline{5}x=21$ nicht durch $21:(1+\overline{5})$ gelöst wird, sondern durch $(21:6).5$, d. h. durch Division durch 6/5.

die Griechen den allgemeinen Verhältnisbegriff erst geschaffen, als sie erkannten, daß Quadratseite und Quadratdiagonale *nicht* einem Paar natürlicher Zahlen entsprechen konnten.

Kapitel III.

Rückblick.

§ 9. Die geschichtliche Entwicklung.

Die Disposition des Vorangehenden trägt wesentlich analytischen Charakter. Ausgehend von dem aus unseren Texten bekannt gewordenen Aufgabenkreis der ägyptischen Arithmetik (deren allgemeinste Form die '*ḥ*'-Rechnung darstellt), also insbesondere *pśw*- und ähnliche Verteilungsaufgaben, erschien vor allem die Bruchrechnung als Kernstück der Rechentechnik. Stammbruchpostulat und additive Dyadik bilden schließlich das Fundament dieses ganzen Formalismus.

Die ganze Reihe sehr spezifischer Eigentümlichkeiten der ägyptischen Arithmetik ist der Ausdruck einer langen Entwicklungsgeschichte. Die „Anschauungsgebundenheit" des frühen Zahlbegriffs, die sich darin ausdrückt, daß Individualzahlzeichen und Zahlworte die Homogenität der Zahlenreihe unkenntlich machen, die Individual-Bruchbezeichnungen, die ruhig solche Inkonsequenzen bestehen lassen, daß *r 1* „1/3", *r 2* „2/3" aber *r 5* oder *r 7* 1/5 bzw. 1/7 heißt — sie wirkt noch entscheidend auf den Typus des ausgebildeten algorithmischen Rechnens ein. Rekursion auf die Addition (als die dem Abzählen benachbarteste Operation), Hilfszahlenalgorithmus durch Auszählen in der kleinst vorkommenden Teileinheit, Sonderstellung der natürlichen Brüche und mit ihr zusammenhängende Gleichberechtigung von 2/3- und 1/2-Reihe und all dies sind nur Ausstrahlungen ideengeschichtlich sehr weit zurückliegender Entwicklungsphasen. Wir berühren damit Erscheinungsgebiete, die über den engeren Kreis der ägyptischen Mathematik hinausweisen; so können § 8 und 9 nur einige der Punkte aufzeigen, an denen dieser Fragenkreis auf die Ausbildung der Rechentechnik eingewirkt hat, ohne ihn selbst ernstlich in Angriff nehmen zu können.

Die Zufälligkeit der Erhaltung der Texte bewirkt, daß wir fast ausschließlich aus Quellen des MR schöpfen. Es fragt sich, ob wir wenigstens das mathematische Denken dieser Epoche einigermaßen richtig zu beschreiben imstande sind. Ich glaube, man muß diese Frage verneinen. Mehr zu sagen, als daß in dieser Zeit ein Formalismus üblich gewesen ist, wie wir ihn kennen, scheint mir nicht möglich — insbesondere haben wir keinerlei Anhaltspunkte für den Grad von Überlegenheit, mit dem man diesen Apparat beherrschte — etwa so wenig, wie man aus den Riten einer alten Religionsübung etwas auf die geistige Einstellung der Priesterschaft schließen kann. So ist beispielsweise über die prinzipiell äußerst wichtige Frage der Entwicklung der multiplikativen Betrachtungsweise kaum etwas auszusagen[182]). Nur eines scheint mir sicher: unsere Texte geben auch nicht den geringsten Anlaß, von einer wissenschaftlichen Betrachtung mathematischer Dinge zu reden, sofern man darunter das Forschen nach prinzipiellen logischen Zusammenhängen, nach Allgemeingültigkeit und Gesetzmäßigkeit, nach Beweisbarkeit versteht[183]). Die Frage nach dem Umfang der mathematischen Errungenschaften zur Zeit des mittleren Reichs wird wohl aus M und R ziemlich richtig abgeschätzt werden können. Ganz dunkel bleibt einstweilen die Weiterentwicklung bis in die griechische Logistik hinein.

Resumée: Was uns die ägyptischen mathematischen Texte erkennen lassen, ist höchstens ein schulmäßig-lebloser Ausschnitt, kaum geeignet, ein Licht auf tiefere geistige Strömungen zu werfen, wie dies für die Rolle der Mathematik in der Erkenntnistheorie und der wissenschaftlichen Methodenlehre der Griechen gilt. Selbst mit der babylonischen Mathematik, rein nach dem Umfang ihrer Quellen und ihrer zeitlichen Dichte genommen, halten die ägyptischen Texte den Vergleich nicht aus — ganz abgesehen von der inhaltlichen Überlegenheit der babylonischen Mathematik. Trotzdem gehören die ägyptischen Texte zu dem Wichtigsten, was wir auf dem Gebiete der antiken Mathematik kennen: während die griechische Mathematik fast nichts von ihrem geschichtlichen Werden erkennen läßt, bei der babylonischen dies höchstens durch die glückliche Erhaltung von Texten verschiedener Epochen ihres Werdens ausgeglichen wird, ist jedes Stück ägyptischer Mathematik ein wirkliches Stück Geschichte. Und Geschichte im interessantesten Sinne. Noch heute läßt sich durch Primitivenforschung der Ansatz zur Bildung des Zahlbegriffs verfolgen, genug hat sich erhalten, um frühe Stadien der wissenschaftlichen Mathematik zu kennen — aber ganz einzigartig ist die Verfolgbarkeit der frühesten mathematischen Ideenbildung gerade hinaus über den ersten primitiven Mengen- und Anzahlbegriff zu einer bestimmten Technik im Umgehen mit mathematischen Fragen, die uns die ägyptische Mathematik gewährt. Für die Unmöglichkeit, sagen zu können, Satz 1 wurde im Jahre a, Satz 5 aber erst im Jahre b entdeckt, entschädigt uns die ägyptische Mathematik reich: *Sie gibt die Möglichkeit einer* Geschichte *der mathematischen Grundlagenprobleme.*

---

[182]) Die in § 8 (S. 376) besprochenen Erscheinungen sind natürlich viel zu dürftig, um daraus weitreichende Schlüsse zu ziehen.

[183]) Vgl. dazu auch Archiv NF 4 (1930) S. 94ff.

Anhang. Abkürzungen.

I. Texte.

Siehe S. 301f. Anm. 1.

SKT	= Straßburger Keilschrift-Texte (vgl. QS B Bd. 1 S. 120).

II. Bücher.

ÄBR	siehe Neugebauer ÄBR.
Chase RMP	= Chase u. a., The Rhind mathematical Papyrus. Oberlin (Ohio) 1 1927, 2 1929 (erschienen 1930).
Erman WB	siehe WB.
Gardiner Gram.	= Gardiner, A. H., Egyptian Grammar. Oxford 1927.
Gillain AEME	= Gillain, O., L'Arithmétique au Moyen Empire. Bruxelles 1927.
Griffith Kah.	= Griffith, F. L., The Petrie Papyri. Hieratic Papyri from Kahun and Gurob. London 1898.
Neugebauer ÄBR	= Neugebauer, O., Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, Berlin 1926.
Peet RMP	= Peet, T. E., The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058. London 1923.
Sethe Erl.	= Sethe, K., Erläuterungen zu den ägyptischen Lesestücken. Leipzig 1927.
Sethe ZZ	= Sethe, K., Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern und was für andere Völker und Sprachen daraus zu lernen ist. Straßburg 1916.
Vogel ÄA	= Vogel, K., Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik in ihrem Zusammenhang mit der $2/n$-Tabelle des Papyrus Rhind. München 1929.
WB	= Wörterbuch der ägyptischen Sprache. Herausgegeben von A. Erman und H. Grapow. Leipzig 1926ff.

III. Zeitschriften.

Archiv NF	= Archiv für Geschichte der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik; Neue Folge.
Archivio	= Archivio di Storia della Scienza (Archeion).
ÄZ	= Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde.
JEA	= The Journal of Egyptian Archaeology.
QS	= Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik.
OLZ	= Orientalistische Literaturzeitung.
Rec. de trav.	= Recueil de travaux relatifs à la Philologie et à l'Archéologie Egyptiennes et Assyriennes. Nouvelle série.

IV. Konkordanz K.

$2/n$-Tabelle	1 bis 10		
Titel	30	Nr. 4	29
Nr. 1	31 bis 42	Nr. 5	12, 11
Nr. 2	43 bis 62	Nr. 6	14, 13
Nr. 3	23 bis 28	Nr. 7	15 bis 22

V. Sonstiges.

AR	Altes Reich —3200 bis —2270 (Dyn. 1 bis 6)
MR	Mittleres Reich —2100 bis —1700 (Dyn. 11 bis 13)
Hyksos	—1700 bis —1555 (Dyn. 14 bis 17)
NR	Neues Reich —1555 bis —712 (Dyn. 18 bis 24)

John Wallis.

1616—1703.

Zur Ideengeschichte der Mathematik im 17. Jahrhundert.

Von Adolf Prag.

(Eingegangen 7. 6. 30.) *)

---

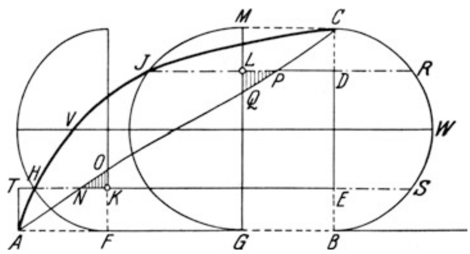
*) Aus dem Mathematisch-Historischen Seminar der Universität Frankfurt a. M.

[1]) Die Zitate beziehen sich im allgemeinen auf die Gesamtausgaben; auf den Namen des Autors wird durch den Anfangsbuchstaben verwiesen, nur die Zitate aus

§ 1. Einleitung:

Funktionsbegriff im Anfang des 17. Jahrhunderts.

Galilei (1564—1642) hatte die Aufgabe gestellt, die Fläche der Zykloide mit dem Kreis zu vergleichen. Torricelli (1608—47), Fermat (1601—65), Descartes (1596—1650), Roberval (1602—72), Pascal (1623—62) konnten die Lösung geben:



AHJC ist die durch das Abrollen von *CRSB* erzeugte Zykloide. Sei $AF = MC = GB$; H und J sind die zu den symmetrischen „Rad“stellungen (F) und (G) gehörigen Zykloidenpunkte. Dann ist

$$AT = FK = BE = DC = LM.$$

Die Dreiecke *AFO* und *CMQ* sind kongruent;

also $$OF = QM;$$

wegen $$FK = LM \text{ folgt}$$

$$\Delta NKO \cong PLQ; \text{ also}$$

$$NK = LP, \text{ und da}$$

$$HK = ES = DR = JL, \text{ so ist}$$

$$HN + JP \, [= HK - NK + JL + LP] = ES + DR.$$

Das bedeutet, daß die Flächen

$$ACJHA \text{ und } CBSRC$$

gleiche Indivisibilien haben — also gleich sind; d. h.:

$$ACJHA = \tfrac{1}{2} \text{ Kreisfläche};$$

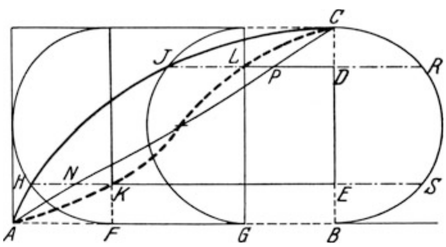
da $\Delta ABC = \frac{1}{2}\, AB \cdot BC = \frac{1}{2}$ Umfang · Radius = Kreisfläche,

so ist schließlich die Zykloidenfläche

$$ABCJHA = \tfrac{3}{2} \text{ Kreisfläche}.$$

Wallis selbst sind lediglich durch Ziffern gegeben. Der volle Titel der Werke von Wallis lautet: Johannis Wallis S. T. D. geometriae professoris Saviliani in celeberrima Academia Oxoniensi Opera Mathematica tribus voluminibus contenta. I. 1699; II. 1693; III. 1699. Die Lectiones geometricae von Barrow sind nach der Ausgabe von 1674 zitiert, Robervals Arbeiten findet man in den Mém. de l'Acad. VI. 1730. Eine Biographie von Wallis steht bei Zeuthen, Gesch. d. Math. im 16. u. 17. Jahrh. p. 47 *sq.* In der vorliegenden Arbeit wird keine Biographie gegeben.

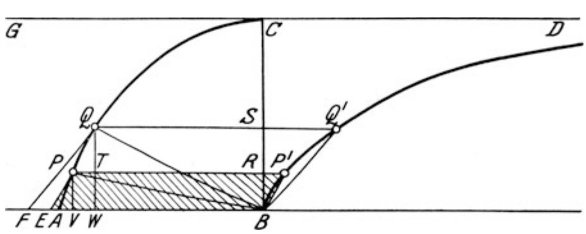
So etwas schließen Torricelli, Fermat[2]), Pascal. Descartes[2]) baut denselben Beweis zu einer exakten Exhaustion um, indem er den Halbkreis und das Zykloidensegment durch Dreiecke symmetrisch zur Zentralen VW „ausschöpft". Der Beweis muß, ob er nun nach der Cavalierischen (1591—1647) Methode oder nach dem Vorbild des Archimedes (287—212) geführt werde, wesentlich eine Symmetrieeigenschaft der Zykloide benutzen; Roberval[3]) verbessert die Lösung dadurch, daß er „die Kurve dieser Symmetrie" zeichnet. Er sieht alle diese einzelnen symmetrischen Punkte zu einer Linie zusammen, zur compagne der Zykloide.



Alle Punkte „K" und „L" liegen auf $\widehat{AKLC}$. Daß diese Kurve das Rechteck $[AC]$ halbiert, „sieht" man sofort ⟨bewiesen wird es natürlich wie oben, indem man die Diagonale AC zieht, dann sind die Stücke KN und PL je gleich, usw.⟩; daß die Fläche $(AKLCJHA)$ gleich dem Halbkreis ist, wird ohne weiteres klar. An Arbeit ist nichts gespart; aber anschaulicher ist es so — und tiefer begründet.

Wir sagen modern: diese compagne ist eine Kosinuskurve, und jene Symmetrie ist die Eigenschaft der Kosinusfunktion, daß cos x und cos $(\pi - x)$ dem Betrag nach gleich sind. Wir dürfen wohl nicht sagen, daß Roberval „funktionales Denken" vor den andern voraus hatte; man sagt vielleicht besser, daß hier ein besonders ausgeprägtes Beispiel für ein funktionales Sehen vorliegt.

Torricelli war stolz darauf, als erster ein Verfahren angeben zu können, wie man eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche durch eine endliche messen solle; Roberval hat das gleiche Verfahren zur selben Zeit. Barrow (1630—77) benutzt es wieder; er kennt es von James Gregory (1638—75).



Durch eine Betrachtung infinitesimaler Figuren wird die Gleichheit zweier zugeordneten Flächenstücke erkannt.

Die Kurve $APQC$ wird transformiert in $BP'Q'D$: GC, PE, QF sind Tangenten an AC; VE, WF sind die Subtangenten. Roberval und Torricelli ziehen $BP' \parallel EP$

[2]) Z. B. Fermat, suppl. 91. D II, 134, 253.
[3]) Mém. de l'Acad. VI (1730).

$[BQ' \,||\, FQ]$ und $PP' \,||\, AB\,[QQ' \,||\, AB]$ und schließen aus der Relation für die „vergrößerten" Flächenelemente: $EBP'P = 2\,EBP$ usw. . . ., daß für die Gesamtflächen gilt:

$$ABP'DCPA = 2 \cdot ABCPA,$$

also:

$$BP'DCB = ABCPA.$$

Gregory[4]) und Barrow (B. XI, 88) finden $BP'Q'D$ als Kurve der Subtangentenlängen: $RP' = VE$, $SQ' = WF$ . . . und benutzen zum Nachweis der Flächenbeziehung die Ähnlichkeit der infinitesimalen Dreiecke AVP, PTQ . . . mit den endlichen Dreiecken EVP, FWQ . . . usw.

Wir sagen modern: hier wird ein Integral transformiert: $\int y dx = \int \frac{y}{y'} dy$. Unsre Transformationsformel $dy = y'dx$ gibt keine Veranlassung zur Betrachtung von Flächenstücken, scheint es. Hier aber, bei Torricelli und Gregory wird diese Integraltransformation funktional, geometrisch gesehen, nicht gerechnet.

Sie kann nicht gerechnet werden; denn es fehlen die Formeln. Zu rechnen, formal zu schließen, scheint nun selbst da sinnlos zu sein, wo man schon etliche Formeln hat. Man schließt lieber vom Quadrat auf den Würfel und das Quadratoquadrat, als von x^n auf x^{n+1}. Man sieht alle Proportionen als Streckenbeziehungen; bei jeder Gleichsetzung kommt es auf Homogenität in den Dimensionen an: nur die Geometrie ist exakt. Es gibt keinen Funktionsbegriff — er sei denn geometrisch: nur die Geometrie ist „sicher". Denn die Alten rechneten geometrisch.

I. Arithmetica infinitorum.

§ 2. Vieta. Descartes. Cavalieri.

Symbole. Arithmetisierung. Integralrechnung.

Vieta (1540—1603) war es, der um die Wende zum 17. Jahrhundert die entscheidende Neuerung einführte, die die Algebra weiterbringen konnte: die Setzung von Buchstaben für die Konstanten der Gleichungen. In England hatte vor allem Harriot[5]) dies neue Hilfsmittel gebraucht und so der Algebra ein neues Aussehen gegeben; Oughtred[6]) hat die Zeichen, die im wesentlichen geblieben sind. Wenn Wallis seinen Landsmann Harriot über Descartes stellt, so bedeutet das zunächst nur, daß er von Harriot mehr gelernt hat, und das kann ja wahr sein. Daß er wahrhaft Wesentliches von Descartes[7]) lernen mußte, bestreitet er nie. Seine erste Arbeit (De sectionibus conicis tract. 1655; I, 291) ist

[4]) Geometriae pars universalis pr. 11.
[5]) 1560—1621. Artis analyticae praxis 1631.
[6]) 1574—1660. Clavis mathematicae 1631.
[7]) Géometrie 1637. D VI, 367.

nichts anderes als ein Schulbeispiel für die Anwendung der Idee Descartes': Wallis zeigt in einem Stoffgebiet, das allen vertraut ist, in der Lehre von den Kegelschnitten, wie einfach, wie „klein" alle Beweise werden, wenn man stets rechnet. Er verspricht, die Kurven wirklich als Kegelschnitte zu behandeln, aber er tut das nur sehr kurz, bis er eine charakterisierende Eigenschaft abgeleitet hat, die es bequem macht, etwas wie die „Kurvengleichung" aufzustellen.

Die Anwendung der Buchstabenrechnung: der „Arithmetik" auf die Geometrie, das ist die Idee, die Descartes propagiert hatte, deren Wert Wallis zu zeigen versucht. „Die Idee Descartes'": das bedeutet nur, daß Descartes diese Idee programmatisch herausgestellt und konsequent durchgeführt hat — dies allein genügt allerdings, sie stets mit seinem Namen zu verknüpfen. Die strenge Konsequenz forderte, von der Algebra her, eine Beschränkung; nur „algebraische" Kurven sind zu behandeln. Die Beschränkung ist wertvoll: das Tangentenproblem kann für „Descartessche Kurven" befriedigend bearbeitet werden, hier braucht man keine limites (es handelt sich nur darum, die Bedingung dafür aufzustellen, daß eine algebraische Gleichung eine Doppelwurzel hat). Vor allem aber drängt diese Beschränkung zur Überwindung von der Geometrie her. Nicht in dem trivialen Sinn, wie bei jener andern Descartesschen Einschränkung, dem Buchstabensymbol nur die Bedeutung des absoluten Wertes einer Zahl beizulegen — die ließ man außer acht, im Vertrauen auf die Allgemeingültigkeit des Symbols, man machte Fehler und kam so zur strengen Klärung. Sondern hier wurde die Einschränkung bewußt als solche empfunden; es „gab" doch Nicht-Descartessche Kurven, Sinuslinie und Zykloide etwa, und hier mußte man auf den Vorteil formalen Schließens neben der visuellen, geometrischen Einsicht verzichten, hier fehlte die analytische Stützung des Funktionsbegriffs; gleichwertige Ausdeutung von geometrischer Gestalt und „arithmetischer" Form war ein Ziel, noch nicht Methode; die entscheidende Forderung geht dahin, die analytischen Formalismen zu erweitern, mit neuen Symbolen zu rechnen: diese Forderung mußte gestellt werden. Denn man hatte die Kraft der „Arithmetik" erkannt.

Die Loslösung der Arithmetik, des Zahlbegriffs, von der Geometrie ist ein Ziel, das Wallis leicht erreichen zu können glaubt. Ob er sich klar darüber ist, daß dies Ziel erreicht werden muß — das heißt modern: daß die Axiome des formalen Rechnens aufgestellt werden müssen — ehe die Descartessche Idee ganz verwirklicht werden kann, das glaube ich nicht. In der Mathesis universalis, das ist: arithmeticum opus integrum (1657. I, 11), zeigt er etwa, wie man mühelos alle Sätze von Euklid II und V rein arithmetisch „beweisen" kann (I, 123. 183). Satz 8 des V. Buches zum Beispiel steht bei Wallis so (I, 186): „*In-*

aequalium maior ad eandem, maiorem habet rationem quam minor. Et eadem ad minorem, maiorem habet rationem quam ad maiorem." *Nam* $\frac{A+E}{a}\left(=\frac{A}{a}+\frac{E}{a}\right)>\frac{A}{a}$. *Item* $\frac{a}{A+E}<\frac{a}{A}$. *Quippe crescente Dividendo crescit quotus, sed crescente Divisore, minuitur.*

Der Euklidische Beweis nimmt (bei Heiberg) über 3 Seiten in Anspruch (E. II, 24).

Was alles an Strenge verloren geht, bleibt Wallis verborgen — bleibt verborgen bis ins 19. Jahrhundert. Er freut sich über die Allgemeinheit der abstrakten Größenlehre. Aber die schier unüberwindliche Schwierigkeit, diese Abstraktion überhaupt völlig vorzunehmen, ignoriert er — zum Glück!

Barrows Kritik in den Lect. mathematicae III. hakt bei dieser Schwierigkeit ein; aber Barrows „reaktionäre" Forderung, Zahlen nur „mit Geometrie" zu betrachten, kann von ihm selbst nicht mehr erfüllt werden.

Die dritte große Idee des 17. Jahrhunderts: Cavalieris Indivisibilien verarbeitet Wallis in seinem bekanntesten Werk, der Arithmetica infinitorum (1655; I, 355). Nicht dieser Satz: „*continuum quodvis intelligitur ex indivisibilibus (numero infinitis) constare*", den Wallis aus Cavalieri zitiert (I, 645), bringt das Neue, das die Bezeichnung „Cavalieris Idee" rechtfertigt; denn diese Idee ist sehr alt. Aber Cavalieri geht über die Alten hinaus: Summen werden nicht nur durch Abschätzung, sondern auch durch Transformation berechnet, Indivisibilien werden „einzeln" verglichen. Cavalieri treibt Integral-Rechnung. Die Kühnheit und das Geschick Cavalieris, wie er mit dieser Idee arbeitet — das gibt Grund zur Benennung: Cavalieris Indivisibilien.

Schon in der Kegelschnittlehre hatte Wallis die neue Methode statt der strengen Exhaustion benutzt. Er kennt sie aus den Arbeiten Torricellis; Cavalieri selbst und die großen französischen Mathematiker hat er damals noch nicht gelesen. Der Titel des großen Werks: Arithmetica infinitorum, soll ein Programm sein (I, 357): Cavalieris Originalarbeit hieß Geometria indivisibilium (1635), jetzt soll im Verfolg des Zieles der Verallgemeinerung, der Abstraktion die Arithmetisierung geleistet werden. Bei der Wertung eines Werks mit Rücksicht auf die zeitgenössische Entwicklung ergibt sich von selbst ein dreigliedriger Rhythmus: was gab (und forderte) die Epoche, was ist die Einzelleistung, wie antwortete die Zeit? Was Wallis 1650 vorfand: Torricelli und Archimedes, ist bekannt. Die schaffende Generation, vielleicht mit Ausnahme von Huygens (1629—95), reagierte auf seine Arbeit zunächst mit Unbehagen, mit Angst vor Unsicherheit. Es wird sich lohnen, die Arbeit im einzelnen durchzugehn.

§ 3. Arithmetica infinitorum.

Die (längst bekannten) Grenzwerte der Summen $\dfrac{\sum\limits_{v=0}^{n} v^k}{(n+1)\,n^k}$ werden ermittelt zu $\dfrac{1}{k+1}$ für natürliche Zahlen k. Dazu wird gezeigt, daß die Differenz des Grenzwerts und der Partialsummen mit $\dfrac{1}{n}$ abnimmt[8]): *cum crescente numero terminorum excessus ille continuo minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat* (I, 374 pr. 20) ... und (z. B.) ... *ut sit rationis provenientis excessus, ea quam habet unitas ad (quadruplam) numeri terminorum* ($k = 3$) (I, 382 pr. 39). Wallis zeigt dies stets explizit, indem er etliche Partialsummen ausrechnet — *et sic deinceps.* Schon dies nennt er Induktion, doch berechtigen die Worte: *ut inductione tandem universalis propositio innotescat* (I, 365) an dieser Stelle bei Satz 1 gewiß noch nicht zu einem Vorwurf gegen die Methode überhaupt.

Bis $k = 3$ rechnet Wallis auf diese Art, dann gibt er eine Tabelle, an die er gewiß *et sic deinceps* schreiben darf. In dieser Tabelle sind schon etliche „Wurzeln" — d. h. rationale Exponenten enthalten, insofern nämlich etwa $3 = \dfrac{6}{2}$ ist; man erkennt sofort das Rechengesetz auch hier, und: *patet aditus ad investigationem rationum quas habere dicantur series radicum* (I, 389 pr. 53). In Satz 59 gibt Wallis die erste große Tabelle für die Werte $\int\limits_0^1 x^{\frac{p}{q}}\,dx$. Da die unendlichen Summen stets auch zur Ermittlung von Quadraturen gedeutet werden, so ist es wohl statthaft, das $\int$-Zeichen zu schreiben. Die Quadratur durch Summation äquidistanter Ordinaten ist im Grunde das Archimedische Verfahren. Aber die Deutung als Fläche ist bei Wallis stets sekundär, die Ableitung geschieht mit Hilfe der Reihen, mit denen gerechnet wird; so geht Wallis im Anschluß an Cavalieri über Archimedes hinaus. Die Reihen $\sum\limits_{v=0}^{n} v^k$ nennt er stets nach den Exponenten k, auch wenn sie gebrochen oder (später) negativ sind. Statt Exponent sagt er index potestatis; aber er schreibt noch keine allgemeinen Exponenten in Formeln. In Satz 64 spricht er als Theorema universale (in Worten) aus, daß für alle $k > 0$ $\int\limits_0^1 x^k\,dx = \dfrac{1}{k+1}$ ist, mit dem Zusatz: *sin index supponatur irrationalis, puta $\sqrt{3}$, erit ratio ut 1 ad $1+\sqrt{3}$.*

---

[8]) Daß ähnliche exakte Formulierungen schon bei Mengoli (1625—86) vorkommen, der 1650 z. B. die Divergenz der harmon. Reihe nachwies, ist kaum beachtet worden. Vgl. Eneström, Bibl. math. 12 (3). 135.

An Hand der Tabellen kann mit den „Reihen" gerechnet werden; Multiplikation, d. h. $\int x^p x^q \, dx$, und Division: $\int \frac{x^p}{x^q} \, dx$: das ergibt, falls $q > p$, neue „Summen": *habentque indices negativos* (I, 403 pr. 87). (Um stets endliche Werte zu bekommen, kann man die Grenzen passend wählen: $\int\limits_{\infty}^{1} x^{-k} \, d\,x = \frac{1}{-k+1}$; nur für $k = 1$ wird dies unendlich [I, 410 pr. 105]). Man kann ferner zwei „Reihen" addieren oder subtrahieren und „gliedweise integrieren" ... Er berechnet so $\int\limits_0^1 (1 \mp x^k) \, dx = \int\limits_0^1 1 \cdot dx \mp \int\limits_0^1 x^k \, dx$; $\int\limits_0^1 (1 - x)^n \, dx$ und $\int\limits_0^1 (1 - x^2)^n \, dx$ mit Entwicklung nach dem binomischen Satz für natürliche Zahlen n (I, 413, 415 pr. 111, 117). Hier folgt der Satz über den Kreis (I, 417 pr. 121): *circulus ad quadratum diametri eam habet rationem, quam habent radices quadraticae universales residuorum seriei infinitae aequalium serie secundanorum* [x^2] *multatae ad seriem illam aequalium* — das heißt:

$$\frac{\sum\limits_{(v)} \sqrt{R^2 - (v \cdot a)^2}}{\sum\limits_{(v)} R^2} \longrightarrow \frac{\pi}{4} \quad \text{oder:} \quad \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Das Ziel ist damit genau gezeigt: diese ratio ist numerisch anzugeben. Deshalb werden zunächst die „Integrale" $\int\limits_0^1 (1 - x^k)^n \, dx$ für ganzzahliges k und n, dann für Stammbrüche $k = \frac{1}{s}$ tabellarisch geordnet; gesucht ist der Wert für $n = s = \frac{1}{2}$. Ich gebe diese Tabelle als Beispiel an (I, 424 pr. 132); die Spaltenüberschriften sind die Exponenten n (bei Wallis in Worten), die Zeilen sind nach s geordnet:

$s \backslash n$	0	1	2	3	4	5	et sic deinceps	
0	1	1	1	1	1	1		1
1	1	2	3	4	5	6		$\frac{2l+0}{2}$
2	1	3	6	10	15	21		$\frac{2l+0}{2} \cdot \frac{2l+2}{4}$
3	1	4	10	20	35	56		$\frac{2l+0}{2} \cdot \frac{2l+2}{4} \cdot \frac{2l+4}{6}$
4	1	5	15	35	70	126		$\frac{2l+0}{2} \cdot \frac{2l+2}{4} \cdot \frac{2l+4}{6} \cdot \frac{2l+6}{8}$
5	1	6	21	56	126	252		....

et sic deinceps.

Das Bildungsgesetz dieser Tabelle — sie gibt die reziproken Werte der Integrale — ist evident. Rechts stehen die allgemeinen Ausdrücke für das l^{te} Element jeder Zeile [$l = 1, 2, 3, \ldots$] in der Form, die Wallis zuletzt schreibt (I, 458 pr. 184; I, 461 pr. 187). Um $\frac{4}{\pi}$ zu erhalten, wofür Wallis das Zeichen $\square$ einführt (I, 443, pr. 169), muß man für $n = s = \frac{1}{2}$ „interpolieren". Auf Grund der allgemeinen Ausdrücke „kann man" leicht in die vorhandenen Zeilen die Elemente für $l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, das bedeutet für $n = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$, einschalten. Bei Beachtung der Symmetrie der Tabelle bekommt man dadurch zugleich schon etliche Werte für die zu $s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ einzuschaltenden Zeilen. Analog zu den allgemeinen Ausdrücken bei ganzzahligem s bekommt man hier Faktoren der Form $\frac{2l-1}{1}, \frac{2l+1}{3}, \frac{2l+3}{5}$ usw. Es soll hier nicht darauf ankommen, diese Analogieschlüsse einzeln mitzumachen, da später herausgestellt werden muß, worauf es wesentlich ankommt. Benutzt man an der Stelle $n = s = \frac{1}{2}$ das Zeichen $\square$, so ergibt sich die folgende Tabelle [$l = n + 1$] (I, 462 pr. 189 [I, 458 pr. 184]):

$s \backslash n$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\ldots$	
$-\frac{1}{2}$	∞	1	$\frac{1}{2}\square$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\square$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{15}\square$	$\ldots$	A
0	1	1	1	1	1	1	1	$\ldots$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\square$	1	$\square$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}\square$	$\ldots$	$A \cdot \frac{2l-1}{1}$
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	$\ldots$	$1 \cdot \frac{2l+0}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}\square$	1	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}\square$	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15}\square$	$\ldots$	$A \cdot \frac{2l-1}{1} \cdot \frac{2l+1}{3}$
2	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	$\ldots$	$1 \cdot \frac{2l+0}{2} \cdot \frac{2l+2}{4}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{4}{15}\square$	1	$\frac{8}{5}\square$	$\frac{7}{2}$	$\frac{64}{15}\square$	$\frac{63}{8}$	$\frac{128}{15}\square$	$\ldots$	$A \cdot \frac{2l-1}{1} \cdot \frac{2l+1}{3} \cdot \frac{2l+3}{5}$
$\vdots$	$\ldots$						$\ldots\ldots$		$\ldots \quad \ldots$

§ 4. Interpolation.

Hic tandem haeret aqua (I, 463. Schol.) — weiter trägt diese Methode der Induktion und Interpolation nicht, diese „dreiste"[9]) Methode! Worin besteht sie eigentlich? Welche Vorwürfe sind Wallis zu machen?

---

[9]) Vgl. Zeuthen p. 287, 288. Wieleitner (Sammlung Schubert 63) p. 116.

Wallis ordnet seine Ergebnisse in Tabellen an; das tat man lange vor ihm: bekannt ist Stifel[10]). Die Tabelle ersetzt eine Formel. Die Tabelle ordnet der Reihe der natürlichen Zahlen eine andre Zahlenreihe zu. Die Tabelle enthält das Gesetz dieser Zuordnung. „Es gibt keinen allgemeinen Funktionsbegriff ohne Geometrie" —? Die Zuordnung wird gefunden für rationales „Argument": aber dann gilt sie allgemein — denn es gibt, für Wallis gewiß, nur stetige Funktionen. In der Abhandlung De angulo contactus (II, 630) erklärt Wallis die Vorstellung einer Funktion, die einen Wert ausläßt, für völlig absurd. Vergessen wir nicht, wie sehr physikalische Anschauung — Bewegung, also die Zeit als Veränderliche — gerade diesem Funktionsbegriff zugrunde liegt. Wallis „darf" also schließen *sin index irrationalis, puta* $\sqrt{3}$..., obwohl er gar nicht definiert hat, was $a^{\sqrt{3}}$ bedeutet: die Tabelle gestattet, den Definitionsbereich der Funktion zu erweitern.

Ja — aber um bei der angegebenen Tabelle oben zu den Werten rationalen Arguments zu kommen, benutzt er schon seine Induktion und Interpolation: *mais sa façon de demonstrer* . . . warum nicht *viâ ordinariâ, legitimâ et Archimedeâ?* fragt Fermat (II, 770), es geht doch wohl auch!

In der ganzen Arithm. infin. kommt genau einmal (I, 468) das Wort *demonstrare* vor. In der ganzen Arithm. infin. erhebt Wallis nicht den Anspruch auf Strenge: *simplicissimus investigandi modus* (I, 365 pr. 1) — mehr nicht — ist die Induktion. *Investigare* heißt: eine Fährte suchen, beweisen heißt: *demonstrare.* Man streicht vorwurfsvoll *inductio* an — er sagt es ausdrücklich (I, 412 Schol.; I, Praefatio), er will nicht wie die Alten (Archimedes vor allem) Resultate mit *demonstrationibus apagogicis* geben, er will vielmehr seine Methode des Aufspürens mitteilen, daß andre seiner Spur folgen können — *investigatio* müßt ihr anstreichen. Die Beweise konnten vielleicht seine Studenten erbringen — darüber wird noch zu sprechen sein.

Gänzlich ungewohnt ist auch die Anordnung in der Arithm. infin. Ein paar Lemmata machen die Sache plausibel, dann steht: *adeoque — Theorema.* Wallis ahnt offenbar, daß man dem Leser das nicht zumuten könne, und wie zur Bekräftigung hängt er an jedes Theorem ein Dutzend Korollare geometrischen Inhalts (oft auch mit neuen geometrischen Folgerungen), daß man Zutrauen bekomme.

§ 5. Das unendliche Produkt.

Aus der letzten Tabelle leitet Wallis das Produkt für □ leicht ab. Bezeichnet man die Werte der dritten Zeile mit a_v $[v = 1, 2, 3, \ldots]$, so

---

[10]) 1486—1567. Arithmetica integra 1544.

erkennt man sofort die Rekursionen (bei Wallis für etliche v explizit, dann „etc." [I, 467, pr. 191])

$$\frac{a_{v+2}}{a_v} = \frac{v+1}{v}$$

mit den Anfangswerten $a_1 = \frac{1}{2}\square \qquad a_2 = 1$.

Dieser Quotient geht abnehmend gegen 1. Aus Stetigkeitsgründen schließt Wallis

$$\frac{a_{v+2}}{a_{v+1}} < \frac{a_{v+1}}{a_v} < \frac{a_v}{a_{v-1}},$$

oder umgeformt $\sqrt{\frac{a_{v+1}}{a_v} \cdot \frac{a_{v+2}}{a_{v+1}}} < \frac{a_{v+1}}{a_v} < \sqrt{\frac{a_v}{a_{v-1}} \cdot \frac{a_{v+1}}{a_v}}$

$$\sqrt{\frac{a_{v+2}}{a_v}} < \frac{a_{v+1}}{a_v} < \sqrt{\frac{a_{v+1}}{a_{v-1}}},$$

und das gibt mit der Rekursionsformel oben das bekannte Produkt. Wallis schreibt:

$$\square \begin{cases} \textit{minor quam} \ \dfrac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot \cdots \qquad \cdot 13\cdot 13}{2\ \cdot 4\cdot 4\cdot \cdots \qquad \cdot 12\cdot 12\cdot 14}\sqrt{1\frac{1}{13}} \\ \textit{maior quam} \ \dfrac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot \cdots \qquad \cdot\cdot 13\cdot 13}{2\ \cdot 4\cdot 4\cdot \cdots \qquad \cdot 12\cdot 12\cdot 14}\sqrt{1\frac{1}{14}} \end{cases}$$

et sic deinceps, quousque libet (I, 468).

Die Differenz der beiden Schranken wird beliebig klein — *quod quidem, si opus sit, demonstrabitur:* Der einzige Beweis des ganzen Werks. *Si quis autem curiosius inquirat* — wenn nämlich ein ganz Neugieriger wissen will, wie weit man zu gehen hat, damit der Fehler kleiner als eine vorgegebene Zahl wird — dann kann auch das noch gezeigt werden, und zwar exakt.

§ 6. Analysierung.

Es ist wohl kaum noch nötig, moderne Zeichen einzuführen. Die Integrale $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{s}})^n\, dx$ bekommen durch die Transformation $x = y^s$ die „Normalgestalt" der B-Integrale: $s\int_0^1 y^{s-1}\,(1-y)^n\, dy$; Wallis kennt für ganzes, positives Argument die Beziehung zur Γ-Funktion. In der dritten Zeile der letzten Tabelle, auf die es allein ankommt, stehen insbesondere die Integrale $\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx$, oder bequemer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx$! Führt man statt $n = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \ldots$ den Index $v = 1, 2, 3 \ldots$ ein, so wird in der oben gebrauchten Bezeichnung

$$\frac{1}{a_v} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{v-1} x dx;$$

die Rekursionsformel ergibt sich durch partielle Integration. Die Ungleichung

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^v x d x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{v+1} x d x} < \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{v-1} x d x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^v x d x} < \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{v-2} x d x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{v-1} x d x},$$

das heißt wesentlich:

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^v x d x\right]^2 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{v-1} x d x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{v+1} x d x,$$

ist eine Schwarzsche Ungleichung. Sie wird bei Wallis nicht begründet; Huygens spürt die Lücke (H I, 458), aber Wallis gibt in seiner Antwort nichts als die Feststellung: ... *rationes* $\left[\frac{a_{v+1}}{a_v}\right]$ *continue item* $\left(\text{wie } \frac{a_{v+2}}{a_v}\right)$ *decrescunt*... (H I, 479).

Wie steht es nun mit der Möglichkeit, daß die von Wallis „aufgespürten" Ergebnisse von einem seiner Zeitgenossen vor Leibniz (1646—1716) und Newton (1642—1726) bewiesen würden? Der Franzose Boulliau gibt in seinem Kommentar zur Arithm. infin., auf den Wallis hinweist, eine Reihe von Beweisen, aber nicht die wesentlichen. — Es kommt nur auf zwei Dinge an: die Rekursionsformel für ungerade v und die letzte Ungleichung. (Für gerade v konnte „man" gewiß die Rekursionsformel exakt ableiten.) Ob einer die Ungleichung beweisen konnte, das scheint sehr fraglich, ich glaube es nicht. Zur Begründung des Wallisschen Produkts hätte auch schon die schwächere Ungleichung $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^v x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{v-1} x dx$ genügt; aber ich wüßte nicht, wer solch einen Beweis hätte führen sollen, obwohl man dies wohl gekonnt hätte. — Die Rekursionsformel dagegen konnte gewiß bewiesen werden: durch Barrow (der übrigens ein Schüler von Wallis ist). Barrow hat ja die allgemeine Formel der partiellen Integration — aber so viel braucht man nicht einmal.

Für $v=3$ und $v+2=5$ (zum Beispiel) lautet die Rekursion

$$J_3=\int_0^1 y^3dx=\frac{3}{4}\int_0^1 ydx=\frac{3}{4}J_1, \text{ wo } y^2=1-x^2.$$

Bei Barrow, Lect. geom. XI, § 15, steht, ins Moderne umgeschrieben: $\int x^n dy=-n\int\frac{y}{y'}x^{n-1}\,dy$, falls $x^n\cdot y$ an den Grenzen verschwindet; $\frac{y}{y'}$ ist die Subtangente; sie ist beim Kreis bekannt.

$$J_3=\int_0^1 y^3dx=-3\int_0^1\frac{x}{x'}y^2dx \;:\; \frac{x}{x'}=-\frac{x^2}{y}$$

$$J_3=3\int_0^1 x^2ydx=3\int_0^1 ydx-3\int_0^1 y^3dx$$

$$J_3=3\,J_1-3\,J_3$$

$$J_3=\frac{3}{4}\,J_1.$$

Dies alles kann man leicht ganz im Stile Barrows formulieren; darauf kommt es hier nicht an. Es sollte nur darauf aufmerksam gemacht werden, wie weit „ein Zeitgenosse" von Wallis — vor Leibniz und Newton — imstande war, zu der investigatio die demonstratio zu geben. Wallis selbst konnte das wohl nicht; aber er verspricht es auch nicht. Deshalb ist ihm kaum ein Vorwurf zu machen. — Was noch jenen einzigen „Beweis" der Arithm. infin. angeht, den Nachweis der Konvergenz des Produkts, so ist zu sagen, daß dies kein Kunststück ist; das Wallissche Produkt ist doch alternierend.

§ 7. Einzelheiten.

(Erweiterung von analytischen Operationen und Formalismen.)

Es sind noch etliche Einzelheiten aus der Arithm. infin. anzugeben: Das Zeichen ∞ für $\frac{1}{0}$ hat Wallis im Tract. de section. conic., p. 297, eingeführt[11]). Daß er so mit 0 rechnet, zeigt, daß seine Behauptung *nullum non est numerus* in der Math. univ. (ebenso wie der lange Beweis, daß 1 eine Zahl ist, [I, 24—27]) bloße Dialektik ist. Er weiß, daß $0\cdot\infty$ unbestimmt ist; bei Figuren, wo $\frac{A}{\infty}$ unser $\triangle x$ bedeutet, schreibt er immerhin $\frac{A}{\infty}\cdot\infty=A$. Und auch sein Produkt für $\square$ schreibt er ja in der Form $\frac{\infty}{\infty}$.

[11]) Tropfke II, 34: nach einer Ligatur für 1000, seit dem 7. Jahrhundert.

Eine Folge wie 1, 2, 6, 24, 120, ... (I, 466 Schol.) nennt er hypergeometrisch[12]; mit gutem Grund. Ihre Rekursionsformel ist (bei Wallis in Worten): $a_v = \varrho_v \cdot a_{v-1}$; hier speziell: $\varrho_v = v$; $a_1 = 1$, bei der geometrischen Reihe ist $\varrho_v = \varrho$ konstant. In Beachtung dieser Analogie kann man ein Zeichen für die Interpolation einführen: bei der geometrischen Reihe ist $b = \sqrt{(a_v \cdot a_{v+1})}$ das „geometrische Mittel"; so schreibt er allgemein

$$b = m^{-}(a_v \mid a_{v+1}) \text{ [lies: } medius \text{ (terminus) inter } \ldots];$$

Zum Beispiel:

$$\square = m^{-}\left(1 \mid \frac{3}{2}\right) \text{ „in der Reihe } 1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \ldots\text{"}$$

Hierdurch wird eine neue „auflösende" Rechenoperation definiert — die noch jeweils vom Charakter der Reihe abhängt; man kann gar nichts anderes erwarten, als daß sie im allgemeinen nur *approximando effici potest* (I, 434 Schol.). Man kann auch nicht verlangen, daß ein geschlossener Ausdruck bekannter Art angegeben wird; *credo, rationem illam talem esse, ut quae non poterit numeris exprimi iuxta ullum adhuc receptum notationis modum, ne quidem per latera surda* (I, 465 Schol.). Man muß nur kühn genug sein, etwas Neues zu wagen. *Ubi ad αδυνατον aliquid pervenitur — excogitant modum aliquem exprimendi* (I, 465, 466) — wie etwa bei den negativen, gebrochenen und schließlich irrationalen Zahlen. Solche Gedanken findet man wieder bei James Gregory, und sogar der Titel von Gregorys Arbeit[13] scheint aus Wallis genommen zu sein: *haec erit „vera circuli quadratura" in numeris quatenus ipsa numerorum natura patitur, explicata* (I, 466). Daß man auf analoge Art die Hyperbelquadratur ausführen kann, betont Wallis oft; aber das kann ja nach ihm ein anderer machen.

Zum Schluß (I, 476. pr. 192 *sq.*) zeichnet Wallis die Kurven zu seiner letzten Tabelle aus den rationalen Werten; d. h. die Funktionen

$$f_s(v) = \frac{1}{\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{s}}\right)^{\frac{v}{2}-1} dx},$$

die Werte für gerades v stehen in der Tabelle; man kann dann auch graphisch interpolieren, dies wieder zur „Beruhigung". [Wir würden modern schreiben

$$f_s(v) = \frac{1}{sB\left(s, \frac{v}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(s + \frac{v}{2}\right)}{\Gamma(s+1)\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)},$$

---

[12]) In dieser Bedeutung braucht Gauß das Wort noch in der Dissertation G III, 10.

[13]) Vera circuli et hyperbolae quadratura. 1667.

für gerades v kann man Fakultäten schreiben, bei ganzzahligem s gibt es rationale Funktionen.]

Wichtig erscheint noch, daß Wallis die Kurvenschar mit s als Parameter betrachtet und bemerkt, wie die Kurven „ineinander" übergehn. Ist das nicht wahrhaft funktionales Denken im Sinne Kleins?

Was Barrow *curva convexa*, was Gregory *non sinuosa* nennt, dafür hat Wallis die Bezeichnung *aequabilis curva (non hinc inde subsultans);* da ist die gerade Linie keine Ausartung in der Schar der $f_s(v)$. Die Gleichungen der Kurven $f_s(v)$ für $s=\frac{2t+1}{2}$ anzugeben (I, 478, Schol.), — um zu entscheiden, ob sie „Descartessche" Kurven sind oder nicht — auch das ist eine Interpolation; Wallis fordert sie, Euler (1707—83) hat sie geleistet.

§ 8. Das charakteristische Dreieck. Roberval. Barrow. Leibniz.

Von den vielen geometrischen Korollaren — die meisten behandeln Quadraturen — ist eines besonders wichtig (I, 380 Schol. 2); es bildet zugleich die Verbindung zu den nächsten Arbeiten.

Die Rektifikation der Parabel wird gerechnet *quam proxime, ut constet intra quos cancellos* . . . Und zwar wird hierbei die Sehnensumme, die den Bogen approximiert, aus den charakteristischen Dreiecken gefunden; das ist eine Stelle, wie die von Leibniz zitierte bei Pascal (1659), wo das charakteristische Dreieck bei einer speziellen Kurve betrachtet wird und woher eine Anregung zur Verallgemeinerung kommt. Wallis approximiert nur, das heißt, er betrachtet die rechtwinkligen Dreiecke, deren Katheten die endlichen (kleinen) Koordinatendifferenzen sind. Daß man beim Grenzübergang statt des infinitesimalen Dreiecks ein ihm ähnliches endliches Dreieck zeichnet — das ist die Idee des charakteristischen Dreiecks. Soll schon von Priorität bei dieser (vierten) großen Idee des 17. Jahrhunderts die Rede sein, so gebührt sie wohl Roberval — und die Idee stammt gewiß schließlich von Galilei: Zusammensetzung von Bewegungen zu einer Resultierenden und Zerlegung einer vorgegebenen Bewegung in „passende" Teilbewegungen — das bedeutet für die Mathematik des 17. Jahrhunderts Problem und Methode zu seiner Lösung; die Angabe der momentanen Richtung einer gesetzmäßig gegebenen Bewegung verlangt die Konstruktion der Tangente an die Bahnkurve; die Möglichkeit der Zerlegung in „geeignete" Komponenten gibt einen für alle Kurven gangbaren Weg zur Durchführung dieser Konstruktion; Torricelli und Roberval gehen diesen Weg. Indem Roberval im Traité des mouvemens (1634) bemerkt, daß die Konstruktion nicht an dem „momentanen" infinitesimalen

Dreieck zu geschehen braucht, vielmehr an einem ins Endliche vergrößerten, ähnlichen Dreieck ausgeführt werden kann — und nur hier ausgeführt werden kann! —, wird er der eigentliche Finder dieser Idee des charakteristischen Dreiecks. Aber das hat alles wenig zu sagen, bis — Barrow die Tragweite dieser Idee zu sehen begann und bis eben Leibniz dies Dreieck wirklich zum charakteristischen Dreieck machte. — Wallis will wohl auch nur daran erinnern, daß er in der Arithm. infin. eine Anregung zu den Abhandlungen über Rektifikation von Neil (1637—70) und Heuraet (1633—?) gegeben habe. In dem offenen Brief an Huygens (I, 489) beruft er sich auf die Stelle in der Arithm. infin. ... *subtensas*, *quarum quadrata*, *quadratis differentiarum ordinatim — applicatarum*, *quadratis invicem aequalibus auctis*, *aequantur:* $\Delta s^2 = \Delta y^2 + a^2$ (I, 550). Er erkennt natürlich an, daß Neil und Heuraet mehr geleistet haben, denn sie haben wirklich die Fläche, das heißt: das Integral angegeben, das die Bogenlänge darstellt. Wallis könnte sich darauf berufen, daß für ihn der Integralbegriff schon nicht mehr an die Fläche geknüpft sei und es also genüge, die (unendliche) Summe anzugeben — aber er tut es nicht. Er gibt Neils Darstellung (I, 551) für die semikubische Parabel (der Name stammt von Wallis) aus dem Sommer 1657 und eine ähnliche von Brouncker (1620—84). Auch Wren (1632 bis 1723) hat im Sommer 1658 eine Rektifikation geleistet, allerdings einer „mechanischen" Kurve, nämlich der Zykloide; auch diese Arbeit steht bei Wallis (I, 534). Heuraets Abhandlung ist erst im Januar 1659 veröffentlicht, als Anhang zu van Schootens Ausgabe der Descartesschen Geometrie. Während Neil eine spezielle Kurve betrachtete — freilich kann man die Methode allgemein brauchen —, gibt Heuraet zu seinem von vornherein allgemeinen Verfahren diese selbe spezielle Kurve als naheliegendes Beispiel. Die Korrespondenz mit Huygens zeigt, welche Wichtigkeit man diesen Arbeiten beimaß, weil man hier eine Kurve rektifizieren konnte *ex earum genere*, *quas in Geometriam recipimus*, das heißt eine „Descartessche", algebraische Kurve (H. II, 416).

Für Wallis ist aus dem offenen Brief an Huygens (1659) noch hervorzuheben die Definition der „logarithmischen" Spirale durch Superposition zweier Bewegungen, d. h. durch ihre „Differentialgleichung" $\frac{dr}{d\varphi} = r$ (I, 560); die Resultate über Fläche und Länge stehen schon bei Torricelli; der Zusammenhang mit der Neperschen (1550—1617) Differentialgleichung für den Logarithmus (1614) ist nicht erkannt. Die Idee der Involution und Evolution von Kurven, das ist eine Transformation von rechtwinkligen zu Polar-Koordinaten $\left[y = r;\ x = \int r\,d\varphi\right]$, findet sich hier schon vor Gregory (G. pr. 12) und vor Barrow (B. XII, 126, App. 3). Und zwar ist die Archimed. Spirale die convoluta der Apollon. Parabel, der Kreis die convol. des Parallelogramms, die logarithm. Spirale die convol. des Dreiecks. Bei den verschiedenen Quadraturen, die noch angegeben sind, ist kaum etwas Bemerkenswertes: einmal (I, 563) macht er darauf aufmerksam, daß er infinitesimale Größen zweiter Ordnung vernachlässigen darf, nämlich an einer Figur, modern gesprochen, $dy - \Delta y$.

§ 9. Zykloide. Zissoide.

Der Anlaß zu dem offenen Brief an Huygens und daher der erste Teil seines Inhalts ist der Streit mit Pascal um die Zykloide. Pascal hatte (1658) anonym ein Preisausschreiben an alle Mathematiker gerichtet; es sollten etliche Aufgaben über die Zykloide, die die französischen Mathematiker damals stark beschäftigt hatte, gelöst werden. Es handelte sich um Flächeninhalt und Schwerpunkt eines Segments sowie Rauminhalt und Schwerpunkt der Rotationskörper dieses Segments. Wallis und Lalouère (1600—64) schickten Lösungen. Pascal schrieb eine Histoire de la Roulette (=Zykloide), stellte fest, daß die Einsender seinen Anforderungen nicht genügt hätten, und verteilte den Preis nicht. Wallis teilt seine Lösungen im ersten der Tractatus duo mit (I, 499—507); wenn sie so Pascal vorgelegen haben, dann hätte er durchaus Wallis den Preis zahlen müssen. Wallis gibt nur etliche errores calculi zu: er hat sehr wenig Zeit gehabt, denn die Frist war kurz, und vorher hatte er sich nie mit der Zykloide beschäftigt. Seine Lösungen gibt er mit Hilfe der Cavalierischen Methode, die Pappus-Guldinsche Regel leitet er sich ab — interessant ist hier vielleicht dies: die Robervalsche *compagne de la Roulette* erkennt er als eine Sinusversuskurve [$y = 1 - \cos x$]; er erhält sie durch Abrollen der Ellipse, in der eine Ebene einen Zylindermantel schneidet (I, 556).

In der Einleitung zu den Tractatus duo und in Briefen an Huygens (H, II, III passim) führt Wallis Klage über den Nationalismus der Franzosen. Pascal hat es ja selbst gesagt, er habe einige formale Bedingungen nur gestellt, um seine Landsleute zu begünstigen. Der Histoire Pascals gegenüber nimmt Wallis Torricelli gegen Roberval in Schutz: er gewiß hat alles aus Torricelli, denn von den Franzosen kannte er keinen. Kurz vorher hatte Wallis die Brieffehde mit Fermat (II, 757. F III, 399) um die sogenannte Pellsche Gleichung und ähnliche Aufgaben geführt[14]) und hatte allerhand von „dieser Gallier αλαζονισμος" (H, II 209) zu spüren bekommen. So wird es schon verständlich, wenn Wallis seinerseits später noch viel ärger „nationalistisch"

[14]) Vgl. G. Wertheim in den Abhandlgn. z. Gesch. d. Math. IX (1899).

auftritt und Descartes zum Plagiator Harriots macht. Man könnte modern sagen, hier habe er das Trauma empfangen ... Auf alle Fälle ist Wallis im Streit um die Zykloide durchaus der Überlegene und in seiner Ruhe sympathisch; seine Haltung gegenüber Fermat hat den (nichtfranzösischen) Zeitgenossen sehr imponiert (H, II 210).

Huygens hatte die Fläche der Zissoide bestimmt; auch das ist eine dieser sich ins Unendliche erstreckenden Flächen, wie sie Torricelli zuerst in der Arbeit de solido hyperbolico acuto (T I, 171) betrachtet hat und auf deren mannigfache Bewältigung in den Korollaren der Arithm. infin. Wallis sehr stolz war. Huygens (H II, 210) schlägt vor, Wallis möge seine Methode auf die Zissoide anwenden. Wallis schreibt die Gleichung der Kurve in Worten (I, 545): „*omnia*" *quadrata ... sunt series tertianorum per seriem primanorum inverse positam respective divisa*, das heißt: $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$. Die Behauptung ist: *omnes* $\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ *ad omnes* $\sqrt{x\,(1-x)}$ [Kreis] $= 3:1$. „Omnia" steht als Ersatz für ein Symbol der abhängigen Variablen, um das Kurvengesetz allgemein auszusprechen; „omnes" vertritt das Integralzeichen: man sieht, wie gefahrvoll das Fehlen der Symbole sein kann. Die Integrale $\int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,(1-x)^{\frac{n}{2}}\,dx$ sind für gerades n bekannt; zur Interpolation auf ungerade genügt es, ein einziges solches Integral zu kennen. Nun sind aber auch die Integrale $\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,(1-x)^{\frac{n}{2}}\,dx$ für gerades n bekannt, und hier kann leicht für ungerade n interpoliert werden; denn für $n = 1$ hat man den Kreis, nämlich den Wert $\frac{1}{2\,\square}$; für $n = 3$ gibt eine kleine Tabelle sofort $\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{4\,\square}$; dies Integral ist mit $\int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ wesentlich identisch, also kennt man, wie verlangt, ein Integral der Form $\int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,(1-x)^{\frac{n}{2}}\,dx$ mit ungeradem n, eine kleine Tabelle setzt zu dem Wert für $n = 1$ den für $n = -1$ in Verbindung, er wird $\frac{3}{2\,\square}$. Schwerpunkt und Rotationskörper führen auf ähnliche Integrale und werden analog bestimmt: *in cissoide apparet vis methodi*, muß Huygens anerkennen (H, III, 58).

§ 10. Mechanica. Sinus. Tangenten.

Allgemeinere Schwerpunktsbestimmungen im wesentlichen mit Hilfe der Arithm. infin. bilden den Gegenstand des letzten großen Werks, das

Wallis in den ersten Band seiner Werke aufgenommen hat; genannt hat er es Mechanica sive de motu, tractatus geometricus (1669, 1670; I, 571). Teil II gibt etliche Definitionen über das Kontinuum, die Indivisibilien — und fett gedruckt steht (I, 646), was dies alles *secundum mathematicum rigorem* zu bedeuten habe. Kapitel V de calculo centri gravitatis bildet den Hauptteil (I, 665—938). Nach Wiederholung der wichtigsten „Formeln" der Arithm infin. wird der Schwerpunkt von Parabeln und ihren Rotationskörpern bestimmt; Satz (11 und) 12 gibt die Pappus-Guldinsche Regel; bei der Kugelberechnung in Satz 13 wird auf die Rolle der Sinusfunktion hierbei hingewiesen, überall wird viel gerechnet. Besondern Nachdruck legt Wallis darauf, stets die gleichen Bezeichnungen beizubehalten, nur so hat die analytische Methode Vorteil vor der Geometrie (I, 719 pr. 15 k.). In Satz 17 wird die Kosinuskurve ⟨explizit⟩ integriert. Bei der Wiedergabe der Rechnungen für die Zykloide muß Wallis natürlich ein scholium anhängen, in dem von Pascal „usw" die Rede ist. In Satz 27 steht zum ersten Male die Figur der vollen Sinuskurve für zwei Perioden (I, 883, Fig. 201), während sonst höchstens zwei Quadranten betrachtet wurden: zum ersten Male wird nämlich hier beachtet, daß die Ordinaten im dritten und vierten Quadranten negativ sind. Anlaß gibt die Archimedische Spirale, deren Fortsetzung über vier Quadranten hinaus ja stets bekannt war. Wenn Wallis die compagne der Zykloide für einen ganzen Zykloidenbogen zeichnet, so ist dies ja auch die „Sinuskurve" für eine ganze Periode; aber hier hat man keine Schwierigkeiten mit den negativen Ordinaten: $1 - \cos x$ ist stets positiv. Und da man nicht mehr als einen Zykloidenbogen zeichnet, so fehlt die Periodizität. In Satz 31 bei der Hyperbelberechnung gibt Wallis die Reihe für $|\log(1-x)|$; er dividiert $\frac{1}{1-x}$ aus und integriert; die Berechtigung dazu nachzuweisen — wie James Gregory (1668) dies tut —, kommt Wallis nicht in den Sinn. Immerhin macht er darauf aufmerksam, daß $x < 1$ sein muß. log 0,79 berechnet er auf 8 Dezimalen. Er zitiert übrigens ausdrücklich Nic. Mercators Logarithmotechnica (1620—87, 1667), die er in den Phil. Trans. 1668 (August) besprochen hat.

In den Phil. Trans. (1672, März) hat Wallis auch über das Tangentenproblem geschrieben (vgl. II, 398, c. 95). Er hat die Robervalsche Methode: Tangente als Resultante der die Kurve erzeugenden Bewegungen in jedem Punkt, und die Fermatsche[15]): Tangente als Ausartung der Sekante („Grenzfall" sagt man besser nicht, das ist es noch nicht; es handelt sich auch nur um algebraische Kurven!). Dies

[15]) Vgl. über die wirkliche „Fermatsche" Methode: Wieleitner, DMV 38 p. 24.

kann auch gerechnet werden — modern geschrieben etwa: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für $h = 0$ nach der Division. Wallis nimmt $h > 0$ und $h < 0$, das heißt: Tangente als Stützgerade: sie liegt ganz auf der einen Seite der (konvexen) Kurve; dies ist also auch noch die Barrowsche Auffassung der Tangente! Etwas Eigenes scheint Wallis hier nicht geleistet zu haben.

§ 11. Ergebnis. Wirkung. Newton.

Zur gleichen Zeit (um 1670) erschienen Barrows und James Gregorys Arbeiten zur Infinitesimalmathematik. Gregorys Kreisquadratur ist sicher durch die Arithm. infin. beeinflußt. Auch das Problem der „Transzendenz" scheint nun nicht mehr ganz neu zu sein. Bei Gregory sowohl als auch bei Barrow, der doch sogar ein Schüler von Wallis ist, werden alle Integrationen rein geometrisch gemacht. Und die trigonometrischen Integrale — zum Beispiel — bei Barrow (B, XII, app. 1. p. 110 sq.) erfordern viel weniger Aufwand als bei Wallis im calc. de centr. grav. Denn — Wallis hat ja gar nicht erreicht, was notwendig war, er gibt nur einen Ansatz. Das Ziel der Arithmetisierung der Infinitesimalmathematik war noch nicht erreicht; die eigentliche „Arithmetik", den Kalkül schufen erst Leibniz und Newton. Bei den Anwendungen trieb Wallis Indivisibiliengeometrie mit abkürzenden Zeichen. Hierfür hat Fermat ganz recht: *je ne sçay pas, pourquoy il a preferé cette maniere par notes algebriques à l'ancienne.* Aber die Loslösung des Integralbegriffs von der Auffassung als Fläche, das Umdenken von der Atomisierung des geometrischen Kontinuums zum strengen Grenzprozeß der arithmetischen Zahlenfolge, diese „arithmetica infinitorum" war ein Stückchen geglückter Arithmetik — auch die verstand man damals offenbar nicht.

Ein einziger hat sie gewiß verstanden: Newton. Newton hat Wallis so gut verstanden, daß er mehr bei ihm gefunden hat, als wirklich dasteht. In der Math. univers. (I, 175. pr. 68) bei der geometrischen Reihe steht (genau): $\frac{A \cdot R^t - A}{R - 1} = A + AR + AR^2 + \text{etc.}$ [16]). Für $t = 4$ wird die Division vorgerechnet, dann steht: *similiter . . ., quantuscunque ponatur numerus terminorum.* Newton sieht das berühmte „etc." und „sieht" die unendlich fortgesetzte Division bei Wallis (vor Mercator). — In der Arithm. infin. rechnet Wallis mit allgemeinen Exponenten, er schreibt „index negativus" — aber er schreibt noch nicht a^{-3}, das tut erst Newton — so daß Wallis selbst glauben muß, hier sei gar nichts Neues. Man hat gesagt, wenn in Wallis' Algebra nichts

[16]) Vgl. Eneström, Bibl. math. 7 (3), 299.

stünde als die Notiz über Newtons Fluxionen und Reihenentwicklungen, so wäre sie wertvoll genug: das ist nicht gerade eine Anerkennung für Wallis' Werk. Man könnte sagen, wenn Wallis' Arithmetica infinitorum von keinem „verstanden" worden wäre, außer von Newton, so wäre sie doch wertvoll genug: das scheint mir höchste Anerkennung zu sein. Und Euler hat sie ja auch verstanden!

§ 12. Exkurs: Stil. Sprache.

Es scheint nicht unangebracht, hier ein paar Worte über Wallis' Art der Darstellung zu sagen. Auffallend ist in der Arithm. infin. das immer wiederkehrende Versprechen, „es kurz zu machen": *sed breviter, ne sim taedio.* Gewiß, dies ist das Motto der Arithm. infin., deshalb überall die „Induktionsbeweise", auch wo es streng ginge; deshalb das häufige *et caetera*, *sic deinceps*, *mutatis mutandis*, *pari modo;* Aufforderungen, einen Beweis selber zu führen, einen Schluß weiterzudenken. Wallis hat stets Angst, den Leser zu langweilen — er hat sich wohl selbst gelangweilt, wenn er ewig dieselben Schlüsse und Beweisideen lesen mußte. Freilich, es ist auch Koketterie dabei, und Fermat verpflichtet sich, die Arithm. infin. kürzer zu schreiben. Solche Koketterie war wohl Mode, Descartes sagt: *je ne m'arreste point à expliquer cecy plus en detail* . . . (D IV, 374) und ähnliches oft. Sonst könnte Wallis einen (mathematischen) Brief an Huygens nicht gut mit den Worten schließen: *superest, ut taedio, quo te hactenus detinui, tandem liberem* (I, 569). Bei aller Eile, zu der er sich in der Arithm. infin. immer wieder selbst anspornt, bringt er es fertig, kurz vorm Ziel zu retardieren (z. B.: I, 463 Schol. I, 465 Schol.), so daß man gespannt wird, ob das Ziel überhaupt erreicht werden kann; plötzlich wird auf Schwierigkeiten hingewiesen, an die man nicht dachte, — und um so unerwarteter kommt der Schluß. Auch zwischendurch hält er kurz an und zeigt Probleme — aber alles nur im Flug. Wenn er einem plötzlich sagt: *hic labor, hoc opus est* (I, 421 Schol. 1), so wird man vielleicht an Landau[17]) erinnert: „nun geht es los" — es drückt sich die starke Souveränität über den Stoff aus. Sie äußert sich etwa auch, wenn Wallis eins seiner geläufigen „und so weiter" unterbricht: „nicht so weiter — das wäre zu langweilig, man sehe sich's genauer an, so wird man bemerken . . ." (I, 447, pr. 182). In den späteren Arbeiten sind solche Besonderheiten nicht mehr zu spüren. Die Algebra ist so breit angelegt, daß diese hie und da auftauchenden Bemerkungen: *ne sim nimis* . . . gar nicht auffallen. In den Briefen kann Wallis sich bis ins hohe Alter hinein nicht

---

[17]) Zahlentheorie III, 41.

von langatmigen Anreden und Komplimenten freimachen; aber das ist wohl übernommenes Erbstück und sieht vornehm aus. Trotz seiner philologischen Arbeiten schreibt Wallis — verglichen mit Barrow — kein gutes Latein; über tempora des Infinitivs, zum Beispiel, und die Personalpronomina weiß er gar nicht Bescheid. Aber man muß bedenken, daß die meisten Arbeiten ursprünglich englisch verfaßt und „nur übersetzt" sind. Außerdem weist Wallis selbst darauf hin (I, Praefatio), daß er sich nur Mühe gegeben habe, klar zu schreiben. Das hat er auch erreicht.

II. Algebra.

§ 13. Parallelenpostulat. Archimedisches Postulat.

Wallis hat die Ausgabe seiner Werke (1693—99) im Auftrag der Oxforder Universität selbst besorgt, die Auswahl und Zusammenstellung ist also keine zufällige. Man müßte im zweiten Band vielleicht als Untertitel noch schreiben: Geschichte und Grundlagen.

Als Savilian-Professor in Oxford war Wallis verpflichtet, über Euklids Axiomatik zu arbeiten, vor allem über das Parallelenpostulat. In zwei Vorlesungen[18]), Februar 1651 und Juli 1663, hat er dieser Pflicht genügt (II, 665). Er gibt den genauen Text des Postulats und seine geometrische Bedeutung, dann zunächst den Beweisversuch Nasir-Eddins (1201—74) (aus dem Arabischen übersetzt von Pocock). Er fügt hinzu: *(omnium) commune est, quod ... assumunt ipsi aliud aliquod Postulatum, quod non minus difficile concessu videatur* (II, 673). Aber er hebt nicht hervor, welches dies Postulat bei Nasir-Eddin ist. Dagegen sagt er sehr deutlich bei seiner eigenen demonstratio (II, 676): *VIII. praesumo tandem ... ut communem notionem „datae cuicunque figurae similem aliam cuiuscunque magnitudinis possibilem esse"*. Er meint, dies sei im Sinne Euklids, wenn er es auch nirgends formuliert habe. Das Postulat, daß mit beliebigem Radius ein Kreis gezeichnet werden könne, liege in dieser Richtung. Das Parallelenpostulat war ja eben darum immer „verdächtig", weil es so ganz verschieden ist von allen andern Postulaten; und weil bei seinem Postulat diese Verschiedenheit gemildert scheint, deshalb könnte Wallis seine Formulierung für glücklicher halten. Aber er sagt durchaus nicht[19]), daß „sein" Postulat aus den sonstigen Annahmen Euklids folge. Er rügt bei den andern Beweisversuchen: *talia tamen tacite praesumunt alii utut inobservati.* Er selbst ist durchaus mit der Euklidischen Fassung zufrieden, deren Prägung er aufzeigt und

---

[18]) Übersetzt bei: Stäckel-Engel, Theorie der Parallel-Linien, 15 sq. Vgl. Bonola-Liebmann, Nicht-Eukl. Geom. 11.

[19]) Vgl. dagegen: Klein, Nicht-Euklid. Geom. 273.

bewundert. Die Idee, das Parallelenpostulat könne „falsch" sein (das heißt: es könne auch Nicht-Euklidische Geometrien geben), ist noch undenkbar; auch Saccheri (1667—1733) hat sie ja noch nicht.

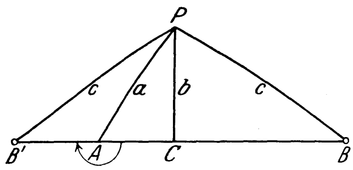
Mit dem Archimedischen Postulat hat Wallis es in der kleinen Schrift De augulo contactus et semicirculi tractatus (II, 603) zu tun. Es handelt sich darum, ob der Winkel zwischen Kreis und Tangente als Winkel anzuerkennen sei, wo doch schon Euklid (el. III, 16) gezeigt hat, daß solche Winkel dem „Archimedischen" Postulat nicht genügen. Wallis ist der Ansicht, daß solche Nicht-Archimedischen Größensysteme kein Bürgerrecht in der Mathematik haben: man darf kein Axiom weglassen. Ich glaube gewiß nicht, daß Clavius (1537 bis 1612), gegen den Wallis schreibt, tiefere Einsicht in das Wesen der Axiomatik gehabt hat als Wallis — und dann war der Streit doch bloße Dialektik.

§ 14. Negative Zahlen. Imaginäre Zahlen.

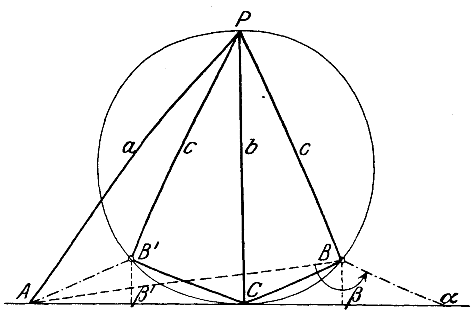
Über Definitionen in der Mathematik, vor allem über Euklids Definitionen gegenüber den Postulaten, spricht Wallis recht klare Gedanken verschiedentlich in der Algebra (II, 98, c. 20; II, 106, c. 73) aus. Das Wichtigste an „Grundlagen" in der Algebra ist aber unzweifelhaft die Darstellung der verschiedenen Erweiterungen des Zahlbereichs. In der Arithm. infin. und im Tract. de section. conic. macht Wallis zwei typische Fehlschlüsse: in der Arithm. infin. behauptet er $-1 > \infty$, denn die Funktion $y = \frac{1}{x}$ wächst mit abnehmendem x (I, 409 pr. 104). Im Tract. de section. conic. betrachtet er als ein Beispiel für die „arithmetische" Geometrie außer den Kegelschnitten die kubische Parabel (I, 350. pr. 45—47. app.) ($y = x^3$) und leitet einen Satz über ihre Durchmesser ab — der nicht stimmen kann. Das *mysterium* klärt sich so (I, 232; I, 249): er hat statt des Wendepunkts einen Scheitel gezeichnet. Vorher bei $y = \frac{1}{x}$ kennt er nur den einen Ast — der andre ist nichts „andres"! Dies besagt beides: der Gebrauch negativer Koordinaten ist noch völlig unklar. In der Algebra zeigt sich — wie schon bei der Sinuslinie in den Mechanica (I, 883, Fig. 201) —, daß diese Unsicherheit unterdessen behoben ist.

Stellt man die positiven Zahlen als Punkte eines Strahls dar (II, 286, c. 66. c. 67), so muß man den geometrischen Bereich erweitern, nämlich: den andern Halbstrahl hinzunehmen, um die negativen Zahlen „zeichnen" zu können. So muß man wieder den Bereich weiter ausdehnen, wenn man die imaginären Zahlen darstellen will: man muß in die Ebene gehn (II, 289).

$\sqrt{-bc}$ ist das geometrische Mittel zu $(-b)$ und c; aber der Ansatz, dies zu zeichnen, ist offenbar verfehlt. Er möchte es zu „schön“ haben, scheint es; so wird seine Figur ganz leichtsinnig falsch. Richtig durchgeführt dagegen ist die Konstruktion der komplexen Wurzeln einer quadratischen Gleichung, und zwar ganz in Analogie zur Konstruktion reeller Wurzeln. Mehr will Wallis nicht erreichen. Das Rechnen mit den komplexen Größen braucht er nicht! Die Konstruktion sieht folgendermaßen aus: es soll gefunden werden $z = +\sqrt{a^2-b^2} \pm \sqrt{c^2-b^2}$, wo 1. $c > b$, 2. $c < b$, stets $a > b$ ist.



Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ACP mit der Hypotenuse $AP = a$ und der Kathete $PC = b$, die andere Kathete wird $\sqrt{a^2-b^2}$. Um dann zu (1) ein rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete b und der Hypotenuse c zu erhalten, zeichne man den Kreis mit c um P; er schneidet die Gerade AC in den beiden Punkten B und B', und es wird $CB = \sqrt{c^2-b^2}$. Die Punkte B und B' stellen die Zahlen $\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{c^2-b^2}$ und $\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{c^2-b^2}$ dar. Im Fall (2) konstruiert man das rechtwinklige Dreieck PBC so, daß b die Hypotenuse, c eine Kathete wird; die andere Kathete ist $\sqrt{b^2-c^2}$; man erhält auf dem Thaleskreis über b zwei Punkte B und B', die das Bild von z sind.



Aus (2) ergibt sich (1), wenn in (2) B nach β fällt, das heißt, wenn der rechte Winkel bei C ist, sagt Wallis. Er deutet an, wie man zu rechnen habe; um die beiden Lösungen zu addieren — das muß etwas Reelles geben — trage man AB' in B „an AB *cum sua declivitate*“ an, man erhält $2\,AC$; in (1) wäre die declivitas -180^0. Wallis konstruiert nur ein spezielles Zahlenbeispiel, man müßte noch eine Normierung vornehmen, um in der „Wallisschen Halbebene“ rechnen zu können, denn zunächst sieht es so aus, als ginge ein Parameter zu viel in die Konstruktion ein. [Man könnte etwa, ohne die Allgemeingültigkeit aufzuheben, $c = 1$ setzen, dann können die Transformationsformeln von Gaußscher Zahlenebene $(u + iv)$ zu Wallisscher Halbebene (x, y) hingeschrieben werden: man setze noch zur Bequemlichkeit $\frac{v}{1} = \operatorname{tg}\varphi$; $\frac{-v}{1} = \operatorname{tg}(-\varphi)$; $0 \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$; dann entspricht dem Punkt $u + iv$ der

Punkt mit der Abszisse $x_1 = u - 1 \cdot \sin\varphi$ und der Ordinate $y_1 = 1 \cdot \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$; dem konjugierten Punkt $u - iv$ entspricht: $x_2 = u - \sin(-\varphi) = u + \sin\varphi$; $y_2 = \frac{\sin^2(-\varphi)}{\cos(-\varphi)} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = y_1$.] Man kann dann leicht alle Rechenoperationen mit komplexen Zahlen zeichnen; doch das tat Wallis ja nicht.

Als die erste (englische) Ausgabe der Algebra erschien (1685), war Wallis fast 70 Jahre alt. Mit 82 Jahren schreibt er an Leibniz (III, 693, ep. 28) noch über seine Idee der Darstellung komplexer Zahlen; aber er ist hier nicht zu einem Abschluß gekommen. *Fontem tamen aperiam, unde alii suos deducant rivulos satis copiosos*, könnte man aus eben diesem Brief an Leibniz zitieren. Es hat aber niemand diese Quelle beachtet. Man war noch nicht so weit. Leibniz versteht das nicht, wenn Wallis meint (III, 689 ep. 26), „unmögliche" Zahlen seien $(-b)$ so gut wie $\sqrt{-b}$, der Unterschied sei nur graduell, gemäß den „definierenden" Operationen. Man war noch nicht so weit — aber man hat doch mit komplexen Zahlen gerechnet.

§ 15. Einzelheiten.

Es sollen zunächst noch etliche Angaben über den sachlichen Inhalt der Algebra gemacht werden; dann wird auf die verstreuten historischen Bemerkungen eingegangen werden.

In Kap. 7 und 8 wird Sexagesimal- und Dezimalsystem besprochen, zur Multiplikation werden wirklich sexagesimal geschriebene Tabellen beigefügt. Kap. 10 behandelt das Problem der besten Näherung, das heißt die Aufgabe, einen gegebenen Wert durch kleine Zahlen möglichst gut zu approximieren (das Problem war besonders wichtig vor der Zeit der dezimalen Schreibung). In Kap. 11 werden für π — nach Ludolph van Ceulen (1539—1610) auf 35 Dezimalen bekannt — die Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung als Beispiel angegeben. Dieses Beispiel hat nie einer ganz nachgerechnet — zum Schluß gibt es 19-ziffrige Zahlen. Hier muß auch erwähnt werden, daß Wallis am Schluß der Arithm. infin., da er sich überlegt, wie wohl Brouncker vom unendlichen Produkt für □ zum Kettenbruch gekommen sei, die Rekursionsformeln der Näherungsbrüche für beliebige Teilzähler angibt. Vorher[20]) kannte man diese Formeln nur für die Teilzähler 1. — Bei der Behandlung der Logarithmen in Kap. 12 schlägt Wallis für die nach log geordnete Tabelle den Namen Antilogarithmenkanon vor. Die Bezeichnung Mantissa (II, 41) stammt auch von ihm; allerdings braucht er sie für jeden Dezimalbruch, nicht nur bei Logarithmen. Daß Wallis in Kap. 19

---

[20]) Vgl. Schwenter (1585—1636), Deliciae physico-mathematicae 1636. Vgl. Perron, Kettenbrüche (1913) 5; 55.

und 20 der Proportionenlehre noch 14 Folioseiten widmet, ist gewiß bemerkenswert[21]), so stark ist Euklids Vorbild — trotz allem; aber seine Strenge wird übersehen. Für die arithmetische und geometrische Reihe kann Wallis auf die Mathes. univers. verweisen, wo er alle überhaupt möglichen (elementaren) Aufgabentypen zusammengestellt hat. Ab Kap. 27 wird die Gleichungslehre dargestellt, zunächst im Anschluß an Harriot. In Kap. 41 steht die Descartessche Zeichenregel (mit Namen), dann folgen Transformationen, etwa Wegschaffen des zweithöchsten Gliedes. In Kap. 49 gibt er für $r^3 = \pm 8$ alle drei Wurzeln an, was oft übergangen wurde. Kap. 55 löst die biquadratische Gleichung nach einer regula Cartesii; daß die Lösung von Ferrari (1522—65) stammt — und nicht von Bombelli (1572), woher Descartes sie nimmt —, erfährt Wallis später von Leibniz (III, 691 ep. 27). In Kap. 57 ist von unbestimmten Gleichungen die Rede, Bachet (1587 bis 1638) wird zitiert; in Kap. 59 und 60 wird ein Rechenschema aus der Algebra von Pell (1610—85; 1659; 1668) vorgeführt. Wallis liebt die Zahlentheorie nicht sehr: *non tanti puto . . .* und *cui bonum?* hatte er an Fermat geschrieben (II, 778 ep. 16) — vielleicht ja nur, um Fermat zu ärgern. Denn immerhin hat er doch Fermats Aufgaben (mit Brouncker zusammen) gelöst! In Kap. 98 der Algebra und in der besonderen Schrift über Partes aliquotae (1685, II, 483) berichtet er über diese Aufgaben noch einmal: z. B. eine Quadratzahl zu finden, so daß die Summe ihrer aliquoten Teile eine Kubikzahl wird, und: die „Fermatsche“ Gleichung $d \cdot x^2 + 1 = y^2$ in ganzen Zahlen zu lösen, wenn d nicht quadratisch ist. Daß man beweisen müsse, die Brounckersche sukzessive Methode hierfür führe stets zu einer Lösung, weiß Wallis schon, aber der Beweis glückt ihm nicht, wie schon Huygens bemerkt (H, II, 210). Erst Lagrange (1736—1813) hat den Beweis gegeben (La. I, 671). — Wallis' Angaben über Anzahl und Summe der aliquoten Teile sind wohl kaum erwähnenswert (II, 498). Von Kap. 73 an berichtet Wallis über die infinitesimalen Methoden; er gibt Beispiele nach Archimedes, nach Cavalieri, aus der Arithm. infin. Immer noch muß er sich verteidigen: *investigandi methodus, non demonstrandi.* In Kap. 84 steht das unendliche Produkt für $\square$ in der besseren Form $\square = 1 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{49}{48} \cdot \frac{81}{80}$ *etc. in infinitum.* Bei der unendlichen geometrischen Reihe erinnert Wallis an die Analogie zu den periodischen systematischen Brüchen. In Kap. 85 und dann vor allem ab 91 stehen die oft zitierten Mitteilungen über Newtons Methoden nach dessen Briefen an Oldenburg (1615—77), den Sekretär der Royal Society, aus dem Jahr 1676.

[21]) Tropfke III, 3.

§ 16. „Nationalismus“.

Newtonus noster heißt es; Wallis liebt es mit besonderer Absicht, das Possessivpronomen zu setzen. Das wäre noch nicht schlimm, wenn man seine Worte beachtet: *non temere alius alium insimulare plagii debeat (praesertim in hoc ingeniorum feraci saeculo)* (I, 544). Und es wäre vielleicht auch nicht so schlimm, daß er selbst diese Worte doch nicht beachtet, sondern immer wieder (II, Praefatio) Descartes — in bezug auf seine Leistungen in reiner Algebra — zum Plagiator Harriots macht; es wäre noch nicht arg — denn man kann hierauf gewiß entgegnen, daß es uns gar nicht interessiert. Aber man könnte Wallis für all die bald entbrennenden Zwiste um Priorität in dem Sinne verantwortlich machen, daß er zuerst diesen Ton angeschlagen habe — und das wäre allerdings sehr schlimm. Ich glaube nicht, daß man Wallis von dieser Verantwortlichkeit frei machen kann. Man kann zu seiner Entlastung gewiß auf die französischen Mathematiker hinweisen: Roberval gegen Torricelli, man kann Fermats übermütige Herausforderung anführen, man wird vor allem bei Pascal hängen bleiben — wer kann Pascal verstehen? Wallis hat diesen Ton nicht angeschlagen, aber er hat ihn nicht gedämpft, vielmehr hat dieser Ton gute Resonanz gefunden. Dies bleibt gewiß als Vorwurf bestehn. Vielleicht sollte man gar nicht von „Vorwurf“ reden. Denn können wir eigentlich über jene Menschen urteilen, verstehen wir diesen Nationalismus? Wir haben so etwas wie eine ethische Vorstellung von unsrer Mathematik — was wollen wir damit im 17. Jahrhundert? Mir scheint solch ein Briefwechsel wie der von Wallis und Fermat (II, 757; F III, 399) oder der von Huygens (H I—X) ebenso wichtig als geistesgeschichtliches Dokument wie als Sammlung mathematischer Probleme. — Bei der Korrespondenz von Wallis mit Fermat hatten sich Schwierigkeiten daraus ergeben, daß Fermat immer französisch schreibt. Descartes' Géometrie war französisch erschienen, Pascal, Desargues (1593—1662) schreiben französisch; zu Pascals Histoire de la Roulette erfährt Huygens: *L'Autheur a voulu escrire en françois pour quelque raison particuliere* (H II, 334). Nationalismus? Aber auch der Holländer Huygens schreibt den Traité de la lumière französisch, und die Konzepte zu seinen (lateinischen) wissenschaftlichen Briefen sind nicht lateinisch oder holländisch — sondern oft französisch. Gewiß, Desargues fand wenig Beachtung, Descartes' Géometrie erschien in der 2. Auflage lateinisch; aber Fermat brauchte nicht übersetzt zu werden — und die Sprache Pascals kann überhaupt nicht übersetzt werden. Und warum wählt sich Huygens diese Sprache? Der Grund ist der, daß das Französische dieser Zeit im Begriff war, die beste und klarste Sprache überhaupt zu werden. Die Großen, Descartes, Fermat, Pascal und Huygens nutzen diese Situation aus und stärken die Entwicklung — das ist etwas anderes als „Nationalismus"!

§ 17. Historie.

Man tadelt Wallis' historische Angaben, vor allem in der Algebra, weil sie zu sehr die englischen Mathematiker berücksichtigen. Nun, dann hat er eben Geschichte der englischen Mathematik geschrieben; auch dafür gebührt ihm Dank, zumal seine Angaben gut sein sollen. Schon die Mathes. univers. war *tum philologice*, *tum mathematice* abgefaßt, und der Tractatus de Algebra heißt *historicus et practicus*. Wallis glaubt bestimmt, daß die Alten „analytisch gerechnet" haben (II, 3, c. 2): *veteribus cognitam fuisse istius modi artem investigandi — mihi extra dubium est;* besonders bei Archimedes liegt diese Vermutung nahe. Bei der Besprechung von Archimedes' Psammites (II, 20, c. 6) gibt Wallis eine „moderne Analysierung", wie wir es nennen müßten, Wallis selbst nennt solch eine Analysierung einmal *the true Anatomy of a demonstration* (H VI, 282). Wallis verfällt der Gefahr, die jeder solchen Analysierung droht: indem man die modernen Symbole (und Begriffe!) zur Interpretation verwendet, verdeckt man schon den wahren Sachverhalt. Aber wie soll man's machen?

Es hat keinen Sinn, hier Einzelheiten der historischen Kapitel der Algebra aufzuführen, da doch nicht stets kontrolliert werden kann, wo Wallis genau ist. Wallis hat sich mit seinen historischen Forschungen viel zu schaffen gemacht, das ist sicher. Er hat griechische Mathematiker herausgegeben, von denen er Handschriften in Oxford und Cambridge fand. Er hat lateinische Übersetzungen dazu gegeben und Kommentare verfaßt. Er hat „Entdeckerfreude" genossen: er fand ein Manuskript des Cusanus (1401—64; III, 676, ep. 20) über die Quadratur des Kreises, und er glaubte, hier die Figur der Zykloide zu sehen. Man kann sich denken, wie sehr ihn gerade solch ein Fund freuen mußte: Nicolaus von Cusa ist kein Franzose!

Es scheint nicht[22]), daß Wallis bei diesem Fund richtig gesehen hat. Bei Cusanus steht an der fraglichen Stelle unzweideutig nur die Figur eines Halbkreises, und auch der Text bei Cusanus spricht nicht für Wallis' Annahme.

§ 18. Bedeutung und pädagogische Wirkung. Newton.

Vielleicht will man bedauern, daß Wallis sich so stark historisch beschäftigt hat, vielleicht will man sich Leibniz (III, 674, ep. 18) an-

[22]) Briefliche Mitteilung von O. Toeplitz; Cantor II, 186.

schließen, der meint, ein Mann wie Wallis habe der wissenschaftlichen Welt mehr und wichtigeres zu geben als kritische Ausgaben griechischer Mathematiker. Freilich, dies ist wahr: eben in der Zeit, als die großen Neuerungen Newtons und Leibniz' bekannt wurden, und schon als Barrows wichtige Arbeiten erschienen, in den siebziger und achtziger Jahren, saß Wallis an seiner Algebra. Aber ich glaube, es ist sinnlos, solche Kritik mit „was geworden wäre, wenn nicht ..." zu üben, solche schlechtweg negative Kritik. Fragen wir lieber nach dem wirklichen Sinn und Wert von Wallis' historischen Arbeiten.

Hier wurde zusammengefaßt, was an „Algebra" bis 1680 geschaffen war. Hier wurden die Methoden gezeigt, die so unfaßbar weit getragen hatten. Hier konnten die Grenzen gesehen werden — und dahinter die neuen Probleme, die der nächsten Generation blieben. Hier gab eine Epoche ihr Erbteil weiter. Da war in der Zeit einer jähen Entwicklung eine kurze Ruhe, ein Rückblicken und ein Besinnen. Dies „reiche Jahrhundert" fand auch hierzu die Kraft, ohne daß darum ein Stillestehn notwendig ward. Es muß nicht wahr sein, daß es schlecht um eine Wissenschaft bestellt ist, die ihre eigne Historie schreibt. Die Zeit von 1680 widerlegt es durch Wallis: ein Seil, geknüpft zwischen den Zeiten — und selbst ein Übergang.

Lampadem tradere[23]), schreibt der achtzigjährige Wallis an Leibniz, das ist mir genug (III, 674 ep. 19). Vielleicht ist die Resignation des Alters — auch ehrlicher Stolz spricht aus jenen Worten — etwas bitter und wehmütig. Vielleicht liegt hier eine Tragik: Wallis, der eitle Wallis, sah, daß er überholt war — und daß er nicht mehr mitkonnte; da gab er seine Mathematik auf und edierte griechische Werke und dechiffrierte geheime Depeschen — und trieb Historie. — Es ist besser zu sagen: er hat Glück gehabt, daß Newton seine Fackel weitertrug. Nehmen wir zu Wallis noch Barrow mit seinen Lectiones geometricae, diesem Lehrbuch der Differentialmathematik, und etwa noch James Gregory, so kann man wohl sagen, daß Newton in England gut vorbereitet war. Man darf die pädagogische Wirkung und Absicht bei Wallis nicht übersehen. In der Algebra tritt sie klar zutage; aber sie lag schon der Mitteilung der Induktionsmethode in der Arithm. infin. zugrunde. Und dort war die Wirkung nicht ohne Gefahr wegen der Kühnheit der vorgetragenen Methode. Aber wenn ein schöpferischer Mensch pädagogisch sein will, so ist das wohl stets ein Wagnis. — Wallis versucht (H I 476), seine Methode näher zu bringen, indem er zeigt, woher er sie zu haben glaubt. Er beruft sich auf Vieta und Briggs (1561 bis 1630), den Schöpfer der Logarithmentabellen; beide benutzen das in der

[23]) Platon, Politeia 328 A.

Tabelle gegebene Gesetz zur Erweiterung des Bereichs der Tabelle. Wallis' Versuch des Näherbringens bleibt nicht im Äußerlich-Historischen stecken, vielmehr ist es ein Versuch, sachliche Rechenschaft über die Methode zu bekommen.

§ 19. Neuer Funktionsbegriff.

Wallis weiß, daß Induktion in ganzen Zahlen ein Charakteristikum arithmetischer Schlußweise ist. Er macht sich Gedanken über die prinzipielle Zulässigkeit solcher Schlüsse: In der Geometrie benutzt der Beweis eine („spezielle") Figur; aber der bewiesene Satz gilt für jede nicht wesentlich verschiedene Figur. Ebenso kann ein arithmetisches Gesetz, so scheint es, für eine („spezielle") Zahl abgeleitet werden, und es gilt dann für alle ganzen Zahlen. Das bedeutet: in der Geometrie gibt es Eigenschaften, die gegenüber gewissen Gruppen von Transformationen, die man angeben kann, invariant sind. Die Übertragung dieser Einsicht, wie Wallis es vorschlägt, auf die Arithmetik ergäbe einen Zirkel; denn die Gruppe, die man zur Begründung braucht, ist gerade die Gruppe der ganzen Zahlen $[n \longrightarrow n+1]$. — Was Wallis hier sagt, ist also barer Unsinn; aber das Problem, das hinter diesen Überlegungsversuchen steckt, ist überaus wichtig. Es handelt sich um das Verständnis des Funktionsbegriffs. Eine Gesamtheit von Werten hängt in sich gesetzmäßig zusammen, nämlich infolge einer Zuordnung jedes einzelnen Wertes der Gesamtheit zu einem Wert einer unabhängigen Veränderlichen. Das ist die eine Auffassung des Funktionsbegriffs, aus ihr ergibt sich die Darstellung der Funktion durch den Verlauf einer Kurve oder durch das Fortschreiten in der Tabelle. Durch eine kleine Gewichtsverschiebung ergibt sich eine zweite Auffassung, die ergänzend zur ersten hinzukommt: die Betrachtung der Funktion stellt in den Vordergrund die Zuordnung von je zwei Werten, die Verknüpfung zu Wertepaaren; also nicht den Verlauf, das Fortschreiten, sondern das Invariante, das Gesetz, die Konstruktionsvorschrift, den Operationscharakter. Während im ersten Fall die unabhängige Variable nur Richtung und Anordnungsprinzip zu geben schien, hat sie im zweiten Fall ihre wesentliche Bedeutung. Es ist gut möglich, daß die Darstellung der Funktion durch die Tabelle, die die Zuordnung stark betont, diese zweite Auffassung des Funktionsbegriffs veranlaßt hat. Man muß diese zweite Betrachtungsweise im Vergleich zur andern wohl als sehr abstrakt bezeichnen. Sicher gehört in den Bereich funktionaler Betrachtungen dieser zweiten Art die Begründung des Verfahrens der „vollständigen" Induktion. So weit konnte Wallis nicht vordringen. Seine Überlegungen zur Begründung seiner Methoden führen auf gute Wege — aber er kam an kein Ziel. Um den „neuen“, abstrakten Funktionsbegriff voll zu erfassen, fehlte Wallis das stärkste Mittel: die Symbolsprache. Leibniz hebt einmal Newtons (und seine eigenen!) Leistungen im Vergleich zu denen der großen Vorgänger, wie Barrow etwa, hervor: *les choses composées ne sçauroient pas estre si bien démelées par l'esprit humain sans aide de caracteres* (= Zeichen, Symbol) (H. X. 675). Wallis sagt dasselbe am Schluß der Arithm. infin., solange das rechte Zeichen fehlt, bleibt vieles *ἄρρητον*.

§ 20. Schluß:
Wanderung des mathematischen Schaffens.

Eine eigentümliche Wanderung der Mathematik ist eingetreten: Den Impuls Galileis nahmen, mit dem Erbe der Alten, in Italien Cavalieri und Torricelli auf. Die Namen Roberval, Pascal, Descartes, Fermat bedeuten die große Zeit Frankreichs. Dann wendet sich der Strom mathematischen Schaffens nach England, um über Gregory, Barrow, Wallis in Newton zu münden. In Deutschland klafft von Kepler zu Leibniz der Abgrund des Dreißigjährigen Kriegs. — Über die Frage, wie es kommt, daß mit einem Male in einem Land erfolgreich Mathematik getrieben wird, wird man nachdenken müssen, aber man wird sie nicht beantworten. In den Berichten über die Gründung der Royal Society[24]) liest man, daß diese Männer sich zusammenschlossen mit dem Versprechen, nicht über Religion und Politik zu debattieren. Das besagt nicht, daß diese Männer der Beschäftigung mit solchen Themen überdrüssig waren; vielmehr blieben sie alle als Geistliche und Politiker tätig mitten in allen Kämpfen des öffentlichen Lebens dieser bewegten Zeit. In Frankreich war es ja nicht anders; und doch waren alle diese Männer in der Mathematik keine „Dilettanten“. Welch „reiches Jahrhundert“! Man wird sich auch fragen, wie bei dieser Wanderung der Mathematik der Fortschritt zustande kam: durch systematische Ausarbeitung eines Gedankens, durch konsequente Weiterführung einer Anregung, durch geschickte Kombination des einheimischen „Alten“ mit dem wandernden „Neuen“, durch Renaissance eines alten Problems in einem neuen Geist, durch kühnes Experiment — oder durch schärfste Strenge — denn: es ist Mathematik, was hier wandert, und das Bedürfnis nach Strenge geht nie verloren. Descartes baut einen Cavalierischen Beweis zu einem exakten Archimedischen um, Barrow gibt einen strengen Existenzbeweis für das bestimmte Integral, Gregory führt den Konvergenzbeweis bei der Integration einer unendlichen Reihe,

[24]) Thomas Birch, History of the Royal Society to London. 1666 sq. Thomas Sprat, Hist. of the R. S. of London (1702). Zitiert bei Goethe, Mater. zur Gesch. d. Farbenl. 5. Abteilg. John Evelyn, Diary p. 199.

Wallis versucht eine Begründung des Zahlbegriffs — aber der Fortschritt kommt immer durch eine besondere Kühnheit des Denkens, wenn in intuitivem Vertrauen auf eine Art prästabilierte Harmonie sprunghafte, „unstrenge“ Schlüsse gewagt werden. Denn die Buchstabenrechnung, die Indivisibilien, das infinitesimale Dreieck, die „Interpolation“ — das ist alles gefährlich unexakt im Sinne unsrer heutigen Mathematik. Wir verlangen eine Axiomatik, wir geben eine gute Begründung des Integralbegriffs, wir wissen den Differentialkalkül richtig zu benützen, wir kennen die Bedeutung des Prinzips der analytischen Fortsetzung — „hier war der geniale Einfall, die guten Gründe strömten in Menge nach.“

Berichtigung.

In der Arbeit Schuster in Heft 2 S. 199 ist irrtümlich in der ersten Formelzeile eine andere Bezeichnungsweise gebraucht wie in der zweiten; es müßte etwa die erste heißen:

$$x^2 - hx - \frac{a}{b} = 0,$$

um alle Größen einheitlich zu benennen.